FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA V
ISSN: 1695-6613

MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTRATÉGICO Y DE COOPERACIÓN EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Ana Teresa Antequera Guerra
María Candelaria Espinel Febles

Universidad de La Laguna

Resumen

Este trabajo muestra parte de un material didáctico de innovación curricular diseñado siguiendo un enfoque realista y haciendo intervenir elementos tomados de la Teoría de Juegos. Pretende desarrollar contenidos de carácter formativo que propicien en los estudiantes valores de justicia, cooperación y convivencia democrática. La Teoría de Juegos proporciona un marco apropiado para llevar al aula situaciones reales de actualidad, cuyo estudio implica el uso de diversos y variados conceptos matemáticos, además de algunos temas transversales presentes en el currículo de Secundaria.

Abstract

This paper shows part of some didactic material related to the innovation of curricula. This material has been designed following the realistic approach, using elements taken from the Game's Theory. The aim of this work is to develop formative contents that allow students to achieve justice, cooperation and democratic values. Game's Theory provides an appropriate framework to introduce in the classroom real situations, whose study implies the use of several different mathematical concepts, and also some of the transverse topics from Secondary School curriculum.

Introducción

La cadena de televisión “Televisión Canaria” emite el concurso *Doble Juego*, programa de preguntas y respuestas en el que, para ganar, prevalece la respuesta emocional de los concursante por encima de su inteligencia. En la última parte del concurso, denominada *Doble o Mitad*, dos concursantes pueden elegir entre quedarse cada uno con la mitad del dinero que conjuntamente hayan ganado, o arriesgarse a llevarse el doble del dinero reunido. Durante el concurso, los participantes intentan despistarse entre sí aplicando una buena dosis de picardía e ingenio en sus respuestas verbales. Así, por ejemplo, si han acumulado 15000 €, y ambos eligen mitad, se repartirán esa cantidad. Si uno de ellos elige mitad y el otro doble, este último se llevará 30000 €. Pero, ¡atención!, si los dos son ambiciosos y eligen doble, ambos se irán a casa con las manos vacías. Los concursantes no se conocen, no han hablado entre ellos fuera del plató y, por supuesto, no ha habido ninguna posibilidad de que hayan llegado a un acuerdo. El desenlace que se produce con mayor asiduidad es aquel en el que ambos concursantes optan por arriesgarse eligiendo doble, con lo que no se llevan nada. Este escenario, claramente, ha sido tomado en cuenta por los diseñadores del concurso puesto que, de esta manera, consiguen reducir la cuantía de los premios que otorgan.

El juego que se acaba de presentar aparece en la vida diaria más a menudo de lo que cabría esperar, y se conoce como el *Dilema del Prisionero* (Poundstone, 1995): Dos individuos, al optar por la elección que en un principio parece ser la más beneficiosa para ellos, llegan a un resultado peor que si hubiesen elegido la otra. Se encuentran presos de sus propias estrategias salvo que algo cambie en la confrontación.

Este dilema es una situación que ha sido estudiada por una de las ramas de las Matemáticas con gran auge en las últimas décadas: la *Teoría de Juegos*. Esta Teoría se entiende como el estudio de las relaciones de distintos individuos cuando sus intereses entran en conflicto, así como la búsqueda de soluciones a estos enfrentamientos a través del análisis de las acciones de los individuos y sus consecuencias. La teoría proporciona modelos matemáticos aplicables a campos tan dispares como la Economía, la Política, la Psicología o la Biología.

Su gran versatilidad ha hecho que no sea extraño encontrar referencias a ella en los medios de comunicación escritos, tanto sobre algunas situaciones conocidas de esta Teoría, como de términos que le son propios. Así, volviendo al Dilema del Prisionero, indicaremos que éste se ha empleado en ocasiones para representar el conflicto vasco, pues las partes implicadas en éste se han ido posicionado de tal manera que una salida dialogada parece cada vez más difícil. Este dilema también se ha usado para modelizar la situación que surge de la financiación de los partidos políticos. Todos tienen claro que la financiación ilegal les proporcionaría cierta ventaja sobre los demás, pero una vez que uno se aprovecha de esta situación, nada impedirá que los demás hagan lo mismo, con lo que la ventaja que se trataba de conseguir quedará anulada.

Además, conceptos como la cooperación, la justicia y el juego limpio aparecen en artículos como *Condenados a cooperar* (El País, 11.08.02), en el que se presenta una investigación que ha demostrado que la cooperación estimula la misma zona del cerebro que el placer, o *La economía del juego limpio* (Investigación y Ciencia, marzo 2002), en el que se muestra la cooperación como resultado de la evolución de las especies. Un último ejemplo es el uso que se hace del término halcón, proveniente del modelo de juegos evolutivos *Halcón vs Paloma*, y que representa atacar siempre hasta que el contrincante esté herido o huya. Este término aparece en artículos como *Sharon nombra un Gobierno de "halcones" en Israel* (El País, 28.02.2003), y simboliza la vertiente más dura y radical de ese gobierno.

Esta investigación presenta dos objetivos principales. Por un lado, diseñar material curricular empleando conceptos propios de la Teoría de Juegos, y, por otro, desarrollar contenidos de carácter formativo que propicien valores de justicia, cooperación y convivencia democrática entre los alumnos. Creemos que la Teoría de Juegos proporciona un marco apropiado para llevar al aula de Secundaria situaciones reales y de actualidad, que implican el uso de diversos conceptos matemáticos. Entre las motivaciones de este proyecto está el tratar de dar una visión distinta de las Matemáticas, más cercana, enfocándolas hacia el estudio de la sociedad en relación con valores, conductas, conflictos o búsqueda de estrategias.

A lo largo de este trabajo, se dará una visión general de los conceptos y situaciones más relevantes de la Teoría de Juegos, se presentarán unas reflexiones sobre las conexiones con el currículo actual de Secundaria, y, por último, se hará una descripción de parte del material desarrollado en la investigación que estamos desarrollando, así como un breve análisis de los resultados de la revisión del material de acuerdo con los obstáculos y dificultades detectados.

Alguna nociones de Teoría de Juegos

Bajo el nombre de *juego matemático* se entiende un conjunto de reglas que condiciona el comportamiento de ciertos individuos, a los que llamaremos *jugadores*, que intervienen en el mismo. Estas reglas establecen las posibles alternativas de los jugadores; a cada una de estas reglas se las llama *estrategias*. Como consecuencia de las estrategias seguidas por los jugadores se esperará un resultado. Además, se supone que éstos tienen claras sus preferencias sobre los resultados posibles, y que prefieren unos sobre otros. Este rango de preferencias se representa asignando a cada resultado un *pago* para cada jugador.

En esta Teoría se distinguen dos enfoques: el *cooperativo* y el *no cooperativo*. El primero estudia y analiza las opciones que son accesibles a los grupos, es decir, se centra en los aspectos más generales en los que se especifican qué puede conseguir una coalición, pero sin especificar cómo lo consigue; es un tipo de situación en la que los compromisos son totalmente vinculantes y se pueden hacer cumplir (Sánchez, 1994). El enfoque no cooperativo trata de estudiar el comportamiento estratégico de los individuos, es decir, se centra en los detalles del proceso y las reglas que definen la situación; los compromisos no se pueden hacer cumplir. Se clasifican principalmente según el número de jugadores que intervienen, el número de estrategias que posee cada jugador, y el número de veces que se repite el juego. Destacan entre todos ellos los *juegos bipersonales* (dos jugadores) por ser los de análisis más simple y los que representan situaciones más motivadoras para los alumnos. Sobre este tipo de juegos se desarrollaron las situaciones presentadas a los alumnos en esta investigación.

Por otra parte, los *juegos finitos* hacen referencia a aquellos en los que el número de estrategias de cada jugador es finito. Dentro de estos, los juegos bipersonales, se clasifican en *juegos de suma nula* y *juegos de suma no nula*. Los primeros, también llamados de *conflicto puro*, son situaciones en las que las ganancias de uno de los jugadores son exactamente las pérdidas del otro. En los segundos, las ganancias de uno de los jugadores no tienen por qué ser exactamente las pérdidas del otro, pues aparece una componente de cooperación que hace que este tipo de juegos sea más representativo de situaciones reales. Los *juegos infinitos*, con una cantidad infinita de estrategias y, en especial, los *juegos de cuadrado unidad*, suponen el uso de herramientas matemáticas más potentes, como el Cálculo Diferencial, la Programación Lineal o el Teorema del punto fijo. Por último, cuando se estudian las consecuencias de que un determinado juego se repita un número indefinido de veces, aparecen los *juegos* *evolutivos*. Estos permiten, entre otras cosas, recrear situaciones propias de la Biología.

El tratamiento matemático que se les da a las situaciones de juego no cooperativo admite tres representaciones: *árboles de decisión*, *matriz formal* y *función característica*. En este trabajo se presentarán solamente las dos primeras por ser las que tienen relación directa con la experiencia desarrollada, empleándose para ello, las situaciones y ejemplos que se trabajaron con los alumnos que participaron en la experiencia.

Matriz de pago

Para la representación en forma matricial se considera, como ejemplo, la situación de conflicto dada por el siguiente escenario (NCTM, 1991): Los habitantes de una población se gastan mensualmente 10000 euros en salir a comer fuera. Los empresarios-dueños de los dos restaurantes de la zona (Parrilla Antonio y Casa Bruno) compiten por alcanzar los máximos beneficios, introduciendo distintas estrategias para atraer a los clientes. Esas estrategias consisten en no hacer *nada*, añadir un plato *nuevo* al menú, ofrecer una oferta *especial* u obsequiar con un *postre* gratis. El reparto de beneficios viene dado por las entradas de una *matriz de pago*, que reflejan la diferencia, en miles de euros, entre las ganancias de Antonio y las de Bruno, según las estrategias que cada cual elija:

		Casa Bruno			
		Nada	**Nuevo**	**Especial**	**Postre**
Parrilla Antonio	**Nada**	6000,4000	3500,6500	2000,8000	3000,7000
	Nuevo	3500,6500	7000,3000	4000,6000	5000,5000
	Especial	7500,2500	6000,4000	8000,2000	5500,4500
	Postre	8500,1500	4000,6000	4000,6000	4500,5500

La descripción del juego se puede simplificar indicando simplemente la diferencia, en miles de euros, entre los beneficios de Antonio y los de Bruno:

		Casa Bruno			
Parrilla Antonio		**Nada**	**Nuevo**	**Especial**	**Postre**
	Nada	2	-3	-6	-4

Nuevo	-3	4	-2	0
Especial	5	2	6	1
Postre	7	-2	-2	-1

En esta matriz, los valores muestran la diferencia, en miles de euros, respecto de Antonio. Los de Bruno se obtienen sin más que cambiar de signo a estos valores, de modo que la suma de ambos valores es cero. Es por ello que a estas situaciones se las denominan juegos bipersonales de suma nula. Esta última representación de juego es la que se usa comúnmente, y se trabajará sobre ella.

Antonio y Bruno actúan de forma racional, teniendo en cuenta las actuaciones del otro empresario. Cada cual presupone que el otro intentará evitar que consiga beneficios altos. Así, Antonio intentará asegurarse, al menos, el mejor de los peores resultados correspondientes a todas sus estrategias. Sabe que sólo puede asegurarse el valor mínimo en cada estrategia: -6, -3, 1 y -1, que son los valores mínimos de cada fila. De estos optará por el valor mayor, que corresponde a *poner un especial*, garantizándose una diferencia de 1 (1000 euros) a favor. Este número se llama valor máximo-mínimo, y la estrategia correspondiente, *poner un especial*, estrategia máximo-mínima.

Un razonamiento similar conducirá la decisión de Bruno, pero en este caso considerará los valores máximos de cada estrategia, 7, 4, 6 y 1, es decir, los valores máximos de cada columna. De éstos optará por el valor menor, que corresponde a *ofrecer un postre gratis*, asegurándose que la diferencia de beneficios no será mayor que 1 (1000 euros). Este número se llama valor mínimo-máximo, y la estrategia correspondiente, *ofrecer un postre gratis*, estrategia mínimo-máxima.

		Casa Bruno				
		Nada	**Nuevo**	**Especial**	**Postre**	**Mín fila**
Parrilla Antonio	**Nada**	2	-3	-6	-4	**-6**
	Nuevo	-3	4	-2	0	**-3**
	Especial	5	2	6	**1**	**1**
	Postre	7	-2	-2	-1	**-2**
	Máx col	**7**	**4**	**6**	**1**	

Al actuar de forma racional, Antonio y Bruno han llegado a una situación en la que cambiar de estrategia carece de incentivos. Los resultados que pudiesen obtener al cambiar unilateralmente de estrategia son peores que si se mantienen en la estrategia máximo-mínima o mínimo-máxima.

En general, la forma de presentación y resolución del juego pasa por la construcción de una matriz formal, *matriz de pago*, que permite comprender el conflicto y sus posibles soluciones. Así, la matriz asociada a un juego entre dos individuos será:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en la que cada una de las *n* filas representa las *n* estrategias de uno de los jugadores y las *m* columnas, las *m* estrategias del otro. La entrada a_{ij} de la matriz, en el caso más sencillo, representa el pago que el segundo jugador ha de hacerle al primero, correspondiente a la estrategia *i* del primero y a la estrategia *j* del segundo.

De este modo, el jugador fila, al estudiar cada estrategia, puede estar seguro de obtener el *mínimo en j de los* a_{ij}. Además, como puede elegir un *i* cualquiera, lo hará de forma que haga máximo el valor $min_j\ a_{ij}$, ganando al menos: $\underline{v} = max_i\ [min_j\ a_{ij}]$. En nuestra situación:

$\underline{v} = max_i\ [min_j\ a_{ij}] = \max\ \{-6, -3, 1, -1\} = 1$

Asimismo, el jugador columna puede estar seguro de obtener el *máximo en i de los* a_{ij}. Además, como puede elegir un valor *j* cualquiera, lo hará de forma que haga mínimo el valor $max_i\ a_{ij}$, ganando al menos: $v = min_j\ [max_i\ a_{ij}]$. En nuestra situación:

$v = min_j\ [max_i\ a_{ij}] = \min\ \{7, 4, 6, 1\} = 1$

En el caso de que ambos valores coincidan, a ese valor se lo conoce como *valor* del juego en *estrategias puras*, y se dice que el juego presenta un *punto de silla*. Si no coincidiesen, es decir, si no existiese el punto de silla, a ningún jugador le convendría jugar siempre de acuerdo con la misma estrategia, pues el otro tendría ventaja. La solución pasaría porque los jugadores realizasen sus elecciones de estrategias con arreglo a una cierta ley de probabilidad, elaborando así una *estrategia mixta*.

Aunque la Teoría de Juegos no tiene como objetivo principal la elaboración o estudio de juegos en el sentido que todos entendemos como tales, si es cierto que el estudio de algunos facilita la comprensión de situaciones más complejas dentro de la Teoría. Un ejemplo es el juego de *Pares y Nones*, que se utilizará aquí para explicar el concepto de estrategia mixta. En este juego cada jugador puede seguir las mismas estrategias, mostrar uno o dos dedos. Si la suma de los dedos mostrados es par, el segundo jugador paga al primero un euro; si por el contrario la suma es impar, es el primer jugador quien paga un euro al primero. La matriz de pago para este juego es:

$$\begin{array}{cc} & \text{J2} \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{J1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como en el ejemplo de los restaurantes, se supone que los jugadores actúan de manera racional, intentando maximizar sus beneficios. Pero al tratar de encontrar las estrategias máximo-mínima y mínimo-máxima, resulta que éstas no son efectivas y que no existe el punto de silla en estrategias puras:

$$\begin{array}{cccc} & & \multicolumn{1}{c}{J2} & \\ & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ J1 & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \\ & & \begin{array}{cc} +1 & +1 \end{array} & \end{array}$$

En esta situación, como se ha dicho, la solución pasaría por combinar las estrategias puras de los jugadores. En este caso, ambos jugadores tienen como estrategia mixta jugar al 50% sus dos puras, de forma que el valor del juego será v = 0. Esto no quiere decir que no vayan a ganar o perder dinero, sino que la probabilidad de que ganen o pierdan es la misma, esto es, si se repite el juego un número indefinido de veces, la diferencia entre ganancias y pérdidas será mínima.

Sobre este modelo de juegos bipersonales de suma nula, John von Neumann obtuvo uno de los resultados más importantes dentro de la Teoría de Juegos, el *Teorema del Maximin o Minimax*, que señala que en todo juego bipersonal de suma nula en el que sea posible jugar estrategias mixtas además de las puras, las estrategias maximin de cada jugador coincidirán siempre en una solución estable.

La Teoría de Juegos bipersonales de suma nula es excepcional, en el sentido de que permite encontrar soluciones, que además son aceptadas universalmente. Sin embargo, los juegos de suma nula son difíciles de encontrar es la vida cotidiana, cuyos problemas no se prestan generalmente a respuestas sencillas. En los *juegos de suma no nula*, las soluciones no suelen ser tan buenas, y en la mayoría de ellos, sea cual sea la complejidad, no hay soluciones aceptadas universalmente. Es decir, no hay una estrategia que sea claramente preferible a otras, ni hay un resultado único, definido y previsible.

El concurso que se planteó al comienzo de este artículo se trata, claramente, de un juego bipersonal de suma no nula, y se puede presentar a través de la siguiente tabla:

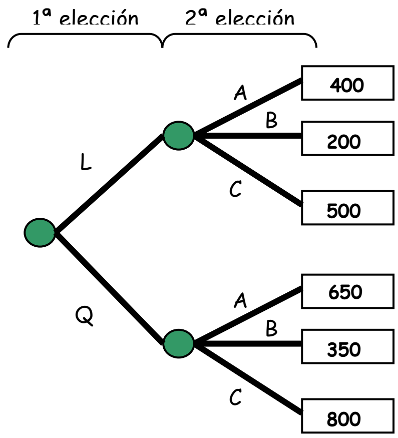
		Concursante 2	
		Doble	**Mitad**
Concursante 1	**Doble**	(0, 0)	(30000, 0)
	Mitad	(0, 30000)	(7500, 7500)

Cada concursante tiene incentivos para elegir *doble*, siendo ésta su estrategia dominante y, además, existe un equilibrio que consiste en jugar de acuerdo con estas estrategias. Sin embargo, cuando ambos juegan esta opción se van de vacío, mientras que si hubiesen elegido *mitad* se habrían llevado la mitad del premio. El equilibrio existente se trata de un resultado no eficiente, pues existe otro que proporciona a los concursantes una ganancia mayor. Una de las grandes diferencias entre los juegos de suma nula y los de suma variable, es que las soluciones de los primeros siempre son eficientes, mientras que las de estos últimos raramente los son.

Los juegos de suma nula siempre tienen la misma estructura básica aunque se presenten en contextos muy diferentes, pero no es el caso de los juegos de suma no nula. Además de la matriz de pagos, hay otras “reglas” que habrán de tenerse en cuenta y que afectan el carácter del juego: la existencia, o no, de comunicación entre los jugadores, el orden en el que se juega, la existencia de información imperfecta, la restricción de alternativas o las amenazas.

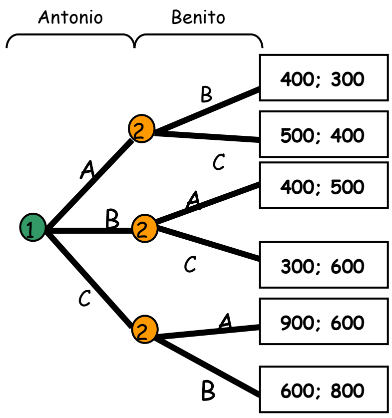
Árboles de decisión

Para introducir la representación en forma de árbol, se considera, en un primer momento, una situación sobre la necesidad de la toma de decisiones. Un empresario, Antonio (primer jugador), tiene que decidir sobre el tipo de máquinas de refrescos: lata (L) o de botellas de 500cm^3 (Q), que quiere colocar en un centro educativo, y el lugar donde ponerlas: en la entrada (A), al lado de la cafetería (B) o al lado de la cancha (C). La situación que se presenta se puede resumir en el siguiente árbol de decisión:



De esta forma, cada vértice del árbol representa cada una de las elecciones posibles para Antonio, y cada arista, las acciones disponibles en cada elección. Es decir, en la primera elección debe elegir entre refrescos en lata (L) o en botella (Q), y en la segunda, elegir el lugar de colocación A, B o C. Las etiquetas asociadas a cada vértice final representan los beneficios en euros, los llamados pagos, que obtiene Antonio si ha elegido las acciones que llevan a ese punto. Por ejemplo, obtendrá un pago de 650 € si elige las botellas de 500cm^3 (Q), y coloca la máquina en la entrada (A).

El planteamiento anterior se puede ampliar incorporando un nuevo empresario, Benito (segundo jugador), de modo que la situación se transforma en una confrontación entre dos empresarios para obtener los mejores beneficios posibles. Se introduce el juego entre los dos competidores, Antonio y Benito, a través del siguiente árbol:



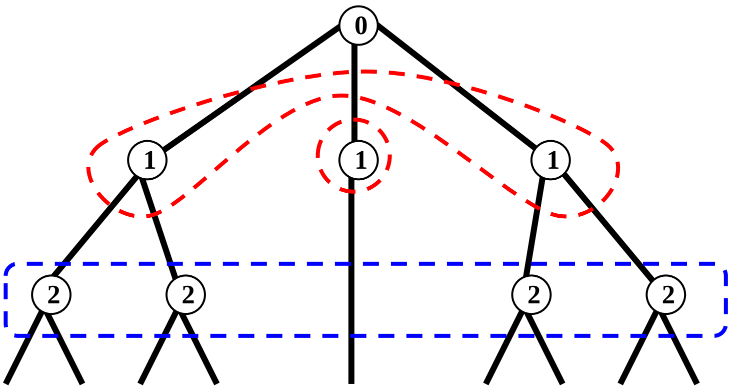
Se ha de ver el árbol como una sucesión de turnos de los jugadores, comprendiendo que la elección de cada empresario estará condicionada por la del otro, siempre que estos actúen de manera racional. Si en la primera parte, se presenta el árbol como un modelo para la toma de decisiones, en esta segunda se pretende verlo como una herramienta de utilidad para reflexionar sobre cualquier situación de conflicto.

En este caso, la primera elección le corresponde a Antonio, que tiene tres acciones posibles, colocar su máquina en A, B o C. Mientras que a Benito le corresponde la segunda elección, no pudiendo poner su máquina en el mismo lugar que Antonio. Las etiquetas de los vértices finales asignan los pagos (en euros) para cada jugador, asociados a la sucesión de acciones que llevan a ellos: el primer valor es el pago a Antonio, y el segundo el pago a Benito.

Antonio intentará buscar su mejor opción sabiendo que Benito elegirá después que él. Para ello, considera cada una de sus acciones y se pone en el lugar de su oponente. Así, si escoge A, supondrá que Benito optará por C, obteniendo unos pagos de (500; 400); si escoge B, supondrá que Benito optará por C, obteniendo (300; 600); y si escoge C, supondrá que Benito optará por B, obteniendo (600; 800). De estos tres resultados posibles, el que más le conviene a Antonio es el último, pues obtiene un beneficio mayor.

Por otro lado, un razonamiento similar por parte de Benito lo llevaría a la misma elección y, además, a ninguno de los dos les convendría cambiarla unilateralmente, es decir, es un punto de equilibrio. Este tipo de razonamiento sobre el árbol de decisión se denomina comúnmente *inducción hacia atrás*.

En general, las reglas de cualquier juego especifican una serie de *elecciones* bien definidas, en la que cada elección es un punto de decisión para un jugador dado de entre un conjunto de alternativas. A la alternativa concreta elegida por un jugador en un punto de decisión dado, la llamaremos *acción*, mientras que la totalidad de las acciones posibles para el mismo en ese punto de decisión constituye la *elección* (Luce y Raffia, 1976). El *árbol de decisión* es la representación extensiva de un juego y, como caso particular de los grafos, está formado por vértices y aristas, de forma que cada vértice representa las situaciones posibles o elecciones, y las aristas indican las acciones disponibles:



Así, en el árbol precedente, el número asociado a cada movimiento indica qué jugador hace la elección, y va desde 1 a n, siendo n el número de jugadores que intervienen en el juego. Por convenio, se admite que un movimiento asignado al jugador 0 es un movimiento aleatorio.

El siguiente paso en la formalización de las reglas de un juego es indicar que cada jugador es consciente de que hace una elección. No se asume qué clase de jugadores se proponen en Teoría de Juegos, sólo lo máximo que pueden saber sin violar las reglas del juego. Claramente, existe la posibilidad de que las reglas del juego no den al jugador ningún conocimiento en cualquier movimiento concreto de todas las elecciones hechas con anterioridad. Puede suceder que un jugador no conozca su dominio de elecciones en el movimiento anterior. En este sentido, definimos como *conjunto de información* al conjunto de vértices de un nivel en el que el jugador que debe elegir (decisor) sabe que está, pero no puede distinguir entre ellos (marcados con líneas discontinuas en el gráfico). En el caso de que los conjuntos de información sean unitarios (formados por un solo vértice) se dice que el juego es de *información completa*, es decir, todo jugador conoce en todo momento su dominio de elecciones.

Por último, el elemento final dado por las reglas del juego es el resultado o pago que aparece al final de cada jugada del juego. En cualquier sistema de reglas dado para un juego hay un conjunto fijo de resultados de los cuales unos específicos son seleccionados para cada jugada. Cada uno de estos puntos finales del árbol es un punto terminal del juego, y caracteriza completamente la jugada que llega a ese punto, por lo que hay sólo una secuencia de elecciones en el árbol que lleva al punto final dado desde un primer movimiento fijado.

Conexión con el currículo de Secundaria

El rápido cambio y desarrollo de nuestra sociedad actual hace que desde la comunidad educativa, en todos sus niveles, se esté buscando una nueva forma de entender la educación más acorde con estas transformaciones. Los avances tecnológicos y científicos producidos en las últimas décadas, obligan a replantearse los actuales contenidos impartidos en los centros educativos. En la actualidad, el ordenador es una herramienta de trabajo indispensable, e Internet se ha convertido en una gigantesca enciclopedia al servicio de cualquiera. Toda esta fuente de información se encuentra al alcance de los alumnos, tanto desde su propio hogar, como desde el centro educativo, donde programas como MEDUSA (del Gobierno de Canarias) han introducido el ordenador e Internet en el aula.

Al final del proceso educativo, cuando se vuelve la vista atrás, nos encontramos con que buena parte de los conocimientos adquiridos carecen de utilidad real. Es aquí, donde sería necesario recordar que el fin principal de la educación no es adquirir conocimientos, sino formar a los alumnos como personas, ciudadanos democráticos, para que puedan desenvolverse dentro de la sociedad. En la formación que han de recibir los alumnos, aprender a razonar y aprender la importancia de la colaboración en situaciones de conflicto son dos de los aprendizajes más relevantes para alcanzar una cultura integral, tanto humanística como científica y tecnológica.

El objetivo principal que nos planteamos con esta experiencia es utilizar conceptos propios de la Teoría de Juegos para desarrollar estos contenidos de carácter formativo. La búsqueda de estrategias óptimas, a través del desarrollo de situaciones en las que los individuos actúan de manera racional, hace que el alumno desarrolle capacidades relacionadas con la construcción del pensamiento estratégico. Creemos que el estudio de situaciones conflictivas permite dotar a los alumnos de herramientas que les capaciten para enfrentar de manera constructiva los conflictos propios, y comprender que el conflicto es un proceso cuya resolución de manera no violenta requiere el desarrollo de estrategias.

El fin de este trabajo es llegar a emplear la Teoría de Juegos para transmitir a los alumnos experiencias de cooperación y convivencia, y su objetivo último es poder aplicar estos resultados a la realidad diaria del centro educativo. Se pretende potenciar la cooperación y la negociación a partir de herramientas de prevención, convenio y mediación.

En el Diseño Curricular Base de Secundaria (1989) se señala que la educación para la convivencia, para la cooperación y la democracia ha de estar presente en toda la enseñanza obligatoria y proporcionar a los alumnos el conocimiento social necesario para desenvolverse como ciudadanos responsables. Para este fin, el currículo introduce los llamados Temas Transversales, que abarcan una serie de contenidos, actitudes y procedimientos, no incluidos en ningún área en concreto, pero de los que participan todas. Aunque las modificaciones sobre las enseñanzas mínimas hechas por el Gobierno en 2001 no incluían los Temas Transversales, la Comunidad Autónoma Canaria los ha mantenido en el currículo dado su carácter cohesionador de las distintas áreas. Entre estos temas, cabe destacar, la *Educación para la paz*, que promueve actuaciones del alumnado en las que se elimine la violencia de cualquier tipo y género, y la *Educación moral y cívica*, que pretende que el alumno cree su propio juicio moral y desarrolle, entre otras, una capacidad de diálogo crítico y creativo que le permita definir acuerdos y normas de convivencia justas y democráticas.

Existe una demanda creciente desde el profesorado sobre actuaciones que lleven a la resolución pacífica de los conflictos que se viven en el aula. Parte de la violencia dominante en nuestra sociedad actual, se traslada a los centros escolares provocando situaciones de gran conflictividad y de inseguridad para toda la comunidad educativa. De ahí que una de las necesidades e inquietudes del Sistema Educativo en estos momentos sea la Educación para la Convivencia. Se trata de un problema que se da en todos los países de nuestro entorno, al que se ha tratado de dar solución desde distintos ámbitos y de maneras muy diferentes. Durante el año escolar 2002-2003, entró en vigor en Francia una nueva ley por la que se puede aplicar penas de hasta seis meses de cárcel por ultrajar a un funcionario de educación (El País, 04.09.2002), a la vez que se rebaja a trece años la edad a la que se puede exigir responsabilidad penal. Pero esta ley, no sólo no resuelve totalmente el problema, sino que además da lugar a una nueva polémica. En primer lugar, no está claro hasta qué punto están considerados estos insultos, ni las distintas connotaciones éticas y morales, así como las diferencias de opinión entre los afectados en la confrontación. Y, en segundo, se entra en el juego de la credibilidad del profesor y de los alumnos, que constituye uno de los mayores problemas en educación, pero agravado con consecuencias penales.

En la mayoría de los casos, la experiencia en nuestro sistema educativo demuestra que las medidas más extremas, es decir, los expedientes disciplinarios y las expulsiones, no resuelven de manera efectiva los conflictos, y lo único que se consigue es aparcarlos momentáneamente. Por ello, cualquier medida disciplinaria debe ir acompañada de tareas para que el alumno reflexione sobre su conducta, como, por ejemplo, la lectura de un libro relacionado con la falta cometida o la elaboración de un trabajo.

Sin embargo, es preferible evitar la adopción de estas medidas extremas, y procurar resolver el conflicto de forma pacífica y conciliadora. Con esta intención surge la figura del mediador en conflictos, cuya misión consiste en ayudar a los implicados a resolver sus diferencias por sí mismos. Además, se intenta implicar a los alumnos en este proceso a través de la creación de una comisión de convivencia en las propias aulas, o la formación de equipos de mediación en los centros, integrado por profesores y alumnos.

La educación debe servir para aprender a asumir el esfuerzo y la responsabilidad para trabajar en equipo de una manera activa. Es necesario educar y dotar de herramientas a docentes, padres y alumnos para afrontar y resolver los conflictos, para que se enfrenten a ellos considerándolos como algo consustancial a la vida misma, y no como un problema. No se trata de proponer soluciones concretas, sino de abrir el debate en torno a diversos escenarios y promover la conciencia colectiva sobre el alcance de los problemas y la viabilidad de las soluciones alternativas, a la vez que invitar a la creatividad, a la innovación y a la participación, desde una convivencia democrática activa.

Nuestra experiencia pretende ejercitar a los alumnos en la toma de decisiones y fomentar el aprendizaje cooperativo, enseñándoles que los conflictos pueden resolverse sin el uso de la violencia, con la mediación y el diálogo, que siempre existe la vía pacífica, la comunicación y el acuerdo, y que la violencia debe ser erradicada. Es importante demostrar que la violencia sólo aparece unos casos excepcionales, que los conflictos se resuelven casi siempre de manera pacífica, pues cada uno de nosotros pone en marcha situaciones de paz casi sin apenas ser consciente de ello.

Descripción del material desarrollado

En esta experiencia, el material se desarrolla a partir de la redacción de cuatro actividades relacionadas con contenidos propios de Teoría de Juegos. Por un lado, se intenta potenciar el pensamiento estratégico y racional a través de la búsqueda de resultados óptimos en situaciones de conflicto puro o de toma de decisiones, como es el caso de las tres primeras actividades. Por otro lado, se pretende proporcionar a los alumnos herramientas para la cooperación y la convivencia que puedan utilizar en la resolución de situaciones reales; en esto se centra la última actividad. De las cuatro actividades redactadas, dos de ellas se han experimentado con alumnos y se han obtenido resultados satisfactorios en muchos aspectos.

En la primera actividad participaron diez alumnos de edades comprendidas entre los 15 y 17 años (4º ESO – 2º Bachillerato), de distintos centros educativos de la provincia de Santa Cruz de Tenerife. Tras una breve introducción histórica, se les presentó la actividad en un material impreso, que se recogió para su análisis posterior, sin anticipar lo que debían realizar. En términos generales, toda explicación se limitó a la aclaración de términos y de determinadas situaciones.

La actividad que se les presentó a los alumnos desarrolla una situación de conflicto puro, llamada *juego de negocio*, entre los dueños de los dos únicos restaurantes de una población, que ya se describió como ejemplo de matriz en la primera parte de este artículo. Los empresarios tratan de maximizar sus beneficios utilizando diversas estrategias consistentes en hacer variaciones en el menú del restaurante. Las estrategias para ambos empresarios son las mismas, y el reparto de beneficios fue dado a través de las entradas de una matriz de pago.

El desarrollo de la actividad se dividió en tres partes. En la primera, se emplea la situación planteada para que los alumnos identifiquen el juego con una elección de estrategias. Además se trata de que los alumnos lleguen a ver y construir por sí mismos las alternativas más beneficiosas para cada empresario en cada momento. En la segunda parte, se introduce el Teorema del Minimax y se calcula el Punto de Silla del juego, comparándolo con los resultados que se habían obtenido en la primera parte. Por último, se presentan nuevas matrices de pago para que los alumnos calculen los Puntos de Silla.

Los alumnos que intervinieron en esta actividad no presentaron grandes dificultades a la hora de trabajar con la matriz de pago en lo que se refiere a la determinación del Punto de Silla a través del Teorema del Mínimax, aunque les costó considerar la matriz como un conjunto de información dinámico. Sin embargo, el concepto de estrategia que desarrollaron está dentro de los márgenes esperados, tanto en estructuración como en construcción.

En la segunda experiencia participaron alumnos del IES "Luis Cobiella Cuevas" de S/C de La Palma: 23 de 1º de Bachillerato de CCSS y 4 de Taller de Matemáticas de 4º de ESO. Como en la actividad anterior, a los alumnos se les presentó la actividad en un material impreso que se recogió para el análisis, sin anticipar lo que debían realizar, limitándose toda explicación a la aclaración de términos y de determinadas situaciones.

En esta actividad, se les presentó a los alumnos una situación de pugna entre dos empresarios que se dedican a la colocación y mantenimiento de máquinas expendedoras de refrescos y dulces, que se describió como ejemplo de representación en árbol en la primera parte de este artículo. Se usaron los árboles como instrumento principal para la toma de decisión, y se dio un enfoque distinto al que se suele dar a este concepto en Secundaria, fomentando de esta forma, el desarrollo del pensamiento estratégico y racional.

La actividad también tiene tres partes bien definidas, diseñadas de manera que los alumnos se fueran introduciendo paulatinamente en los conceptos que se pretendían desarrollar. En la primera parte, se pretendía ver, a través de la toma de decisión de un solo empresario, que los alumnos eran capaces de leer en el árbol e identificar las distintas estrategias y los resultados correspondientes a la elección de cada una de ellas. La segunda parte plantea una situación de conflicto entre los dos empresarios, con la que se intenta que los alumnos sean capaces de analizar toda la información presente en el árbol de forma que lleguen a la solución del juego. En la última parte se presentan árboles en blanco para que los alumnos propongan situaciones análogas a la dada.

Se considera que las dificultades que los alumnos encontraron a la hora de resolver esta actividad no son insalvables, y bastaría con una pequeña instrucción para que fueran capaces de resolver situaciones análogas sin problema. En general, no tuvieron dificultades a la hora de leer las representaciones en árbol, y los razonamientos en sus respuestas están de acuerdo con las consideraciones que se habían hecho a priori.

Uno de los principales objetivos que se pretendían en este trabajo es el desarrollar una serie de actividades que promoviese tanto la construcción del pensamiento estratégico y racional, como la adquisición de herramientas que posibiliten conductas de convivencia y cooperación. En la medida que estas actividades han sido llevadas a cabo, los resultados obtenidos han sido satisfactorios y acordes con las expectativas planteadas. Sin embargo, el hecho de que se trate de un contenido nuevo hace que sea difícil introducirlo como tal, dentro del currículo de Secundaria, pero en nuestra opinión, puede servir como complemento a los actuales, afianzándolos y dándoles puntos de vista distintos en su utilización.

Referencias bibliográficas

COMAP (1999). *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley. Universidad Autónoma de Madrid.

Luce, R. D.; Raffia, H. (1976). *Games and decisions: introduction and critical survey*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

NCTM (1991). *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12*. NCTM Yearbook. USA.

Poundstone, W. (1995). *El Dilema del Prisionero*. Alianza Editorial. Madrid.

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Alianza Universidad. Madrid.

Sicilia, J.; González, C. (2000). La Matemática del conflicto. En A. Martinón (Ed), *Las Matemáticas del siglo XX*. pp. 263-266. Sociedad Canaria Isaac Newton y Nivola, SL. Tenerife.

Sánchez, J. (1994). La Teoría de Juegos. *Boletín SEIO*, vol. 15, 4, 2-6.