http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i2p221-238

Amadurecendo como professor, pesquisador e colaborador com o GeoGebra

Maturing as a teacher, researcher and collaborator with GeoGebra

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES[1]
https://orcid.org/0000-0002-2596-0118

RESUMO

Neste texto, relato minha trajetória como professor, pesquisador e formador de professores, tendo como pano de fundo, minhas perspectivas como usuário do GeoGebra e membro de uma comunidade que busca aprender colaborativamente. Meu principal objetivo é compartilhar experiências e diferentes produções acadêmicas, incentivando professores de matemática a procurar maior envolvimento com o GeoGebra e formações continuadas similares ao Curso de GeoGebra.

Palavras-chave: *Curso de GeoGebra. Aprendizagem Colaborativa. Ensino de Matemática.*

ABSTRACT

In this text, I describe my trajectory as a teacher, researcher and teacher trainer, against the backdrop of my perspectives as a GeoGebra user and member of a community that seeks to learn collaboratively. My main objective is to share experiences and different academic productions, encouraging mathematics teachers to seek greater involvement with GeoGebra and continuing education similar to the GeoGebra Course.

Keywords: *GeoGebra Course. Collaborative Learning. Mathematics Teaching.*

[1] Universidade do Estado de Mato Grosso. williamvieira@unemat.br

Uma breve introdução

Ao longo dos últimos anos, tem sido mais fácil encontrar textos acadêmicos, grupos de discussões e repositórios de mídias digitais. De modo que tenho refletido e concordado com a analogia entre o dilúvio bíblico e o dilúvio informacional, apresentado em (LÉVY, 1999). Nessa obra, podemos reconhecer várias proposições interessantes a esse universo digital, no entanto, chamo atenção a um argumento especial que ele explora: uma analogia à história sobre a arca de Noé.

Segundo este autor, tal arca, quando fechada, representa a totalidade cultural reconstituída. A reorganização do macrocosmo por vir, foi definida através das escolhas dos elementos e seres que deveriam ser conservados ou preservados. O autor acaba concluindo que, no contexto do dilúvio informacional, não há possibilidade de se predefinir esta totalidade cultural a ser preservada. Este segundo dilúvio não terminará. Serão infindáveis outras arcas, buscando manter-se navegando e constituindo suas escolhas culturais.

Embora, várias destas embarcações acabem por naufragar, acredito não ser este, o destino da comunidade que se reúne em torno do *software* GeoGebra.

Neste texto relato minha trajetória como professor, pesquisador e formador de professores, tendo como pano de fundo minhas perspectivas como usuário do GeoGebra e membro de comunidade que busca aprender colaborativamente.

São três seções. Na primeira, sintetizo minha trajetória como usuário do GeoGebra e sua influência em minha carreira profissional. Em seguida, escrevo sobre a importância e características do Curso de GeoGebra, uma comunidade de aprendizagem colaborativa da qual participo. Aproveitando-me de mais duas subseções para escrever sobre o canal de vídeos OGeoGebra e sobre o I Encontro do Curso de GeoGebra. Na terceira seção, apresento uma proposta pessoal, buscando exemplificar o potencial educacional de fazermos uso de Cálculo Algébrico Simbólico. Finalizo, apontando minha análise sobre tais experiências e os estudos que procurarei empreender.

Vamos ao texto!

1. Da experiência com diferentes *softwares* educativos para o ensino de matemática até o GeoGebra: uma trilha de aprendizagem colaborativa

Nesta seção, busco resumir minha trajetória como usuário do GeoGebra e os caminhos percorridos desde então.

Enquanto estudante de Licenciatura em Matemática, de 1997 a 2001, conheci alguns *softwares* educacionais voltados à matemática. Aprendi algo do Cabri Geometry II Plus, Super Logo, Winplot, Maple, Mathematica, Mupad e Maxima, contexto no qual comecei a reconhecer as potencialidades e as dificuldades do uso de diferentes tecnologias e mídias digitais na Educação Matemática. Precisei lidar com a transição entre a linguagem da notação matemática e seus respectivos significados nas diferentes sintaxes das linguagens computacionais. Lidei com outros idiomas e aprendi como utilizar as ferramentas e modos peculiares de uso de cada *software*. Havia também a necessidade de estar apto a trabalhar com as especificidades de cada sistema operacional em que cada *software* poderia ser instalado. Uma das dificuldades principais era que sempre havia questões correlatas aos limites de processamento e armazenamento em memórias físicas ou virtuais dos computadores. Não havia opção, lidava com estas questões, ou simplesmente não os utilizava.

Usuários de *softwares* educacionais, possivelmente, migram seus esforços para outras opções e por razões como custo financeiro, disponibilidade em diferentes idiomas, adaptabilidade a diferentes sistemas operacionais e dispositivos eletrônicos, e principalmente, funcionalidades que sejam mais adequadas às suas intenções didáticas e práticas escolares.

Destaco que os desenvolvedores do GeoGebra, desde 2003, procuram superar a todas estas questões e muitas outras. Por exemplo, é possível constatar a alta adaptabilidade a diversos dispositivos tecnológicos.

Em https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation estão disponíveis todas as versões do GeoGebra e as respectivas instruções para instalação nas principais plataformas e sistemas operacionais de dispositivos móveis e computadores. Não podemos esquecer a grande proximidade entre a linguagem e notação matemática com as linguagens de programação presentes no GeoGebra. Sendo impossível não reconhecer o alto apelo didático das diferentes representações algébricas e gráficas totalmente interligadas e dinâmicas.

No tocante as áreas de conhecimento matemático, o GeoGebra Clássico reúne funcionalidades específicas para: geometria bidimensional e tridimensional; álgebra elementar e linear; gráficos cartesianos, polares e isométricos; probabilidade; estatística e matemática financeira, em um único pacote, interligando todas as representações por meio de seis interfaces visuais (duas janelas de visualização 2D, uma janela de visualização 3D, uma janela de visualização de representações algébricas, uma janela com planilha eletrônica e uma janela para cálculos simbólicos chamada de CAS). Todas as janelas e elementos são customizáveis, podendo-se modificar a aparência e omitir/exibir qualquer um deles. É importante ressaltar que há versões equivalentes à maioria das janelas, voltadas para dispositivos móveis.

Cabe também ressaltar a diversidade de concepções sobre matemática e educação dos usuários do *software*, além da criatividade das construções e discussões circunscritas ao contexto do GeoGebra. Contexto este, provido de práticas culturais com potencial educacionalmente significativo, reunindo diversos perfis profissionais de usuários que o desenvolvem, pesquisam, exploram e compartilham suas produções e experiências. Se você ainda não conhece, é indispensável acessar a seção do site do GeoGebra destinada ao compartilhamento de produções dos utilizadores do programa[2].

Atuando como docente em licenciaturas em Matemática desde 2002 e usuário contumaz do GeoGebra desde 2007, meu interesse em pesquisar essa possível forma de cultura em torno do GeoGebra, inicialmente, levou-me a estudar e reconhecer quais questões interessavam aos professores, suas referências, modos de aprender a lidar com o *software*, potencialidades didáticas que justificam o uso desse *software* e as concepções correlatas sobre matemática e ensino.

Nos primeiros quatro anos, devido a escassa literatura sobre o GeoGebra, adaptei minhas práticas escolares com outros *softwares* para o GeoGebra. Iniciei o doutorado em 2012 e tendo o GeoGebra como objeto de estudo, consegui dedicar-me às atividades de pesquisa e revisão de literatura, emiti pareceres para artigos de revistas e eventos do GeoGebra. Um grande momento de crescimento foi em 2014, quando participei como cursista da 7ª edição do Curso de GeoGebra. Desde então, tenho sido um colaborador, hora moderando, hora coordenando e produzindo materiais, da 8ª à 21ª edição deste curso, o qual pode ser reconhecido em detalhes no site www.ogeogebra.com.br e que veremos mais detalhadamente na próxima seção deste texto.

Ainda neste período, participei de mesas redondas *online* que tratavam do GeoGebra e dediquei-me à aprendizagem de construções diversas com esse *software*. Aprendi a usar a plataforma www.geogebra.org e compor vídeos que sugerem modos de produzir e pensar sobre e com o GeoGebra. Estudei partes do código fonte do *software*, visando reconhecer como os desenvolvedores se aproximam das estratégias matemáticas em seus algoritmos. Experimentei o *software* em diferentes sistemas operacionais e dispositivos eletrônicos. Desde então, também tenho interagido e contribuído com postagens em grupos de redes sociais e no próprio fórum do site oficial.

Em 2016, apresentei uma tese (GONÇALVES, 2016) na qual defendo que professores de matemática que usam o GeoGebra transitam pela Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra e que neste complexo movimento, precisa lidar com as limitações do *software* para potencializar os diferentes modos de produção de significados matemáticos e incitar posturas que visem estimular o pensamento crítico. Em resumo, apresentei uma interpretação do movimento entre os jogos de linguagens, que aponta o transitar partindo-se das possibilidades semióticas do movimento componente figural – componente conceitual (GRAVINA, 2001) da Matemática do GeoGebra, pautando-se no pragmatismo da Matemática da Escola, para possibilitar chegar aos significados matemáticos formais da Matemática do Matemático.

Percebo o GeoGebra muito mais do que um software. Trata-se de uma grande comunidade internacional que produz e compartilha diversas possibilidades para a

[2] https://www.geogebra.org/materiais

aprendizagem matemática. No próximo capítulo, falarei sobre o curso de GeoGebra do qual faço parte e que criou uma comunidade de colaboradores.

2. O Curso de GeoGebra

Nesta seção, intento indicar a importância e características do Curso de GeoGebra, por ser a principal comunidade de aprendizagem colaborativa da qual faço parte. Além disso, veremos rápidas subseções, indicando outras relevantes produções advindas da organização e realização do curso.

O curso de GeoGebra tem o objetivo de "capacitar professores e futuros professores de Matemática nos aspectos tecnológicos do *software*, bem como fomentar reflexões sobre seu uso em situações de ensino e aprendizagem de Matemática" (DANTAS, 2016, p. 64) e já contribuiu com a formação de mais de 5000 professores de todos os estados brasileiros e até de países estrangeiros como Colômbia, Peru, Equador, Argentina, Venezuela, Uruguai, Moçambique, Angola e Portugal.

A primeira edição do curso de GeoGebra foi realizada na modalidade semipresencial em agosto de 2012 pela Universidade Estadual Paulista (Unesp) de Rio Claro, sob coordenação de Romulo Campos Lins com professores tutores de Educação Matemática do Programa GESTAR II. Nessa edição por ser necessária a presença nos encontros presenciais, houve poucos inscritos. Em seguida, em novembro do mesmo ano, ofertaram outro curso com os mesmos conteúdos programáticos, mas inteiramente online, possibilitando a participação de professores cursistas de vários estados do Brasil. Em decorrência das sugestões dos concluintes dessa edição, houve modificações na estrutura do curso e ofertou-se as edições 3, 4 e 5.

Segundo (DANTAS et al, 2016), a análise das respostas dos cursistas nos formulários de avaliação dessa edição, resultou em uma listagem de apontamentos por parte da equipe organizadora, interrupção na realização de novas edições e reestruturação do projeto de curso para a constituição da estrutura de um espaço de formação colaborativa. A partir da sexta edição houve uma elevada procura pelo curso, de forma crescente a cada edição, até que a quantidade de vagas ofertadas chegou ao número de 600. Em retrospecto, entre os anos de 2014 e 2022, foram oferecidas 6340 vagas para cursistas, distribuídas em 13 edições, sendo 250 destinadas aos interessados de outros países. De modo que efetivamente, já foram certificados, pelo menos 6000 participantes, entre cursistas e moderadores.

Em 2017 tornei-me coordenador de um projeto de pesquisa apoiado pela Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de Mato Grosso - FAPEMAT, com o título *Tecnologias Digitais para Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática: Composição, implementação e estudo de uma estrutura tecnológica com base no GeoGebra, ambiente Moodle e o conceito de Interação Colaborativa*. Em parceria com o Prof. Dr. Guilherme Francisco Ferreira e o Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas (idealizadores do Curso de

GeoGebra), definimos como interesse central desta pesquisa, a investigação dos processos de interação e de colaboração em uma comunidade online de Professores de Matemática.

Com base no Modelo dos Campos Semânticos de Lins (1999, 2001, 2012), demos visibilidade às características e à dinâmica de interações e de colaborações entre cursistas, a serem observadas em um curso de aperfeiçoamento conceitual e profissional. Para isso, lançamos nosso olhar sobre a consolidação de uma estrutura tecnológica que possibilitasse a professores envolvidos em um curso de extensão online dialogar com seus pares, e, por meio de suas tomadas de decisões, estabelecessem redes colaborativas. Alcançamos uma clara relação entre a autogestão característica do modo de organização de comunidades online e aquilo a que, conforme pesquisas anteriores (DANTAS et al, 2016), designou como interação colaborativa.

Nossa atuação centrou-se na formação de Professores de Matemática, considerando a aprendizagem sobre a utilização do *software* GeoGebra e o estudo de conceitos relacionados a Matemática Escolar. Nossa intenção foi construir, implementar e estudar uma interface social acadêmica, baseada em diversas edições de um curso de extensão online, ofertado e organizado junto ao ambiente virtual de ensino e aprendizagem denominado Moodle, em que professores se relacionaram com colegas de profissão e estudo, produzindo e se constituindo colaborativamente.

Atualmente, o curso possui uma carga horária de 60 horas, distribuídas em 8 módulos semanais, onde os alunos são orientados a assistir às vídeos-aulas e realizar leituras dos materiais complementares, os quais são disponibilizados no início de cada módulo e ficam disponíveis até mesmo após o término do curso. Todas as tarefas pautam-se em estimular os cursistas a apresentarem suas produções com o GeoGebra e a discutir as produções de seus colegas. Nenhum cursista precisa aprender sozinho e, para isso, contamos com o apoio de pelo menos 130 professores voluntários, ex-cursistas que moderam e acompanham a aprendizagem dos cursistas.

Em suma, as vagas ofertadas pelo curso são limitadas e preenchidas em pouco tempo, o que demonstra grande interesse, principalmente por parte dos professores, em conhecer e entender o GeoGebra e suas funcionalidades.

Desse modo, apoiamos a formação de professores acerca do conhecimento matemático, possibilitando o desenvolvimento de estratégias didático pedagógicas para a inserção de professores que ensinam matemática, entre outros, no uso de tecnologias digitais.

2.1 Os vídeos produzidos para o curso

Um importante aspecto do Curso de GeoGebra é a aprendizagem a partir de videoaulas. Este trabalho foi iniciado pelos professores Guilherme Francisco Ferreira e

Sérgio Carrazedo Dantas, criadores do canal do YouTube carinhosamente chamado *oGeoGebra* e disponível em https://www.youtube.com/@ogeogebra/featured. O canal foi criado em 21 de fevereiro 2014, inicialmente voltado para hospedar as videoaulas do Curso de GeoGebra de modo gratuito e podendo exibi-las na plataforma do curso.

Com a intenção de ampliar as possibilidades comunicativas no Curso de GeoGebra, os professores Guilherme e Sérgio perceberam que os vídeos alcançavam dimensões maiores para estimular os participantes.

Vejamos alguns excertos contendo comentários de usuários do Youtube:

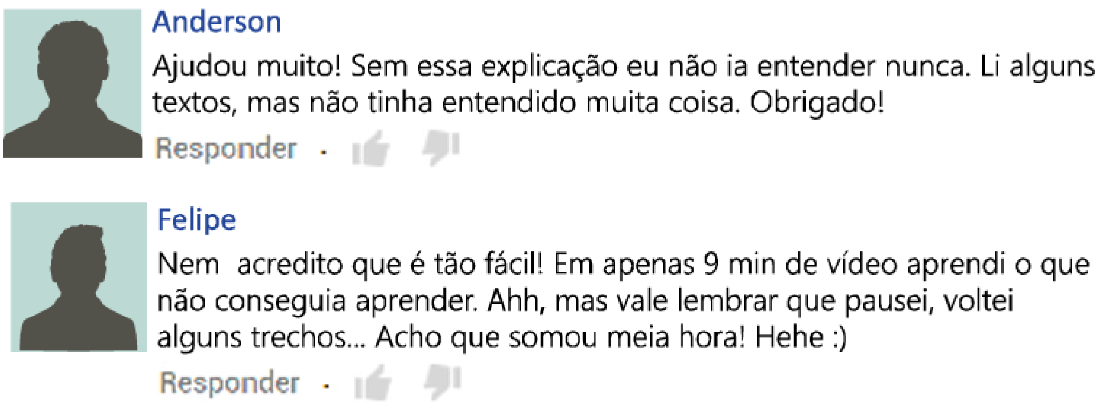

Figura 1: Comentários de cursistas após assistir a vídeos do Prof. Sérgio Dantas
Fonte: Uma perspectiva para design e construção de vídeo-aulas (DANTAS, 2015).

Segundo Dantas (2015, p. 3) "Depoimentos como esses possibilitam acreditar que esses materiais são fonte de consulta e servem, em muitos casos, como material de apoio para estudantes que frequentam escolas e universidades.". Hoje em dia, tais comentários são amplamente encontrados em vídeo aulas disponíveis na página ogeogebra do youtube.

Ainda neste mesmo sentido, podemos encontrar comentários significativos dos cursistas do Curso de GeoGebra:

"Assisti todas as 24 aulas dessa playlist. Parabéns e muito obrigado pelo curso e conteúdo, foram muito importantes para mim, já utilizei algumas coisas aprendidas, e o bom é que está sempre disponível para novas consultas. Vou migrar para outra playlist e continuar aprendendo. Mais uma vez, parabéns, pelo conteúdo, pelo trabalho, pelas aulas, sempre bem elaboradas!!!"

"Acabei de assistir todos os 40 vídeos dessa série. De coração muito obrigado pelo seu tempo e energia por disponibilizar esse conhecimento. Será usado em sala de aula com certeza. Abraço, sucesso e muita saúde!"

"Olá professor, aula muito legal. Estou aprendendo muito. Detalhe: não é nada muito óbvio, o passo a passo que vc faz é ótimo, ajuda muito. Obrigada!"

“Parabéns!!! O curso foi sensacional!!!! Obrigado por compartilharem os conhecimentos!”

Há vários outros comentários prestigiosos e outros de natureza inquisitiva, denotando a continuidade da relação de aprendizagem que tais vídeos provocam. A natureza destas videoaulas acabou por indicar um estilo didático, característico ao curso:

> As imagens da tela do computador acompanhadas da explicação oral do professor determinam o ritmo e o curso da narrativa quando se apresenta um dado argumento. O conteúdo desse argumento é apresentado com a espontaneidade e a fluência características às utilizadas por esse profissional em salas de aula. Somam-se a esses elementos as possibilidades oferecidas pelos recursos audiovisuais destacados acima. Essa articulação de voz, textos, imagens e animações têm por objetivo provocar um conjunto de estímulos necessários à produção de conhecimentos. (DANTAS, 2015, p. 6).

Com o tempo a dimensão do canal se ampliou e acabamos por produzir vídeos para além das intenções iniciais do curso. Várias pessoas, cursistas e não cursistas, começaram a apresentar pedidos e questionamentos acerca do GeoGebra, de modo que produzimos mais vídeos para atender tais demandas.

Consequentemente, nos períodos entre as edições do curso, o canal tornou-se uma via de aprendizagem profícua e colaborativa. Atualmente, o canal conta com quase 13 mil inscritos, disponibilizando um total de 258 vídeos públicos, totalizando mais de 1 milhão de visualizações e mais de 80 mil horas de exibição dos vídeos.

É importante destacar aos leitores deste texto que o canal é um espaço bem organizado, apresentando várias *playlists*, com temáticas voltadas a diferentes necessidades e níveis de conhecimento sobre o GeoGebra e seu uso em sala de aula. Por fim, convidamos os leitores que ainda não conhecem o canal, a visitá-lo e a explorá-lo.

2.2 Pesquisas desenvolvidas a partir do curso

Nesta seção, registramos a indicação de textos resultantes de pesquisas correlatas às pesquisas e estudos que difundimos a partir do Curso de GeoGebra.

O projeto de pesquisa apoiado pela Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de Mato Grosso - FAPEMAT, com o título *Tecnologias Digitais para Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática: Composição, implementação e estudo de uma estrutura tecnológica com base no GeoGebra, ambiente Moodle e o conceito de Interação Colaborativa*, já gerou dissertações de mestrado, monografias, artigos em revistas acadêmicas e indexadas, bem como em anais de eventos acadêmicos.

Tratando-se de produções que visavam atender aos objetivos do projeto de pesquisa, podemos, resumidamente, registrar que tais estudos buscaram organizar análises sobre diferentes conteúdos matemáticos, tratados com o apoio do GeoGebra. Há estudos sobre

Cálculo Diferencial, Funções para o Ensino Médio, Geometria Espacial, Álgebra e Aritmética, entre outras produções interessantes aos usuários de GeoGebra que possuam intenções didáticas ou de pesquisa correlacionada. Há, entre tais textos, reflexões e orientações acerca das interações entre cursistas e moderadores, currículo escolar e atitudes comportamentais de usuários do GeoGebra.

Estas publicações estão elencadas nas referências deste texto e convidamos os leitores a também acessá-las e lê-las para aprofundamento sobre o curso e o GeoGebra.

2.3 I Encontro do Curso de GeoGebra

Nesta breve seção, registro indicações acerca de um encontro virtual, de caráter acadêmico que culminou numa reunião calorosa e produtiva, entre diversos participantes de várias edições do Curso de GeoGebra.

O I Encontro do Curso de GeoGebra, visou reunir estudantes, professores/as, pesquisadores/as e utilizadores/as do GeoGebra para compartilhar modos de uso do programa, ideias para sala de aula de Matemática, resultados de pesquisa e de experimentações. Realizado no período de 06/09/2021 a 07/09/2021, contando com a participação síncrona de centenas de pessoas e certificação de 491 inscritos. Três palestras online e ao vivo foram transmitidas e gravadas. Cinco salas virtuais com apresentações científicas foram organizadas e gravadas, sistematizando a participação de 50 autores e 42 coautores, através de 48 resumos escritos destas apresentações científicas. As quais consistiram na exibição e discussão de 48 vídeos produzidos pelos participantes do evento.

A maioria das informações e produções do evento está disponível em https://ogeogebra.com.br/site/1o-encontro-do-curso-de-geogebra.php.

Para acessar e assistir às gravações das salas com as apresentações científicas, dispomos os seguintes links:

Sala 1:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTX9bwMlhDLJSuqgOzx5s8Sh

Sala 2:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTX1-zqKa-k4sOMjOYcnRTtK

Sala 3:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTVkn1a_bcRvGhLmrKDVF4ES

Sala 4:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTUwr5IVWnSnIowOh11pLQSA

Sala 5:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTWlVIFc6pgzAqnsjcKpOxX9

Sala 6:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTVvDnuwOtesOYxgPHmNjVrl

Sala 7:

https://youtube.com/playlist?list=PLZJbXU8AYkTXwTJ7x1RABmdCOe7Tsfps2

Para mim, por meio de texto, é impossível descrever e comunicar toda a riqueza e diversidade de conhecimento sobre GeoGebra e Ensino de Matemática presentes nas palestras e apresentações científicas. Por tal razão, peço e insisto para que os leitores procurem acessar e aprender com tais gravações.

Há uma miríade de possibilidades didáticas e pedagógicas, concomitantes a esta comunidade constituída em torno do GeoGebra. De modo que, efusivamente, defendo que estas propostas sejam reconhecidas e exploradas nas escolas. Na próxima seção, apontarei uma proposta advinda de minhas experiências e pesquisas sobre o curso, buscando exemplificar o potencial educacional que circunscreve o trabalho com o GeoGebra.

3. Algumas possibilidades com a janela CAS

Se você já usou o GeoGebra, provavelmente já se encantou com alguma animação geométrica ou com os gráficos bem definidos e manipuláveis. E, possivelmente, julga interessante mostrar interpretações geométricas de situações problema, como a de encontrar soluções para sistemas de equações. Ilustremos esta última afirmação com um exemplo.

Consideremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y-z=1-I \\ 2x-y+z=2-II \\ x+3y+7z=3-III \end{cases}$$

Uma possível interpretação geométrica seria considerar cada equação como sendo a de um plano no espaço tridimensional. Com o GeoGebra é relativamente simples construir tal representação. E a resolução do Sistema de Equações pode ser obtida ao se perceber que a cada dois planos temos uma reta como resultante da intersecção. De modo que, com apenas duas das retas possíveis de se obter, podemos mostrar que a intersecção resultante será um ponto. Veja a Figura 2:

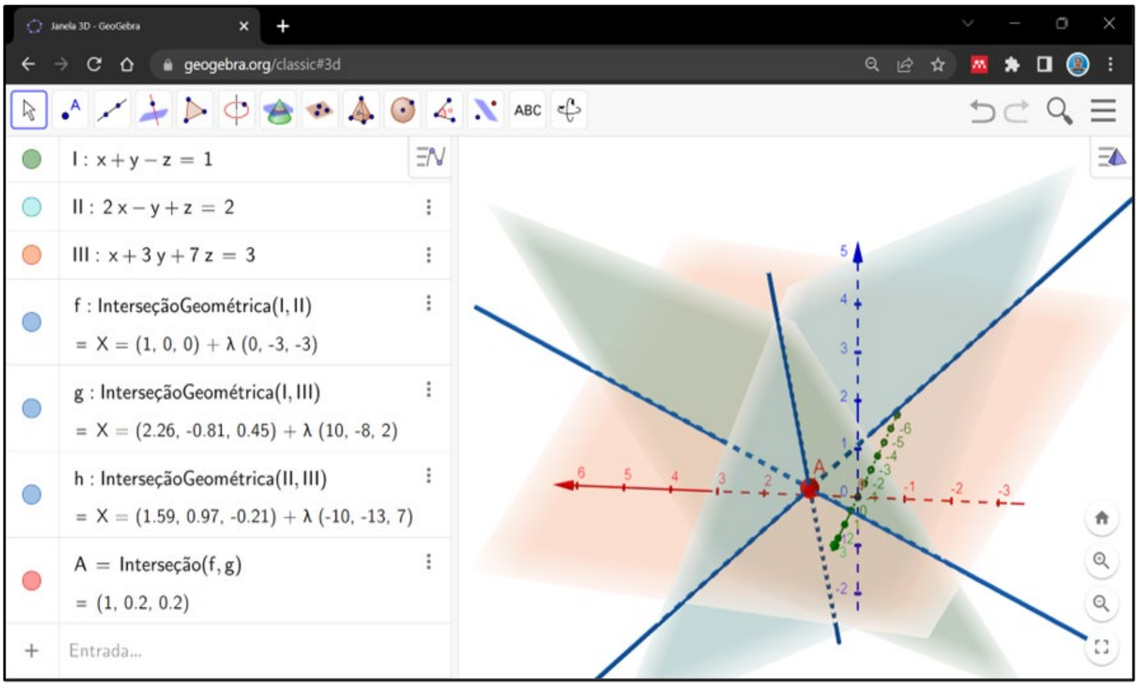

Figura 2: Resolução do Sistema de Equações 1 com apoio do GeoGebra
Fonte: o autor

É inegável o impacto positivo que tal construção pode propiciar à compreensão do problema, além de sugerir outro modo de resolvê-lo. No entanto, chamo atenção a uma resolução convencionalmente presente nas aulas de matemática.

Estou falando da resolução algébrica a qual apresento uma possibilidade na Figura 3:

$$\begin{cases} x+y-z=1 - I \\ 2x-y+z=2 - II \\ x+3y+7z=3 - III \end{cases}$$

$$I+II$$
$$3x=3 \rightarrow x=\frac{3}{3}$$
$$x=1 - IV$$
$$IV \rightarrow III$$
$$1+3y+7z=3$$
$$3y+7z=2 - V$$
$$IV \rightarrow I$$
$$1+y-z=1$$
$$y=z - VI$$

$$VI \rightarrow V$$
$$3z+7z=2$$
$$10z=2$$
$$z=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} - VII$$
$$VII \rightarrow VI$$
$$y=\frac{1}{5} - VIII$$
$$S=\left\{x=1, y=z=\frac{1}{5}\right\}$$

Figura 3: Resolução algébrica manuscrita do Sistema de Equações 1
Fonte: o autor

A depender dos objetivos didáticos e do nível escolar, a resolução algébrica da Figura 3, mais comum ao contexto das aulas de matemática, demandaria alguma estratégia de aproximação à resolução apresentada na Figura 2. Em alguns casos, talvez, tal resolução nem seja adequada. Em tais situações, julgo muito pertinente que busquemos explorar as funcionalidades da janela CAS, na qual podemos implementar cálculos simbólicos e dar vazão à miríade de formas de se resolver algebricamente tal questão. Veja a Figura 4:

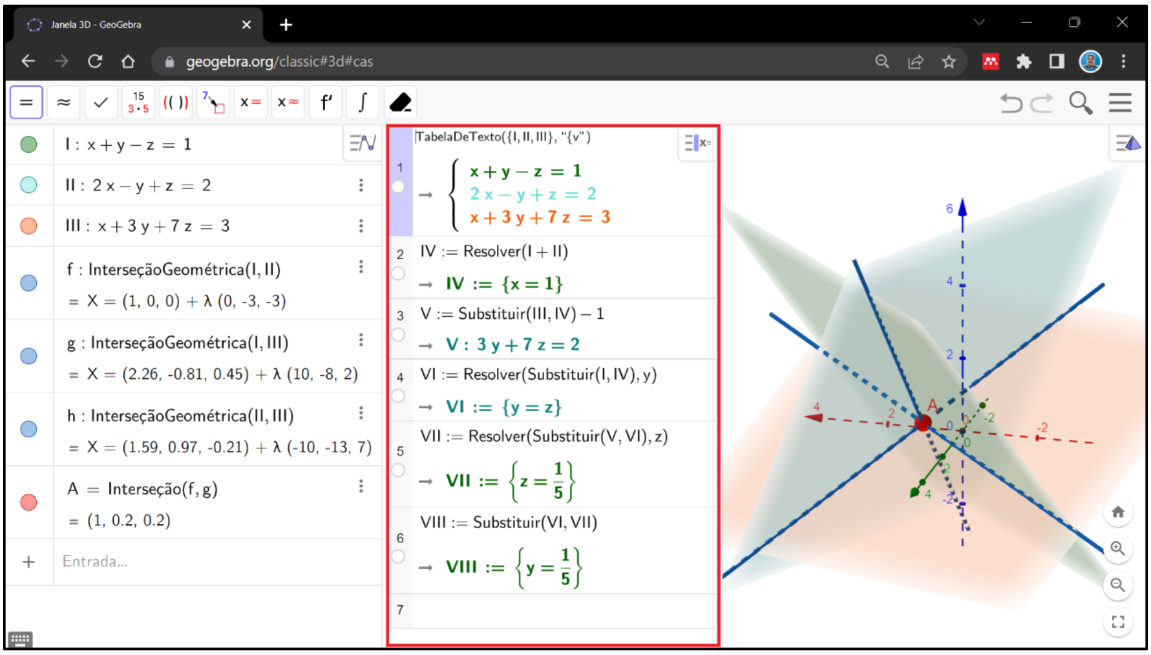

Figura 4: Resolução com a Janela CAS do Sistema de Equações 1
Fonte: o autor

Na Figura 4, a janela CAS está circundada pela caixa vermelha. Note que a resolução procurou seguir o mesmo raciocínio da resolução algébrica da Figura 3. Observe que ao somar as duas primeiras equações, deduzimos o valor da incógnita “x”, depois substituímos tal valor na primeira e terceira equações, deduzindo-se a relação entre as incógnitas “y” e “z” e assim podemos calculá-las.

De fato, existem várias formas de se lidar algebricamente com tal questão, e em geral, quando resolvemos exercícios algébricos com registros escritos a mão e em papel, procuramos desenvolver habilidades e experiências que permitam minimizar o dispêndio de operações, passagens e artifícios algébricos. Mas será que com o apoio da janela CAS não poderíamos dirigir nossos esforços para o desenvolvimento do pensamento algébrico em si?

Poderíamos, ao menos, buscar ampliar a gama de modos de se produzir significados matemáticos, utilizando o cálculo simbólico em atividades que envolvam aritmética e resoluções algébricas. Deixe-me mostrar outra possibilidade de se resolver este problema com o apoio da janela CAS, veja a Figura 5:

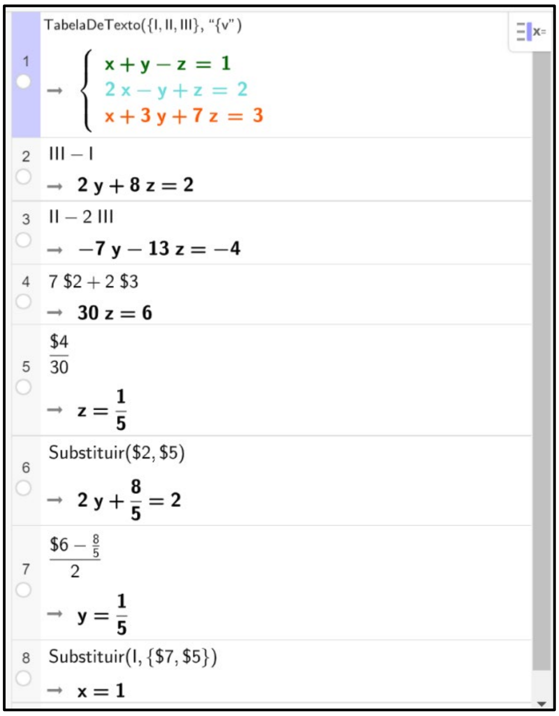

Figura 5: Outra resolução com a janela CAS do Sistema de Equações 1
Fonte: o autor

Note que nesta resolução a estratégia mudou um pouco. Escolhi operar de outro modo com as equações I, II e III, e ainda, acabei aproveitando a possibilidade de usar os números das linhas (note que o $ combinado aos números com pequenos círculos brancos logo abaixo e bem à esquerda da Figura 5) como denominações das novas equações geradas. Provavelmente, ao leitor que ainda não conhece tais funcionalidades, esta resolução só cause estranheza. No entanto, penso ser possível que desenvolvamos experiências com a janela CAS até o ponto em que esta seja tão prática quanto nosso caderno de estudos.

Caso lhe seja interessante, sugiro acessar https://www.geogebra.org/m/gsbdy2tq, trata-se de uma coletânea de vídeos e diferentes propostas didáticas, onde trato de apresentar, em detalhes, algumas ideias iniciais sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e cálculo simbólico com o GeoGebra. Aqui, registro um ponto que julgo muito importante sobre o uso do GeoGebra. É preciso explorar as possibilidades do aspecto figural relacionando-as ao aspecto literal, buscando desenvolver diferentes linguagens do pensamento matemático.

É necessário e premente que busquemos articular, sempre que possível, o pensamento geométrico e algébrico a partir das representações algébricas e geométricas do GeoGebra. Esta é uma recomendação necessária, ainda muito tímida em nossas práticas escolares.

Aproveitando o ensejo, a janela CAS também permite explorar as possibilidades do GeoGebra em demonstrações ou provas matemáticas. Pode ser que alguém pense, neste momento, que o GeoGebra é muito útil apenas para nos ajudar a perceber padrões geométricos ou relações numéricas, suscitando conjecturas que devem ser tratadas com o rigor e linguagem generalista da matemática do matemático, num caderno. Entretanto, gostaria de sugerir uma produção em que busco explorar tais características. Veja a construção apresentadas nas Figuras 6 e 7.:

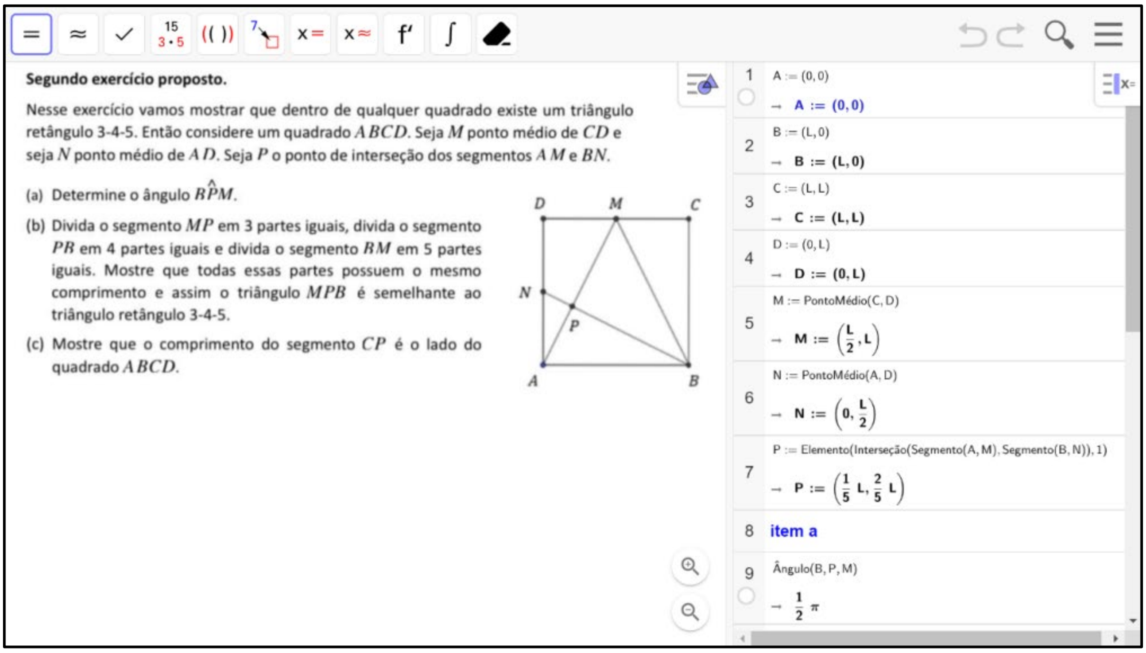

Figura 6: Exemplo de demonstração matemática na Janela CAS do GeoGebra – Parte 1
Fonte: Disponível em https://www.geogebra.org/m/s9gh5t4r acesso em: 19 ago. 2022.

Na Figura 6 pode-se ver o problema (à esquerda) de natureza geométrica e generalista. Também é possível ver (à direita) que as informações foram analisadas e convenientemente transpostas para a janela CAS, sem perda de generalidade. Destacam-se ideias da Geometria Analítica, naturalmente articulando geometria e álgebra. Note o uso de um comando (linha 9, à esquerda inferior) para se obter uma resposta direta ao primeiro item da questão.

Passemos a Figura 7:

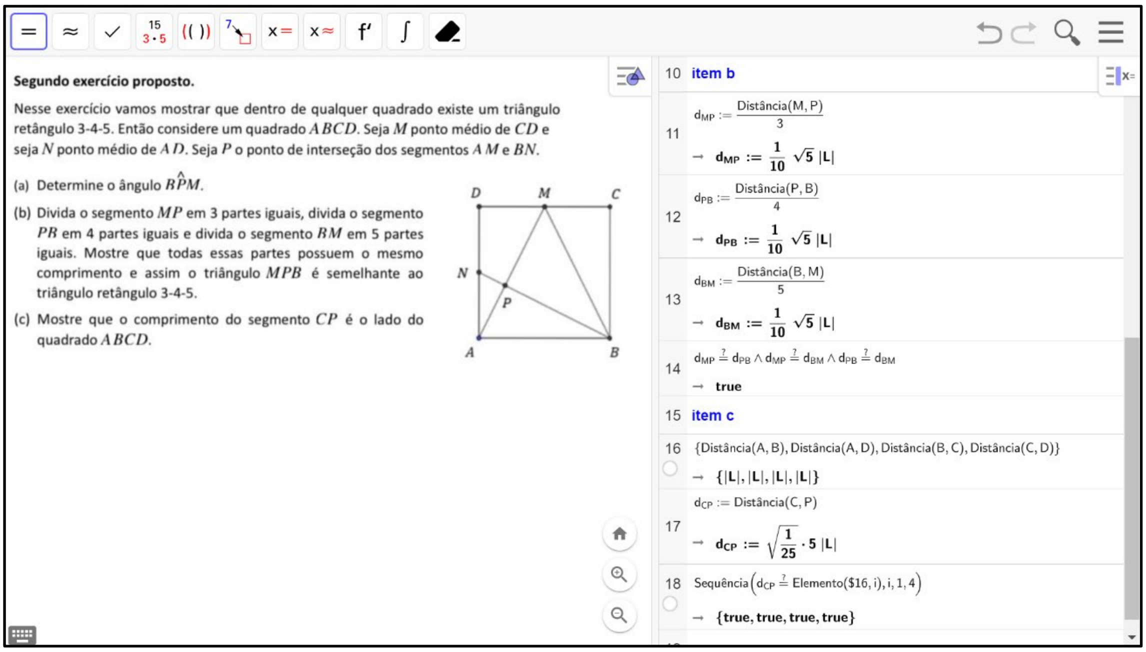

Figura 7: Exemplo de demonstração matemática na Janela CAS do GeoGebra – Parte 2
Fonte: Disponível em https://www.geogebra.org/m/s9gh5t4r acesso em: 19 ago. 2022.

À direita da Figura 7, tanto a resolução do item b, quanto a resolução do item c, apesar de serem diferentes do que estamos habituados a ver em resoluções de questões similares, tratam objetivamente de demonstrar as relações entre os comprimentos elencados no enunciado. Além disso, perpassam a álgebra elementar, fazendo uso de características da álgebra booleana (em todas as passagens em que vemos o sinal de igualdade com a interrogação logo acima) e de algoritmos de recorrência (comando Sequência na linha 18), muito úteis e naturais em linguagens computacionais.

Para finalizar esta seção, apresento algumas questões aos leitores: Há alguma dúvida de que as construções têm potencial pedagógico? Será que um professor de matemática não precisaria transitar entre os conhecimentos de caráter matemático, didático matemático e algoritmos de programação, entre outras coisas, para lidar com o ambiente educacional contemporâneo? Será que não devemos aproveitar esta grande rede de ideias e materiais para procurar rediscutir nossas práticas educativas?

Considerações Finais

Convivo numa comunidade de aprendizagem colaborativa, a qual considero muito criativa e proficiente no uso do GeoGebra. Não tenho dúvidas de que são pessoas muito comprometidas com seu trabalho docente em relação ao GeoGebra e ao ensino de matemática. São pessoas corajosas, generosas e muito simpáticas. Convido o leitor a procurar fazer parte.

O poder criativo e inspirador de se trabalhar coletivamente é o mais importante para mim. Anseio e trabalho para constituição e incentivo de estratégias e políticas públicas, voltadas ao desenvolvimento da aprendizagem colaborativa com o GeoGebra. Precisamos ampliar o número de professores de matemática envolvidos em ações como o Curso de GeoGebra. Ademais, suspeito que não são os textos acadêmicos, os únicos a serem explorados para o desenvolvimento de práticas, ideias e ideais. É preciso praticar para se discutir, divulgar e consolidar práticas escolares.

Apesar de já haver indicado algumas das direções em que busco atuar como professor e pesquisador usuário do GeoGebra; acrescento aqui outros pontos de interesse. Tenho procurado aprofundar-me na pesquisa sobre o uso da Janela CAS para o ensino de matemática na Educação Básica. Paralelamente, tenho procurado estudar se as limitações computacionais (GONÇALVES, 2106) têm levado estudantes usuários do GeoGebra a conceberem significados matemáticos equivocados. Também tenho buscado constituir um banco de dados que aponte limitações computacionais de outros aspectos ou dos que já foram percebidos na pesquisa comunicada em (GONÇALVES, 2106).

Em nome de todos os envolvidos no Curso de GeoGebra, agradecemos enormemente ao apoio da Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de Mato Grosso – FAPEMAT.

Por fim, acredito que não são as possibilidades semióticas e nem a infinidade de possibilidades de técnicas computacionais, os reais motivos para que o ensino de matemática com o GeoGebra seja tão dinâmico. São os professores de matemática que são dinâmicos. É no seu transitar entre linguagens e troca de ideias que a dinâmica é mais poderosa e potencialmente efetiva.

A todos os interessados no GeoGebra, eu gostaria de poder agradecer pessoalmente por compartilharem o que fazem, por constituírem comunidades de aprendizagens colaborativas.

Neste contexto, meu principal objetivo é compartilhar e incentivar ideias que inspirem experiências plausíveis aos professores de matemática e que estejam envolvidos com o GeoGebra. Espero que gostem!

Referências

DANTAS, S. C. Uma perspectiva para design e construção de videoaulas. In: XIII Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), 2015, Ponta Grossa. XIII Encontro Paranaense de Educação Matemática (anais), 2015.

DANTAS, S. C. FERREIRA, G. F. PAULO, J. P. A. Uma noção de interação colaborativa elabora à luz do Modelo dos Campos Semânticos e da Teoria da Atividade. Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, Pr. v.5, n.8, p.213-236, jan.-jun. 2016.

GONÇALVES, W. V. [UNESP]. O transitar entre a Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra: Um estudo de como professores de Matemática lidam com as possibilidades e limitações do GeoGebra, 2016. 240 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência). Universidade Estadual Paulista (UNESP). 2016.

GRAVINA, M. A. Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. 2001. 255f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LÉVY, P. Cibercultura. 1ª ed. São Paulo: Ed. 34, 1999.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. D. C. Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. Cap. 5, p. 92-120.

LINS, R. C. The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields. In: SUTHERLAND, R. et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 37-60.

LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: Estabelecimentos e notas de teorizações. In. ANGELO, C. L. et al. (Orgs). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

Recomendações de leituras

BRAGAGNOLLO, K. F. DISCUTINDO A MATEMÁTICA DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso.

BRAGAGNOLLO, K. F.; GONÇALVES, W. V. DISCUSSÕES E PRODUÇÕES DOS PARTICIPANTES DA 12ª EDIÇÃO DO CURSO DE GEOGEBRA RELACIONADAS AO TEOREMA DE PITÁGORAS. In: XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, Cuiabá. Anais, 2019.

CARVALHO, J. F. PRODUÇÕES SOBRE FUNÇÕES COM UMA VARIÁVEL REAL EM UM CURSO ONLINE DE GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES COM AS HABILIDADES CORRELATAS DA BNCC DO ENSINO MÉDIO. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso.

CARVALHO, J. F.; SOUTO, D. L. P.; GONÇALVES, W. V. O uso da calculadora gráfica GeoGebra em dispositivos móveis para o ensino de funções reais: um olhar para as publicações no Brasil. DEBATES EM EDUCAÇÃO, v. 12, p. 315-327, 2020.

LINS, R. C. Characterizing the mathematics of the mathematics teacher from the point of view of meaning production. In: 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2006. Copenhagen. Proceedings… Plenaryand Regular Lectures, 2006, p. 1-16.

MATOS, A. de A. A. RELAÇÕES ENTRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO, GEOMÉTRICO E ARITMÉTICO EM UM EM UM AMBIENTE DE PRODUÇÕES COLABORATIVAS COM O GEOGEBRA A PARTIR DO USO DA JANELA CAS.

2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso.

OLIVEIRA, R. A. Produções sobre derivadas de funções reais com GeoGebra em um curso de extensão online para professores de matemática. 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso.

OLIVEIRA, R. A. Modos de produção de significados no ensino da derivada: um olhar para as dissertações do PROFMAT. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, [S.l.], v. 8, n. 2, p. 003-025, dez. 2019. ISSN 2237-9657.

OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V. Análise do conteúdo em um ambiente de colaboração on-line no contexto do OGeoGebra. In: Márcio Urel Rodrigues. (Org.). Análise de Conteúdo em pesquisas qualitativas na área da Educação Matemática. 1ªed.Curitiba-PR: CRV, 2019, v. 1, p. 95-127.

OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V. OBJETOS DE APRENDIZAGEM E O ENSINO DE DERIVADA:UMA ANÁLISE TEXTUAL DOS DISCURSOS PRESENTES EM OBRAS PUBLICADAS NA BDTD. COINSPIRAÇÃO -Revista de Professores que ensinam Matemática, v. 2, p. 127-151, 2019.

OLIVEIRA, R. A. de; GONÇALVES, W. V. Demonstrações com GeoGebra como atividades de ensino de matemática. Thema (Pelotas), v. 16, p. 149-162, 2019.

OLIVEIRA, R. A. de; GONÇALVES, W. V. O uso do *software* GeoGebra no ensino de derivada na formação inicial de professores de matemática: um mapeamento de suas publicações. Thema (Pelotas), v. 16, p. 331, 2019.

OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V. A derivada, o caderno, o GeoGebra e o Graspable Math: experimentando o uso de diferentes representações dinâmico matemáticas e modos de produção de significados matemáticos. In: I Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática - I EPTEM, 2018, Apucarana-PR. ANAIS: I Encontro Paranaense de Tecnologias na Educação Matemática, 2018.

OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V. Objetos de Aprendizagem Educacional: O caso dos Aplicativos para Dispositivos Móveis e estudo de Cálculo Infinitesimal. In: XVIII SEMAT: Perspectivas e Compromissos Profissionais do Licenciado em Matemática, 2017, Barra do Bugres-MT. ANAIS: XVIII SEMAT: Perspectivas e Compromissos Profissionais do Licenciado em Matemática, 2017.

SILVA, D. M.; GONÇALVES, W. V.; TAVARES, C. A. G. O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE CÔNICAS. In: XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, Cuiabá. Anais, 2019.