

## DEL HACER MATEMÁTICO Y SUS FILOSOFÍAS

JAVIER DE LORENZO  
Universidad de Valladolid

### RESUMEN

*En el último tercio del s. XX la Matemática se ha ido desprendiendo del difuso enfoque formalista que la había dominado desde mediados de siglo. Su nueva interrelación con las ciencias, la aparición del ordenador han suscitado nuevos problemas conceptuales a la vez que han permitido resolver viejos problemas. En paralelo, la Filosofía de la Matemática se ha desprendido de la pretensión de conseguir unos Fundamentos definitivos. Sin embargo el pensamiento matemático no se ha desarrollado en paralelo al desarrollo matemático aunque hay que reconocer que se ha producido una cierta renovación por la Filosofía de la Matemática. Renovación en terrenos de interés más puramente filosófico o sociológico que estrictamente matemático como lo reflejan escuelas «naturalistas» cuyo interés se centra en el estatuto ontológico de las entidades matemáticas y sus consecuentes estrategias epistemológicas. Aunque algunas tendencias de carácter constructivista tratan de aprehender, sin constituir sistema, el Hacer matemático en sí.*

### ABSTRACT

*In the final third of the twentieth century, mathematics had been moving away from the diffuse formalist approach that had been dominant since the middle of the century. Its new relationship with the sciences and the appearance of the computer have given rise to new conceptual problems at the same time they have provided for the solution of old ones. In parallel fashion, the philosophy of mathematics has moved away from the aspiration of arriving at definitive foundations. Nonetheless, mathematical thought has not developed parallel to the development of mathematics, although it is necessary to recognize that it has produced a kind of renewal in itself, a renewal in fields of interest more philosophical or sociological than strictly mathematical, as reflected in the «naturalist» schools focused on the ontological statute of the mathematical entities and their corresponding epistemological strategies, although some constructivists attempt to understand, without constructing a system, the mathematics in and of itself.*

Palabras clave: Filosofía de la Matemática, Matemáticas, Siglo XX.

## I

En los primeros años del siglo XX se produjo entre los matemáticos cierta discusión y, en parte, escisión, por aceptar o no demostraciones de carácter existencial no constructivo —y que pueden resumirse en la expresiva afirmación de Paul Gordan «esto no es matemática, sino teología»—. Escisión radicalizada desde la formulación explícita del Axioma de elección por parte de Zermelo en 1904. Los procesos existenciales no constructivos, el axioma de elección y sus equivalentes hincaban sus raíces en un Hacer Global cuyo punto de partida no era ya la figura, la ecuación, la función dadas, sino el sistema o conjunto de objetos de naturaleza cualquiera al que se dotaba de una u otra estructura según la ley de operación interna que se definiera. Discusiones entre matemáticos que pronto sufrió un cambio de horizonte: algunos buscaron una fundamentación definitiva del Hacer matemático y, desde el terreno filosófico, convirtieron varias dificultades teórico-conjuntistas en auténticas paradojas provocando la sensación de una crisis en el hacer matemático, cuando dicha crisis lo era, básicamente, en los pretendidos intentos de dicha fundamentación.

Intentos de fundamentación que se plasman, en un primer momento, entornos de 1908, en tres grandes líneas, muy diferentes entre sí: Axiomatización de la Teoría de conjuntos por parte de Zermelo; Logicismo formal por parte de Russell-Whitehead como variante del logicismo iniciado por Frege desde la elaboración de su Conceptografía en 1879; Fenomenología como apoyatura para dar cuenta de una auténtica filosofía de la Aritmética por parte de Husserl. Junto a ellas, se tienen los intentos de los neokantianos de las escuelas de Marburgo y Baden que pretenden compatibilizar el «nuevo» hacer matemático, conjuntista, con el espíritu kantiano. Todos ellos buscan dar una fundamentación definitiva a la praxis matemática. Praxis que, con independencia a esas búsquedas, a esas pretendidas crisis, va a tener un desarrollo espectacular al unir la base conjuntista con la técnica de definición aportada por el método axiomático. El Análisis funcional que se origina con los trabajos de la escuela francesa con Lebesgue y Frechet como figuras estelares, la Topología con Poincaré y posteriormente Brouwer, el enfoque estructural-algebraico que culmina con la escuela de Emmy Noether, el Análisis de variable real..., suponen un desarrollo espectacular del dominio matemático.

En medio, y desde los años 20, se origina una nueva discusión entre los matemáticos: Herman Weyl, en nombre de un intuicionismo brouweriano, publicará en 1921 una soflama afirmando la existencia de una crisis en la matemática y no sólo en sus regiones limítrofes como pueden ser las líneas conjuntistas, sino en el propio núcleo de la matemática al ver que, en ella, las demostraciones carecen de todo tipo de carácter constructivo y el continuo ha perdido su carácter especial incluso tras su discretización conjuntista. Weyl requiere la aparición de una revolución al estilo bolchevique encabezada por Brouwer.

En defensa del imperio matemático, Hilbert se orientará hacia un finitismo aún más radical que el intuicionista de Brouwer y, para mantener el Hacer Global donde el infinito actual reina de manera absoluta, acepta el manejo de este infinito como un elemento de ficción, en el mismo sentido que los matemáticos han tenido que ir aceptando elementos ideales como los imaginarios, los puntos en el infinito en geometría proyectiva... Ficción ideal útil que ha de adjuntarse al dominio de los elementos finitos, a la matemática real que maneja el matemático —no somos infinitos— para dar cuenta del total de la matemática que se va realizando. Enfoque pragmático, ciertamente, pero que obliga a Hilbert a plantear el manejo de la matemática ideal, de la matemática que emplea ese infinito actual mediante unos procesos de axiomatización y posterior formalización que le conducen a defender un Formalismo como base para el Hacer matemático.

De las tendencias que he mencionado, hacia el final de los veinte se mantenía un Logicismo devaluado al que ahora se suman el Intuicionismo de Brouwer y el Formalismo de Hilbert. La Fenomenología de Husserl se decanta, definitivamente, por el lado filosófico al igual que las corrientes neokantianas. Desde esta década, y como tópico, van a considerarse como únicos temas de la Filosofía de la Matemática estas tres corrientes: Logicismo, Intuicionismo, Formalismo como si las demás no hubieran existido o como si tampoco existiera el pensamiento de algunos matemáticos que, a pesar de todo, seguían «pensando» además de continuar haciendo matemáticas. Tres corrientes que, desde su origen, y a pesar de su imagen, estaban abocados al fracaso porque el Hacer matemático, como praxis, como Hacer, no se halla, hasta ahora, definitivamente clausurado y, realmente, no se encuentra reflejado, de modo total, por esas escuelas.

Sin embargo, los éxitos conseguidos partiendo del Hacer global y la definición axiomática como uno de sus instrumentos básicos, fueron imponiendo una

difusa visión formalista del Hacer matemático especialmente en los terrenos de la enseñanza y ello a pesar de los teoremas de limitación de los sistemas formales que se demuestran en los años treinta. Una visión formalista que tiene en el grupo Bourbaki su máximo exponente a partir de los años cincuenta.

Hay que reconocer que, de modo innegable, el enfoque axiomático y el desarrollo en profundidad en campos específicos propició un desarrollo espectacular del Hacer matemático así como posibilitó la resolución de algunos viejos problemas pendientes de solución como ha puesto de relieve, y como ejemplo paradigmático, la definitiva resolución del teorema de Fermat. Es un desarrollo, sin embargo, que también condujo a una escisión en materias cada vez más desarrolladas y, simultáneamente, separadas entre sí y que hacen difícil para un único matemático dominar todos esos nuevos campos.

Pero también hay que reconocer que es un hacer que carece de relación, en el fondo, con las grandes líneas de pretendida fundamentación. Líneas que permanecieron como grandes tópicos en lo que vino en denominarse Filosofía de las matemáticas identificada con Fundamentos de la misma, siendo intercambiables ambos títulos. Los análisis lógicos y filosóficos acerca de la matemática llevados a cabo desde esas visiones parecían no tener relación con la praxis real de dicha matemática y quedaban en los extrarradios del imperio matemático para decirlo en la terminología utilizada por Weyl en 1921.

## II

Desde los años setenta se produce una inflexión tanto en el interior de la matemática como en el contexto en el cual se realiza la misma. Esa inflexión supone, en el interior, una mezcla de disciplinas con apoyatura en el elemento geométrico que viene aportado, esta vez, por la Topología. Al igual que una vuelta a sus orígenes con un claro enlace con la Física. Enlace propiciado, además, por la aparición del ordenador que, con Steen, se ha convertido en un intruso en el ecosistema matemático que, como tal, provoca variaciones en dicho ecosistema.

En el exterior, la insistencia en que el Hacer matemático, como cualquier otro hacer, es tanto una producción como un producto humanos y no de los dinosaurios y, como tal, constituye un Hacer social que depende tanto del matemático en su individualidad concreta como del contexto social en el cual ese matemático nace, se educa y trabaja. Y lo hace con unos temas y unos

medios determinados, con unos bagajes que, de modo evidente, condicionan su hacer.

En esta tesitura, la Filosofía de la Matemática ha quedado en un terreno un tanto híbrido. Para el pensamiento matemático, supuso la nítida convicción de la inutilidad en la búsqueda de una fundamentación definitiva y segura, a pesar de que en algunos autores se mantenga el término «fundamentos» pero ya sin la querida pretensión de los primeros años del siglo XX. Desde esta convicción se ha propiciado la existencia de lo que se pueden considerar dos grandes líneas en cuanto a la Filosofía de la Matemática.

Por un lado, se encuentran quienes identifican la Filosofía de la Matemática con la Filosofía de la Lógica, restos de un añorado logicismo que se pretende renovar a la vez que la de aquellos lógico-matemáticos que procuran unas fundamentaciones en la Teoría de conjuntos en el sentido de mostrar que se puede desarrollar la matemática en dicha teoría, porque ya en la Lógica se ve inviable porque es la misma Lógica, escindida en multitud de lógicas, la que tendría que ser, de alguna manera, analizada si no fundamentada. Con ellos, quienes pretenden una Filosofía de la Matemática como fundamentos pero entendiendo ahora este término como un análisis conceptual, estrictamente filosófico, tanto de los conceptos matemáticos como de sus tipos de demostración... Con ellos, los que pretenden una filosofía «naturalizada» en el sentido de no depender de unos primeros principios de carácter extramatemático, pero que poseen un carácter estrictamente filosófico, anclando sus análisis en campos ontológicos y semánticos.

Por otro lado, se encuentran aquellos que pretenden pensar acerca del Hacer matemático en sí, y se tiene en cuenta la génesis, la historia y, sobre todo, tratan de atender a la praxis matemática como se va produciendo, observando que la Matemática ha sufrido cambios profundos incluso a lo largo de nuestra propia vida y que no sólo se han reflejado en la enseñanza sino en la imagen de la misma. Un tener en cuenta los procesos genéticos e históricos, los educativos... que se pretende no como mera reconstrucción racional sino reflejo más real de los mismos.

En este repaso a la Historia se puede observar, por ejemplo, que la aproximación formal de carácter sintáctico en la segunda mitad del siglo XX no ha sido tan completa sino que su imposición ha dependido de unos condicionantes ideológicos y políticos muy determinados. Matemáticos como von

Neumann, como Wiener o Turing, como los polacos ligados al café escocés entre los cuales destacar Ulam..., las escuelas soviéticas de Markov o matemáticos como Arnold o Alexandrov, por no citar muchos otros, investigaron en la matemática marginados a cualquier formalismo sintáctico «estilo» Hilbert o Bourbaki y mantuvieron el enlace matemática-ciencia siempre tan querido para el conocimiento y para el propio pensamiento matemático.

Un enlace que parecía una interrelación perdida pero que, en el último cuarto de siglo ha sido recuperada. Sobre todo mediante la interrelación con las teorías del campo cuántico, la teoría de cuerdas, la simetría especular con la geometría simpléctica... que han llevado a nuevas ideas en el interior del hacer matemático. Ideas y nuevos problemas que, en particular y desde un terreno de análisis conceptual, se centran en los papeles que la demostración y el rigor vuelven a mantener, así como en la problemática de la existencia de lo manejado.

Desde esta interrelación, parte de la terminología empleada por los físicos ha entrado en la jerga matemática al igual que, en lo demostrativo, se ha vuelto a tener conciencia de que la labor del físico no es ver si la naturaleza funciona con rigor y demostrativamente, sino averiguar cómo funciona. Y el matemático tiene, en este terreno, un papel semejante: desarrollar nuevas ideas para ese estudio, aunque en un principio la demostración de las mismas carezca del rigor exigible desde posiciones más formalistas. Es lo ocurrido con teoremas como los de Borchards o de Donaldson, apoyados en analogías directas de la teoría de cuerdas y las simetrías físicas. A su vez, el hacer matemático sigue aportando sus teorías, métodos y conceptos para el trabajo del físico especialmente a través de las álgebras semisimples de Lie, por ejemplo, o las aportaciones que he indicado procedentes de la topología y la geometría como la simpléctica.

De estos dos grandes bloques en los que se puede escindir una pretendida Filosofía de la Matemática voy a detenerme, y muy brevemente, en sólo algunas líneas en que los mismos, a su vez, se escinden. Para una visión más amplia y completa remito, en particular, a mi libro de Lorenzo 2000.

1. En cuanto al bloque más puramente filosófico, hay al menos dos grandes líneas:

a. Por un lado, la corriente que he mencionado como conjuntista y que se quiere más ligada al Hacer matemático. En ella se pretenden explicar tres cuestiones: los conceptos fundamentales y los objetos que caen bajo esos conceptos; los axiomas, la lógica. Con lo cual los fundamentos de toda la

matemática, incluyendo la lógica matemática y el propio método axiomático, caen ahora bajo la teoría de conjuntos. De aquí que los fundamentos de la matemática sean, de hecho, los de la teoría de conjuntos por lo que hay que dar cuenta tanto del concepto básico de conjunto de conjuntos como de la lógica de esa teoría que no es, en este caso, teoría axiomatizada. Ello supone que las proposiciones acerca del universo de todos los conjuntos son verdaderas y no porque estén determinadas a partir de unos axiomas sino que son los propios axiomas los que están sometidos a la exigencia de que, en algún sentido, han de ser verdaderos en ese universo.

Es línea en la cual me limito a señalar los trabajos de Monk o de Mayberry. Frente a líneas de trabajo que aceptan que la matemática se puede desarrollar a partir de la Teoría de Categorías, estos autores siguen manteniendo que toda la matemática puede descansar en las teorías conjuntistas. El gran problema con el que se enfrentan estas posiciones es dar cuenta del viejo dilema: discreto-continuo y la imposibilidad, en el fondo, de reducir los conceptos geométrico-topológicos a meros sistemas conjuntistas.

A la vez, se ha replanteado la cuestión de si los axiomas hasta ahora adoptados como básicos para la teoría de conjuntos, en cualquiera de sus formulaciones, representan el total de la propia noción de conjunto. Ya el propio Zermelo había indicado que su objetivo era el de acotar esta noción en el sentido de que en ella no pudieran producirse paradojas. Pero esa misma acotación entraña que, desde su planteamiento, la axiomática elegida no da cuenta del total de lo que pretende delimitar. En este terreno se han producido trabajos interesantes en los campos calificados de *estabilidad* desde los cuales se trata de explicitar los conceptos informales que, en cierta manera, continúan entornando el trabajo conjuntista.

*b.* En un enfoque más puramente filosófico, en los entornos de los setenta se produce la publicación por parte de Benacerraf de dos ensayos que van a relanzar el debate filosófico en torno al Hacer matemático. Por un lado, Benacerraf hace ver lo que califica de *indeterminación de los números naturales* si los naturales se identifican con conjuntos: cómo considerar, por ejemplo, el número 2 como conjunto en la versión conjuntista de Zermelo  $\{\{\Delta\}\}$  o en la de Neumann  $\{\Delta, \{\Delta\}\}$ . Ambos conjuntos son, claramente, diferentes pero el número 2 ha de ser uno de ellos por lo cual queda realmente indeterminado.

Tras el ensayo de Gettier en el que pone de relieve que la caracterización de conocimiento platónica es insuficiente y la solución propuesta por Goldman de aceptar la teoría causal del conocimiento para completarla, Benacerraf lanza lo que desde entonces se denomina *dilema de Benacerraf*: lo que hace posible el conocimiento matemático imposibilita la existencia de los objetos matemáticos; la existencia de los objetos matemáticos imposibilita su conocimiento. Con este dilema Benacerraf vuelve a plantear, en el fondo, el viejo problema de cómo se alcanza el conocimiento de los objetos matemáticos considerados como objetos abstractos, independientes al sujeto epistémico. Son dos ensayos, dos líneas que se dirigen contra la admisión del realismo matemático, realismo que se pretende identificar con el clásico platonismo.

Al debate originado por estos ensayos, y que es realmente ontológico, se suman los pensadores básicamente anglosajones que tratan de discutir acerca de la existencia o no de las entidades matemáticas, abstractas, y se escinden en tendencias como el realismo con sus dos grandes acepciones metafísico o semántico, el nominalismo, el estructuralismo, modalismo...

A este debate propiciado por los ensayos de Benacerraf —a los que se sumarían los de Steiner, entre otros— se agrega un tercer elemento, el aportado por Quine y luego Putnam acerca de la *indispensabilidad* o no de la *matemática*: las entidades matemáticas son indispensables para las teorías físicas y, por ello, poseen su mismo estatuto científico. Una línea argumental que se pretende, frente a las dos anteriores, como defensora del realismo matemático, a la que se agrega la posición de quienes, desde lo pragmático, buscan la mejor teoría posible...

El realismo matemático afirma, desde el terreno metafísico, que las entidades matemáticas —números, funciones, estructuras...— existen y son independientes al espíritu y al lenguaje, por lo cual el matemático en su trabajo se limita a descubrir las teorías matemáticas acerca de esas entidades donde las teorías no son más que sistemas proposicionales de juicios verdaderos o falsos en virtud de las propiedades de dichos objetos existentes en sí.

Es un realismo que, por partir de la creencia ontológica previa de unas entidades abstractas existentes en sí, exige elaborar estrategias que den cuenta de cómo el matemático alcanza el conocimiento de esas entidades. Estrategias que han llevado a pensadores como Penelope Maddy a sostener que percibimos los conjuntos, existentes en sí: cuando observamos una docena de huevos,



por ejemplo, no observamos simplemente cada uno de los huevos separadamente sino el conjunto que constituyen. No sin ironía habría que agregar que no se observa el conjunto cuyo cardinal finito es 12, sino el conjunto cuyo cardinal finito es 13 porque el recipiente en el que se encuentran los huevos también es algo.

Uno de los problemas es que en teoría de conjuntos hay que admitir la existencia del conjunto cuyo elemento es un conjunto y, por ello, también se observa el conjunto unitario que tiene como elemento el conjunto de 13 elementos —los huevos y su recipiente—, así como el conjunto de conjuntos con elemento unitario que tiene el conjunto anterior como su elemento, etcétera... Todo ello en una percepción única. Con el posterior de cómo se percibe aquél conjunto cuyo cardinal no sea finito... aunque en este caso pueda acudir a la enseñanza y a la autoridad de quien enseña para aceptar la captación de tales conjuntos de cardinalidad transfinita. En cualquier caso, es una propuesta en el fondo fáctica la de que se perciben no ya entidades en su singularidad concreta sino conjuntos y conjuntos de conjuntos... cuando se observan esas entidades. Y hasta ahora, y desde la neurobiología, no parecen encontrar corroboraciones fácticas a la misma.

Junto a las propuestas de Maddy se tienen las estructuralistas o modalistas por las cuales las entidades matemáticas pueden considerarse no en su individualidad concreta sino que siempre hacen relación a una estructura o una ordenación en la cual se encuentran inmersas. De esta forma, y muy en esquema, se puede afirmar que 12 sea o no primo no depende de 12 sino del lugar que ocupa en la ordenación de los números naturales. Con lo cual lo existente no es el número en sí, o el conjunto del cual derivar luego el número sino la estructura en la cual ese número se haya insertado pero con la dificultad de cómo saber que lo insertado es o no un número y distinguirlo conceptualmente de la estructura de la que forma parte y es lo único existente.

Junto a los realistas metafísicos aparecen los realistas semánticos: para ellos las proposiciones matemáticas son verdaderas por ser objetivas, con independencia de nuestro conocimiento respecto a los objetos matemáticos que en esas proposiciones entren. Es decir, para un realista semántico lo único que se requiere para asegurar la verdad o no de una proposición es su objetividad y no el compromiso en cuanto a la existencia de entidades de tipo alguno. Es posición que tiene en Quine un posible partidario pero que encuentra

en una época de Putnam su representante más conspicuo al que posteriormente se unirá Dummett.

Naturalmente para quien la clave sea la pregunta acerca de la existencia o no de las entidades matemáticas, es posición insatisfactoria porque lo que interesa de verdad es si existen o no los objetos matemáticos. Existencia de la cual cabe plantear, además, si es una existencia necesaria o contingente y no sólo permanecer anclados en la vieja cuestión epistemológica de cómo alcanzar su conocimiento.

Una salida a esta problemática se centra en el ficcionalismo nominalista representado básicamente por Field. Para esta concepción las proposiciones matemáticas son, en sí, totalmente falsas. Bien entendido que lo son en el mismo sentido que las ficciones literarias. Afirmar «13 es un número primo» es falso porque no existe entidad alguna como 13. Va en paralelo a decir «Don Quijote plantó batalla a los molinos de viento creyendo que eran gigantes» que constituye una proposición falsa porque no hay entidad alguna que sea Don Quijote. Sin embargo, de ficciones literarias como Don Quijote, Hamlet cabe afirmar que son entidades existentes pero siempre dentro de la historia en la que se encuentren. Por ello la proposición acerca de Don Quijote puede considerarse verdadera aunque sólo en el interior de la novela cervantina, aunque no sea verdadera en sí. Lo mismo cabe decir respecto a las entidades matemáticas como los números: pueden considerarse existentes pero sólo en un universo de ficción. Por ello, afirmar «13 es número primo» supone enunciar una proposición que es verdadera en la Aritmética de los números naturales con el criterio de divisibilidad aunque no sea verdadera en sí.

Uno de los problemas para el ficcionalismo nominalista de Field es —si se deja a un lado la cuestión de los matices del término verdad— que esas entidades no existentes se muestran claves para el conocimiento fáctico de la naturaleza; es decir, que la matemática se muestra indispensable para construir nuestro conocimiento de la naturaleza de la que formamos parte. Y que hay matemáticos, y no sólo matemáticos, que se dedican a estudiar ficciones como los criterios de primalidad y, además, tratan de aplicarlos a temas muy prácticos como los de codificación y descodificación e incluso tratan de ir más allá, a terrenos como los de la biología, por no citar otros terrenos.

La estrategia utilizada por Field es mostrar que se puede prescindir de esas entidades para elaborar las teorías físicas; en otras palabras, trata de

mostrar que puede explicarse el comportamiento de los sistemas físicos en términos intrínsecos de dichos sistemas sin invocar entidades extrínsecas —sean o no matemáticas—, entidades cuyas propiedades han de ser irrelevantes para el comportamiento del sistema dinámico en cuestión.

Un programa de ficción que, por lo mencionado, comporta dos pasos: tratar de buscar interpretaciones intrínsecas para dar cuenta del comportamiento de los sistemas dinámicos; eliminar de las teorías científicas hasta ahora propuestas todo tipo de entidad no existente, eliminar de la Mecánica newtoniana, de la Teoría de la relatividad, de la Mecánica cuántica... todas las entidades matemáticas. Programa del cual el mismo Field tuvo que reconocer que hasta el presente no sabemos cómo eliminar entidades matemáticas de toda explicación científica que aceptamos y que toda la metodología que hasta ahora se ha manejado implica, en el fondo, una justificación para creer en dichas entidades. Lo que le conduce a realizar una apuesta por cuál es la visión más satisfactoria del lugar que ocupa la matemática en el mundo, una apuesta por la cual, y frente a este ficcionalismo, parece razonable mantener el papel que la matemática tiene en lograr esa visión del mundo.

2. Junto al bloque anterior que considero de interés más filosófico que matemático aunque se citen términos matemáticos como si se hiciera una filosofía adjetiva de la Matemática, se puede considerar otro bloque en el cual se trata de tener presente al Hacer matemático en sí. En él podrían mencionarse desde los trabajos que tienen presente la génesis conceptual del Hacer matemático desde sus orígenes y que llevan desde la Antropología matemática —Wilder— hasta los intentos de establecer los diferentes estilos en los que se materializan los tres grandes ámbitos en que se sitúa el Hacer matemático: Figural, Global, Computacional —de Lorenzo— pasando por posiciones que mantienen que la matemática es aleatoria y experimental —Chaitin—. Me remito, para ello, a de Lorenzo 2000.

De entre todas ellas voy a citar, en primer lugar, el trabajo de Feferman quien se planteó como preguntas: ¿qué hace que los conceptos y métodos de la matemática posean un campo distintivo de conocimiento? y ¿cuál es la naturaleza del contenido conceptual de la matemática? En búsqueda de respuestas Feferman ha planteado un programa de análisis lógico muy rico y en el cual se pretenden investigaciones que lleven a una Clarificación conceptual que posibilite establecer definiciones más precisas de los conceptos más bien informales que de hecho se manejan en la praxis matemática, hasta lo que denomina

Expansión reflexiva de conceptos y principios y que no es más que la búsqueda del tipo de actividad que lleva al matemático a pasar de espacios tridimensionales a  $n$ -dimensionales, por ejemplo, o a intentar explicitar conceptos que en la praxis matemática quedan, de hecho, implícitos. Un programa que, a pesar de ser bautizado por Feferman como de Fundamentos supone, en el fondo, un análisis conceptual que tiene en cuenta, precisamente, la plasticidad genética e histórica del Hacer matemático.

En esta línea, la aparición del intruso, del ordenador en el ecosistema matemático, ha hecho que la praxis matemática sufra en algunos campos, una cierta inflexión. Al menos en terrenos como los siguientes. Por lo pronto, en el terreno demostrativo. La «demostración» de la conjetura de los cuatro colores provocó el problema de si admitir dicha prueba como auténtica demostración, lo que ha ido en paralelo a lo que antes indiqué en la interrelación Matemática-Física. Es claro que ningún matemático puede comprobar todos y cada uno de los pasos de la prueba dada por Appel-Haken pero ello no impide considerar conceptualmente a dicha prueba como auténticamente demostrativa. Basta plantear la misma cuestión para demostraciones de longitud suficientemente larga como la establecida para la clasificación de los grupos finitos. Si se admite que el ordenador pase a tener un cierto papel, hay que admitir la existencia de demostraciones asistidas por ordenador. Y ello sabiendo que los ordenadores son falibles porque también tienen sus fallos —tanto puramente accidentales como de los propios procesos algorítmicos—. Es el concepto de demostración matemática el que, una vez más, se pone en juego con la multitud de matices que en este concepto entran en juego y que impiden que se reduzca a mera sucesión sintáctica de fórmulas como pretendía el logicismo fregeano y sus sucesores.

Además, el ordenador muestra un papel en un terreno que, hasta ahora, no ha sido muy estudiado: el de la enseñanza. Si se tiene presente que se han construido algoritmos lo suficientemente flexibles para realizar integrales o resolver ecuaciones tanto algebraicas como analíticas, para dar respuesta a una serie de problemas de combinatoria de forma que el alumno pueda responder a estas cuestiones sin más que manejar el ordenador y las teorías subyacentes, parece conveniente replantear el tipo de enseñanza que se debe impartir al alumno —o, al menos, el tipo de cuestiones que se le puedan plantear—. Supone volver a la petición de Galois: saltar sobre los cálculos para ir a las ideas, a los métodos. Es un programa en el cual no interviene sólo el contenido de una disciplina sino que está en juego, realmente, qué considerar como ideas y métodos matemáticos que, de momento, van más allá de lo reducible a puramente

algorítmico. Y no es, en modo alguno, lo que algunos como Chaitin califican como matemática experimental ni tampoco que el alumno maneje simplemente el ordenador en clase.

También el ordenador ha posibilitado que la Matemática amplíe su campo de aplicabilidad a terrenos que le estaban vedados por la dificultad material, no conceptual, de realizar los cómputos correspondientes. Así, en la posibilidad de calcular un número suficiente de términos en los desarrollos en serie de algunas funciones, de las que llevaron a Poincaré, por ejemplo, a plantear la existencia de funciones con fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. En otras palabras, a constituir una ayuda técnica básica para poder establecer teorías como, en este caso, la teoría del caos con su determinismo e impredecibilidad asociados. Igualmente ha permitido elaborar el *programa Lions* que se manifiesta, esencialmente, en la elaboración de modelos con el previo establecimiento de los correspondientes procesos de simulación.

Más conceptual, pero enlazado a problemas como los anteriores y que se incardinan en lo que califico de Hacer computacional, se ha vuelto a plantear el permanente dilema discreto-continuo. El Hacer Global lo resolvió suprimiendo el continuo al considerarlo como un conjunto discreto cuyos elementos, los números reales, pasaron a tener un estatuto existencial ontológico. Estatuto ontológico negado por constructivistas como Poincaré para quien el continuo es el que posee un estatuto existencial propio no siendo los números reales más que símbolos para indicar posiciones sobre ese continuo. Y el continuo es el elemento básico para la conceptualización geométrica y topológica, por ejemplo. Pero desde la discretización conjuntista se planteaba el problema de cómo obtener, en la práctica, un número real: en la práctica bastaba una aproximación racional adecuada sabiendo que en esa aproximación se comete un error.

Desde los terrenos de la computabilidad cabe desterrar el elemento existencial ontológico asociado al número real y convertirlo en *número real computable*: número real  $x$  enfocado como un programa en el cual al dar el input  $k$  —número positivo— se producen dos números racionales: un valor  $m_k$  —que se considera una aproximación a  $x$ — y una cota del error  $\varepsilon_k$  —valor no negativo por supuesto—. Lo que se requiere es que para dos inputs  $k$  y  $k'$  los intervalos  $[m_k - \varepsilon_k, m_k + \varepsilon_k]$  y  $[m_{k'} - \varepsilon_{k'}, m_{k'} + \varepsilon_{k'}]$  se corten de manera que para  $\varepsilon > 0$  y todo  $k$  suficientemente grande, la longitud del intervalo sea menor que  $\varepsilon$ . En otras

palabras, la idea intuitiva subyacente es que todos esos intervalos tengan un único punto en común: el número real computable bajo construcción.

Una construcción que si tiene una cara pragmática positiva porque puede desarrollarse todo el Análisis en un estilo constructivo a lo Bishop, encuentra unas dificultades conceptuales básicas: las cuestiones de si un número real computable es racional o irracional y la de comparar dos números reales computables son indecidibles.

Son problemas los de indecibilidad y computabilidad que, unidos al papel que puede desempeñar el ordenador tanto en las demostraciones como en la modelización matemática de procesos dinámicos a partir de procesos de simulación llevan a replantear, desde el interior del Hacer matemático, el viejo problema del papel del cerebro y, con él, el de la razón y el pensamiento.

### III

En este esbozo desearía concluir advirtiendo que los profundos cambios que se han producido en el Hacer matemático y que han llevado desde el Hacer Global al Computacional, rompiendo el difuso formalismo que en algunos países se impuso desde mediados del s. XX, no ha tenido una auténtica renovación en el pensamiento filosófico que le debería ir en paralelo. Las reconstrucciones racionales de la historia en la línea de Lakatos, las filosofías de la matemática en el ámbito anglosajón que han pretendido romper los moldes que se autoimpuso de la tendencia analítica pasando a una pretendida filosofía naturalizada pero en la cual el tema ontológico se muestra esencial con argumentos en los cuales no se sabe si se habla acerca de entidades matemáticas o angélicas, los logicismos renovados, los excesos de los enfoques sociológicos... parecen muy marginados a la auténtica praxis matemática.

Son los enfoques constructivistas los que, en cierta manera, tratan de captar lo que en esa praxis se efectúa. Pero los constructivismos, desde su origen y por su propia naturaleza, se muestran reticentes a ser plasmados en sistema, que es lo más propio de quienes se tratan de situar en terrenos más pretendidamente filosóficos. En cualquier caso, se puede observar un renovado interés en estos campos eliminada ya la imagen tópica de establecer unos fundamentos definitivos de una praxis matemática que, en esencia, afincó su raíz en la interrelación entre la physis y la razón conceptual que, como parte de esa physis y, hasta ahora, no ha conseguido ser clausurada.

## BIBLIOGRAFÍA

ABERTH, O. (2001) *Computable Calculus*. Academic Press.

LORENZO de, J. (2000) *Filosofías de la Matemática fin de siglo XX*. Ed. Univ. Va.

MAYBERRY, J. P. (2001) *The Foundations of mathematics in the theory of sets*. Cambridge Univ. Press.

TYMOCZKO, Th. (ed.) (1988) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton Univ. Press.

(Tanto en DE LORENZO [2000] como en TYMOCZKO [1988] se encuentran muy extensas y valiosas bibliografías)