

NOTAS SOBRE LA PRODUCCIÓN CONJUNTA A CONSECUENCIA DE SRAFFA (II PARTE)

Antonio Mora Plaza

Abstract

The joint production is an historical matter from Sraffa, although the text books don't treat it frequently, perhaps for the formal accommodation to the single production, despite that the joint production is the question more empirical important. Along this papers will appear the names of authors who they have treated this question under a ricardian or neo-ricardian survey. The marginalist joint production is obviated . The other hand, is not my intention to talk about the the historical developement of joint production. This matter has been worked with succes and facilitated many graduates and doctorates. This is an attempt to contribute with somes ideas and to make also somes criticals to the unquestioned knowledge. This work is the II part, following as publishied in this web.

keywords: joint production, single production, Sraffa

Introducción

El tema de la producción conjunta es un tema manido desde Sraffa, aunque los manuales se resisten a tratarlo quizá, por la comodidad formal que supone la producción simple, a pesar de que lo relevante empíricamente es la conjunta. A lo largo del artículo saldrán nombres de autores que se han ocupado de esto, es decir, de la producción conjunta en un contexto ricardiano o neo-ricardiano. Se obvia pues la producción conjunta marginalista. No obstante, nada más lejos de mi intención hacer un recuento histórico del tema. Esto ya se ha hecho¹ con éxito y ha dado juego para doctorados. Estas notas son intentos de aportación, de novedad en algunos aspectos de la producción conjunta, por un lado, y, por otro, alguna crítica a verdades consideradas indiscutibles². Esta es la 2ª parte, continuación de la ya publicada en este medio

palabras clave: producción conjunta, producción simple, Sraffa

¹ En general, los libros de Pasinetti; en internet se puede ver el art. de Peris i Ferrando. Ambos se mencionan en la bibliografía.

² El caso del aspecto de la frontera salarios-beneficios.

NOTAS SOBRE LA PRODUCCIÓN CONJUNTA A CONSECUENCIA DE SRAFFA (II PARTE)

Antonio Mora Plaza

Doy a continuación los resultados obtenidos de la frontera de salarios-beneficios ante el tema del retorno de las técnicas junto con 2 apéndices aclaratorios. Expongo algunos casos posibles de estos retornos. Y más aún, estoy trabajando en una posible 3ª parte que espero de su amabilidad me sea publicado en su momento.

a) Retorno de las técnicas sin cambio de convexidad

Ante las dificultades de construir una *función salarios-beneficios* con cambio de convexidad a pesar del cambio de la tecnología (cambios en la matriz A de requerimientos más los inputs de trabajo L), vamos a presentar cómo se puede construir una función con retorno de las técnicas convexa en todo su recorrido. Esta es la excepción de la que hablábamos antes. Para ello podemos utilizar la ecuación (23) de producción simple sraffiana o la (25) de producción conjunta con $m > n$. Utilizamos la (23) en un primer momento de la manera que sigue:

$$(26) \quad w(A_1, L_1, Y_1, g) = \frac{pI=1}{(1+g)L_1 Y_1^{-1} \times [I + (1+g)A_1 + (1+g)^2 A_1^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A_1^{n-1}] I}$$

$$(27) \quad w(A_2, L_2, Y_2, g) = \frac{pI=1}{(1+g)L_2 Y_2^{-1} \times [I + (1+g)A_2 + (1+g)^2 A_2^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A_2^{n-1}] I}$$

Ambas ecuaciones se diferencian en las matrices de requerimientos A y en los inputs de trabajo L . Ambas ecuaciones cortan en el eje de ordenadas (vertical) para $g=0$, pero en puntos diferentes (salvo que se diera $A_1=A_2$, $L_1=L_2$ e $Y_1=Y_2$) y descienden a medida que aumenta la tasa de ganancia de forma continua porque el denominador es una función suma de funciones continuas siempre crecientes (la inversa, por tanto, es decreciente). Pues bien, siempre podremos elegir valores de A_1 , A_2 , L_1 , L_2 , Y_1 , Y_2 tales que se cumpla que:

<u>variable</u>	<u>función w-g</u>	<u>envolvente</u>
para $0 \leq g < g_1$	$w(A_2, L_2, g) < w(A_1, L_1, g)$	$w(A_1, L_1, g)$
para $g = g_1$	$w(A_2, L_2, g) = w(A_1, L_1, g)$	$w(A_1, L_1, g)$
para $g_1 < g < g_2$	$w(A_1, L_1, g) < w(A_2, L_2, g)$	$w(A_2, L_2, g)$
para $g = g_2$	$w(A_1, L_1, g) = w(A_2, L_2, g)$	$w(A_2, L_2, g)$
para $g_2 < g \leq M$	$w(A_2, L_2, g) < w(A_1, L_1, g)$	$w(A_1, L_1, g)$

y que ambas curvas se corten dos veces en los puntos g_1 y g_2 . La función estaría definida por la curva quebrada *envolvente* que es continua a lo largo de todo ella, derivable -salvo en los puntos de corte g_1 y g_2 - y convexa siempre. No hay pues cambio de convexidad y si retorno de las técnicas. Para su construcción es necesaria el concurso de los empresarios, que tienen a disposición los dos posibles procesos implicados en las curvas (26) y (27) y que maximicen las ganancias cambiando la técnica de producción en los puntos g_1 y g_2 , para pasar de la ecuación (26) a la (27) en g_1 y retornar a la (26) de nuevo en g_2 . La función envolvente es toda ella continua y derivable, salvo en los puntos de cruce entre las dos funciones. Si en lugar de (23) hubiéramos empleado (25) normalizada para $pl=1$, las conclusiones hubieran sido parecidas, salvo que los movimientos en el cambio de las técnicas serían más bruscas, con posible aparición de precios negativos, pero en ningún caso y, dado que hemos hecho $pl = \text{numerario}$, la suma de todos ellos sería positivo y la función siempre decreciente. En ningún caso cambiaría la convexidad quebrada de la curva *envolvente*.

b) Modelo convexo sin retorno de las técnicas

En el modelo anterior hemos supuesto desde el principio (desde $g=0$) que había 2 procesos definidos por (26) y (27) y que el empresario o gestor (o el conjunto de los que toman decisiones empresariales en un país) elegía, *porque estaba en su mano* a medida que iba aumentando el tipo de beneficio, un proceso u otro con el fin de maximizar los beneficios dado un tipo de salario (se puede entender al revés, porque formalmente da igual, aunque económicamente tenga sentido diferente). De

esta manera se podía construir una envolvente que, dado en concreto los tipos de procesos, se daría un retorno de las técnicas. Sin embargo, para que el modelo sea operativo o simplemente realista, el gestor debía tener desde el principio (desde $g=0$)³ opción a cualquiera de los 2 procesos. Esto supone una restricción, aunque normalmente no se hace explícito. En este segundo modelo supondremos que el nuevo proceso se hace presente en el momento de la intersección de la curva que define el proceso *en activo*. Dicho de otra manera, no necesariamente teníamos a nuestra disposición el proceso alternativo y sólo surge cuando aventuramos que una nueva técnica podría ser más barata -y obtener con ello más beneficios- que la anterior. Aunque parezca la misma que la del modelo anterior, tiene unas consecuencias distintas. La ecuación que define el proceso general -en singular- es formalmente la misma que las que definían el modelo anterior, pero con una diferencia notable: la del proceso $w(A_2, L_2, g)$ sólo comienza su andadura cuando el gestor se da cuenta de que hay la posibilidad de cambiar la técnica del proceso, variando A , L , es decir, los medios de producción y el input trabajo. Con este comportamiento ya no vale el modelo (a) de *deslizamiento* a lo largo de las curvas que definen los dos procesos, sino que ahora sólo tenemos una curva que define los dos procesos: el que teníamos hasta g_2 y el nuevo que, al variar A y L , se produce un *desplazamiento* de la curva que define la función -única función-, de tal forma que lo que obtenemos es una curva quebrada con un salto o, al menos, con una quiebra de la función presente para situarla de nuevo más alejada de ambos ejes. En términos formales, la nueva curva será $w(A_2, L_2, g) > w(A_1, L_1, g)$, para cualquier valor de g . La realidad de este modelo es que nunca se produce un cruce de 2 técnicas, porque *el desplazamiento* de la función cuando se van a cruzar es permanente. El resultado es una curva descendente, monótona, quebrada, continua a trozos, derivable también a trozos y convexa. Sería como la (26) o (27), pero definida de esta manera:

$$(28) \quad w(A, L, g) = \frac{pI=1}{(1+g)L Y^{-1} \times \left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A^{n-1} \right] I}$$

³ Vamos a relacionar la sucesión temporal con el aumento de los beneficios. Esto se hace siempre, pero muchos no se dan cuenta de que lo hacen. Lo ideal sería poder disponer de un espacio tridimensional, pero no es el caso.

	<u>variable</u>	<u>función w-g</u>	<u>envolvente</u>
para	$0 \leq g < g_1$	$w(A_1, L_1, g) < w(A_1, L_1, g)$	$w(A_1, L_1, g)$
para	$g = g_1$	$w(A_1, L_1, g) = w(A_2, L_2, g)$	$w(A_1, L_1, g)$
para	$g_1 < g < g_2$	$w(A_1, L_1, g) < w(A_2, L_2, g)$	no hay
para	$g_2 \leq g < g_3$	$w(A_1, L_1, g) < w(A_2, L_2, g) < w(A_3, L_3, g)$	$w(A_3, L_3, g)$
para	$g = g_3$	$w(A_2, L_2, g) = w(A_3, L_3, g)$	$w(A_3, L_3, g)$

con R como tasa máxima de ganancia y siendo la *función envolvente* continua entre $g=0$ y $g_1=1$ y derivable entre $g=0$ y $g_1 < 1$; no existe entre $g_1 < g < g_2$; es de nuevo continua para $g \Rightarrow g_2$ y derivable para $g > g_2$ hasta $g < R$; en $g=R$ sería continua, pero no derivable, obviamente. Para $g=g_3$ la función no se deslizaría por la curva, sino que se produciría *un salto* a una nueva función más a la derecha, con lo cual nunca se volvería a cruzar con una curva que representara una técnica anterior. Y, sin embargo, siempre convexa y monótona decreciente. No hay retorno de técnicas porque la función es única, con las características anteriores. La explicación económica es la siguiente: el gestor o gestores empresariales trabajan con unos medios de producción y de trabajo de acuerdo con un sistema productivo que les permite ir aumentando los beneficios (ganancias); si en un momento determinado estos se estancan de tal manera que, aún cuando disminuyan los salarios relativos apenas aumenten los beneficios (se hace inelástica la curva (28)), buscan un cambio de sistema, de métodos de producción, nuevas re combinaciones del libro de alternativas de producción, de organización, etc., y cambian la matriz de requerimientos A y el vector de inputs de trabajo L^4 , y si no se equivocan, *desplazarán* la curva del proceso productivo a la derecha *en ese momento* (antes no existía como alternativa real), y el sistema será más productivo; si se equivocan, pasará lo contrario, y la curva se desplazará hacia el origen del eje cartesiano de salarios-ganancias. Cuando el gestor (o el sector o el sistema en su conjunto) acierte -dada la competencia que tiende a igualar salarios y beneficios en todos los sectores (mercancías)- aumentará en un principio los precios de producción y sus beneficios,

⁴ Al cambiar A se sobrentiende que pueden cambiar Y , X o uno cualquier de los dos, porque $X=AY$.

pero a más plazo, la compra de sus medios serán más caros como consecuencia del incremento de la demanda de esos medios por parte de las empresas que han obtenido beneficios del mismo sector (que el que opera el gestor); también porque habrán disminuido la escala del resto de empresas que sus beneficios estaban por debajo de la media y otras habrán simplemente. Entonces -por este motivo- se encarecerán la oferta de estas empresas de medios para nuestros gestores (del nivel que sean). Resumiendo, tanto por el lado de la demanda de medios que son productos de otras empresas, como de la disminución de la oferta de estas mismas empresas, los precios se adecuarán -o tenderán a ello- de tal forma que los beneficios tiendan a igualarse. Ocurrirá que nuestro gestor tendrá que adecuarse nuevamente, trasladando su curva (28) a la derecha del origen de los ejes de abscisas y ordenadas. Con todo ello intentará combatir el descenso de los beneficios que supone *deslizarse* (variando salarios y ganancias a lo largo de la frontera salarios-beneficios) con *desplazamientos* a la derecha de esta misma curva, es decir, con variaciones de las técnicas de producción, modificando A y L en un proceso sin fin (o al menos hasta que desaparezca la empresa, empresas o sector o haya que apuntalarlo mediante subvenciones⁵).

c) Modelo de frontera de salario-ganancia con salarios acotados

En un intento de acercarnos a la realidad, se presenta en este epígrafe un modelo donde el gestor (o gestores, sectores o de toda la economía) tienen acotados simultáneamente los salarios por arriba con $w_M = w(0 \leq g \leq R) = cte$, y por abajo con $w_m = w(0 \leq g \leq R) = cte$: por arriba, porque son los anteriores los que ponen límite al salario de los trabajadores; por abajo, porque son los mismos trabajadores -o sus representantes sindicales- los que lo acotan mediante mínimos de convenio, acuerdos, mínimos legales (gobiernos), etc. De esta manera, aún cuando las funciones que expresan la frontera salario-ganancia son las mismas que en los casos anteriores, el comportamiento de los gestores se presupone diferente. Este, cuando se haya en un punto de salarios y ganancias dentro del intervalo de salarios (w_m, w_M) sigue con la misma técnica caracterizada por la curva $w(A_1, L_1, g)$, *deslizándose*

⁵ Podría ser el caso del sector energético (nuclear) español y los llamados *costes de transformación a la competencia*.

hacia abajo, es decir, aumentando las ganancias y rebajando los salarios⁶, pero hasta el nivel w_m , no más. Cuando llega a ese punto donde se cortan la función frontera anterior y la recta que expresa el salario mínimo $w=w_m$, lo que hace es *desplazar* la curva a la derecha, modificando los valores A y L hasta una nueva posición que se encuentre al menos *dentro* del intervalo (w_M / w_m) , y así sucesivamente. El esquema es el siguiente:

	<u>variable</u>	<u>función w-g</u>	<u>envolvente</u>
para	$0 \leq g < g_1$	$w_M < w(A_1, L_1, g)$	no existe
para	$g = g_1$	$w_M = w(A_1, L_1, g)$	$w(A_1, L_1, g)$
para	$g_1 < g < g_2$	$w_m < w(A_1, L_1, g) < w_M$	$w(A_1, L_1, g)$
para	$g = g_2$	$w_m = w(A_1, L_1, g) < w_M$	$w(A_1, L_1, g)$
para	$g_2 < g < g_3$	$w_m < w(A_2, L_2, g) < w_M$	$w(A_2, L_2, g)$
para	$g_3 = g < R$	$w_m = w(A_2, L_2, g) < w_M$	$w(A_2, L_2, g)$

La función pues no existe hasta que se corta con el salario máximo, por lo que es continua entre $g_1 \leq g \leq g_2$ y derivable entre $g_1 < g < g_2$; entre $g_2 < g < g_3$ la función no existe. En este intervalo surge un problema: si el gestor no es capaz de encontrar unos valores para A y L que le permitan saltar a la función $w(A_2, L_2, g)$, la empresa (sector, economía privada) no podrá compaginar las condiciones de tasa de ganancia, tasa de salarios y tecnología. El modelo no da la solución, pero la realidad la dará de alguna manera, aunque sea dolorosamente⁷. Lo mismo ocurría en el modelo anterior ante un *desplazamiento* de la función salario-ganancia, aunque no se haya hecho mención; no así en el modelo primero de retorno de las técnicas sin cambio de convexidad, donde la función envolvente era siempre continua y salarios y ganancias se *deslizaban* a lo largo de la curva sin sobresaltos. Estos modelos -y los que siguen- son acordes con la manera de pensar srafiiana: los modelos económicos - todas las teorías sociales son modelos en última instancia- no lo explican todo, ni

⁶ Siempre en términos de la mercancía-patrón y con la normalización $pl = 1$.

⁷ En forma de economía sumergida o defraudadora.

todas la situaciones, pero imponen límites materiales a los comportamientos individuales y colectivos, públicos y privados, en lo que respecta a la producción, distribución y consumo de bienes y servicios. Para acabar este epígrafe, en el tramo $g_3 \leq g \leq g_4$ la función es continua en todo el y derivable entre $g_3 < g < g_4$.

d) Modelo de frontera salario-ganancia escalonada

En este modelo el salario es único, pero va cambiando según tramos de la tasa de ganancia g , y permanece constante hasta el siguiente tramo. Sea $w = w_1(g_0 \leq g \leq g_2) = cte$ el valor de los salarios impuesto por la realidad (o las fuerzas sociales y económicas) entre los tramos que de ganancia que se indica; luego se salta en el siguiente tramo, de tal forma que ahora *la función horizontal de limitación de salarios* $w = w_2(g_2 \leq g \leq g_4) = cte$ es más alta que la anterior; *la función frontera $w-g$* es $w(A_1, L_1, g)$ y se corta con *la función de limitación* tal que $w = w_1$, es decir, en un punto intermedio entre g_0 y g_2 (tal como g_1). La peculiaridad de este modelo es la de que entre g_1 y g_2 , los gestores no pueden hacer compatible los salarios con la función de producción que determina la frontera de salario-ganancia $w(A_1, L_1, g)$; lo único que pueden hacer es *saltar* a $w(A_2, L_2, g)$, y lo harán en un punto intermedio de la nueva *función de limitación de salarios* $w = w_2(g_2 \leq g \leq g_4) = cte$, y así sucesivamente. El resumen sería:

<u>variable</u>	<u>función $w-g$</u>	<u>f. de salarios</u>
$0 \leq g < g_1$	no existe	$w = w_1(0 \leq g < g_2) = cte.$
$g = g_1$	$w(A_1, L_1, g)$	$w = w_1(0 \leq g < g_2) = cte.$
$g_1 < g \leq g_2$	no existe	$w = w_1(0 \leq g < g_2) = cte.$
$g_2 < g < g_3$	no existe	$w = w_2(g_2 \leq g < g_4) = cte.$
$g = g_3$	$w(A_2, L_2, g)$	$w = w_2(g_2 \leq g < g_4) = cte.$
$g_3 < g \leq g_4 < R$	no existe	$w = w_2(g_2 \leq g < g_4) = cte.$

Aquí la función envolvente es siempre creciente, obligando a los que deciden (empresa, sector o sectores) a cambiar A y L para hacer compatible salarios y ganancias siempre crecientes, por tramos los primeros y continuas las segundas.

e) Modelo de frontera salario-ganancia de doble acotación

A diferencia del modelo con acotación de salarios, supondremos que tanto los salarios como las ganancias lo están. Es decir, los trabajadores, merced a acuerdos con los empresarios, gestores, por ley, etc., o merced a su capacidad impedir la bajada de sus salarios como consecuencia del deslizamiento de la función de salario-ganancia aumentando la tasa de ganancia a costa de los salarios, el salario no bajará de un tope w_m ; tampoco podrán subir más allá de un tope superior w_M impuesto por la parte contraria. Hasta aquí es el mismo modelo que el que hemos llamado *con acotación de salarios*. La novedad es que también las ganancias están acotadas. En efecto, el gestor y/o empresario o el propio conocimiento tecnológico para ese momento no comenzará la producción de la empresa (sector) hasta no obtener un nivel de ganancias mínimo g_m ; tampoco podrá superar como sabemos la razón-patrón o la tasa máxima de beneficios del sistema económico (aunque no coincida con la razón-patrón). Con ello tenemos un espacio cuadrado de soluciones factibles cuyo vértice inferior es el (w_m / g_m) y el superior $(w_M / g=R)$ ⁸. Si ahora la función atraviesa el cuadrado, podrá tocar primero en un punto tal como el (w_1 / g_m) , donde w está acotado ($w_m < w_1 < w_M$). Luego la gestión podrán aumentar las ganancias de la empresa (o del sector si estamos aplicando el modelo de forma más general), *deslizándose* por la función frontera $w-g$ hasta el lateral derecho del cuadrado, es decir hasta que $w(A,L,g)=w_m$ y g_2 tal que $g_m < g < g_2$. A partir de ahí no se puede hacer compatible salarios, ganancias y la función frontera $w-g$, con lo cual, sólo cambiando la técnica y/o la organización, es decir, cambiando A y L , podrá *desplazarse* esta función a la derecha $w(A_2,L_2,g)$ hasta encontrar un punto del cuadrado factible que ya hemos comentado. Todo eso se puede resumir de la siguiente manera:

⁸ O M si el modelo de función no tiene razón-patrón y sí tasa máxima de beneficios.

<u>variable</u>		<u>función frontera w-g</u>
para	$0 < g < g_m$	no existe
para	$g_m \leq g \leq g_2$	$w_m < w(A_1, L_1, g) < w_1 < w_M$
para	$g_2 < g < R$	$w(A_1, L_1, g) < w(A_2, L_2, g)$
para	$g = R$	$w_m < w(A_2, L_2, g) \leq w_M$

Con esta función frontera las ganancias no pasarán del tope máximo de ganancia, porque a partir de g_2 no son compatibles a la vez salarios, ganancias y función frontera; sólo lo serán si cambia la matriz de requerimientos A y la de inputs de trabajo L y la función frontera se desplace a la derecha del origen de coordenadas, pero no más allá del extremo inferior ($w = w_m / g = R$) o del extremo superior ($w = w_M / g = R$). Por encima del cual a los trabajadores les encantaría llegar, pero la gestión no podría hacerlo, incluso aunque quisiera (R o en su caso M , es el límite máximo de ganancias que le permite el sistema económica merced a la competencia).

Función frontera salario-ganancia con reducción a trabajo fchado

Traemos aquí la ecuación de precios de la producción simple o conjunta sraffiana con reducción de mercancías a trabajo fchado del artículo: "Aspectos de la economía de Sraffa"⁹. Los precios p_t , como se puede apreciar, dependen proporcionalmente de los salarios w , también proporcionalmente de la inversa de la productividad del trabajo L_y y, de forma mucho más compleja, de los tipos de intereses r , de las razones-patrones anuales (R_k , distintas cada año) y, por último, del tiempo de reducción a trabajo fchado ($t-i$)¹⁰.

⁹ Ver bibliografía.

¹⁰ Recordar del artículo original que t es el tiempo máximo hacia atrás de la matriz de requerimientos, mientras i es el tiempo que estamos considerando. La diferencia entre ambos serían los residuos de los efectos sobre el precio de las matrices de requerimientos desde i hasta t , es decir: $A^{i+1}, A^{i+2}, \dots, A^{t-1}$.

$$p_t = w \times \left[\frac{1}{1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y$$

Si ahora post-multiplicamos esta por YI , siendo Y como siempre la matriz de productos finales e I el vector vertical de unos; si consideramos que $L_y = LY^1$, y si además tomamos a $PYI=1$ como numerario y despejamos el salario w , obtenemos la ecuación:

$$(29) \quad w = \frac{r \left(\prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k) - (1+r)^i \right)}{\prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k) \times [(1+r)^{t-i} - 1] LI}$$

que sería la frontera salario-ganancia srafiانا (simple o conjunta) de la función de precios anterior y que tendría las siguientes propiedades:

a) cuando el tipo beneficio (ganancia) tiende a cero, buscado para encontrar el punto de corte en ordenadas w cuando $r=0$, obtenemos de (29) que:

$$(30) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \text{ de } w \text{ cuando } r \rightarrow 0 = \frac{\lim_{r \rightarrow 0} \text{ del numerador} \rightarrow 0}{\lim_{r \rightarrow 0} \text{ del denominador} \rightarrow 0} = \text{indeterminado}$$

Este hecho apunta a la idea de que la frontera de salario-ganancia en el sistema de reducción de trabajo fechado es irregular.

b) para que la tasa de salario w sea mayor que cero ha de cumplirse que el numerador de (29) sea mayor que cero, y eso es como decir que, tras manipulaciones algebraicas elementales, ocurra:

$$(31) \quad \text{si } r < \exp \left[\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{k=i} \lg(1 + R_k) \right] - 1 \rightarrow w > 0$$

c) si R_m fuera la razón-patrón media de R_k desde $k=1$ a $k=i$ de tal forma que se cumpliera:

$$(32) \quad (1 + R_m)^i = \prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k) \rightarrow r < R_m$$

es decir, para que la tasa de salario sea mayor que cero¹¹ -para que el sistema sea posible- ha de ocurrir que el tipo de ganancia (beneficio) del sistema sea menor que la razón-patrón media (tal como se ha definido).

d) para valorar si la función (29) es creciente o decreciente debemos hallar el numerador de la primera derivada. Este es como sigue:

$$(33) \quad S(1+r)^{t-i} + ri(1+r)^{i-1} + r(t-i) \times (1+r)^{t-1} - S - ri(1+r)^{t-1} - rS(t-i) \times (1+r)^{t-i-1} > 0$$

$$\text{siendo } S = \prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k)$$

Si la anterior inecuación es con el signo $>$ la función (29) es creciente, y si con el signo $<$, es decreciente. Como se puede comprobar cualquier cosa es posible. A diferencia del cálculo de la producción simple, conjunta srafiiana e incluso no srafiiana, donde la relación entre tasa de salario y tasa de ganancia podía ser monótona o no monótona, creciente o decreciente, cóncava o convexa en función de los supuestos (uno de los cuales e imprescindible era el de fijar el comportamiento de los gestores), aquí, con mercancías (sean bienes y servicios de consumo o de producción) reducidas a trabajo fechado, se puede afirmar que cualquier cosa es posible en la frontera $w-g$, porque depende de los tiempos (t, i) y de la razones-patrón interanuales (R_k) que consideremos. Hay que advertir que estas razones-patrón, que son a la vez una medida de la productividad del sistema y del excedente, sustituyen, inspirados en Sraffa, a la matriz de requerimientos A (donde están Y e X , es decir, matriz de productos y de medios).

e) el resultado anterior parece muy complejo, pero si llevamos i hasta el final $t-1$, es decir, si llevamos a su máxima extensión en el tiempo la reducción a trabajo

¹¹ Salvo en el supuesto que los bienes que los trabajadores directos y sus familias se integren en el sistema como medios de producción, es decir, en X , como hizo Sraffa en el I capítulo de su libro ("Producción de subsistencia").

fechado la ecuación de determinación de los precios que hemos traído del artículo “Aspectos de la economía de Sraffa”; si sustituimos además $i=t-1$ en (29) y normalizamos el trabajo $L=1$, tras pasos elementales, queda la ecuación:

$$(34) \quad w = \frac{\prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k) - (1 + r)^{t-1}}{\prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k)}$$

y donde para que los salarios sean positivos ($w > 0$) ha de ocurrir que:

$$(35) \quad \prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k) > (1 + r)^{t-1}$$

Es una conclusión análoga a la obtenida en (31). Ahora la función (29) completa se ha simplificado enormemente en (34), y al hallar la primera derivada de la tasa de salarios w respecto al tipo de ganancia r queda:

$$(36) \quad \frac{dw}{dr} = -(t-1)(1+r)^{t-2} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k)}$$

Y (36) es siempre negativa, por lo que la función de la que *deriva* (34) es decreciente. Además la segunda derivada es:

$$(37) \quad \frac{d^2w}{dr^2} = -(t-1)(t-2)(1+r)^{t-3} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k)}$$

que es también negativa, por lo que la función (34) es decrecientemente decreciente (convexa hacia el origen). Además todas las derivadas tendrán signo negativo:

$$(38) \quad \frac{d^j w}{dr^j} = -(t-1)(t-2) \cdots (t-j)(1+r)^{t-j-1} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1} (1 + R_k)} \quad \text{de } j=1 \text{ a } j=t-1$$

La función frontera de salario-ganancia (34) tiene un interés adicional. Si a t (el tiempo de reducción a trabajo fechado) le damos el valor 1, es decir, sólo consideramos un período de tiempo, los salarios valen cero ($w=0$); en cambio para $t=2$ el resultado es muy interesante:

$$(39) \quad w = \frac{(1 + R_1) - (1 + r)}{1 + R_1} = \frac{R_1 - r}{1 + R_1}$$

que tiene el mismo punto de corte en el eje de abcisas ($w=0 / r=R_1$) que la razón-patrón de la producción simple de Sraffa¹², aunque distinto en el eje de ordenadas ($r=0 / w=R_1/(1+R_1)$). Para $t=3$ se obtiene:

$$(40) \quad w = \frac{(1 + R_1) \times (1 + R_2) - (1 + r)^2}{(1 + R_1) \times (1 + R_2)}$$

y, en general, para $t=j$ tendremos:

$$(41) \quad w = \frac{(1 + R_1) \times \dots \times (1 + R_j) - (1 + r)^j}{(1 + R_1) \times \dots \times (1 + R_j)}$$

La ecuación (41) podríamos pues tildarla de *función generatriz de razones-patrón interanuales de reducción a trabajo fechado*. El nombre es desde luego un poco largo, pero no se me ocurre como reducirlo. Y no por ello deja de ser una *función frontera de salario-ganancia* que se ha simplificado notablemente respecto a las anteriores (23) y (34) merced a la introducción de las razones-patrón interanuales R_k que han sustituido a la matriz de requerimientos A y sus productos, es decir, A^j . Pero sigamos. La derivada primera de (41) es:

$$(42) \quad w = - \frac{j(1 + r)^{j-1}}{(1 + R_1) \times \dots \times (1 + R_j)}$$

que al ser negativa hace que la función (41) se decreciente (como se observa a simple vista). La derivada segunda es:

¹² $w=(R-r)/R$

$$(43) \quad w = - \frac{j(j-1) \times (1+r)^{j-2}}{(1+R_1) \times \dots \times (1+R_j)}$$

que es también negativa, por lo que la función (41) -como cabía esperar- es decrecientemente decreciente, es decir, convexa hacia el origen.

Hay recordar que todos estos resultados se dan en el caso particular de que la función frontera de salario-ganancia (29) se haya llevado hasta el final de los tiempos en la reducción a trabajo fechado (haciendo $i=t-1$). Este caso no es descabellado porque representa el valor actual de las mercancías -de todas ellas- para poder hacer así comparaciones y obtener además los precios de producción. En este caso se podría decir que la *ontogénesis* de la obtención de los precios actuales coincide con la *filogénesis* de su historia.

En síntesis, de todo esto podríamos decir que, si consideramos que el tipo de ganancia r no puede ser mayor que la razón-patrón correspondiente R_k , se concluye que *la función frontera salario-ganancia es siempre decreciente si extendemos hasta el infinito la matriz de requerimientos* (sustituidas por las razones-patrón interanuales), pero si la extensión no es total, ya no se puede afirmar esto. De ahí que Sraffa pudiera comparar el precio de dos mercancías¹³ tales como el vino y el roble viejo con diferentes, pero sobre todo parciales, períodos de maduración. Lo correcto es que hubiera hallado el cociente a través de la matriz de requerimientos A , entonces Sraffa se habría dado cuenta que el cociente de los precios de dos mercancías, *extendidas ambas al infinito en sus matrices de requerimientos* (A^i , con i al infinito), sólo se diferencian en el trabajo directo, como puede comprobarse en la ecuación de precios traída del trabajo ya mencionado¹⁴. Y, en todo caso, si no es al infinito, como A es productiva -y cuanto más, mejor- la matriz A^i será siempre residual con respecto al trabajo directo de los diferentes períodos a medida que aumente el tiempo de reducción (i). En nuestro caso, se han ido sustituyendo estas matrices por las razones-patrón interanuales a través del mecanismo de reducción de trabajo fechado. Todo esto, llevado a la frontera salario-ganancia, con los numerarios $PYI=1$ (lo que significa que se anulan los efectos de los precios en los consumos de las empresas) y

¹³ Pág. 61 de "Producción de...".

¹⁴ "Aspectos de la economía de Sraffa".

$L=1$ (lo que significa que se normalizan los salarios), da lugar a un tipo de funciones cuyas posibles cambios de convexidad, incluso posibles casos de crecimiento, dependen de los supuestos que se hagan sobre el comportamiento de los gestores (empresarios, gobiernos, etc.) y no por sí sólo de las funciones frontera salario-ganancia empleados, tal como se ha expuesto.

Apéndice I

La frontera salarios-ganancias se han definido mediante las ecuaciones (23) o (25), pero presentamos aquí una alternativa, porque no parece natural tomar como numerario la suma de los precios $pI=1$, aunque formalmente no hay inconveniente. Traemos aquí la ecuación (22)

$$(22) \quad p = w(1+g)LY^{-1}[I - A(1+g)]^{-1}$$

Combinamos ahora esta ecuación con la ecuación de la razón-patrón de Sraffa de la función de producción simple:

$$(44) \quad pY = (1+R)pX$$

Y post-multiplicando esta ecuación por la inversa de Y queda:

$$(45) \quad p = (1+R)pXY^{-1}$$

que igualándola con (22) y post-multiplicando la igualdad por Y sale:

$$(46) \quad (1+R)pX = w(1+g)LY^{-1}[I - A(1+g)]^{-1}$$

Tomando como numerario $pXI=1$ y despejando la tasa de salario:

$$(47) \quad w = \frac{(1+R)}{(1+g)LY^{-1}[I - (1+g)A]^{-1}I}$$

que parece más natural que (23), además de incorporar la razón-patrón de Sraffa. Por otra parte, con *la producción conjunta no sraffiana*, donde $m > n$ (más productos que medios) hay que tomar (25) y con (2) y el numerario $pXI=1$ sale la ecuación frontera salario-ganancia para la conjunta no sraffiana:

$$(48) \quad (1+R) = w(1+g)L[Y - X(1+g)]^T \times \left[[Y - X(1+g)] \times [Y - X(1+g)]^T \right]^{-1} YI$$

Ahora se puede despejar sin dificultad la tasa de salario w e incorporar la matriz de requerimientos A mediante $A = XY^{-1}$.

Apéndice II

En el capítulo VI de su libro mencionado inicia Sraffa una discusión sobre la posibilidad de que salarios y ganancias no tengan una relación siempre inversa. Ya se ha visto todo esto en lo anterior y no entraré en esa posibilidad. Está demostrada y aquí se ha hecho, pero cambiando algunos puntos de vista y supuestos. Sraffa lo que hace es hallar *la diferencia* de precios de dos productos¹⁵ con reducción a trabajo fechado. Sin embargo, el estado de esa cuestión en Sraffa es muy incompleta e insatisfactoria por varios motivos: a) la reducción a trabajo fechado es por 2 períodos y no de todo el trabajo incorporado directa e indirectamente a lo largo del proceso, tanto del *vino añejo* como del *arca de roble* que lo contiene, según sus propios ejemplos; b) calcula la diferencia de precios en lugar del cociente de los mismos. Con ello no podemos valorar la variación de los precios en términos relativos; c) como en ningún momento tienen en cuenta el teorema de Perrón-Froebenius, nada sabemos sobre la convergencia de la función de precios. Para subsanar esas insuficiencias traemos a colación la función de precios de la producción simple sraffiana. Todo lo que se va a decir vale también para la conjunta sraffiana e, incluso, para la no sraffiana (con $m > n$). La ecuación de producción simple es (49), que es la misma que la conjunta sraffiana, solo que en este último caso la matriz Y de bienes finales no es diagonal, sino que todos sus elementos tienen -o pueden tener- un valor.

$$(49) \quad p = w(1+g)LY^{-1}[I - A(1+g)]^{-1}$$

Desarrollado (49) es:

$$(50) \quad p = w(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \dots + (1+g)^{t-1} A^{t-1}\right]$$

Si se dan las condiciones de aplicación del teorema de Perrón-Froebenius en (49) y (50) -básicamente que A sea productiva¹⁶- entonces el teorema nos dice que los precios serán una función creciente de g y A . Por otro lado, para que tenga sentido desarrollar la ecuación (50), la función de precios ha de ser convergente. Esto nos

¹⁵ Pág. 62 de "Producción de..."

¹⁶ Que $A^j > A^{j+1}$

deja que la función de precios en función de la tasa de ganancia, ha de ser necesariamente convexa hacia el eje de abscisas, con un valor en el eje de ordenadas para $g=0$ tal como $p = w LY^{-1}[I - A]^{-1}$, y convergiendo hacia un valor para cada precio que va a depender de las columnas de las matrices A^i . Cada precio del vector de precios p se va a diferenciar de otro en el trabajo directo correspondiente y en las columnas anteriores, pero todas han de cumplir las características mencionadas: nacen para un valor determinado -normalmente distinto- en el eje de ordenadas, siguen una función creciente, pero crecientemente decreciente (primera derivada positiva y segunda negativa) y permanecen siempre por debajo de un cierto valor (al que convergen desde abajo). Estas dos últimas propiedades dependen de los valores concretos de g y de A . Ahora bien, si tomamos el cociente de precios en lugar de la resta (Sraffa) el factor g se convierte sólo en un factor de ponderación de las columnas de A , pero esa ponderación es siempre la misma para cada período de tiempo. Visto así, cada precio es una función de g monótona creciente, siempre continua y siempre derivable. Otra cosa es el cociente. Aquí sí que cabe cambios de convexidad, porque durante ciertos tramos el precio, llamemos p_r crecerá más deprisa que el precio llamemos p_s y la función cociente de precios p_r/p_s será convexa (monótona creciente), y cuando crezca más deprisa el precio p_s , la función cociente será cóncava (monótona decreciente)¹⁷. Sin embargo, nada de esto nos dice nada nuevo sobre la función frontera salario-ganancia. En efecto, para considerar esta hay que anular el efecto de los precios tomando como numerario cualquier conjunto de variables en el que ellos intervengan ($pI=1$, $pYI=1$, $pXI=1$).

Matemáticamente quizá no sea tan fácil como pueda parecer obtener un conjunto de valores para las variables g y A que cumplan simultáneamente las condiciones anteriores: que se cumpla el teorema de Perrón-Froebenius y que la función de precios sea convergente. Pero, como diría Sraffa, son las propias condiciones de la economía, o los agentes económicos que se podría decir, o los actores, principalmente los gestores y los mercados, los que irán eliminando las soluciones inviables. Y eso no sólo para los sectores de producción final, sino también para todos los sectores que actúan básicamente como medios de otros

¹⁷ Pasinetti hace una valoración de los efectos sobre el cociente de precios de la tasa de ganancia, distinguiendo un llamado efecto-intensidad de un efecto-precio, aunque no saca ninguna conclusión sobre *la frontera w-g* porque no estaba en este capítulo. "Lecciones de la teoría de la producción", pág. 110, FCE.

sectores. Además hay otra manera de ver la matriz de requerimientos \mathbf{A} . Podemos suponer, aunque no se haya hecho en ningún momento en el artículo, que el producto $\mathbf{A}^i \mathbf{A}^{i+1}$ supone un cambio de técnicas, sobre todo si eso supone también un proceso temporal. En efecto, si \mathbf{A}^i no sólo representa la matriz de requerimientos de \mathbf{A}^{i+1} , sino que entre ambas hay un período de tiempo -pongamos un año- se puede suponer que el producto de ambas matrices es un cambio de técnicas si \mathbf{A}^i es distinto de \mathbf{A}^{i+1} y no sólo por el exponente. No es que ello se deduzca de (49) -todo lo contrario-, pero es factible su introducción heurística en (50). Como se ve la cosa es más compleja de lo que Sraffa nos expone en su obra como ejemplo. No obstante, en honor al gran economista italiano, hay que decir que todo esto debía tener en su cabeza si se lee entre líneas los capítulos VI y IX. Tal es así, que incluso contempla la posibilidad de precios negativos si el margen entre los precios de venta de un producto dirigido a la venta y el mismo producto utilizado como medio es muy pequeño. Sraffa habla también de los salarios¹⁸. Con las ecuaciones (49) y (50) se puede contemplar si en algún momento la productividad de la matriz \mathbf{A} para algún producto que se utiliza como medio (alguna columna de \mathbf{A}) origina un crecimiento del valor final del producto que le corresponde como fila que no puede ser compensado con una bajada de los salarios del sistema (de todos, porque estamos con un modelo de tasa de ganancia y salarios únicos). Sraffa pone el ejemplo de las habas. En el artículo “Aspectos de la economía de Sraffa” se ve más claro esta posibilidad en la medida que las matrices de requerimientos \mathbf{A}^i se van sustituyendo por *las razones-patrón interanuales*.

¹⁸ Pág. 87 de “Producción de ...”

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa's Prices", Università degli Studi di Siena, quaderni 474.
www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Caballero, A. y Lluch, E.: "Sraffa en España", Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Dobb, M.: "The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution", 1970.

Estrin, S. y Laidler, D.: "Introduction microeconomics".

Fiorito, Alejandro: "La implosión de la economía neoclásica". Está en la red:
www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: "Sraffa y Böhm-Bawerk". Está en la red:
<http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf>

Gehrke, Ch. y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz". Está en la red:
http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: "Teoría del capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*, 1975), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heathfield, D. F.: "Productions functions".

Marx, Carlos: "El método en la Economía Política", 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: "A neo Classical Theory of Economic Growth", 1961.

Meek, R.: "Mr. Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics", 1961

Mora Plaza, A.: "Aspectos de la economía de Sraffa", revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: <http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf>

Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx's Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
<http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and steady growth", 1970.

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti, L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" (*Growth and Income Distribution*, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("Lezioni di teoria della produzioni", 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E.: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet:
<http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf>

Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: "Ensayos críticos", 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: "Understanding the Marxian notion of Exploitation", 1971.

Sargent, T.J.: "Teoría macroeconómica" (*Macroeconomic Theory*, 1979), 1988, Antoni Bosch editor.

Schumpeter, J. A.: "Historia del Análisis Económico" (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: "Análisis microeconómico", pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: "Marx, Sraffa y el problema de la transformación" (*Marx after Sraffa*, 1977), 1985, F.C.E.

Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975.

Schumpeter, J. A.: "Historia del Análisis Económico" (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: "Análisis microeconómico", pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: "The interest rate and transition between techniques", 1967.

Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales", 1979, edit. Tecnos.

AMP, Madrid, 12 de diciembre de 2009