http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i2p194-220

Da Matemática Experimental à ferramenta didática: o papel do GeoGebra na formação de professores da educação básica[1]

From Experimental Mathematics to a didactic tool: the role of GeoGebra in the professional development of basic education teachers

YURIKO YAMAMOTO BALDIN [2]

ORCID 0000-0001-7473-5657

RESUMO

O objetivo deste artigo é apresentar resultados da pesquisa da autora sobre o papel do GeoGebra na formação de professores de matemática da educação básica, baseando as discussões no conceito de Geometria Dinâmica que promoveu possibilidades de transformação do ambiente de ensino e aprendizagem em torno do início do século XXI, quando o desenvolvimento dos programas computacionais cada vez mais acessíveis trouxe o desafio de integrar a tecnologia na educação básica. A metodologia da pesquisa utiliza o conceito de Matemática Experimental aplicada na metodologia de resolução de problemas num ambiente de aprendizagem participativa. Os resultados ilustram a trajetória da pesquisa da autora em que GeoGebra é usado em diferentes projetos de melhoria de ensino, aprendizagem, e educação de professores de matemática básica, além de atividades de exploração para alunos.

Palavras-chave: *Matemática Experimental; Geometria Dinâmica na formação de professores; GeoGebra na aprendizagem participativa.*

ABSTRACT

The aim of this article is to present the results of the author's research on the role of GeoGebra in the education of mathematics teachers of basic education, based on the discussions on the concept of Dynamic Geometry that promoted possibilities for transforming the teaching and learning environment around the beginning of the 21st century when the development of increasingly accessible computer programs brought the challenge of integrating technology into basic education. The research methodology uses the concept of Experimental Mathematics applied in the problem-solving methodology in a participative learning environment. The results illustrate the trajectory of the author's research in which GeoGebra is used in different projects of improvement of teaching, learning, and education of teachers of basic mathematics, in addition to exploration activities for students.

[1] Apoio parcial: CAPES-IMPA-OBMEP durante o projeto piloto PROF-OBMEP (2013-2015)

[2] Universidade Federal de São Carlos – yuriko@ufscar.br

Keywords: *Experimental Mathematics; Dynamic Geometry in teacher education; GeoGebra in participative learning.*

Introdução

A presença crescente da tecnologia computacional no desenvolvimento da sociedade a partir da segunda metade do século XX é de conhecimento de todos, atraindo uma atenção especial dos educadores quando o desenvolvimento das ferramentas e programas computacionais mostrou a possibilidade de impactar a aprendizagem das crianças e jovens, por exemplo, a obra pioneira e instigante de Seymour Papert (PAPERT, 1980) que já desde os anos 60 pregava o uso da tecnologia na educação e desenvolveu uma linguagem de programação totalmente voltada para a educação básica, especialmente para a aprendizagem das crianças, a linguagem LOGO. A obra citada (PAPERT, 1980) influenciou a comunidade pedagógica, tendo sua tradução para português editada em 1985. Este artigo não pretende discutir a trajetória histórica da introdução dos recursos da informática no ambiente escolar, por esse tema necessitar de um enfoque especial que não é o objetivo do artigo. Mas, a menção inicial a Papert, com sua visão pioneira de transformação do ambiente educacional, é um ponto inicial para apontar que a introdução da tecnologia digital na educação foi por meio da elaboração de uma linguagem de programação, a linguagem das máquinas.

A visão de futuro de Papert de que a aprendizagem num ambiente tecnológico estimularia o desenvolvimento de pensamentos para uma comunicação adequada nos tempos modernos que viriam, foi, na minha opinião, um marco fundamental quando se pensa na influência da tecnologia na educação. Então, a introdução de máquinas nas escolas como ferramenta de enriquecimento pedagógico no ensino público, como foi a base para o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo), criado pelo MEC em 1997, não seria suficiente para implementar as mudanças educacionais, mas levanta a necessidade de transformar a prática nas salas de aula, a qual aponta para a necessidade de aprofundar os olhares para a formação de professores, que inclua nos cursos de capacitação, inicial ou continuada, conteúdos e metodologias específicas que elucidem o papel da tecnologia educacional. Nesse sentido, este artigo pretende compartilhar a trajetória pessoal, como professora e pesquisadora de matemática, em que a aprendizagem das novas formas de ensinar e aprender com uso de recursos computacionais trouxe conhecimentos ampliados sobre o que é importante na prática profissional de ensinar, potencializado com recursos tecnológicos para comunicar conteúdos matemáticos.

1. Motivação, questão da pesquisa e fundamentação teórica

Nesta seção, organizo a motivação para introduzir nos meus estudos a linha de pesquisa “uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática” por meio de narrativas da minha aprendizagem e de experiências com Geometria Dinâmica que culminaram com a adoção do uso do GeoGebra exercendo papel na pesquisa da formação de professores. O tom que uso no artigo é de cunho pessoal, não visando uma teorização no estilo acadêmico, porém não prescindindo de referências que embasaram as minhas investigações.

O objetivo principal do artigo é apresentar uma visão pessoal do papel do GeoGebra na formação de professores de matemática, através de uma trajetória cronológica da minha pesquisa que surgiu antes do encontro e da aprendizagem com o GeoGebra, mas vinha percorrendo uma progressão no acompanhamento das demandas educacionais na virada do século XXI.

Eu sentia naquele momento uma crescente necessidade de ajudar a formação dos professores de matemática no Ensino Fundamental e Médio com disciplinas específicas e materiais adequados no uso pedagógico da informática, e também com cursos de capacitação para os professores que enfrentavam a chegada de ferramentas tecnológicas nas escolas, com carência do conhecimento pedagógico para novas formas de ensino e avaliação. Essa necessidade na educação matemática trouxe grande desafio para “traduzir” os conteúdos de matemática em “linguagem apropriada” para comunicar ideias matemáticas num ambiente com os recursos computacionais.

Neste cenário, nos finais dos anos 90 do século XX, conheci o conceito revolucionário de “Geometria Dinâmica” por meio do programa de origem francesa Cabri-Géomètre, desenvolvido em 1989 por Jean-Marie Laborde e colaboradores, idealizado por Laborde já em 1985, e que foi adotado nas escolas do estado de São Paulo. Este programa trouxe ideias revolucionárias para o ensino e aprendizagem da geometria que era encarada até então como um modelo do raciocínio dedutivo a partir de axiomas, teoremas e do rigor matemático, nem sempre acessível aos níveis de conhecimento dos alunos. O ensino tradicional de geometria nas escolas básicas até então, muitas vezes focado em nomenclaturas e ilustrações de problemas de cálculo de áreas e perímetros de figuras geométricas, não estava preparado para a ideia inovadora de que o ensino da geometria poderia contribuir para desenvolver a capacidade de visualização, exploração, descobertas de propriedades para trabalhar modelos de aplicações diversas e os problemas de geometria do currículo escolar, mesmo aqueles de cunho abstrato de construção geométrica. O nome "Geometria Dinâmica" significou essa abertura para o ensino através de manipulação, descobertas e conjeturas, e possibilidades de protagonismo dos alunos na aprendizagem da geometria e no desenvolvimento do pensamento matemático através de computadores pessoais e programas com interface de linguagem conceitual dos elementos da geometria.

Esses conceitos que trabalham o fazer matemática que não seja apenas fazer cálculos com operações da aritmética encontravam dificuldades para serem incluídos nas práticas pedagógicas, o que demandava fortemente uma nova visão de formação de professores e da prática nas salas de aula. Começavam então, muitos cursos de treinamento de professores na utilização do Cabri-Géomètre, acompanhado de muitas investigações na Educação Matemática para entender o significado de transformar a sala de aula em ambiente de aprendizagem ativa e de questionamentos, especialmente para explorar um programa de Geometria Dinâmica cujos recursos computacionais ampliaram os horizontes de possibilidades pedagógicas.

Nesse sentido, o artigo esclarecedor de Waits e Demana (1999) foi fundamental no início dos anos 2000 para motivar a minha pesquisa sobre o tema de "formação de professores que sabem ensinar matemática com a tecnologia". Nessa época, eu já pesquisava o uso didático dos programas de computação algébrica (CAS), como Maple V, para introduzir novas metodologias de ensino para os cursos de ciências exatas e de tecnologia, em nível universitário. Nessa experiência, aprendi que o potencial didático desse tipo de programa vai além de usar suas funcionalidades e explorar as possibilidades técnicas em diferentes modalidades de aprendizagem em laboratórios de informática. Por exemplo, o uso de recursos visuais e numéricos que a lousa-giz não alcança e a possibilidade de testar com simulações as situações problema para estabelecer conjeturas ou estratégias de resolução me permitiram perceber que conhecer a linguagem de comunicação de ideias que uma programação encerra e saber planejar aulas específicas com uso de recursos tecnológicos já constituíam temas inovadores que justificam projetos de pesquisa.

Para fundamentação da pesquisa, busquei inicialmente uma inspiração nas reflexões de Waits e Demana (1999) que analisam objetivamente o que aprenderam com as primeiras experiências didáticas nos cursos de pré-cálculo e cálculo nas décadas anteriores. Os autores destacam dois ingredientes necessários para provocar a transformação positiva no ambiente de aprendizagem: (a) saber que a transformação pode ocorrer se colocar o potencial da mudança nas mãos de cada um, (o que significa um protagonismo de quem usa uma ferramenta ou um programa computacional); (b) saber que a transformação demanda um desenvolvimento profissional efetivo de professores no uso de tecnologia, (isto é, os professores compreenderem a estrutura organizada da linguagem computacional) (WAITS & DEMANA, 1999, p. 3, observações da autora).

Apesar de esses itens parecerem claros atualmente com pesquisas em Educação Matemática, as análises de Waits e Demana (1999) sintetizaram, no limiar do novo século, suas descobertas no presente daquela época sobre o papel da tecnologia no Ensino e Aprendizagem da Matemática, os resultados das experiências já vividas, e sua visão das possibilidades no futuro. Essas ideias foram para mim precursoras para o rumo que a minha pesquisa deveria tomar.

Uma outra descoberta contundente desses autores foi que "a tecnologia educacional de uso individual, como é o caso das calculadoras gráficas/científicas modifica a maneira com que nós (professores) ensinamos e a maneira com que os estudantes aprendem." (WAITS & DEMANA, 1999, p.5). Os autores afirmam que o tempo gasto no passado no estudo com lápis e papel para resolver problemas computacionais e manipulações de técnicas matemáticas foi reduzido, o que permite, no presente, tempo para desenvolver uma *compreensão conceitual* e o *pensamento crítico* valioso de forma mais aprofundada, e as *habilidades de resolução de problemas*. Isso não quer dizer que as ferramentas computacionais devam substituir a atividade de ensino e aprendizagem com lápis e papel, mas sim utilizar as facilidades computacionais de forma equilibrada e eficaz.

Waits e Demana (1999) recomendam que, para alcançar a eficiência na transformação de ambientes de aprendizagem, as atividades de resolução de problemas devem buscar um balanceamento entre o uso de lápis e papel e as ferramentas computacionais. O que recomendam é que a compreensão conceitual e o desenvolvimento de pensamento crítico sobre o significado das técnicas e procedimentos sejam privilegiados, como resultados de pesquisas de educadores matemáticos. Os autores querem dizer que:

> O currículo escolar deve oferecer práticas apropriadas para alcançar as habilidades de resolução de problemas mediadas pela tecnologia, estabelecendo estratégias balanceadas entre: 1- Resolver problemas usando papel e lápis e então <u>comprovar</u> a resposta usando a tecnologia; 2- Resolver problemas usando a tecnologia e então <u>confirmar</u> o resultado usando técnicas de lápis e papel; 3- Resolver problemas onde os alunos selecionam a abordagem que consideram mais apropriada entre as abordagens por lápis e papel ou tecnologia, ou ainda <u>combinação de ambas</u>. (WAITS & DEMANA, 1999, p. 7, destaques da autora).

Tais resultados sistematizados do estado da pesquisa sobre o impacto educacional das tecnologias no ambiente de aprendizagem nos finais dos anos 90 aliados a predições de Papert (1989) reforçaram a escolha da Metodologia de Resolução de Problemas para desenvolver a **questão de pesquisa** que estabeleci:

"Como fazer a atualização e capacitação de professores de matemática do ensino básico no uso apropriado da tecnologia para ensinar e avaliar a aprendizagem efetiva dos alunos, com o foco em desenvolvimento do pensamento matemático e da linguagem das máquinas?"

Apesar de a minha pesquisa ter-se iniciado com a matemática do ensino superior num ambiente de laboratório de informática e com a linguagem já sofisticada dos programas CAS e da estrutura algorítmica, o conceito de "Geometria Dinâmica" trazido pelo Cabri-Géomètre na mesma época se mostrou para mim ser mais que complementar, com potencial determinante para a educação de professores e estudantes em nível básico, em que poderia desenhar as atividades apropriadas ao currículo escolar para adquirir competências de conhecimento específico aliado a ambientes de aprendizagem, através das fases da resolução de problemas como estabelecidas por Polya (1945).

Esta convicção alavancou a minha pesquisa para adotar a metodologia de resolução de problemas nas situações-problema que requerem a mediação da tecnologia para modelagem, exploração, descobertas e generalizações de resultados matemáticos. Esses termos claramente indicam a necessidade de maior fundamentação com pesquisas focadas na mudança de paradigma do ensino de estilo tradicional expositivo do professor, para uma perspectiva de experimentação de situações para que a aprendizagem ocorra com o protagonismo dos alunos com suas próprias experiências no ato de resolver problemas.

A aprendizagem efetiva de matemática sempre foi baseada em resolver problemas, da mesma maneira que o avanço da disciplina matemática em suas fronteiras de conhecimento é efetivamente atingido por meio da resolução de desafios enunciados como problemas e das descobertas surgidas durante o processo de resolução, resultando em teoremas demonstrados com provas, no final.

Acreditando em poder trabalhar esse processo científico da disciplina matemática na forma de atividade didática para que o professor possa ensinar melhor, adotamos a Metodologia de Resolução de Problemas com as fases essenciais como propõe Polya (1945), para destacar os recursos computacionais nas novas formas de ensinar com tecnologia.

Portanto, a Resolução de Problemas como metodologia central para introduzir novas formas de ação pedagógica exigia a elaboração de atividades voltadas para capacitar os professores nas novas formas de conduzir a resolução de problemas, levando em consideração questões de pesquisa como:

- O que é necessário para ser um bom professor de matemática?

- O que é ensinar com tecnologia?
- Quais são as mudanças que podem ocorrer nas aulas de matemática com o uso da tecnologia?
- Quais são as diferentes formas de uso da tecnologia no ensino de matemática?
- Como a tecnologia afeta a formação de professores?

Esses questionamentos foram trabalhados em Baldin (2002) durante 2nd International Congress in Teaching Mathematics- 2nd ICTM- Crete, quando apresentei uma caracterização dos tipos de problemas de matemática escolar para identificar a natureza da utilização adequada da tecnologia em cada categoria:

- **Tipo 1**: Problemas com dados no enunciado que requer reconhecimento das operações ou manipulações estratégicas deles para responder objetivamente ao solicitado. São os tradicionais exercícios, por exemplo, de cálculo de perímetro de um retângulo ou parte dele, respeitados alguns dados especiais, entre outras modalidades de exercícios.
- **Tipo 2:** Problemas que oferecem no enunciado uma situação problema, cuja análise e explorações estratégicas baseadas em conceitos já trabalhados levam à descoberta de novos conceitos. São problemas bases para desenvolver a capacidade de raciocínio dedutivo e/ou indutivo, para a compreensão de novos conceitos ou de descobertas sobre o próprio conhecimento que pode levar à aprendizagem participativa. Um exemplo desse tipo foi a desigualdade triangular em sala de 6º ano, em que a experimentação com régua e compasso, usando dados variados, levou à descoberta pelos alunos da desigualdade que foi sistematizada como resultado da aprendizagem dos alunos, relatado em Baldin (2010).
- **Tipo 3:** Problemas contextualizados em situações problemas com dados oriundos de situações da vida real, ou ainda mesmo da própria matemática, que requerem explicitamente os procedimentos organizados da Metodologia de Resolução de Problemas. Isto é, são os problemas que requerem Modelagem da situação problema do mundo real ou matemático para um problema enunciado com linguagem matemática. A fase da estratégia depende da tradução para o modelo apropriado da situação problema, e as técnicas que o modelo matemático requer. A fase da resposta ao problema não termina com o resultado ao problema matemático, mas deve incluir a significação deste resultado no problema original. A fase da validação e investigação não se limita à conferência da correção dos cálculos realizados, mas expandir para a exploração de outras abordagens, e possibilidades de generalização. (BALDIN, 2002).

Essa categorização pode ser relacionada às formas possíveis de introduzir a tecnologia no ensino com papéis diferenciados da tecnologia, como já mencionado em Waits e Demana (1999, p.7).

Em Baldin (2002) trabalhamos a questão de Visualização e Simulação com Geometria Dinâmica, como exemplo do Tipo 3, ilustrada pelo problema da escada:

"Há uma casa de dois andares cercada por um muro de 2,5 m de altura. O muro está distante 1,5m da parede externa da casa. Os bombeiros querem alcançar a parede da casa pelo lado de fora, usando uma escada de 6m de comprimento apoiando-a no muro. A que distância do muro a escada deve ser posicionada para que o seu topo alcance a casa?" (BALDIN, 2002).

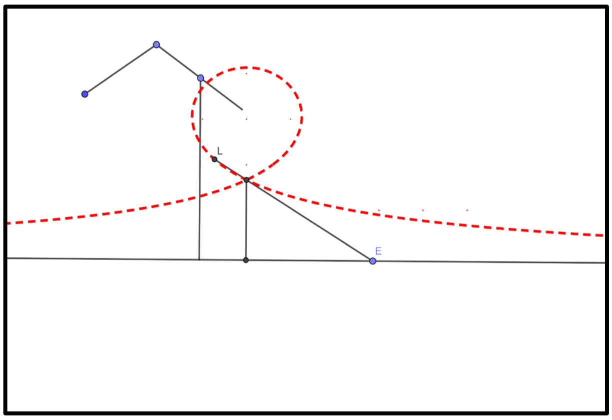

FIGURA 1: Problema da escada, Visualização e Simulação animada.
FONTE: Disponível em https://www.geogebra.org/calculator/hqhdja2z Acesso em: 19 ago. 2023.

O problema foi trabalhado simulando com Geometria Dinâmica as diversas posições da escada e mostrando a possibilidade da existência ou não de soluções de acordo com a distância variável do pé da escada ao muro, sempre apoiando-se no topo do muro. As soluções foram estudadas pela experimentação e corroboradas pela análise algébrica e gráfica de um sistema não-linear de equações modeladas com conceitos de semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras, que são conteúdos curriculares do Ensino Fundamental, mas dificilmente trabalhados se não forem com auxílio da tecnologia. A Figura 2 pode ser usada para representar a situação geométrica:

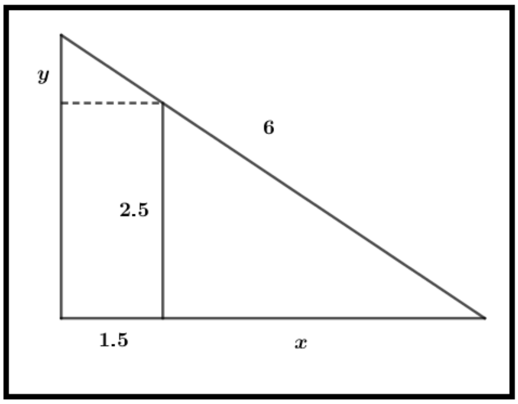

FIGURA 2: Relação de semelhança de triângulos retângulos, identificação de variáveis.
FONTE: Autora

A Figura 2 também pode ser usada para compreender a modelagem algébrica por meio das equações:

$$(x + 1.5)^2 + (y + 2.5)^2 = 6^2$$

$$\frac{y}{1.5} = \frac{2.5}{x}$$

onde x representa a distância do pé da escada ao muro e y a altura da parte da parede da casa acima de 2,5 (metros) que é a altura fixa do muro.

O problema é muito interessante, pois trabalha a relação de semelhança de dois triângulos envolvendo duas variáveis, x e y, onde a relação de dependência entre as duas variáveis é facilmente discutida pelo contexto do enunciado narrado pela situação e traduzido pela Figura 2 no contexto familiar de reconhecimento de triângulos semelhantes.

A relação de semelhança de triângulos se traduz em uma função: $y = \frac{(2,5 \times 1,5)}{x}$ cujo gráfico é uma hipérbole, onde se pode discutir também a relação inversamente proporcional entre x e y. E a equação gerada pelo Teorema de Pitágoras, por sua vez, é reconhecida como a equação de uma circunferência com centro em (-1,5; - 2,5) e raio 6.

Logo, a solução pode ser obtida algebricamente como as raízes do sistema não linear de equações, ou graficamente como intersecção das cônicas: uma hipérbole (no caso, de um ramo da hipérbole) e uma circunferência.

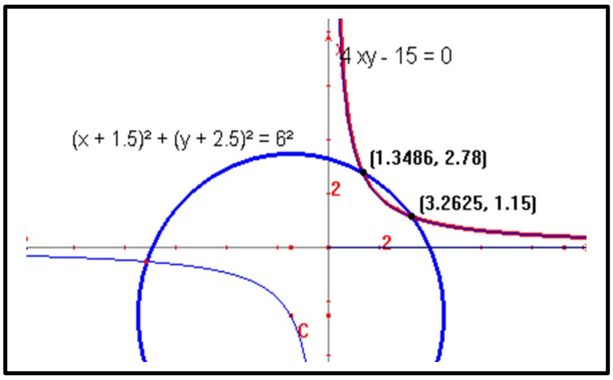

FIGURA 3: Solução gráfica como intersecção de duas curvas cônicas.
FONTE: Autora

As condições numéricas dos dados do problema levam a duas soluções possíveis para a altura na parede da casa que a escada pode alcançar, como mostra o lugar geométrico da extremidade da escada na Figura 1. Ou seja, há duas soluções possíveis para os bombeiros encostarem a escada na parte superior da casa nas condições do problema. A solução pelas coordenadas dos pontos de intersecção das curvas, como gráficos das equações do sistema, como na Figura 3, mostra o grau de complexidade da resolução facilitada pelo programa computacional.

A modelagem algébrica da situação do problema a partir do modelo geométrico, manipulável e animado pelos recursos do programa, produz a integração do princípio de modelagem matemática com várias linguagens matemáticas, desde gráficas às explorações do significado de raízes polinomiais. Os recursos de animação propiciam momentos de exploração da existência ou não de soluções, por meio de simulação com variação de dados numéricos da distância do muro à parede da casa e da altura do muro, como parâmetros variáveis, mantendo fixo o comprimento da escada. Uma apresentação de forma visual do artigo (BALDIN, 2002) é um roteiro de expansões dessas abordagens possíveis graças à tecnologia.

Nos finais dos 1990 eu já trabalhava as primeiras possibilidades didáticas com alunos de licenciatura em matemática da Universidade Federal de São Carlos-UFSCar para explorar e pesquisar o potencial dos fundamentos da Geometria Dinâmica em problemas de construção geométrica e linguagem de raciocínio computacional.

Nos anos 2000/01 oferecemos cursos de capacitação profissional em linguagem de Geometria Dinâmica com a versão atualizada e potencializada de Cabri-Géomètre II, que resultou na publicação do livro em coautoria de Guillermo Lobos Villagra, pela EdUFSCar: "*Atividades de Cabri-Géomètere II para Cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio*" (BALDIN & VILLAGRA, 2002). Este livro apresentou uma síntese dos primeiros cursos que oferecemos para a formação de professores que trabalharam efetivamente os princípios de Geometria Dinâmica no uso de resolução de problemas na forma de metodologia de aprendizagem por participação e no domínio de uma linguagem algorítmica através das facilidades funcionais do programa. Seu conteúdo abrangeu além de introdução à linguagem da Geometria Dinâmica do programa, atividades passo a passo de um curso de Geometria Euclidiana, Construções Geométricas, Trigonometria, Geometria Analítica para Ensino Médio, Números Complexos, e um estudo de Funções, além do programa trabalhado na calculadora gráfica. Os cursos exploraram o potencial didático de combinar o raciocínio geométrico aliado à linguagem algébrica, uma das facilidades do programa.

O livro foi uma proposta inovadora que destacou o papel das metodologias de aprendizagem por protagonismo do usuário que a tecnologia pode disponibilizar para o ambiente do ensino, além da introdução passo a passo ao programa de Geometria Dinâmica que ultrapassa as características de um determinado programa. Por isso, o conteúdo deste livro se adapta completamente a outros programas que incluem o GeoGebra, sendo o livro notado até os tempos atuais, figurando como parte da bibliografia recomendada em cursos de formação de professores de matemática, sejam de programas de formação inicial, as licenciaturas, ou de programas de pós-graduação em Educação Matemática. O livro foi selecionado em 2004 para fazer parte do programa Livro Aberto da Biblioteca Nacional.

Nessa época houve muitos desenvolvimentos de programas de Geometria Dinâmica como reflexos de consistências com a necessidade emergente de experimentar as atividades de raciocínio matemático com programas computacionais por meio de exploração de problemas essenciais da geometria básica, como Cinderela na Alemanha, Sketchpad nos Estados Unidos, Tabulae no Brasil (um programa brasileiro desenvolvido pela equipe da UFRJ) para citar alguns, produzindo muitos resultados positivos. E foi em 2001 que Markus Howenwarter propôs a primeira versão do GeoGebra que combinava duas linguagens, a geométrica e a algébrica, que são essenciais no ensino e aprendizagem da matemática oferecendo uma ideia inovadora e globalizadora de criar uma rede internacional permanente de colaboradores para trabalhar coletivamente nas novas descobertas e aperfeiçoamento do programa, mundo afora. O sucesso e a consistência do GeoGebra, com alcance pedagógico que incluiu facilidades de trabalhar em um único aplicativo livre a geometria, álgebra, tabelas e planilhas, gráficos, estatística e cálculos, conquistou professores e estudantes, com uma comunidade que vem crescendo desde então, o que este número temático de GeoGebra é um testemunho.

Ao conhecer o GeoGebra, a adoção e a exploração do potencial didático deste programa na minha linha de pesquisa foram naturais após 2003. Na continuidade do avanço das novas descobertas para elaborar mais materiais de apoio aos professores, encontrei no conceito de “Matemática Experimental” de Bailey e Borwein (2003) o passo seguinte para consolidar a base da fundamentação da minha pesquisa que já vinha desenvolvendo, por exemplo, em Baldin (2002).

O conceito de “Matemática Experimental” de Bailey e Borwein (2003) esteve presente no minicurso “Resolução de problemas e o ensino de geometria” (BALDIN, 2004) que ministrei na Reunião Regional da SBPC, Teresina, PI, em que combinamos a metodologia de Resolução de Problemas de Polya com a abordagem de problemas de geometria, usualmente resolvidas de maneira estática, que destacasse o caráter de experimentação e heurística mediada pela Geometria Dinâmica.

Resumidamente, a “Matemática Experimental” na concepção de Bailey e Borwein (2003) tem como objetivo gerar a compreensão e clareza de problemas matemáticos, conjecturar e confrontar situações para tornar a matemática mais significativa e acessível. Seu método de fazer matemática inclui entre outros o uso de métodos computacionais para:

- Ganhar clareza e intuição;
- Descobrir novos padrões e relações;
- Usar representações gráficas para sugerir princípios matemáticos subjacentes;
- Testar conjeturas e especialmente invalidar as falsas;
- Explorar um possível resultado para verificar se existe vantagem de uma prova formal para ele;
- Sugerir abordagens para uma prova formal;
- Substituir cálculos e manipulações longas se feitos manualmente por procedimentos usando computadores;
- Confirmar analiticamente os resultados obtidos.

Apesar do trabalho de Bailey e Borwein (2003) ter enaltecido primeiramente o uso da tecnologia para introduzir novos olhares para desenvolver atividades matemáticas de nível superior, a descrição de seus métodos sustenta a aplicação em técnicas pedagógicas que busquei na linha de pesquisa para a formação de professores que ensinam com a tecnologia.

Em 2005, na apresentação da palestra “Relação entre a Metodologia de Resolução de Problemas e o conceito de Matemática Experimental” na PUC-SP, (BALDIN, 2005), procurei estabelecer o quadro teórico que norteava a investigação da relação entre a tecnologia e a aprendizagem. Discuti na ocasião a

Matemática Experimental como uma ponte que interconecta a tecnologia educacional e a resolução de problemas, apontando que o cenário de ensino e aprendizagem da Matemática é enriquecido pela introdução do ambiente de “laboratório” onde a experimentação é mediada pela tecnologia.

Na época, as pesquisas em Educação Matemática sobre o papel mediador da Geometria Dinâmica como uma “linguagem” que conecta o conhecimento de conteúdo à sua aprendizagem eram discutidas por educadores através de conceito de “micromundo” (microworld) como um laboratório promovido pelos programas de Geometria Dinâmica. Mariotti e Cerulli (2001) discutem o caráter semiótico da linguagem de micromundo da Geometria Dinâmica na interface entre o ensino e a aprendizagem da álgebra, enquanto Laborde (2003) destaca o papel mediador da tecnologia na conexão entre o conhecimento instrumental das interfaces e o conhecimento da matemática, assim como Perrenoud (2000) já destacava entre as novas competências para ensinar, a de explorar as potencialidades didáticas da tecnologia para ensinar.

Desta forma, a fundamentação teórica da pesquisa de novas formas de capacitar o professor de matemática no uso da tecnologia como ferramenta didática tomou forma para mim, por volta de 2005. Em 2006, apresentei o papel da Geometria Dinâmica em diferentes instâncias do Ensino da Matemática, já comunicando alguns resultados das investigações na linha de pesquisa deste artigo (BALDIN, 2006).

No congresso 21st Asian Technology Conference in Mathematics-21st ATCM, em 2016, tive a oportunidade de apresentar um resumo da trajetória de descobertas sobre o tema “desafio de integrar a tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática na educação básica” (BALDIN, 2016a). Neste artigo apresentei considerações sobre a formação inicial e continuada de professores neste tema, assim como sobre as formas de estimular o interesse e despertar o gosto pela matemática dos jovens com problemas cujas resoluções são potencializadas pela tecnologia.

Em Baldin (2016a, p. 84) explicitei como conectar os métodos da Matemática Experimental com as fases da Resolução de Polya, que são detalhadas como:

- Ler e compreender o texto do problema, selecionando os dados do problema e identificando a questão a resolver na situação problema;
- Elaborar uma estratégia de resolução, modelando-a com os conhecimentos prévios de conteúdo e técnicas;

- Executar a estratégia, computando os cálculos necessários ou desenvolvendo as manipulações algébricas e obter uma resposta à questão;
- Investigar a resposta e sua validade no contexto do problema, explorar possibilidades de outras respostas ou alternativas para as estratégias ou abordagens, explorar possíveis variações e generalizações.

Na próxima seção, apresento alguns resultados desta pesquisa, ilustrados por alguns exemplos trabalhados em diferentes instantes para públicos distintos, o que mostra o alcance dessa forma de pesquisar materiais de apoio para instigar melhor aprendizagem da matemática.

2. Aplicações do GeoGebra em cursos e produtos didáticos elaborados para professores e alunos

Nesta seção, mostro alguns exemplos de materiais e produtos elaborados e testados em cursos, oficinas, palestras desde a definição da linha de pesquisa.

O advento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP em 2005 trouxe uma oportunidade excelente para o ambiente de exploração das possibilidades de contribuir para a linha de pesquisa e a questão de investigação que trabalhamos. De fato, a OBMEP é uma contribuição para a melhoria do ensino da matemática no ensino básico, pelo fato da premiação incluir o prêmio mais importante que é o Programa de Iniciação Científica Junior -PIC com bolsa de estudos aos premiados, em programas especialmente desenhados para acompanhamento.

Como eventos especiais de estudos para alunos selecionados dentre os premiados tive a oportunidade de testar e validar muitas atividades baseadas em problemas instigantes de geometria usando o desenho de matemática experimental, uso de GeoGebra e a metodologia de resolução de problemas por questionamentos para estimular a indagação e raciocínio. No período de 2006 a 2016 tive muitas oportunidades de interagir com alunos, assim como de trabalhar a capacitação de professores com GeoGebra como instrumento didático para desenvolver a resolução de problemas por questionamentos.

2.1 Alguns exemplos para alunos do PIC-OBMEP

Em 2008, no encerramento do PIC-2006 de um polo do estado de SP, realizei a oficina “Explorando resolução de problemas: visualização e validação” com os alunos premiados em nível de 7º e 8º anos do Ensino Fundamental. Os problemas propostos para trabalhar interativamente com o uso de GeoGebra propiciou momentos de confirmação da eficiência do método de exploração matemática por questionamentos (BALDIN, 2008). Alguns problemas trabalhados foram:

1) O senhor José mora num sítio e deseja ir até uma estrada reta próxima de sua casa. Qual é o caminho mais perto? Como podemos justificar a solução?
2) Ainda no problema do senhor José será que pode haver alguém que more no outro lado da mesma estrada que ande a mesma distância que o senhor José até encontrá-lo? Que podemos concluir? Se a resposta é positiva, que propriedade geométrica possui a reta que representa a estrada neste problema?
3) Partindo de um ponto A num plano pretende-se construir uma reta que esteja à mesma distância de dois outros pontos B e C no mesmo plano. Como construir? Como justificar a solução? O que é distância de um ponto à reta? Discuta uma modelagem para o problema: Se temos duas cidades e queremos construir uma estrada reta entre elas que tenha a mesma distância até a estrada. Como construir?
4) Os prefeitos de 3 cidades A, B e C querem construir um posto de combustível de modo que se situe à mesma distância do marco central das três cidades e estão estudando o mapa da região. Onde podem construir? O problema tem sempre solução?
5) Eu tenho um disco circular e quero furar bem no meio. Onde furar? Como determinar onde devo furar? Como posso validar a solução?
6) Dois amigos foram acampar no mesmo lado reto de um rio. Um deles foi visitar o outro amigo, mas antes quis passar pelo rio, andando um caminho mais curto possível. Qual foi este caminho? Como justificar a solução?
7) Um homem viaja a cavalo indo de A a B, como na Figura 3, mas antes passa pelo rio para o cavalo beber água e depois passa pelo pasto para o cavalo comer, seguindo pelo caminho mais curto. Qual é esse caminho? Se for pastar antes de beber água muda alguma coisa?

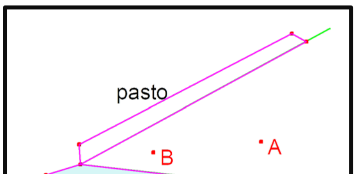

FIGURA 4: Problema do cavalo que bebe e pasta no caminho entre A e B.
FONTE: Autora

8) Duas aves estão sobre dois postes retos em lados opostos de uma ponte sobre um rio. A distância entre as aves e um grão de milho sobre a ponte é a mesma. Determine a posição do milho. O problema tem sempre solução sobre a ponte? (problema clássico na literatura, desde o tempo dos gregos).

A amostra da lista de problemas demonstra uma sequência pedagógica ordenada que leva o aluno a vivenciar o roteiro de construção de conceitos, por exemplo a construção essencial da reta mediatriz entre dois pontos que contém na sua base a interpretação do que seja "um lugar geométrico de pontos equidistantes de dois pontos", um conceito fundamental da matemática de distância entre objetos geométricos e a situação de igualdade das distâncias em situações diversas. Esta lista ilustra problemas de categoria tipo 2 da seção anterior, mostrando a possibilidade de trabalhar esta metodologia na sala de aula.

Registro aqui que, para a exploração dinâmica das possibilidades de configurações geométricas com manipulações de hipóteses, o GeoGebra exerce um papel fundamental para colocar em destaque a estratégia da resolução de problemas de construção geométrica "sem dados numéricos" para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo matemático, sendo a lista acima um exemplo.

Em um dos eventos da OBMEP trabalhei problemas de integração entre a Arte e a Geometria em contextos diversos (BALDIN, 2013). Usar os recursos de GeoGebra para trazer olhares para estruturas históricas (ou outras) da arquitetura artística é uma contribuição da tecnologia para enriquecer o conhecimento cultural. Por exemplo, o reconhecimento das propriedades geométricas da construção com régua e compasso de um arco romano ou gótico como nas seguintes Figuras 5 e 6.

FIGURA 5: Arco romano no Museu Bardo, Beja, Portugal
FONTE: Baldin (2013)

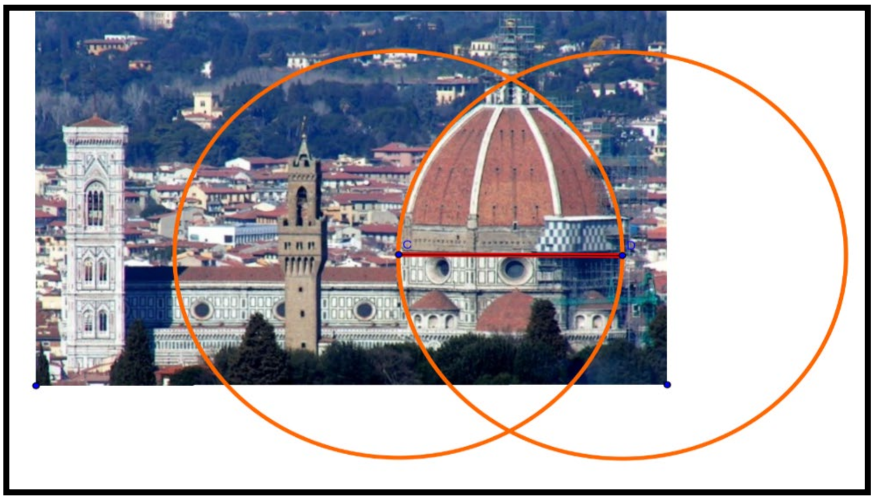

FIGURA 6: Cúpula Gótica da catedral de Florença, Itália
FONTE: Baldin (2013)

Uma aplicação da construção de um arco gótico e um problema de tangência de um círculo dentro de um arco gótico é vista nas rosáceas de vitrais de catedrais de estilo gótico como na Catedral da Sé, na cidade de São Paulo, e outras cidades europeias, entre outras (BALDIN, 2013).

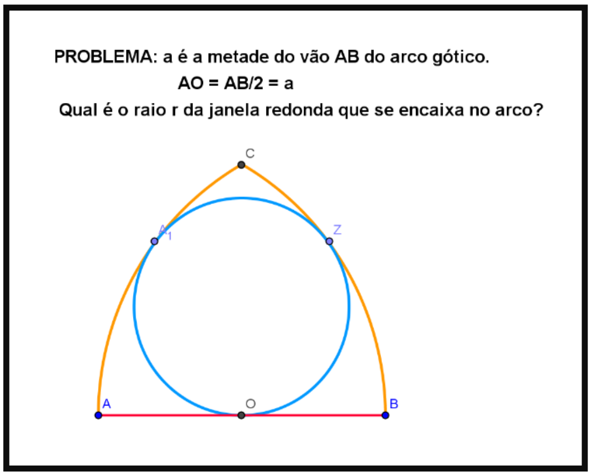

FIGURA 7: Arco gótico e tangência, construção de rosácea no vitral
FONTE: Autora.

Uma solução deste problema foi realizada pelos próprios alunos (9º ano do Ensino Fundamental) e compartilhada durante uma oficina do evento, em que eles apreciaram a organização dos passos da resolução justificados pelos conhecimentos da matemática curricular.

2.2 Exemplos dos cursos para professores de Ensino Fundamental e Médio

Muitas atividades nos livros didáticos não enfatizam o pensamento geométrico, restringindo o objetivo da resolução de um problema geométrico aos cálculos numéricos ou fórmulas algébricas. Isto faz com que se perca a oportunidade de explorar a geometria que propicia generalização de propriedades ou variações em extensões dos argumentos. Por exemplo, o conceito de lugar geométrico de pontos que satisfazem determinadas propriedades, aliado à funcionalidade de construção de lugar geométrico de um programa de Geometria Dinâmica enriquece o caráter geral das construções exploradas para entender propriedades geométricas e a dedução de fórmulas algébricas para caracterizar objetos geométricos, por exemplo, a construção de cônicas: parábolas, elipses e hipérboles. (BALDIN & VILLAGRA, 2002; BALDIN & FURUYA, 2011).

Em particular, um estudo da parábola e funções quadráticas, como foi trabalhado no minicurso "Parábola e Função Quadrática: exploração, conexão e expansão dentro do currículo escolar" ministrado no Congresso Nacional de Matemática Pura e Aplicada- CNMAC em 2021, apresentou para um público de professores de diferentes níveis uma sequência de atividades desde a construção geométrica com método de régua e compasso à exploração de atividades manipulativas como técnicas de origami, aplicação em faróis de carros, espelhos refletores, construção de telescópios, potencializados com a versatilidade do GeoGebra para explorar dinamicamente as propriedades geométricas (BALDIN, 2021).

Este curso incluiu um estudo anterior, apresentado em Baldin (2015) e trabalhado em várias oficinas de capacitação de professores do Ensino Básico, que foi trazido oportunamente para o congresso de 2021 pelo tema explorado. Esse estudo conecta a parábola como gráfico de uma função quadrática e a construção com régua e compasso da cônica parábola como um lugar geométrico de pontos equidistantes de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz), usando as funcionalidades de GeoGebra. Tais conexões são importantes dentro do currículo escolar para mostrar a coerência e a unidade do conhecimento matemático. A Figura 8 ilustra a conexão da geometria sintética da parábola como uma curva cônica com uma visão analítica de uma curva definida por uma equação com coordenadas cartesianas, e que ajuda também a compreender que todas as parábolas são figuras semelhantes (BALDIN, 2015).

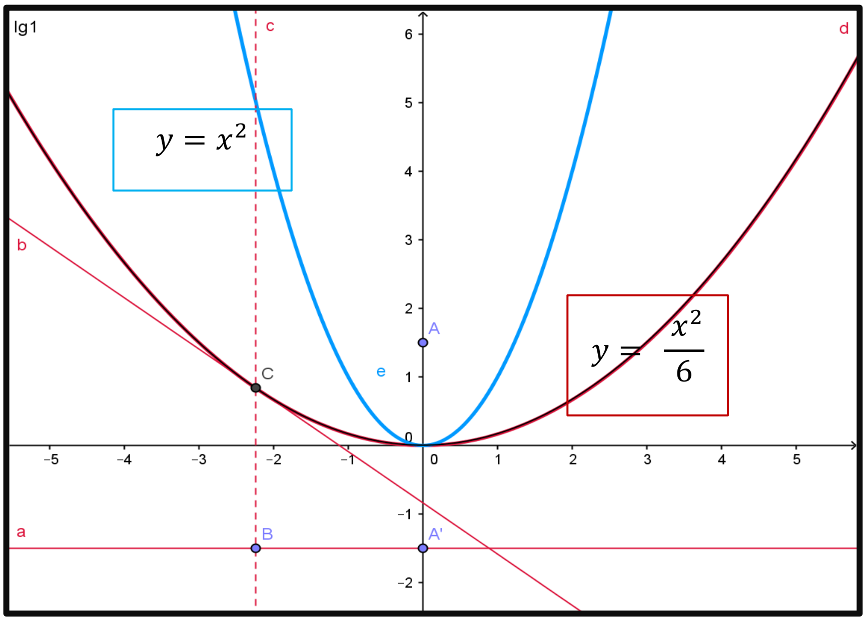

FIGURA 8: Parábola como gráfico de função quadrática e como lugar geométrico.
FONTE: Conferir estudo dinâmico em https://www.geogebra.org/classic/a2v5gv75. Acesso em: 19 ago. 2023.

Para ilustrar a metodologia de resolução de problemas como uma ferramenta didática é necessário que os professores vivenciem, eles próprios, as possibilidades de explorar situações problema a fim de compreender o significado de validar o raciocínio, e especular extensões do raciocínio desenvolvido durante uma resolução.

Nesta direção, o livro em coautoria de Aparecida Francisco da Silva, (BALDIN & SILVA, 2016)[3] foi um resultado do projeto piloto PROF-OBMEP que elaborou material de capacitação para os professores poderem levar os problemas da OBMEP para a sala de aula, dentro do conceito de metodologia de aprendizagem participativa. Neste livro, apresentamos a metodologia de resolução de problemas como ferramenta didática de "ensino por questionamentos" para promover o protagonismo dos alunos. Os problemas não precisam ser de geometria, mas é nos experimentos e simulações de problemas de geometria que a Geometria Dinâmica com GeoGebra apresenta resultados contundentes do seu potencial pedagógico. O livro discute e apresenta a importância de trabalhar efetivamente a metodologia de resolução de problemas junto com professores em sessões de orientação e capacitação, para mostrar como usar as fases da resolução de maneira didática na sala de aula.

Um exemplo que ilustra as recomendações pedagógicas ao professor na resolução e análise de problemas, é o problema na página 27 de Baldin e Silva (2016), cujo enunciado foi proposto no Banco de Questões da OBMEP.

[3] Disponível na aba TÓPICOS PARA PROFESSOR no site https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1 Acesso em: 19 ago. 2023.

O problema é significativo por explorar os elementos da geometria do currículo básico, e por abrir as oportunidades para explorar o potencial da Geometria Dinâmica, como trabalhado através do *script* do GeoGebra disponibilizado nas páginas 83 – 87 do livro.

O enunciado do problema segue:

“Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada segundo as linhas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados como mostrado na Figura 9. Os segmentos AC e BD possuem mesma medida e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos. Qual é o comprimento do segmento AB? Qual é a área de um pedaço triangular? E a área de um pedaço de cinco lados?”

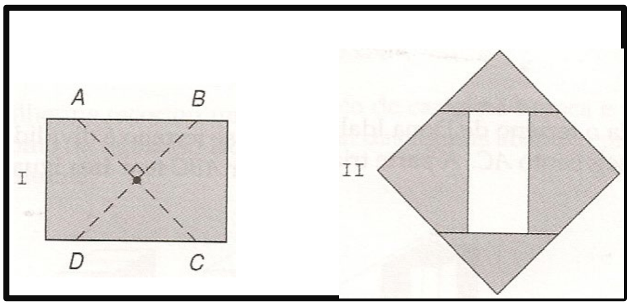

FIGURA 9: Retângulo recortado e composição em quadrado com buraco no meio.
FONTE: Banco de Questões da OBMEP (http://obmep.org.br)

Este problema se relaciona com a categorização Tipo 2 mencionada na seção anterior e a metodologia de resolução de problemas pelo questionamento. Baldin e Silva (2016) trazem o detalhamento da orientação sobre a exploração didática deste problema, desde o uso de material concreto ao uso de GeoGebra para examinar as propriedades essenciais da figura geométrica, em que as medidas dadas pelo problema são irrelevantes, a não ser para calcular resposta numérica às questões perguntadas. Em Baldin (2016) trabalhei uma oficina com este problema para a experiência dos professores.

A fase de compreensão dos dados e a interpretação desses com o reconhecimento de conteúdos que devem ser resgatados dos conhecimentos prévios são essenciais para visualizar as propriedades das peças que compõem a figura original e que dão pistas para elaborar a estratégia de resolução. A justificativa dos passos que compõem a resolução do problema acima, do recorte de um retângulo, inclui a dedução de propriedades de centro do retângulo e a caracterização de um quadrado por meio de suas diagonais.

Esses conhecimentos prévios que conduzem à solução do problema são largamente explorados pelo uso do GeoGebra, através da matemática experimental.

Após reunir todos os ingredientes geométricos relacionados às perguntas do problema, aparentemente a situação se torna estática com a figura à direita da Figura 9, com o quadrado que possui um buraco retangular no meio. Então o potencial de experimentação de GeoGebra entra em ação na simulação de outras variações para fixar os argumentos utilizados para a resolução. A Figura 10 ilustra essa variação.

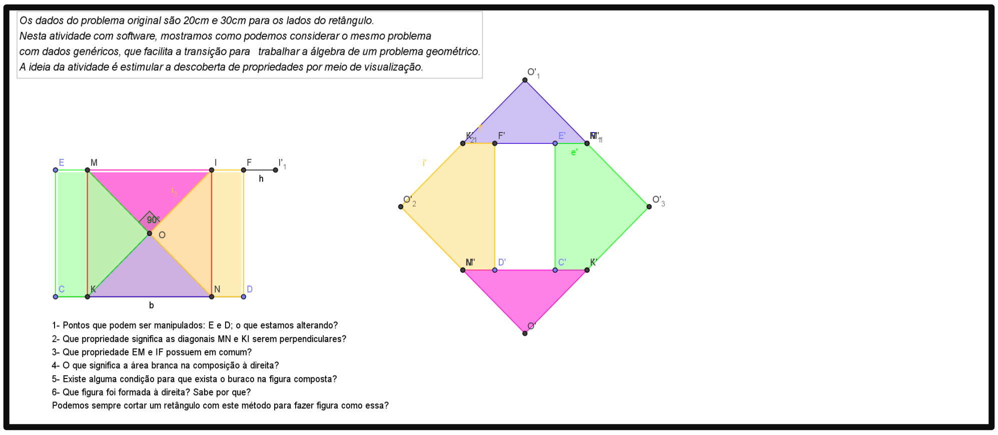

FIGURA 10: Estudo dinâmico com GeoGebra para visualizar a propriedade do buraco.
FONTE: Baldin e Silva (2016, p.83). Construção disponível em https://www.geogebra.org/classic/jgz4zpj7 Acesso em: 19 ago. 2023.

O problema ainda trabalha a dinâmica de translação das peças da decomposição do retângulo original para compor a figura com o buraco. Outra pergunta para explorar o problema e estender o raciocínio é “se os argumentos para calcular a área do buraco continuariam valendo se o quadrado em torno do centro do retângulo, identificado durante a resolução, não tivesse o seu centro coincidente com o do retângulo”. Por exemplo, se o retângulo original fosse cortado em 3 triângulos iguais como parte de um quadrado cujo centro não coincide com o do retângulo, e um polígono de cinco lados, de modo que as peças formam juntas um quadrado como antes, o que poderia acontecer com o buraco? As experiências de manipulação e de animação são ferramentas didáticas para visualizar outras posições possíveis do quadrado dentro do retângulo. Nas páginas 85 a 87 de Baldin e Silva (2016) são vistas as figuras correspondentes a estes questionamentos, junto com o *script* de comandos do GeoGebra para reproduzi-las, para uso do professor.

O problema acima foi apresentado como uma parte de um trabalho (BALDIN, 2013a) no Pre Earcome 6 GeoGebra Conference, Thailand, 2013, para uma audiência de professores e pesquisadores do ensino de matemática, com o objetivo de mostrar uma pesquisa desenvolvida no projeto piloto PROF-OBMEP baseada na fundamentação teórica da Matemática Experimental no ensino da matemática. Posteriormente o problema fez parte de outras apresentações em congressos internacionais até fazer parte do livro (BALDIN & SILVA, 2016).

Uma constatação importante na trajetória da utilização do GeoGebra nos cursos de capacitação de professores de matemática foi que o uso da tecnologia como ferramenta didática envolve inevitavelmente o domínio das funcionalidades do programa de Geometria Dinâmica que não seja apenas técnica, mas a compreensão da *linguagem* organizada dos passos algorítmicos das construções geométricas ou de comandos algébricos. É o pensamento computacional que requer o domínio dos significados dos conceitos básicos como de "objeto livre", "objeto dependente (condicionado ou vinculado)". Se estes conceitos não são plenamente compreendidos, os professores não serão capazes de construir suas próprias figuras e atividades que atendam aos objetivos pedagógicos usufruindo do dinamismo que caracteriza a Geometria Dinâmica e que possibilita a Matemática Experimental dentro do procedimento de Resolução de Problemas. Por isso, o Anexo B de Baldin e Silva (2016) constitui um minicurso sobre o uso do GeoGebra, com atividades passo-a-passo para os professores dominarem o programa e a linguagem das suas funcionalidades, junto com primeiras construções conduzidas através da metodologia de resolução de problemas.

Como mais um exemplo da possibilidade que o uso de GeoGebra permite nas etapas da resolução de problemas, o seguinte exemplo, também inspirado por um problema de uma prova da OBMEP, mostra as possibilidades de expansão desde os anos iniciais do Ensino Fundamental II até o Ensino Médio (BALDIN, 2016a; BALDIN, 2018; BALDIN & SILVA, 2016).

Problema dos triângulos sobrepostos: Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos como na figura. Usando os triângulos formam-se as figuras (a), (b) e (c) nas quais a parte sobreposta está pintada, como na Figura 11. Calcular a área da parte pintada.

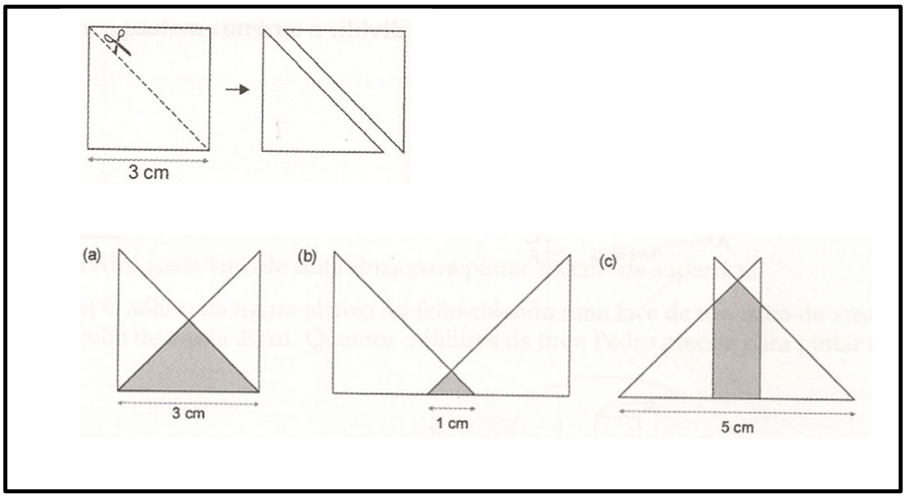

FIGURA 11: Corte de um quadrado e Triângulos sobrepostos.
FONTE: Baldin & Silva (2016, p.30)

Em cada uma das figuras, a área para calcular envolve apenas o conhecimento curricular do Ensino Fundamental, portanto, a possibilidade educativa para desenvolver ideias matemáticas na expansão da fase da validação, variação e investigação na Metodologia de Resolução de Problemas é propiciada exatamente pelo olhar de movimento que o enunciado sugere, o que potencializa o papel do GeoGebra com a simulação e exploração, acompanhando os questionamentos que estimulam a descoberta de novas conexões matemáticas.

O uso de controles deslizantes para acompanhar as manipulações e transformações das figuras é muito didático. Baldin e Silva (2016, pp. 88 - 89) trazem os comandos da programação com GeoGebra para que os professores possam reproduzir as atividades, e apreciarem as explorações como ilustradas abaixo, nas Figuras 12, 13.

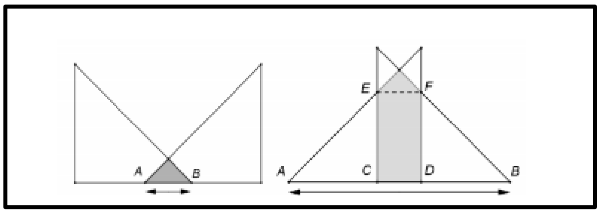

FIGURA 12: Estudando a passagem da figura na sobreposição.
FONTE: Autora

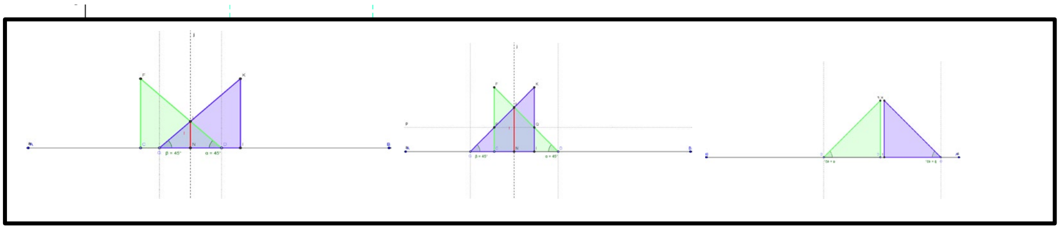

FIGURA 13: Manipulação para explorar a transformação contínua da sobreposição.
FONTE: Autora Ver animação: (https://www.geogebra.org/classic/ckfuzdju). Acesso em: 19 ago. 2023.

A representação do gráfico da função que modela o problema da variação da área na sobreposição dos triângulos, como na Figura 13, surgiu dentro do trabalho em grupo dos professores numa oficina de capacitação.

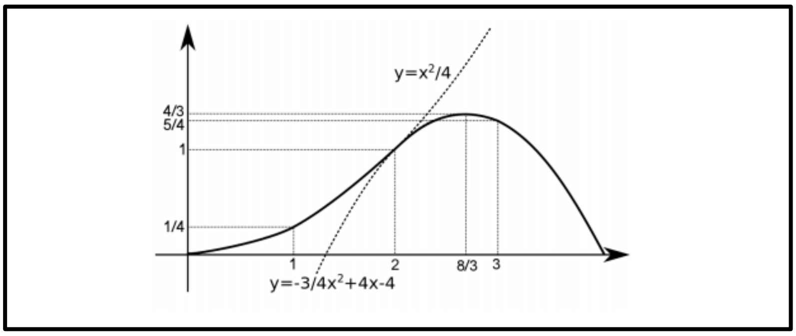

FIGURA 14: Estudo analítico da variação da área como função quadrática por partes.
FONTE: Autora. Ver estudo animado: https://www.geogebra.org/classic/szw3sjqw Acesso em: 19 ago. 2023.

A descoberta dos professores durante a oficina do significado da mudança de domínio das duas funções quadráticas cujos gráficos se unem suavemente para descrever o fenômeno foi um dos pontos altos. Inclusive, a descoberta da área máxima que se deduz a partir do conhecimento curricular e que não era o valor correspondente ao "ponto médio" da segunda metade da diagonal onde passa o vértice do triângulo superior da figura da sobreposição, como uma conjetura aparentemente intuitiva sugerida pelos professores, corrobora um dos princípios de Bailey e Borwein (2003) de que a tecnologia pode desmontar as conjeturas falsas. Este problema, potencializado pelo uso de GeoGebra, exemplifica também o *equilíbrio* entre as abordagens com lápis e papel e as tecnologias, combinando-as segundo os momentos convenientes para alcançar os objetivos de aprendizagem, como na citação de Waits e Demana (1999, p. 7) feita na seção 1.

Considerações Finais

Neste artigo segui um roteiro de caráter narrativo para apresentar uma linha de pesquisa que adotei no tema de formação inicial e continuada de professores no uso de tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática em nível de Educação Básica, apresentando uma fundamentação teórica baseada na Matemática Experimental (BAILEY & BORWEIN, 2003) e na Metodologia de Resolução de Problemas com caráter investigativo e prático para a aprendizagem efetiva dos alunos e professores. Esta linha de pesquisa faz parte das minhas contribuições para a pesquisa mais geral em Ensino de Matemática, mas o caráter pessoal que adotei neste texto tem o objetivo de ilustrar especialmente a jornada de pesquisa que foi iniciada com o desenvolvimento de materiais e metodologias de ensino com uso de tecnologias, na virada do século XXI.

Espero que as experiências narradas aqui sejam uma sugestão da complexidade do caminho assim como dos alcances conquistados. As referências de minha autoria e os exemplos não são exaustivos, foram selecionados para que a narrativa pudesse seguir uma trilha coerente sem desvios no foco. O trabalho continua com teorias e metodologias incluídas no percurso e que permitem aprofundar o conhecimento produzido pela pesquisa. Por exemplo, não foram abordados os aspectos teóricos de conhecimento pedagógico de conhecimento-PCK do Shulman que sustenta a linha mais completa das minhas pesquisas e a extensão desse conceito na presença de tecnologia, TPACK, que apoia minhas pesquisas no uso pedagógico de tecnologia além da Geometria Dinâmica. Neste texto escolhi não incluir essas perspectivas.

Não me referi também a trabalhos realizados nos projetos de investigação com os alunos de graduação ou de pós-graduação, tampouco a trabalhos que mostram possibilidades de estudo que utiliza a Geometria Dinâmica em tópicos especiais de matemática. Entretanto comento a importância de uma pesquisa originada em 2007 em um projeto de Iniciação Científica, sob minha orientação, sobre as possibilidades do *software* de geometria 3-dimensional no ensino de geometria na sala de aula, o que motivou o estudante para o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, dentro da linha de pesquisa Lesson Study, inédito até então no Brasil, relatado em Baldin (2010), em um congresso internacional sobre Lesson Study. O olhar exploratório e investigativo no planejamento de aulas efetivas que permitem descobrir o potencial da Geometria Dinâmica constitui uma conquista que faz parte das minhas pesquisas na formação de professores.

A investigação e a comunidade colaborativa do GeoGebra seguem adiante, e esse número temático será um marco para registrar os avanços já conquistados pela comunidade.

Referências

BAILEY, D.H., BORWEIN, J.M.; **Mathematics by Experiment: plausible**

reasoning in the 21st century. A. K. Peters Publishing. 2003.

BALDIN, Y.Y., *On some important aspects in preparing teachers to teach with technology.* Proceedings of 2nd International Congress on Teaching Mathematics-ICTM2, Crete. 2002.

BALDIN, Y.Y. ; VILLAGRA, G.A.L.;´**Atividades com Cabri-Géomètre II para Cursos de Licenciatura e Professores do Ensino Fundamental e Médio**. EdUFSCar. São Carlos. 2002.

BALDIN, Y.Y., *Resolução de problemas e o Ensino de Geometria.* Minicurso na Reunião Regional da SBPC , Teresina PI. 2004.

BALDIN, Y.Y., *Relação entre Metodologia de Resolução de Problemas e o conceito de Matemática Experimental.* Apresentação da palestra na PUC-SP. 2005.

BALDIN, Y.Y., *Explorando a Geometria Dinâmica em diferentes estratégias de Ensino de Matemática.* Apresentação da palestra no Seminário de Geometria Dinâmica, PUC-RJ. 2006.

BALDIN, Y.Y., *Explorando a Resolução de Problemas:visualização e validação.* Minicurso do evento Encerramento PIC-OBMEP (2006). Mairiporã. 2008.

BALDIN, Y.Y. *The Lesson Study as a strategy to change the paradigm of teaching mathematics: a Brazilian experience*. Presentation APEC Tsukuba Conference. Tokyo: University of Tsukuba. 2010.

BALDIN, Y.Y., FURUYA, Y. K. S. ; **Geometria Analítica para Todos, atividades com Octave e GeoGebra**. São Carlos: EdUFSCar. 2011. ISBN : 978-85-760-0249-9

BALDIN, Y.Y., *Problemas de geometria que não são trabalhados na escola- Nível 1,* Oficina EHH- 2012-OBMEP. Friburgo, 2013.

BALDIN, Y.Y., *A study of quadrilaterals aiming at the development of skills to solve area problems without formulae*. Workshop presented in Pre EARCOME6 GeoGebra Conference. Phuket, Thailand. 2013a.

BALDIN, Y.Y., *Mathematics and Mathematics Education: the technology as a strategy of a hermeneutical approach of the History of Mathematics to teach school mathematics content.* Presentation at Tsukuba Global Science Week. Tsukuba, Japão. 2015.

BALDIN, Y.Y., SILVA, A.F. ; **Resolução de Problemas na Sala de Aula : uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino de Matemática**, Volume 1. Rio de Janeiro : IMPA/OBMEP. 2016. ISBN : 978-85-244-0424-5.

Acessível pelo site https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1

BALDIN, Y.Y., *Challenges in Integrating Technology in Teaching and Learning*

Mathematics in Basic Education. In Electronic Proceedings of 21st Asian Technology Conference in Mathematics: Teaching and Learning Mathematics, Science and Engineering through Technology. Thailand: Mathematics and Technology, LLC. 2016a. ISSN 1940-4204.

Acessível pelo site https://atcm.mathandtech.org/EP2016/invited.html

BALDIN, Y.Y., *GeoGebra como apoio ao "Ensino por questionamentos" para a aprendizagem por descobertas no Ensino Básico*. Em Córdoba, FJ, Ciro, LA & Molina, JC (Eds.) Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación, Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016. Medellín. Pp. 173-176. 2018.

BALDIN, Y.Y., *Minicurso Parábola e Função Quadrática : exploração, conexão e expansão dentro do currículo escolar*. XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC. 2021.

LABORDE, C. *Technology as a tool to mediating knowledge in the teaching of Mathematics*. In Proceedings of 8th Asian Technology Conference in Mathematics – ATCM. Volume 1. Taiwan. 2003.

MARIOTTI, M. A., CERULLI, M.; *Semiotic mediation for algebra teaching and learning*. In Proceedings of 25th Conference for the International Group for the PME. Volume 3, p. 225-232. 2001.

PAPERT, S**., Mindstorms : Children, Computers and Powerful Ideas**. New York : Basic Books. 1980. (Título da tradução em português : Logo : Computadores e Educação. São Paulo : Editora Brasiliense. 1985.)

PERRENOUD, P., **Dez novas competências para ensinar**. Artmed Editora. 2000.

POLYA, G. **How to Solve it.** Princeton University Press 1945. (Título em português : A Arte de resolver problemas)

WAITS, B.K., DEMANA, F.; *Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future*. In E. Laughbaum (Ed) Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education, A Collection of Papers, The Ohio State University. 1999.