FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IV
ISSN: 1695-6613

ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

María Dolores Moreno Martel
Agustín Morales González

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En esta ponencia se relata una experiencia sobre resolución de problemas. Dicha experiencia se ha llevado a cabo con alumnos futuros maestros. En los problemas propuestos se buscan patrones al observar distintas configuraciones puntuales de números. Se estudian los tipos de estrategias que surgen y sus frecuencias.

Abstract

In this paper an experience about problem solving is described. This experience has been carried out on students that will be future teachers. In the proposed problems patterns are looked for when observing different punctual configurations of numbers. The types of strategies that arise and their frequencies are studied.

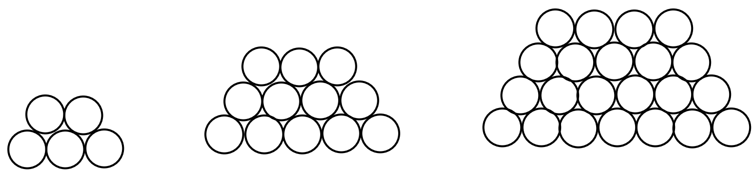
Consideraciones generales

Por lo general se suele aceptar que los dos grandes bloques de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la escuela, aunque no únicos, son el de la Aritmética y el de la Geometría. El primero abarca el estudio de los números y sus relaciones, y el segundo, el de las figuras geométricas, sus características, relaciones entre sus elementos, las transformaciones... Sin embargo, entre estos dos temas de las Matemáticas existen relaciones estrechas. La Geometría hace uso del número para expresar relaciones entre los elementos de las figuras, mientras que la Aritmética se vale de formas para representar propiedades numéricas.

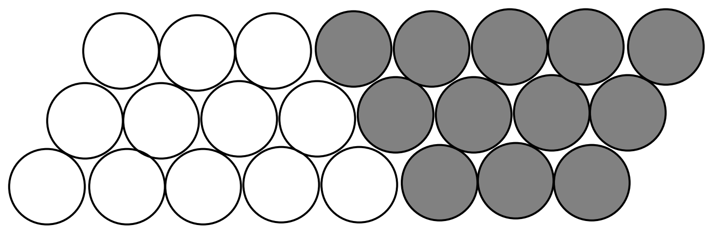
En este trabajo vamos a comentar una experiencia didáctica llevada a cabo con alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de la U.L.P.G.C. Se presentan ejemplos en los que se estudia esta conexión existente entre la Aritmética y la Geometría. Las actividades propuestas se desarrollan en un contexto de búsqueda de patrones en configuraciones puntuales de números. Con esta experiencia hemos querido también que el alumnado comprenda que:

- La resolución de un problema admite distintos caminos que nos conducen a la obtención de la solución.
- La búsqueda de patrones constituye una estrategia del pensamiento para construir conocimientos.
- Los problemas de búsquedas inductivas constituyen un contexto donde estudiar el lenguaje algebraico.

Los procedimientos utilizados para solucionar estos problemas se han clasificado de forma inicial en numéricos y geométricos. En los primeros, el resolutor busca la regularidad entre los números, obtenidos al realizar el recuento del total de puntos de la configuración, sin apoyarse en el modelo visual. En los segundos, sin embargo, el resolutor hace uso de la visualización. Por ejemplo, para encontrar el patrón numérico que corresponde a la siguiente secuencia de figuras, podemos proceder de maneras distintas, a saber:



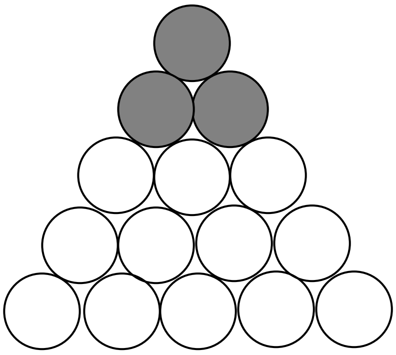
- Unimos dos trapecios iguales de la forma siguiente:



CASO	TOTAL DE FICHAS
1	2·5/2
2	3·8/2
3	4·11/2
n	(n+1)(3n+2)/2

Esta estrategia nos recuerda a uno de los procedimientos utilizados en la obtención de la fórmula para calcular el área del trapecio.

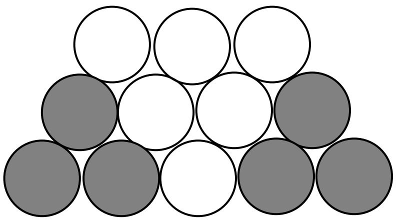
- Completamos con fichas cada figura hasta conseguir un triángulo:



CASO	TOTAL DE FICHAS
1	(1+2+3) – 1
2	(1+2+3+4+5) – (1+2)
3	(1+2+3+4+5+6+7) – (1+2+3)
n	(2n+1)(2n+2)/2 – n(n+1)/2

En este caso nos apoyamos en un modelo visual conocido para la suma de los *n* primeros números naturales.

- Las figuras se descomponen en triángulos:



CASO	TOTAL DE FICHAS
1	1+2+2·1
2	1+2+3+2(1+2)
3	1+2+3+4+2(1+2+3)
4	1+2+3+4+5+2(1+2+3+4)
n	(n+1)(n+2)/2 + 2n(n+1)/2

Se busca una suma descompuesta en sumandos, que son números triangulares.

- Se cuenta el total de fichas de cada figura y se busca un patrón entre los números:

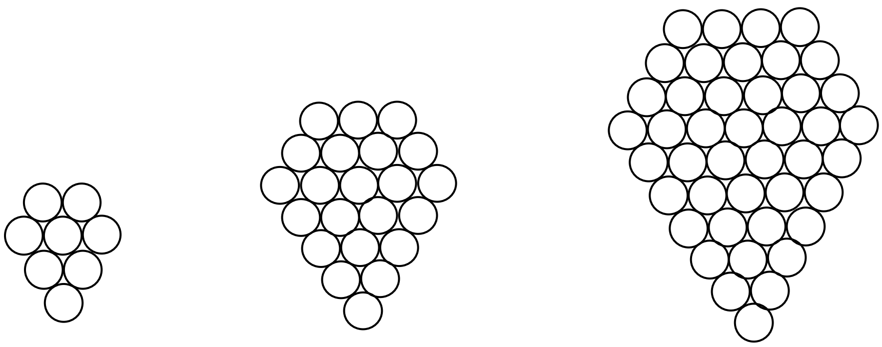
CASO	TOTAL DE FICHAS
1	5 = 10/2 = 5·2/2 = (3+2)·2/2
2	12 = 24/2 = 8·3/2 = (6+2) ·3 /2
3	22 = 44/2 = 11 · 4/2 = (9 + 2) ·4/2
n	(3n+2)(n+1)/2

En esta situación observamos que cada número es la mitad de un producto de dos factores. El primer factor es la suma de un múltiplo de tres más dos, y el segundo factor, es el número que indica el orden del caso considerado más una unidad.

A continuación, comentaremos las estrategias elaboradas por los alumnos para la solución de estos problemas. La mayoría de ellos ha recibido instrucción previa en estas tareas. Se han estudiado los números figurados usados por los matemáticos de la Grecia antigua, tales como los triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. Hemos buscado patrones en las tablas numéricas, en el triángulo de Pascal, en los números de Fibonacci, etc.

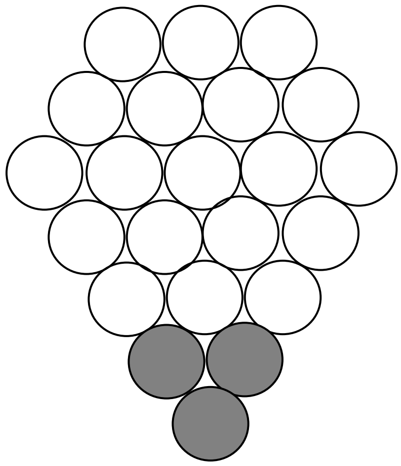
Estrategias

Considera la siguiente serie de figuras. Cada figura esta construida con fichas agrupadas, formando un *pentágono en racimo* (con el mismo número de elementos en el *lado* superior que en los dos adyacentes). Determina el total de fichas necesarias para el caso general.



ESTRATEGIA (e1)

Las figuras se descomponen en hexágonos y triángulos.

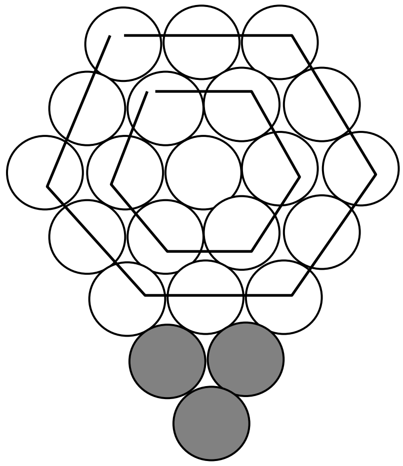


CASO	TOTAL DE FICHAS
1	7 + 1
2	19 + (1+2)
3	37 + (1+2+3)
n	$3n(n + 1) + 1 + (1+2+ ... +n-1+ n) = (7n^2+7n+2)/2$

La dificultad se presentó a la hora de encontrar el patrón que sigue el número total de fichas del hexágono.

ESTRATEGIA (e2)

Las figuras se descomponen en hexágonos y triángulos. Se observan hexágonos encajados. Éstos surgen al considerar que cada situación contiene a la situación anterior.



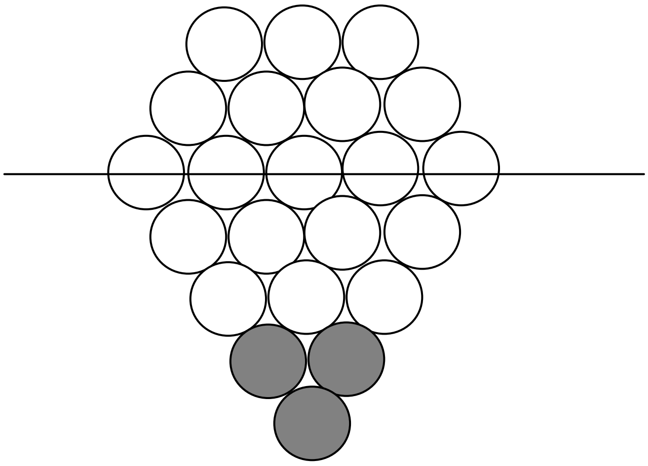
CASO	TOTAL DE FICHAS
1	1+6+1
2	1+6+12+(1+2)
3	1+6+12+18+(1+2+3)
n	(1 + 6 + ... + 6(n-1) + 6n)+(1 + 2 + ...+ n-1 + n) = $(7n^2+7n+2)/2$

La dificultad que surgió en la estrategia anterior se salva al observar hexágonos encajados. De esta manera, se obtiene la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética (6 + 12 + ... +6(n-1) + 6n). Algunos de los alumnos aplican el método utilizado por Gauss para hallar la suma.

Este método se describe en la historia que se cuenta sobre Gauss, que con sólo diez años, para hallar la suma de todos los números del 1 al 100, se percató de que 100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101, y así hasta tener 50 casos distintos. Por consiguiente, el resultado es 50 x 101 = 5050.

ESTRATEGIA (e3)

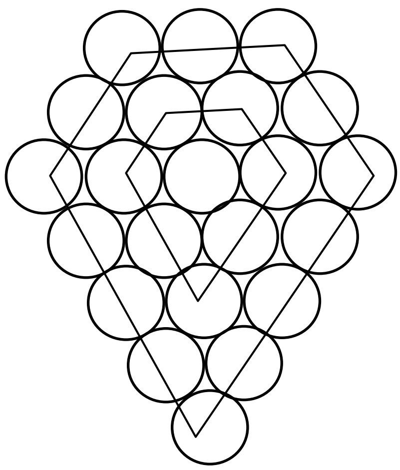
Las figuras se descomponen en hexágonos y triángulos y se observan simetrías.



CASO	TOTAL DE FICHAS
1	3 + 2·2 + 1
2	5 + 2(4+3) + (1+2)
3	7 + 2(6+5+4) + (1+2+3)
n	2n+1 + 2(2n + 2n-1 + ...+ n+2 + n+1) + (1 + 2 +...+ n-1 + n)

ESTRATEGIA (e4)

Se observan pentágonos encajados.

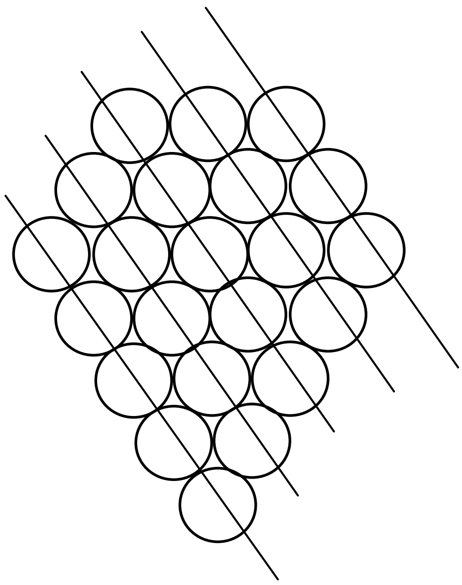


CASO	TOTAL DE FICHAS
1	1 + 7
2	1 + 7 + 14
3	1 + 7 + 14 + 21
n	1 + 7 +...+ 7(n-1) + 7n

Algunos alumnos aplican el método de Gauss para obtener el valor de la suma indicada.

ESTRATEGIA (e5)

Se observan fichas alineadas.

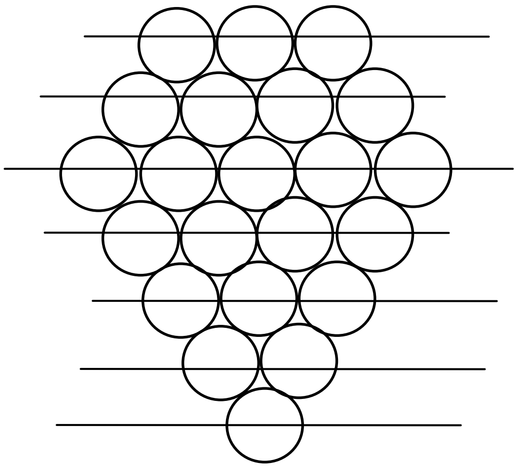


CASO	TOTAL DE FICHAS
1	2+3+3
2	3+4+5+5+5
3	4+5+6+7+7+7+7
n	(n+1 + n+2 + ... + 2n-1 + 2n) + (n+1)(2n+1)

La mayoría de los resolutores deja la suma indicada.

ESTRATEGIA (e6)

Se observan fichas alineadas en otra dirección.



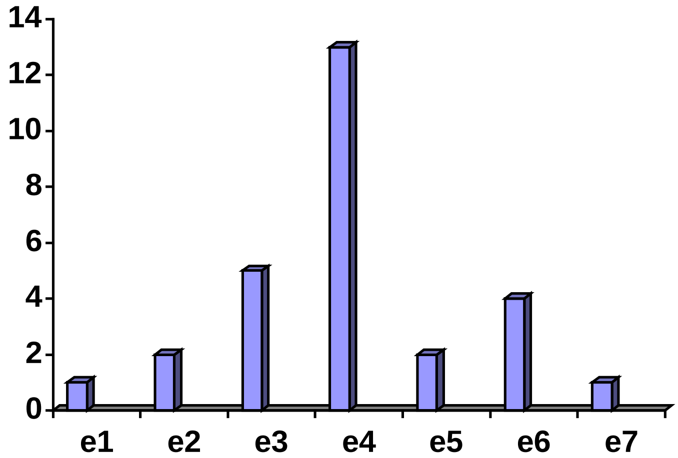
CASO	TOTAL DE FICHAS
1	1+2+3+2
2	1+2+3+4+5+4+3
3	1+2+3+4+5+6+7+6+5+4
n	(1+ 2 +...+ 2n + 2n+1) + (2n + 2n-1 +... + n+2 + n+1)

ESTRATEGIA (e7)

Se descompone cada número en dos sumandos. El primero es la unidad, y el segundo, es el número triangular correspondiente multiplicado por siete.

CASO	TOTAL DE FICHAS
1	8 = 1+7
2	22 = 1+21 = 1+7·3
3	43 = 1+42 = 1+7·6
n	1 + 7n(n+1)/2

En el siguiente gráfico se muestra la frecuencia de cada estrategia:

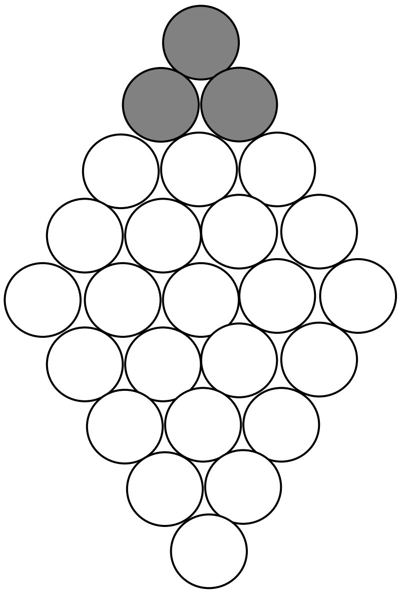


Asimismo, el trabajo de estos alumnos pone también de manifiesto lo siguiente:

- La tendencia inicial es averiguar cómo se obtiene cada término a partir del anterior. Ésta cambia al introducir preguntas sobre cuál es el valor de un término cuya posición en la sucesión es muy avanzada.
- La analogía se convierte en uno de los procedimientos al que recurre el alumnado. Por ejemplo, descomponer el pentágono de fichas en un hexágono y en un triángulo, después de haber estudiado los números triangulares.

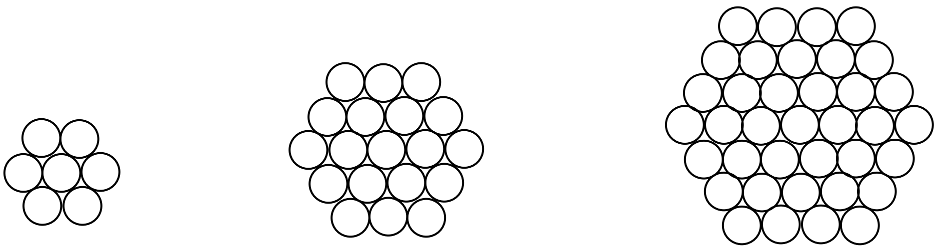
- Algunos alumnos que obtienen como término general $(7n^2+7n+2)/2$, piensan que es diferente al valor, $1+7n(n+1)/2$, encontrado por otros compañeros.

Esta misma actividad se realizó con otro grupo de alumnos, no instruido previamente. Las estrategias que surgieron fueron: e4, e5, y la e6, donde la e4 es la más frecuente. En este caso, una alumna completa la figura para obtener un rombo de fichas.



Hemos presentado secuencias de figuras con fichas (o puntos) cuyas configuraciones se corresponden con trapecios y pentágonos, respectivamente. A continuación, comentamos el trabajo con una hexagonal:

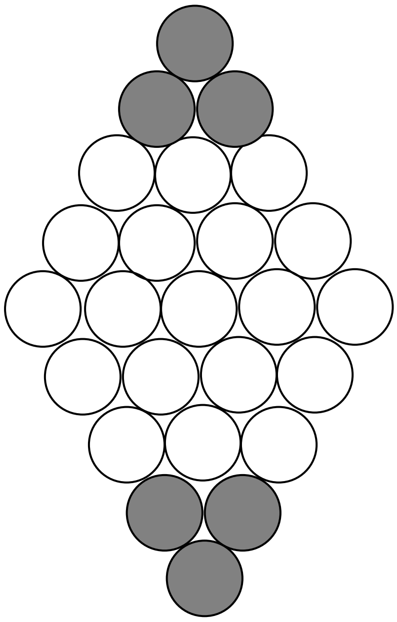
Dada la serie de figuras que sigue, determina el número de fichas para el caso n-ésimo.



Las estrategias menos frecuentes que aplicaron los alumnos fueron:

ESTRATEGIA 1:

Se completan las figuras para obtener rombos.

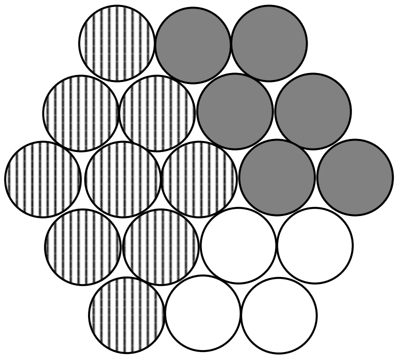


ORDEN	TOTAL DE FICHAS
1	$3^2 – 2$
2	$5^2 – 2(1+2)$
3	$7^2 – 2(1+2+3)$
n	$(2n+1)^2 – n(n+1)$

En este caso, el término general se expresó como suma de diferencias de números triangulares.

ESTRATEGIA 2:

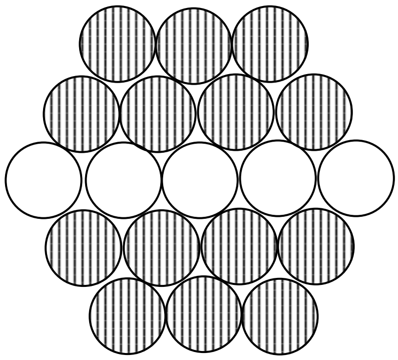
Las figuras se descomponen en paralelogramos.



ORDEN	TOTAL DE FICHAS
1	$2^2 + 2\cdot1 + 1$
2	$3^2 + 3\cdot2 + 2^2$
3	$4^2 + 3\cdot4 + 3^2$
n	$(n+1)^2 + n(n+1) + n^2$

ESTRATEGIA 3:

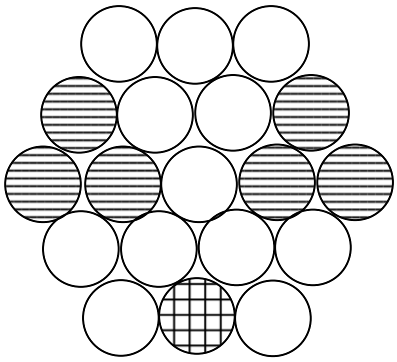
Se observan simetrías:



ORDEN	TOTAL DE FICHAS
1	3 + 2·2
2	5 + 2(3+4)
3	7 + 2(4+5+6)
n	2n+1 + 2(n+1 + n+2 +...+ n+(n-1) + n+n)

ESTRATEGIA 4

Las figuras se descomponen en triángulos.

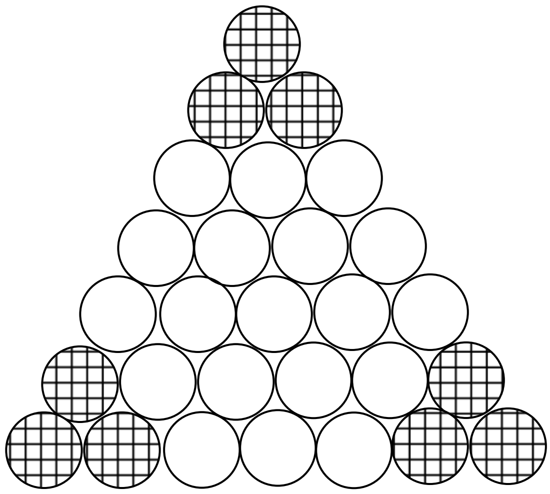


ORDEN	TOTAL DE FICHAS
1	(1+2) + 4·1
2	(1+2+3) + 4(1+2) + 1
3	(1+2+3+4) + 4(1+2+3) + (1+2)
n	(1+2+...+n+n+1) + 4(1+2+...+n-1+n) + (1+2+..+n-2+n-1)

La estrategia más frecuente es la que sigue:

ESTRATEGIA 5

El hexágono se completa para obtener un triángulo:



ORDEN	TOTAL DE FICHAS
1	(1+2+3+4) - 3(1)
2	(1+2+3+4+5+6+7) - 3(1+2)
3	(1 +2+3+ 4+5+6+7+8+9+10) - 3(1+2+3)
n	(1+2+...+3n+3n+1) - 3(1+2+...+n-1+n)

Algunas relaciones con los números figurados

En este orden de cosas, parece interesante comparar los números que se obtienen en estos problemas con los números figurados.

Sean:

$t_n = n(n + 1)/2$, n-ésimo número triangular

$c_n = n^2$, n-ésimo número cuadrado

$tr_n = (n + 1)(3n + 2)/2$, n-ésimo número de la secuencia de trapecios

$p_n = (7n^2 + 7n + 2)/2$, n-ésimo número de la secuencia de pentágonos

$h_n = 3n(n + 1) + 1$, n-ésimo número de la secuencia de hexágonos.

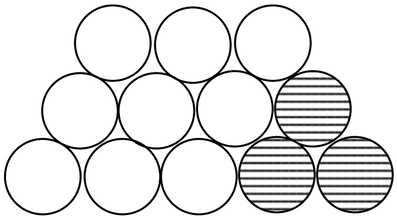
Entonces:

$tr_n = t_{n+1} + 2t_n = c_{n+1} + t_n$

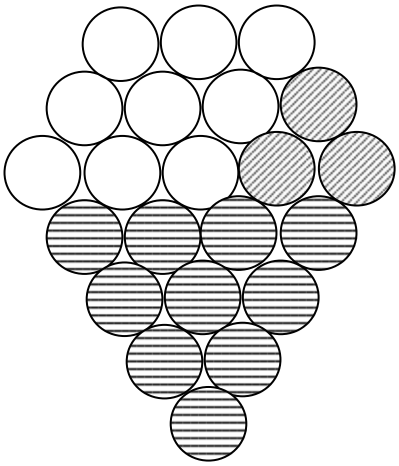
$p_n = tr_n + t_{2n} = t_{n+1} + 2t_n + t_{2n} = c_{n+1} + t_n + t_{2n}$

$h_n = p_n – t_n = tr_n + t_{2n} – t_n = t_{n+1} + t_{2n} + t_n = c_{n+1} + t_{2n}$.

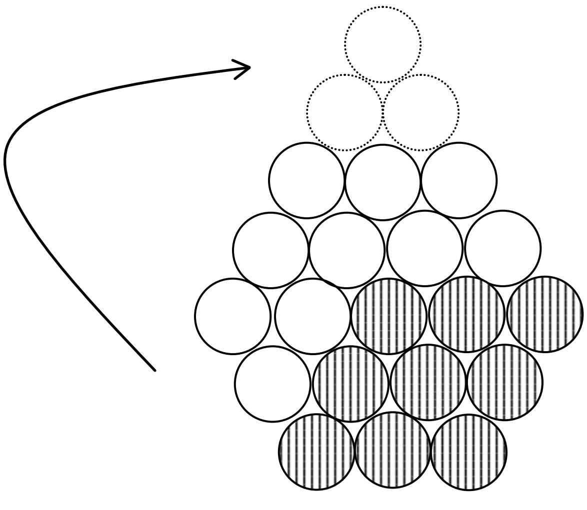
Las relaciones anteriores se pueden visualizar, por ejemplo:



$tr_n = c_{n+1} + t_n$

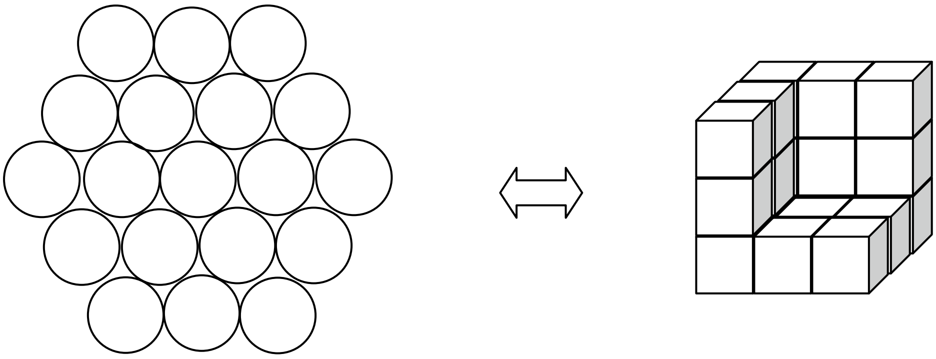


$p_n = c_{n+1} + t_n + t_{2n}$



$h_n = c_{n+1} + t_{2n}$.

Un modelo visual de la fórmula $h_n = (n+1)^3 - n^3$, que relaciona estos números con los cúbicos, encontrado en Nelsen (1993), es el siguiente:

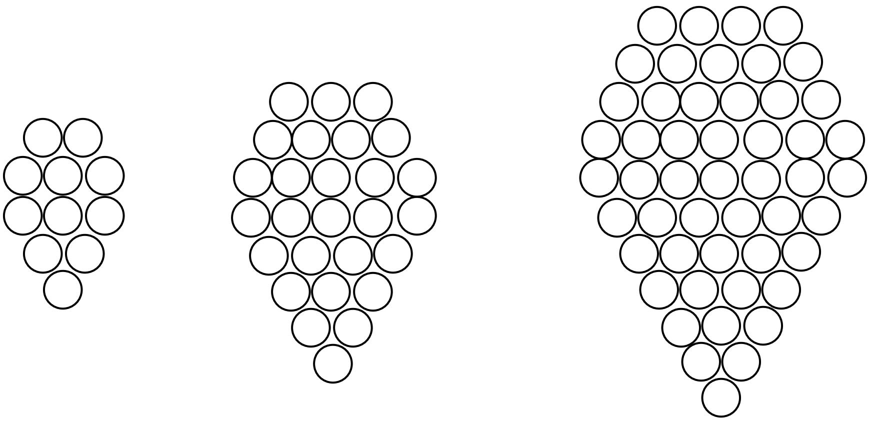


De este resultado se puede obtener que:

$$h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_{n-2} + h_{n-1} + h_n = (n+1)^3 - 1.$$

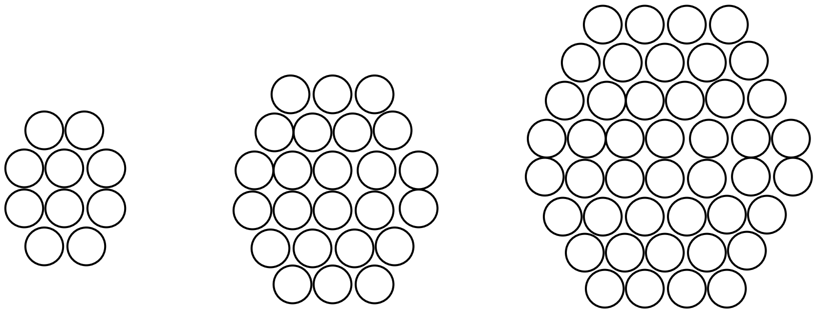
Otras actividades

1. ¿Cuántas fichas hay en cada una de las siguientes figuras?

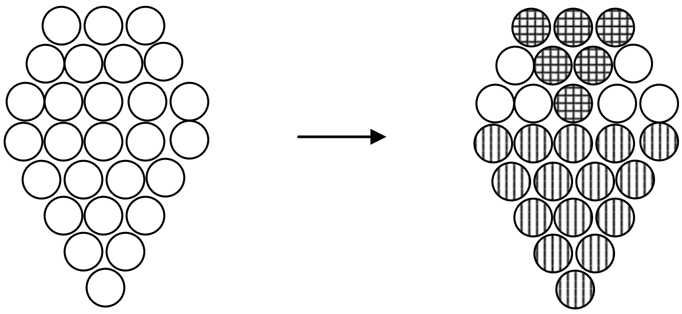


A la vista de los resultados, ¿podrías calcular cuántas fichas habrá en la sexta figura? ¿Cuántas fichas habrá en la n-ésima figura?

2. Ídem para la secuencia de figuras:

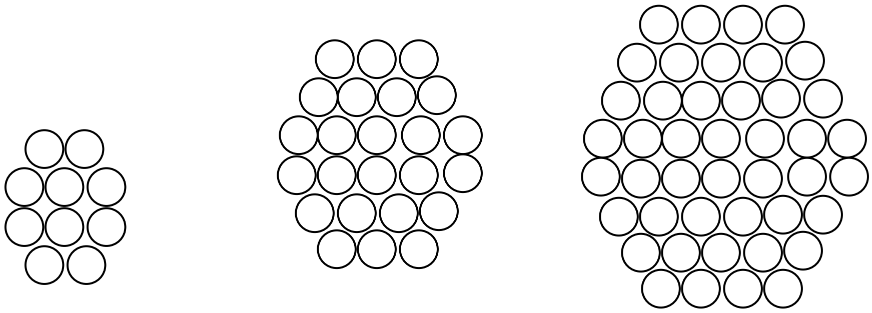


3. Observa que si descomponemos la siguiente figura, tal y como se muestra en el dibujo, podemos expresar el total de fichas como suma de números triangulares, es decir: $t_3 + 2t_2 + t_5$.

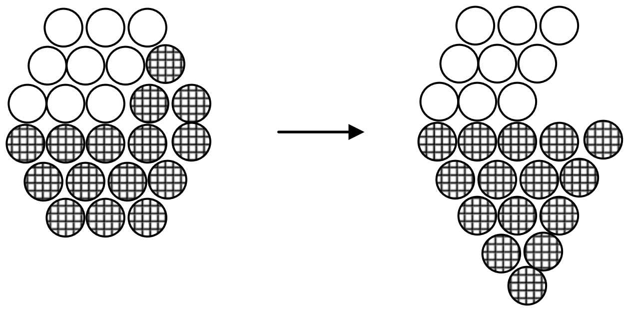


¿Qué descomposición hay que hacer para expresar el total de fichas como suma de dos números triangulares y uno cuadrado?

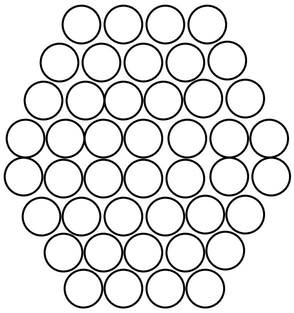
4. ¿Es cierto que el total de fichas que hay en la segunda figura de esta serie es $t_3 + t_2 + t_5$? ¿Y en las demás figuras?



5. ¿Qué sugiere la siguiente transformación de la segunda figura de la serie anterior? ¿Podemos hacer lo mismo con las demás?



6. Representa en la figura la suma: $2c_4 + 2t_3$.



Referencias bibliográficas

JOUETTE, A. (2000): *El secreto de los números*. Robinbook. Barcelona.

NELSEN, R. (1993): *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America. Washington.

SOCAS, M.M. et al. (1989): *Iniciación al Álgebra*. Síntesis. Madrid.