

O uso do GeoGebra no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e de Funções¹

El uso del GeoGebra en el estudio de algunos resultados de la Geometria Plana e de Funciones

JONAS WEVERSON DE ARAÚJO SILVA²

KARINA VICENTE DE OLIVEIRA³

KEYTT AMARAL DA SILVA⁴

MAGNA DOS REIS BARBOSA⁵

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA⁶

RAQUEL ALINE OLIVEIRA ELOY⁷

SEVERINO HORACIO DA SILVA⁸

SORAYA MARTINS CAMELO⁹

Resumo

Neste artigo, relatamos o uso do software GeoGebra na abordagem de alguns tópicos da Matemática do Ensino Médio. Realizamos duas oficinas com o GeoGebra junto ao PIBID/UFMG e percebemos que tanto alunos quanto professores do Ensino Básico demonstraram bastante interesse em trabalhar com o software, procurando entender seu funcionamento para aplicá-lo na resolução de alguns problemas e na verificação de alguns resultados da Geometria Plana, uma vez que o mesmo facilita a compreensão de alguns conceitos.

Palavras Chave: PIBID; Matemática; GeoGebra.

Resumen

En este artículo, relatamos el uso del software GeoGebra en el planteamiento de algunos tópicos de la Matemática del Educación Média. Realizamos dos talleres con el GeoGebra junto al PIBID/UFMG y percibimos que tanto alumnos cuanto profesores del Educación Básica demostraron bastante interés en trabajar con el software, buscando entender su funcionamiento para aplicarlo en la resolución de algunos problemas y en la verificación de algunos resultados de la Geometria Plana, una vez que el mismo facilita la comprensión de algunos conceptos.

Palabras Clave: PIBID; Matemática; GeoGebra.

¹ Apoio: CAPES e CCT/UFMG

² Universidade Federal de Campina Grande – jonasweverson@hotmail.com

³ Universidade Federal de Campina Grande – karina_22oliveira@yahoo.com.br

⁴ Universidade Federal de Campina Grande – keyttinha_cg@hotmail.com

⁵ Universidade Federal de Campina Grande – magnadosreis@hotmail.com

⁶ Universidade Federal de Campina Grande – marcellaluanna@hotmail.com

⁷ Universidade Federal de Campina Grande – raquelaline87@hotmail.com

⁸ Universidade Federal de Campina Grande – horaciousp@gmail.com

⁹ Universidade Federal de Campina Grande – sorayacamelohotmail.com

Introdução

A Matemática é vista como um “filtro social”, uma vez que a sociedade incorporou a ideia de que esta é uma ciência “para poucos”. Na tentativa de mudar essa visão, os educadores estão buscando inserir novas ferramentas como o uso, por exemplo, do computador nas salas de aula, de materiais manipuláveis e de jogos educativos. A partir disto, tivemos como parte das atividades desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) – UFCG, em parceria com a escola E.E.E.F.M. Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro, o trabalho com o *software* GeoGebra, com o intuito de facilitar a compreensão de alguns conceitos matemáticos, tendo em vista a dificuldade de aprendizagem diante dos mesmos.

O GeoGebra é um *software* que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral. O diferencial deste programa é que ele possui um sistema de Geometria Dinâmica que permite que o usuário realize construções e insira equações e coordenadas, que podem estar diretamente interligadas, fazendo modificações quando necessário.

Segundo Hasche (2008), a utilização de novas metodologias de ensino pode ser efetiva por ter respaldo na motivação dos aprendizes em lidar com novas situações para a construção de seu conhecimento. Mas, manipular entes matemáticos abstratos em uma representação à sua frente não deve ter a intenção de “poupar” o desenvolvimento teórico para o aprendiz. Ao contrário, a intenção presente deve gerar situações que demandem revisar a teoria e criar motivação para novos desenvolvimentos teóricos, nas quais o aprendiz possa ser verdadeiramente confrontado com dificuldades intrínsecas da matéria.

D’Ambrósio (2002) afirma que “[...] temos com o auxílio da informática e com o crescente ramo de programação, vários softwares que possuem o objetivo de aprender, ensinar e se trabalhar com a Matemática. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro”. Portanto, cabe ao professor buscar seu aprimoramento constante e superar desafios na utilização de novas metodologias de ensino, inclusive para adaptar-se aos novos conhecimentos tecnológicos como os *softwares* matemáticos, a exemplo do Winplot, Logo, GeoGebra, entre outros.

Com base nessas reflexões, as atividades com o GeoGebra foram planejadas com o objetivo de subsidiar uma aprendizagem que permitisse ao estudante, a medida que os

objetos fossem manipulados, o desenvolvimento de capacidades que caracterizam atos próprios do “fazer matemático” como experimentar, representar, analisar e formalizar as relações pertinentes ao assunto em estudo.

1. Sobre o GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de Matemática desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, para Educação Matemática nas escolas (ver Hohenwarter, 2002). Este *software* é um sistema de Geometria Dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas como com funções. Além disso, as equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Este *software* relaciona variáveis com números, vetores e pontos e oferece comandos como raízes de equações e extremos de funções. O GeoGebra, portanto, permite associar uma expressão em Álgebra à uma representação de um objeto da Geometria e vice-versa.

O GeoGebra pode ser adquirido a partir da Internet, sendo distribuído livremente de acordo com a GNU (General Public License). Em www.geogebra.at encontra-se o código fonte Java do GeoGebra e informações sobre sua tradução. Qualquer usuário pode fazer a instalação individual do programa; é fácil e rápido.

A Interface deste *software* é constituída de uma janela gráfica (Ver Figura 1) que se divide em uma área de desenho, uma janela de álgebra e um campo de entrada de comandos.

A área de desenho possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as construções geométricas com o mouse. Ao mesmo tempo as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra. (Ver Figura 2).

O campo de entrada de comandos é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções diretamente, e estes são mostrados na área de desenho imediatamente após pressionar a tecla “Enter”.

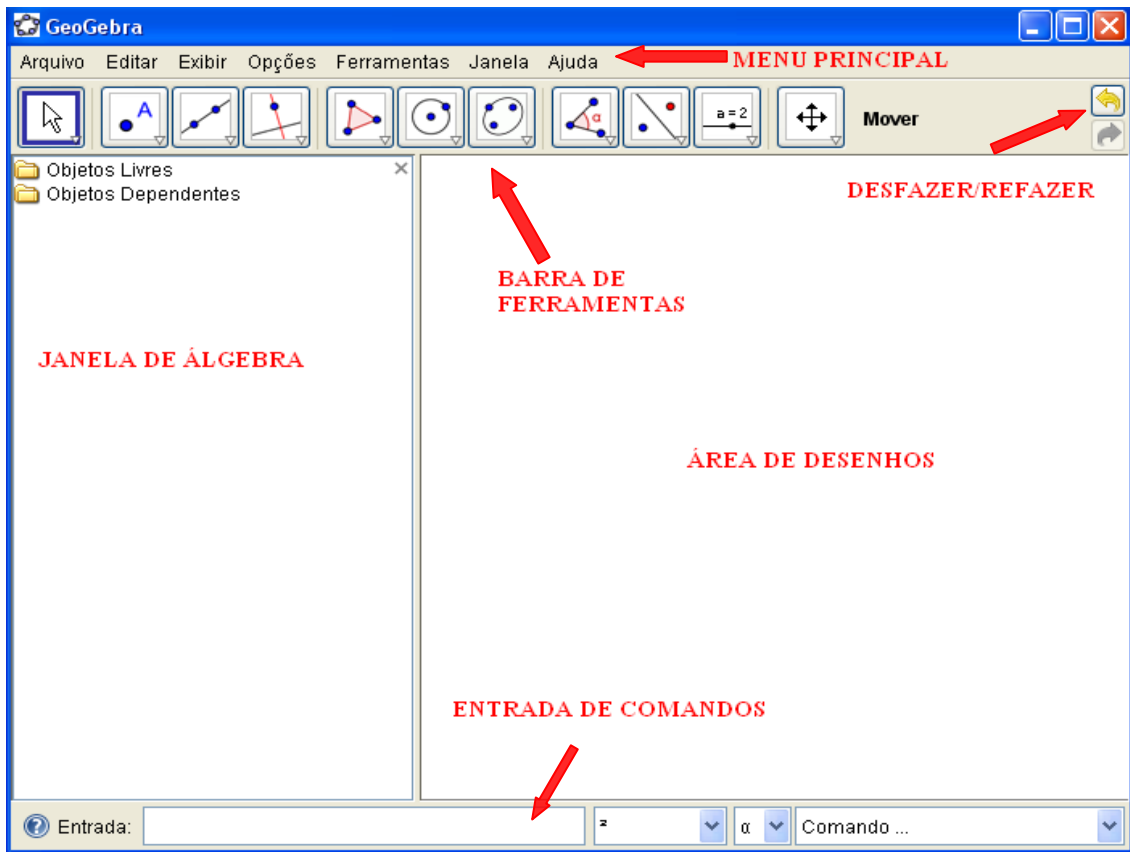


FIGURA 1: Janela gráfica do GeoGebra.

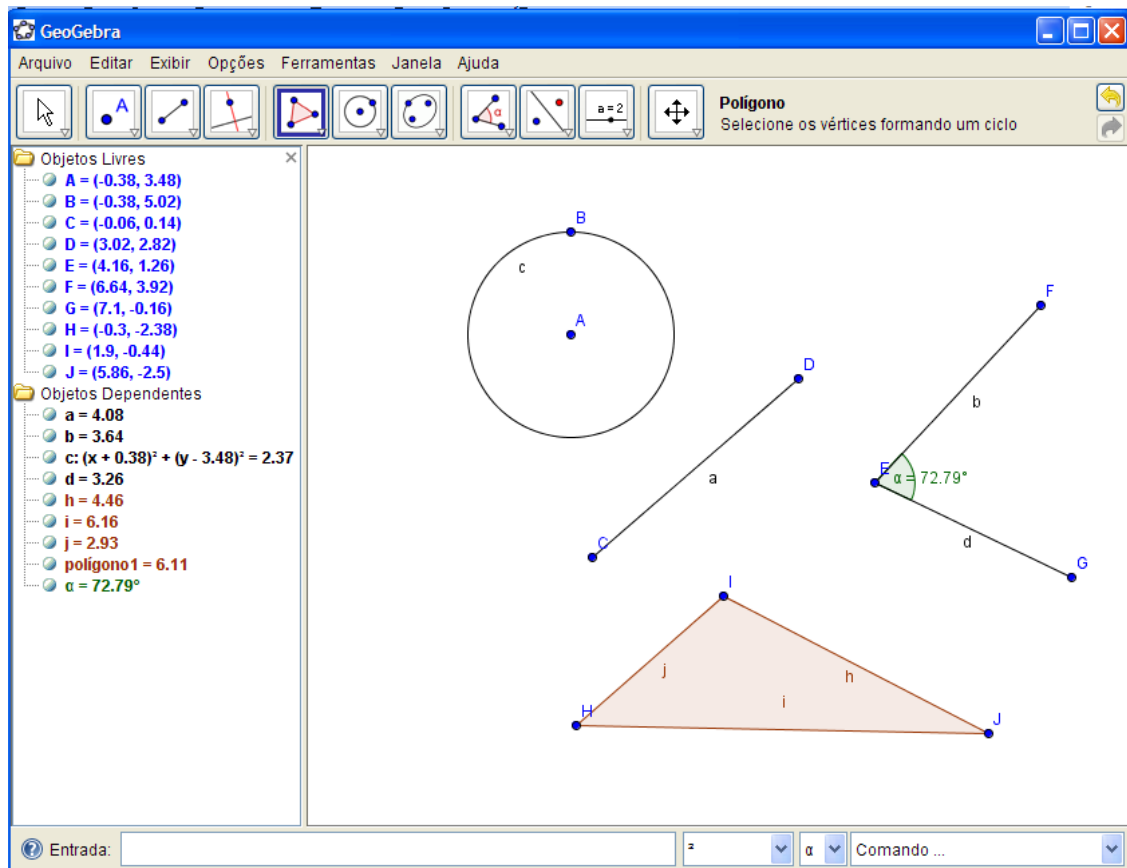


FIGURA 2: Exemplos de objetos livres e objetos dependentes.

2. Oficinas Ministradas

O trabalho desenvolvido com o GeoGebra pelo PIBID/UFCG foi dividido em duas etapas. A primeira delas foi a realização, durante a 5ª Semana de Matemática do CCT/UFCG, de uma oficina intitulada “Oficina GeoGebra”, oferecida para professores das redes de ensino pública e particular de Campina Grande e região, abordando vários conteúdos a níveis Médio e Superior e mostrando como utilizá-los em sala de aula. Posteriormente, essa oficina foi adaptada para alunos do Ensino Médio e ministrada na E.E.E.F.M. Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro, parceira do PIBID, abordando o ensino de Geometria através do GeoGebra.

A primeira oficina foi dividida em dois dias, com duração de duas horas cada. No primeiro dia abordamos algumas questões sobre o uso do computador e dos *softwares* na Educação, apresentamos o *software* GeoGebra, explicando o seu funcionamento (barra de ferramentas e interface) e alguns de seus comandos, e trabalhamos com atividades lúdicas, tais como a construção de um balão, de um pentagrama e do símbolo *Ying Yang*. No segundo dia utilizamos o GeoGebra na Geometria para verificar, de maneira mais simples, a validade de alguns teoremas da Geometria Euclidiana, a exemplo do Teorema do Ângulo Externo e do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulo, já que a maioria desses possui demonstrações bem elaboradas.

Utilizamos, ainda, o GeoGebra no estudo de Função, explorando conteúdos como função afim, sistema de equações lineares com duas variáveis, funções polinomiais, funções trigonométricas e situações-problema sobre funções, visto que o *software* dispõe de ferramentas que permitem que o aluno construa e observe o comportamento de cada função. Esse processo, por sua vez, facilita o entendimento de diversos conceitos, pois o aluno aprende fazendo e experimentando.

A segunda oficina, que foi adaptada do trabalho citado acima para os alunos do Ensino Médio, também foi dividida em dois dias, com duração de duas horas cada. No primeiro dia apresentamos o *software* GeoGebra, explicando o seu funcionamento (barra de ferramentas e interface) e alguns de seus comandos, e trabalhamos com atividades lúdicas, a saber, a construção de um balão e da bandeira do Brasil, visto que era época de São João e da Copa do Mundo de Futebol. No segundo dia trabalhamos com tópicos de Geometria, tais como paralelismo, perpendicularismo, alinhamento de três pontos, pontos principais de um triângulo e triângulo retângulo e suas relações métricas,

assuntos esses que, em geral, apresentam altos índices de incompreensão quando são abordados utilizando-se apenas o quadro branco e a aula expositiva.

3. Atividades Desenvolvidas

Conforme citamos anteriormente, as oficinas ministradas possuíam públicos distintos. Sendo assim, as atividades foram elaboradas de acordo com cada nível de aprendizagem, explorando diversos conceitos matemáticos, aumentando gradualmente a dificuldade e permitindo o acompanhamento e a exploração desse *software*.

O GeoGebra é de fácil manuseio e permite ao usuário realizar diversas construções geométricas além de uma infinidade de animações, o que contribui significativamente para o estudo da Geometria, uma vez que os conceitos que os professores têm dificuldades de apresentar utilizando apenas o quadro branco, podem ser compreendidos através das ferramentas dinâmicas que este *software* apresenta. Baseados nisso, desenvolvemos as atividades da primeira e da segunda oficinas com o intuito de tentar melhorar o ensino da Matemática nas escolas parceiras. Na primeira oficina, dentre os vários teoremas da Matemática, sugerimos que os alunos verificassem a validade dos seguintes resultados da Geometria Euclidiana, ver Barbosa (2005):

PROPOSIÇÃO: “Todo polígono regular está inscrito em um círculo.” (ver Figura 3)

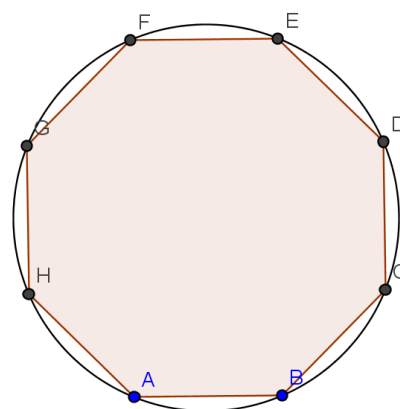


FIGURA 3: Polígono regular inscrito em um círculo.

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO: “Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.” (ver Figura 4)

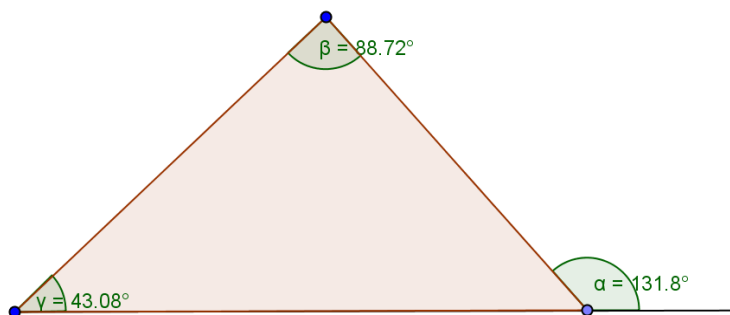


FIGURA 4: Um ângulo externo e seus ângulos internos não adjacentes.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO: “Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.” (ver Figura 5)

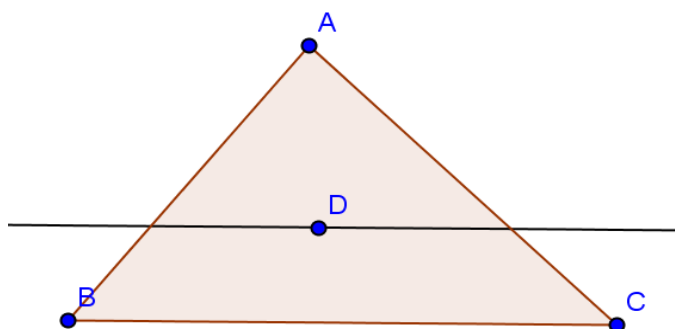


FIGURA 5: Representação geométrica do Teorema fundamental da Semelhança de Triângulo.

TEOREMA DA DESIGUALDADE TRIANGULAR: “Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.” (ver Figura 6)

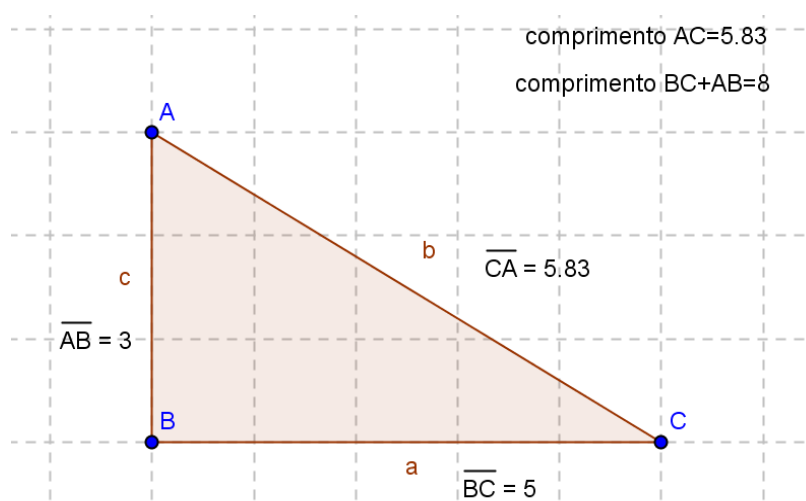


FIGURA 6: Representação geométrica do Teorema da Desigualdade Triangular.

Todos os resultados acima foram extraídos de Barbosa (2005), por ser o livro texto utilizado nos Cursos de Licenciatura em Matemática do CCT/UFMG.

Ainda utilizando o GeoGebra, através da construção de gráficos que podem variar dinamicamente, trabalhamos com o estudo de funções, mostrando como ele pode auxiliar os alunos na compreensão de alguns conceitos e de algumas situações-problema, como a dada em Swokowski (1994), formulada abaixo:

“A partir de uma folha de papelão quadrada de lado 1 m quer-se construir uma caixa retangular, para isto cortando-se pequenos quadrados nos cantos da folha. Se x é a medida do lado dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa em função de x . Existe uma caixa de volume máximo?”

Solução:

$$\text{volume} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

$$\text{volume} = \text{lado1} \times \text{lado2} \times \text{altura}$$

O volume da caixa é dado por:

$$V(x) = x(1 - 2x)(1 - 2x) = 4x^3 - 4x^2 + x$$

Os alunos fizeram todos os cálculos e logo após construíram o gráfico da função volume, com auxílio do GeoGebra, (ver Figura 7) e perceberam que o volume é máximo para $x = 0,17$, obtendo assim $V(0,17) = 0,07$.

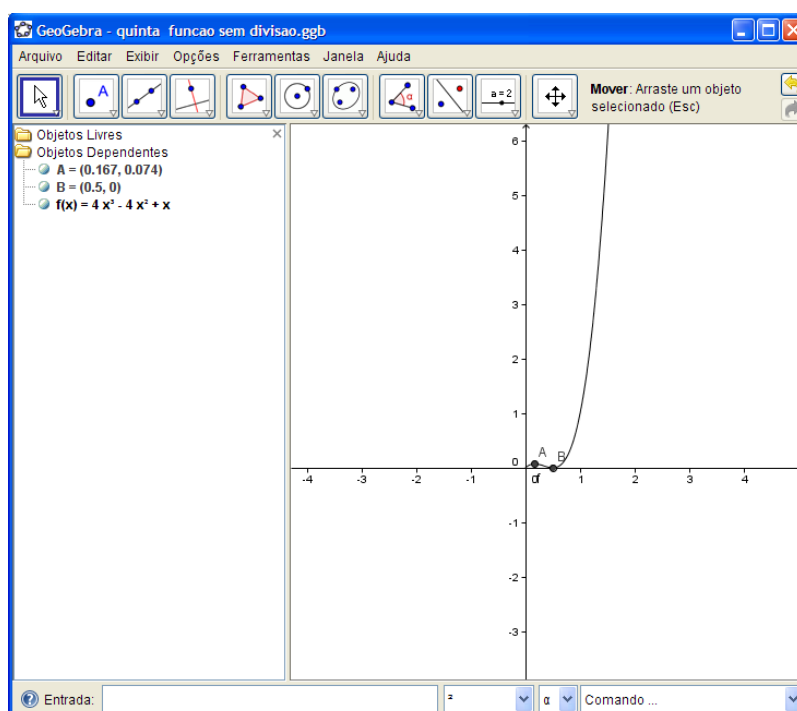


FIGURA 7: Representação gráfica da situação problema.

Quando iniciamos nosso trabalho na escola parceira, notamos que durante as observações das aulas ministradas pela professora supervisora e durante as ministrações de nossas próprias aulas, os alunos do Ensino Médio tinham bastante dificuldade em compreender alguns conceitos da Geometria. Sendo assim, adaptamos a oficina acima citada, conforme havíamos mencionado, com o intuito de facilitar a aprendizagem dos mesmos.

A segunda oficina, portanto, foi proposta em dois dias e no horário oposto (manhã) às aulas dos alunos, visto que os mesmos estudavam no turno da tarde. Respaldados nessas dificuldades e com o intuito de fazê-los compreender melhor alguns conteúdos da Matemática, elaboramos as atividades explorando alguns tópicos da Geometria Plana. Dentre as atividades propostas para a oficina, destacamos as seguintes:

(I) sugerimos aos alunos que traçassem duas retas paralelas cortadas por uma transversal e verificasse o que acontecia com seus ângulos. Os alunos já sabiam a teoria, mas o *software os fez* visualizar, sem dificuldades, que os ângulos correspondentes e os ângulos alternos (internos e externos) são congruentes e que os ângulos colaterais (internos e externos) são suplementares, (ver Figura 8).

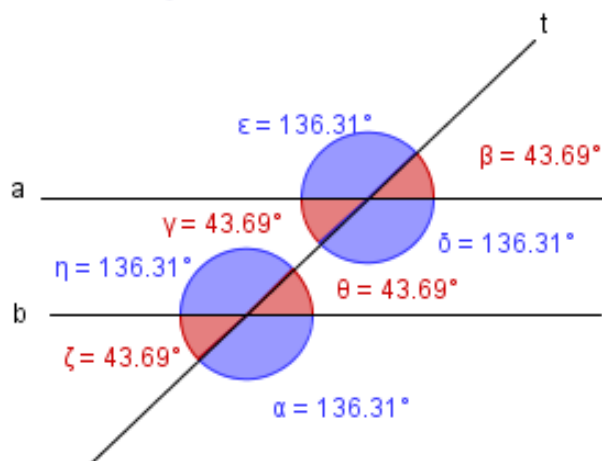


FIGURA 8: Ângulos correspondentes, alternos (internos e externos) e colaterais (internos e externos).

(II) Sugerimos aos alunos que criassem um triângulo qualquer, marcassem os pontos médios de cada lado do triângulo e traçassem segmentos de reta passando por esses pontos médios e os vértices opostos a eles, respectivamente. Logo após, os alunos

notaram que o ponto de interseção dos três segmentos de reta é o baricentro do triângulo, (ver Figura 9).

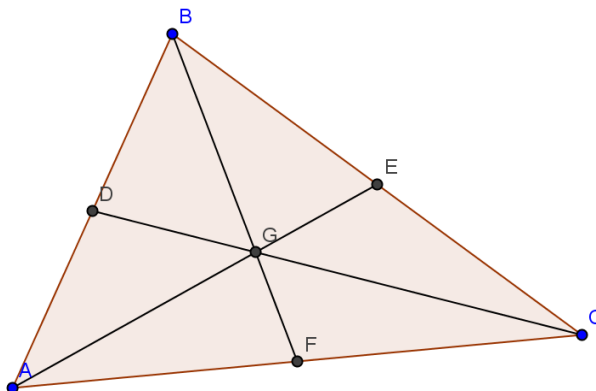


FIGURA 9: Baricentro de um triângulo qualquer.

(III) Uma outra atividade que merece enfoque foi o Teorema do Ângulo Externo. Nesta propriedade, ilustrada pela Figura 4, os alunos facilmente chegaram à conclusão que a soma das medidas dos ângulos β e γ era igual à medida do ângulo α .

Ao final das duas oficinas, percebemos a satisfação de todos por terem utilizado uma ferramenta dinâmica e interativa que nos possibilita um processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais significativo, quando a mesma é usada de maneira coerente.

4. Uma síntese comparativa entre as atividades desenvolvidas com os docentes e as atividades desenvolvidas com os discentes

Na primeira oficina ministrada tivemos uma boa receptividade, por parte dos professores ao utilizarem o software GeoGebra, uma vez que os mesmos sentiram-se motivados a trabalharem com o programa, pois perceberam o quanto o GeoGebra poderia ser útil em suas aulas de matemática, tornando-as mais dinâmicas, prazerosas e deixando mais concreto os resultados matemáticos. Listamos abaixo as atividades desenvolvidas nesta oficina:

- Atividades Lúdicas – foi trabalhada a construção de um balão e de um pentagrama;
- Verificação de Teoremas da Geometria Plana - verificamos a validade dos seguintes teoremas: três pontos não colineares determinam um círculo; todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco

correspondente; todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco tem a mesma medida, (em particular, todos os ângulos que subtendem um semicírculo são retos); todo polígono regular está inscrito em um círculo; todo triângulo está inscrito em um círculo; todo triângulo possui um círculo inscrito; teorema do ângulo externo; teorema fundamental da semelhança de triângulos (se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um novo triângulo semelhante ao primeiro); desigualdade triangular; pontos principais de um triângulo (baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro).

- Função – trabalhamos com os seguintes tópicos: função afim; exploração de funções polinomiais – pontos de interseção, função par e função ímpar, translação, raízes, extremos e pontos de inflexão e funções trigonométricas;
- Situações problema envolvendo conteúdos de funções.
- Resolução de sistema de equações lineares com duas variáveis;

No trabalho realizado com os alunos, percebemos que eles puderam compreender melhor os conteúdos ligados à Geometria de uma forma mais clara, a partir do uso do GeoGebra no ensino-aprendizagem dos mesmos. Primeiramente, tivemos que explicar os assuntos para eles e logo após os mesmos fizeram a validação do que foi aprendido utilizando o GeoGebra. A aceitação foi unânime e todos os alunos conseguiram enxergar, de uma melhor forma, os resultados matemáticos abstratos utilizando este software. Segue abaixo uma lista das atividades desenvolvidas nesta oficina:

- Atividades Lúdicas – foi trabalhada a construção de um balão e da bandeira do Brasil, porque a oficina foi realizada na época da Copa do Mundo de 2010, como também nas festividades juninas.
- Tópicos da Geometria Plana: paralelismo; perpendicularismo; alinhamento de três pontos; pontos principais de um triângulo (baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro); triângulo retângulo; teorema do ângulo externo: todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Além disso, trabalhamos as seguintes questões específicas:

- Primeira questão: traçar duas retas paralelas cortadas por uma transversal e verificar o que acontece com seus ângulos correspondentes, alternos internos e externos, colaterais internos e externos;
- Segunda questão: desenhar um triângulo qualquer e verificar que a soma dos ângulos internos é 180° ; a soma dos ângulos externos é 360° ; em qualquer vértice, o ângulo externo é o suplemento do ângulo interno; e o Teorema do Ângulo Externo;

- Terceira questão: desenhar um triângulo isósceles de base \overline{BC} , marcar seu ponto médio D e verificar que o segmento \overline{AD} é mediana, bissetriz e altura desse triângulo;
- Quarta questão: dados os seguintes pontos, verificar se eles estão alinhados: a) A(-2,-3), B(0,0) e C(2,3); b) A(-2,-3), B(0,0) e C(1,1); c) A(-2,3), B(0,1) e C(2,3); d) A(-2,3), B(0,1) e C(-1,2);
- Quinta questão: desenhar um triângulo retângulo e calcular o seno, cosseno e tangente de um dos ângulos.

Entre os exemplos trabalhados nas duas oficinas destacamos o Teorema do Ângulo Externo. Na primeira, apenas verificamos o resultado, visto que os professores já tinham conhecimento da teoria. Ao trabalharmos a Figura 4 perceberam rapidamente que $\alpha = \gamma + \beta$ confirmando o resultado conhecido por eles. Na segunda, foi preciso fazer uma revisão dos conteúdos para posteriormente trabalharmos com o software, onde percebemos que apesar de dividirmos o tempo entre teoria e prática, os alunos compreenderam o Teorema, inclusive verificando facilmente que na Figura 4 a soma das medidas dos ângulos β e γ era igual à medida do ângulo α , ou seja, que o Teorema estava sendo verificado na prática.

Considerações Finais

As novas tecnologias estão cada vez mais presentes no cenário contemporâneo e esta revolução tecnológica acontece também na escola. Por isso, professores e alunos necessitam engajar-se no processo de investigação dos recursos computacionais, a fim de construir seus próprios conhecimentos e acompanhar este acelerado crescimento dos métodos de ensino e de aprendizagem.

O *software* GeoGebra, objeto do nosso estudo, é composto por várias ferramentas que permitem construir figuras geométricas das mais simples às mais complexas, composto por uma interface bem apresentável e didática.

Com o uso do GeoGebra no ensino de Matemática, além do incentivo à criatividade e descoberta, diversos conceitos podem ser explorados, mostrando-se não somente a representação geométrica dos objetos, mas trabalhando-se, ainda, com a parte algébrica e, também, com assuntos relacionados ao Cálculo Diferencial. Esse *software*, quando bem manipulado, favorece o desenvolvimento de diversas habilidades por parte dos alunos, permitindo que os mesmos construam, experimentem e conjecturem, pois como diz o provérbio chinês, veja Lorenzato (2006): “O aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz”. Assim sendo, estamos certos de que o GeoGebra

consiste numa ferramenta motivadora e contribuinte no processo de argumentação e de dedução que a transmissão e/ou aquisição do conhecimento matemático exige.

Além disso, a utilização do computador não pode ser encarada como a “solução” dos problemas no ensino da Matemática. É importante destacar o valor desse recurso para instrumentar o processo de ensino. Desta maneira, um dos principais fatores que poderá aliar os recursos tecnológicos (computador e *software*) ao ensino da Matemática é a formação continuada dos professores de forma a atingir um número maior de profissionais, através de cursos que procurem motivar, dar condições e o suporte necessário aos professores, no sentido de enriquecer suas ações pedagógicas.

Concluimos, diante do exposto, que através das oficinas ministradas os professores sentiram-se motivados em buscar novas alternativas de ensino, enquanto que os alunos, através dos problemas propostos, foram induzidos a fazer descobertas e generalizações matemáticas, mostrando interesse e curiosidade em trabalhar com o *software*.

5. Agradecimentos

À CAPES, pelo apoio financeiro oferecido ao programa PIBID/UFCG, chamada 2007, à escola parceira, E.E.E.F.M. Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro, pela hospitalidade, bem como ao CCT/UFCG, pelo suporte dado ao PIBID/UFCG.

6. Referências Bibliográficas

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 8ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática*. 9ª ed. Campinas: Papirus, 2002.

HASCHE, F. *Tópicos de Matemática do Ensino Médio utilizando o software GeoGebra*. Disponível em <http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/53.pdf>. Acesso em 23/10/2009.

HOHENWARTER, M. *GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Tese (Mestrado em Educação Matemática). University of Salzburg, Austria, 2002.

LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.