Alternativas
ISSN 1390-1915

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN | RESEARCH ARTICLE

El papel de la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático

The role of visualization in the process of teaching and learning of Mathematical Analysis

Valentina Badía Albanés[1], **David Balbuena Cruz**[2]

[1] Universidad de La Habana, Cuba. valia@matcom.uh.cu
[2] Universidad de La Habana, Cuba. david.balbuena@matcom.uh.cu

PARA CITAR ESTE ARTÍCULO
Badía Albanés, V., & Balbuena Cruz, D. (2022) El papel de la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático . *Alternativas, 23*(2). Recuperado a partir de https://editorial.ucsg.edu.ec/alternativas/index.php/alternativas/article/view/403

DOI
https://doi.org/10.23878/alternativas.v23.i2.403

CORRESPONDENCIA
valia@matcom.uh.cu

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL

Av. Carlos Julio Arosemena, Km 1,5. Guayaquil, Ecuador
Teléfono: +593 4 380 4600
Correo electrónico: revista.alternativas@cu.ucsg.edu.ec
Web: www.ucsg.edu.ec

El papel de la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático

The role of visualization in the process of teaching and learning of Mathematical Analysis

Valentina Badía Albanés[1], **David Balbuena Cruz**[2]

[1] Universidad de La Habana, Cuba. *valia@matcom.uh.com*
[2] Universidad de La Habana, Cuba. *david.balbuena@matcom.uh.cu*

RESUMEN

En las disciplinas que operan con objetos abstractos la visualización de conceptos puede contribuir a una mejor comprensión de los contenidos, a la fijación de formas y métodos de trabajo e incluso a la determinación de vías de solución de los problemas. Dentro de las asignaturas de la disciplina Análisis Matemático, nos encontramos a menudo con la necesidad de apelar a la visualización y a transitar entre diferentes formas de representación de los objetos y contenidos matemáticos. En el presente trabajo se comparten y sistematizan algunas ideas esenciales relativas a la visualización, el pensamiento visual y su papel dentro de la enseñanza y aprendizaje de esta rama de la Matemática. Además se ejemplifican algunas visualizaciones que se han empleado en los cursos de Análisis Matemático de las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Física de la Universidad de La Habana.

PALABRAS CLAVE

Visualización, pensamiento visual, proceso de enseñanza-aprendizaje del análisis matemático.

ABSTRACT

In disciplines that operate with abstract objects, the visualization of concepts can contribute to a better understanding of the contents, to the establishment of forms and methods of work and even to the determination of paths for problem solving. Within the subjects of the Mathematical Analysis discipline, we often need to appeal to visualization and to move between different forms of representation of the contents and mathematical objects. In the present work, some essential ideas related to visualization, visual thinking and its role in the teaching and learning of this branch of Mathematics are shared and systematized. In addition, some visualizations used in her courses by the first author of this paper are exemplified.

KEYWORDS

Visualization, visual thinking, teaching-learning process of mathematical analysis.

RECIBIDO: 10/05/2023
ACEPTADO: 18/09/2023

Introducción

La idea de la realización del presente trabajo surgió relacionada con la preparación por la primera autora, de un ciclo de conferencias sobre Didáctica de la Matemática. En particular, se dictó una conferencia que trataba sobre el papel de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Por este motivo se retomaron una serie de artículos estudiados hace algún tiempo y otros más recientemente y nos pareció oportuno sistematizar y ordenar apropiadamente un conjunto de ideas que pueden ser aprovechadas para su uso en nuestros cursos dentro de la disciplina Análisis Matemático. Se verá que la problemática de la utilización de la visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática ha sido ampliamente tratada, pero conserva su actualidad, sus controversias, sus preguntas abiertas, así como cambios en los puntos de vista de investigadores y profesores atraídos por esta temática.

Desarrollo

Problemática alrededor de la visualización

Ya es ampliamente aceptado que la visualización y las imágenes visuales son aspectos importantes para la comprensión matemática, la intuición y el razonamiento y que las presentaciones visuales, así como la atención a los diversos usos de las imágenes por parte de los estudiantes, son esenciales para la enseñanza matemática efectiva. Ciertamente es posible crear dibujos o representaciones que ayuden a los estudiantes a entender las ideas, pruebas y argumentos matemáticos.

La visualización ya no es vista como algo que tiene solo propósitos ilustrativos, ya está siendo reconocida como un componente esencial del razonamiento, de la resolución de problemas e incluso de las demostraciones (Arcavi, 2003). Los profesores y estudiantes deben animarse a comprobar el poder de la visualización (Guzmán, 1997).

Sin embargo, ese conjunto de elementos de carácter intuitivo y visual que acompaña el quehacer de los matemáticos y usuarios de la Matemática, desafortunadamente, no suele encontrarse explícitamente en los textos y escasamente en el aula. Las corrientes formalistas de décadas pasadas han llevado a muchos profesores a considerar como prioritaria la exposición formal de la Matemática y a dejar a un lado los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos del pensamiento matemático (Nelsen, 2015).

La contribución de la visualización a la Matemática y a la educación matemática plantea también una serie de preguntas de naturaleza epistemológica. Una de ellas es hasta qué punto las representaciones visuales pueden ser usadas no solo como evidencia o inspiración para un resultado matemático, sino también en su justificación. Según Hanna y Sidoli, (2007), las representaciones visuales son muy bienvenidas como acompañantes heurísticos para probar, donde ellas no solo facilitan la comprensión del teorema y su prueba, sino que señalan enfoques para la construcción de la propia prueba.

Es solo en las últimas tres décadas que las representaciones visuales han comenzado a considerarse seriamente como sustitutas de las demostraciones tradicionales, pero realmente hay una gran controversia. Pocos filósofos de la Matemática hacen el reclamo explícito de que las representaciones visuales puedan constituir un método independiente de justificación.

En resumen, no hay consenso sobre todos los roles potenciales de la visualización en la Matemática y en la educación matemática, particularmente en su papel en las demostraciones. Que son una importante ayuda para la comprensión matemática es universalmente aceptado, pero hay mucho que hacer en el esfuerzo por lograr mejores maneras de usar la visualización.

Sobre el uso de los software de geometría dinámica no pretendemos extendernos, hay mucha literatura al respecto y publicaciones que han llegado a la conclusión de que este tipo de software dinámico ha resultado muy útil para mejorar la capacidad de los estudiantes para notar los detalles, para conjeturar, reflexionar e interpretar relaciones y para ofrecer explicaciones y demostraciones tentativas.

La visualización en Matemática está siendo abordada desde diferentes perspectivas, tratando de encontrar respuesta a diferentes grupos de preguntas, que conservan su actualidad, tales como: ¿Cuáles son los roles de la visualización en Matemática? ¿Cómo las formas visuales y el razonamiento visual sobre las ideas matemáticas influyen en las diferentes ramas de la Matemática? ¿Cuáles son algunos ejemplos clásicos y más efectivos que ilustran los roles de la visualización para los estudiantes?

¿Cuál es el papel sicológico del pensamiento visual y de otras formas relativas de representación (espacial, representación cinestésica, etcétera) en el aprendizaje de la Matemática? ¿Los matemáticos, los profesores y diferentes estudiantes ven cosas diferentes cuando trabajan con el mismo diagrama o bosquejo? ¿Cómo podemos enseñar y aprender a usar la visualización de un modo más efectivo? ¿Cómo puede una visualización apropiada incrementar la potencia matemática?

¿Cómo se relaciona la visualización con otros "ingredientes" de la comprensión matemática, tales como el uso de la notación simbólica? ¿Cómo diferentes visualizaciones influyen en el gusto y la motivación por la Matemática por parte de los estudiantes? ¿Qué distingue el uso eficaz, del uso no efectivo de las imágenes en el aula?

¿Cuáles son algunas de las herramientas tecnológicas más efectivas para la visualización matemática? ¿Cómo se están usando en la práctica de la enseñanza de la Matemática? ¿Cómo pueden ser usadas más eficientemente en la enseñanza de la Matemática? (Topic Study Group 16, ICME10, 2004).

Caracterizaciones de la visualización

El término visualización frecuentemente se aplica a actos públicos de comunicación: usar un diagrama u otra representación como vehículo para trasmitir una idea matemática, para explicar o convencer. En forma estricta visualizar es crear una representación visible de algo, ya sea un *concepto*, idea, un *grupo* de datos o de algún objeto que por pequeño, enorme o distante, no lo podemos abarcar o alcanzar a ver por *métodos* comunes. Implica representar de manera gráfica un fenómeno, ya sea *estática* o dinámicamente. Algunos autores también la definen como la generación de una *imagen* mental o una imagen real de algo abstracto o invisible.

La visualización puede caracterizarse como un "sustantivo"- el producto, la imagen visual y como un "verbo", el proceso, la actividad. Para Giaquinto (2007), la visualización es una experiencia individual que tiene lugar en el espacio mental interior. Giaquinto, que es un filósofo de la Matemática, se ha ocupado de los aspectos epistemológicos de esta experiencia interior. Este autor ha estado más interesado en el papel que juega la visualización para el descubrimiento, y no resalta su rol en la construcción de pruebas.

En Platón citado en (Guzmán, 1997), el papel específico de la imagen en la construcción matemática se resalta fuertemente y se hace más explícito. La imagen evoca la idea, como la sombra evoca la realidad. La imagen juega un papel bien importante de evocación, es decir, de recuerdo de la idea. El matemático se acerca a lo inteligible a través de la referencia a lo sensible.

La visualización puede ir mucho más allá que el sentido de la visión, la visualización ofrece un "método para ver lo invisible", pero, ¿qué es ver lo invisible? En su magnífico y detallado artículo acerca de la visualización, Arcavi (2003), nos precisa: "...ver lo invisible se refiere a un mundo más abstracto: es trascender las limitaciones de la mente...en actividades de pensamiento, aprendizaje y resolución de problemas. Es desarrollar medios visuales para ver mejor los conceptos e ideas matemáticas", p.216.

Este autor partiendo de definiciones dadas por otros, las mezcla y parafrasea y concluye que la visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre las figuras, imágenes, diagramas, etc, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión.

Por su parte, Miguel de Guzmán recalca que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran cantidad de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas por cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en Matemática (Guzmán, 1997).

La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación y que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. La visualización, aparece así, como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

La imagen es, muy frecuentemente: estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría, sugeridora de relaciones de otra forma un tanto ocultas capaces de conducir de forma fiable hacia la resolución de los problemas y hacia la construcción de la teoría, potente auxiliar para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo, vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas y una ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría.

Mientras el francés Jean Dieudonné defendía *"He decidido no usar ni una figura en el texto"*, George Pólya aconsejaba *"Dibuja una figura"*. Las anteriores representan dos posiciones extremas concernientes al uso de figuras. Tanto para Dieudonné como para otros matemáticos, la única manera correcta de presentar la Matemática es usando un discurso formal basado en un lenguaje formal. Para Polya la resolución de problemas matemáticos se hace frecuentemente mucho mejor si uno comienza con una representación visual.

Lo que debe estar claro para los profesores de Matemática es que hay que prestar atención al desarrollo del pensamiento visual. El pensamiento visual es una exploración activa, selección, comprensión de las esencias, simplificación, abstracción, análisis y síntesis, corrección, comparación, separación, puesta en contexto, etc. En resumen, el pensamiento visual es una herramienta potente que puede ser aplicada en muchas situaciones.

La visualización en la clase

Históricamente la visualización en clase ha ocurrido con lápiz y papel o tiza y pizarrón. Esta práctica ha ido cambiando pues cada vez se usan más las computadoras personales y calculadoras gráficas, pero los métodos tradicionales no deberán desaparecer nunca. La tecnología abre nuevas posibilidades a las experiencias visuales, desde la modesta superposición de transparencias en un retroproyector hasta los programas como Cabri, Derive, Maple, Matlab, etc. que pueden ser usados para obtener representaciones más precisas hechas por la computadora y su proyección en una pantalla.

Independientemente de los recursos utilizados, la visualización en clase tiene sus propios valores pedagógicos, entre los que podemos citar: como facilitadora de la comprensión matemática en general, pues los estudiantes necesitan seleccionar, aplicar y transitar entre las diferentes representaciones para resolver problemas; como herramienta para desarrollar la intuición, para comenzar a resolver un problema o una forma natural para identificar conceptos.

Las técnicas de visualización matemática usando computadoras encuentran aplicación como una herramienta educacional, pues permiten complementar representaciones clásicas de objetos matemáticos por imágenes generadas en la computadora. La ventaja no es sólo la creación de estas imágenes estáticas rápido y fácilmente, sino que también se pueden hacer animaciones de éstos objetos.

Es muy importante también la visualización de procesos matemáticos. Por ejemplo, pueden usarse los gráficos de la computadora como una guía para verificar ciertas conjeturas sobre la geometría de una superficie. Somos capaces de ir hacia atrás y hacia delante entre las ecuaciones y las imágenes. Las imágenes son extremadamente útiles en el proceso de análisis (Palais, 1999).

La visualización puede acompañar un desarrollo simbólico, ya que una imagen visual es muy concreta y se convierte en un factor esencial para crear el sentimiento de auto-evidencia e inmediatez.

Algunos ejemplos utilizados en los cursos de Análisis Matemático

Desde que comienzan a estudiarse los conjuntos numéricos, es usual representar los puntos en la recta numérica, así como los intervalos. Igualmente representamos términos de una sucesión numérica, las vecindades de un punto, los gráficos de las funciones, las regiones de integración de las integrales múltiples en el plano o en el espacio, etc. Este tipo de información visual generalmente aparece reflejada en los libros de texto. En este apartado comentaremos algunos ejemplos de visualizaciones que han resultado útiles en los cursos de Análisis Matemático de la carrera de Matemática, y que resultan menos frecuentes en los textos:

> La forma de las bolas en el espacio bidimensional o tridimensional, en dependencia de la norma p elegida para el trabajo. Puede hacerse usando computadoras e incluso animarse los gráficos en los que se hace tender p al infinito.

En el estudio de las integrales múltiples impropias, es necesario construir sucesiones de conjuntos admisibles. Para los estudiantes resulta engorroso entender el uso de estos conjuntos para la definición de la convergencia de la integral. La visualización de dos cubrimientos diferentes del conjunto $D = (0,1] \times (0,1]$ resulta muy ilustrativa, propiciando la discusión acerca de que la forma de los conjuntos está estrechamente ligada a la elección del sistema coordenado en que se realizará la integración.

$$A_n = \left(\frac{1}{n},1\right) \times \left(\frac{1}{n},1\right) \text{ y}$$

$$B_n = \left\{ 0 < x \le 1, 0 < y \le 1, x \ne \frac{1}{n}, n = 2,3,\ldots \right\}$$

- Muy provechosa puede ser la visualización del concepto de continuidad uniforme para funciones reales de una variable usando un rectángulo cuyo lado y ancho se relacionan como épsilon y delta en la definición y desplazando el mismo sobre los puntos de la curva en el intervalo que se verifica la convergencia uniforme.
- La ilustración de los polinomios de Taylor de funciones elementales en el conjunto de los números reales, que pueden obtenerse por computadora e incluso usar animaciones. Aquí debe recalcarse la mejora de la aproximación en un punto con el aumento del grado del polinomio, y además el aumento del tamaño de las vecindades donde la aproximación sigue siendo buena. No deben faltar ejemplos de desarrollos con intervalos de convergencia acotados, para mostrar cómo los gráficos de los polinomios se "separan" de la función suma fuera de dicho intervalo
- En el estudio de las sucesiones funcionales es muy útil la graficación de los términos de la sucesión y guiar la interpretación de los gráficos para comparar los diferentes tipos de convergencia, así como analizar los significados de los criterios de convergencia.
- Es imprescindible en el estudio de las series de Fourier realizar la visualización no solo de las sumas parciales de la serie, sino de la función representada y de la función suma, lo que debe venir acompañado del empleo de los resultados teóricos fundamentales.

Conclusiones

La capacidad para generar imágenes visuales efectivas, puede ser entrenada y desarrollada, es por eso que deben planificarse actividades metodológicas y talleres con los profesores encaminadas a fomentar el uso de la visualización para lograr un aprendizaje significativo, promover la reflexión creativa, la motivación de los estudiantes en la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas, en resumen, a favorecer la apropiación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes.

En la identificación de las potencialidades del uso de la visualización con o sin tecnología en la enseñanza de temas del Análisis Matemático, hemos podido constatar que la conexión entre la visualización geométrica y la exploración, acompañada de una coordinación y transición adecuada entre estos diferentes registros, resultan muy provechosas para permitir la comprensión integral del conocimiento matemático.

Recalcamos la importancia que tiene dar a las representaciones visuales una "lectura" correcta: aprender a interpretarlas adecuadamente, a evadir la superficialidad. Solo así ellas proporcionarán una rica experiencia cognoscitiva en la búsqueda de significados a los conceptos estudiados y evadir los obstáculos para el aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, Kluwer Academic Publishers, pp. 215-241

Giaquinto, M. (2007) Visual thinking in mathematics. New York: Oxford University Press

Guzmán, M. de (1997). *El Rincón de la Pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Ediciones Pirámide.

Hanna,G., Sidoli N. (2007) Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education* 39: pp 73-78

Nelsen, R. (2015) Proofs without words III. Further exercises in visual thinking. MAA.

Palais, R. (1999) The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium. Notices of the AMS. Volume 46. Number 6, pp. 647-658.

Topic Study Group 16 (2004) Visualization in the teaching and learning of mathematics. Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education. Sweden.