FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA V
ISSN: 1695-6613

ALGUNAS ESTRATEGIAS Y MODELOS PARA FACILITAR LA COMPRENSIÓN Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

María Dolores Moreno Martel
Agustín Morales González

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

La Resolución de Problemas pone de manifiesto, no sólo el dominio que los alumnos poseen de los conocimientos matemáticos implicados, sino el uso adecuado de herramientas heurísticas. Este proceso permite al profesorado descubrir las dificultades y errores de aprendizaje que el alumnado experimenta en el estudio de las Matemáticas. Como consecuencia, los profesores intentan elaborar estrategias específicas de enseñanza que faciliten su comprensión.

En este trabajo presentamos algunas actividades geométricas, propuestas a nuestros alumnos de Magisterio, cuyo desarrollo ha supuesto dificultades relacionadas con la visualización, intuiciones falsas, razonamientos inválidos, etc. Asimismo mostramos algunos modelos geométricos que hemos diseñado con la finalidad de mejorar la comprensión y la resolución de dichos problemas.

Abstract

Problem Solving shows, not only the dominion that the students have of the implied mathematical knowledge, but the suitable use of heuristic tools. This process allows teachers to discover the difficulties and errors of learning that the pupils experiment in the study of Mathematics. As a consequence, the professors try to elaborate specific teaching strategies that facilitate their understanding.

In this work we present some geometric activities, that we have proposed to our students of Teacher Training, whose development has supposed some difficulties related with visualization, false intuition, invalid reasoning, etc. We also show some geometric models that we have designed with the purpose of improving the understanding and the resolution of these problems.

Introducción

En nuestro trabajo diario como formadores de futuros maestros tenemos ocasión de constatar las dificultades y los errores que éstos muestran a la hora de realizar las actividades no rutinarias que proponemos en clase.

En relación con las de tipo geométrico, dichos errores suelen tener como causas falsas intuiciones y razonamientos incorrectos, a menudo derivados de la escasa formación en el desarrollo de la visualización y del pensamiento visual que han recibido nuestros alumnos en sus estudios anteriores.

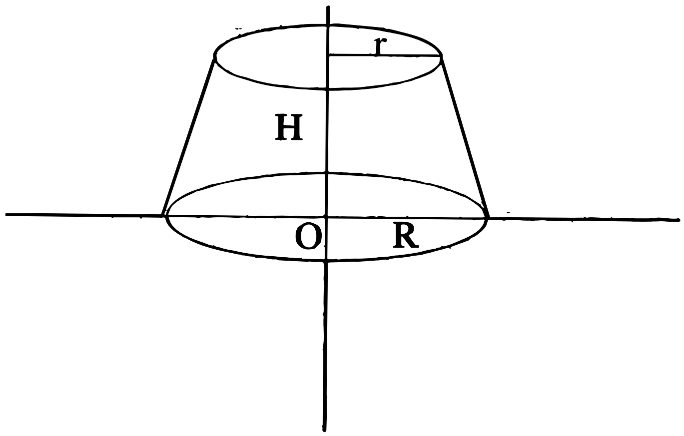
Coincidimos con la afirmación de M. Senechal, recogida en Alsina y otros (1997), p. 41, según la cual *el pensamiento visual, si se explota convenientemente puede revolucionar la forma de hacer Geometría y de enseñarla.* De hecho, el desarrollo de dicha forma de pensamiento facilita nuevas formas de descubrir y de investigar en Matemáticas.

Por otra parte, el uso, tanto de modelos reales que pueden ser construidos por los alumnos, como de los programas o entornos de Geometría Dinámica, suponen unas herramientas de demostrada utilidad para promover el desarrollo de dicha forma de pensamiento a la vez que sugieren, en muchas ocasiones, el camino para resolver las situaciones propuestas.

Las cuatro actividades que tratamos a continuación, todas ellas trabajadas en clase con nuestros alumnos, constituyen una muestra del tipo de trabajo que proponemos para la consecución de los fines citados. En algunas de ellas mostramos una resolución rigurosa que supone el empleo de conocimientos matemáticos que no posee la mayoría del alumnado, junto con otra cuya comprensión pensamos que sí está a su alcance.

Actividad 1

Nos dicen que el volumen del tronco de cono es $V = \frac{1}{3}(R^2 + r^2)\,\pi\,H$, ¿Será cierto?



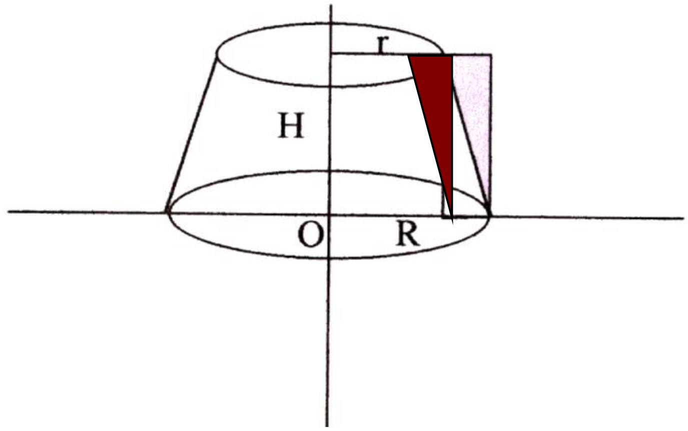
Razonamiento del alumno:

Completamos el tronco de cono para obtener un cilindro de volumen $\pi R^2 H$. *El volumen del tronco de cono se obtiene al restarle al cilindro el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo sombreado en la figura, al girar alrededor del eje OY. Como dicho triángulo es la mitad de un rectángulo, entonces el volumen del cuerpo engendrado por esa rotación es la mitad del volumen del cuerpo engendrado por la rotación del rectángulo, al girar alrededor del eje OY, que podemos obtener sin más que hacer* $V = \frac{1}{2}\pi\,H\left(R^2 - r^2\right)$. [1]

Por tanto, el volumen del tronco de cono será:

$$V_{tc} = \pi R^2 H - \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - r^2\right)H = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 + r^2\right)H$$

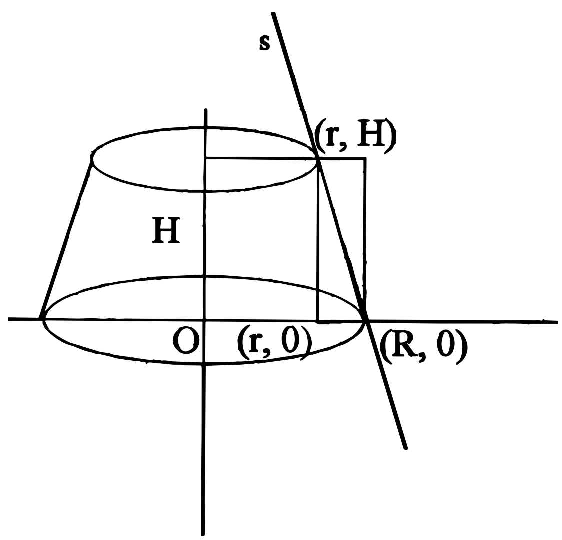
Este resultado causa extrañeza al alumnado dado que no corresponde con la conocida expresión que permite obtener el volumen del tronco de cono.



Este razonamiento es falso pues se sabe que el volumen engendrado por la rotación de la figura limitada por $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, y las dos rectas $x = a$, $x = b$, al girar alrededor del eje OY, viene dado por:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\left(y_2 - y_1\right) dx$$

En nuestro caso:



Las ecuaciones de las rectas son: $y_1 = \dfrac{H\left(R - x\right)}{R - r}$; $y_2 = H$;

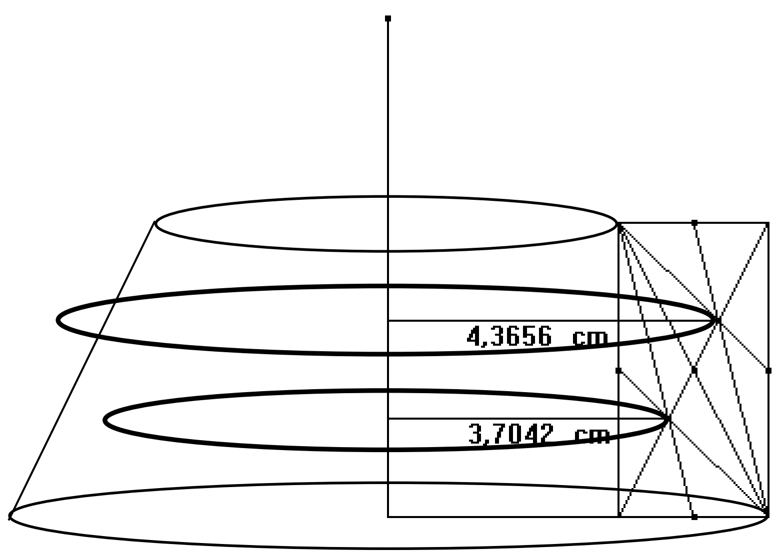
Los límites de integración son r y R, respectivamente. Por tanto:

$$V_y = 2\pi \int_r^R x \left(H - \frac{H\left(R - x\right)}{R - r} \right) dx = \frac{1}{3}\pi H \left(2R^2 - r^2 - Rr\right) \qquad [2]$$

Luego los resultados obtenidos en [1] y [2] son diferentes.

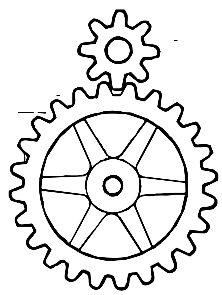
Sin embargo, la explicación dada a los alumnos la fundamentamos en la aplicación del teorema de Pappus de Alejandría, conocido ordinariamente por el de Paul Guldin, que se enuncia así: Si se hace girar una curva cerrada y plana alrededor de una recta que no la corta y que se encuentra contenida en su mismo plano, entonces el volumen del sólido engendrado se obtiene multiplicando el área de la superficie encerrada por la curva, por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de dicha superficie.

En nuestro caso, mediante Cabri, determinamos, para valores particulares de r y R, respectivamente, los baricentros de los dos triángulos y los radios de las circunferencias descritas por éstos. Esto permite comprobar la no igualdad de los volúmenes de los cuerpos engendrados por ambos triángulos y evidencia la falsedad del razonamiento del alumno.



Actividad 2

Un piñón de 8 dientes está engranado a una rueda dentada de 24 dientes. Al dar vueltas la rueda grande, el piñón se mueve por la periferia, ¿Cuántas veces girará el piñón alrededor de su eje, mientras da una vuelta completa alrededor de la rueda dentada grande?



Razonamiento del alumnado: *Basta hacer 24 : 8 = 3 (veces).*

Para resolver correctamente el problema les hacemos la sugerencia de realizar la experiencia de forma experimental. Los alumnos que consideran la sugerencia perciben que da 4 vueltas, que es la respuesta correcta.

A continuación, se pretende demostrar este resultado:

Sean C y C' dos circunferencias cuyos radios son R y r, con R □ r.

En la circunferencia C, cuando gira un ángulo □, se define un arco de longitud *l*. Al mismo tiempo, la circunferencia C' recorre un ángulo □ que define un arco de longitud *l'*. De donde:

$$\frac{2\,\pi\,R\,\alpha}{360} = \frac{2\,\pi\,r\,\beta}{360} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = \frac{R}{r}\,\alpha$$

Asimismo, cuando la circunferencia C' da una vuelta se verifica:

$$\alpha + \beta = 360^0$$

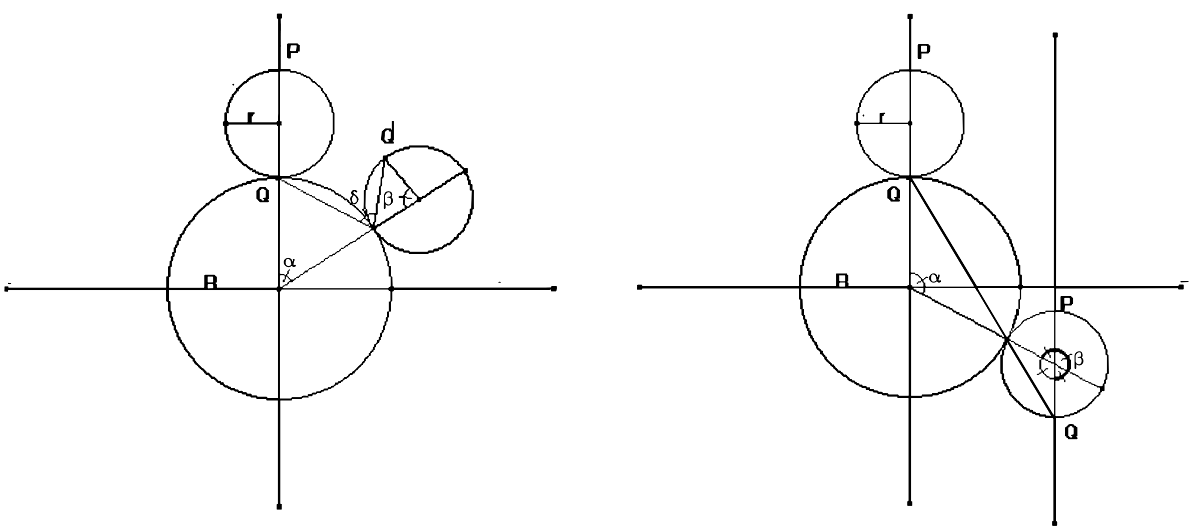
Así que:

$$\alpha + \frac{R}{r}\alpha = 360 \Rightarrow \alpha = 360\left(\frac{r}{r+R}\right); \quad \beta = 360\left(\frac{R}{r+R}\right)$$

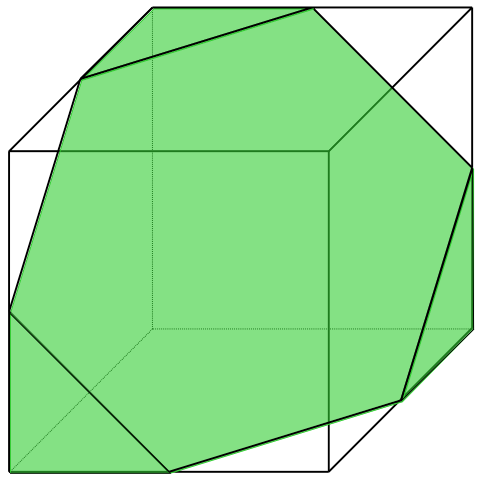
Por lo tanto, cuando C da una vuelta C' dará:

$$\frac{360}{\beta} = \frac{r+R}{r} = 1 + \frac{R}{r} \text{ vueltas.}$$

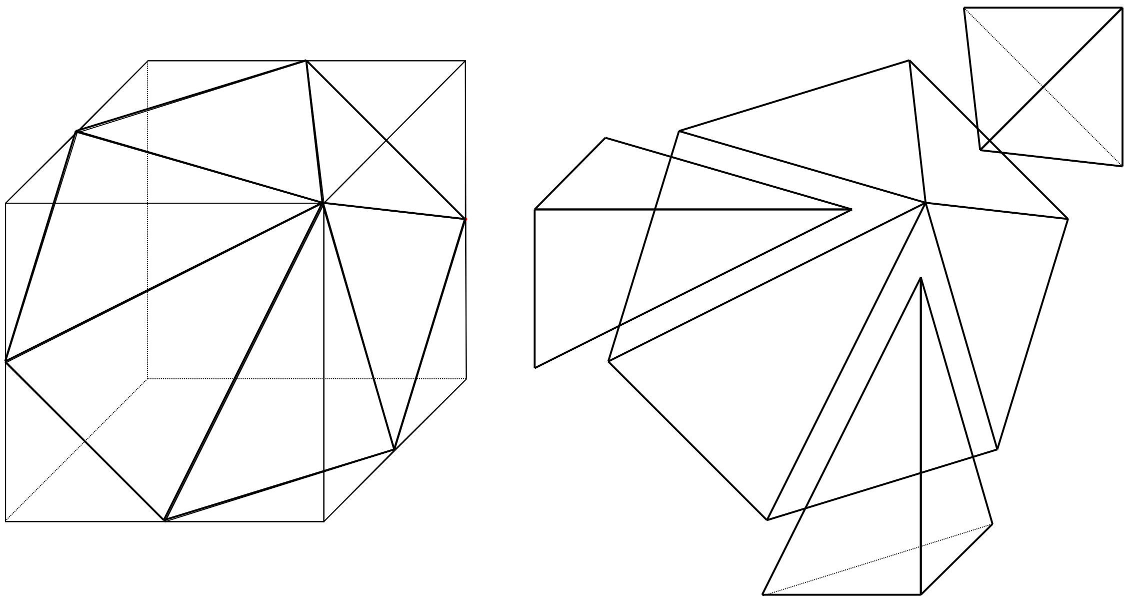
Actividad 3



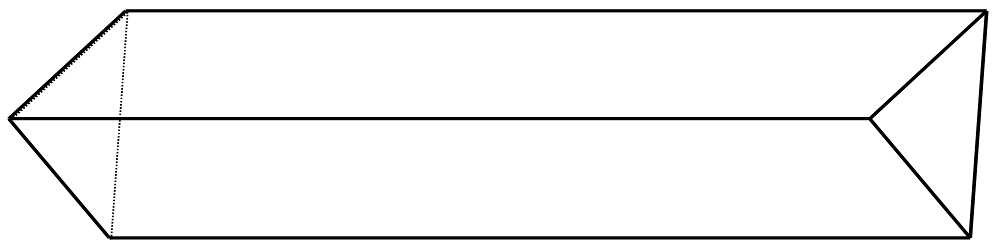
Determina el volumen de la FIgura sombreada contenida en el cubo de arista a de la figura.



En esta actividad la dificultad se encontró, de forma especial, en visualizar la figura descompuesta en cuatro pirámides.

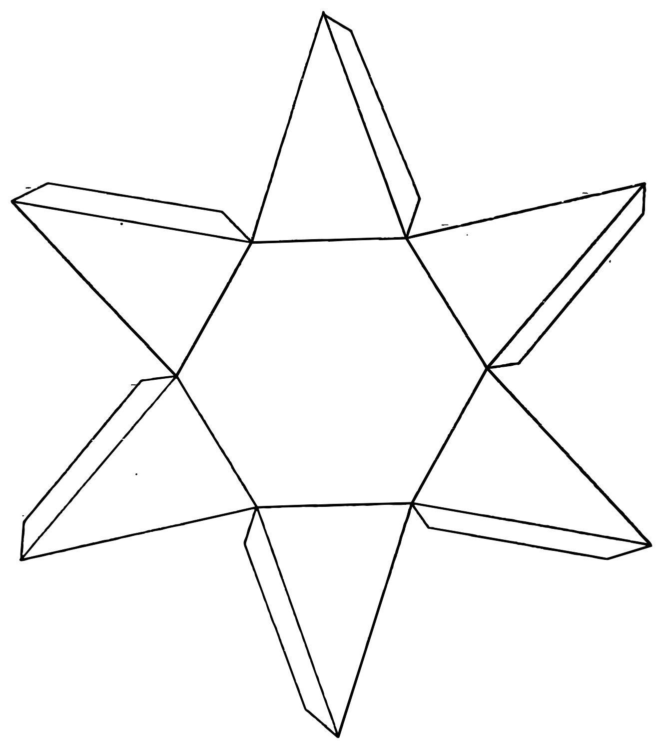


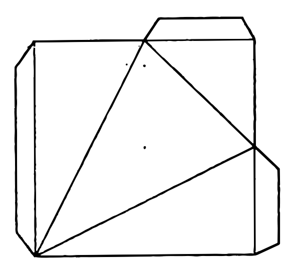
En este orden de cosas, Bishop, en Dickson y otros (1991), señala que *las representaciones bidimensionales de los objetos tridimensionales son, con frecuencia, un asunto convencional.* Este autor comenta que mientras trabajaba en Guinea Papúa encontró estudiantes universitarios incapaces, entre otras cosas, de interpretar como prisma triangular la siguiente figura:



Sin embargo, tales estudiantes eran capaces de realizar proezas de memorización espacial que dejaban muy atrás las que normalmente encontramos en nuestra cultura, lo que sugiere que tal representación no se desarrolla de forma "innata", siendo preciso aprenderla mediante el ejemplo.

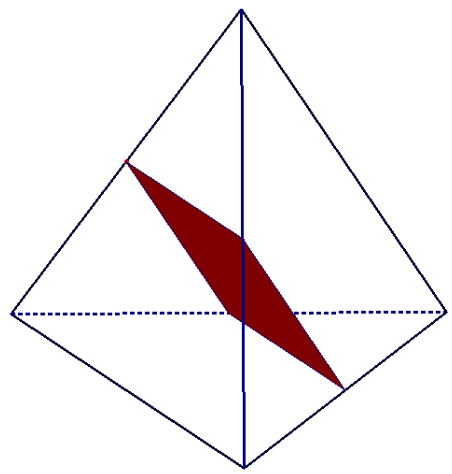
Para simplificar el problema, se les entregó a los alumnos los desarrollos planos de las pirámides que la componen. De esta manera se comprueba experimentalmente que el volumen coincide con la mitad del volumen del cubo.



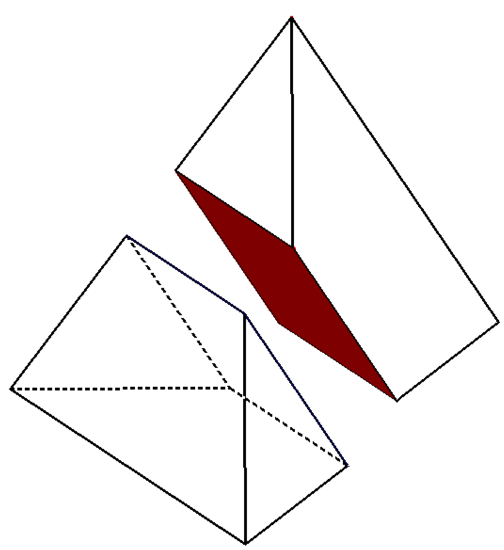


Actividad 4

Construir las dos mitades de un tetraedro regular.

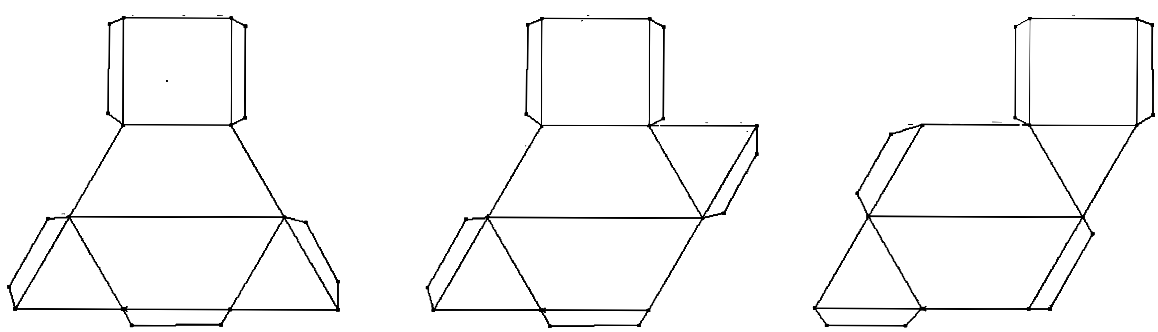


Se trata de encontrar un desarrollo plano de la mitad del tetraedro. El tetraedro está representado en el plano, por lo que el alumno deberá visualizarlo descompuesto en dos sólidos iguales. Posteriormente, fijar la atención en una de las mitades y abrirla, como si estuviese hecha de cartulina, para conseguir un desarrollo plano.



En este sentido, explicamos a los alumnos que estudios realizados por Piaget ponen de manifiesto que, desde los ocho años y medio, los niños eran capaces de dibujar los desarrollos correspondientes al cilindro, al cono y al cubo, pero en el caso de la pirámide no tuvieron éxito hasta los 11 años y medio, por lo menos. Sin embargo, en Dickson y otros (op.cit.) se indica que Piaget observó que los niños que en la escuela habían adquirido experiencia en desarrollos planos podían sacar hasta tres años de ventaja en la realización de éstos a los niños que carecían de tal experiencia.

La actividad planteada es más sencilla si se cuenta con un modelo geométrico del tipo retícula del tetraedro. Mostramos seguidamente algunos de los desarrollos planos obtenidos.



Referencias bibliográficas

Alsina, C. y otros (1997): *¿Por qué Geometría?*, Síntesis. Madrid.
Antón. J.L. y otros (1994): *Taller de Matemáticas*, Narcea-MEC. Madrid.
Boyer, C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza. Madrid.
De Guzmán, M. (1991): *Para pensar mejor*, Labor. Barcelona.
Dickson, L. y otros (1991). *El aprendizaje de las Matemática,* MEC-Labor. Barcelona.