GeoGebra e o método de Briot & Bouquet para a resolução gráfica de equações cúbicas.

GeoGebra and Briot & Bouquet method for solving cubic equations graphically.

EMÍLIA DE MENDONÇA ROSA MARQUES[1]

AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA [2]

Resumo

Em meados do século XIX, os matemáticos franceses Briot e Bouquet propuseram um intrigante método gráfico para resolução de equações cúbicas "depressed" – equações do 3º grau que não possuem o termo quadrático. A construção geométrica proposta é simples, entretanto baseia-se numa álgebra bastante engenhosa. Propomos aqui a comprovação e experimentação gráfica do método através de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra. Apresentamos ainda o engenhoso desenvolvimento algébrico que resultou nesse método gráfico de determinação de raízes reais para uma equação cúbica do tipo $x^3 + px + q = 0$, *onde p e q são números reais. O método afirma que tais soluções se resumem nas abscissas dos pontos de interseção da parábola* $y = x^2$ *com a circunferência de centro em* $C\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ *e que contém a origem.*

***Palavras-chave**: Sequência Didática, Parábola, Raízes Reais de Equações, Interpretação Geométrica.*

Abstract

In the mid-nineteenth century, french mathematicians Briot and Bouquet have proposed an intriguing graphical method for solving cubic equations "depressed" - the third degree equations that do not have the quadratic term. The proposal is simple geometric construction, though based on an ingenious algebra. We propose here the verification and testing graphical method through an instructional sequence using the software GeoGebra also present the ingenious algebraic development that resulted in this graphic method for determination of real roots of a cubic equation of the type $x^3 + px + q = 0$ *where p and q are real numbers. The method states that these solutions are summarized in the abscissas of the points of intersection of the circumference containing the origin and the center* $C\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ *with the parable* $y = x^2$.

[1] Departamento de Matemática – FC – UNESP/Bauru – emilia@fc.unesp.br

[2] Departamento de Química – FC – UNESP/Bauru – arobinso@fc.unesp.br

Introdução

A resolução de equações cúbicas, isto é, encontrar as raízes que a satisfaçam é um dos problemas mais antigos na Matemática. A primeira publicação de um método de resolução foi apresentada pelo médico e matemático italiano Girolamo Cardano no seu livro *Ars Magna* (A Grande Arte) no ano de 1545 [CARDANO, 1968]. Neste livro Cardano iniciou a sua demonstração pela equação cúbica geral: $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ e, a partir de mudança de variáveis obteve a equação cúbica reduzida: $y^3 + py = q$. Esta equação pode então ser resolvida pelo método conhecido como a "fórmula de Cardano" [NAHIN, 1998].

No presente trabalho, apresentamos uma abordagem gráfica para a resolução de equações cúbicas desenvolvida pelos matemáticos Charles Auguste Briot e Jean Claude Bouquet, em meados do século XIX. A abordagem desenvolvida por estes cientistas foi implementada, sem modificar a proposta inicial, no software GeoGebra [GEOGEBRA, 2012] de uma maneira que o estudante perceba a sutileza e beleza do método de resolução gráfica de equações cúbicas.

Para a realização deste trabalho utilizamos a décima quarta edição do livro Elementos de Geometria Analítica de duas dimensões, publicado no ano de 1896 pela Werner School Book Company [BRIOT & BOUQUET,1896]. Nesta edição a descrição de Briot e Bouquet para a resolução gráfica de equações cúbicas está apresentada, no intervalo de páginas 518-520, no Livro IV, capítulo VI, intitulado "Soluções Gráficas de Equações" e apresenta o subtítulo "Soluções de Equações do Terceiro e Quarto Graus".

1. O Método de Briot & Bouquet

Apresentamos a seguir o método desenvolvido por Briot e Bouquet para a resolução de equações cúbicas mantendo a versão original do desenvolvimento matemático. Outros autores [MEAVILLA, 2010] apresentam o método diretamente na resolução de equações, o que pode levar a dificuldades no entendimento de todos os aspetos tanto algébricos como geométricos presentes no desenvolvimento e obtenção das raízes das equações cúbicas. A tradução de parte do capítulo VI, onde é apresentado o método, foi feita pelos autores do presente trabalho.

Considere as equações (1) e (2), em duas quantidades desconhecidas x e y , onde cada uma define uma curva.

$$\Phi(x,y)=0 \tag{1}$$

$$\Psi(x,y)=0 \tag{2}$$

Este sistema de duas equações pode ser substituído por uma infinidade de sistemas equivalentes de equações; considere um sistema particular, (3) e (4), que contenha somente a variável x, um sistema que pode ser obtido eliminando y das duas equações dadas. As raízes reais da equação (4) são as abscissas dos pontos comuns às duas curvas (1) e (2).

$$\chi(x,y)=0 \tag{3}$$

$$f(x)=0 \tag{4}$$

E, ainda se o sistema de equações (3) e (4) são satisfeitas por um par de valores da forma $x=\alpha,\ y=\beta+\gamma i,$ onde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ são reais, estes valores irão satisfazer o sistema de equações (1) e (2); mas a quantidade α poderá não ser a abscissa de um ponto real comum às duas curvas. A exceção que apontamos nunca ocorre quando a equação (3) é uma equação algébrica que envolve somente y ao primeiro grau.

Quando desejamos resolver a equação (4) numa única quantidade desconhecida, as curvas determinadas por (1) e (2) podem ser selecionadas numa infinidade de diferentes maneiras. A única condição a ser satisfeita é a de que a eliminação de y entre as equações (1) e (2) forneça a equação proposta. Uma primeira combinação é $y=f(x)$, $y=0$, que leva a considerar os valores das quantidades desconhecidas como as abscissas dos pontos de intersecção da curva $y=f(x)$ com o eixo $x.$ Esta combinação é raramente a mais simples.

Exemplo II. Resolva a equação numérica $x^3-x-7=0$.

Construa por meio de uma escala precisa, a parábola $y=x^2$; descreva um círculo cujo centro C tenha as coordenadas $m=7/2$, $n=1$, e que passe pela origem; este círculo intersecta a parábola em um ponto adicional M; portanto a equação proposta tem uma raiz real, a abscissa $\overline{OP}$ do ponto M (Fig. 1). Pela medida deste comprimento através de uma escala, encontramos que $x=2.09$.

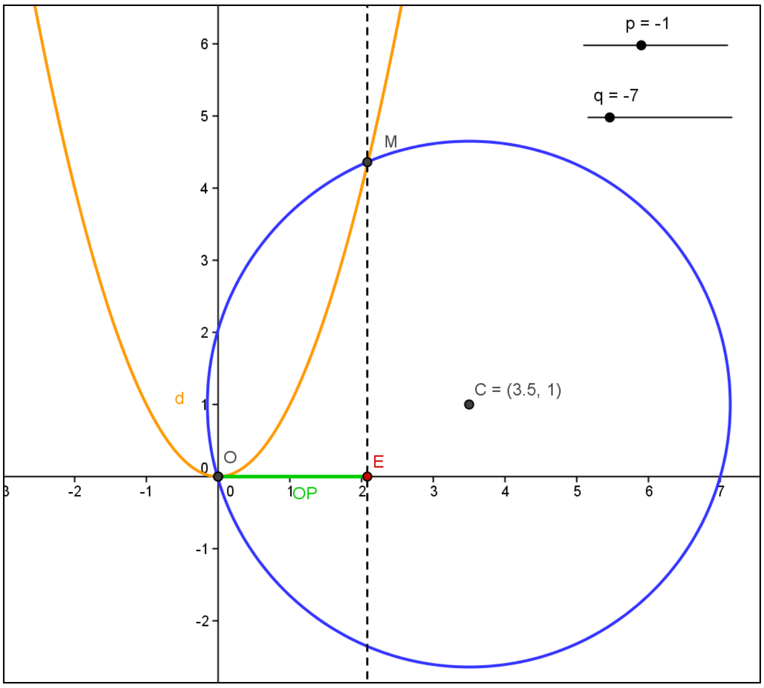

FIGURA 1: Solução Gráfica da Equação $x^3 - x - 7 = 0$.

2. Interpretação Algébrica do Método

Para entendermos o método de Briot e Bouquet do ponto de vista algébrico apresentamos o desenvolvimento a seguir, considerando a equação da circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano e tem centro no ponto $C(m,n)$, isto é, $(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2$ e uma mudança de variável dada por $y = x^2$, que consiste na transformação da equação da circunferência em um sistema de equações (5) constituído por ela e pela equação da parábola com vértice na origem.

$$\begin{cases} (x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 \\ y = x^2 \end{cases} \tag{5}$$

Desenvolvendo os quadrados da equação da circunferência temos que:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 \Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 - m^2 - n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + \cancel{m^2} + y^2 - 2ny + \cancel{n^2} - \cancel{m^2} - \cancel{n^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + y^2 - 2ny = 0$$

Desta forma, inserindo a mudança de variável $y = x^2$ obtemos uma reescrita (6) da equação da circunferência de centro no ponto $C(m,n)$,

$$x^2 - 2mx + x^4 - 2nx^2 = 0 \tag{6}$$

Portanto o sistema de equações (5) pode ser sintetizado na equação (6), lembrando sempre da relação entre as variáveis, dada por $y = x^2$.

Utilizando-se das propriedades associativa e comutativa, e um reagrupamento, transformamos a equação (6) na equação do 4º grau apresentada em (7).

$$x^4 - (2n-1)x^2 - 2mx = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 - (2n-1)x - 2m\right) = 0 \qquad (7)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo garante a existência de quatro raízes para essa equação (7), sendo que, uma das raízes é a origem do sistema cartesiano e as demais são também raízes da equação cúbica "*depressed*" (8):

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (8)$$

onde $p = -2n + 1$ e $q = -2m$.

Desta maneira pode-se obter o centro da circunferência a partir de uma equação cúbica "*depressed*" fazendo $n = \dfrac{1-p}{2}$ e $m = -\dfrac{q}{2}$.

A interpretação geométrica de um sistema de equações como em (5), nos mostra que os pontos do plano cartesiano que satisfazem o sistema são aqueles dados pela interseção da circunferência de centro em $C(m,n)$ que contém a origem e da parábola de vértice na origem, $y = x^2$. Concluímos então que cada uma das abscissas desses pontos satisfará a equação (7).

Logo, para obtermos as raízes da equação cúbica "*depressed*" (8), utilizando o método de Briot e Bouquet, procedemos da seguinte maneira:

- Acrescentamos a raiz $x = 0$ à equação (8), obtendo-se a equação (9),

$$x^4 + px^2 + qx = 0 \qquad (9)$$

- Consideramos o sistema de equações (10)

$$\begin{cases} x^4 + px^2 + qx = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \qquad (10)$$

- Realizamos a mudança de variáveis na equação (9) dada pela parábola, obtendo-se (11)

$$y^2 + py + qx = 0 \qquad (11)$$

- Realizamos uma manipulação algébrica completando os quadrados para as duas variáveis, o que nos dá o centro da circunferência no ponto $C\left(-\frac{q}{2},\frac{1-p}{2}\right)$, tendo em vista que:

$$\left(y-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+\left(x+\frac{q}{2}\right)^2-x^2-\frac{q^2}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{q}{2}\right)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2-x^2-\frac{\left(p^2+q^2\right)}{4}=0\xleftrightarrow{y=x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{q}{2}\right)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2-y-\frac{\left(p^2+q^2\right)}{4}=0\xleftrightarrow{m=-q/2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+y^2+py+\frac{p^2}{4}-y-\frac{\left(p^2+q^2\right)}{4}=0\xleftrightarrow{n=1-p/2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y^2+\left(p-1\right)y+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2p}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y-n\right)^2-\frac{q^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-\frac{2p}{4}+\frac{1}{4}\right)=0\xleftrightarrow{m^2=\left(q/2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y-n\right)^2-m^2-\frac{\left(p-1\right)^2}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y-n\right)^2-m^2-\left(-n\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2+\left(y-n\right)^2=m^2+n^2,\ \text{com } m=-\frac{q}{2}\ \text{e}\ n=\frac{1-p}{2}.$$

3. Implementação do método no software GeoGebra.

Para que se possa utilizar o método de modo dinâmico para quaisquer equações cúbicas "*depressed*", $x^3+px+q=0$, propomos a seguinte sequência didática implementada no GeoGebra:

1. Inserir dois seletores, p e q.
2. Inserir, na janela algébrica, $m=-\frac{q}{2}$ e $n=\frac{1-p}{2}$.
3. Inserir os pontos $\mathrm{O}(0,0)$ e $C(m,n)$, na janela gráfica ou algébrica.
4. Construir, na janela gráfica, a circunferência de centro no ponto $C(m,n)$ e que contenha a origem do sistema cartesiano $\mathrm{O}(0,0)$, como mostra a Fig. 2.

5. Inserir, na janela algébrica, a parábola $y = x^2$.

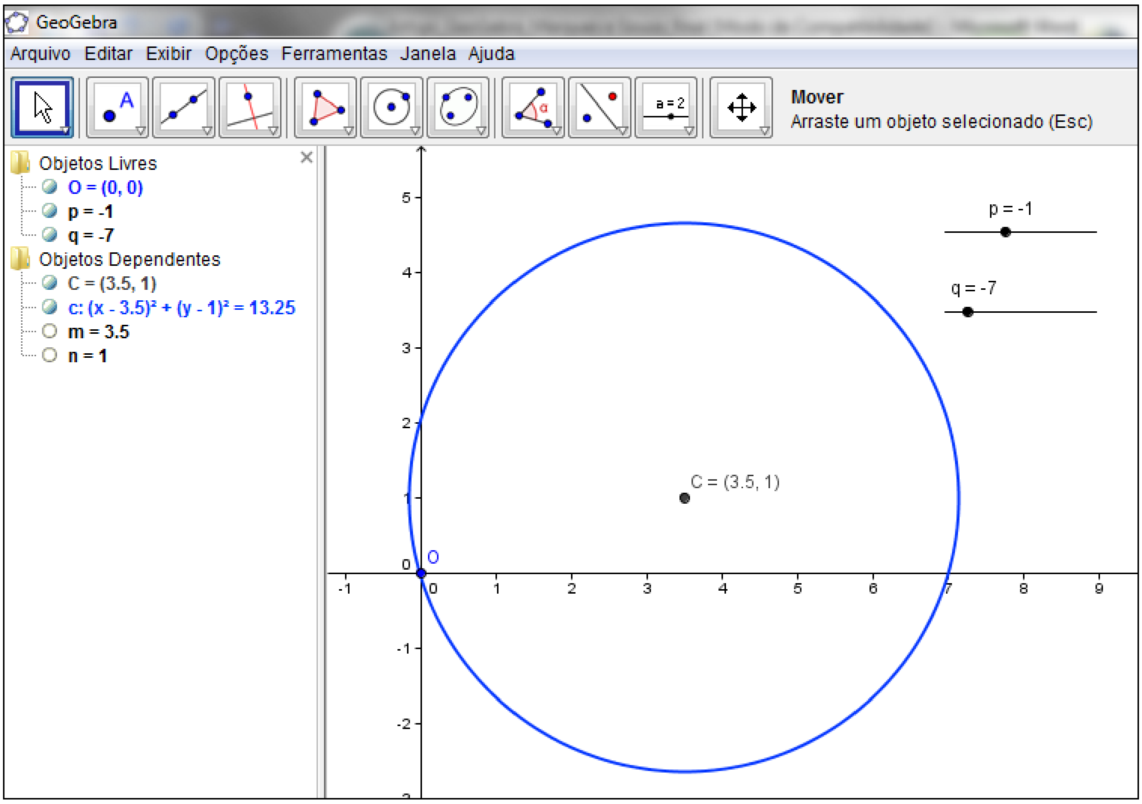

FIGURA 2: Construção da circunferência de centro $C(m,n)$ contendo a origem O.

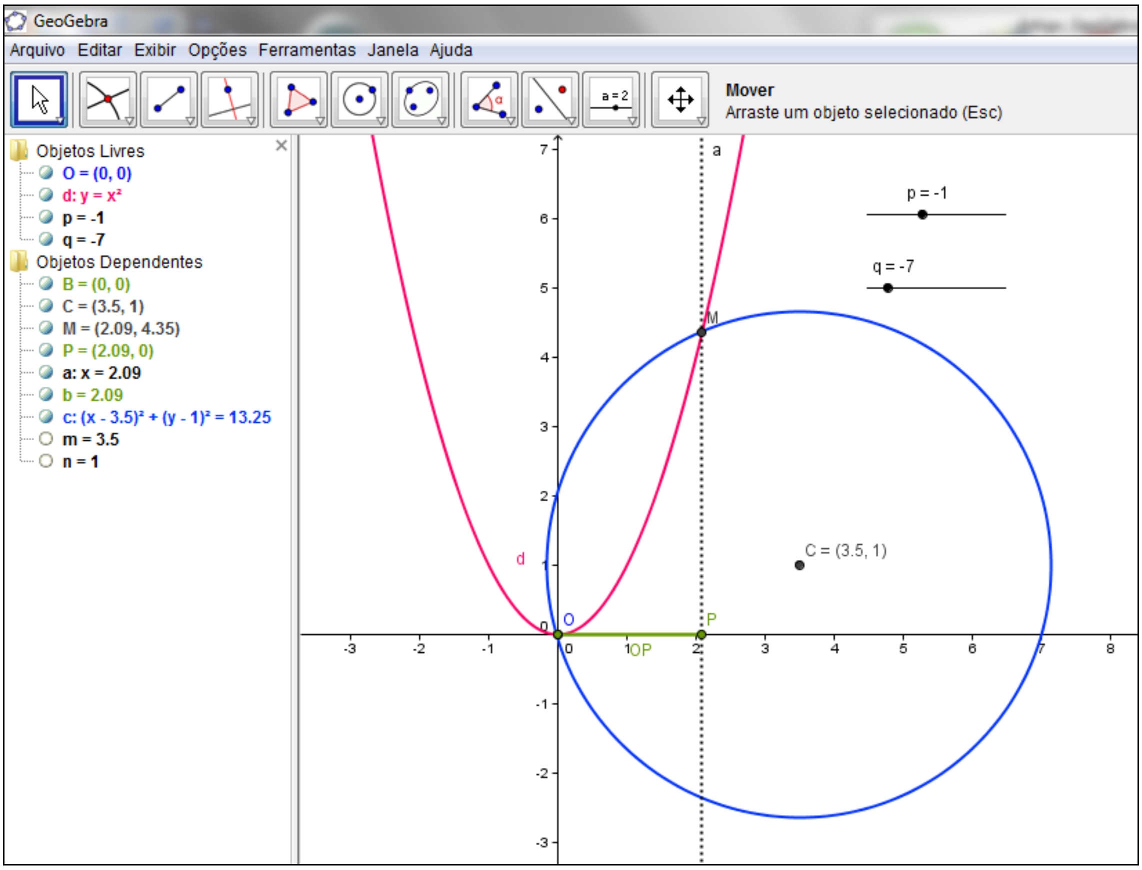

FIGURA 3: Determinação da raiz real $x = b$ (abscissa do ponto M = medida do seguimento $\overline{OP}$).

6. Determinar graficamente as interseções entre a circunferência e a parábola (pontos O e M).
7. Traçar uma perpendicular ao eixo-x passando em cada interseção obtida, exceto pelo ponto da origem do sistema cartesiano.
8. Determinar o ponto de interseção P entre o eixo-x e a perpendicular traçada no item 7.
9. Determinar o segmento de reta pelos pontos O e P. O valor da medida desse segmento (b) é uma das raízes reais da equação cúbica considerada (Fig. 3).

Para confirmação do método sugerimos um último passo na sequência didática.

10. Construção do gráfico da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$, (Fig. 4).

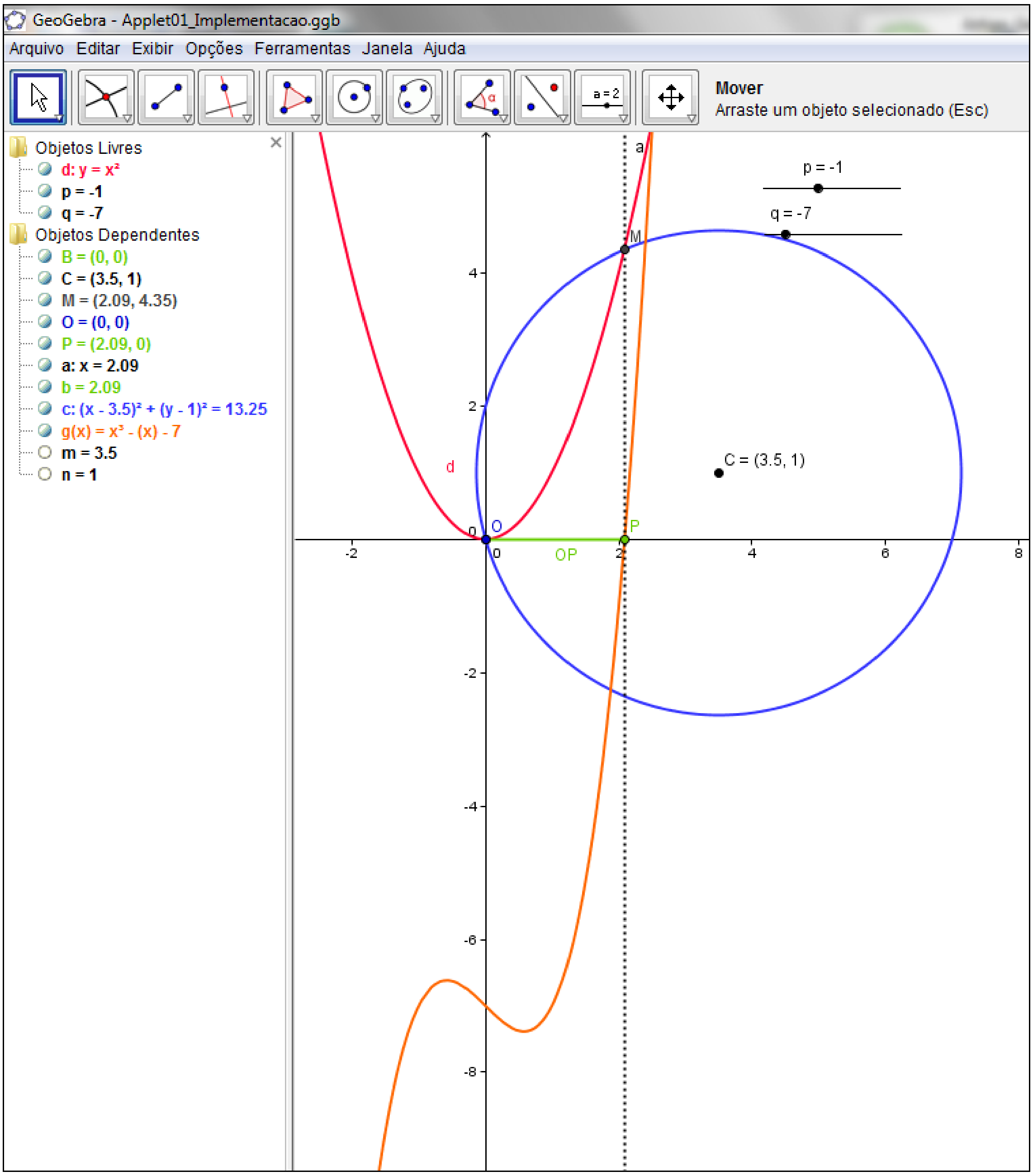

FIGURA 4: Apresentação do gráfico da equação cúbica e da solução gráfica através do Método de Briot e Bouquet.

Considerações finais

A construção gráfica proposta pelo Método de Briot e Bouquet utilizando o software GeoGebra é bastante simples, entretanto, mostramos aqui que a álgebra em que se baseia é bastante engenhosa. A partir do que foi apresentado, concluímos então que o software GeoGebra é muito eficiente para a implementação desse método gráfico proposto pelos matemáticos franceses para a determinação das raízes reais de uma equação cúbica "*depressed*", bem como, extremamente eficaz para a comprovação gráfica do mesmo. Gostaríamos de ressaltar a importância de o GeoGebra ser um software de geometria dinâmica (através da utilização adequada dos seletores), visto que essa capacidade amplia de modo extremamente rápido e significativo a comprovação do método para quaisquer equações cúbicas "*depressed*". Lembrando que Cardano propôs a modificação de equações cúbicas quaisquer em equações cúbicas "*depressed*", através de manipulação algébrica. Apresentamos neste trabalho a possibilidade de obter soluções gráficas precisas para as equações cúbicas em geral, comprovando-as rápida e eficientemente.

Referências

BRIOT, C. A.; BOUQUET, J. C. (1896) *Elementos de Geometria Analítica de duas dimensões*. Chicago: Werner School Book Company.

CARDANO, G. (1968) The Rules of Algebra (Ars Magna). Mineola, New York: Dover Publications.

GEOGEBRA, http://www.geogebra.org/cms/ Acesso em 06/01/2012.

MEAVILLA, V. (2010). *Aprendiendo Matemáticas con los grandes Maestros*. Espanha: Editorial Almuzara.

NAHIN, P. J. (1998). *An Imaginary Tale. The Story of* $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton Univeristy Press.