http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i2p165-193

Exploração de diversas Geometrias utilizando o GeoGebra

Exploration of various Geometries using GeoGebra

VALDENI SOLIANI FRANCO [1]

https://orcid.org/0000-0002-9202-4434

RESUMO

Este artigo apresenta o uso que fizemos do GeoGebra desde o dia em que a ele fomos apresentados. Como se observará, o maior uso foi no estudo das Geometrias, tanto a Euclidiana, como as não Euclidianas. Utilizamos o GeoGebra para conjecturarmos, conceituarmos, mostrarmos e demonstrarmos resultados relevantes das Geometrias. Aqui serão citados e comentados os trabalhos envolvendo as Geometrias Euclidianas e não Euclidianas que realizamos desde o ano de 2006 utilizando o GeoGebra. Para isso, dividiremos as seções em três diferentes maneiras para apresentá-los, a saber, na utilização de disciplinas da Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, nos minicursos, oficinas e palestras para professores da Rede Estadual de Ensino do Paraná e públicos diversos.

Palavras-chave: *Geometrias; GeoGebra no Ensino; GeoGebra como motivação.*

ABSTRACT

This article presents the use we have made of GeoGebra since the day we were introduced to it. As will be seen, the greatest use was the study of Geometries, both Euclidean and non-Euclidean. We use GeoGebra both to conjecture, conceptualize, show and demonstrate relevant results of Geometries. Here, works involving Euclidean and non-Euclidean Geometries that we have carried out since 2006 using GeoGebra will be cited and commented. For this, we will divide the sections into three different ways to present and study them, namely, in the use of disciplines from the Licentiate and Bachelor's Degree in Mathematics at Universidade Estadual de Maringá, in mini-courses, workshops and lectures for teachers of the State Education Network of Paraná. and in mini-courses, workshops and lectures for different audiences.

Keywords: *Geometry; GeoGebra in Teaching; GeoGebra as motivation*

Introdução

Meus trabalhos com *softwares* geométricos começaram em 2003. De lá para cá explorei esses recursos em aulas na graduação e pós-graduação, pesquisas, orientações de mestrado e doutorado, cursos de formação de professores, produção

[1] Professor aposentado da Universidade Estadual de Maringá (UEM) – vsfranco@uem.br

de livros e materiais didáticos. Foram trabalhos muito gratificantes em que tive a oportunidade de aprender e ensinar bastante.

Visando contemplar o que é esperado para a temática dessa edição especial, busquei escrever um texto cujo propósito é apresentar boa parte desses trabalhos. O leitor perceberá que serão relatados trabalhos envolvendo as Geometrias Euclidianas e não Euclidianas que realizamos desde o ano de 2006, utilizando o GeoGebra. O texto está divido em seções. Na primeira seção descrevo como comecei a utilizar *softwares* nas minhas aulas, nas pesquisas e o que motivou o uso do GeoGebra. Na segunda seção discorremos sobre a utilização do GeoGebra nas disciplinas da Licenciatura e Bacharelado em Matemática do Departamento de Matemática – DMA da Universidade Estadual de Maringá – UEM. Na terceira escrevo sobre o uso do GeoGebra nos minicursos, oficinas e palestras que fiz para diversos públicos no Brasil e em Portugal. Na quarta seção exponho a utilização envolvendo o GeoGebra nas minhas pesquisas e publicações. Na última faço as considerações finais.

1. O começo: Cabri-Géomètre, a mudança para o GeoGebra e a motivação para trabalhar com as diversas Geometrias

O primeiro *software* geométrico que explorei foi o Cabri-Gémètre no ano de 2003, em uma disciplina do DMA–UEM, denominada "Construções Geométricas", que continha em seu programa construções com régua e compasso. Utilizei o *software* para fazer as construções que envolviam os dois objetos. Importante destacar que naquele momento, apenas eu, como professor, utilizava o *software* Cabri, os alunos ainda utilizavam a régua e o compasso físicos.

A partir dali vários trabalhos foram executados com este *software* e em 2007, juntamente com dois professores do departamento de Matemática (João Roberto Gerônimo e Rui Marcos de Oliveira Barros) publicamos o livro: "Geometria Euclidiana Plana: um estudo com Cabri-Géomètre" (GERÔNIMO; FRANCO; BARROS, 2007). Este livro era constituído de várias tarefas que introduzia a Geometria Plana axiomaticamente.

No ano de 2006, um aluno (Lucas Maurício Ruan) do primeiro ano de graduação me procurou para mostrar um *software* que trabalhava a Geometria e a Álgebra: o GeoGebra. De imediato o *software* me interessou por dois motivos: a possibilidade de trabalhar concomitantemente a Geometria e a Álgebra, e principalmente, por ser um *software* livre. Isso contribuiria muito para os meus trabalhos com alunos e professores da Educação Básica e minhas pesquisas, pois em 2003, mudei minha área de pesquisa, saindo da Topologia para a Educação Matemática, ano que comecei a trabalhar no Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PCM da UEM.

É importante destacar o Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE[2] do Estado do Paraná, que contribuiu para que o GeoGebra fosse disponibilizado nos computadores das escolas públicas do estado. Quando ele começou, em 2007, três dos meus orientandos se interessaram em trabalhar com o GeoGebra. Isso me motivou a solicitar junto à Secretaria do Estado de Educação do Paraná, a inclusão do *software* nos computadores do estado. Esta solicitação não foi exclusiva de professores da região de Maringá, mas de várias regiões do Estado, e a solicitação foi atendida. Isso facilitou várias pesquisas relativas ao uso do *software* GeoGebra, conforme mostraremos em alguns relatos que faremos neste texto.

Como motivação para dirigirmos nossa pesquisa no estudo das Geometrias em geral, destacamos em primeiro lugar que a partir do ano de 2003, foi iniciado o processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica para a Rede Estadual de Ensino do Paraná, publicada no ano de 2008[3].

Ao ser convidado pelo Núcleo Regional de Educação de Maringá – NRE-Maringá para auxiliar em uma das disciplinas, recebi um documento do Departamento de Ensino Fundamental (DEF) da Secretaria Estadual de Educação, que trazia as Orientações Pedagógicas para as disciplinas da parte diversificada.

A disciplina para o qual fui convidado a auxiliar tinha como nome “Desenho Geométrico” e sua ementa era: “A geometria e a estética; matemática e arte; o desenho geométrico com forma de resolver problemas do cotidiano; as construções geométricas por meio de representações; percepção visual; raciocínio espacial; padrões geométricos; mosaicos; a geometria dos fractais; tangrans; a geometria euclidiana e não euclidiana, a geometria e a informática.”

As Geometrias não Euclidianas aparecem pela primeira vez em um documento oficial para o Ensino Fundamental, no Estado do Paraná. Todavia, o que chamou a atenção da coordenação de matemática do NRE-Maringá, alertada pelos professores do referido Núcleo, foi a geometria dos fractais, pois de imediato houve a preocupação dos professores com esta nova geometria que nunca haviam estudado e a maioria nem havia escutado falar deste conceito.

Chamo a atenção para o fato de que a Geometria não Euclidiana, em princípio, não foi o motivo para terem me convidado. De fato, queriam que eu falasse um pouco sobre os fractais. Assim, para aprofundar o assunto e realizar

[2] De acordo com a instrução nº 002/12, que pode ser acessado em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2020-03/instrucaotecnologica002pde.pdf, o PDE é uma politica de Formação Continuada da SEED – PR, destinada aos professores da Rede Estadual de Ensino, que proporciona subsídios teórico-metodológicos voltados ao desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas, objetivando o redimensionamento de sua prática pedagógica.

[3] Ver 1.1 em: http://www.referencialcurriculardoparana.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=11

pesquisa deste tema, elaborei um projeto de Iniciação Científica para uma aluna do segundo ano de Licenciatura em Matemática que continha os seguintes objetivos específicos:

- Conhecer os Fractais;
- Interagir com professores do Ensino Fundamental;
- Contribuir por meio da criação de atividades com o ensino da disciplina Desenho Geométrico proposta pelo Departamento de Ensino Fundamental do Estado do Paraná.

A partir daí, direcionei minhas pesquisas para este tema e, em 2006, com a primeira apresentação das Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná, tendo como um dos temas as Geometrias não Euclidianas, comecei a trabalhar com os Fractais, já incluído como uma das Geometrias que não é Euclidiana.

Quando utilizei pela primeira vez um *software* Geométrico, percebi a importância que isso teria se eu conseguisse utilizá-los nas disciplinas que ministrava no DMA-UEM. Na seção seguinte escrevo sobre algumas disciplinas em que utilizei o GeoGebra de diferentes maneiras e que foram fundamentais para a metodologia de ensino que escolhi para cada uma.

2. Atividades nas disciplinas de graduação envolvendo Geometrias

Descrevo nesta seção três disciplinas do DMA-UEM nas quais utilizei o GeoGebra para ministrá-las.

Começo com a disciplina “Construções Geométricas”, com carga horária de 68 horas semestrais, cuja ementa era “construções geométricas com régua e compasso, a geometria e a estética, e padrões geométricos”. Tratava-se de uma disciplina que era ofertada apenas para alunos de Licenciatura em Matemática. Para ministrar esta disciplina, a partir do ano de 2009, deixei de utilizar a régua e o compasso físico, começando a utilizar apenas o GeoGebra para as construções e demonstrações. Salientamos que a partir deste ano, os alunos também utilizavam apenas o *software* GeoGebra para as construções, e não mais os objetos físicos: régua e compasso. Importante observar que as construções geométricas com régua e compasso deveriam ser sempre justificadas por meio dos resultados da Geometria Euclidiana.

Destaco que, no início da disciplina, apresentava várias construções básicas como, por exemplo, maneiras de construir alguns ângulos utilizando apenas a régua e o compasso, como era exigido na disciplina, mas utilizando essas ferramentas do GeoGebra e sempre com as respectivas justificativas. Um resultado da Geometria Euclidiana que ajuda a resolver este problema afirma que: “Em uma circunferência, o ângulo inscrito mede metade do ângulo central correspondente". O link https://www.geogebra.org/m/rqwzrvrb mostra no GeoGebra, a construção de diversos ângulos que utiliza este resultado para a justificativa. Continuando o processo e utilizando soma de ângulos, obtêm-se vários outros não apresentados no link.

A partir das construções básicas propunha tarefas que deviam ser resolvidas pelos alunos durante as aulas. A figura 1 mostra um exemplo de tarefa que utilizava o resultado anterior.

Como você faria para calcular o raio da mesa que está representada na figura à esquerda utilizando apenas régua e compasso? Ou seja, na figura à direita, se quer obter o raio da circunferência maior que tem centro inacessível, utilizando régua e compasso.

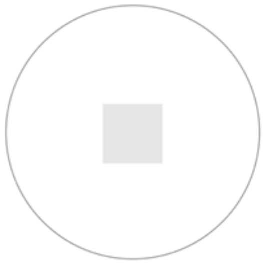


FIGURA 1: Tarefa proposta para alunos de construções Geométricas.
FONTE: Autor.

Feita a proposta, era dado um tempo para que os alunos em grupos pré-organizados tentassem resolver a tarefa, que neste caso era um problema[4].

Na parte da ementa "a geometria e a estética, e padrões geométricos" também exploramos o GeoGebra. Além desses itens da disciplina aproveitamos para trabalhar também a Geometria dos Fractais. Um exemplo de construção do fractal pentagonal pode ser visto na figura 2:

4 Os leitores ficam convidados a resolvê-lo e podem ver uma solução no link https://www.geogebra.org/m/sexee9gt. Alguns passos não aparecem na figura, vá em frente até o passo 33.

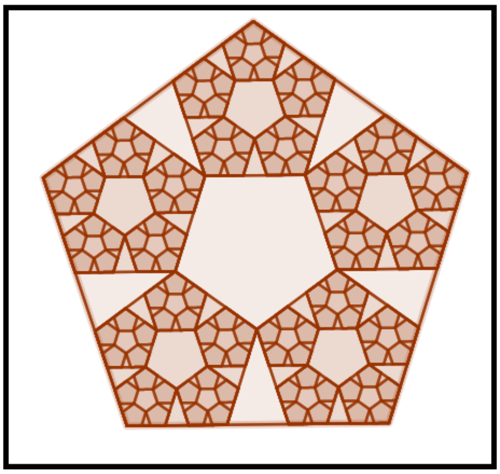


FIGURA 2: Fractal pentagonal com três iterações.
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/mqy4kkqg. Acesso em 19 ago de 2023.

A segunda disciplina que destaco aqui tem o nome de "Introdução à Geometria Não-Euclidiana" e sua ementa, em 2017, era: Geometria Neutra, Geometria Hiperbólica, Geometria na Superfície Esférica, Geometria Projetiva. Ela tinha carga horária de 68 horas semestrais.

A Geometria Neutra é uma geometria sem o quinto postulado de Euclides. Nesse item do programa, utilizei o GeoGebra apenas para apresentar algumas figuras para os alunos. Nos outros três itens do programa utilizei o GeoGebra fazendo interações com os alunos.

Uma das utilizações do GeoGebra na Geometria Hiperbólica foi para trabalhar os dois modelos de Poincaré e o modelo de Klein.

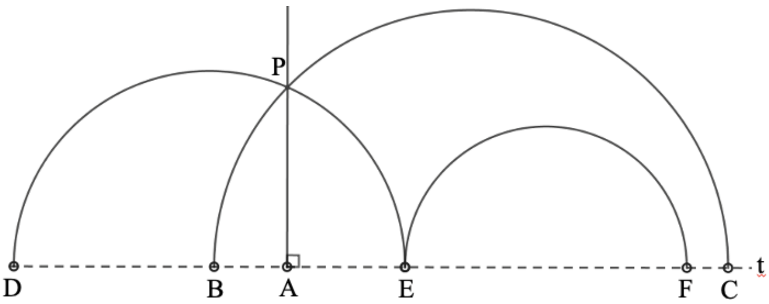


FIGURA 3: Um modelo de Poincaré
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/qx8z2gvw. Acesso em 19 ago de 2023.

Na figura 3, temos o modelo de Poincaré em que o plano é o semiplano determinado pela reta t, excluindo a origem do semiplano (reta t), os pontos são os pontos euclidianos deste semiplano e as retas são perpendiculares à t, juntamente com as semicircunferências com extremos em t. Nessa figura, temos as retas hiperbólicas AP, BC, DE e EF. Observemos que a reta EF é paralela às retas AP, BC e DE, lembrando que o ponto E não pertence as retas DE e EF.

Na figura 4, temos um segundo modelo de Poincaré. Nesse modelo o plano, é, por definição, o interior de um círculo euclidiano. Os pontos desse modelo são pontos euclidianos que estão no plano de Poincaré (por exemplo, na figura os pontos O, A, B, C, D, E, F, I e P). A circunferência (que por definição não faz parte do plano) é chamada de horizonte. As retas são os diâmetros abertos (na figura 4, AO) e arcos de circunferências abertos ortogonais ao horizonte (na figura 4, BP, CP, DP e EF), denominados h-reta. Aproveitamos a figura para observar que as retas CP e BP são paralelas a reta AO e EF, porém a reta DP é paralela a reta EF, mas não é paralela a reta AO, que tem como interseção, o ponto I.

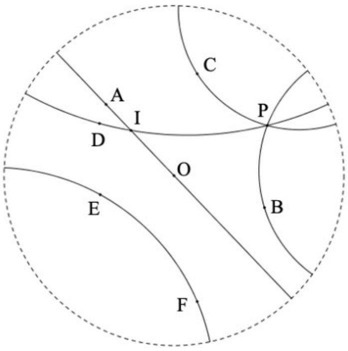


FIGURA 4: Um segundo Modelo de Poincaré
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/s4a8eafg. Acesso em 19 ago de 2023.

Por fim, figura 5, temos o modelo de Klein. Nesse, assim como no modelo da figura 4, o plano, é, por definição, o interior de um círculo euclidiano. Os pontos desse modelo são pontos euclidianos que estão no plano de Klein (por exemplo, na figura os pontos O, A, B, C, D, E, F, I e P. As retas são cordas euclidianas, excluindo seus extremos (na figura 4, AO, BP, CP, DP e EF). Aproveitamos a figura 4 para observar que as retas CP e BP são paralelas a reta AO e EF, porém a reta DP é paralela a reta EF, mas não é paralela a reta AO, que tem como interseção, o ponto I.

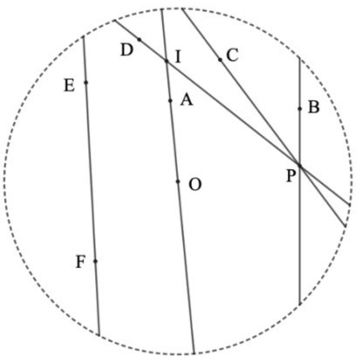


FIGURA 5: Modelo de Klein
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/fqg5hryg. Acesso em 19 ago de 2023.

Era muito interessante ver a reação dos estudantes quando mostrava que aquilo que eles conheciam como semirretas, semicircunferências, arcos de circunferências ou segmentos de retas na Geometria Euclidiana, agora estava chamando de retas. É claro que a mobilidade dos pontos no GeoGebra facilitava muito a compreensão de cada um desses modelos e da possibilidade da existência de Geometrias não Euclidianas, pois os estudantes podiam ver que dada uma reta r e um ponto P fora dela, existiam uma infinidade de retas paralelas a r, passando pelo ponto P.

Para explorar a Geometria da Superfície Esférica, utilizei o GeoGebra 3D em diversos resultados desta Geometria. Um dos resultados que, em geral, chama a atenção dos estudantes é o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo, nesta geometria, é maior do que 180º. Por meio de construções como da figura 6 demonstra-se que a área do triângulo ABC é igual à:

$$Área(\Delta ABC) = R^2 (A + B + C - \pi),$$

em que A, B e C são as medidas dos ângulos internos em radianos.

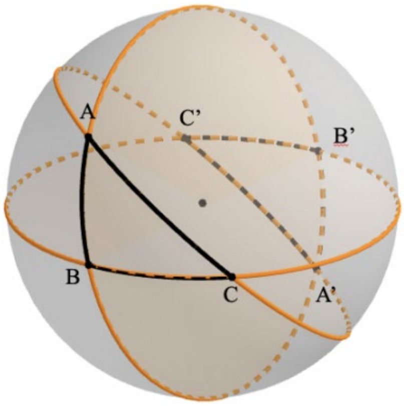


FIGURA 6: Auxiliar para demonstração da medida da área de um triângulo na Superfície Esférica.
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/sat4vkrz. Acesso em 19 ago de 2023.

Na figura 6, estou denominando tanto os vértices como as medidas dos ângulos dos triângulos, pelo mesmo nome. O triângulo A’B’C’ auxilia na demonstração desse resultado que será omitido, pois não é o objetivo deste texto. Porém, uma dica que ajuda a demonstração é lembrar que: A superfície esférica tem área $4\pi R^2$; a área de regiões disjuntas é igual a soma das suas áreas e as áreas de regiões congruentes são iguais.

Observe que demonstrado este resultado, temos que:

$$\frac{A(\Delta ABC)}{R^2} = (A + B + C - \pi)$$

Como o número à direita da equação é positivo, então a soma dos ângulos internos do triângulo esférico deve ser maior que π radianos, ou seja, maior que 180º.

Na Geometria Projetiva, o GeoGebra também contribuiu no processo de demonstrações dos teoremas necessários para trabalhar esta geometria. Para exemplificar, consideremos a figura 7 que representa uma construção no GeoGebra 2D, contendo as hipóteses e a tese do Teorema de Desargues, a saber:

Teorema de Desargues*: Dados duas figuras de três vértices ABC e A'B'C' que se encontram em um plano de tal modo que as retas AA', BB' e CC', que unem seus vértices correspondentes, convergem em um ponto O. Então os pontos de interseção dos lados correspondentes destas figuras de três vértices situam-se em uma reta.*

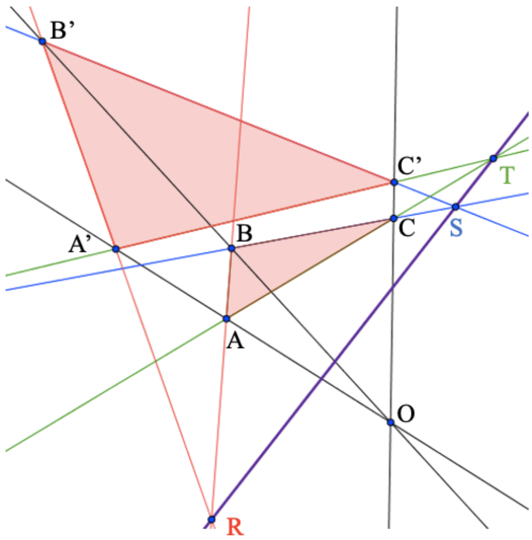


FIGURA 7: Construção para auxiliar a visualização do Teorema de Desargues
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/cdccnymj. Acesso em 19 ago de 2023.

Uma das contribuições da utilização do GeoGebra é que ao manipular os vértices pode-se ver que os três pontos R, S e T continuam colineares, independente das posições dos vértices.

Também usei o GeoGebra na disciplina de "Geometria Euclidiana", cuja ementa em 2015 era "A Geometria Euclidiana como modelo de sistematização da Matemática: origem e história". Ela tinha carga horária de 102 horas semestrais.

Neste texto abordei a disciplina "Construções Geométricas" antes da Geometria Euclidiana, pois optei em apresentar em ordem cronológica de uso do GeoGebra por mim. Todavia, a Geometria Euclidiana era a base para disciplina Construções Geométricas, portanto no DMA a Geometria Euclidiana era ministrada antes da Construções Geométricas. Em Gerônimo e Franco (2010) e Gerônimo, Barros e Franco (2010), o leitor pode encontrar os textos bases que utilizei nessa disciplina.

A disciplina Geometria Euclidiana foi ministrada inteiramente por meio de tarefas, que era realizada individualmente, em duplas ou trios, a critério dos alunos, todas no GeoGebra. Todo conteúdo da disciplina era disponibilizado, via plataforma de EaD, que a UEM fornecia para os professores interessados.

As tarefas tinham objetivos distintos, algumas eram para construir um conceito, outras para formulação de conjecturas que levavam a proposições ou teoremas da Geometria. Outras tinham o objetivo de que os alunos diferenciassem os objetos matemáticos de suas representações. Tinha ainda tarefas que mostravam para os alunos a importância de se conhecer os teoremas da Geometria, a fim de justificar a diferença entre o que viam na tela do computador, do que de fato ocorria matematicamente.

A seguir, apresento três modelos de tarefas, para que o leitor possa compreender a ideia.

Leia atentamente a definição a seguir.

Definição 4.5: Seja ABC um triângulo qualquer e D um ponto na reta BC. O segmento AD, denomina-se:

- **mediana do triângulo relativo ao lado BC** se D é o ponto médio de BC.
- **altura do triângulo relativo ao lado BC**, se a reta AD é perpendicular a reta BC.

Os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são denominados **opostos** aos lados BC, AC e AB, respectivamente.

Construa um triângulo isósceles ABC, com base AB.

Encontre a mediana de ABC em relação a sua base.

Questões:

1. Calcule as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{B}A$. O que você observa? Escreva uma conjectura em relação a isso. Tente demonstrar essa conjectura.
2. Calcule agora a medida de ambos os ângulos que a mediana faz com a base. Qual é a conclusão que você chega?
3. A mediana dividiu o ângulo $A\hat{C}B$ em dois ângulos. Calcule a medida desses dois ângulos. Qual é a conclusão que você chega?
4. Encontre a mediatriz do lado AB. Qual é a conclusão que você chega?
5. Faça uma construção semelhante utilizando um triângulo escaleno DEF, ou seja,

encontre a mediana, por exemplo, em relação ao lado DE. Faça as construções solicitadas nas questões 1, 2 e 3 anteriores. As conclusões foram as mesmas?

6. Agora faça uma conjectura que represente o que foi observado em 1, 2, 3 e 4. Tente demonstrar essa conjectura.

Quadro 1. 1º modelo de tarefa com propósito de explorar a Demonstração de teorema

Essa tarefa tinha, implicitamente, o objetivo principal de enunciar o teorema:

Em um triângulo isósceles, a mediana relativa a uma base é também a altura relativa à base e está sobre a bissetriz do ângulo oposto a essa base.

No quadro 2, apresento um exemplo de tarefa cujo objetivo era verificar se o aluno conseguia compreender as definições descritas e reproduzir uma representação delas no GeoGebra. Além disso, a tarefa aproveita para apresentar um importante resultado da Geometria Euclidiana Plana, a saber,

O ângulo inscrito num círculo tem como medida a metade do ângulo central correspondente ao ângulo inscrito dado.

Definição 8.11: Um **ângulo central** de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Construção 1: Represente no GeoGebra um ângulo central e envie para o professor.

Definição 8.12: Seja C uma circunferência de centro O e sejam A e B, pontos em C. Tracemos a reta que passa por estes dois pontos. Ela separa o plano em dois semiplanos. Cada um destes semiplanos contém uma parte da circunferência que são denominados **arcos determinados pelos pontos A e B,** que denotaremos por $\widehat{AB}$. Quando A e B são extremidades de um diâmetro, estes arcos são denominados **semicircunferências**. Quando a corda AB não é um diâmetro, distinguimos os dois arcos determinados por A e B, do seguinte modo: o arco que fica no semiplano determinado pela reta AB, contrário daquele que se encontra o centro O da circunferência é chamado **arco menor** e o outro arco, ou seja, aquele que se localiza no mesmo semiplano que O, chamaremos de **arco maior**.

Construção 2: Represente no GeoGebra os conceitos dados na definição 8.12, indicando-os por meio de textos explicativos. Envie o arquivo para o professor.

Definição 8.13: A **medida em graus do arco menor** $\widehat{AB}$, denotada por m($\widehat{AB}$), é a medida em graus do ângulo central AÔB.

Construção 3: Represente no GeoGebra um arco menor $\widehat{AB}$ e calcule a sua medida em graus. Envie o arquivo para o professor.

Como consequência da definição 8.13, temos que se AB é um diâmetro, a medida de $\widehat{AB}$ é 180º.

Definição 8.14: Um ângulo se denomina **inscrito** num círculo determinado por uma circunferência C, de centro O, se seu vértice V está em C e seus lados interceptam C em dois pontos A e B distintos de V. Os pontos A e B determinam dois arcos. O arco que não contiver o vértice V é chamado **arco correspondente ao ângulo inscrito dado**. Diremos também que o ângulo **subtende o arco**

Construção 4: Represente no GeoGebra os conceitos dados na definição 8.14, indicando-os por meio de textos explicativos. Envie o arquivo para o professor.

Represente no GeoGebra uma circunferência qualquer, com centro O.

Considere um arco menor $\widehat{AB}$.

Utilize a definição 8.13 e calcule a medida em graus do ângulo central $A\hat{O}B$.

Escolha um ponto V qualquer sobre o arco maior $\widehat{AB}$.

Construa o ângulo inscrito de vértice V que determina o arco menor $\widehat{AB}$.

Calcule a medida do ângulo $A\hat{V}B$.

Questões:

1. Observe as medidas dos dois ângulos calculados acima. Você vê alguma relação entre eles? Modifique a posição do ponto V. A relação se altera? Isso não é lindo!!! Podem chorar se quiserem.
2. Faça uma conjectura que apresenta o resultado observado.
3. Tente demonstrar sua conjectura.

Quadro 2. 2º modelo de tarefa

Como terceiro exemplo, apresento uma tarefa cujo objetivo era fazer o aluno perceber que o que ele vê na tela do computador pode levá-lo a enganos. O intuito também era mostrar que é necessário usar estratégias formais para verificar se aquela figura representa de fato o objeto ou propriedades que ele está vendo.

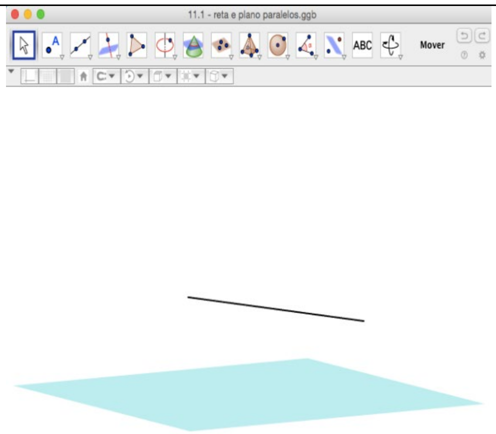
Observe este arquivo do GeoGebra e responda: 1. A reta e o plano da figura são paralelos? 2. Que procedimento você adotaria para ter certeza da sua resposta? 3. Verifique sua resposta. 4. Conjecture um resultado que equivale ao seu procedimento. 5. Tente demonstrar essa conjectura.	

FIGURA 8: Os olhos podem enganar
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/m/qqggcygh. Acesso em 19 ago de 2023.

O arquivo na figura 8 era enviado para os alunos para que eles observassem e respondessem as questões apresentadas na tarefa.

A ideia era que a tarefa oferecesse condições para o aluno perceber uma importante propriedade: *um plano Π e uma reta r não contida em Π são paralelos se, e somente se, existe uma reta s paralela a r e contida em Π.*

Conhecendo este resultado é fácil experimentar usando diferentes ferramentas no GeoGebra para verificar se a reta representada na figura é ou não paralela ao plano. Sugiro que o leitor explore a atividade para descobrir a resposta correta.

As motivações para a próxima seção são muitas. A primeira, sem dúvida, foi a solicitação de ajuda feita pelo NRE-Maringá nas questões dos fractais citados na seção 1; também o meu envolvimento com as diversas Geometrias; a minha mudança de área de pesquisa; além do contato com professores da Educação Básica. Tudo isso me fez pensar na importância que seria poder compartilhar o que eu conhecia com os diversos públicos da Educação Básica. O GeoGebra me auxiliou bastante para poder aprender e ensinar com os alunos e professores da Educação Básica, professores PDE, alunos de graduação, mestrado, doutorado, bem como com professores e pesquisadores do Ensino Superior. Por isso na próxima seção tratamos dos diversos trabalhos apresentados em diferentes formas de eventos.

3. Minicursos, Oficinas e Palestras, envolvendo o GeoGebra

O objetivo desta seção é apresentar ao leitor alguns trabalhos que desenvolvi juntamente com colaboradores, utilizando o *software* GeoGebra e os correspondentes aplicativos, claro, quando foram disponibilizados.

Como falei anteriormente, o PDE teve uma importância muito grande para que o GeoGebra fosse disseminado entre os professores da Rede Estadual de Ensino do Paraná. Assim, falarei aqui dos cursos trabalhados nas turmas do PDE de 2007 a 2014, com exceção do ano de 2011.

Do ano de 2007 até 2010 ofereci um curso para os professores denominado "Geometrias", com uma carga horária de 64 horas. Esse curso trabalhava a Geometria Euclidiana Plana e Espacial e 8 horas/aula reservada para introduzir ideias de Geometrias que não são Euclidianas. Nas partes da Geometria Plana e das Geometrias não Euclidianas utilizamos o GeoGebra. Naquela época não existia ainda o GeoGebra 3D. Nos anos de 2012, 2013 e 2014, ofereci um curso de 32 horas denominado "Investigações Matemáticas em sala de aula". Esse curso apresentava o conceito de "aulas investigativas" e propunha várias tarefas envolvendo o GeoGebra para se trabalhar esse modo de aula.

Com a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática[5], publicado em 2008, começamos[6] uma parceria entre o NRE-Maringá e a UEM, oferendo diversos minicursos e oficinas. Também ministrei algumas palestras para professores da Rede Estadual de Ensino da região de Maringá-PR.

Assim, o primeiro curso que destaco, oferecido em 2008, foi "O GeoGebra e modelos de Geometria Hiperbólica". Na verdade, foi uma oficina, cuja programação era: Apresentação do *software* GeoGebra; Introdução a modelos de Geometria Hiperbólica no plano e Atividades envolvendo o modelo de Poincaré. Foram oferecidas 4 turmas desta oficina, que tinha 16 horas/aula. Foi ministrado por mim e por uma aluna (Karla Aparecida Lovis) de mestrado.

Em 2008, ofereci para duas turmas outro curso na cidade de Maringá, com a denominação "Introdução às Geometrias Não-Euclidianas", cuja programação envolvia a Topologia, a Geometria Projetiva, a Geometria Hiperbólica, a Geometria da Superfície Esférica e a Geometria dos Fractais, com 30 horas/aula. O GeoGebra foi utilizado em parte da exposição das Geometrias Projetiva, Hiperbólica e dos Fractais. Neste curso, as aulas eram expositivas e não interativas. Tivemos uma aluna de mestrado, Talita Secorum dos Santos, que fez sua dissertação baseada neste minicurso.

[5] Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf
[6] Quando os cursos eram oferecidos com colaboradores, utilizaremos a primeira pessoa do plural.

Este mesmo minicurso foi oferecido, ainda no ano de 2008 para professores da Rede Estadual de Ensino, na cidade de Jandaia do Sul-PR. No ano de 2010 o minicurso foi oferecido na cidade de Cianorte-PR.

Também trabalhei esse minicurso com as coordenadoras da área de Matemática da Secretaria de Estado da Educação – SEED, em Curitiba-PR, que na época contava com 6 professoras. Isso ocorreu no final do ano de 2008 e início de 2009. Essas coordenadoras difundiram as Geometrias estudadas em diversos Núcleos Regionais do Estado do Paraná. Assim, o GeoGebra estava sendo divulgado e difundido em várias cidades do Estado do Paraná.

Ainda em 2008, fizemos minicursos e palestras em eventos que envolviam o GeoGebra, dentre os quais destaco, o minicurso "Geometria Projetiva no Ensino Médio", no IX Encontro Paulista de Educação Matemática, ministrado por mim e pela aluna Raquel Polizeli, que seria minha aluna de doutorado no ano de 2016.

Ministrei também em 2008 um minicurso na IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, que ocorreu em Maringá, denominado "Cônicas, Geometria Projetiva e o GeoGebra".

Por fim, ainda em 2008, ministrei o minicurso "Introdução às Geometrias não Euclidianas" na 2ª Semana Integrada de Cursos, na UNIMEO, de Assis Chateaubriand.

Em 2010, fizemos uma conferência, juntamente com Karla Lovis, no simpósio de "Educación y nuevas tecnologías en el marco del congreso Ciencias, tecnologías y culturas. Diálogo entre las disciplinas del conocimiento. Mirando al futuro de América Latina y el Caribe", que se realizou na a Universidad de Santiago de Chile, denominada "A utilização de *softwares* de Matemática: uma experiência com professores de Matemática.

Também em 2010, fiz uma palestra no II Congresso de Matemática e suas aplicações em Curitiba, denominada "Compreendendo a diferença entre: a Geometria Euclidiana, as Geometrias Não-Euclidianas e as não Euclidianas". Para esclarecermos que, em geral, as geometrias Não-Euclidianas, com hífen, são a Hiperbólica e a Esférica; sem hífen são as outras, por exemplo, a Geometria Projetiva, a Topologia, a Geometria dos Fractais, a Geometria do motorista de taxi entre tantas outras infinitas possibilidades de geometrias que se pode construir.

Em 2011, fizemos uma conferência também com Karla Lovis na, XIII Conferência Internacional de Educação Matemática, em Recife, denominada "Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la" cujo artigo será citado na seção 4.

Em 2012, ministrei o minicurso com 30 horas aulas, denominado "Construindo as Funções Logarítmicas e Exponenciais por meio do GeoGebra" para os professores vinculados ao NRE-Maringá. Foi um curso bastante interativo em que os professores trabalhavam e respondiam os questionamentos feitos durante as apresentações e discussões. O curso tinha o objetivo de apresentar aos participantes uma maneira diferente da que os livros didáticos brasileiros introduzem os conceitos de Funções Logarítmicas e Exponencial. Para isso, foi utilizado o GeoGebra para definir a função logarítmica e suas principais propriedades. Aproveitou-se para definir também a função exponencial. Apesar de parecer um curso de funções, a maneira que foi desenvolvido envolvia muito a Geometria Plana e Analítica, por isso está citado neste texto.

Também em 2012, na conferência Latino-americana de GeoGebra, que ocorreu no Uruguai, apresentamos quatro minicursos e duas comunicações. Os minicursos foram: "Utilizando o GeoGebra para construção de modelos planos para a Geometria Hiperbólica", ministrado por mim, mas na elaboração, tivemos a colaboração da orientanda de mestrado e doutorado, Karla Aparecida Lovis; "Construindo as funções logarítmicas e exponenciais por meio do GeoGebra ministrado por mim, e que teve colaboração na elaboração da minha orientanda de mestrado e doutorado, Evelyn Rosana Cardoso; Construindo o logotipo da Olimpíada brasileira de Matemática no GeoGebra, ministrado pela orientanda de mestrado e doutorado Mariana Moran Barroso, com minha colaboração na elaboração e "Utilizando o GeoGebra para construção e exploração de um modelo plano para a Geometria elíptica, ministrado por mim, e que teve a colaboração na elaboração de minha orientanda de Iniciação Científica, Luana Paula Goulart de Menezes.

O título da primeira comunicação foi "Geometria Euclidiana Plana e *software* GeoGebra como ferramentas para o estudo de regiões poligonais e áreas", apresentada pela Mariana Moran Barroso com a colaboração na elaboração da professora PDE Sirlene Passamani Sandri e a minha. O título da segunda comunicação foi "O usos do *software* GeoGebra no trabalho com funções logarítmicas", apresentado pela Mariana Moran Barroso, com minha colaboração na elaboração.

Para além dos nomes mencionados anteriormente, todos os minicursos e comunicações podem ser melhor compreendidos quando se lê as atas do encontro que serão indicadas na próxima seção.

Em 2013, eu e uma orientanda de Doutorado, Mariana Moran Barroso, trabalhamos um minicurso intitulado: "As Geometrias por meio de diferentes Representações". Esse minicurso trabalhava alguns conteúdos utilizando três tipos de representações para um mesmo conteúdo da geometria, a saber, expressões gráficas, materiais manipuláveis e o GeoGebra. Esse minicurso gerou uma tese: "As apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros figurais", (BARROSO, 2015) e dois artigos que serão citados na seção seguinte.

Uma oficina ministrada, também em 2013, foi "Trabalhando com Fractais na Educação Básica com diferentes abordagens". Esse minicurso foi ministrado na cidade de Cianorte por mim e pela aluna de mestrado da matemática do DMA, Vanderlea Mendes de Lima para professores do NRE-CiaNorte. Nesse minicurso foram apresentados os conceitos básicos dos Fractais e o GeoGebra. A partir disso, trabalhamos as possibilidades de ensino dos Fractais por meio de Expressões Gráficas, Materiais Manipuláveis e o GeoGebra. Alguns resultados desse minicurso foi apresentado no XII EPREM e será citado na seção seguinte.

Como exemplo de uma das tarefas propostas para os professores participantes da oficina foi: Construir um Fractal Tetra círculo. Para obter o fractal Tetra Círculo constrói-se inicialmente uma circunferência na qual marcamos quatro pontos equidistantes que a dividem em quatro arcos congruentes. Com centros nestes quatro pontos construímos circunferências com raio igual à metade do raio da circunferência inicial. Repete-se isso indefinidamente. No link https://www.geogebra.org/m/kufphxdm temos duas iterações.

Também em 2013 foi trabalhado com os professores do NRE-Maringá o curso "Desenho Geométrico Plano: técnicas historicamente elaboradas e potencializadas em ambientes informatizados", ministrado por um orientando do PDE, o João Carlos Larini. Este curso em formato de oficina teve como objetivos: apresentar o *software* GeoGebra para professores da Educação Básica; mostrar aos professores, conceitos geométricos por meio do software GeoGebra e apresentar uma maneira lúdica de ensinar conceitos da Geometria Euclidiana. Alguns resultados desse curso serão indicados na seção seguinte.

Ainda em 2013, ministramos um minicurso para professores PDE que faziam seus cursos na Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – Campus de Paranavaí, denominado "O uso das artes nas aulas de Matemática". Este minicurso foi replicado em vários momentos, conforme será abordado e melhor explicado na seção seguinte.

Continuando em 2013, no Congresso Latino-americano GeoGebra-Argentina, que teve a participação do criador do GeoGebra, Markus Hohenwarter, apresentamos uma palestra, denominada: "Análise da Geometria de algumas obras de arte, utilizando o GeoGebra". Esta é uma das apresentações que trabalha a interdisciplinaridade com a arte. Esta mesma palestra foi apresentada em 2014 na Semana Acadêmica das Licenciaturas do Instituto Federal de Concórdia-PR e na

XX Semana da Licenciatura Plena em Ciências/IV Semana da Física-Campus Regional de Goioerê-PR.

Também em 2013, participamos do II Workshop de novas tecnologias, na Universidade Federal do Paraná – UFPR, onde apresentamos uma conferência denominada "Utilizando *softwares* para construção de modelos planos para a Geometria Hiperbólica e modelos para a Geometria Elíptica".

Ainda em 2013, participamos do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, que ocorreu na cidade de Curitiba, e neste encontro apresentamos uma palestra denominada "As Geometrias não Euclidianas na Arte e na Matemática". Esta mesma palestra foi apresentada em 2017 no XIV EPREM, que foi realizado na cidade de Cascavel-PR, com pequenas alterações e atualizações.

Outra palestra que fizemos em 2013 foi no III Encontro sul-mato-grossense de Matemática, em Três Lagoas-MS, denominada "O uso das Artes nas aulas de Matemática". Como em todas as palestras com o tema Arte, exploramos o GeoGebra ao trabalhar com o conceito de Perspectiva de acordo com a Geometria Projetiva, nos Fractais, na Geometria Hiperbólica (em geral, utilizando as obras de Escher) e na Geometria Elíptica. Esta mesma palestra foi apresentada na XVII Semana da Matemática da Unicentro em Guarapuava-PR, neste mesmo ano. E no ano de 2018, na XXXII Semana Acadêmica da Universidade Estadual do Oeste Paraná – UNIOESTE.

Em 2014, um orientando PDE, Fábio Aparecido Barbosa, trabalhou uma oficina para professores da Rede Estadual de Ensino do Paraná, cujo nome era "Algumas metodologias para uso das tecnologias móveis em sala de aula". Neste minicurso, além de estimular o uso de alguns aplicativos e da internet em sala de aula, apresentou possibilidades de trabalhar aulas investigativas, por meio do GeoGebra nos *smartphones* ou *tablets* Um dos professores participantes fez o seguinte relato de uma aplicação para alunos do 9º ano:

> Foi feito um levantamento prévio e concluímos que todos os alunos (30), possuíam tablet ou smartphone. Na sexta-feira, pedi que baixassem o software GeoGebra no tablet ou no celular em casa, no final de semana, pois iriamos usar na terça-feira (todos os alunos sabem baixar aplicativo). Na segunda-feira, quem tinha tablet, conseguiu baixar o software, mas no celular não foi possível, pois aparecia uma mensagem de incompatibilidade. Então, combinamos que, no dia seguinte, iriamos no laboratório de informática e quem não conseguiu baixar iria usar o computador. 20% dos alunos possuem tablet. (BARBOSA; FRANCO, 2014, p.11).

Observa-se que em 2014 ainda existia dificuldades para utilizar o aplicativo GeoGebra no smartphone.

Ainda em 2014, ministrei um minicurso para professores da região de Évora-Portugal, denominado "Geometria Projetiva no Ensino Secundário".

No ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática-Portugal) de 2015, em Évora-Portugal, como parte do XXVI SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática-Portugal), fiz uma oficina para os professores participantes do evento, denominada "Explorando a Geometria no Espaço, com o GeoGebra 3D".

Neste mesmo ano, no XIII EPREM, ministrei um minicurso denominado "Utilizando o GeoGebra 3D para realização de tarefas".

Em 2015, no III Dia de GeoGebra Iberoamericano, que ocorreu na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-São Paulo, ministrei um minicurso denominado "Tarefas para auxiliar a construção da Geometria Espacial Axiomática". Este curso foi ministrado utilizando o GeoGebra 3D.

Trabalhamos também em 2015, no PACTO do Ensino Médio[7], ministrando um minicurso que estava no caderno V[8](Matemática), utilizando o GeoGebra 2D, mas principalmente o 3D para o tópico "Os tipos de pensamento matemático e sua relação com o fazer escolar". Discutimos alguns resultados da Geometria Plana, sem fazer demonstrações formais, mas mostrando-os no GeoGebra 2D. Trabalhamos da mesma forma a Geometria Espacial, mas com o GeoGebra 3D.

Em 2016 fiz uma palestra para professores do NRE-Maringá, que denominamos "Estupefação Matemática: uma iniciação ao prazer". O objetivo desta palestra era mostrar que a estupefação[9] é o início da educação para o sensível e o estético, para a intuição e imaginação. Assim, ela fornece o estímulo necessário para compreensão dos elementos da matemática, sem impor ou inculcar.

Neste mesmo ano a palestra "Estupefação Matemática: uma iniciação ao prazer" foi também proferida na abertura da XXI Semana da Licenciatura Plena em Ciências/V Semana da Física, Campus Regional de Goiorê-UEM, na XXVII Semana da Matemática da UEM, na XI Semana Acadêmica de Matemática/XIV

[7] Programa de formação continuada no contexto do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio que foi constituído principalmente pela articulação de ações existentes do MEC, Universidades Públicas e Secretarias de Educação estaduais, e de novas proposições de ações que passam a constituir-se num conjunto orgânico e definidor da política para o Ensino Médio brasileiro. Pode ser visto em: https://pactoensinomedio.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=5

[8] acesso em: https://pactoensinomedio.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=50:etapa-ii-caderno-v&catid=13&Itemid=117

[9] O sentido que demos a esta palavra na palestra é um dos sinônimos que está, por exemplo, no Michaelis, "Sentimento de grande espanto diante de algo inesperado; assombro, obstupefação, pasmo.

Jornada Científica de Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG. Em 2017, foi a palestra de abertura do XIII Encontro Sul-Matogrossense de Educação Matemática – XIII ESEM, que ocorreu em Ponta Porã/MS. No ano de 2018 foi apresentada na XXXII Semana Acadêmica da Universidade Estadual do Oeste Paraná – UNIOESTE.

Pelo fato desta palestra ter sido replicada em vários eventos, mostrarei alguns exemplos que foram apresentados e que utilizaram o GeoGebra.

Perguntas que foram feitas durante a palestra:

1. Quem tem mais pontos uma circunferência ou uma reta? Resposta em: https://www.geogebra.org/m/z3tvffbt (movimente o controle deslizante e conclua).
2. Uma projeção cartográfica que os geógrafos utilizam é chamada Projeção Azimutal. No link https://www.geogebra.org/m/wywenbzg movimente os pontos azuis e responda: Será que o tamanho dos países do Hemisfério sul nos mapas cartográficos tem tamanhos iguais aos dos países do Hemisfério norte?
3. Nos links a seguir a ideia é responder a seguinte pergunta: Será que a visão pode nos enganar?
   - https://www.geogebra.org/m/eqfbxtqn. Movimente a figura e comece a responder.
   - https://www.geogebra.org/m/hqxv2tpb. É possível movimentar o primeiro Chaves sobre os outros. Experimente.
   - https://www.geogebra.org/m/s3puz6qm. Você vê algum polígono? Ele está desenhado?
4. Será que Escher utilizou o que chamamos de modelo 2 de Poincaré da geometria hiperbólica para fazer sua arte? https://www.geogebra.org/m/g6krpr8r. Primeiro clique em "fig 1" para aparecer a figura de Escher. Em seguida vá com as setas até aparecer a circunferência que limita o plano do modelo. Deixe o modelo exatamente no plano de Poincaré. Agora continue nas setas para aparecerem as retas hiperbólicas. E aí, qual a resposta? E no caso apresentado no link https://www.geogebra.org/m/ap4emyn5 ?
5. Será que todos os arcos de obras arquitetônica são cônicas?
   Os arcos da igreja de São Francisco de Assis, em Belo Horizonte, do arquiteto Oscar Niemayer são cônicas? Decida movimentando os pontos.
   https://www.geogebra.org/m/accybfpk.
   E do Palácio do Alvorada em Brasília? https://www.geogebra.org/m/whpgwxjr.

A palestra "Estupefação Matemática: uma iniciação ao prazer" nos motivou a desenvolver outra cujo título é "Maravilhas e Surpresas do infinito". Trata-se de um recorte da palestra anterior, focando no conteúdo que tratava do infinito. Ela foi apresentada em 2016 no VI Ciclo de Palestras: Perspectivas Matemáticas – VI CIPEM, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campo Mourão-PR.

Proferi uma palestra na II Jornada de Estudos em Matemática-JEM[10], na Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará – UNIFEESPA, Marabá-PA, no ano de 2016. O título da palestra foi “Influência de Mídias Informáticas no Ensino e na Aprendizagem da Matemática”. Nela fizemos um apanhado geral de várias apresentações para professores dos NREs do Paraná e, portanto, muito conteúdo envolvendo o GeoGebra.

Ainda no ano de 2016, participei do I Congresso Brasileiro do GeoGebra “GeoGebra: múltiplos olhares para o ensino e a aprendizagem de conceitos” que ocorreu em Natal-Rio Grande do Norte. Neste congresso ministrei duas oficinas, um minicurso e apresentei uma palestra. Os minicursos foram: “Construindo três modelos planos para a Geometria Hiperbólica e Isomorfismos entre eles, utilizando o GeoGebra 2D e 3D” e “Utilizando o GeoGebra na resolução de tarefas matemáticas para construção da Geometria Euclidiana Axiomática”.

Destaco que o primeiro minicurso diferencia dos minicursos já citados que trabalhavam os modelos da Geometria Hiperbólica, pois com o uso do GeoGebra 3D, foi possível construir de uma maneira bem interessante, os isomorfismos entre eles, já que a demonstração formal era bastante trabalhosa e o GeoGebra ajudava a mostrar uma representação visual que de fato o isomorfismo existia. Já o segundo minicurso, apresentei as tarefas que citamos na seção 2, quando descrevemos algumas tarefas da disciplina “Geometria Euclidiana”. O título da oficina foi “Arte, GeoGebra e Geometria: possibilidades de uso no ensino”. Tratava-se de um recorte de palestras que fizemos sobre o tema Arte. Finalmente a palestra denominada “O uso do GeoGebra na resolução de tarefas de Geometria Euclidiana; um estudo com licenciandos em matemática” em que apresentei alguns resultados da conclusão da tese de Zanella que será referenciada na próxima seção.

Em 2017, apresentei uma palestra para coordenadores de matemática dos Núcleos Regionais de Educação do Paraná, no “Simpósio Ensino Médio e o mundo do trabalho”, em Foz do Iguaçu-PR, ofertada pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná. A palestra foi denominada “Dimensões da formação humana: o trabalho, a ciência, a cultura, as tecnologias e a Área da Matemática”. Esta palestra foi replicada, no mesmo ano no II Ciclo de palestras – NRE/UEM, em Maringá, mas com o nome de “O Trivium, o Quadrivium e a Matemática nos dias atuais”, assim como no simpósio em trechos da palestra utilizamos o GeoGebra para exemplificar possibilidades de tarefas e resoluções de exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas investigativas.

[10] https://jem.unifesspa.edu.br/index.php/programacao/261-programacao-ii-jem-2016

Fiz uma palestra no PCM-UEM, em 2017, denominada: “Visão, Visualização e Representação na Ciência e na Matemática”. Nesta palestra utilizamos o GeoGebra para discutir a diferença entre a visão, a visualização e a representação.

Ainda, em 2017, participamos no “Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa-PNAIC”. Nele ministramos um minicurso para os professores denominado “Geometrias” em que o GeoGebra foi usado como auxiliar na apresentação de conceitos e resultados de várias Geometrias.

Também em 2017 fizemos um minicurso, organizado por professores do Departamento de Matemática da UEPG, para os alunos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, denominada: “Essa coisa é matemática? O que tem de matemática nesta coisa?”. Nela falamos da Topologia, da Geometria Projetiva e da Geometria dos Fractais. Proporcionou muitas perguntas e foi bastante interessante.

No ano de 2018, ministramos um minicurso para professores do NRE-Cascavel, de 8 horas com o título “Tecnologias e o Ensino de Matemática”, envolvendo o GeoGebra, novamente falamos sobre as possibilidades de tarefas e resoluções, como exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas investigativas.

Ainda em 2018, no XIII ESEM, além da palestra já citada anteriormente, participamos do painel de encerramento, juntamente com a Profª Drª. Cláudia Regina Flores (UFSC), em que apresentei para discussão “Geometrias não-euclidianas: é possível nas salas de aulas?”. Para isso, utilizamos o GeoGebra para auxiliar nas respostas as questões: É importante tal inclusão? É possível que as crianças e adolescentes entendam tais geometrias? Existe material didático disponível para a Educação Básica sobre esse conteúdo, tal que os professores possam consultá-los e apreendê-los?

Em 2019, a coordenação do NRE-Maringá, solicitou que fizéssemos uma oficina que trabalhasse os descritores[11] da Prova Paraná-Matemática. Para isso, fiz uma oficina denominada “Utilizando aplicativos do GeoGebra para construção de tarefas matemáticas”. Nessa oficina, foram utilizadas as versões 2D e 3D, e nos baseando em alguns dos descritores, construímos tarefas para poder trabalhá-los.

Em 2019, fizemos uma oficina para alunos do Ensino Médio no Instituto Federal campus de Capanema denominado “O aplicativo GeoGebra 3D: algumas

[11]Pode ser visto em https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2019-06/lista_descritores_prova_parana_2_ed.pdf. Acesso em 29/01/2023

possibilidades". Ainda em Capanema, no mesmo evento, fizemos uma palestra "Essa coisa é matemática? O que tem de matemática nesta coisa?".

Em 2021, na XXXI Semana da Matemática do DMA-UEM, fizemos uma oficina, de forma remota, denominada "Utilizando os aplicativos do GeoGebra para elaboração e resolução de tarefas matemáticas". O objetivo desta oficina foi apresentar e trabalhar com alguns tipos de tarefas que podem ser propostas para construir habilidades geométricas. Em todos os exemplos trabalhados foram utilizados os dois aplicativos do GeoGebra 2D e 3D para smartphones.

Para finalizar, citamos algumas apresentações que fizemos para alunos da Licenciatura em Matemática do DMA-UEM, vinculados ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID, em que utilizamos o GeoGebra. Em 2014, fiz uma palestra denominada "Explorando a construção de macros no GeoGebra" e nela, como aplicação, construímos o Símbolo da Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM. Em 2017, proferi a palestra, também ministrada para os professores do NRE-Maringá, denominada "O Trivium, o Quadrivium e a Matemática nos dias atuais". Todas as outras apresentações para alunos do PIBID, que envolviam o GeoGebra, foram no ano de 2019. A palestra "Essa coisa é matemática? O que tem de matemática nesta coisa?", a oficina "Utilizando os aplicativos do GeoGebra para elaboração e resolução de tarefas matemáticas" e a o minicurso "Noções de Geometrias não Euclidianas".

Na seção seguinte apresentarei resultados das pesquisas que foram desenvolvidas, quase todas auxiliadas pelas atividades citadas nesta seção, bem como na seção 2.

4. Pesquisas e Publicações envolvendo o GeoGebra

O primeiro trabalho, utilizando o GeoGebra, gerou uma dissertação que pode ser vista em Lovis (2009) e dois artigos referenciados em Lovis e Franco (2011) e em Lovis, Franco e Barros (2014), todos com a acadêmica de mestrado na época, Karla Aparecida Lovis, quando realizamos a oficina "O GeoGebra e modelos de Geometria Hiperbólica" para professores da rede estadual de ensino de Maringá, citado na seção 3.

Um dos artigos da pesquisa tem como uma das conclusões que:

> O estudo do modelo do disco de Poincaré permitiu identificar algumas dificuldades e obstáculos que impedem a compreensão dos conceitos da Geometria Hiperbólica. Acredita-se que uma das causas tenha sido, principalmente, o fato de os professores acreditarem que as representações dos objetos geométricos sejam, de fato, o próprio objeto, como aconteceu no caso da h-reta. Outro motivo que dificultou o entendimento do modelo exposto foi o fato de a maioria dos professores acreditar que a

> Geometria Euclidiana é a única Geometria possível. (LOVIS, FRANCO e BARROS, 2014, p.28)

Outro artigo resultado da pesquisa está nas atas da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM – ocorrido em 2011, e em suas considerações finais expõe que:

> Proporcionar aos professores da Educação Básica o estudo das geometrias não euclidianas possibilitará que eles ampliem o conhecimento e o pensamento geométrico, resgatem a história das geometrias, compreendam problemas do cotidiano, aprofundem temas da geometria euclidiana, além de mostrar que a geometria euclidiana não é a única geometria que existe. (LOVIS; FRANCO, 2011, p. 7).

O minicurso "Introdução às Geometrias Não-Euclidianas", citado na seção 3, resultou em uma dissertação da Talita Secorum dos Santos, e uma das conclusões foi que

> Em relação aos encontros, foi possível verificar uma dificuldade maior de compreensão da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica. Mesmo com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica os professores não aceitaram com facilidade a imagem das retas nessas geometrias, se mostrando muitas vezes incrédulos com o que estavam vendo. (SANTOS, 2009, p. 122).

O minicurso "As Geometrias por meio de diferentes Representações", também citado na seção 3, foi abordado na tese: "As apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros figurais" (BARROSO, 2015) e em dois artigos: "Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria" (BARROSO; FRANCO, 2015) e "Registros figurais em Geometria: influências na apreensão operatória e na pesquisa heurística de figuras" (BARROSO; FRANCO, 2014), em que se concluiu que o *software* GeoGebra foi o instrumento de destaque na possibilidade de operação de reconfiguração intermediaria. Isto é, as habilidades tais como modificar uma figura em diferentes posições, visualizá-la, dividi-la em várias subfiguras, calcular suas áreas, e, de posse dessas informações, raciocinar matematicamente, puderam ser desenvolvidas mediante este registro figural computacional.

Na conferência Latinoamericana, que ocorreu no Uruguai em 2012, conforme foi citado na seção 3, apresentamos diversos trabalhos com alunos de Iniciação Científica, mestrado, doutorado e professor PDE. Lembrando os nomes: "Utilizando o GeoGebra para construção de modelos planos para a Geometria Hiperbólica"; "Construindo as funções logarítmicas e exponenciais por meio do

GeoGebra"; "Construindo o logotipo da Olimpíada brasileira de Matemática no GeoGebra"; "Utilizando o GeoGebra para construção e exploração de um modelo plano para a Geometria Elíptica"; "Geometria Euclidiana Plana e software GeoGebra como ferramentas para o estudo de regiões poligonais e áreas" e "O usos do software GeoGebra no trabalho com funções logarítmicas". Todos estes trabalhos podem ser vistos e baixados nas atas do encontro disponibilizadas em https://www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf.

Em 2013[12], fizemos a oficina "Desenho Geométrico Plano: técnicas historicamente elaboradas e potencializadas em ambientes informatizados", conforme citado na seção anterior com o professor PDE João Carlos Larini. Alguns resultados desse curso podem ser vistos em Larini e Franco (2012).

Em 2015, apresentei no XXVI Seminários de Investigação em Educação Matemática – SIEM, na cidade de Évora em Portugal. Destaco um dos resultados publicado nas atas do evento:

> Os dados da pesquisa indicaram que o curso contribuiu para mudança de posição em relação ao software GeoGebra, e que já se sentem mais seguros para utilizar o laboratório de informática como sala de aula. (LARINI; FRANCO, 2015, p. 332).

Também neste evento em Portugal, apresentei o trabalho de outro professor PDE de 2014, que também citei anteriormente, Fábio Aparecido Barbosa, na subdivisão de Tecnologia, o título foi: "A receptividade de professores e alunos ao uso de tecnologias móveis em sala de aula", conforme consta em Barbosa e Franco (2015).

Por meio do minicurso "Trabalhando com Fractais na Educação Básica com diferentes abordagens", em 2013, conforme citado na seção anterior, obtivemos resultados que foram apresentados no XII EPREM, tendo como observação que:

> No que se refere ao GeoGebra, alguns professores comentaram que não o conheciam, outros não o conheciam com a finalidade de construção de fractais. Houve dificuldade em usar o GeoGebra, em grau maior para aqueles que nunca tinham tido contato com este software. (LIMA; LOVIS; FRANCO, 2014, p.13).

O resumo dos minicursos, oficina e palestra do I Congresso Brasileiro do GeoGebra "GeoGebra: múltiplos olhares para o ensino e a aprendizagem de conceitos", podem ser visualizados nas atas do evento, disponível em https://periodicos.ufersa.edu.br.

[12] Pelo fato do o professor João Carlos Larini ter entrado no PDE no ano de 2012, o artigo aparece como 2012, mas o curso foi oferecido em 2013.

Conforme falei anteriormente, procurei envolver meus orientandos de mestrado e doutorado nas atividades de formação inicial e continuada de professores. Um orientado de doutorado, Idelmar André Zanella, assistiu todas as aulas da disciplina "Geometria Euclidiana" como pesquisador. Esta tese pode ser vista em http://www.pcm.uem.br/dissertacao-tese/241.

Esta tese gerou um artigo em que:

> Constata-se neste estudo que as contribuições do GeoGebra, para o futuro professor de Matemática, estão estritamente relacionadas às atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão de representações figurais a partir da utilização de suas diferentes ferramentas e funcionalidades, ...Outro aspecto relevante está no fato de que o GeoGebra dispõe de diferentes características e potencialidades. Dentre as principais características destaca-se a sua fácil utilização e seu acesso, o rigor e precisão das construções geométricas e o trabalho com conceitos formais da Geometria associados às suas ferramentas. No que diz respeito às suas potencialidades, evidencia-se a promoção da exploração, manipulação, simulação, criatividade e intuição, a elaboração e estruturação de conjecturas e justificativas, a percepção das propriedades dos objetos geométricos estudados, bem como a celeridade no processo de investigação das relações existentes entre diferentes objetos matemáticos (geométricos e numéricos) quando associado a um modo fenomenológico estático de produção de representações figurais. (ZANELLA; FRANCO; CANAVARRO, 2018, p. 203)

Em 2017, tive o prazer de trabalhar com o Professor José Carlos Cifuentes num programa de Pós-doutorado em que o professor veio fazer no PCM-UEM sob minha supervisão. Em um dos nossos trabalhos, publicamos um artigo que trata de uma pesquisa em que utilizamos o GeoGebra para obter resultados experimentalmente. Neste artigo, na sua observação final, descrevemos que no seu desenvolvimento é possível observar que:

> ... a matemática tem também uma face experimental e heurística, aqui potencializada pelos recursos da geometria dinâmica, que envolve raciocínios não dedutivos, mas indutivos, analógicos, informais, importantes para a pesquisa e descoberta em matemática. (CIFUENTES; FRANCO; 2017, p. 28)

O leitor pode ver ainda resultados de pesquisas que apresentei no XIII ESEM de 2018 por meio dos Anais do evento que estão disponíveis em https://periodicos.ufms.br/index.php/aesmgedumat/issue/view/475.

Considerações finais

Visando atender aos propósitos dessa edição especial, busquei falar um pouco da minha história com o GeoGebra. Apresentei vários trabalhos que desenvolvi ao longo de 15 anos de uso do programa. Em especial, foquei nos trabalhos relacionados com a Geometria. Mesmo aqueles citados que envolviam funções logarítmicas e exponenciais tinham em seu conteúdo a exploração de geometrias. Dos trabalhos que apresentei nesse texto, merece destaque os relacionados com as Geometrias não euclidianas, já que existem poucos trabalhos com esse tema em língua portuguesa. Espero que tais trabalhos possam inspirar o leitor a desenvolver novos trabalhos.

De certa forma, acredito que meus trabalhos foram sementes que já produziram frutos. Isso fica evidenciado para mim por meio dos professores que formei, dos alunos que orientei tanto de Iniciação Científica, professores PDE, mestrados e doutorados.

Além de explorá-lo, como pode ser visto nas seções deste artigo, utilizamos o GeoGebra para motivar, mostrar, demonstrar e principalmente para modificar formas de ensinar, como, por exemplo, ministrar uma disciplina de 102 horas de Geometria Euclidiana Axiomática apenas por meio de tarefas.

Enfim, devemos sempre agradecer Markus Hohenwarter por ter disponibilizado este recurso de imensa aplicação para o Ensino e para a pesquisa da própria matemática.

Agradeço imensamente todos os meus alunos que me deram imensa satisfação em poder contar com suas colaborações nos nossos trabalhos.

Agradecemos também o convite feito pelos professores Dr. Sérgio Carrazedo Dantas e Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga. Fiquei estupefato e feliz em rever os trabalhos que fizemos desde o ano de 2006 até o ano de 2021. Obrigado.

Referências

BARROSO, M. M. **As apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros figurais**. 250 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015. Disponível em: http://www.pcm.uem.br/dissertacao-tese/211.

BARROSO, M. M.; FRANCO, V. S. Registros figurais em Geometria: influências na apreensão operatória e na pesquisa heurística de figuras. **Perspectivas da Educação Matemática** – UFMS – v. 7, n. 13, p. 123-137, 2014.

BARROSO, M. M.; FRANCO, V. S. Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria. **REVEMAT**. Florianópolis, v.10, n. 1, p. 61-75, 2015.

BARBOSA, F. A.; FRANCO, V. S. Usando tecnologia móveis em sala de aula. **XII EPREM** – Encontro Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, 04 a 06 de setembro de 2014. Disponível em: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCAutor/CCA033.PDF.

BARBOSA, F. A.; FRANCO, V. S. A receptividade de professores e alunos ao uso de tecnologias móveis em sala de aula. Atas do XXVI Seminários de Investigação em Educação Matemática – **SIEM**. Disponível em: https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2015_Evora_ATAS_XXVI_SIEM.pdf

CIFUENTES, J. C.; FRANCO, V.S. O pensamento geométrico no ensino superior e o despertar da Imaginação. **UNION** – Revista Ibero-americana de Educação Matemática, n. 50, p. 09-28. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/414

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S.; BARROS, Rui Marcos de Oliveira. Geometria Euclidiana Plana: Um estudo com Cabri-Géomètre. 1. ed. Maringá-PR: Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2007. v. 1. 226p .

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana: um estudo com o software GeoGebra**. Maringá: Eduem, 2010. Download livre em: https://drive.google.com/file/d/1RTEEE7QccUXdZYQJl5zICXY3vDdFgJ6f/view

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático**. 2ª ed. Maringá: Eduem, 2010. Download livre em: https://drive.google.com/file/d/1gLQLYiqvKT0Qn6uxgzBb-jf3N-hH2l3d/view

LARINI, J.C; FRANCO, V.S. Desenho Geométrico Plano: técnicas historicamente elaboradas e potencializadas em ambientes informatizados. **Cadernos PDE: 2012** – v.1. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_artigo_joao_carlos_larini.pdf

LARINI, J.C; FRANCO, V.S. Utilizando o desenho geométrico e o GeoGebra para o ensino de geometria. Atas do XXVI Seminários de Investigação em Educação Matemática – **SIEM**. Disponível em:

https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2015_Evora_ATAS_XXVI_SIEM.pdf

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores** 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2009. Disponível em: http://www.pcm.uem.br/dissertacao-tese/58.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S.; BARROS, R.M.O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 22, n. 42, p.11-29 – jul/dez-2014.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1040/150.

SANTOS, T. S. **A inclusão das Geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica**. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2009. Disponível em: http://www.pcm.uem.br/dissertacao-tese/70.

ZANELLA, I. A.; FRANCO, V. S.; CANAVARRO, A.P. Realizar construções geométricas com o GeoGebra: a contribuição do ambiente de geometria dinâmica para o futuro professor de Matemática. **REPEM**, Campo Mourão, PR, v.7, n.14, p.179-207, jul-dez. 2018.