*LLULL*, *vol. 26, 2003, 837-857*

# LA CONTRIBUCIÓN DE LEONARD EULER A LA MATEMATIZACIÓN DE LAS MAGNITUDES Y LAS LEYES DE LA MECÁNICA, 1736-1765

FRANCISCO A. GONZÁLEZ REDONDO
Universidad Complutense de Madrid

*RESUMEN*

*En este trabajo se estudia la contribución de Leonard Euler al proceso de matematización de la Mecánica, desde la perspectiva de las magnitudes que utiliza y de las leyes en las que éstas se relacionan, que tiene lugar durante el siglo XVIII. Para ello, se analizan en detalle los capítulos más relevantes de sus obras más significativas: la* Mecánica *(1736), el* Nuevo Principio de la Mecánica *(1750) y la* Teoría del movimiento de los cuerpos sólidos rígidos *(1760).*

*En ellas podrá detectarse: 1) el uso de constantes en las primeras ecuaciones físicas; 2) la introducción de unidades y medidas para las cantidades implicadas; 3) el sometimiento al requisito de homogeneidad de los términos de las ecuaciones (y algunas de las implicaciones que de ello se siguen); y 4) la introducción del vocablo 'dimensión' en Mecánica, como consecuencia de la elección de unidades para expresar las medidas de las cantidades ligadas en las leyes, en un contexto y con*

*ABSTRACT*

*In this article Leonard Euler's contribution to the process of mathematization of Mechanics during the 18th Century is examined, specifically with respect to the physical quantities being used and the mathematical laws in which they are related. With this in mind, the most important chapters of Euler's most relevant works are analysed: his* Mechanics *(1736), the* New Principle of Mechanics *(1750), and the* Theory of movement of solid rigid bodies *(1760).*

*Along the three of them the following can be remarked: 1) the use of constants in the first physical equations; 2) the introduction of units and measures for the magnitudes involved; 3) the assumed necessity for the equations (and some of the consequences implied); and 4) the introduction of the word 'dimension' in Mechanics, as a consequence of the choice of units for expressing the measures of the magnitudes constrained in the laws, in a frame and a sense which approximates*

*Recibido el 14 de mayo de 2002*

*I.S.S.N. 0210-8615*

*un sentido que se va aproximando al que planteará Fourier en 1822 en el marco de su* Teoría analítica del calor.

*that proposed by Fourier in his* Analytical Theory of Heat *(1822).*

Palabras clave: Análisis Dimensional, Leonard Euler, Física, Leyes físicas, Magnitudes físicas, Matemáticas, Mecánica, Siglo XVIII, Unidades físicas.

## 1. El marco conceptual del trabajo histórico

Toda teoría física clásica, a los efectos del formalismo matemático, se construye esencialmente con un conjunto de magnitudes primarias y un sistema de 'leyes relacionales'[1]. Es verdad que son capitales también en la formulación de toda teoría los 'principios ecuacionales' (esencialmente, los principios de conservación; por ejemplo, conservación de la energía) que establecen una igualdad entre cantidades de una única magnitud, y las hipótesis magnitudinales (por ejemplo, la inaccesibilidad del cero absoluto) que predican una propiedad de una cierta magnitud, pero ni unos ni otras relacionan magnitudes distintas, es decir, no imponen ligaduras a las magnitudes al modo en el que Newton enunciaba la ley fundamental de la Dinámica[2]:

«*Axioma* 2. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza[3]».

Las 'leyes relacionales' (como la de Newton que acabamos de transcribir) de una teoría física se expresan como relaciones de proporcionalidad entre productos de potencias de cantidades de las magnitudes (usualmente primarias) de la teoría. Las cantidades pueden medirse una vez que se han elegido las unidades de medida de las cantidades de cada magnitud. En el tránsito de estas relaciones de proporcionalidad entre cantidades a las igualdades entre medidas, en cada expresión ecuacional de esa ley relacional surge una constante de proporcionalidad, problema que se pone de manifiesto con radicalidad en los trabajos de Euler que se analizarán críticamente a continuación[4].

Si en una ecuación relacional se suprime la constante, se reduce la libertad (arbitrariedad) en la elección de las unidades de las magnitudes primarias, es decir, se reduce en un grado el número de unidades que pueden elegirse arbitrariamente. Por consiguiente, toda ecuación relacional asociada a una ley universal en la que se suprima la constante universal superflua define una unidad en función de las restantes. Éste es el caso tradicional, y primero, de la constante dinámica de la Ley de Newton (aunque éste nunca pasara del enunciado retórico que veíamos arriba), que aparecerá con su impronta en este trabajo. De este modo, y sin tener en cuenta la naturaleza vectorial de las magnitudes, al pasar de la relación de proporcionalidad entre las cantidades de fuerza, masa y aceleración a la igualdad (ecuación) entre las medidas de esas cantidades[5], surgirá la constante de proporcionalidad $C_d$, denominada 'constante dinámica':

$$f=C_d ma. \tag{1}$$

La consideración del sistema (conjunto, en su caso) de ecuaciones relacionales de la teoría, con la utilización de sistemas de unidades coherentes, determina: a) el número de unidades [orden de la teoría] que pueden elegirse arbitrariamente; b) los conjuntos de magnitudes de la teoría cuyas unidades pueden elegirse arbitrariamente [base de la teoría]; c) el orden dimensional de la teoría; y d) las bases dimensionales posibles de la teoría[6].

Durante el siglo XVII se habían desarrollado algunas técnicas de medición para cantidades de magnitudes distintas de la longitud, pero refiriéndose a ésta. La velocidad instantánea podía medirse mediante una longitud de caída, el intervalo de tiempo pequeño por péndulos ajustando su longitud a la unidad requerida, y las presiones midiendo alturas de columnas de mercurio. Fuerzas, pesos y 'masas' se medían (todas ellas) mediante pesadas, con las consiguientes confusiones conceptuales por identificación mensurable de lo que magnitudinalmente es distinto. Lógicamente, estas técnicas condicionarían todos los desarrollo teóricos, como se podrá comprobar más adelante.

Sin embargo, en la Mecánica de Newton: a) las leyes, enunciadas como relaciones de proporcionalidad, carecen de cualquier tipo de simbolismo; b) las proposiciones se plantean también como proporcionalidades y se demuestran sólo geométricamente; y c) se introduce, todo lo más, un paso al límite «reduciendo las demostraciones» de algunas proposiciones «a las primeras y últimas razones de cantidades nacientes y evanescentes».

Ilustrativo de la matematicidad expresa en los *Principia* son, por ejemplo, sus consideraciones sobre la fuerza:

> «Aquí sólo pretendo dar una noción matemática de estas fuerzas, sin especular sobre sus causas y sedes físicas. Por lo cual la fuerza acelerativa será a la motriz como la velocidad [*celeritas*] es al movimiento»

En primera instancia parecería que solamente está planteando una razón entre cantidades supuestamente homogéneas, la fuerza acelerativa y la fuerza motriz ($f_a : f_m$). La que denomina 'fuerza acelerativa' es la que hoy denominaríamos 'aceleración' y el movimiento se interpretaría cuantificado como 'cantidad de movimiento', porque, como afirma Newton, «la cantidad de movimiento surge de la velocidad multiplicada por la cantidad de materia». Es decir, aunque de nuevo se expresa retóricamente, como en su Ley fundamental de la Dinámica, en la traducción al lenguaje simbólico ausente aún en Newton y en la Física de finales del siglo XVII (y que, como veremos más adelante, será precisamente una de las grandes contribuciones del XVIII), lo que se afirma es que:

$$\frac{f_a}{f_m} = \frac{v}{movimiento}$$

por ser

$$\left.\begin{array}{l} movimiento = v \cdot m \\ f_m \cdot f_a \cdot m \end{array}\right\} \rightarrow \frac{f_a}{f_a \cdot m} = \frac{v}{v \cdot m}$$

La tarea que se emprende sintéticamente en este artículo y centrado únicamente en Euler, es el estudio del camino recorrido por la Mecánica[7] en su matematización, es decir, el proceso seguido hasta la decisión de elegir unidades para poder expresar las leyes relacionales ya no únicamente como relaciones de proporcionalidad, sino como igualdades entre medidas, paso que dejó pendiente Newton al finalizar el siglo anterior[8]. Sí debe avanzarse que algunos de los desarrollos de Euler que se van a transcribir pueden parecer 'disparatados' si se contemplan únicamente con los ojos del presente. Nada menos que está surgiendo la matematización e iniciándose el valor de uso de las ecuaciones físicas y la realización de cálculos prácticos por mediación de ellas. Así, no deben extrañarnos las incorrecciones —numerosas— que podremos observar, como, por ejemplo —entre otras muchas—, que peso y masa sean homogéneos, o bien que espacio, tiempo, velocidad, fuerza y masa desempeñen papeles idénticos en su condición de magnitudes, o tantas otras cuestiones. Nuestra mirada ha de ser histórica, y desde esta perspectiva constatar con qué dificultades surgen los temas inherentes a la formalización mediante ecuaciones de las leyes de la Mecánica newtoniana.

## 2. En torno al uso de constantes en las primeras expresiones ecuacionales

En 1736 publica Euler su *Mecánica*[9]. Como parece natural, los desarrollos del primer capítulo enlazan sin discontinuidad con el formato geométrico propio del siglo XVII[10] en el que, tras explicitar los Axiomas, los teoremas consecuentes se enuncian (y demuestran) mediante proporcionalidades entre cantidades de velocidad, $c$, longitud, $s$, y tiempo, $t$. Para dos cuerpos en movimiento por ejemplo (§25)[11], se formulan como sigue:

$$C : c = S : \frac{sT}{T} \; seu \; C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t} . \tag{2}$$

A partir de consideraciones de este tipo resuelve, en particular, un problema (§51) con el que obtiene, ahora ya sí, la expresión ecuacional cinemática:

$$t = \int \frac{ds}{c} . \tag{3}$$

tal que, diferenciando, resultará

$$dt = \frac{ds}{c} , \tag{4}$$

donde $t$ representa una escala de tiempos [*scala temporum*] y lo que pretende es construir una escala de velocidades [*scalam celeritatum*]. Ciertamente, la expresión (4) se considera hoy como definición de la magnitud secundaria velocidad,

$$c = \frac{ds}{dt} . \tag{5}$$

Estas construcciones las retoma más adelante, estudiando el movimiento de un cuerpo de masa puntual $A$ (§151). Considera Euler que si sobre el cuerpo actúa una fuerza [*potentia*] $p$, para ese cuerpo de masa $A$ con velocidad $c$ se tiene (§155)

$$dc = \frac{npdt}{A}, \tag{6}$$

donde $n$ denota un número[12] [*ubi* n *in omnibus casibus eundem denotat numerum*] (§155). Operando[13] obtiene

$$dc = \frac{npdt}{A} = \frac{np\frac{ds}{c}}{A} = \frac{npds}{Ac}, \tag{7}$$

o bien (§157)[14]

$$cdc = \frac{npds}{A}. \tag{8}$$

Continúa tratando este problema en el capítulo tercero, que lleva por título «*De motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati*». En concreto (§193) estudia la caída libre de un cuerpo puntual de masa $A$, sometido a una fuerza g tal que, una vez recorrida una altura $x$, alcanza una velocidad $c$, y llega a una expresión de la relación entre la velocidad y la distancia recorrida para este movimiento uniformemente acelerado, literalmente[15]:

$$cc = \frac{2ngx}{A} \qquad seu \qquad c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}. \tag{9}$$

Como la altura (o distancia) recorrida $x$ es proporcional a $c^2$ [$cc$], Euler quiere expresar $c$ en términos de una 'especie de distancia' $v$ (nueva variable) proporcional a su cuadrado. Para ello propone (§201) un valor $v$ igual a la distancia $x$ que «produce» la velocidad $c$ en la caída libre, poniendo (§202):

$$v = cc \qquad \text{et} \qquad c = \sqrt{v} \tag{10}$$

donde

$$v = \frac{2ngx}{A}, \tag{11}$$

de tal modo que para estimar el valor de la constante $n$ considera (§204) que $g$ representa simplemente el peso del cuerpo. Como ha decidido que $v$ coincida con la distancia $x$ recorrida en la caída, resuelve:

$$v = \frac{2ngx}{A} \Rightarrow n = \frac{Av}{2gx} = \frac{A}{2g}, \tag{12}$$

y considerando que la razón de la masa del cuerpo $A$ al peso del cuerpo $g$ es constante[16] [*quantitas constants*] opta (§205) por hacerla uno [*hanc ergo ponemus* 1], eliminando el factor 2 de la expresión (12).

Hay, por tanto, en este planteamiento de Euler unas primeras igualdades entre 'medidas', pero no se han elegido unidades para las magnitudes que intervienen. Aparece una constante $n$, pero no se explicita que su cuantía dependa de las unidades elegidas para medir las magnitudes que intervienen.

Euler busca también una nueva expresión para el tiempo (§218), de forma que a partir de

$$c = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}, \tag{13}$$

haciendo

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = m, \tag{14}$$

deduce

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt{A dx}}{\sqrt{gx}} = \frac{m\sqrt{A}}{\sqrt{g}} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \tag{15}$$

tal que, integrando, obtiene

$$t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}. \tag{16}$$

Pero ahora afirma que $m$ solamente puede ser determinada mediante experimento [*experimento determinare literam* m].

Para hallar el valor de $m$ (§219-223) considera, como antes (§205), $A/g = 1$, y que en la caída libre, si la altura se mide en 'pies renanos' y el tiempo en segundos, mediante experimento se obtiene a partir de (16) que en un segundo

$$1 = 2m\sqrt{15625} \tag{17}$$

es decir, $m = \frac{1}{250}$.

Así, concluye que en el caso de la caída libre, si el espacio recorrido $x$ se mide en pies renanos (§221):

$$t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}\ \textit{minitorum secundorum}. \tag{18}$$

Para el movimiento en general (§222), si $v$ (la variable proporcional a $cc$)[17] y $s$ se miden en pies renanos, la ecuación (cinemática) a utilizar sería

$$t = \frac{1}{125}\int \frac{ds}{\sqrt{v}}\ \textit{min. sec.} \tag{19}$$

La precisión experimentada desde las aportaciones —formuladas retóricamente— de Newton, como puede observarse, es notable. En las páginas que siguen de esta *Mecánica* son muchas las cuestiones que análogamente podrían resaltarse para seguir este 'proceso de cuantización' (expresión que suelen utilizar los historiadores y filósofos) o 'proceso de matematización'. A modo de ejemplo (y son numerosos), ya en el segundo volumen de la obra, obtiene (§121) la ecuación

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{p\sqrt{xda}}{a} - \frac{p\sqrt{bda}}{a}, \tag{20}$$

afirmando que «al ser $p$ función de las mismas $a$ y $x$ de dimensión nula, las cantidades $a$, $b$ y $x$ verifican la homogeneidad».

Sin embargo, conviene que avancemos en el tiempo en la evolución del pensamiento de Euler.

## 3. Homogeneidad, constantes de proporcionalidad y elección de unidades en la 'primera' ecuación física

En 1752 se publica el «Descubrimiento de un nuevo principio de la Mecánica», escrito en 1750[18]. En él, después de numerosas aclaraciones previas, comienza (§20)[19] la «Explicación del Principio General y Fundamental de toda la Mecánica[20]».

Pretende determinar el movimiento de un cuerpo de masa puntual *M*, «solicitado» por fuerzas cualesquiera. Si *x* es la distancia del cuerpo con respecto a un plano fijo en el instante inicial, afirma Euler que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo deben descomponerse según direcciones paralelas o perpendiculares al plano. Para un elemento de tiempo *dt*, la distancia del cuerpo al plano será $x+dx$, de modo que si el elemento *dt* se considera constante, se tendrá:

$$2Mddx=\pm Pdt^2 \tag{21}$$

según que la fuerza *P* tienda a alejar o a acercar el cuerpo al plano. Para Euler «ésta es la única fórmula que encierra todos los principios de la Mecánica». A continuación afirma que para comprender mejor la importancia de esta fórmula es preciso explicar a qué unidades se refieren las diversas cantidades *M*, *P*, *x* y *t* que entran en ella.

A ello se dedica. Primero señala que *M* representa tanto la masa del cuerpo como el peso que tendría en la superficie de la Tierra, de manera que para el matemático suizo, al estar también reducida la fuerza *P* a la de un peso, las letras *M* y *P* «contienen cantidades homogéneas».

A continuación supone que la velocidad con que el cuerpo se aleja del plano, $\frac{dx}{dt}$, es igual a la que un grave adquiriría al caer desde la altura *v*,[21] por lo que debe tomarse

$$\frac{dx^2}{dt^2}=v, \tag{22}$$

donde el elemento de tiempo será

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}, \tag{23}$$

expresión a partir de la cual se obtiene la relación entre el tiempo $t$ y el espacio $x$.

Pero la fórmula (21) no determina totalmente el movimiento del cuerpo, puesto que sólo lo hace con respecto a un plano fijo. Precisa Euler, por tanto, que para hallar la «situación verdadera del cuerpo en cada instante», habrá que referirse al mismo tiempo a tres planos fijos perpendiculares entre sí. Denotando ahora por $y$ y $z$ la distancia desde los otros planos, y descomponiendo todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a lo largo de las direcciones perpendiculares a los tres planos, pueden representarse dichas fuerzas perpendiculares a los planos, respectivamente, mediante $P$, $Q$ y $R$. En suma, suponiendo que las fuerzas alejan al cuerpo de los planos, «el movimiento del cuerpo estará contenido en las tres fórmulas siguientes»:

$$2Mddx = Pdt^2 \tag{24.a}$$

$$2Mddy = Qdt^2 \tag{24.b}$$

$$2Mddz = Rdt^2 \tag{24.c}$$

En notación actual, si $F$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa $M$, se tiene entonces[22]:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{25.a}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{25.b}$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{25.c}$$

Así, por primera vez en la Historia, la ley fundamental de la Dinámica (la primera ley relacional —en sentido propio— de la Física que se expresa mediante una ecuación —igualdad entre medidas— y no sólo como relación de proporcionalidad entre cantidades) se descompone, como debe ser dada la naturaleza vectorial de las magnitudes relacionadas, según las tres direcciones del espacio puntual euclídeo tridimensional de la Física clásica[23].

Si se recorren otros trabajos de Euler de estos años, surgen numerosas manifestaciones de las cuestiones que estamos tratando. Por ejemplo, en el artículo también de 1750 sobre «El origen de las Fuerzas» se explicita[24] el sometimiento al requisito de homogeneidad de los miembros de cualquier ecuación, y se introduce[25] una constante que permite la expresión ecuacional de la proporcionalidad entre dos magnitudes.

## 4. Constructos magnitudinales y legaliformes

Con la *Teoría del movimiento de los cuerpos sólidos o rígidos*, terminada en 1760 aunque publicada finalmente en 1765[26], llegamos a la obra 'definitiva' de Euler, su tratado de Dinámica del sólido en el que expone de manera sistemática las concepciones que había ido publicando dispersas desde 1740 a 1760.

El contenido nuclear está precedido por una Introducción —dividida en seis capítulos— que contienen «ilustraciones y aclaraciones necesarias sobre el movimiento de los puntos». Después de tratar la Cinemática del punto con unas herramientas nuevas, las ecuaciones en coordenadas cartesianas que no podían aparecer en la *Mecánica* de 1736[27] (allí solamente estaban las ecuaciones intrínsecas de la Dinámica del punto), y lo que hoy se denominan 'sistemas de inercia', en el tercer capítulo «De las causas externas del movimiento» introduce los constructos magnitudinales fundamentales (masa, fuerza, inercia, velocidad, aceleración) y enuncia los principios fundamentales (leyes) de la Dinámica del punto.

Pero es en el cuarto, «De las medidas absolutas que se obtienen en la caída de los cuerpos», en el que debemos detenernos: para expresar ecuacionalmente las leyes de la dinámica previamente enunciadas, destaca Euler la necesidad de utilizar unas determinadas unidades, por lo que hay que justificar la elección del sistema conveniente.[28]

Comienza (§179)[29] definiendo lo que entiende por 'gravedad' y 'peso': gravedad [*gravitas*] es la fuerza por la que todos los cuerpos alrededor de la superficie de la tierra son empujados hacia abajo; mientras que la fuerza con la que cada cuerpo es atraído por causa de la gravedad se llama *peso*.

Tras analizar la caída de los cuerpos afectados por la gravedad (§180-183), supone que, retirados todos los obstáculos al movimiento, todos los cuerpos: 1) caen con la misma velocidad [*celeritas*]; y 2) estén bien en reposo o en movimiento, son impulsados hacia abajo con igual fuerza. Y asume estos dos fenómenos como hechos conocidos con el solo propósito de establecer unas medidas fijas, resumiendo la situación para el fenómeno de la caída de los graves (§189) con la siguiente explicación:

«La letra $p$ designa el peso del cuerpo del que tenemos cierta idea, y cuya medida es bien conocida. La letra $A$ representa la masa del mismo cuerpo, cuyo conocimiento realmente oculto se percibe claramente que será proporcional al peso. Además tenemos clara la noción de la cantidad de tiempo $t$, valorada por medidas segurísimas de él, por ejemplo, por minuto, por segundo o por hora. Por otra parte, la altura $s$ se define por medidas geométricas en línea recta».

Solamente queda por conocer $\lambda$ que, de acuerdo con Euler, no posee valor definido por sí misma, pero que quedará determinada en cuanto se expresen las otras cantidades $p$, $A$, $t$ y $s$ por unas medidas determinadas, a partir de la ecuación en la que están relacionadas todas ellas[30]:

$$s = \frac{\lambda ptt}{2A}. \tag{26}$$

## 5. En torno a la elección de unidades

Para Euler (§190), todas las cantidades medibles que aparecen en las fórmulas corresponden a cinco géneros [*quinque genera quantitatum*]: el espacio recorrido [*spatium percursum*], el tiempo [*tempus*], la celeridad [*celeritas*], la fuerza solicitante [*vis sollicitans*] y la masa [*massa*]. Y, efectivamente, pasa a postular un sistema de unidades para los cinco géneros de cantidades, de los cuales, el primero, la longitud (prácticamente el referente de todas las demás), no presenta ninguna dificultad.

Como el peso de cada cuerpo (§192) es la fuerza con la que es solicitado hacia abajo, y las fuerzas solicitantes y los pesos son —para él[31]— cantidades homogéneas entre sí [*sunt quantitates inter se homogeneae*], las fuerzas se expresan (§191) por pesos iguales a ellas, con lo que podrían definirse con seguridad sus cuantías. Sin embargo, como los cuerpos no son impelidos hacia abajo con iguales fuerzas en todas las regiones de la Tierra, debe elegirse para su medición una región cualquiera, a la que se referirán todas las mediciones subsiguientes.

Del mismo modo (§193), la masa de cualquier cuerpo la expresa Euler por el peso que tendría en la región elegida, puesto que considera (§194) que los pesos de los cuerpos son proporcionales a sus masas: «fuerzas y masas se toman por cantidades homogéneas, puesto que ambas vamos a expresarlas por pesos, y ya que en nuestras fórmulas las fuerzas siempre se presentan divididas por masas, consecuentemente usaremos alguna unidad en los pesos que se van a medir, ya sea la libra o la onza, pues el cociente resultante de la división de cualquier fuerza por su masa se expresará por un número absoluto».

En consecuencia (§194), en el caso de la gravedad, como tanto la fuerza solicitante $p$ como la masa del cuerpo $A$ se expresarían por su peso, $P/A$ será igual a 1, por lo que transcurrido el tiempo $t$ el grave desciende una altura

$$s = \frac{1}{2}\lambda tt \qquad (27)$$

y adquiere una velocidad

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t. \qquad (28)$$

Para medir los tiempos considera siempre como unidad el segundo [*minutum secundo*], que entiende, literalmente (§195), como la sesentava parte de la sesentava parte de la vigésima parte de un día natural, de modo que la letra $t$ será el número absoluto que indique cuántos segundos se contienen en el tiempo considerado.

Para medir la velocidad de un cuerpo tiene en cuenta (§196) el espacio que recorrerá ese cuerpo en un segundo, presuposición que le lleva a admitir que velocidades y espacios recorridos pueden expresarse por cantidades homogéneas, en concreto «líneas»... punto de partida —aquí de llegada— siempre que se aborda el problema de la medida de magnitudes[32].

Finalmente, para medir la altura $g$ utilizará (§198) como unidad la altura desde la cual «algo pesado» cae libremente en un segundo.

En suma, como para Euler los tiempos y las fuerzas aplicadas a las masas se indican, según los desarrollos de arriba, con números absolutos, en las fórmulas aparecen solamente cantidades de dos géneros [*generis quantitates*]: líneas y números absolutos.

Formuladas todas las hipótesis anteriores para la medición de las diferentes cantidades, sólo falta (§199) buscar una expresión para $\lambda$. Comienza recordando que para la fuerza $p$ y la masa $A$, $p/A=1$; que en un tiempo $t$ el cuerpo se deslizará una altura $s=1/2\lambda tt$; y como para $t=1$ segundo la altura era $g$, se tendrá $\lambda=2g$. Por tanto, la velocidad después de un segundo será

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g. \qquad (29)$$

En estas circunstancias puede concluir (§200) que $\lambda$ no representa un número sino una línea que es homogénea al espacio recorrido, mientras que las otras cantidades $t$ y $p/A$ se expresan mediante números absolutos.

Para cerrar el tema una vez «comprobado» que todo movimiento se reduce «fácilmente» a medidas absolutas y que resulta manifiesta la homogeneidad de todas las ecuaciones del movimiento, concluye: «los espacios recorridos y la letra $g$ son cantidades lineales y aproximadamente de una dimensión, y de este género son también las celeridades. Por otro lado, los tiempos $t$ se expresan mediante números absolutos semejantes a las fracciones $p/A$, construidos con dimensión nula».

## 6. Consideraciones finales

Como ha podido observarse, aunque Euler ha dado pasos importantísimos, todavía falta mucho para completar el panorama de la aportación del siglo XVIII hacia una caracterización matemática completa de las magnitudes y de las leyes de la Mecánica newtoniana. Ciertamente, otros autores se ocuparán, también dentro de este ámbito de la Mecánica, del sentido de los constructos matemáticos que integran las fórmulas de su ciencia.

Por ejemplo, d'Alembert, ya en 1743 afirmaba[33] que «no podemos comparar entre sí dos cosas de diferente naturaleza tales como espacio y tiempo, pero sí podemos comparar la razón de las partes del tiempo con las partes del espacio recorrido». Pero, como el tema seguía sin clarificarse completamente, retomaba estas cuestiones en 1758 insistiendo[34] —y para ello tenía que recurrir a expresiones ya clásicas entonces— en que no definía una velocidad uniforme como una distancia dividida por un tiempo (porque no podía existir una razón entre dos magnitudes heterogéneas), sino que lo correcto era decir que las velocidades uniformes son directamente proporcionales a las distancias e inversamente proporcionales a los tiempos[35].

En este mismo sentido de clarificación comenzará Lagrange su *Mecánica Analítica* de 1788, aquella en la que, por fin, ya no eran necesarias las figuras para expresar matemáticamente la Mecánica[36]: «Tomando una fuerza cualquiera o su efecto como unidad, la expresión de otra fuerza ya no es más que una razón, una cantidad matemática que puede representarse mediante números o líneas. Bajo este aspecto es bajo el cual consideramos las fuerzas en Mecánica».

El final del siglo XVIII (de culminación de una Mecánica newtoniana todavía propiamente objeto de matemáticos) dará paso a una nueva centuria en la que los —ya, sin duda— físicos emprenderán la matematización rigurosa de otros dos ámbitos que habían continuado en el nivel de lo cualitativo: Termología primero, Electricidad y Magnetismo después.

La necesidad de matematizar nuevas propiedades físicas («de la Naturaleza»), es decir, de construir nuevas magnitudes, de relacionar las potencias de sus cantidades en leyes y de igualar las relaciones de proporcionalidad utilizando las medidas de dichas cantidades, una vez elegidas sus unidades, proporcionarán desarrollos muy importantes que llegarán, incluso —y, de nuevo— a la Mecánica.

De hecho, el estudio de los conceptos magnitudinales y su inclusión en los enunciados legaliformes darán origen al mundo de 'lo dimensional' en la *Teoría analítica del calor* de J.B.J. Fourier (1822)[37], ámbito disciplinar que experimentará un enorme desarrollo a lo largo del siglo XIX a la par que se formulan matemáticamente la Electricidad, el Magnetismo y el Electromagnetismo. Esos dos ámbitos «llenan» la Física del siglo XIX que interesa a estas páginas, la Termología durante la primera mitad y el Electromagnetismo durante la segunda... a la vez que la Mecánica de Fluidos se establece con firmeza en las décadas de transición interseculares. Como no podía ser de otra manera, es precisamente al presentar las primeras formulaciones matemáticas en unos y otros campos cuando la necesidad de clarificar la naturaleza matemática de las nuevas magnitudes variables que van a relacionarse en las nuevas leyes físicas impondrá la necesidad de retomar —o, en su caso, desarrollar *ex novo*— las concepciones dimensionales alumbradas antes sólo para la Mecánica[38].

Paradigmáticos de estas consideraciones finales que solamente se aluden son los contenidos de los capítulos «Preliminares. Sobre la Medida de Magnitudes» y «X. Dimensiones de las Unidades Eléctricas» del *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) de Maxwell; las reflexiones sobre el concepto de «dimensión» de Rücker (1889) a partir de las que considera «dimensiones suprimidas»; y —entre otras contribuciones— el redescubrimiento por Williams (1892) de la naturaleza tridimensional del espacio matemático en el que se expresaba la Física que hoy consideramos clásica desde el propio Euler (como acabamos de ver), que imponía considerar «unidades de longitud tomadas, respectivamente, según las direcciones $O_x$, $O_y$ y $O_z$».

Como es natural, debe analizarse la propia formulación de las leyes en las que se relacionarán las nuevas magnitudes, desde la analogía newtoniana de la ley de la Electrostática de Coulomb o la ley de Fourier de la conducción del calor, hasta la expresión definitiva de las leyes del Electromagnetismo. Pero estas cuestiones merecen que se les dediquen trabajos monográficos.

## NOTAS

1. El punto de partida conceptual de este trabajo lo constituye la Teoría Dimensional, presentada en GONZÁLEZ DE POSADA [1994]. Un marco histórico general sobre las principales cuestiones que tratamos en el artículo, en el que situar aportaciones concretas, se establece en la tesis doctoral de GONZÁLEZ REDONDO [2000]. Un libro de referencia a lo largo de este trabajo, pero con otros planteamientos complementarios al nuestro, es el de BLAY [1992].
2. Utilizamos la edición en castellano, *Principios matemáticos de la Filosofía natural*, preparada por Antonio Escohotado para Editora Nacional, y reimpresa en 1987 por Tecnos. Existe otra edición en nuestra lengua publicada en dos volúmenes por Alianza Editorial.
3. Newton escribe dos capítulos previos a los desarrollos recogidos en los tres libros que componen los *Principia*: el primero, titulado «Definiciones», dedicado a elucidar los conceptos propios de su Filosofía Natural, las 'magnitudes'; el segundo, «Axiomas o leyes del movimiento», a presentar y desarrollar las 'leyes fundamentales' de su Dinámica. En los enunciados actuales de este segundo axioma no se hablaría de «cambio de movimiento», $\frac{d(mv)}{dt}$ sino de «producto de masa por aceleración», $m\frac{dv}{dt}$ . Un estudio detallado de la contribución de Newton a estos temas se recoge en GONZÁLEZ REDONDO [2003c].

4. Sobre Euler pueden verse, por ejemplo, YOUSCHKEVITCH [1970] y TRUESDELL [1960]. De este último autor hemos tenido presente a lo largo de este trabajo TRUESDELL [1975]. También deben tenerse en cuenta el trabajo más reciente de FELLMANN [1995]; y, muy especialmente, el estudio de Euler y su contexto histórico de Antonio J. Durán en el segundo volumen de la edición facsimilar de la *Introductio in Analysin infinitorum*, publicada en 2000 por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» y la Real Sociedad Matemática Española. Complementariamente, en GONZÁLEZ DE POSADA *et al.* [2003] se aporta un denso panorama de la Historia de la Física (hasta 1800) a través de sus libros.
5. Sobre los orígenes históricos de este «tránsito» ver GONZÁLEZ REDONDO [1995, 2000 y 2003a].
6. Puede verse el estudio histórico que sobre el Análisis Dimensional de Julio Palacios presentamos en esta misma revista [GONZÁLEZ DE POSADA y GONZÁLEZ REDONDO, 2002].
7. Hoy ya es un clásico, aunque con un enfoque distinto del que aquí adoptamos, el libro de DUGAS [1955].
8. Aunque las herramientas algebraicas ya existían desde las contribuciones de Vieta y Descartes [GONZÁLEZ REDONDO, 1995; GONZÁLEZ REDONDO & REDONDO ALVARADO, 1996].
9. Utilizamos los volúmenes I y II de la edición en latín de Paul Stäkel de 1912, de la *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, dentro de la *Opera Omnia*, «Series Secunda, Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Primum». Teubner, Berna. La colección que hemos consultado se encuentra en la «Biblioteca de Investigación» de la Facultad de Matemáticas de la U.C.M.
10. Este «formato» está omnipresente en los *Diálogos* de GALILEO [1638], pero también es usual, a finales del siglo, por ejemplo, en los *Escritos de Dinámica* de LEIBNIZ [1686-1698].
11. Euler numera sucesivamente cada párrafo (Definición, Teorema, Corolario o Escolio), lo que conservamos aquí para facilidad de referencia y contraste con el original.
12. Una «constante», como podremos leer más adelante en una nota con la interpretación de MACAGNO [1971].
13. La expresión científica actual de esta ecuación, que no es otra que la ley fundamental de la Dinámica, se deduce de la siguiente elemental manera:
$$A\frac{dc}{dt} = np \Rightarrow (para\, n = 1)\; m\frac{dv}{dt} = F \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}.$$
Por otra parte, la constante $n$ es la teóricamente denominada 'constante dinámica' en la ley fundamental de la Dinámica newtoniana que mencionábamos arriba. Pero habrá que esperar hasta 1750, como veremos más adelante, para que Euler profundice en este sentido.
14. Sobre la interpretación de esta fórmula de Euler se han publicados varios artículos en los que pueden verse diversas versiones con distintas notaciones. Así, en

RAVETZ [1961, p. 10] se dice: «Para una fuerza general $p$ que actúa sobre un cuerpo de masa o peso $A$, la ecuación dinámica es

$$dv = \frac{pdt}{A}.$$ »

Análogamente, en MACAGNO [1971, p. 393] se afirma: «[Euler] formuló la ecuación

$$Adv=npdt$$

(para el movimiento de una masa $A$ bajo una fuerza $p$), incluyendo una constante $n$ que consideró dependía de las unidades elegidas para medir las magnitudes implicadas».

15. Esta expresión de Euler no es otra que la conocida hoy como velocidad de un movimiento uniformemente acelerado, de aceleración $a$, que parte del reposo [velocidad nula], cuando ha recorrido una distancia $s$:

$$v = \sqrt{2as}.$$

que para el caso de la caída libre en el campo gravitatorio terrestre es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

16. No es más que la inversa de la aceleración de la gravedad (constante).
17. Según veíamos antes (§201), con valor igual a la distancia que «produce» $c$ en la caída libre. Conviene recordar que Euler intenta reducir las mediciones de todas las magnitudes a longitudes de «líneas» o números absolutos.
18. Se utiliza la edición de «Decouverte d'un nouveau principe de mécanique» (1750) recopilada, junto con otros artículos, con el título general de *Commentationes Mechanicaei*, en la *Opera Omnia*, «Series Secunda. Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Tertium, Volumen V», pp. 81-108. Teubner, Berna.
19. Como es costumbre en Euler, en estos artículos también numera sucesivamente los párrafos temáticos.
20. Complementariamente, pueden verse los estudios sobre este trabajo de TRUESDELL [1960 y 1975] y DUGAS [1956].
21. No confundir esta variable, $v$ con la velocidad [celeritas] $c$. Recordemos, de nuevo, que en 1736 Euler concibió (§201) ya esta variable (§201) proporcional a $c^2$, medible (§222) en pies renanos.
22. Comparar con lo que escriben FAUVEL y GRAY [1987, pp. 460-462].
23. Este tipo de cuestiones vuelven a surgir con la matematización de otros ámbitos físicos, sobre todo durante el siglo XIX. Por ejemplo, y aunque referido inicialmente al Electromagnetismo, pero con pretensión de generalidad, puede consultarse WILLIAMS [1892].
24. Ver EULER [1750b, p. 127], publicado también dentro de las *Commentationes Mechanicaei*, en la *Opera Omnia*, «Series Secunda. Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Tertium, Volumen V», pp. 109-131. Teubner, Berna.
25. EULER [1750b, p. 130].

26. La *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1760) de Euler lleva como subtítulo «De los elementales principios de estática que conocemos y hasta todos aquellos movimientos en que de alguna manera puedan caer o acomodarse los cuerpos». Se utilizan los volúmenes I y II de la edición en latín de Charles Blanc (1948) dentro de la *Opera Omnia*, «Series Secunda. Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Tertium». Teubner, Berna.
27. Ver, por ejemplo, BOYER [1986, pp. 538-539].
28. Dirá MACAGNO [1971, p. 393]: «Euler dedicó un capítulo a cuestiones de unidades y homogeneidad; aunque sus discusiones son algo oscuras, resulta evidente que Euler se apercibió de que no hay nada absoluto en la cuestión de los sistemas de unidades y dimensiones de las magnitudes físicas».
29. De nuevo, conservamos la numeración de los párrafos ahora en éste, último libro que analizamos.
30. Esta ecuación se corresponde, haciendo $\lambda=1$, con la usual de la altura de caída libre de un cuerpo que parte del reposo

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

31. No olvidemos, sobre todo a partir de este punto, que estamos en 1760 y Euler es el primero que se enfrenta a una cuestión tan novedosa... y, aunque más adelante lo citaremos brevemente, en otra ocasión nos referiremos con detalle a la contribución de d'Alembert sobre estos temas.
32. Ya hemos destacado suficientemente esta cuestión al analizar los trabajos de Euler de 1736 y 1750.
33. Esta referencia la leímos por primera vez en O'RAHILLY [1938, p. 685].
34. D'ALEMBERT [1758, p. 16]. Estas contribuciones las estudiaremos oportuna y detalladamente en un próximo artículo.
35. Puede recordarse, en esta línea, lo que varias décadas después se verá obligado a seguir precisando —por ejemplo— LAMÉ [1836, vol. 1, p. 22]: «Espacio, tiempo y velocidad son magnitudes de tipos diferentes que deben referirse a unidades diferentes para que podamos comparar los números que las representan: si $l$ es la razón del espacio recorrido a la unidad de longitud y $t$ la del tiempo considerado a la unidad de tiempo, la velocidad por definición viene dada por la ecuación $v=l/t$.»
36. LAGRANGE [1788, p. 1]. Como se apuntaba en nota anterior referida a D'Alembert, las aportaciones de Lagrange serán estudiadas pormenorizadamente en un nuevo artículo que se está preparando.
37. Pueden verse GONZÁLEZ DE POSADA *et al.* [1991] y GONZÁLEZ REDONDO [2002].
38. Consideraciones generales sobre estas cuestiones pueden verse en GONZÁLEZ REDONDO [2000].

## BIBLIOGRAFÍA

BLAY, M. (1992) *La naissance de la mécanique analytique: la science du mouvement au tournant des XVIIe XVIIIe siècles.* Presses Universitaires de France, París.

BOYER, C. (1986) *Historia de la matemática.* Alianza, Madrid.

D'ALEMBERT, J.R. (1758) *Traité de dynamique.* David, París.

DUGAS, R. (1955) *Histoire de la mécanique.* [Utilizamos la edición inglesa, *History of Mechanics.* Dover, New York, 1988].

EULER, L. (1736) *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.* Teubner, Berna, 1912.

EULER, L. (1750a) «Decouverte d'un nouveau principe de mécanique». *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin* 6, 185-217. [Aparece publicado en 1752].

EULER, L. (1750b) «Recherches sur l'Origine des Forces». *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin* 6, 419-447. [Aparece publicado en 1752].

EULER, L. (1760) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* Teubner, Berna, 1948.

FAUVEL, J. & GRAY J. (eds.) (1987) *The History of Mathematics. A Reader.* The Open University, Milton Keynes.

FELLMANN, E.A. (1995) *Leonhard Euler.* Rowohlt Taschenbuch, Reinbek bei Hamburg.

GALILEO (1638) *Diálogos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias.* Editora Nacional, Madrid, 1976

GONZÁLEZ DE POSADA, F. (1994): *Breviario de Teoría Dimensional.* Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ DE POSADA, F. & GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2002) «Génesis histórica, enunciado y evolución del Análisis Dimensional de Julio Palacios». *Llull*, *25*(53), 399-423.

GONZÁLEZ DE POSADA, F. & GONZÁLEZ REDONDO, F.A. & REDONDO ALVARADO, M.D. (1991): «Las 'Remarques Gènèrales' en la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier». En: *Anuario Científico 1990 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 157-171. Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ DE POSADA, F. & GONZÁLEZ REDONDO, F.A. & TRUJILLO JACINTO DEL CASTILLO, D. & CRESPO TOBARRA, C. (2003) *Libros antiguos de Física en la Biblioteca Histórica de la UCM.* Universidad Complutense de Madrid.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (1995) «Historia del Postulado General de Homogeneidad. En torno a F. Viete (1591)». En *Anuario Científico 1994 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 167-174. Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2000) *Historia del Análisis Dimensional.* Tesis Doctoral en Matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2002) «Daviet de Foncenex y Lazare Carnot: ¿Las raíces dimensionales de Fourier? Algunos comentarios a Martins, Grattan-Guinness y Gillespie». *Llull, 25* (52), 17-27.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2003a) «Del *Artem Analyticem* de Vieta a la *Mathesis Universalis* de Descartes. Nuevas perspectivas en torno a un período singular en la Historia del Álgebra». *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, 63* (febrero), 51-67.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2003b) «El origen histórico de la Física matemática. La matematización de las relaciones cinemáticas desde Arquímedes hasta Galileo». *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, 64* (junio), 67-78.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2003c) «La formulación matemática de la Mecánica del siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz». *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, 65* (octubre). [Pendiente de publicación].

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. & REDONDO ALVARADO, M.D. (1996) «Las concepciones dimensionales en la obra de R. Descartes». En *Anuario Científico 1995 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 109-115. Universidad Politécnica de Madrid.

LAGRANGE, J.L. (1788) *Mechanique Analitique*, Darboux, París.

LAMÉ, G. (1836) *Cours de Physique.* Bachellier, París.

LEIBNIZ, G.W. (1686-1698) *Escritos de Dinámica.* Tecnos, Madrid, 1991.

MACAGNO, E.O. (1971) «Historico-critical Review of Dimensional Analysis». *Journ. Franklin Inst. 292*, 391-402.

MAXWELL, J.C. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetism.* London [Reimpresión en Dover, New York].

NEWTON, I. (1687) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Tecnos, Madrid, 1987.

O'RAHILLY, A. (1938) *Electromagnetics. A Discussion of Fundamentals.* Longmans Green, London.

PALACIOS, J. (1956) *Análisis Dimensional.* Espasa-Calpe, Madrid. [2ª ed., 1964].

RAVETZ, J. (1961) «The Representation of Physical Quantities in Eighteenth Century Mathematical Physics». *Isis, 52*, 7-20,

RÜCKER, A.W. (1889) «On the Suppressed Dimensions of Physical Quantities». *Philosophical Magazine 27*, 104-114.

TRUESDELL, C. (1960) «The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788», Prólogo al Volumen XI de la *Opera Omnia*, «Series Secunda, Opera Mechanica et Astronomica», pp. 250-253. Teubner, Berna.

TRUESDELL, C. (1975) *Ensayos de Historia de la Mecánica.* Tecnos, Madrid.

WILLIAMS, W. (1892) «On the Relations of the Dimensions of Physical Quantities to Directions in Space». *Philosophical Magazine 34*, 234-271.

YOUSCHKEVITCH, A.P. (1970) «Euler, Leonard». En C.C. Gillespie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 5, pp. 467-484. Scribner's, New York.