Determinación clásica de la energía del punto cero para diferentes sistemas radiantes

Classical determination of the zero-point energy for different radiating systems.

Hernando González Sierra[1]
Jairo Alonso Mendoza Suárez[2]
Laura Daniela Sandoval Solano[3]

DOI: https://doi.org/10.18041/1909-2458/ingeniare.34.10984

RESUMEN

En este artículo se evalúa la energía electromagnética del punto cero, sin emplear la conceptualización usual de cuerpo negro y asociando una longitud característica o longitud lineal para el oscilador de una cavidad (sin usar argumentos de cuantización). Se determina la energía del punto cero para diversos sistemas radiantes reales, estableciendo que esta depende de un parámetro β, que es del orden de la constante reducida de Planck ħ

Palabras claves: constante de Planck, teoría de Maxwell, ecuación de Helmholtz.

ABSTRACT

This article evaluates the electromagnetic zero-point energy, without using the usual blackbody conceptualization and adopting the perspective of associating a characteristic length or linear length to the oscillator of a cavity (without employing quantization arguments); the zero-point energy is determined for different real radiating systems, finding that it depends on a parameter β which is of the order of the reduced Planck constant ħ.

Keywords: Planck constant, Maxwell theory, Helmholtz equation.

Como citar este artículo: H. G. Sierra, J. A. Suárez, L. D. Sandoval. Determinación clásica de la energía del punto cero para diferentes sistemas radiantes. *Ingeniare*, vol. 19, no. 34, pp. 55-69, Diciembre 2022.

1 ***Doctor en Ciencias Naturales Física.*** *Docente investigador de la Universidad Surcolombiana. Grupo de investigación en Física Teórica. hergosi@usco.edu.co, ORCID ID 0000-0002-4025-3243.*

2 ***Doctor en Ciencias Naturales Física.*** *Docente investigador de la Universidad de Pamplona. Grupo de investigación Integrar. jairoami@unipamplona.edu.co, ORCID ID 0000-0002-7164-8010.*

3 ***Estudiante del Programa de Física*** *de la Universidad Surcolombiana. Grupo de investigación en Física Teórica. laudasa@hotmail.com.*

Fecha de recepción: 5 de Junio del 2023 • Fecha de aceptación: 21 de Junio del 2023

1. INTRODUCCIÓN

La relación de Planck $E = h\nu$, en función de la frecuencia ν, o $E = \hbar\omega$ en términos de la frecuencia angular ω, se considera generalmente como el punto de partida de la mecánica cuántica. La constante de Planck h se considera una de las más importantes constantes universales. Uno de los casos más estudiados es el oscilador armónico, que incluye los efectos de la radiación de punto cero. Por ejemplo, el movimiento de un electrón s considera una masa unida a un resorte ideal sin fricción. Cuando este conjunto empieza a oscilar alrededor de su punto de equilibrio emite radiación electromagnética a cierta frecuencia de oscilación. En este proceso la naturaleza física de la constante h no es muy clara. Planck da una justificación teórica al cuantizar la energía; no obstante, no se ve la relación con el fenómeno físico.

En el presente artículo se analiza la relación entre la Mecánica Clásica y la constante de Planck, utilizando la ecuación de Helmholtz para los modos de oscilación del campo electromagnético en forma clásica, lo cual permite evaluar la energía de radiación electromagnética del punto cero en términos de una constante que se denomina β, relacionada con la constante reducida de Planck $\hbar = h/2\pi$.

La física moderna tiene sus orígenes a comienzos del siglo XX, cuando Planck planteó la hipótesis de cuantización de la energía electromagnética para explicar el espectro emitido por cuerpos calientes ($E = \hbar\omega$ con $\hbar = 1{,}054571817 \times 10^{-34}$ Js) [1]. En este artículo se explica la forma para hallar esta constante en función de parámetros clásicos, como la dimensión lineal característica del radiador L.

La constante de Planck h, asociada con la energía de cuantización del campo electromagnético, es fundamental en la interpretación del efecto fotoeléctrico, la producción de rayos X, el efecto Compton y la producción y aniquilación de pares [2]. De esta forma, se incluye en la mecánica ondulatoria de Schrödinger y en la teoría cuántica de campos [3]. En ese sentido, la constante de Planck se ha considerado un parámetro exclusivo de la mecánica cuántica; sin embargo, algunos autores argumentan que también puede emerger de un contexto de la mecánica clásica, más específicamente de la electrodinámica estocástica [4]. En estas circunstancias es posible considerar la constante de Planck como un parámetro de escala, proporcionando una interpretación clásica [5].

En este artículo se consideran las ondas electromagnéticas dentro de una cavidad esférica finita, sin materia en su interior y usando la ecuación de onda electromagnética para los modos de oscilación. Se evalúa la energía de punto cero del campo electromagnético almacenado en la cavidad, eligiendo por simetría una cavidad esférica y solucionando la ecuación de onda en coordenadas esféricas. Al final, se asume que la geometría de la cavidad está caracterizada por un parámetro de dimensión lineal, denominado longitud característica del oscilador (este cálculo se presenta en detalle en la sección 4).

El artículo presenta el concepto de la energía de punto cero desde los puntos de vista clásico y cuántico. Luego, se calcula la energía electromagnética contenida en una cavidad esférica, con el fin de llegar a la ecuación de Helmholtz. Posteriormente, se presenta la solución a la ecuación de Helmholtz, que es la parte central de este trabajo. Se deduce la energía contenida en una cavidad esférica de radio R con volumen finito V. Se calcula el parámetro β para diferentes sistemas radiantes reales extraídos de la bibliografía especializada. Finalmente, se presenta una discusión y las conclusiones.

2. ENERGÍA DEL PUNTO CERO. ENFOQUE CLÁSICO Y CUÁNTICO, EVIDENCIAS EXPERIMENTALES

En 1901, Planck derivó una expresión matemática que se ajustaba a las más recientes curvas experimentales para la radiación del cuerpo negro [6]. Algunos físicos de la época señalaron que Planck se mostró escéptico sobre el significado físico de su suposición matemática y de su constante h durante más de una década. En 1911 Plank publicó su llamada segunda teoría, en la que derivó la fórmula espectral del cuerpo negro con una suposición de cuantización más débil, su deducción mostraba la existencia de una energía del punto cero [7]. De esta manera, la ecuación de Planck para la densidad de energía del cuerpo negro tenía el mismo término dependiente de la temperatura que se derivó en su primera teoría, más el término adicional $(1/2)h\nu$, que era totalmente independiente de la temperatura, dado por

$$\rho(T,\nu)d\,\nu = \left[\frac{8\,\pi\nu^2}{c^3}\right]\left\{\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}+\frac{h\nu}{2}\right\}d\,\nu \tag{1}$$

Donde ν es la frecuencia de la radiación, k la constante de Boltzmann y c la velocidad de propagación de la luz.

Si en la ecuación (1) la temperatura T tiende a cero, queda como remanente el término (1/2)$h\nu$, que es la denominada energía del punto cero, EPC.

$$E_0 = \frac{h\nu}{2} = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{2}$$

Motivados por este resultado, Einstein y Stern elaboraron en 1913 un análisis de la interacción entre la materia y la radiación, utilizando osciladores dipolares simples para representar a las partículas, y un enfoque basado en la física clásica [8]. De manera significativa, señalaron que si por alguna razón los osciladores dipolares tuvieran una EPC, es decir, si hubiera una energía irreducible en el cero absoluto de temperatura, la fórmula de radiación de Planck resultaba sin la necesidad de argumentos de cuantización.

Este importante último punto ha demostrado ser correcto desde que Boyer y otros han hecho tales derivaciones [9]. Estos cálculos muestran que la energía irreducible de cada oscilador es $(1/2)h\nu$, en lugar del $h\nu$, como dedujeron correctamente Planck y Nernst.

En 1925 se obtuvieron las pruebas y se confirmó la existencia de la EPC. El químico Mulliken encontró esta prueba en el espectro del monóxido de boro. Mientras analizaba las longitudes de onda de estas líneas espectrales descubrió un ligero cambio en la posición predicha teóricamente que habrían tenido estas líneas si no existiera la energía del punto cero. La EPC perturba ligeramente un electrón en un átomo, de modo que cuando hace una transición de un estado a otro emite luz, cuya longitud de onda está ligeramente desviada de su valor normal.

Años más tarde, Lamb y Retherford [10] establecieron experimentalmente un cambio similar de longitud de onda en la región de microondas del espectro del hidrogeno usando técnicas desarrolladas para radar. Actualmente, el corrimiento Lamb de las líneas espectrales, como se le denomina, es una prueba observacional de la existencia de la EPC.

Cuando la condición de la primera teoría de Planck y el Principio de Incertidumbre de Heisenberg (PIH) se aplican a partículas atómicas en el cero absoluto, teóricamente cada partícula debería tener algún movimiento residual y, por lo tanto, energía, es decir, la EPC.

La EPC se convirtió en parte del enfoque de la Electrodinámica Cuántica, pero indirectamente a través del PIH. Este enfoque ahora es el modelo QED estándar para el origen de la EPC. En 1975, Boyer uso la física clásica, más la EPC, para demostrar que las fluctuaciones causadas por los campos del punto cero (CPC) en las posiciones de las partículas están en exacta concordancia con la teoría cuántica y el PIH [11].

En este enfoque, la EPC es la última fuente de la limitación básica en medir los fenómenos atómicos y, como tal, dar lugar a la indeterminación o incertidumbre que solo puede atribuirse a las leyes cuánticas.

Haisch y Rueda notan que debido a la EPC el electrón realmente oscila a la longitud de onda Compton en su marco de referencia de reposo. Señalan que cuando se observa el electrón marco en movimiento se presenta una frecuencia de pulsación a esta oscilación, debido al efecto Doppler relativista. Entonces, esta frecuencia de pulsación resulta ser la longitud de onda de De Broglie de un electrón en movimiento. La EPC impulsa al electrón a sufrir algún tipo de oscilación en la frecuencia de Compton y es así como se origina la longitud de onda de De Broglie, debido a los desplazamientos Doppler [12].

Desde esa época se han publicado diversos artículos utilizando este enfoque EPC, que se denomina Electrodinámica Estocástica (SED), en contraste con el QED estándar.

La física clásica de la SED, basada en la existencia de una EPC, ha podido derivar e interpretar el espectro del cuerpo negro, el principio de Heisenberg, la ecuación de Schrödinger y explicar la naturaleza ondulatoria de este fenómeno. Estos fueron los mismos factores que, interpretados sin la EPC, dieron lugar a la QED conceptos. Al enumerar algunos éxitos de la física SED, se afirmó que “los más optimistas resultado del enfoque SED será demostrar que la física clásica, más la EPC electromagnética, podría replicar con éxito todos los fenómenos cuánticos” [9].

Una de las pruebas de la existencia de la EPC es el efecto Casimir de superficie, predicho por Casimir en 1948 y confirmado nueve años más tarde por Sparnaay [13]. Este efecto es la manifestación de una fuerza de atracción entre dos placas metálicas descargadas cuando se colocan muy cerca entre sí. Un análisis de Milonni, Cook y Goggin explica este efecto simplemente usando la SED [14].

Dado que la EPC consiste en ondas electromagnéticas, luego al acercar las placas de metal terminan excluyendo toda longitud de onda de la EPC entre las placas, excepto para las que se requiere un número entero de semiondas igual a la distancia de las placas. En otras palabras, todas las longitudes de onda largas de la EPC han sido excluidas y ahora actúan sobre las placas desde el exterior sin que actúen ondas largas desde el interior para equilibrar la presión. La presión de radiación combinada de estas ondas externas obliga a los platos a juntarse. Lamoreaux [15] informó una verificación experimental de la teoría dentro del 5 %. Luego, en noviembre 1998, Mohideen y Roy reportaron una verificación dentro del 1 % en un experimento que utilizó las capacidades de un microscopio de fuerza atómica [16].

3. DETERMINACIÓN DE LA ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA CONTENIDA EN UNA CAVIDAD ESFÉRICA

Considerando una cavidad esférica de radio y volumen finito , sin materia en su interior, donde la energía electromagnética está almacenada, se puede expresar en términos de campo eléctrico y magnético en el vacío [17].

$$U_{em} = \frac{1}{2}\int \left[\epsilon_0 \, E^2 \,(r,t) + \frac{1}{\mu_0} \quad B^2 \,(r,t)\right] d\, v, \tag{3}$$

los campos eléctrico y magnético almacenados tienen modos de oscilación que toman la forma

$$E(r,t) = \sum_k E_k \,(r,t) = \sum_{kt} E_{k,p} \,(r,t)\, \epsilon_{k,p} \,, \tag{4}$$

donde la suma se expresa sobre los números de onda k *y los estados de polarización* p. *Una expresión similar es válida para el campo magnético. Los campos eléctricos y magnéticos se pueden tratar de manera idéntica, de modo que la ecuación (3) se puede escribir como:*

$$U_{em} = \epsilon_0 \int \left[\sum_k E_k \,(r,t)\right]^2 \; dv. \tag{5}$$

Dada la naturaleza estadística de los campos electromagnéticos, el integrando de la ecuación (5) y, por tanto, la energía electromagnética, corresponde a un valor medio o esperado. Los modos de oscilación del campo eléctrico satisfacen la ecuación de onda, tal que

$$\nabla^2 E_k (r,t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_k (r,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Asumiendo una solución para E_k en forma de producto de dos funciones

$$E_k (\vec{r},t) = E_0 (t) M_k(\vec{r}) = E_0 e^{-i\omega t} M_k(\vec{r}) \tag{7}$$

ω es la frecuencia angular del modo de oscilación monocromo, ($\omega = ck$).
La ecuación de onda (6) conduce a

$$\nabla^2 M_k(\vec{r}) - k^2 M_k(\vec{r}) = 0, \tag{8}$$

la ecuación (8) es una ecuación de Helmholtz para los modos de oscilación del campo electromagnético [18].

4. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ PARA LOS MODOS DE OSCILACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

La parte espacial de la ecuación de onda para los modos de oscilación, dada la geometría esférica del recinto, puede resolverse en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ). Luego,

$$M_k (r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \tag{9}$$

y el operador Laplaciano en coordenadas esféricas dado como [19].

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\, sen\,\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\, sen\,\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{10}$$

remplazando las ecuaciones (9) y (10) en la ecuación (8) se obtiene, por separación de variables, la ecuación diferencial en derivadas totales, de la siguiente manera

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = r^2 (sen\,\theta)^2 \left[-k^2 - \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \frac{1}{\Theta r^2 sen\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right] \tag{11}$$

La ecuación (11) para la parte de $\Phi(\phi)$ se expresa como:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \tag{12}$$

donde $-m^2$ es la constante de separación en la ecuación (11).

Una solución de la ecuación diferencial azimutal (12) es:

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\; e^{\iota\, m\, \phi}, \tag{13}$$

Un procedimiento similar permite separar las partes radial y angular, obteniendo una ecuación de Bessel modificada para la parte radial y la ecuación de Legendre asociada para la parte angular, que son ecuaciones conocidas en fisicomatemáticas [19].

Estas ecuaciones son, en su orden:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin\theta^2}\Theta + l(l+1)\Theta = 0 \tag{14}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{l(l+1)R}{r^2} = 0 \tag{15}$$

para la ecuación (15), haciendo que la variable cambie $y = kr$

$$y^2R'' + 2yR' + [y^2 - l(l+1)]R = 0, \tag{16}$$

Cuando la ecuación de Helmholtz (8) se resuelve en coordenadas esféricas por separación de variables, la ecuación radial tiene la forma (16), donde es un entero positivo. Las dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación se denominan funciones de Bessel esféricas $j_l(z)$ y $\eta_l(z)$, están relacionadas con las funciones ordinarias de Bessel $J_l(z)$ y $\eta_l(z)$ [20]

$$R = A'\,J_l(kr) + B'\,\eta_l(kr), \tag{17}$$

$$J_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{l+1/2}(z), \tag{18}$$

$$\eta_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\eta_{l+1/2}(z) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{-l-1/2}(z), \tag{19}$$

La función $\eta_l(z)$ se llama función esférica de Neuman y $J_l(y)$ está dada por la ecuación (20).

$$J_l(y) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\,(m+l)!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2l+m}, \tag{20}$$

Las soluciones de las variables angulares $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ se pueden escribir en términos de los armónicos esféricos [21].

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-l}^{l} P_l^m(x) e^{im\phi} , \tag{21}$$

$$P_l^m(x) = \sum_{m=0}^{\frac{l}{2}} \frac{(-1)^m (2l-2m)!}{2^l m!\,(l-2m)!} \frac{x^{l-2m}}{(l-m)!} , \tag{22}$$

donde x=. Estos términos se desarrollaron previamente en las ecuaciones (12) y (22). Entonces, el campo eléctrico ahora se puede interpretar como una combinación de los armónicos esféricos, las funciones de Bessel y una dependencia del tiempo.

$$E_k(r,\theta,\phi,t) = E_0(t) J_l(kr) \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\phi) , \tag{23}$$

De forma simplificada se escribe como

$$E_k = E_0(t) J_l(kr)\, \Omega \qquad \text{con} \qquad \Omega = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\phi) , \tag{24}$$

$Y_l^m(\theta,\phi)$ son los armónicos esféricos, y debido a la positividad de la energía tenemos la restricción $\Omega > 0$. Tomando el cuadrado de la norma en la ecuación (24) e integrando en el volumen de la habitación, en la que queda atrapada la radiación electromagnética

$$\int |E_k|^2 \; dV = \int |E_0(t)|^2 |J_l(kr)|^2\, \Omega^2 \; d\,V , \tag{25}$$

La norma cuadrática de los armónicos esféricos viene dada por [22];

$$\Omega^2 = \sum_{m,m'=-l} \int\int Y_l^{*m'}(\theta,\phi) \;\; Y_l^m(\theta,\phi) d\sigma , \tag{26}$$

Como $d\sigma = sen\,\theta\, d\theta\, d\phi$ es el ángulo sólido de una esfera, tenemos

$$\Omega^2 = \sum_{m,m'=-l} \int\int Y_l^{*m'}(\theta,\phi) \;\; Y_l^m(\theta,\phi)\, sen\,\theta\, d\theta\, d\phi , \tag{27}$$

Para resolver la integral doble remplazamos la ecuación (21) en la ecuación (27), se aplican las condiciones de ortonormalidad para los polinomios de Legendre [23] y se usan las propiedades del delta de Kronecker cuando $l' = l;\ m' = m$; finalmente, la ecuación (27) se reduce a:

$$\Omega^2 = \frac{2l+1}{4\,\pi}\ , \tag{28}$$

Como $\Omega^2 > 0$ el parámetro será un entero positivo. Remplazando la ecuación (28) en la ecuación (25), el cuadrado del campo eléctrico ahora depende del número de los armónicos esféricos, así:

$$\int |E_k\ (r, \theta, \phi, t)|^2\ \ dV = |E_0(t)|^2\ \frac{2l+1}{4\,\pi}\ \Gamma\ , \tag{29}$$

con

$$\Gamma = \int d\phi \int sen\ \theta\ d\theta \int r^2\ |J_l\ \ (k, r)|^2\ dr\ , \tag{30}$$

que una vez integrado en las partes angulares da (la integral en r se evalúa de 0 a ρ, ya que se supone simetría esférica)

$$\Gamma = 4\ \pi \int_0^{\rho} r^2\ |J_0\ \ (k, r)|^2\ dr, \tag{31}$$

lo que permite evaluar la integral radial tomando la forma explícita de los polinomios de Bessel para $l = 0$, ya que la simetría esférica permite esta simplificación, evaluando y generalizando para obtener

$$\Gamma = 2\ \pi \frac{\rho}{k^2} \tag{32}$$

sustituyendo la ecuación (32) en la ecuación (29), con $l = 0$,

$$\int \left| E_{k,\rho} \right|^2\ \ dV = |E_0(t)|^2\ \ \frac{\rho}{2\ k^2}\ , \tag{33}$$

Aplicando el valor esperado en ambos lados de la ecuación (33) y multiplicando por ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8{,}8541878176 \times 10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$) obtenemos

$$\epsilon_0 \int \langle |E_{k,\rho}\ |^2 \rangle\ dV = \epsilon_0 |E_0|^2\ \frac{\rho}{2\ k^2}\ , \tag{34}$$

El campo eléctrico se identifica como una distribución de modo discreto, tomando la suma en ambos lados de la ecuación (34).

$$\epsilon_0 \int \sum_{k,\rho} \langle |E_{k,\rho}\ |^2 \rangle\ dV = \epsilon_0 |E_0|^2\ \rho \sum_{k,\rho} \frac{1}{2\ k^2}\ , \tag{35}$$

Sustituyendo la ecuación (35) en la ecuación (29), se obtiene la función hamiltoniana clásica para el campo electromagnético.

$$\langle H \rangle = \epsilon_0 |E_0|^2 \ \rho \sum_{k,\rho} \frac{1}{2\, k^2}, \tag{36}$$

Esta expresión es válida para un solo modo de oscilación. Multiplicando por el número de modos y suponiendo que el criterio de Rayleigh-Jeans de que el número de modos de oscilación en el recinto es válido, en esta aproximación es [24]

$$N_{mod} = \frac{8\, \pi \nu^3}{c^3} \ V, \tag{37}$$

Incluyendo el número total de modos de oscilación en la ecuación (35) se obtiene

$$\langle H_s \rangle = \epsilon_0 \frac{V}{c} \ |E_0|^2 \ \rho \sum_{\omega} \frac{1}{2} \ \omega, \tag{38}$$

El subíndice ρ se suprimió en la suma, ya que la ecuación (38) incluye los dos estados de polarización del campo eléctrico. Como en el coeficiente de la ecuación (38) todos los parámetros son cantidades constantes, se define

$$\beta = \frac{\epsilon_0}{c} \ \rho\, V \ |E_0|^2 \ = \ \frac{\epsilon_0}{c} \ L^4 \ |E_0|^2, \tag{39}$$

donde se ha tomado

$$\rho V = \rho^4 \approx L^4 \ , \tag{40}$$

L es la longitud media característica de la cavidad. Con esta adición, la ecuación (38) es

$$\langle H_T \rangle = \sum_k \beta \frac{1}{2} \ \omega, \tag{41}$$

La ecuación (41) es idéntica a la expresión dada por la Teoría Cuántica de Campos para la energía de punto cero de un número infinito de osciladores [3].

$$E_n = \sum_k \frac{1}{2} \ \hbar\, \omega, \tag{42}$$

Cabe señalar que en esta teoría no solo la energía del punto cero tiene un valor absoluto infinito, sino que todos los estados tienen un valor irregular. Esto se debe a que estas energías corresponden a la energía del punto cero de un número infinito de osciladores armónicos. $U = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_k h\, \omega_k \rightarrow \infty,$ como se presenta en [25].

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

El coeficiente β, según la ecuación (39), depende de la longitud característica del recinto que almacena la energía electromagnética y de algunas magnitudes asociadas al campo electromagnético, como la permitividad del espacio libre ϵ_0, la propagación velocidad de la luz c y el valor medio del campo eléctrico ϵ_0 para todos los modos de oscilación. Introduciendo los valores conocidos de c y ϵ_0 en la ecuación (39), el coeficiente β, en unidades SI, es

$$\beta = 3 \times 10^{-20} (L^2 \ \epsilon_0)^2 \tag{43}$$

$$\beta = 3 \times 10^{-20} c^2 (L^2 \ B_0)^2 = 2{,}7 \times 10^{-3} (L^2 \ B_0)^2 \tag{44}$$

En la deducción de la ecuación de la energía de radiación electromagnética del punto cero (41) con β dada por la ecuación (42), se consideraron las siguientes simplificaciones en la solución de la ecuación de Helmholtz: 1) es independiente de la temperatura, ya que la razón para el estudio es la evaluación de la energía del espectro electromagnético del punto cero- 2) La simetría supuesta es una cavidad esférica proporciona soluciones simples a la ecuación de Helmholtz. 3) En la expansión de los polinomios de Bessel se toma, la solución $J_0 \ (k,r)$, que corresponde al estado base. 4) Se unificaron las dimensiones de la cavidad introduciendo el parámetro L, según la ecuación (44). Una longitud característica está asociada con las dimensiones de la cavidad, se supone en principio una simetría esférica, pero se generaliza arbitrariamente a cualquier forma de la cavidad.

6. CONCLUSIONES

La constante de Planck se planteó originalmente como una hipótesis basada en consideraciones fenomenológicas, en lugar de primeros principios. Para tener una mejor comprensión de h, este trabajo muestra que se puede interpretar con base en el análisis clásico de la energía de punto cero en una cavidad.

La expresión que se encuentra en la ecuación (41) para la energía electromagnética almacenada en un recinto finito de volumen V, y dimensión lineal característica L, es la suma de las contribuciones de todos los modos de oscilación caracterizados por frecuencias angulares ω, correspondientes a osciladores armónicos clásicos, proporcionando el mismo resultado de la Teoría Cuántica de Campos para la energía de punto cero.

La forma encontrada para la energía dada por la ecuación (41) implica que corresponde al espectro de radiación electromagnética del punto cero. En [27, 28] los autores extraen la constante de Planck reducida de los resultados asociados a la fuerza de Casimir. En este artículo se obtiene directamente la constante del factor constante de la energía del punto cero, que coincide con el resultado de las fuerzas de Casimir. Cabe señalar que el análisis es parte de la electrodinámica clásica, considerando las ecuaciones de Maxwell, que son automáticamente invariantes de Lorentz. Se puede hacer un análisis similar a partir de los principios de la termodinámica para cuando $T \rightarrow 0$, como se menciona en [29].

Usando la electrodinámica clásica, expresada por las ecuaciones de Maxwell que son intrínsecamente invariantes de Lorentz, la constante de Planck reducida se manifiesta como el parámetro de escala de la radiación del punto cero de las fuentes libres. De esta forma, la constante de Planck surge en la Electrodinámica Estocástica y Electrodinámica Clásica como un parámetro que no está sujeto a condiciones de cuantización de energía.

Cuando se toman las propiedades de simetría esférica en la solución de la ecuación de Helmholtz, incluyendo la simplicidad dada por las funciones armónicas de Bessel en su forma esférica $J_0\ (k,r)$ para la parte radial, que corresponde $l = 0$, se obtiene una expresión para la energía electromagnética almacenada en el recinto, similar a la dada para el espectro de radiación del punto cero en Mecánica Cuántica y Electrodinámica Estocástica.

En Mecánica Cuántica, la constante de Planck aparece como exclusiva de esta teoría, asumiendo la cuantización de la energía. En Electrodinámica Estocástica, la constante de Planck se coloca a mano a partir de los resultados empíricos de las fuerzas de Casimir. Esto contrasta con el enfoque clásico de este artículo, en el que la constante de Planck proviene naturalmente de las propiedades geométricas y electromagnéticas asociadas con la cavidad, como se muestra en la ecuación (38).

En los resultados de las tablas 1 y 2 se destaca que con el valor del campo eléctrico y magnético se llega a la longitud de Planck, que está asociada a la distancia o escala de longitud, por debajo de la cual se espera dejar de tener una geometría clásica. Una medida más baja no se puede tratar adecuadamente en los modelos físicos actuales, debido a la aparición de los efectos de la gravedad cuántica [30,31,32,33,34,35].

Para determinar el parámetro β, cuyos valores están representados en la columna 4 de las tablas 1 y 2, se ha supuesto una dimensión característica "*L*" de valor apropiado para cada uno de los sistemas radiantes. El orden de magnitud del parámetro β evaluado, que es lo relevante en estos cálculos, es para todos los casos 10^{-35} *J.s*, acorde con el valor usual del orden de magnitud de la constante reducida de Planck.

Tabla 1. Determinación del parámetro β en función del campo eléctrico [26]

Sistema radiante	Campo eléctrico E_0 [V/m]	Longitud característica L[m]	Parámetro β [J.s] Ec. (43)
Bombillo de 100 W a 1 m de distancia	50	3.4×10^{-5}	9.86697×10^{-35}
Membrana biológica	10^{7}	7.6×10^{-8}	9.85331×10^{-35}
Pulso láser de pentavatios	10^{13}	7.6×10^{-11}	9.85331×10^{-35}
Iones U^{91+} de en el núcleo	10^{18}	$2.4 \times 1\ 0^{-13}$	9.7988×10^{-35}
Producción de pares (e^-, e^+) (máximo campo eléctrico en el vacío)	1.3×10^{18}	2.1×10^{-13}	9.70715×10^{-35}
Máximo campo eléctrico en la naturaleza (campo de Planck corregido)	1.9×10^{62}	1.76×10^{-35}	10.2302×10^{-35}

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Determinación del parámetro β en función del campo magnético [26]

Sistema radiante	Campo magnético [T] [26]	Longitud característica L[m]	Parámetro β [J.s] Ec(44)
Corrientes cerebrales	$(0.1\text{-}3) \times 10^{-12}$	$(4 – 8) \times 10^{-2}$	6.912×10^{-35} 9.95328×10^{-35}
Campo magnético cerca de un teléfono móvil	10^{-4}	4.44×10^{-7}	0.104929×10^{-35}
Manchas solares	1	1.4×10^{-8}	10.3723×10^{-35}
Campo magnético estimado cerca del núcleo atómico	10^{12}	1.4×10^{-14}	10.3723×10^{-35}
Campos en un láser de pulso de pentavatio	3×10^{4}	8.1×10^{-11}	10.4604×10^{-35}
Máximo campo magnético en la naturaleza (campo magnético de Planck corregido) $\frac{c^3}{4} G_e$	6.3×10^{53}	1.76×10^{-35}	10.2824×10^{-35}

Fuente: elaboración propia.

La longitud de Planck forma parte del sistema natural de unidades y se calcula a partir de tres constantes fundamentales: la velocidad de la luz, la constante de Planck y la constante gravitacional. Equivalente a la distancia que recorre un fotón, viajando a la velocidad de la luz, en tiempo de Planck, se define como: $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,61 \times 10^{-35} m.$ [30]

AGRADECIMIENTO

El doctor Hernando González agradece al Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad Surcolombiana el apoyo económico a través del proyecto de investigación 3433. El doctor Jairo Alonso Mendoza agradece al Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Pamplona por el apoyo institucional, y al grupo de investigación Integrar. Hernando González S. agradece a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales el apoyo recibido mediante el proyecto de investigación de código 4132.

REFERENCIAS

[1] De la Peña, L. Cetto, A.M. Hernández, A. The Emerging Quantum: The Physis Behind Quantum Mechanics; Springer: New York, NY, USA, 2015.

[2] Townsend, A.J. Quantum Physics: A Fundamental approach to Modern Physics, University Science books, Mili Valley, California, 2010.

[3] Weinberg, S. The Quantum Theory of Fields, Volume I, Foundations, Cambridge University Press, 1995, New York. [4] T. W. Marshall, Stochastic electrodynamics, Proc. Camb. Philos. Soc. 61, 537-546 (1965).

[5] Boyer, T.H. The blackbody radiation spectrum follows from zero-point radiation and the structure of relativistic spacetime in classical physics, Found. Phys. 42, 595-614 (2012).

[6] Ling, S.J., Sanny, J. and Moebs, W. University Physics Volume 3, OpenStax, Houston, Texas, 2018.

[7] Planck, M. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 13 (1911), p.138.

[8] Einstein, A.,Stern, O. Ann. Physik 40 (1913), p.551. [9] T H Boyer, Phys. Rev. D 29 (1984), p. 1096.

[10] California Institute for Physics and Astrophysics, Questions and Answers about the Origin of Inertia and the Zero-Point Field, p.I. Available at http://www.calphysics.org/questions.html.

[11] Boyer, T.H. The Contrasting Roles of Planck's Constant in Classical and Quantum Theories, 2017, *American Journal of Physics* 86(4), DOI: 10.1119/1.5021355

[12] Haisch, B., Rueda, A. Phys. Lett. A, 268 (2000), p. 224.

[13] Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates", Proc. Ned. Akad. Wetenschap. 51, 793-795 (1948).

[14] Milonni, P.W., Cook, R.J. and Goggin, M.E. Radiation pressure from the vacuum: Physical interpretation of the Casimir forcé, *Phys Rev A*, 38, 3 (1988).

[15] Lamoreaux, S. *Phys. Rev. Lett*. 78 (1997), p.5; U Mohideen, A Roy, Phys. Rev. Lett. 81 (1998), p. 4549.

[16] Mohideen, U. Precision measurement of the Casimir forcé from 0.1 to 0.9 /im, ibíd. 81, 4549-4552 (1998).

[17] Griffiths, D.J. Introduction to Electrodynamics, Fourth Edition, Pearson Education, 2013.

[18] Riley, K.F- Hobson, M.P. and Bence, S.J. Mathematical methods for physics and engineering, Second Edition, Cambridge University Press, Madrid, 2002.

[19] Nikifo, A.F. and Uvarov, V.B. Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Moscow, 1978.

[20] Novak, K.L. and Fox, L.J. Special Functions of Mathematical Physics, Copyrighted Material, New York, 2018.

[21] Hassani, S. Mathematical Physics, A Modern Introduction to Its Foundations, Second Edition, Springer International Publishing, New York, 1999.

[22] Arfken, G.B., Weber, H.J. and Harris, F.E. Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition, Academic Press Publications, New York, 2012.

[23] Boas, M.L. Mathematical Methods in the Physical Sciences, Third Edition, Wiley Student Edition, 2005.

[24] Landau, L.D. et al. Electrodynamics of continuous media, Vol 8 (2nd ed.). Butherworth- Hainimann, 1984.

[25] Razmi, H. and Shirazi, S.M. Is the Free Vacuum Energy Infinite?, *Advances in High Energy Physics*, vol. 2015, Article ID 278502, 3 pages, 2015. https://doi.org/10.1155/2015/278502.

[26] Schiller, C. Motion Mountain: the adventure of physics, Twenty-fourth edition, vol 2., Munich: Creative Commons 2011 [27] T. W. Marshall, Random electrodynamics, *Proc. R. Soc*. A276, 475-491 (1963).

[28] Boyer, T.H. Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation, *Phys. Rev*. D 11, 790-808 (1975).

[29] Boyer, T.H. Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions, *Physical Review*, 1969, Vol 182, pgs. 1374-1383

[30] Regge, T. Gravitational fields and quantum mechanics. Nuovo Cim 7, 215-221 (1958). https://doi.org/10.1007/BF02744199 [31] T. Padmanabhan, Planck length: Lost + found. Phys. Lett. B 809 (2020). https://doi.Org/10.1016/j.physletb.2020.135774.

[31] Massie, U.W. Gravity and Zero Point Energy, *Physics Procedia*, Volume 38, 2012, pp. 290, 287.

[32] Zurek, K.M. On vacuum fluctuations in quantum gravity and interferometer arm fluctuations, *Physics Letter* B, V 826, 2922.

[33] Vasiliev, B.V. Superconductivity, Superfluidit, and Zero-Point oscillations, *Journal of Modern Physics*, V 9,3,2018.

[34] Moddel, G. and Dmitreyeva, O. Extraction of Zero-Point Energy from the Vacuum: Assessment of Stochastic Electrodynamics-Based Approach as Compared to Other Methods. Atoms, 7 (2), 51,2019.

[35] Nair, V.C.A. Zero Point Energy , E_0=1/2 hv , the Quantum Magician of Modern Physics, International Advanced Research Journal in Science, *Engineering and Technology*, 8.2,2021.