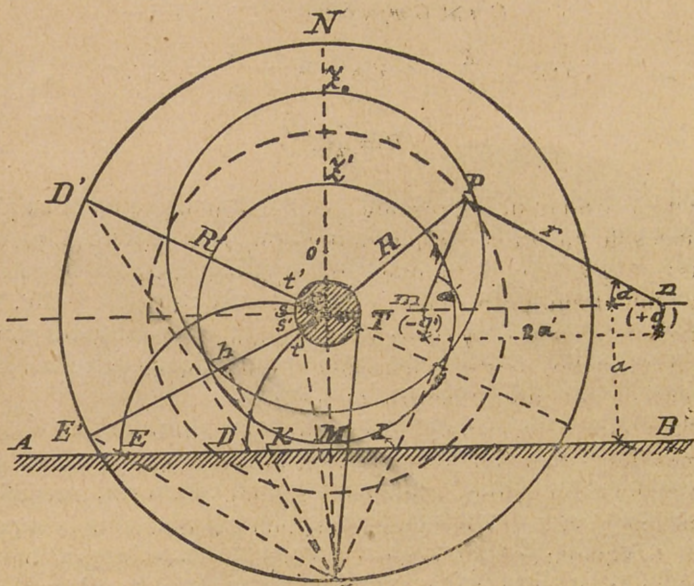
UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LAS IMÁGENES ELÉCTRICAS, *por* **José María de Madariaga.**

Conocida es de tiempo atrás la teoría de las imágenes eléctricas formulada por Lord Kelvin, y expuesta en el libro clásico de Maxwell; pero las aplicaciones que de ella se hacen no son tan frecuentes como parecen reclamarlo su importancia, y la facilidad que ofrece para la resolución de algunos problemas.

La presente nota tiene por objeto hacer resaltar estas dos circunstancias. Recordaré, al efecto, algunas definiciones y principios de dicha teoría.



Sean dos masas eléctricas $+q$ y $-q'$ situadas en dos puntos n y m (v. la fig.) de un medio dieléctrico, á una distancia $2a'$, y de magnitud tal que $q = K \cdot q'$, en donde K es una constante.

La ecuación de una superficie equipotencial será

$$V = \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} = \frac{q}{r'}\left(\frac{r'}{r} - \frac{1}{K}\right),$$

siendo r y r' las distancias de un punto P del campo á las en que se suponen condensadas las masas $+q$ y $-q'$. La superficie equipotencial, única, de valor o, corresponde, como se ve, á la condición $r = K . r'$, que, dando para los radios vectores una relación constante, representa una superficie esférica, cuyo radio se puede deducir fácilmente. Los triángulos $O\,p\,n$ y $O\,p\,m$ que tienen el ángulo en O y el lado $O\,P$ comunes, y proporcionales los lados $P\,n$ y $P\,m$, puesto que $\frac{r}{r'} = K$, son semejantes, y dan

$$K = \frac{O\,n}{R} = \frac{R}{O\,m} = \frac{sen\,\alpha'}{sen\,\alpha};$$

de donde

$$R^2 = O\,n \times O\,m; \text{ y como } O\,n - O\,m = 2\,a',$$

$$O\,n - \frac{R}{K} = 2\,a' \text{ ó } R . K - \frac{R}{K} = 2\,a'; \text{ y}$$

$$R = \frac{2\,a' . K}{K^2 - 1}.$$

Sin necesidad de representar por superficies equipotenciales y líneas de fuerza la estructura del campo que producen las dos masas $+ q$ y $- q'$, se ve que esta superficie esférica de potencial nulo tiene propiedades notables; con relación á ella, los puntos m y n son *recíprocos*, es decir, que están situados sobre el mismo radio, y éste es una media proporcional entre las distancias de aquéllos al centro de la esfera.

Puesto que ésta tiene potencial o, no se alterarán las condiciones del sistema en los puntos exteriores á la misma, si, suponiéndola conductora y en comunicación con tierra, reemplazamos la masa $- q'$ por una masa igual repartida sobre la superficie de aquélla. El potencial en estos puntos exteriores no habrá variado, y, en ellos, las acciones eléctricas serán las mismas que las debidas á las masas $+ q$ y $- q'$ aisladas. Otro tanto sucedería para los puntos interiores de la superficie de potencial o que suponemos, si se sustituye la masa exterior $+ q$ por una masa igual á $+ q'$, repartida sobre la dicha superficie. Análogamente, si ésta no tiene otra carga que la que por influencia determine en ella la masa $+ q$, se la podría sustituir por una masa $- q$, situada del otro lado del plano á que aquella superficie se reduce, á una distancia a', contada sobre la normal bajada al mismo desde el punto n, en que se supone colocada la masa $+ q$. Por esto puede decirse que las masas $- q'$ ó $- q$, en los dos casos considerados, son la *imagen eléctrica* de la masa $+ q$, con relación á la superficie de potencial o.

La forma y posición de ésta pueden ser muy diferentes de las dos mencionadas, según lo determine la naturaleza del sistema; y el razonamiento apuntado subsistirá aun cuando esta superficie no tenga potencial o, esencialmente, es decir, por su posición, sino como consecuencia de su comunicación con tierra en el sistema primitivo, siempre que los puntos en que se supongan las cargas eléctricas sean *recíprocos* con relación á un centro ú origen elegido en el interior de la misma. Se llama, según esto, de una manera general, *imagen eléctrica*, un punto ó sistema de puntos electrizados, situado de un lado de una superficie, que produce del otro lado de ésta, una acción eléctrica igual á la que ejercería la carga efectiva de la misma.

Se ve la analogía que tiene este concepto con el de las imágenes virtuales en la óptica; aunque la determinación de estas dos clases de imágenes no obedezca á las mismas reglas.

Se ha deducido anteriormente que un punto colocado á una distancia d del centro de una esfera de radio R, tiene por imagen eléctrica otro punto situado sobre el mismo radio, á una distancia d' del centro, tal que $d \times d' = R^2$; fórmula fundamental en la teoría de las *figuras inversas*, que hace vér que la *imagen eléctrica* de un punto ó sistema de puntos se podrá obtener por el método de *inversión*, que en la Geometría se estudia.

Como en esta inversión ó *transformación por radios vectores recíprocos*, es una propiedad característica la invariabilidad del valor de los ángulos de los elementos lineales *correspondientes*, y la consiguiente semejanza de las figuras elementales componentes, se comprende que, eligiendo convenientemente la *potencia de inversión*, pueda efectuarse la transformación, de modo que las propiedades físicas, que no dependan más que de esta semejanza, sean las mismas en el sistema primitivo que en el inverso, que dé la figura transformada. Esta deducción es de la mayor importancia, porque permite resolver en el sistema transformado, problemas, á veces difíciles de abordar en el primitivo.

Sea, p. e., el caso de un conductor cilíndrico aislado, en presencia de un plano conductor indefinido en comunicación con tierra: se trata de determinar la capacidad electrostática del condensador que forman el conductor y el plano, separados por una distancia a. Si se supone que Q sea la carga, por unidad de longitud del conductor, que representa en sección transversal, el círculo del centro o y de diámetro d, $s\,t'\,T$, (v. la fig.), el flujo de fuerza que emerge del mismo, valdrá, según el teorema de Gauss, $4\,\pi\,Q$, y la intensidad del campo, á una distancia x del eje del conductor, será, designando por V el potencial,

$$H = -\frac{d\,V}{d\,x} = \frac{4\,\pi\,Q}{2\,\pi\,x} = \frac{2\,Q}{x};$$

de cuya expresión se deduce

$$\int -d\,V = 2\,Q\,.\int \frac{d\,x}{x} + C.$$

Al tratar de encontrar esta integual, lo que es necesario para deducir el valor de V y hallar la relación $\frac{Q}{V}$, que define la capacidad que se busca, se tropieza con la dificultad de que el campo no es uniforme, y su intensidad y el potencial varían, no sólo con la distancia, sino también con la dirección; y no es posible encontrar el valor del último en función de cantidades constantes, ó de variables que queden eliminadas al hallar la relación $\frac{Q}{V}$.

Esta dificultad se salva aplicando el método de transformación por vectores recíprocos, al que antes se hizo alusión. Elíjanse, al efecto, el centro de inversión C sobre la normal $O\,M$ á la traza $A\,B$ del plano conductor, y la potencia de inversión I de modo que la circunferencia $t\,s'\ s\,t'$ que representa en corte la periferia del cilindro conductor, sea ella misma su figura inversa correspondiente. Supóngase, para esto, resuelto el problema, y sea C el centro buscado. Se deberá verificar que (v. la fig.)

$$\overline{CT}^2 = I = CM \times CN.$$

Llamando R' á la distancia desconocida $O\,C$, y recordando que la figura inversa de una recta $A\,B$ es una circunferencia que pasa por el centro de inversión, se tendrá, en el triángulo rectángulo $O\,C\,T$, que

$$\overline{C\,T}^2 = R'^2 - \frac{d^2}{4} = I = (R' - a)\,.\,2\,R', \text{ ó}$$

$$R'^2 - 2\,R'a + \frac{d^2}{4} = 0; \text{ y } R' = a + \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

La solución correspondiente al signo — del radical es extraña á la cuestión, puesto que, adoptándola, ó no se podría trazar la tangente á la pequeña circunferencia de diámetro d, cuyo cuadrado da el valor de I, ó sería imposible, para muchos puntos, que se cumpliese la condición fundamnntal de la inversión.

Si d fuese muy pequeño con relación á a, como sucedería si se tratase del sistema formado por un cable aéreo y la tierra, se podría escribir con mucha aproximación

$$R' = 2\, a.$$

Hecha la transformación, como aparece en la figura adjunta, resulta que el sistema inverso del propuesto es el representado, en el corte, por las circunferencias $t\, s' s\, t$ y $C\, E' D' N$. Las líneas de fuerza en él son las porciones de radios comprendidas entre estas dos circunferencias; y, en un tubo de fuerza que formen, el flujo tendrá el mismo valor que en el correspondiente del sistema primitivo.

Para demostrarlo, basta fijarse en que las figuras elementales correspondientes de los dos sistemas primitivo é inverso son semejantes, y aunque, como es sabido, la relación de semejanza varía de un lugar á otro, la que, en todos ellos, tenga la longitud con la sección de cada tubo de fuerza infinitamente pequeño, será constante. De suerte que la longitud de las líneas de fuerza estará con las secciones de dos tubos finitos de fuerza correspondientes, que se consideren, en la misma relación; que para un dieléctrico determinado, podría llamarse, por analogía, su resistencia. Y como la diferencia de potencial no ha variado en la inversión, es evidente que el flujo de fuerza tendrá el mismo valor en los dos tubos, y, por consiguiente, generalizando, el que, emergiendo de todo el conductor, encuentra al cilindro cuya traza es la circunferencia $C\, E' D' N$, es igual al que, procediendo del mismo origen, llega al plano conductor $A\, B$. Se deduce de aquí que los dos sistemas tendrán la misma capacidad, que es fácil de calcular en el transformado, puesto que es la de un condensador de armaduras cilíndricas, de radios R y $\frac{d}{2}$ que, como se sabe, vale

$$C = \frac{1}{2\, K \,.\, \log_e \dfrac{R'}{\left(\dfrac{d}{2}\right)}}$$

Como K, coeficiente de la ley de Coulomb, puede hacerse igual á uno, expresando la capacidad en el sistema electrostático de unidades de medida, y suponiendo que el dieléctrico sea el aire (caso de las líneas aéreas de transmisión de la energía eléctrica), será:

$$C = \frac{1}{2 \times 2,3 \, log \frac{2R'}{d}} = \frac{1}{4,6 \, . \, log \frac{2R'}{d}} \text{ unidades } e \, . \, e.,$$

por centímetro de longitud, normal al plano del dibujo, ó lo que es igual:

$$C = \frac{1}{4,6 \, . \, log \frac{2R'}{d}} \times \frac{1}{10^5 \times 9} m \, . \, F.$$

De modo que por kilómetro, longitud á que suele referirse la capacidad de los cables:

$$C = \frac{1}{41,4 \, . \, log \frac{2R'}{d}} = \frac{0,024}{log \frac{2R'}{d}} m \, . \, F.$$

y sustituyendo, para una línea aérea, los valores:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0,^c6 \\ a = 600^c \\ R' = 600 + \sqrt{360000 + \frac{0.36}{4}} = 1200 \end{array}\right\} C = \frac{0,024}{log \frac{2400}{0,6}} = 0,0067 \, m \, . \, F.$$

Se ve, pues, que la aplicación del principio de las *imágenes eléctricas*, que es en esencia el de las *figuras inversas*, permite encontrar la solución de este problema interesante de la electrostática, lo que no es fácil siguiendo otros procedimientos.

Además, se puede, por este medio, determinar la estructura del campo, que era desconocida en el sistema primitivo, pues sólo se sabe, respecto de ella, que las líneas de fuerza que salen normalmente de la superficie lateral del conductor deben cortar, también normalmente, al plano $A \, B$, que es otra superficie equipotencial del sistema; pero se desconoce, *a priori*, la naturaleza de aquéllas. Para encontrarla, bastará aplicar el principio de la inversión, á las líneas radiales de fuerza del sistema transformado. Se ve así que al tubo de fuerza $E' \, s' \, t' \, D'$ p. e. corresponde, en el sistema primitivo, el $E \, s \, t \, D$, y que las líneas de fuerza son en éste arcos de circunferencia, cuyos centros — k y f para las E s y D t, C, respectivamente, — están, todos, sobre la recta A B. Las líneas equipotenciales son circunferencias concéntricas con el conductor, en el transformado, y en el primitivo son también circunferencias cuyos centros están situados sobre la recta C N. Así, p. e., á la circunferencia de radio O Z', corresponde en el sistema propuesto, la de centro O' y radio $O'Z_0$. La estructura del campo de fuerza resulta de este modo, completa y fácilmente determinada.

SOBRE EL ESTADO ACTUAL DE LA LEY DE MAXWELL $K = n^2$,

por **Blas Cabrera Felipe**.

Sabido es que la teoría electromagnética de la luz conduce á la relación $K = n^2$: demostrar su exactitud ó su falsedad equivale á comprobar ó rechazar las hipótesis fundamentales de aquélla. Esto explica el afán con que gran número de físicos han puesto en juego sus actividades desde que aquella ley fué enunciada para arrancar á la experiencia el juicio definitivo de las ideas del sabio inglés.

Á primera vista el problema es sencillo: las medidas de K y n pueden efectuarse con gran aproximación Pero un análisis más detenido no tardó en señalar dificultades que nacen del significado mismo de las constantes físicas que figuran en aquella igualdad. Sabemos, en efecto, que la velocidad con que se propaga un movimiento periódico cambia, para un mismo medio, con la longitud de onda; ahora bien, si medimos K por un método estático, cual debe hacerse en rigor para conservar á esta constante su genuino significado, la perturbación producida en el dieléctrico no es periódica, ó lo que es lo mismo, su longitud de onda es infinita y, por lo tanto, el índice con que ha de compararse dicha constante, debe ser el correspondiente á esta radiación, índice que sólo puede determinarse por extrapolación, cuando se conoce la ley de dispersión de la sustancia. Creyóse en un principio que su valor no diferiría mucho del que corresponde á las radiaciones visibles y que, en todo caso, por la fórmula de Cauchy determinarse, y, apoyándose en estas ideas, se consideró hasta estos últimos años como incuestionable que, mientras los gases y gran número de líquidos satisfacen la ley de Maxwell, entre los sólidos existe gran número de sustancias,