ISSN: 1695-6613

MODELO DE COMPETENCIA PARA EL CAMPO CONCEPTUAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA*

Matías Camacho Machín
Universidad de la Laguna

Ramón Depool Rivero
Universidad Politécnica UNEXPO

In memoriam del Profesor Daniel Mujica

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo de competencia que es una adaptación del que aparece en Socas (2001), en el que se consideran algunos aspectos cognitivos relativos a la articulación coherente de diferentes registros de representación (Duval 1993). Este modelo sirve de fundamento para el análisis conceptual de la comprensión de la integral definida y se utilizó para analizar una entrevista realizada a seis estudiantes de Cálculo I de la Universidad Politécnica UNEXPO (Venezuela). Se trata en definitiva de determinar la concepción que tienen los estudiantes tanto del área limitada por una curva como de la integral definida. La entrevista se desarrolló después de llevar a cabo una instrucción que utiliza como material curricular un conjunto de Prácticas de Laboratorio (PL), diseñadas con el PCS (Programa de Cálculo Simbólico) *DERIVE*, en las que se ha incorporado un Programa de Utilidades (PU) diseñado para el aprendizaje de la integral definida. Se analiza la entrevista de tres de los seis estudiantes, lo cual nos permite, comparar nuestro modelo con el de actuación del estudiante y ubicarlo en una categoría, de acuerdo a los criterios preestablecidos.

Abstract

In this work we present a competence model adapted from Socas (2001), in which some aspects related with the coherent articulation of different representation registers are considered (Duval 1993). This model constitutes the basis for the conceptual analysis of the understanding of the definite integral and it was used to analyze an interview carried out on six students of Calculus I from the Polytechnic University UNEXPO (Venezuela). It's definitively to determine not only the conception that the students have of the area limited by a curve but also the definite integral. The interview was developed after carrying out an instruction that uses as curricular material a group of Laboratory Practice (LP) designed with the CAS (Computer Algebra System) *DERIVE*, and we used Utility File (UF) designed for the teaching of definite integral. We present the analysis from an interview to three of the six students, which allows us to compare our

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto I+D de la DGI (MCyT) con referencia BXX2000-0069.

competence model with that of the student's performance and to place the student in a category, according to the preset criteria.

Marco conceptual

El modelo de competencia que construimos se basa principalmente en el utilizado por Socas (2001), quien aborda en su estudio del papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos relativos al pensamiento numérico y algebraico, vía la elaboración de modelos de competencia.

En el análisis de una situación problemática, este modelo de competencia es utilizado como marco de referencia para comparar las actuaciones de un usuario real, de modo que, para cada sujeto, se establece un modelo de actuación.

En este sentido, Socas señala que, **el modelo de competencia**

> *Se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto a sus aspectos conceptuales y fenomenológicos como a sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado (p. 7).*

En cada campo conceptual específico, las expresiones y los conceptos matemáticos tienen un significado intrínseco determinado por las reglas matemáticas que los organizan, de modo que, un ejecutor que controle ese campo ha debido interiorizar tanto el sistema de reglas como sus contenidos semánticos intrínsecos; por tanto, esa persona tiene una competencia matemática específica. La competencia, en estos términos, se refiere a

> *La capacidad que tiene un individuo idealizado para asociar signos y significados que están de acuerdo con los conceptos y reglas que organizan ese campo conceptual (p. 7).*

Se debe tener en cuenta que, aunque se pueda describir el Modelo de Competencia como un sistema de reglas y procesos que se aplican con un cierto orden para relacionar signos, objetos y significados, no es posible hacer lo mismo para describir a priori las actuaciones de un modelo de actuación.

Socas (2001) distingue entre tres modelos de competencia: formal, cognitivo y de enseñanza y señala que:

> *El modelo de competencia formal se caracteriza por los aspectos conceptuales y fenomenológicos de los contenidos matemáticos curriculares implicados en la situación problemática a tratar, es decir, explicita tanto la organización lógico-formal de los objetos implicados (conceptos, relaciones y procedimientos que lo caracterizan) como el conjunto de situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos matemáticos implicados.*
>
> *El modelo de competencia cognitivo retoma los aspectos anteriores (modelo formal), y además se refiere a las funciones cognitivas específicas de los objetos tratados y a los aspectos estructurales del aprendizaje, es decir, simula los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.*
>
> *El modelo de competencia de enseñanza, utiliza igualmente los aspectos anteriores (modelo cognitivo) y se refiere, además, a las acciones, a los procesos de comunicación, a los mediadores, a las situaciones, a los contextos, etc. que se dan en la enseñanza (pp. 11-12).*

En nuestro estudio establecemos un **Modelo de Competencia Cognitivo** como elemento organizador para analizar la comprensión del concepto de Integral Definida por los estudiantes.

Para ello consideraremos, del mismo modo que Socas (2001):

Los estadios de desarrollo cognitivo para los sistemas de representación involucrados en el concepto de Integral Definida.

La teoría de Duval (1993) sobre los registros de representación semiótica y el funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Las dificultades, obstáculos y errores que surgen en el aprendizaje del concepto de Integral Definida.

En el primer componente, que se basa en el desarrollo cognitivo de los sistemas de representación, se distinguen tres estadios: El semiótico, el estructural y el autónomo.

Se considera que un estudiante se encuentra en el **estadio semiótico** si usa los signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él.

Se encuentra en el **estadio estructural** si estructura el sistema nuevo según la organización del antiguo.

Estará en el **estadio autónomo** si utiliza los signos con significados propios, independientemente del sistema anterior.

Estos estadios son incluyentes, es decir, se considera que si un estudiante se encuentra en el estadio estructural, también se encuentra en el semiótico y así sucesivamente.

El segundo componente está relacionado con la propuesta teórica de Duval sobre los registros de representación semióticos y el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Para Duval (1998):

> *…toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa (p. 185)*
>
> *La comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión (p. 186).*

Para una coordinación de los registros de representación semióticos, es fundamental el reconocimiento de los registros, las transformaciones dentro del registro (tratamientos) y la conversión entre diferentes registros. Estas acciones se deben realizar de una manera coordinada, libre de contradicciones.

En nuestra investigación hemos considerado tres registros: El gráfico (G), en el que el estudiante elabora gráficos, tanto los referidos a un sistema de ejes cartesianos como los ilustrativos (idiosincrásicos). El algebraico (A), en el que el estudiante plantea y resuelve integrales definidas. Y, finalmente, el numérico (N), en el que el estudiante calcula de forma aproximada, utilizando fórmulas de Geometría elemental, el valor numérico aproximado que corresponde al área de una región.

El tercer componente se refiere a las dificultades obstáculos y errores (Socas, 1997) en el aprendizaje del concepto de Integral Definida. El análisis de los errores nos ayudará a delimitar cognitivamente los estadios y niveles en los que se mueven los estudiantes y, además, indagar sobre las posibles causas que producen que los estudiantes cometan diferentes tipos de errores.

Teniendo en cuenta lo anterior, nuestro modelo de competencia queda establecido con dos categorías para cada uno de los estadios:

Consideramos que un estudiante se encuentra en el **estadio semiótico**:

En la categoría 1A, si tiene ideas imprecisas sobre la Integral Definida y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

En la categoría 1B, si reconoce los elementos de un registro de representación semiótico en relación con la Integral Definida.

Un estudiante se encuentra en el **estadio estructural**:

En la categoría 2A, si reconoce un registro de representación semiótico y realiza transformaciones (tratamientos) en su interior.

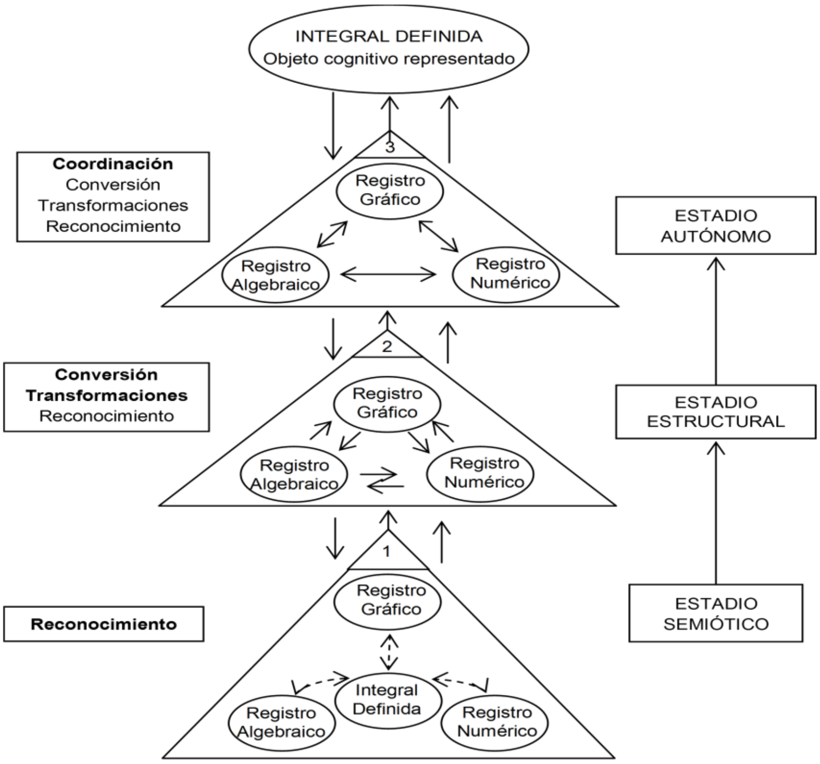
En la categoría 2B, si realiza correctamente actividades de conversión de un registro de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un registro que el estudiante controla y facilita la conversión al otro.

Finalmente, un estudiante se encuentra en el **estadio autónomo**:

En la categoría 3A, si articula dos registros de representación semióticos. Puede tomar cualquiera de ellos para significar correctamente la Integral Definida independientemente del otro.

En la categoría 3B, si articula coherentemente diferentes registros de representación semióticos y ejerce un control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimientos de la Integral Definida como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes de ella.

De esta forma, se podrá describir la competencia cognitiva, de manera esquemática, como sigue:



Esquema 1

En un primer estadio, el semiótico, consideramos que el estudiante es capaz de realizar el reconocimiento de registros: el estudiante los relaciona con la Integral Definida, sin que haya tratamientos dentro de un mismo registro, ni conversión entre ellos. En un segundo estadio, el estructural, el estudiante ha realizado reconocimientos de varios registros, elabora algún registro en el caso que se requiera, y es capaz de hacer tratamientos dentro de un mismo registro y conversión entre ellos. En el tercer estadio, el autónomo, el estudiante ha realizado lo anterior, y, además, realiza la conversión de manera coordinada y libre de contradicciones. Se puede decir que si un estudiante alcanza el estadio autónomo ha logrado comprender, de manera adecuada, el concepto de Integral Definida.

El modelo de competencia descrito es comparado con el modelo de actuación, que se refiere a cómo ejecuta el usuario real, en nuestro caso el estudiante entrevistado, las acciones propias de los procesos de enseñanza/aprendizaje del objeto matemático "Integral Definida".

Metodología

El estudio se realizó con un grupo de 31 estudiantes de nuevo ingreso de un curso regular de Cálculo I, entre octubre de 2001 y marzo de 2002. Se impartió el Programa Oficial de la asignatura Cálculo I, con la variante de que, además de las clases habituales de aula, los estudiantes realizaron Prácticas de Laboratorio (PL) con ordenadores, siguiendo el Módulo Instruccional diseñado por nosotros, para trabajar con *DERIVE*. Las unidades temáticas fueron: Funciones, Límite de Funciones, Derivadas, e Integrales. Conviene tener en cuenta que, en las universidades venezolanas, los tres últimos temas antes referenciados se introducen, por primera vez, en el primer semestre de universidad. Se realizaron ocho PL; la primera, sobre conocimientos generales de uso del software y, las cuatro siguientes, para el estudio de Funciones, Límites y Derivadas, respectivamente. En dichas prácticas utilizaron sencillos programas de utilidades (PU) similares a los expuestos en algunos libros de Cálculo (Edwards y Penney, 1996; Stewart, 1999) así como los comandos de cálculo directo que se incluyen en los diferentes menús del *DERIVE*. El resto de las prácticas fueron elaboradas para el estudio de la Integral Definida, y se basaron principalmente en el uso de un Programa de Utilidades diseñado por nosotros (ver Camacho y Depool, 2000, 2002, 2003a, 2003b, 2003c) mediante el que se pretende que los estudiantes puedan seguir paso a paso el desarrollo del concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado del área de la región limitada por una curva y utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson).

La instrucción se realizó en tres fases que describimos a continuación:

Fase 1: El profesor hace una presentación del tema usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: Los estudiantes realizan por parejas, en un laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional.

Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Al comienzo de la práctica, se utiliza un cañón de proyección para hacer su presentación.

Fase 3: Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Con la finalidad de determinar la competencia de los estudiantes para la construcción del concepto de Integral Definida, se le aplicó a todo el grupo, un cuestionario de conocimientos. Posteriormente se seleccionaron seis estudiantes para realizar una entrevista clínica basada principalmente en el cuestionario.

Estas actividades se desarrollaron en tres escenarios que describiremos más adelante. Las preguntas de ambos instrumentos fueron adaptadas de las utilizadas, entre otros, por Orton (1983), Mundy (1984) y Calvo (1997), en sus respectivas investigaciones.

El cuestionario y la entrevista

Para realizar nuestro análisis, organizamos los problemas utilizados en el cuestionario de conocimientos y en la entrevista, en tres grupos importantes, de acuerdo con las características y formas potenciales de solución:

Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema.

Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico.

Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar los diferentes registros de representación semiótica considerados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico)

De acuerdo con las consideraciones anteriores, tenemos que:

El primer grupo incluye problemas relacionados con el cálculo de áreas en los que en sus enunciados aparecía una representación gráfica de una expresión algebraica dada. El estudiante tenía que analizar e identificar información importante (intersección con los ejes, localización y delimitación precisa de la región, puntos de discontinuidad, etc.) que le permitiera diseñar un plan e identificar un conjunto de estrategias de solución. En todos los problemas de este grupo se pedía explícitamente que el estudiante calculara el área, aunque en algunos casos había que identificarla en la representación o argumentar que no era posible determinarla. Consideramos, como parte de este grupo, una pregunta en la que se pide al estudiante que explique qué entiende por integral definida.

El segundo grupo incluye problemas con enunciados en un contexto o registro algebraico. Un aspecto importante en el proceso de solución de este grupo de problemas es que el estudiante construyera una representación gráfica de los problemas. Así, a partir de esta representación podía precisar los intervalos de integración, identificar las discontinuidades de la función y el dominio en el que era permisible la aplicación de ciertos procedimientos algebraicos.

El tercer grupo involucra problemas en los que el estudiante tenía que mostrar la veracidad o falsedad de ciertas proposiciones. El enunciado de los problemas se daba en el contexto algebraico y genérico. Es decir, en lugar de referirse a una función particular, el enunciado del problema involucraba casos generales, simbolizados por f(x) o g(x). La consideración y análisis de casos particulares que permitieran entender las relaciones entre las proposiciones era una estrategia importante usada por el estudiante al responder a este tipo de problemas. ¿Qué significa, desde el punto de vista gráfico, que f(x) sea mayor que g(x)? ¿Cómo se puede relacionar este hecho con la integral definida de estas funciones en un intervalo dado? Otra estrategia de solución para este tipo de problemas era que el estudiante construyera algún contraejemplo de lo que se afirma en la proposición. Una exigencia fundamental al responder a este tipo de problemas es que el estudiante relacione y maneje directamente las distintas representaciones o ejemplos que el mismo proponga.

El cuestionario fue cumplimentado por los estudiantes en tres escenarios diferentes:

Escenario 1:

Los estudiantes trabajan en los problemas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel e informan por escrito sobre sus planteamientos o soluciones a los problemas.

Escenario 2:

El segundo escenario corresponde al trabajo que muestran los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *DERIVE*; aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que contiene sus soluciones y sus comentarios sobre los problemas.

Escenario 3:

En el tercer y último escenario, los estudiantes seleccionados participan en una entrevista semiestructurada en la que se les cuestiona directamente sobre su manera de resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario.

Conviene señalar que no todas las preguntas se propusieron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los Escenarios 1 y 2 nos sugirió incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionado.

Para distinguir y analizar las acciones de los estudiantes, utilizaremos las siguientes notaciones:

R: Registro

T: Tratamiento (transformación en el interior del registro).

C: Conversión entre registros (transformaciones entre registros).

Para categorizar las acciones establecidas:

Reconocimiento de los elementos de un registro de representación semiótico:

$$R_A, \quad R_G, \quad R_N$$

Transformaciones internas (Tratamiento) en un registro de representación semiótico:

$$T_A, \quad T_G, \quad T_N$$

Elaboración de registro de representación semiótico.

$$E_A, \quad E_G, \quad E_N$$

Conversiones (transformaciones externas) entre representación semióticas.

$$C_{A\to G}, \quad C_{G\to A}, \quad C_{N\to A}$$

Coordinación entre diferentes registros de representación semióticos:

$$C_{A\leftrightarrow G}, \quad C_{G\leftrightarrow A}, \quad C_{N\leftrightarrow A}$$

A continuación mostramos el protocolo de la entrevista y estableceremos las acciones que se espera que realice un estudiante competente en cada una de las preguntas.

Se trata de analizar, en síntesis, si el estudiante:

Considera la integral definida:

En general, en sus diferentes acepciones, es decir, esta puede tener valor positivo, negativo o cero.

En particular,

Como área bajo la curva.

Como resultado de varios procesos de aproximación de áreas: Utilizando figuras elementales como rectángulos, trapecios o trapecios parabólicos (regla de Simpson).

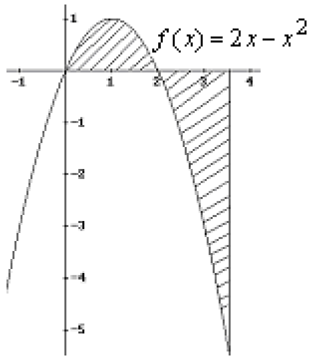
A través de la regla de Barrow.

<u>*Primer grupo de preguntas*</u>

Pregunta 1: ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?

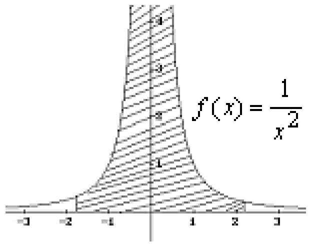
Se pretende investigar los elementos que utiliza el estudiante para expresar en su propio vocabulario lo que entiende por integral definida.

*Pregunta 2***.** Dada la gráfica, calcula el área de la región rayada



Se pretende determinar si el estudiante comprende la forma de obtener, en términos de la integral definida, el área de regiones que se encuentran bajo el eje OX, así como las relaciones que establece con las regiones que están sobre dicho eje.

Pregunta 9. Dada la gráfica de la siguiente función, si es posible, calcula el área de la región rayada; si no es posible, justifica tu respuesta.

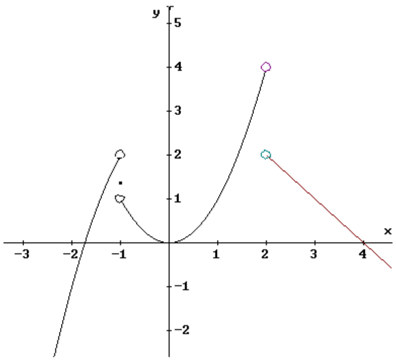


Se pretende analizar lo que responden los estudiantes cuando la región dada tiene área infinita.

Pregunta 10. Dada la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x < -1 \\ 1.36 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x < 2 \\ -x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

cuya representación gráfica es la que sigue



Calcula, cuando sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2, 3]$

Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo $[-2, 3]$. Si no es posible, explicar por qué.

Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2, 3]$. En caso de que no sea posible calcular el área de alguna de las porciones, explica por qué.

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de calcular áreas correspondientes a gráficas de funciones discontinuas mediante el cálculo aproximado o el Teorema Fundamental del Cálculo.

Las posibilidades de actuaciones del estudiante en este primer grupo de preguntas son:

Reconocer los registros de representación gráfico y algebraico, y realizar tratamientos dentro de éstos.

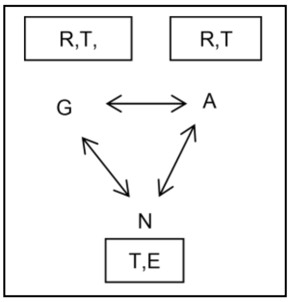
Elaborar registros algebraicos y/o numéricos, y realizar transformaciones (tratamientos) dentro de éstos.

Realizar la conversión coordinada entre los registros de representación.

En este caso concreto, de manera esquemática, las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_G, R_A	E_N, T_G, T_A, T_N, $C_{G\leftrightarrow A}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

De manera resumida, el conjunto de posibilidades de desarrollo de las acciones esperadas se puede reflejar en el siguiente esquema:



Segundo grupo de preguntas

Pregunta 3. Calcula, de la forma que consideres más sencilla, la integral definida:

$$\int_{-3}^{4} |x+1| dx$$

Se pretende analizar:

Si existe transferencia de los conocimientos antiguos a los nuevos.

Si el estudiante comprende el cálculo de la integral definida en términos de cálculo de área de figuras elementales.

Si conoce y trabaja correctamente con algunas propiedades de la integral definida.

Pregunta 4. Indica si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifica tu respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_0^2 (x-1)^{-2} dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Se pretende determinar si el estudiante:

Es capaz de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta.

Interpreta coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada.

Pregunta 7. Calcular el área que forma con el eje OX, la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$

Se pretende que el estudiante:

Use el software para obtener la gráfica de la función, o la obtenga mediante el uso exclusivo de lápiz y papel.

Identifique las regiones donde debe integrar, mediante la obtención de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

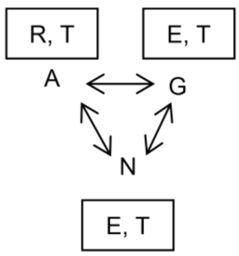
Plantee y calcule las integrales mediante la regla de Barrow. Es posible que el estudiante utilice el PU para obtener las distintas aproximaciones.

Se espera que el estudiante en este segundo grupo de preguntas:

- Elabore los registros de representación gráfico y/o numérico, y realice transformaciones (tratamientos) dentro de dichos registros.
- Reconozca el registro de representación algebraico, y transformaciones (tratamientos) dentro de dicho registro.
- Realice conversión coordinada entre los registros de representación.
- De manera esquemática, las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

De manera esquemática las acciones que se esperan son:



<u>*Tercer grupo de preguntas*</u>

Pregunta 5. Indica si es verdadera o falsa la proposición que sigue. Justifica tu respuesta.

$$Si\ f(x) \geq g(x),\ \text{entonces} \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de entender los términos genéricos en los que se presenta la proposición y si establece relaciones entre el área y la integral definida.

Pregunta 6. Indica si es verdadera o falsa la proposición que sigue. Justifica tu respuesta.

$$Si \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx, \text{ entonces } f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establece relaciones entre el área y la integral definida. Además, si utiliza contraejemplos en su justificación.

En este último grupo de preguntas, se espera que el estudiante:

Reconozca el registro de representación algebraico y realice una transformación dentro de dicho registro (tratamiento).

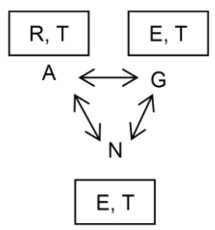
Elabore registros de representación gráfico y/o numérico, y transformaciones dentro de dichos registros (tratamientos). Consideraremos que la elaboración del registro gráfico también implica su reconocimiento implícito.

Realice, lo que hemos denominado, conversión coordinada entre los distintos registros de representación.

De manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{A\leftrightarrow N}$, $C_{N\leftrightarrow G}$

Las acciones esperadas de manera esquemática, son:



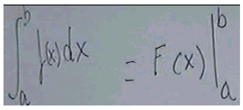
Análisis e interpretación de los resultados

Se desarrollará un análisis individual mediante un estudio de casos, en el que se tienen en cuenta las actuaciones de los estudiantes en cada grupo de preguntas. De esta forma, identificando las distintas acciones que realiza cada estudiante y comparándolas con el Modelo de Competencia, podemos ubicar al estudiante en una de las categorías que aparecen descritas en nuestro módulo de competencia cognitivo. En definitiva, este primer análisis nos permite situar a cada estudiante en un estadio de desarrollo cognitivo basado en los sistemas de representación (semiótico-1; estructural-2; autónomo-3) y en una categoría según el estadio en el que lo situamos (1 A o B; 2 A o B; 3 A o B).

Para ejemplificar el uso de nuestro modelo de competencia, se presentará, únicamente, el análisis de las respuestas tres estudiantes.

El estudiante E1, en el primer grupo de preguntas, asocia la integral definida con el cálculo de la antiderivada. Considera que el cálculo de la integral definida es un proceso algebraico que relaciona la función y su primitiva. Esto se evidencia mediante los comentarios, expresados, por ejemplo, en la pregunta 1:

Investigador (I): Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral definida entre a y b de f(x) por diferencial de x?*



Estudiante (E)*: Esta función está acotada en este intervalo* (señala la expresión derecha de la igualdad); *es continua en un intervalo "a b"* (señala a "b" y "a" escritas en la expresión derecha) *¿Necesito un caso?*

I: *Como creas que alguien te va a entender. Puedes dibujar, puedes usar el ordenador, puedes hacer lo que quieras.*

E: *Esa función está definida en ese intervalo, una Integral Definida en ese intervalo* (señala los límites de integración). *Lo podría hacer en este caso, o sea evaluar esta función* (señala F(x) es la parte derecha de la igualdad) *en "b" y "a", por el teorema fundamental,* escribe *Teorema Fundamental del Cálculo.*

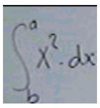
I: *Esa f(x) grande, mayúscula, ¿es la misma que la que está atrás?* (se refiere a la que aparece a ambos lados de la igualdad)

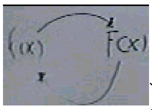
E: *No. Sería su antiderivada*. Escribe *F(b)-F(a)=, sería un valor que pondría aquí* (señala la expresión escrita).

I: *¿Qué significa ser antiderivada?*

E: *Si esa antiderivada la derivamos nos daría la integral. ¿Puedo hacer un ejemplo?*

I*: Sí, claro.*

E: *Si yo tengo la integral*  *entonces al integral esto (señala el integrando) me daría la antederivada, o sea, me daría $x^3/3$; lo que quiere decir que si tengo esta función*

> (dibuja 
>
>) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda*) me da esto* (se refiere a la función de la derecha*), igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda). *Si derivo esto* (señala la expresión $x^3/3$) *me quedaría…*

Escasamente utiliza representaciones gráficas para apoyar sus planteamientos. Tiene dificultades para interpretar gráficas de funciones discontinuas. Ante un problema, en la que la gráfica presenta saltos, aproxima los límites de integración. La identificación de las regiones las realiza en el caso de que se trate de graficas que no presentan saltos.

Cuando tiene que calcular el área de una región que tiene una parte por encima del eje OX y otra por debajo de él, al utilizar aproximación numérica, no hace distinción entre las dos regiones; cuando utiliza integrales, antes de sumar los resultados, le cambia el signo al resultado obtenido (valor negativo) de la parte situada por debajo del eje OX. Es posible que detecte cuándo la integral representa el área. Lo que no está claro es si esto es por el planteamiento de los problemas o si, en realidad, es capaz de diferenciar las distintas acepciones de la integral (valor positivo, negativo o cero) en el contexto de cualquier tipo de problemas.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia puede afirmarse que realiza un reconocimiento de registro gráfico siempre que se trate de una gráfica que no presente saltos. El tratamiento del registro algebraico lo realiza al plantear integrales y resolverlas utilizando la herramienta "Cálculo" de *DERIVE* o aplicando la regla de Barrow.

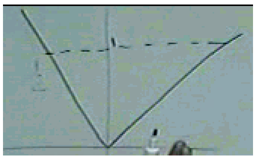
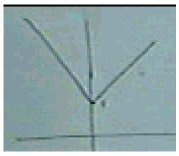
Podemos establecer las acciones del estudiante E1. Reconoce los registros algebraico y gráfico y realiza tratamientos de dichos registros. Lo siguiente representa las acciones realizadas por el estudiante.

$$\boxed{R_A, R_G, T_A, T_G}$$

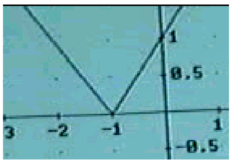
En el segundo grupo de preguntas tiende a utilizar procedimientos algebraicos, sin apoyo gráfico, utilizando integrales y procedimientos análogos a los descritos anteriormente. Al insistirle en la entrevista (problema 3) que utilice conocimientos de Geometría elemental, calcula el área utilizando triángulos, pero no menciona que lo que calcula sea la integral; puede que no relacione área-integral definida-región bajo una curva. Por otra parte, es posible que crea que la aplicación de este tipo de procedimientos no es aceptable, obstaculizando con ello la transferencia de conocimientos antiguos a los nuevos. El extracto de la entrevista, en la pregunta 3, pone de manifiesto la actuación a la que nos referimos:

I: *En la pregunta: Calcula la integral entre -3 y 4 de la función valor absoluto de x más 1 por diferencial de x ¿Podrías calcularla gráficamente?*

…

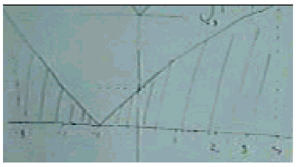



E: Dibuja una gráfica. *Pero si fuera x más 1 lo desplazo una unidad hacia arriba* (dibuja).
I: *Si eso fuera cierto, el valor de* $x=-1$ *¿Cuánto sería?*
E: Escribe en la pizarra $|x+1|$ y se queda unos segundos observando la segunda gráfica y la expresión.
I: *Puedes usar la computadora*
E: Escribe en *DERIVE* $F(x) := |x+1|$ representa gráficamente la función, borra la gráfica que había dibujado en la pizarra y escribe

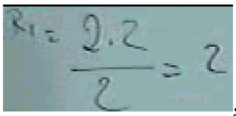


$$\begin{array}{l} y=|x+1| \\ x=-1 \\ y=0 \end{array}$$

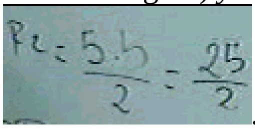
y dice: *Estaba confundido, no era que se desplaza hacia arriba, sino hacia la izquierda* (dibuja)
I: *¿Qué te pide el problema?*
E: *Calcular la integral*, escribe $\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx$, raya la región en la gráfica

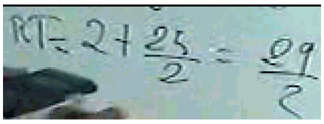



I: *¿Hay una manera fácil de hacerlo? ¿Qué es lo que tienes que calcular?*
E*: La Integral Definida.*
I*: Y esas rayas ¿Qué significa?*
E*: Como mi región.*
I*: ¿Tú no ves como dos triángulos?*
E*: Sí. Sería por área.*
E: *Sí. Base por altura sobre dos. Su base* (señala el eje OX en el triángulo de la izquierda*) y la altura* (señala el segmento vertical en el triángulo de la izquierda).
I: *¿Crees que sería igual de válido si lo resolvieras así? No que te dé el mismo resultado.*
E*: Se supone que no.*
I: *¿No te da el mismo resultado? Prueba a ver.*

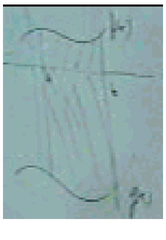
E: *Base, que sería tres menos uno, que sería dos, por la altura, en este caso, que sería dos*, escribe 

, y aquí (señala el triángulo de la derecha) *me quedaría*

cinco (señala el eje *OX* en el triángulo) *y aquí* (señala el 4 en el eje *OX*) *sería 5* (señala el integrando), escribe 

. Si calculo todo 

Cuando se le plantea el cálculo del área y se le proporciona la expresión algebraica (pregunta 7) y no se indica explícitamente el intervalo de integración, su reacción es aplicar un cálculo algebraico. Únicamente cuando representa las gráficas usando *DERIVE* logra establecer el procedimiento adecuado de cálculo del área. De nuevo se distingue una tendencia al uso de procedimientos algebraicos, en el que la integral es un proceso de aplicación de una serie de pasos, sin detenerse a pensar en el significado de los resultados que va obteniendo. Entre las respuestas del estudiante a la entrevista que evidencia esta forma de resolución se tiene que:

> E*: Aquí dice que f(x) es mayor o igual que g(x)* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *podría ser así* (dibuja), *ésta es f(x) y ésta g(x)* (señala las curvas respectivas), *acotadas entre "a" y "b", entonces f(x) es todo esto* (señala la región bajo la curva de f) *es mayor que g(x), que es este pedacito* (señala la región bajo la curva de g)*, se dice que f(x) es mayor que g(x). Ahí, como estoy diciendo que la función f(x) es mayor que g(x), entonces la integral de f(x) tiene que ser mayor que la de g(x)* (señala la primera proposición, problema 5). *En cambio aquí* (señala la segunda proposición, problema 6) *está al revés, puedo conseguir un caso* (dibuja), *yo puedo tener aquí este caso, en esta parte aquí* (se refiere a la región rayada) *f(x) es mayor que g(x) y la integral* $\int_a^c f(x) \geq \int_a^c g(x)$ *; también puedo ver en esta parte aquí puede ser lo contrario, puede ser que g(x) sea mayor que f(x)* (señala la región entre "c" y "b"); *entonces nosotros no sabemos exactamente si en toda la función f(x) será mayor que g(x). O sea aquí yo sé* (se señala la hipótesis de la primera proposición, problema 5) *antes de evaluar que f(x) es mayor que g(x), estoy partiendo de este caso, estoy partiendo que mi función es mayor que la otra y yo puedo llegar a decir entonces que la integral de la función es mayor a la de la otra integral* (señala la tesis en primera proposición, problema 5*). Pero aquí me dicen* (señala la hipótesis de la segunda proposición, problema 6) *que esta integral es mayor que esta integral y de ahí parto, puedo decir que esta función es mayor que ésta* (señala la tesis en la segunda proposición, problema 6); *pero no sé exactamente si en toda mi función f(x) va ser mayor que g(x)* (señala la hipótesis de segunda proposición, problema 6).
>
> I: *Vamos con esta* (señala la primera proposición, problema 5). Dibuja 
> *¿Se sigue cumpliendo?*
> E: Raya las regiones. 

I: *¿Quién es la integral entre a y b de f(x)?*
E: *Es ésta* (señala la región sobre el eje *OX*)
I: *¿Quién es la integral entre a y b de g(x)?*
E*: Es ésta* (señala la región bajo el eje *OX*).
I*: ¿Entonces que pasa con ese mayor o igual?*
E*: Entonces sería más grande* (señala la región de g).
I*: ¿Entonces sería verdadero o sería falso?*
E: Silencio.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones que proponemos en el modelo de competencia, se observa que dicho estudiante reconoce los registros algebraicos (algunas veces por insistencia del entrevistador) y realiza tratamientos en tales registros. El planteamiento de representaciones gráficas casi no esta presente, salvo que se le insista en su uso.

Las acciones observadas en el estudiante E1 son:

$\boxed{R_A,\ T_A}$

En el tercer grupo de preguntas (5 y 6), al plantearle proposiciones generales, ilustra la relación de la hipótesis y la tesis en cada una con ejemplos gráficos y con ejemplos de funciones particulares. No menciona en sus comentarios el área; puede que no establezca relaciones entre el área y la integral. Elabora y realiza un correcto tratamiento de los registros gráficos (en la entrevista), que utiliza para ilustrar la veracidad de la primera proposición y la falsedad de la segunda.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones que tipifican el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas el estudiante elabora y realiza un tratamiento correcto del registro gráfico. Esto resulta sorprendente en virtud de su mayor tendencia al trabajo algebraico.

Sus acciones en este grupo de preguntas son:

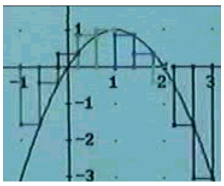
$\boxed{R_A,\ E_G,\ T_G}$

El uso de *DERIVE* se limita al cálculo de integrales aplicando la herramienta “Calculo” y la representación de la gráfica de una función. No hace referencias al uso del Programa de Utilidades, ni existen elementos que hagan pensar que considere su aplicación.

De lo anteriormente expresado y considerando que el estudiante E1 realiza el reconocimiento de un tipo de registro, sea el algebraico o el gráfico, realiza cierto tratamiento en cada uno y la relación que establece entre ambos no se puede considerar como una conversión coordinada, podemos ubicarlo según el modelo de competencia en la categoría 2A del estadio estructural.

El estudiante E4, en relación con el primer grupo de preguntas se observa que asocia la integral definida con el cálculo aproximado del área de una región, mediante el uso de cálculo numérico y representaciones gráficas.

Ante el problema en el que se le proporciona una gráfica de una función continua, inmediatamente lo asocia con el uso de los rectángulos y la aproximación numérica, siguiendo un procedimiento similar al implementado en las Prácticas de Laboratorio, en las que manipuló el PU. En el problema 2, procede como se muestra a continuación

> E: (Abre el archivo que contiene el Programa de Utilidades referente al método gráfico, escoge la sentencia RECT_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) que sirve para representar rectángulos extremos izquierdos, sustituye “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, comete el error de no escribir la expresión algebraica de la función y, por tanto, no pudo obtener la matriz de valores necesaria para obtener los rectángulos. Copia el Programa de Utilidades y lo pega en la ventana en donde tenía escrita la función F(x):=2x-x^2, marca la sentencia RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a,b,n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10 y obtiene una matriz que no logra representar los rectángulos porque la función está antes del Programa de Utilidades).
> I*: No has definido la función.*
> E*: Entonces la defino esta función (se refiere a F(x):=2x-x^2) y me voy acá* (se refiere al final del Programa de Utilidades, donde copia la expresión de la función) selecciona la sentencia RECT_EXTREMO_DERECHO(a,b,n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, calcula la matriz y representa los rectángulos. *Ésta es el área tomando el extremo derecho de este intervalo* (se refiere al intervalo [-1,3]), *por allí se traza el rectángulo, pero hay que establecer un “delta de x”.*
>
> 
>
> I*: De todas maneras observa que ahí estás trabajando desde -1 a 3, pero allí no* (se refiere a la pregunta 2, cuyo intervalo es de 0 a 3); *queremos el área rayada desde 0 hasta 3. Yo quiero que me calcules el área de esa región rayada.*
> E*: ¿Desde 0 hasta 3?*
> I*: Sí.*

E*: Lo puedo hacer por el método numérico también.* (Abre el archivo del Programa de Utilidades referente al método numérico, copia las sentencias en ventana donde tiene el resto del programa y donde aparece definida la función; copia la función al final del programa).
I*: ¿Qué es lo que estás haciendo?*
E: *Para calcularlo numéricamente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n)). *Lo haré por rectángulos extremo derecho, tomo aquí la sentencia, sustituyo "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da* -0.495 *¿Y por qué da el área negativa?*
I: *Eso pregunto yo ¿Por qué te da negativo?*
E: (Selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da 0.0225). *Da diferente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) y sustituye los valores de "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da 0.405).

Si la gráfica de la función presenta saltos, utiliza integrales, en las que considera como límites de integración los valores de las abscisas en los puntos de discontinuidad. Se observa que realiza mejores tratamientos de los registros numéricos y gráficos que en los algebraicos.

Ante el problema en el que la región se encuentra bajo el eje *OX* (pregunta 2) reconoce que, a pesar de que el valor que obtiene es negativo, se le debe cambiar de signo cuando se trata del área de la región bajo el eje *OX*.

Comparando la actuación del estudiante E4 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas el tratamiento que realiza del registro gráfico y numérico está condicionado por la instrucción recibida. El uso de la integral definida, resuelta por la regla de Barrow, es utilizado como método alternativo. Se observa que realiza conversiones entre los registros gráfico y numérico.

Sus actuaciones se representan en la siguiente tabla. Además del reconocimiento de los registros algebraico y gráfico y del tratamiento de los registros gráfico y numérico, aparece la conversión entre el registro gráfico y el numérico.

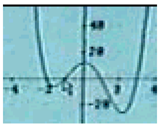
R_A, R_G, T_G, T_N, $C_{G\rightarrow N}$

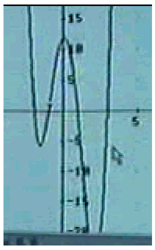
En el segundo grupo de preguntas, cuando intenta plantear un procedimiento algebraico, por ejemplo en la pregunta 3, no logra interpretar el problema. En el momento que representa gráficamente la función, procede como en el grupo de preguntas anteriores, dibuja rectángulos o trapecios, utiliza el PU (escenario 3) y calcula el área aproximada.

En la pregunta 7 representa gráficamente la función en el PCS y aplica el PU. El uso del PU, de alguna manera, sustituye el procedimiento aplicado por los estudiantes precedentes, que utilizaron triángulos y transfirieron conocimientos antiguos a los nuevos. Se muestra a continuación parte de los argumentos utilizados por el estudiante en esta pregunta

I: *Ahora, calcula el área que forma con el eje OX la función, escribe* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$.

E: (Escribe en *DERIVE* la expresión f(x):=2x^4-2x^3-14x^2+2x+12 y representa gráficamente). *Sería aquí, aquí y este* pedazo (indica con el cursor las tres regiones). (Copia la expresión $2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ a parte).





I: *¿Para qué estás haciendo eso?*

E*: Para encontrar los cortes exactos con el eje OX.*

E*:* (Calcula con *DERIVE* las raíces) *Corta al eje OX en 3, -2, -1 y 1. Corta aquí en 3, en 1, en -1 y en -2* (señala en la gráfica los números en el eje *OX*). *Usted me dice que consiga el área que forma con el eje OX* (indica con el cursor la curva), *entonces voy a estudiar desde -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (señala la regiones en la gráfica). (Empieza a escribir los intervalos en *DERIVE*).

I: *¿Qué haces?*

E*: Voy a poner todo en paréntesis para trabajar más fácil con el Programa de Utilidades. De -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (escribe [-2,-1], [-1,1], [1,3]) (abre el archivo del Programa de Utilidades, método numérico).

I*: ¿No tienes una manera más rápida de hacer el problema que yo te presento?*

E: *Una manera más rápida. La saco rapidito*. (Copia el programa y lo pega en la ventana donde tiene la función, copia la función y la pega al final del programa. Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por -2, “b” por -1 y “n” por 5 y le da -3.61344; selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 1 y “n” por 5 y obtiene 15.73632; en esta sentencia sustituye los valores de “a” por 1, “b” por 3 y “n" por 5 y le da -33.22368; escribe en *DERIVE* #34: At=-A1+A2-A3 luego hace los cálculos —3.61344 + 15.73632 - -33.22368 52.57344) *Esta es el área.*

Se observa, además, que el uso casi exclusivo del PU, por parte del estudiante E4, aparentemente le dificulta concebir el cálculo de la integral definida en términos del área.

Comparando la actuación del estudiante E4 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, mencionamos que los tratamientos que realiza de los registros gráficos y numéricos están condicionados por el uso del PU. Consideramos, como en el anterior grupo de preguntas, que realiza una conversión entre los registros gráfico y numérico. El tratamiento del registro algebraico es percibido como un mecanismo alternativo, que en lo posible prefiere no implementar.

Las acciones son como sigue:

$$\boxed{R_A, R_G, T_G, T_N, C_{G\to N}}$$

En el tercer grupo de preguntas se observa que tiene dificultades al tratar de interpretar las proposiciones generales. Puede que el hecho de no tener funciones definidas que pueda utilizar para el PU le produzca un obstáculo a la hora de argumentar la veracidad o falsedad de las proposiciones. En el escenario 1 consideró funciones particulares, no representa gráficamente y utiliza integrales. Esto resulta un tanto contradictorio por su inclinación a lo gráfico-numérico. El extracto de su respuesta a la pregunta 5, del cuestionario, así lo muestra:

Es Verdadero ya que si $f(x) \geq g(x)$ entonces la integral definida de a hasta b de $f(x)\,dx \geq$ que la integral definida desde a hasta b de $g(x)\,dx$. (Teorema de Integral Definidas)

Supongamos que $f(x) = x^3$. y $g(x) = x^2$: entonces

$x^3 \geq x^2$ Las dos en el intervalo $[1, 3]$.

$$\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx \Rightarrow \int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

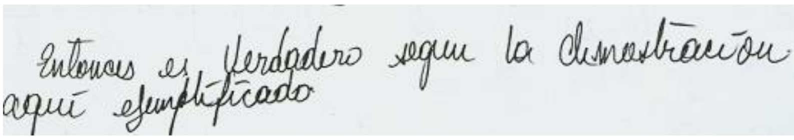
$$\int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

$$\frac{x^4}{4} \geq \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} \geq \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{26}{3}$$

$$20 \geq \frac{26}{3}$$


Entonces es verdadero segun la demostración aquí ejemplificado

Su actuación esta condicionada por la ausencia de funciones definidas. Los comentarios que realiza en la entrevista no son suficientes para considerarlos como un buen tratamiento del registro gráfico que elabora.

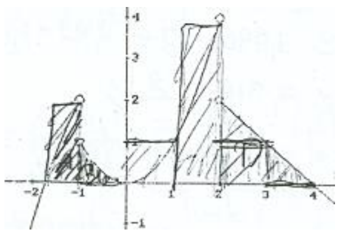
Debido a que fue capaz de reconocer debidamente los registros algebraicos dados, es posible que no pudiese realizar las acciones previstas en el modelo de competencia para este grupo de preguntas

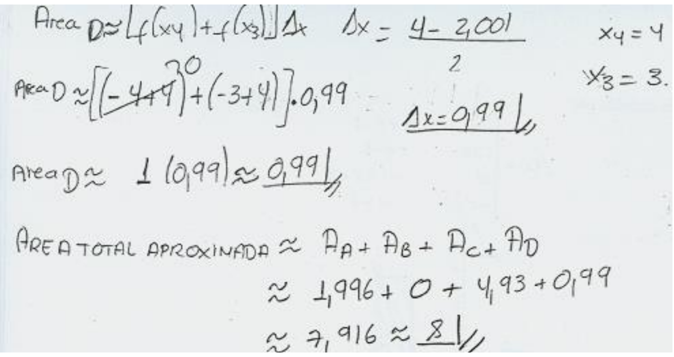
En la actuación del estudiante E4, se observa que tiene dificultades para realizar tratamientos en los registros algebraicos. Sin embargo, al trabajar con registros gráficos realiza tratamientos en ellos y es capaz de hacer conversión al registro numérico.

Teniendo en cuenta el análisis de las actuaciones del estudiante en los tres grupos de preguntas, lo ubicamos en la categoría 2B del estadio estructural.

El estudiante E6, en el primer grupo de preguntas asocia la integral definida al cálculo del área bajo una curva.

El tratamiento que realiza de los registros gráficos en las preguntas 2 y 9, se asemeja a los procedimientos seguidos en las Prácticas de Laboratorio, en cuanto a la construcción de rectángulos que aproximan la región bajo la curva. Se muestra la respuesta dada por el estudiante a la pregunta 9, en el cuestionario:





$$\text{Area } D \approx [f(x_4)+f(x_3)]\Delta x \qquad \Delta x = \frac{4-2{,}001}{2} \qquad x_4 = 4$$

$$\text{Area } D \approx [(\overset{0}{\cancel{-4+4}}) + (-3+4)] \cdot 0{,}99 \qquad \underline{\Delta x = 0{,}99} \qquad x_3 = 3.$$

$$\text{Area } D \approx 1\,(0{,}99) \approx \underline{0{,}99}$$

$$\text{AREA TOTAL APROXIMADA} \approx A_A + A_B + A_C + A_D$$

$$\approx 1{,}996 + 0 + 4{,}93 + 0{,}99$$

$$\approx 7{,}916 \approx \underline{8}$$

En la pregunta 2, escenario 1, utiliza la aproximación numérica para estimar el área de la región, identifica cada región y reconoce la necesidad de cambio de signo del resultado del valor obtenido para la región bajo el eje OX. De sus comentarios se deduce que al proporcionarle la representación gráfica, la asocia con la aplicación de la aproximación numérica.

Comparando la actuación del estudiante E6 con las acciones de usuario ideal propuestas en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas, en general, realiza un reconocimiento de los registros, un tratamiento de los gráficos y su conversión al registro numérico. En el tratamiento de los registros se observa la influencia de la instrucción recibida.

Sus actuaciones se expresan de la forma siguiente:

$$\boxed{R_A,\ R_G,\ T_A,\ T_G,\ C_{G\rightarrow N}}$$

En el segundo grupo de preguntas, por ejemplo, en la pregunta 3, el estudiante, calcula la integral definida definiendo la función valor absoluto y utilizando integrales; los cálculos los realiza mediante la aplicación de la regla de Barrow. El estudiante expresa que el hecho de se le haya propuesto una integral lo induce a resolverla sin hacer uso de la gráfica.

Textualmente dice:

> E:…*cómo le digo, me dan mi integral, lo primero que yo me enfoco, integral, me dan el área, si me hubiese dado puesto la gráfica, lo más lógico me enfoco en mi gráfica, me están dando la integral, entonces me enfoco en ella, ¿entiende?, en lo primero que me den me enfoco, si me hubiesen dado la gráfica* (señala la gráfica) *lo hago de esta manera* (se refiere al procedimiento con triángulos) *entonces aquí* (señala la integral originaria) *digo yo, el profesor me está hablando de integral, me voy por aquí* (se refiere a la integral). *Como le dije anteriormente, usted me preguntó que por qué lo hice por los rectángulos, o sea, veo mi gráfica, por ahí, me digo, lo voy a sacar por ahí, o sea el*

primer enfoque que yo le do; si ahora yo veo que, o sea no me costó, o sea yo lo saqué por aquí (señala la definición de valor absoluto) *por las propiedades de valor absoluto, no me costó y lo hice, se me facilitó por ahí, o sea el primer enfoque que yo tengo.*

Al solicitarle que resuelva el problema 3 de otra manera, representa gráficamente la función y delimita la región con triángulos. En el problema 7, se observa que usar el PCS le provoca dificultades conceptuales y no logra interpretar el problema, hasta tal punto que confunde la integral definida con la primitiva de una función. Por la manera de resolver los problemas, es posible que representando gráficamente la función lograra calcular el área.

La actuación del estudiante E6 en este grupo de preguntas evidencia cierto condicionamiento por la forma en que están planteados los problemas. Al plantearle un registro algebraico $\left(\int_a^b f\right)$ no reflexiona sobre el signo de la integral definida, continúa el proceso hasta el final, cuando debe identificar área e integral definida.

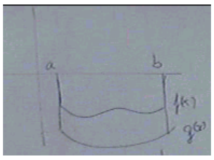
Comparando la actuación del estudiante E6 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas reconoce y realiza tratamientos de los registros algebraicos, elabora registros gráficos y realiza un tratamiento en estos registros, y la conversión entre los registros algebraico y gráfico.

En cuanto a sus acciones se tiene que

$$\boxed{R_A,\ R_G,\ T_A,\ T_G,\ C_{A\to G}}$$

En el último grupo de preguntas, la idea que tiene del área asociada a la integral definida le impide interpretar situaciones que involucran gráficas de funciones dibujadas bajo el eje OX. Sin embargo cuando las curvas están representadas sobre el eje OX logra la interpretación de las proposiciones. El siguiente extracto de la entrevista en la pregunta 5, muestra esta interpretación:

I: *¿Tú podrías representar gráficamente qué se entiende por la parte de arriba, con un ejemplo?* (se refiere a la primera proposición, problema 5).
E: *¿Ésta?* (señala la primera proposición, problema 5) *¿Con gráfico?*
I*: ¿Cómo quieras?*
E*: ¡Bueno! Llamemos a esta parábola f(x), la región de ella, llamemos a g(x) otra parábola más pequeña, más abierta, así la entiendo yo. Entonces la integral de f(x) es mayor que la de g(x)* (observa la tesis en la primera proposición, problema 5).
I*: Y si ahora tenemos esta gráfica y ésta es f(x) y ésta g(x)* (el entrevistador dibuja las curvas) *¿se seguirá cumpliendo la propiedad?*



E*: ¿Tomando los negativos? O sea, ¿Bajo el eje OX?*
I*: Ahí ¿f(x) será mayor que g(x)?*

E*: ¡Aja!, aquí lo que me pone en duda es esta componente de la x, me daría la imagen negativa del área, pero yo la pongo en valor absoluto y me da un área positiva, ésta área de g(x) (señala la región de g) es mayor que ésta área (señala la región de f). Me está diciendo que f(x) es ésta, hasta aquí llega f(x).*

La actuación del estudiante nos permite establecer que, en este grupo de preguntas, se limita al tratamiento de registros gráficos de funciones positivas, con lo que logra interpretar adecuadamente las proposiciones. Se puede decir que en estas condiciones realiza la conversión entre los registros algebraico y gráfico.

Al considerar las acciones se tiene que:

$$\boxed{R_A, R_G, T_A, T_G, C_{A\rightarrow G}}$$

De lo anteriormente expuesto y tomando en cuenta que el estudiante E6 realiza tratamientos en los registros gráficos y numéricos, y conversiones entre ellos, hemos optado por ubicarlo, según el modelo de competencia, en la categoría 2B del estadio estructural.

Conclusiones

Del análisis realizado en todo nuestro estudio podemos afirmar que:

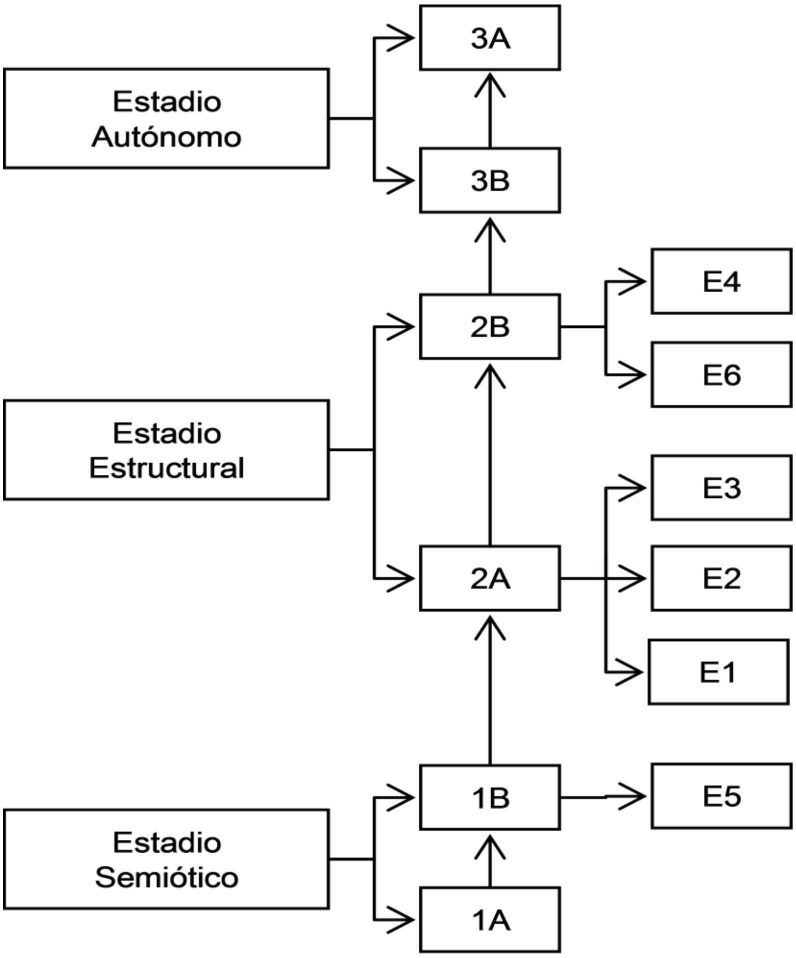
La mayoría de los estudiantes entrevistados (5 de los 6 estudiantes entrevistados) se encuentra en el estadio estructural, dado que son capaces de utilizar los sistemas de representación asociados al concepto de integral definida estructurándolo según la organización del concepto de área de figuras planas conocido por ellos con anterioridad, es decir, el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo.

Se concluye de nuestro análisis, además, que dos estudiantes (E4 y E6) se encuentran en la categoría 2B de este estadio dado que, en general, realizan de manera aceptable el reconocimiento y el tratamiento dentro del propio registro de al menos dos registros de representación semiótica (numérico, gráfico o algebraico) y son capaces de realizar la conversión de un registro de representación semiótico a otro en relación con la integral definida; en estas actividades de conversión se controla un registro y se facilita la conversión al otro.

A tres estudiantes (E1, E2 y E3) los hemos situado en la categoría 2A dado que, en general, reconocen al menos un registro de representación semiótico y son capaces de realizar transformaciones (tratamientos) dentro de dicho registro.

Podemos considerar que solamente uno de los estudiantes entrevistados se encuentra en el estadio semiótico, dado que el significado que asocia a la integral definida está demasiado ligado al concepto de área de figuras elementales. A este estudiante lo hemos situado en la categoría 1B es el E5, dado que únicamente es capaz de reconocer uno de los registros de representación semióticos. Esto es, reconoce ligeramente el registro algebraico, utiliza simplemente el registro gráfico como referente, sin que realice en él tratamientos dentro del propio registro ni conversión entre ambos.

En el siguiente esquema se muestra la ubicación de los seis estudiantes, de acuerdo con nuestro Modelo de Competencia:



Esquema 2

Finalmente, podemos afirmar que el Modelo de Competencia que hemos elaborado para el estudio de la comprensión del concepto de Integral Definida, resulta ser un instrumento útil, pues nos permitió ubicar a cada estudiante en un estadio de desarrollo cognitivo y en una categoría. Hemos podido detectar algunas de las dificultades y errores que encuentran los estudiantes para poder alcanzar el estadio autónomo. Debemos señalar que el hecho de que el estudiante no se encuentre en el estadio autónomo, no significará que no haya comprendido el objeto matemático Integral Definida, sino que no consigue una comprensión plena del concepto, para lo que necesitará superar las deficiencias observadas.

Consideramos que, en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se debe complementar el Modelo de Competencia Cognitivo con los aspectos teóricos específicos del empleo de los Programas de Cálculo Simbólico.

Creemos además que sería interesante desarrollar un estudio global que caracterice la actuación de cada estudiante con el objeto de establecer perfiles de comportamientos a la hora de resolver las tareas propuestas.

Referencias

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales*. Tesis de Maestría (sin publicar).

Camacho, M.; Depool, R. (2000). Programa de Utilidades para la Enseñanza del Concepto de Integral Definida para futuros Ingenieros. Ejemplos de Aplicación. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 4(16), 193-200.

Camacho, M.; Depool, R. (2002). El concepto de Integral Definida y su relación con el concepto de área limitada por una curva. Análisis de una experiencia piloto. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV*, 79-132.

Camacho, M.; Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*. *Educación Matemática.* 15 (3), 119-140.

Camacho, M.; Depool, R. (2003b). La Integral Definida. Una propuesta de enseñanza utilizando el *DERIVE*. *Reflexiones sobre la enseñanza del Precálculo y el Cálculo*, (aceptado para su publicación).

Camacho, M.; Depool, R. (2003c). Using *DERIVE* to understand the concept of definite integral. *Journal for Mathematics Teaching and Learning.* 1-16. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.

Edward, C.; Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.

Mundy, J., (1984), Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A.; Low, B.; Kilpatrick, J., (Eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education.* Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, 170-172, Shell Center. Nottingham.

Orton, A. (1983). Student's understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, pp. 125-154. En L. Rico et al., *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori. Barcelona.

Socas, M. (2001). Investigación Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un Estudio en relación con el Lenguaje Algebraico. Universidad de La Laguna, (sin publicar).

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Transcendentes tempranas.* International Thompson Publishing. México.