Soluciones Polinómicas Aproximadas de Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales en dos Variables Independientes en el Espacio de Sóbolev

Ms. Carlos Alfonso Marquina Alvarado[1]
camaral.uns53@gmail.com
0000-0003-1119-3680
Universidad Nacional del Santa
Perú

RESUMEN

En este artículo, el motivo es el estudio de los espacios de Sóbolev y el objetivo fundamental es demostrar la existencia y la unicidad de solución polinómica aproximada de una lEcuación Diferencial Parcial no Lineal, $\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) = f(x,y)$, en una región abierta Ω de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, donde $u \epsilon H_0^1(\Omega)$ es la función de estado y $f \epsilon L^2(\Omega)$ la función fuente escalar. La metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo en cada demostración. Los resultados más relevantes son: Demostración de existencia de solución polinómica aproximada mediante el método de Faedo-Galerkin, y demostración de unicidad de solución polinómica aproximada mediante el método indirecto (reducción por el absurdo). Asimismo, se concluye que, para los datos $u \epsilon H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, existe solución polinómica aproximada para la ecuación diferencial parcial no lineal y también, con las condiciones e hipótesis enunciadas en el trabajo, se garantiza unicidad de la solución polinómica aproximada.

Palabras clave: *ecuación diferencial parcial no lineal; solución polinómica aproximada; espacios de sóbolev*

[1] Autor Principal
Correspondencia: camaral.uns53@gmail.com

Approximate Polynomial Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations in Two Independent Variables in Sobolev Space

ABSTRACT

In this article, the reason is the study of Sobolev spaces and the fundamental aim is to demonstrate the existence and the uniquely of an approximate polynomial solution for the Nonlinear Partial Differential Equation$\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) = f(x, y)$, , in an open region Ω of , with boundary, $\mathbb{R}^n \Gamma = \partial\Omega$ where is the state function and the $u \epsilon H_0^1(\Omega) f \epsilon L^2(\Omega)$ scalar source function. The methodology used is inductive-deductive trying to be the most exhaustive in each demonstration. The most relevant results are: Demonstration of the existence of an approximate polynomial solution by the Faedo-Galerkin method, and demonstration of the uniqueness of an approximate polynomial solution by the energy method. Likewise, it is concluded that, on the one hand, for the data$u \epsilon H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, an approximate polynomial solution is obtained for the nonlinear partial differential equation. In addition, with the conditions and hypotheses mentioned in the work, uniqueness of the approximate polynomial solution is obtained.

Keywords: *nonlinear partial differential; approximate polynomial solution; sobolev spaces*

Artículo recibido 16 setiembre 2023
Aceptado para publicación: 29 octubre 2023

INTRODUCCIÓN

La influencia de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), radica en su capacidad de modelar fenómenos físicos, químicos, biológicos, de la ingeniería, de la economía, etc. Así, por ejemplo, la ecuación de calor modela una gran variedad de fenómenos. Modela no solo el fenómeno físico de transmisión de calor por conducción, sino también el fenómeno químico de difusión de un contaminante que reacciona con un medio liquido en movimiento en el cual se halla inmerso. Además, la ecuación de calor sirve también para modelar el fenómeno biológico, del movimiento browniano, que es el movimiento aleatorio que se observa en las partículas que se hallan en un medio fluido, como resultado de choques contra las moléculas de dicho fluido. Mas aun, las ecuaciones diferenciales parciales no solo son importantes por sus aplicaciones, sino que tienen importancia en sí mismas, y son objeto de extensa investigación científica ca, hoy por hoy, como lo refiere, López. Las Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales (EDPNL) se encuentran en una posición central, porque ellas gobiernan una amplia variedad de fenómenos de movimiento, reacción, difusión, equilibrio, conservación entre otros más.

Las EDP de segundo que expone los conocimientos que consideramos básicos para cualquier investigador de la ciencia y la ingeniería, y puedan entenderlo con facilidad son las ecuaciones clásicas: 1) Ecuación de calor: $u_t - \Delta u = 0$, 2) Ecuación de Onda: $u_{tt} - \Delta u = 0$ y 3) Ecuación de Laplace con potencial: $-\Delta u + u = 0$. Estos tres ejemplos, y con desarrollos de mayor sofisticación permitirán estudiar la teoría moderna de las EDP de segundo orden lineales y no lineales especialmente.

En este artículo se estudia el problema de transmisión estacionaria de calor, modelado por la siguiente ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)= f(x,y) \quad \text{en } \Omega \qquad (1.1)$$

$$u > 0 \qquad \text{en } \Omega \qquad (1.2)$$

$$u = g \qquad \text{en } \partial\Omega \qquad (1.3)$$

, donde Ω es una región abierta acotadas y conexa de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ y con frontera $\partial\Omega$. de

Ahora como esta es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, entonces se abocaremos a estudiar la existencia y la unicidad de soluciones polinómicas aproximadas.

Las dificultades que se presentaban en la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales, impulso una teoría que permitiría la búsqueda de soluciones que no tuvieran que satisfacer la regularidad de la ecuación planteada: las **distribuciones** se desarrollaron en paralelo a la búsqueda de soluciones generalizadas o débiles. Sobolev utilizo las soluciones generalizadas para la solución de ecuaciones hiperbólicas y elípticas. Mas aun Sobolev definió la solución generalizada de la ecuación de onda, como una función u para la cual existe una solución $u_n \epsilon \mathcal{C}^{\infty}$ de soluciones ordinarias y que convergen en $L^1(x, y, t)$ a u. Posteriormente las funciones generalizadas tomarían el nombre de distribuciones, nombre que les dio el matemático francés Schwartz. Schwartz inicialmente concibió las distribuciones como operadores, pero gracias a los precedentes que había establecido en la teoría de la dualidad de los espacios de Banach, la de los espacios de Fréchet , y a los beneficios de trabajar con los espacios duales, Schwartz definió las distribuciones como un funcional lineal continuo sobre un espacio de funciones (llamadas funciones de prueba)

Los espacios de Sóbolev, son espacios de funciones reales o complejas de varias variables, integrables en el sentido de Lebesgue y diferenciables en el sentido de las distribuciones, esto, es débilmente diferenciables. Estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteamiento y la búsqueda de soluciones de problemas de frontera. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de EDP, sean lineales y no lineales, según refiere Suarez.

Finalmente, la hipótesis del trabajo de investigación, es: ¿Existe una única solución polinómica aproximada de la ecuación: $-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)= f(x, y)$ en Ω ?

Y los objetivos fueron

1) Demostrar la existencia de solución polinómica aproximada de (1.1) – (1.2)

2) Demostrar la unicidad de solución polinómica aproximada de (1.1) – (1.3)

METODOLOGÍA

Para obtener los resultados de existencia y unicidad de soluciones polinómicas aproximadas, se aplicó el método de Faedo-Galerkin, que consiste en proyectar el problema a un espacio de aproximación de dimensión finita. En el espacio de dimensión finita,$V_m = \{w_1, w_2, . . . , w_m\}$ se escoge una solución aproximada u_m sobre cualquier subregión Ω_b, resolver el problema de existencia y unicidad en el espacio proyectado y luego mediante estimativas a priori se extiende la solución u_m sobre la región total Ω.

Para describir completamente uno u otro proceso es insuficiente solo la ecuación diferencial del proceso, hace falta plantear el estado inicial de este proceso (condiciones iniciales) y el régimen en la frontera $\partial\Omega$ de aquella región $\Omega\epsilon\mathbb{R}^n$, en la cual tiene lugar el proceso (condiciones de frontera) Esto se debe a la no unicidad de la solución polinómica aproximada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para existencia de soluciones polinómicas aproximadas de la ecuación no lineal, las funciones v , f y g deben ser tales que satisfagan las siguientes hipótesis.

$v\epsilon\, W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, $v|_{\partial\Omega} = g$, $f\epsilon W^{1,-\frac{4}{3}}(\Omega)$ y $g\epsilon W^{\frac{3}{4},4}(\Omega)$, donde $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$ es una sub-álgebra de polinomios, y tales que satisfacen a la ecuación.

Prueba de existencia de solución polinómica aproximada

Para facilitar la demostración, la ecuación no lineal dada se escribe en forma simplificada:

$$(3.1) \quad -\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right)\right] = f(x_1, x_2) \quad \text{en } \Omega$$

Supongamos que $g\epsilon W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$ tal que, $v|_{\partial\Omega} = g$ y $\nabla g = 0$, y además considerando una función, $v = u - g$ de tal manera que (1) se puede escribir en la forma:

$$(3.2) \quad -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2(v+g)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(v+g)\left|\frac{\partial(v+g)}{\partial x_i}\right|^2\right] = f(x_1, x_2) \ , v\epsilon W^{1,4}(\Omega)$$

Es decir, se debe resolver el problema de Dirichlet homogéneo de la forma:

$$(3.3) \begin{cases} -\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)\right] = f(x_1, x_2) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Para por último hacer la sustitución: $u = v + g$

En este sentido planteamos el problema aproximado sobre un espacio finito dimensional sobre el cual hallaremos su solución aproximada para luego extender vía la densidad de los espacios vectoriales

Sea, $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ el espacio finito dimensional de $H^1(\Omega)$ generado por los m vectores de la base hilbertiana.

Consideremos $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$ una base de $W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega}) \subset C^0(\overline{\Omega})$ y con inyección continua. Sin pérdida de generalidad, sea:

$v_m \in \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$, de tal manera que:

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_m \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2 \right), w_j \right\rangle = \langle f, w_j \rangle \ , \ 1 \leq j \leq m$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \left(v_m \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2 \right), \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, w_j \rangle \ , 1 \leq j \leq m,$$

la cual es una derivada distribucional.

Pero como $v_m \in \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$ y v_m es la combinación lineal finita

$v_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$, de donde se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} + \left(v_m \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2 \right), \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, v_m \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^4 dx = \int_{\Omega} f\, v_m dx \leq \|f\|_{V'} \|v_m\|_V$$, desigualdad de Holder

En donde: $V = W_0^{1,4}(\Omega)$ y $V' = W^{-1,4/3}(\Omega)$

Ahora como: $\|v_m\|_V^4 \leq \alpha \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^4 dx$ Desigualdad de Poincare

entonces: $\|v_m\|_V \leq C$.

Por otro lado, como la función $v \in W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, entonces se obtiene

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \leq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^3 \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^4 dx\right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^4 dx\right]^{\frac{1}{4}}$$ Desigualdad de Holder

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega} \left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^4 dx\right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^4 dx\right]^{\frac{1}{4}} = \|v_m\|_{V'}^3 \|v\|$$

de donde resulta

$$\left|\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_m\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|^2\right)\right| \le \| v_m \|^3 \le C^3, C : \text{constante}$$

Puesto que V es un espacio reflexivo, entonces existe una sub-sucesión $\{v_r\}$ de $\{v_m\}$ tal que: $v_r \to$

u débilmente en $W_0^{1,4}(\Omega)$ $\quad -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2\right) \to \gamma$, débil en $W^{-1,4/3}(\Omega)$

Tomando el límite cuando $r \to \infty$ el problema aproximado se reduce a

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2\right), w_j\right\rangle = \langle f, w_j\rangle$$

$$\langle \gamma, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle \ , \qquad \forall j, \qquad 1 \le j \le m$$

de donde implica que:

(3.4 $\gamma =$

Además, se tiene que:

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2\right), v_r\right\rangle = \langle f, v_r\rangle$$

Y tomando nuevamente el límite cuando $r \to \infty$ se obtiene

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2\right), v_r\right\rangle \to \langle f, u\rangle = \langle \gamma, u\rangle$$

Por otro lado

$$\langle Av_r - Av, v_r - v\rangle \ge 0 \ , \forall v \epsilon V$$

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right), v_r - v\right\rangle \ge 0$$

Luego tomando el límite cuando, $r \to \infty$ se obtiene

$$\text{(3.5)} \quad \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right), u - v\right\rangle \ge 0 . \ \forall v \epsilon V$$

Haciendo: $v = u - \lambda w, \lambda > 0, w \epsilon V$ y sustituyéndolo en (3.5) se obtiene:

$$\lambda\left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 (u-\lambda w)}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left((u-\lambda w)\left|\frac{\partial (u-\lambda w)}{\partial x_i}\right|^2\right), w\right\rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 (u - \lambda w)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left((u - \lambda w) \left| \frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i} \right|^2 \right), w \right\rangle \geq 0$$

Pasando al límite cuando $\lambda \to 0$, se obtiene:

$$\left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right), w \right\rangle \geq 0 \ , \forall w \epsilon V$$

$$(3.6) \quad \gamma = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)$$

Por lo tanto, de (3.3) y (3.5) se concluye que:

$$(3.7) \ -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) = f(x_1, x_2)$$

Así de esta manera se ha demostrado que existe solución polinómica aproximada del problema no lineal estacionario:

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right) = f(x_1, x_2)$$

Para la unicidad de soluciones polinómicas aproximadas, se considera u y v dos soluciones polinómicas aproximadas, y se aplica el método indirecto (reducción por el absurdo).

Unicidad de solución polinómica aproximada

Sean u y v dos soluciones aproximadas no nulas y diferentes del problema, y si el primer miembro de la ecuación, es un operador diferencial, denotado con A, entonces se cumple que:

$$(3.8) \quad \begin{cases} Au = f \ ; \ u|_{\partial\Omega} = g \\ Av = f \ : \ v|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Au - Av = f - f = 0 \\ u|_{\partial\Omega} - v|_{\partial\Omega} = g - g = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Au - Av = u - v$$

O bien

$$(3.9) \quad \langle Au - Av \ , \ u - v \rangle$$

en donde:

$$(3.10) \quad Au = -\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) \right]$$

Sustituyendo (3.10) en (3,9), obteniéndose

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right), u - v \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{2} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)\right], u - v \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 - v\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right], \frac{\partial}{\partial x_i}(u - v) \rangle$$

Como $u \epsilon W^{1,4}(\Omega) \rightarrow V = W^{1,4}(\Omega)$

Por otro lado,

$\langle Av - Au, v - u \rangle = \langle Au - f, v - u \rangle + \langle Av - Au, v - u \rangle$

$= \langle Av - Au, v - u \rangle \geq 0$, por ser un operador monótono

Por tanto, se tiene que: $\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0, \forall v \epsilon V$.

Ahora, construyamos un subespacio cerrado E en el espacio V:

$\forall v \epsilon V$, sea la sucesión: $S_v = \{u \epsilon V : \langle Av - f, v - u \rangle \geq 0 , Au = f\}$ $E = \bigcap_{v \epsilon V} S_v$

E es cerrado y convexo, además $E = \{u \epsilon V / Au = f\}$, es un conjunto de soluciones de la ecuación (3.9).

Suponga que la norma en V es la función, $\| . \| : V \rightarrow \mathbb{R}$, convexa en forma estricta

sobre la esfera unitaria de V y que:

$\|Au\| = \|Av\| \rightarrow \|u\| = \|v\|$ y como u satisface la ecuación (3.2), entonces:

$E \subset \{u \epsilon V / \|u\| = S, Au = f\}$, para una conveniente S.

Por tanto, el subespacio E se reduce a un conjunto unitario, es decir $u = v$, lo que significa que la solución polinómica aproximada de la ecuación no lineal, es unica.

CONCLUSIONES

La existencia de solución polinómica aproximada para la ecuación diferencial parcial no lineal

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right) = f(x_1, x_2) \text{ en } \Omega$$

es posible para $v \epsilon W_0^{1,4}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, $v|_{\partial\Omega} = g$, $f \epsilon W^{1,-\frac{4}{3}}(\Omega)$ y $g \epsilon W^{\frac{3}{4},4}(\Omega)$, sobre los espacios de Sóbolev, es decir el operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

La unicidad de solución polinómica aproximada para la ecuación diferencial parcial no lineal

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right) = f(x_1, x_2) \text{ en } \Omega$$

La condición de $\langle Au - Av , u - v \rangle \geq 0 , \forall u, v \in V , u \neq v$, es necesaria para que el conjunto de las soluciones polinómicas aproximadas de $Au = f$, sea cerrado y convexo. El conjunto E de las soluciones polinómicas aproximadas es cerrado y la condición de norma estrictamente convexa, permitió demostrar que E se reduce a un conjunto unitario, es decir, la solución polinómica aproximada es unica.

Estos resultados pueden ser aprovechados por otros especialistas cuyo trabajo esté relacionado con existencia y unicidad de soluciones aproximadas y en otros espacios funcionales apropiados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. (2003) Sóbolev space

Fourier, J Elsevier Second Edition

Brezis, H. (2010) Functional analysis Sobolev space and partial differential equations. Springer

Diaz T. (1985) Nonlinear partial differential and free boundaries Vol. I Elliptic equation, London

Dudova A.(1999) Análisis y control de algunas EDP no lineales con origen en la mecánica.

Escobar E. -Liz (2012) : Introducción a la teoría de distribuciones

Tesis: Pontificia Universidad Javeriana-Bogotá- Colombia

Gatica, M. (2011) Espacio de funciones: una introducción a los espacios de Sóbolev.

Selecciones matemáticas

Garrido J. (2001): Algunos resultados de existencia - unicidad y Estabilidad para EDP. Funcionales estocásticas no Lineales.

González. (1995) Dos problemas relacionados con Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución

No Lineales

López, G. (2013) Ecuaciones Diferenciales Parciales

Universidad Autónoma Metropolitana Campus Iztapalapa-México

Romero, S. (2001) Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

Servicio de Publicaciones. Universidad de Huelva -España

Suarez, A. (1998): Propiedades de las soluciones de sistemas estacionarios de la dinámica de poblaciones con difusión lineal y no lineal.

Young, M (2006): The Stone-Weierstrass Theorems. Math 328

Notes, Queens University at Kingston, Winter Term.

Zill, D. (2015) Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera.

Editorial Cengage Learning-México