ISSN: 1695-6613

ESTUDIO DE ALGUNAS SITUACIONES SOBRE FIGURAS PLANAS EQUIVALENTES E ISOPERIMÉTRICAS MEDIANTE EL USO DE "CABRI GEÓMÈTRE II"

Agustín Morales González
María Dolores Moreno Martel

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Es bien conocida la tendencia de muchos estudiantes a confundir los conceptos de área y perímetro de figuras planas. Castelnuovo (1975) defiende que la adquisición del concepto de área debe llevarse a cabo mediante la confrontación con el de perímetro. Para ello propone actividades de Geometría Dinámica, realizadas con materiales diversos, que permiten considerar la variación del área de una superficie cuando ésta cambia de forma mientras el perímetro se mantiene constante. La autora defiende la idea según la cual es el cambio de superficie, su transformación, lo que atrae la mirada y el pensamiento del estudiante, a la vez que le hace intuir el concepto de área.

En la actualidad podemos servirnos de un entorno de Geometría Dinámica como es el Cabri Géomètre II para estudiar con nuestros alumnos de Magisterio de segundo curso de Educación Primaria algunas situaciones referidas a figuras planas, tanto equivalentes como isoperimétricas, para profundizar en las ideas expuestas por la autora citada.

Abstract

The tendency of many students to confuse the concepts of area and perimeter of plane figures is well known. Castelnuovo (1975) defends that the acquisition of the concept of area must be carried out by means of the confrontation with that of the perimeter. To do that, she proposes some activities of Dynamic Geometry, to be made with different material, that allow us to consider the variation of the area of a surface when its shape changes while its perimeter stays constant. The author defends the idea that it is the change of surface, its transformation, that attracts the glance and the thought of the student and what makes him to intuit the concept of area.

At present we can use a type of Dynamic Geometry Software as can be "Cabri Géomètre II" to study with our students of Teaching Training some situations referring to plane figures, as equivalent as isoperimetric, with the aim to put emphasis on the ideas exposed by the mentioned author.

Introducción

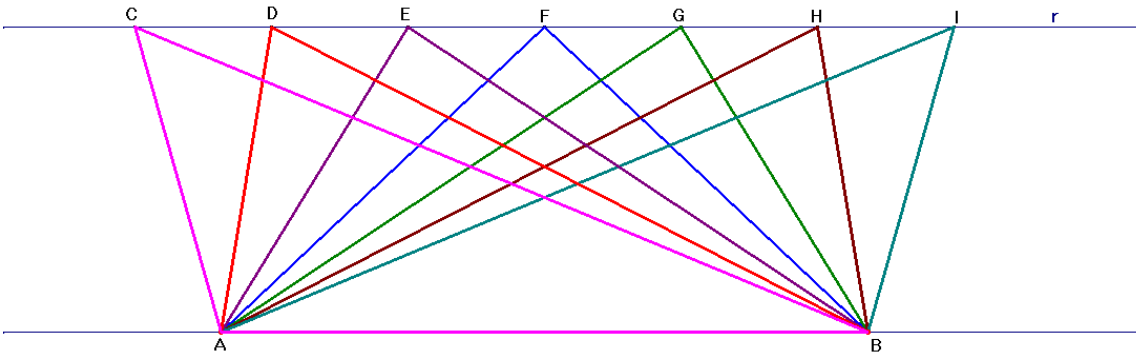
Dado un triángulo ABC ¿es posible encontrar otros triángulos, no congruentes con él, que tengan la misma área y el mismo perímetro que los de éste?

La respuesta a esta pregunta no nos parecía evidente, pues si bien éramos conscientes de la existencia de una infinidad de triángulos equivalentes a un triángulo dado y, asimismo, de la existencia de un número infinito de triángulos equivalentes a uno dado, no nos habíamos planteado el problema en los términos arriba indicados.

Por otra parte, es claro que las situaciones expuestas se prestan a ser estudiadas mediante la utilización de un entorno de Geometría Dinámica, en nuestro caso Cabri Géomètre II, dado que suponen la idea de variación continua, que consideramos resulta altamente formativo para nuestros alumnos de segundo curso de Educación Primaria de la F.F.P. de Las Palmas.

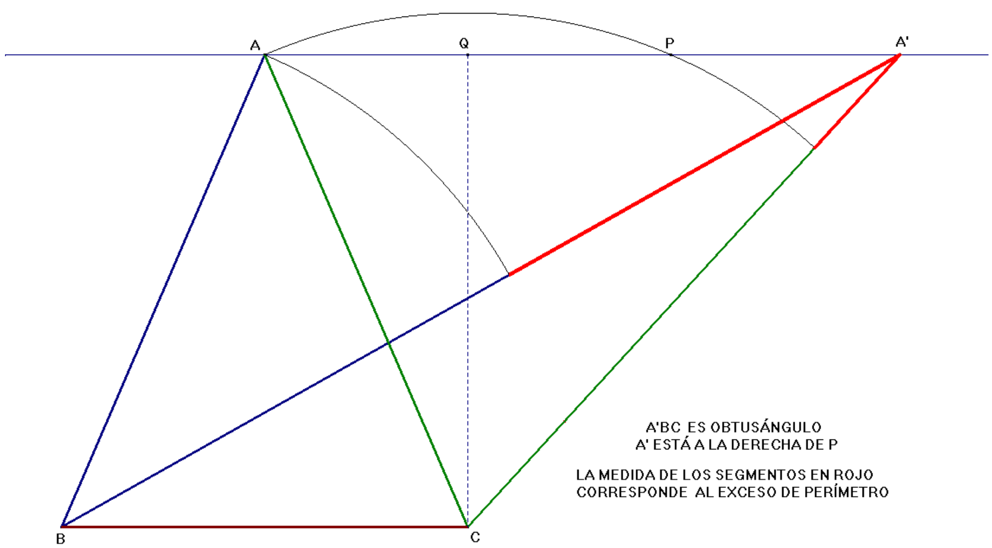
En el trabajo que presentamos se aborda, en primer lugar, el problema de la construcción de triángulos (también paralelogramos y trapecios) equivalentes a uno dado, así como el de la cuadratura de un polígono convexo cualquiera. A continuación se estudia la obtención de triángulos isoperimétricos a uno dado, que requiere realizar consideraciones sobre la construcción de la elipse. Después de ver un procedimiento para construir la elipse de la que se conocen el centro y los semiejes, que supone la utilización de la circunferencia focal, lo aplicaremos para la obtención de una familia de triángulos isoperimétricos a uno dado para, finalmente, abordar el problema expuesto al comienzo de esta introducción para el que adelantamos que existen infinitas soluciones, resultado que consideramos difícil de prever por simple intuición.

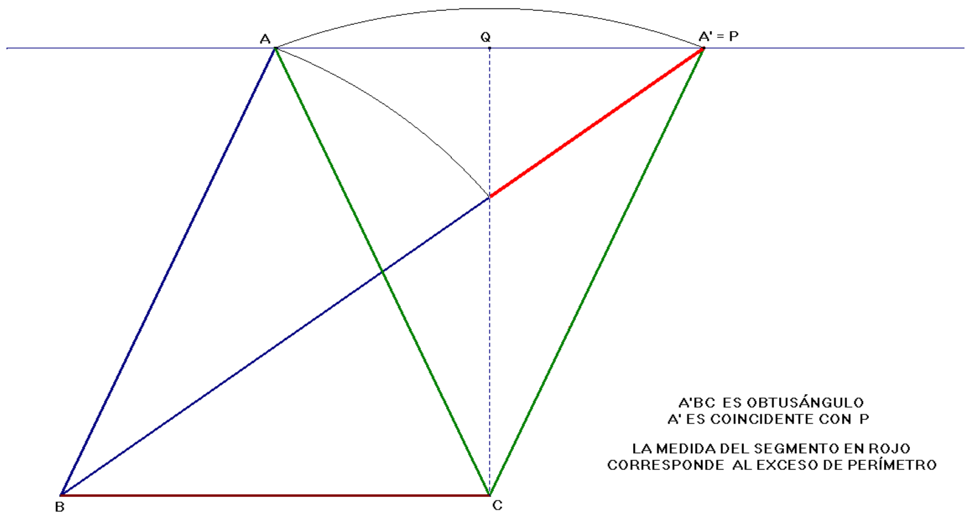
- **Triángulos equivalentes a un triángulo ABC dado**

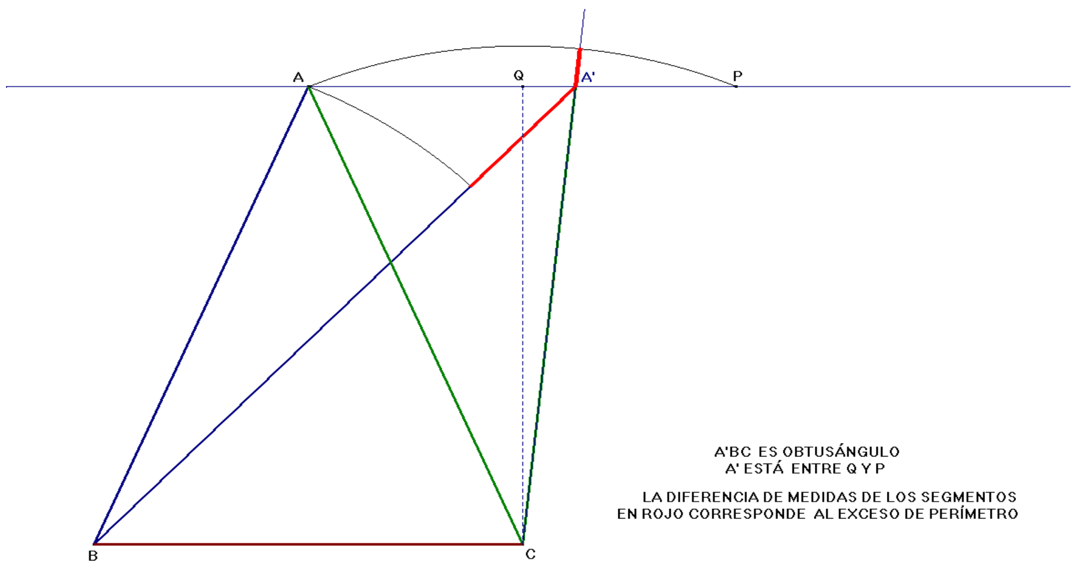


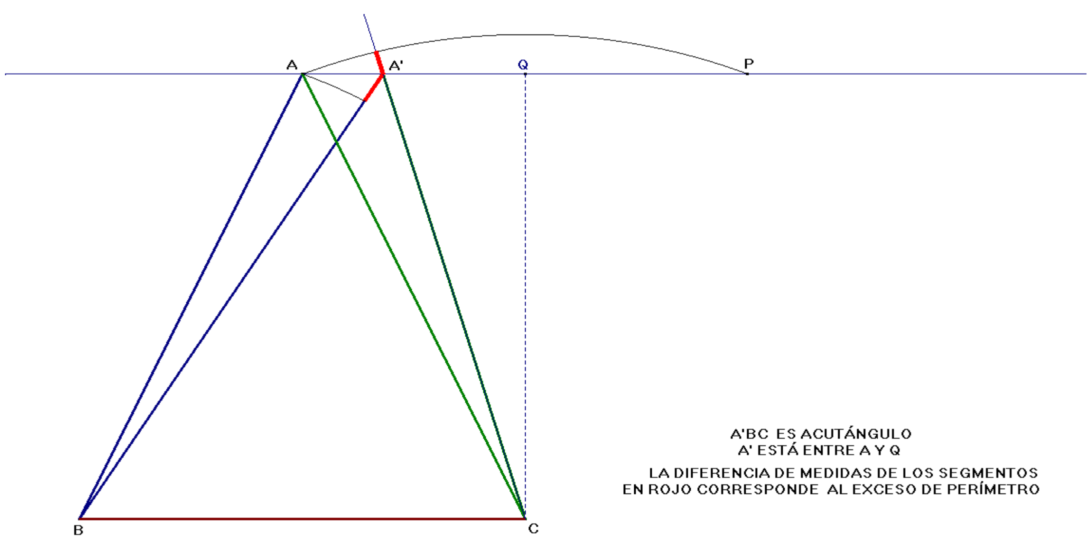
Dado un triángulo ABC, es sabido que basta trazar por el vértice C una paralela a la base AB para obtener triángulos con la misma base (AB) y cuyas alturas miden lo mismo y que, por tanto, son equivalentes al dado.

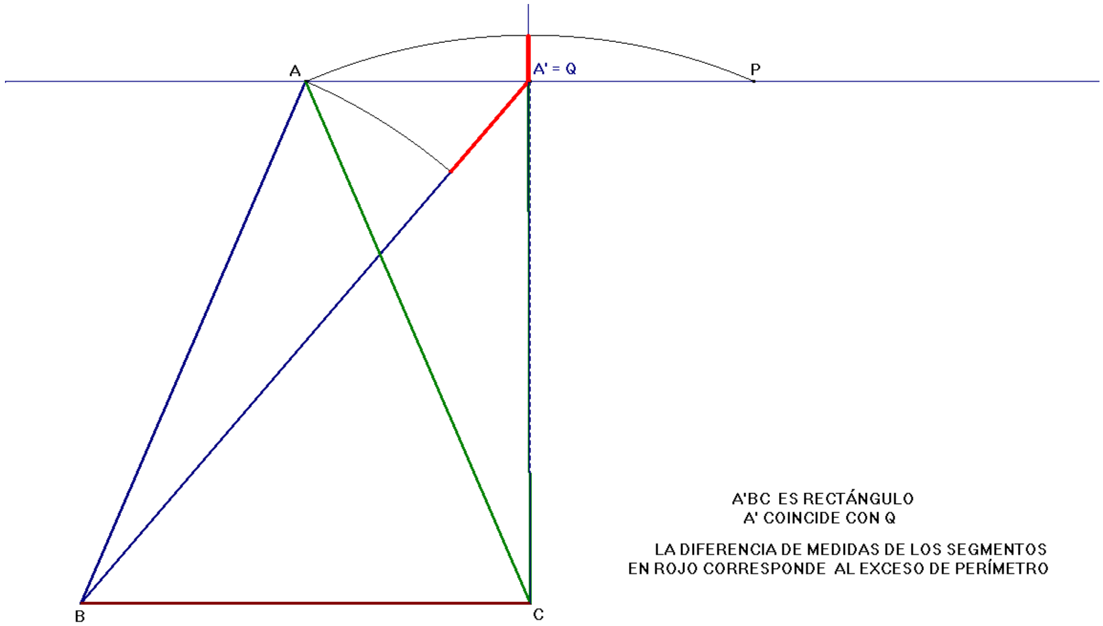
Los triángulos tienen, en general, perímetros diferentes. Veamos, de forma gráfica, que el de perímetro mínimo es el isósceles.

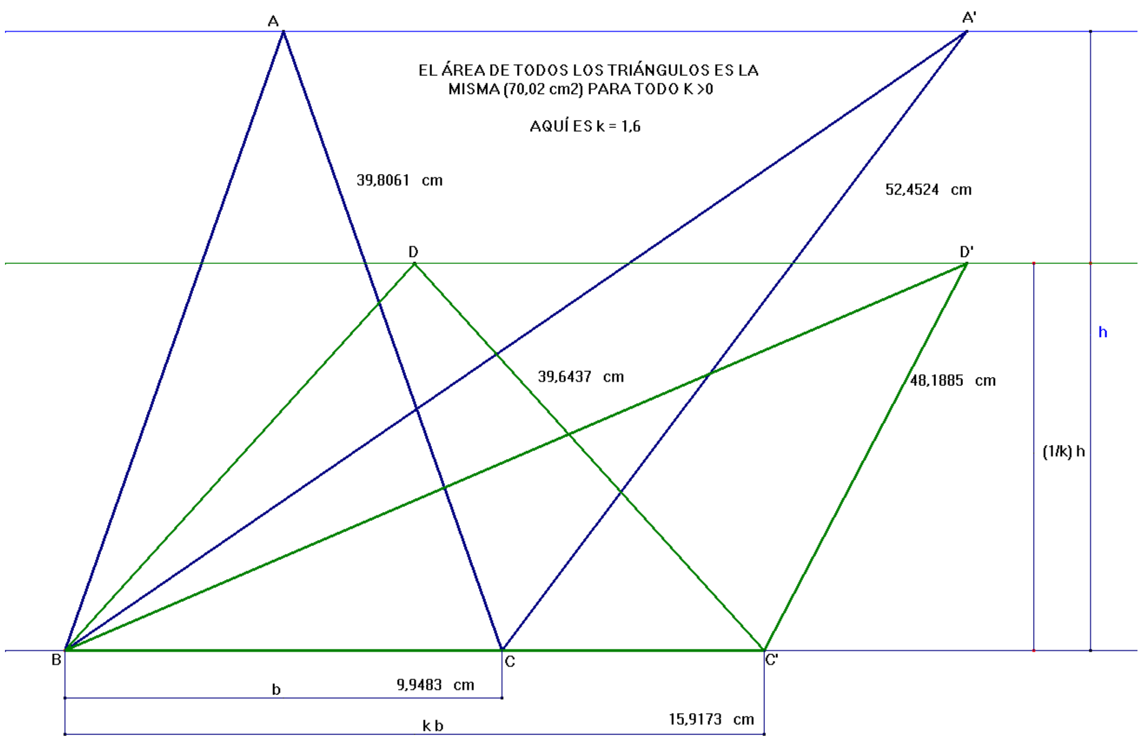



A
Q
A' = P
B
C
A'BC ES OBTUSÁNGULO
A' ES COINCIDENTE CON P
LA MEDIDA DEL SEGMENTO EN ROJO
CORRESPONDE AL EXCESO DE PERÍMETRO

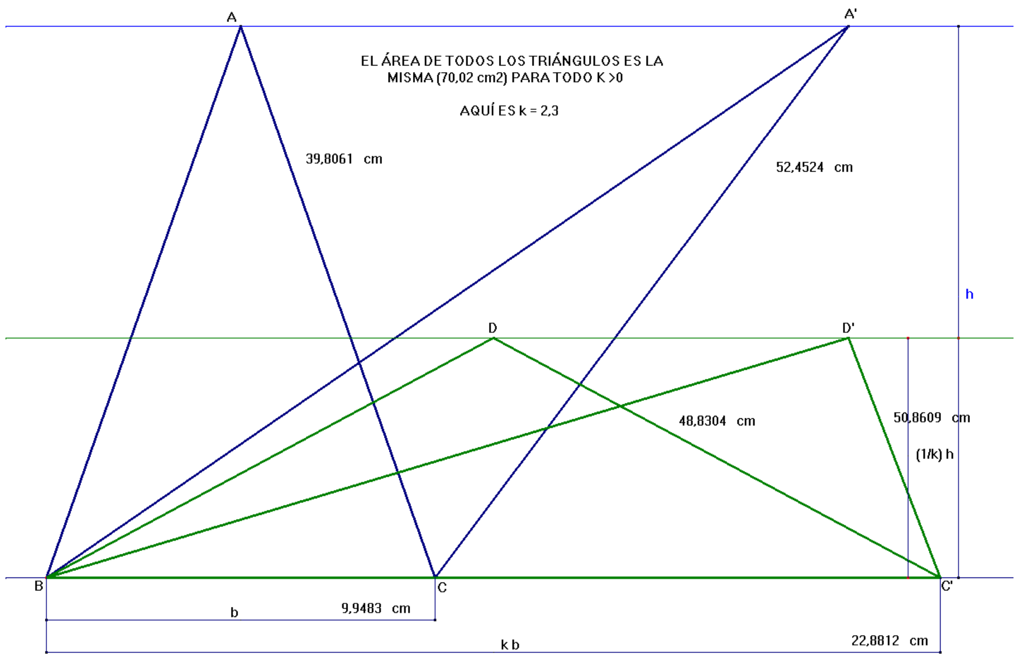

A
Q
A'
P
B
C
A'BC ES OBTUSÁNGULO
A' ESTÁ ENTRE Q Y P
LA DIFERENCIA DE MEDIDAS DE LOS SEGMENTOS
EN ROJO CORRESPONDE AL EXCESO DE PERÍMETRO


A
A'
Q
P
B
C
A'BC ES ACUTÁNGULO
A' ESTÁ ENTRE A Y Q
LA DIFERENCIA DE MEDIDAS DE LOS SEGMENTOS
EN ROJO CORRESPONDE AL EXCESO DE PERÍMETRO





Es fácil ver que existen infinitas rectas de triángulos equivalentes:



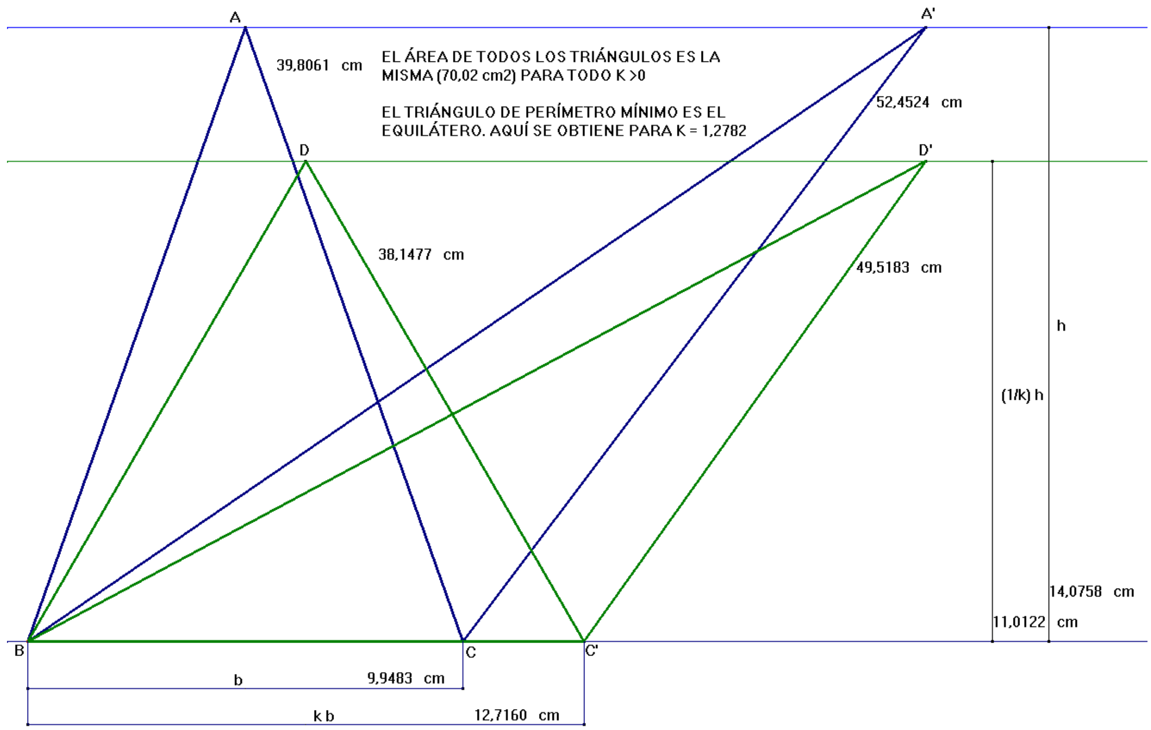
Nos podemos ahora preguntar para qué valor de k se tiene la recta a la que corresponde el triángulo equilátero. Si observamos que:

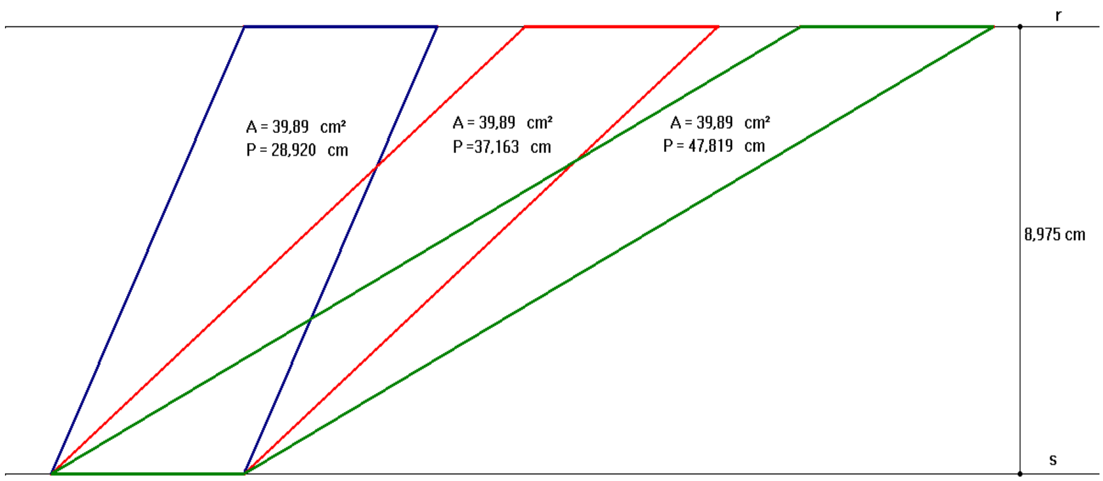
- Los triángulos de partida (azul) tienen base (b) y altura (h)

- Los triángulos resultantes (verde) tienen base (kb) y altura (h/k)

- La condición impuesta exige que (h/k) = ($\sqrt{3}/2$) (kb). De esta ecuación obtenemos el valor de k deseado:

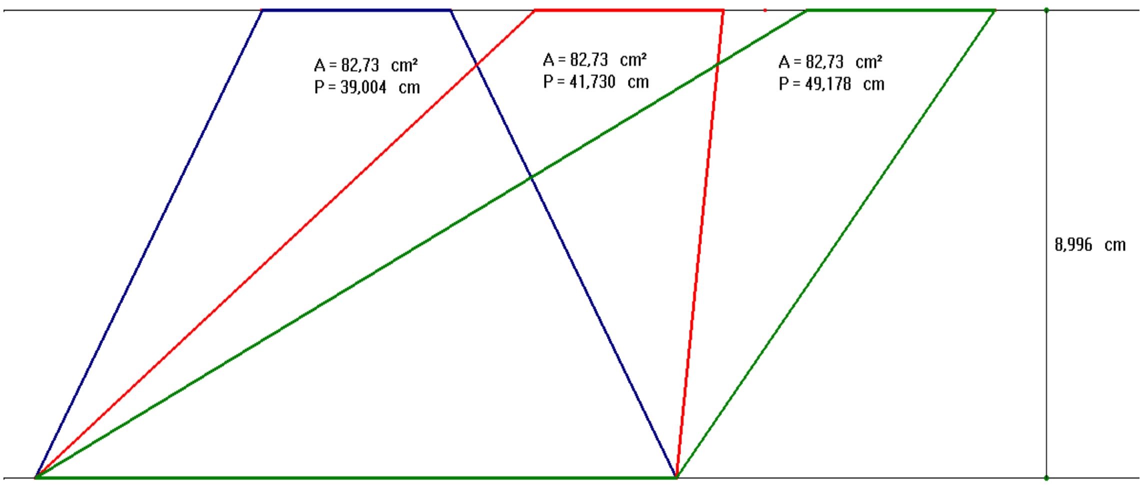
$$k = \sqrt{\frac{2\,h}{\sqrt{3}\,b}}$$





Paralelogramos equivalentes

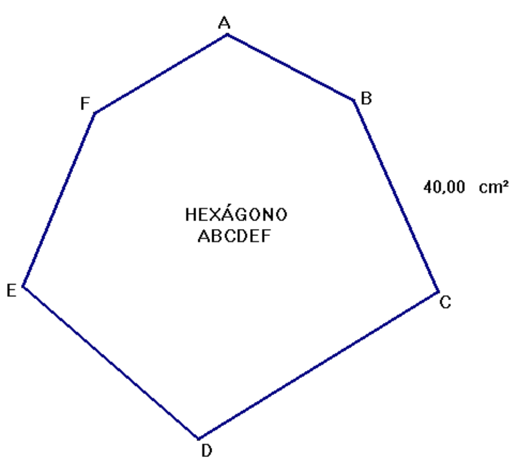
Siguiendo el mismo criterio podemos construir paralelogramos o trapecios equivalentes a uno dado:

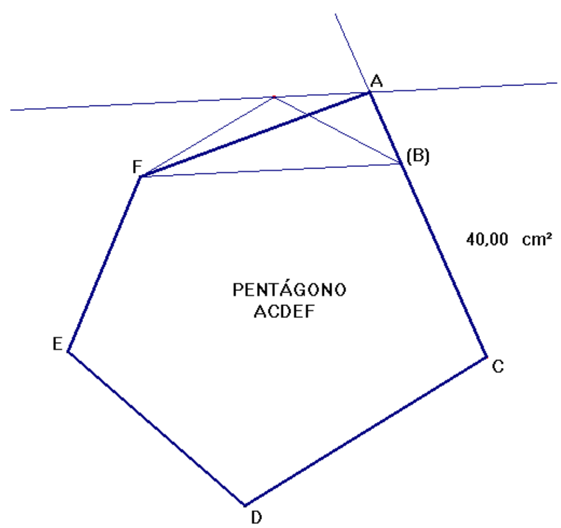


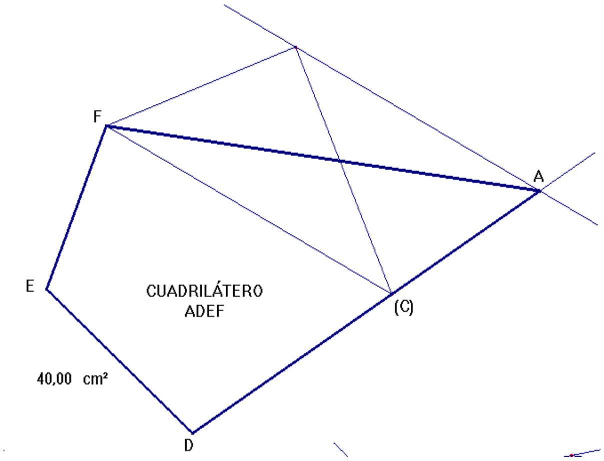
Trapecios equivalentes

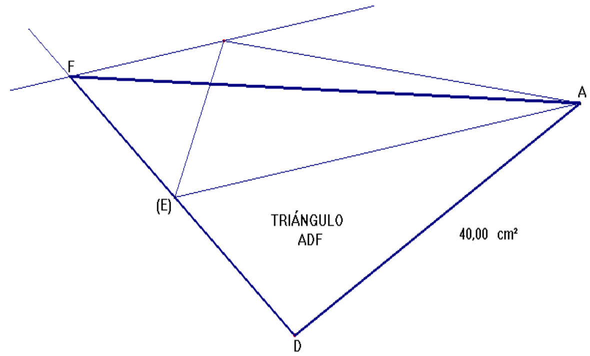
- **Cuadratura de un polígono convexo**

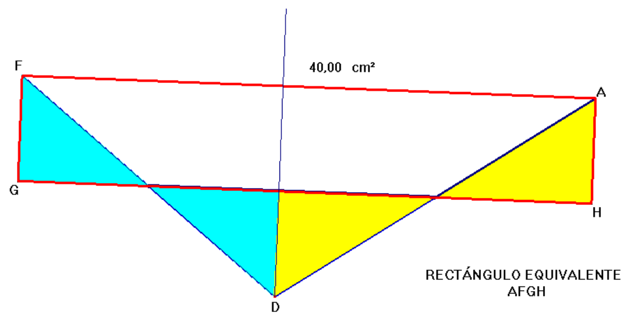
Dado un polígono convexo cualquiera (un hexágono, por ejemplo) podemos utilizar el procedimiento descrito para la obtención de triángulos equivalentes para ir obteniendo, de forma sucesiva polígonos equivalentes al dado, pero cada uno de los cuales posee un lado menos que el que le precede:

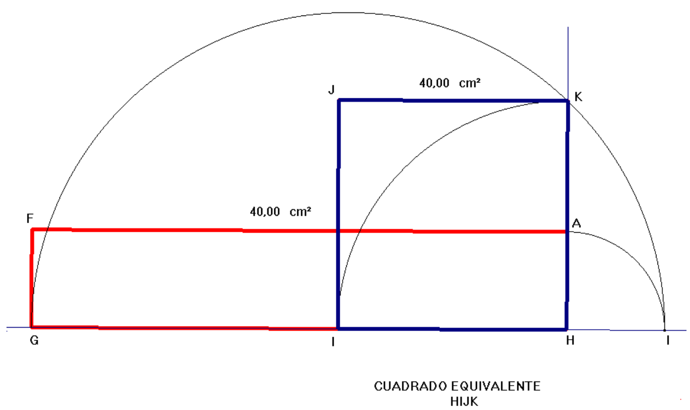


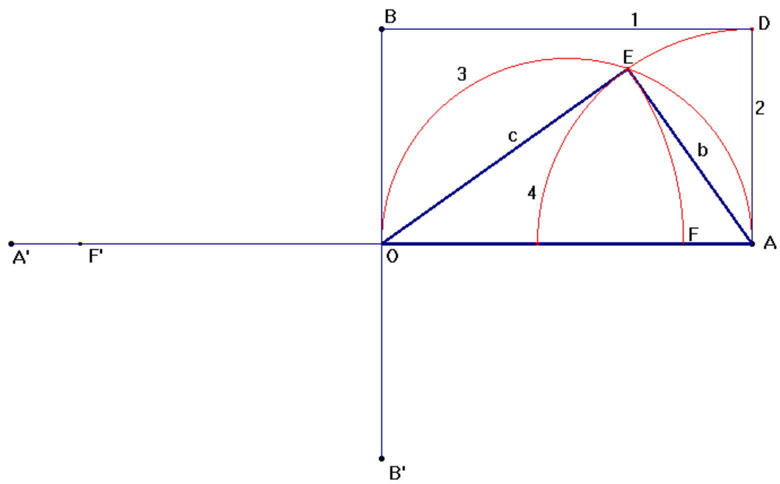



F
A
E
CUADRILÁTERO
ADEF
(C)
40,00 cm²
D


F
A
(E)
TRIÁNGULO
ADF
40,00 cm²
D


F
40,00 cm²
A
G
H
RECTÁNGULO EQUIVALENTE
AFGH
D


J
40,00 cm²
K
F
40,00 cm²
A
G
I
H
I
CUADRADO EQUIVALENTE
HIJK



- **Construcción de una elipse dados el centro (O) y los semiejes OA Y OB**

La primera parte del proceso que seguiremos es la que sigue:

- Trazamos el segmento BD, paralelo a OA.

- Trazamos el segmento AD, paralelo a OB.

- Trazamos la semicircunferencia de diámetro OA.

- Trazamos un arco con centro en A y radio AD (med (AD) = b).

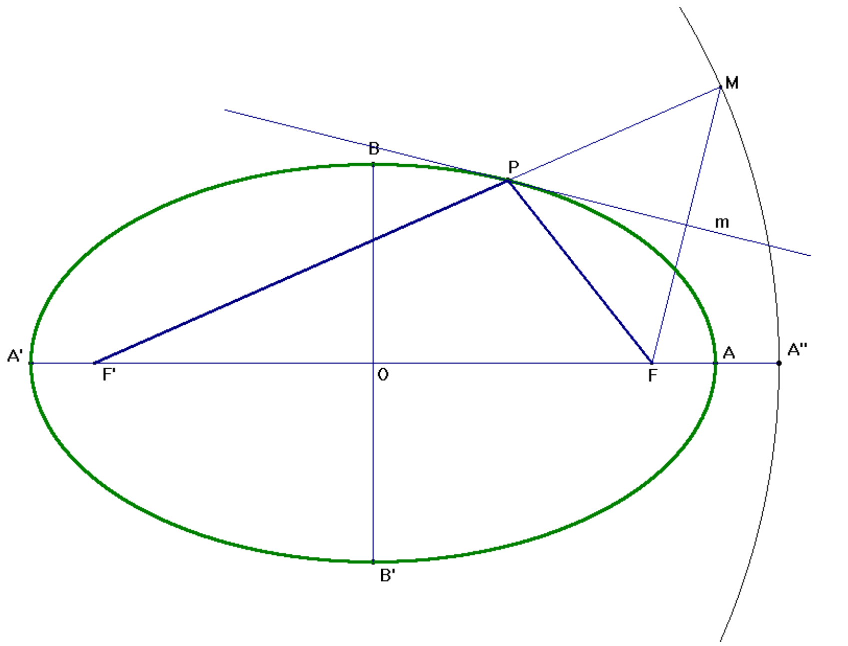
- Marcamos el punto E. Dado que el triángulo OEA es rectángulo, es obvio que med (OE) = c (semidistancia focal) y que med (AE) = b (medida del semieje menor de la elipse).

a

- Trazamos un arco con centro en O y radio OE. Su intersección con OA nos proporciona uno de los focos, F, de la elipse.

- Obtenemos el otro foco, F', como simétrico de F respecto de O.

La segunda parte del proceso (véase la figura de la página que sigue) requiere los siguientes pasos:



- Obtenemos A’’, simétrico de F respecto de A. Así, med (F’A’’) = 2a.

- Trazamos la circunferencia focal, de centro F’ y radio F’A’’.

- Sobre dicha circunferencia, tomamos un punto, M, cualquiera.

- Trazamos el segmento FM y su mediatriz, la recta m.

- Trazamos el segmento F’M y marcamos el punto de corte, P, de dicho segmento con la citada mediatriz.

- Este punto, P, es un punto de la elipse, pues med (F’P) + med (PM) = med (F’P) + med (PF) = 2 a.

- La elipse buscada pasará por A, A’, B, B’, y P. Su trazado podemos obtenerlo con Cabri mediante la opción “Cónica”.

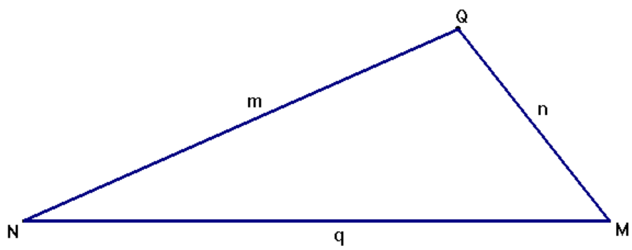
- **Triángulos isoperimétricos a uno dado**

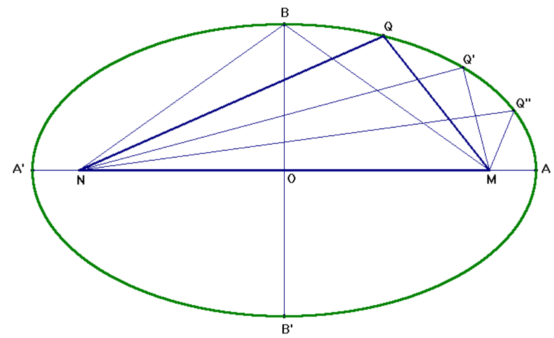
Dado el triángulo MNQ de la figura, cuyo perímetro es P = m + n + q, bastará construir una elipse cuya distancia focal 2c = q, es decir, c = q/2 y cuyo eje mayor, de medida 2a, sea tal que 2a + 2c = (m + n) + q = P, es decir, que se verifique: a + c = p, siendo p el semiperímetro del triángulo.

Una vez obtenido a = p – c, la medida del semieje menor, b, la podemos obtener teniendo en cuenta que, en toda elipse, se verifica: $a^2 = b^2 + c^2$. Así, resulta:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(p - c)^2 - c^2} = \sqrt{p^2 - 2\,p\,c}$$

Una vez construida la elipse, podemos visualizar infinitos triángulos isoperimétricos al dado, sin más que tomar sus vértices superiores sobre ella.



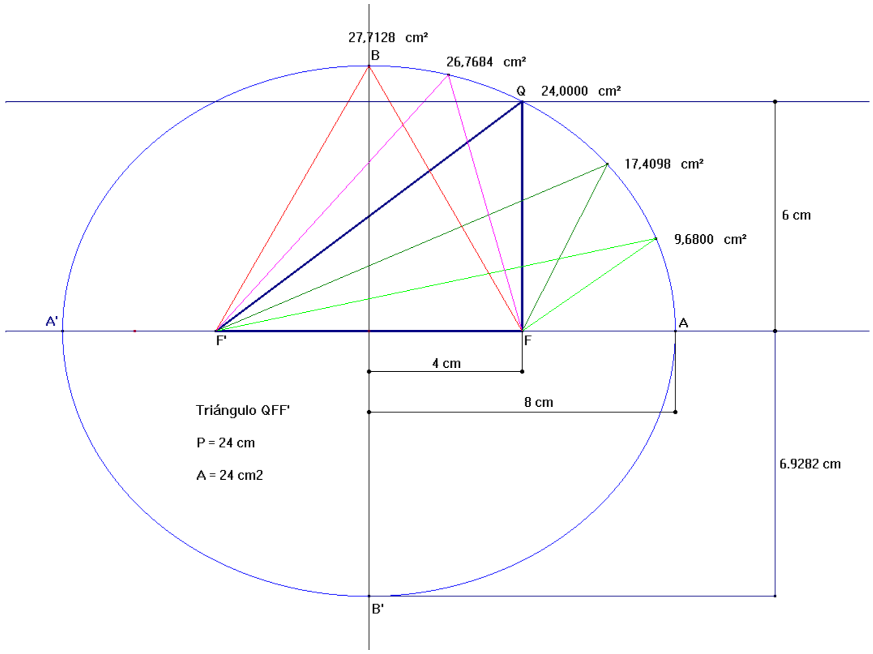


De todos ellos, el de mayor área (mayor altura) es el isósceles (MNB). Ésta viene dada por la expresión: $A = \frac{1}{2}(2c)\,b = b\,c = c\,\sqrt{p^2 - 2\,p\,c}$.

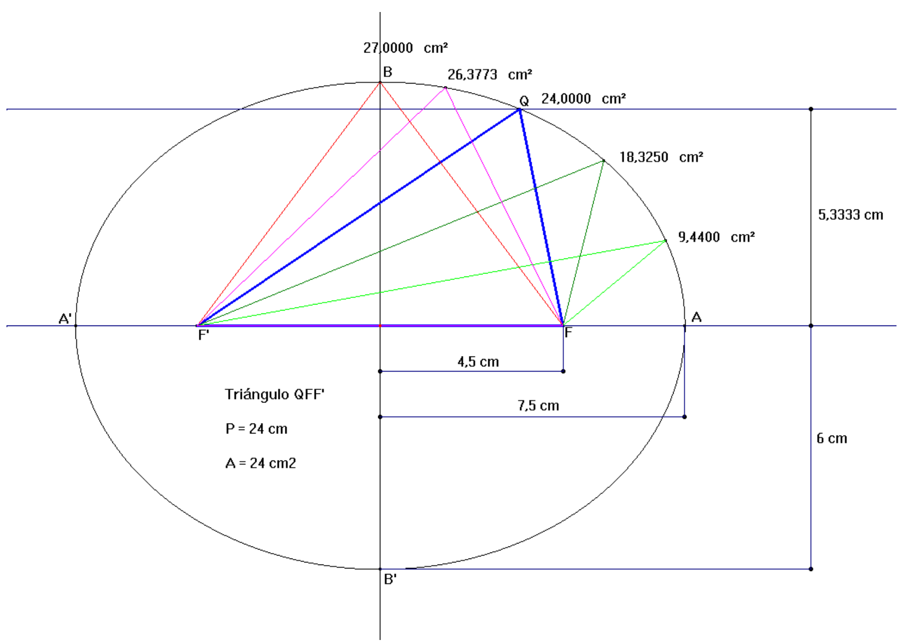
- **Triángulos equivalentes e isoperimétricos a un triángulo dado**

Sea el triángulo FF'Q de la figura. Sus lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente. Su perímetro P = 24 cm, y su área A = ½ · 8 · 6 = 24 cm^2. Construimos una elipse que tenga de distancia focal, FF' =2 c = 8 cm y que pase por el vértice superior Q. Dicha elipse será el lugar geométrico de los puntos del plano que, junto con F y F', den lugar a triángulos isoperimétricos con el triángulo dado. Dado que debe ser 2 a + 2 c = 24, el semieje mayor medirá a = ½ (24 – 2 c) = 12 – 4 = 8 cm. El semieje menor, b, medirá b = $\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; 6,9282 cm

Todos los triángulos cuyos terceros vértices están sobre la elipse tienen el mismo perímetro (24 cm). El de mayor área (mayor altura) es el isósceles.



Si ahora aumentamos la base del triángulo de modo que su medida sea de 9 cm, podremos construir una nueva elipse que nos proporcionará triángulos isoperimétricos con el triángulo originario (P = 24 cm). La distancia focal de esta nueva elipse será 9 cm, su semieje mayor a = ½ (24 – 9) = 7,5 cm, y su semieje menor b = $\sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2}$ = 6 cm. Para construir la elipse mediante CABRI necesitamos un quinto punto, que obtendremos mediante el procedimiento antes explicado**.**



Todos los triángulos de base FF' = 9 cm y cuyos terceros vértices se encuentran sobre la elipse tienen, por la construcción efectuada, un perímetro de 24 cm, pero tendrán, en general, distinta área. Ésta viene dada por la expresión:

$A = \frac{1}{2}\,FF'\,h$. Si queremos que A = 24 cm^2, deberá ser h = 2 A / FF' = 48 / 9 ≈ ≈ 5,33 cm.

Así pues, bastará cortar la elipse por una recta paralela a su eje mayor que diste 48/9 de éste para obtener el triángulo buscado.

Dado que el valor 2c puede ser modificado, si para cada caso repetimos el proceso, podemos obtener tantos triángulos equivalentes e isoperimétricos con el triángulo original como queramos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. et al (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO,* Síntesis. Madrid.

Castelnuovo, E. (1975). *Didáctica de la Matemática Modern,* Trillas. México.

Castelnuovo, E. (1976). *La via della matemática. La geometría,* La Nuova Italia. Firenze.

Corbalán, F. (1998). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana,* Graó. Barcelona.

Del Río, J. (1994): *Lugares Geométricos. Cónica,* Síntesis. Madrid.

García, I.; Arriero, C. (2000). Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas, *Suma,* vol. 34, 73-80.

Grupo "Construir las Matemáticas" (2001). Isoperímetros: Ficha didáctica en Álgebra. Desigualdades, *Suma*, vol. 37, 105-110.

Puig Adam, P. (1970). *Curso de Geometría Métrica, Tomo II.* Biblioteca Matemática. Madrid.