Marco teórico que subyace en la propiedad que dio origen al logotipo de GeoGebra [1]

Referencial teórico subjacente a propriedade que deu origem ao logotipo GeoGebra

---

GRACIELA CARMEN LOMBARDO[2]

Resumen

El propósito de este artículo es tomar como base el Teorema de Steiner, hacer una revisión de los conceptos y propiedades involucrados y, mediante la utilización de GeoGebra, presentar los antecedentes que convergen a la creación del logotipo de este Software. A tal efecto se definió: haz de rectas, cuadrilátero completo, grupo armónico de rectas, perspectividad, proyectividad y cónica lugar. Igualmente se enunciaron las propiedades relativas a: armonía, determinación de la proyectividad, Teorema de Steiner y su consecuencia.

Palabras clave: *logotipo de GeoGebra; Geometría Proyectiva; Teorema de Steiner*

Resumo

O objetivo deste artigo, com base no Teorema de Steiner, é realizar uma revisão dos conceitos e propriedades envolvidas e, por meio do uso do GeoGebra, apresentar os antecedentes que convergem para a criação do logotipo desse Software. Para isso, foram definidos: retas que se interceptam em um ponto, quadrilátero completo, grupo harmônico de retas, perspectividade, projetividade, e cônica. Igualmente foram apresentadas as propriedades relativas a: harmonia, determinação da projetividade, Teorema de Steiner e sua consequência.
Palavras chave: *logotipo do GeoGebra; Geometria Projetiva; Teorema de Steiner*

Introducción

El logotipo del software GeoGebra fue diseñando en base a la primera consecuencia del Teorema de Steiner. El cual estipula: *"Cinco puntos de un plano, tres a tres independientes, determinan una cónica y solo una"*. (Pascali, 1952, p. 138).

En oportunidad de llevarse a cabo el Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2013[3], se contó con la presencia del Presidente del Internacional GeoGebra Institute, Dr. Markus Hohenwarter. Durante una conferencia magistral[4], un asistente preguntó acerca del

---

[1] Instituto GeoGebra Misiones (IGMi) – Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) – Facultad de Ciencias Económicas (FCE) - Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

[2] FCEQyN - FCE – gracielalombardo@gmail.com

[3] Organizado por el Instituto GeoGebra del Chaco (Argentina), el 07 al 09 de noviembre de 2013 en la Universidad Nacional de Chaco Austral.

[4] Conferencia de Agustín Carrillo de Albornoz Torres: "GeoGebra en el aula. Propuestas y sugerencias"

significado del logotipo de GeoGebra, a lo que el Dr. Hohenwarter respondió que para su diseñó se basó en el teorema que afirma: cinco puntos determinan una cónica.

El propósito de este artículo es tomar como base el Teorema de Steiner, hacer una revisión de los conceptos y propiedades involucrados y, mediante la utilización de GeoGebra, presentar los antecedentes que convergen a la creación del logotipo.

Marco teórico

1. Geometría Proyectiva

Definición: La Geometría Proyectiva es la rama de la Matemática que estudia las propiedades proyectivas de las figuras (Ruíz, 1999, p. 35).

Su génesis obedece a la necesidad de dar explicación a las leyes de la perspectiva. Ya en el Renacimiento el primer artista teórico, León Battista Alberti, se cuestionó qué propiedades se conservaban invariantes a través de la proyección, dado que, ante esta transformación, no sucede lo mismo con las longitudes y amplitudes. (Etayo Gordejuela, 2010, p. 98)

> El gran problema al que se enfrentaron los pintores del Renacimiento era como plasmar el mundo tridimensional real en un lienzo bidimensional. La clave para resolver esta cuestión fue la interpretación de una propiedad fundamental de la visión monocular, debida principalmente a Leone Battista Alberti (1404-1472). […] Cuando contemplamos una escena tridimensional utilizando un solo ojo, la visión se produce debido a que los rayos de luz procedentes de los distintos puntos de la escena llegan hasta nuestro ojo. Si ahora situamos un lienzo transparente entre el ojo y la escena, esta colección de rayos de luz, o proyección, cortará al lienzo en una colección de puntos. Esta colección de puntos, o sección, es lo que el artista debe pintar para que cualquier observador de su pintura reciba la misma percepción de la escena tridimensional que si mirase directamente a ella, ahora bien, siempre y cuando el observador mire también con un solo ojo y desde el mismo punto. (Ugarte Vilumbrales, 2002, pp. 91-92)

El padre de la Geometría Proyectiva, Gérard Desargues (1593-1662), dio fundamento teórico a los métodos que utilizaron los artistas renacentistas. Fue quien incorporó el concepto de *"punto del infinito"* o *"punto impropio"*.

> El matemático francés observó, cómo podemos hacer cualquiera de nosotros, que un círculo, visto en perspectiva, adopta la forma de una elipse, y que la sombra proyectada en una pared por un objeto circular será a su vez un círculo, una elipse, una parábola o una rama de hipérbola en función de la inclinación que tenga dicho objeto. […]

> Ahora bien, esto último equivale a decir que la proyección de un objeto (en nuestro ejemplo, su sombra) transforma una figura en otra. (Binimelis Bassa, 2011, p.28).

A pesar del importante aporte hecho por Desargues, a través de su estudio de las secciones cónicas (1639), fue Jean-Victor Poncelet (1788-1867), quien impulsó el desarrollo de la Geometría Proyectiva con su *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, publicado en 1822.

1. Haz de rectas

Definición: *"Se llama haz de rectas al conjunto de todas las rectas del plano que pasan por un punto, llamado vértice del haz."* (Santaló, 1976, p. 19).

En la FIGURA 1, se muestran el haz de rectas y sus componentes.

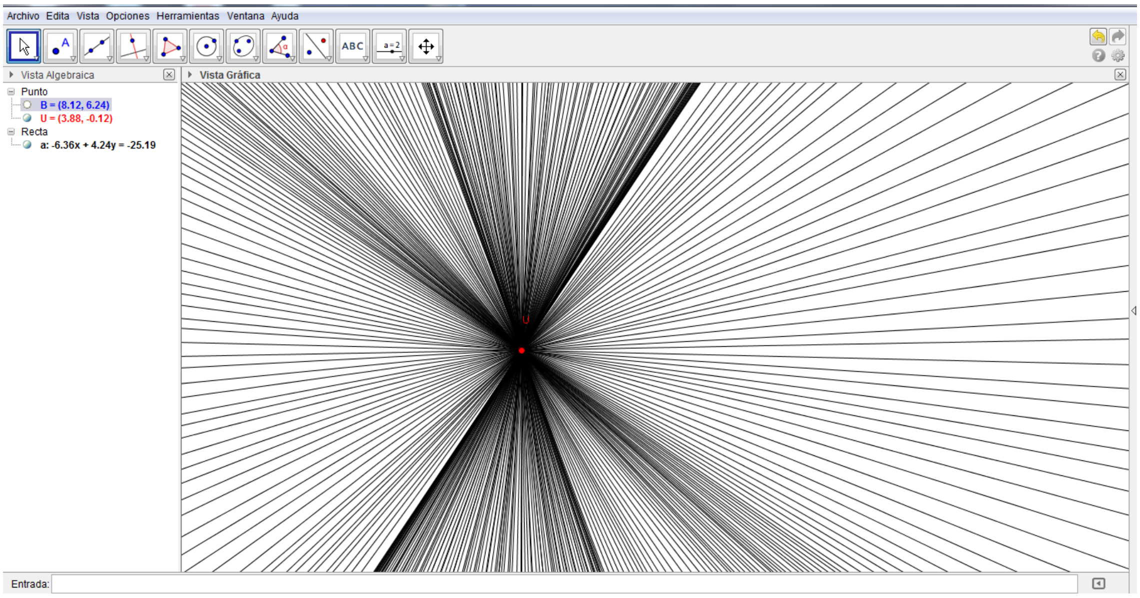

FIGURA 1: Haz de rectas con centro U
FUENTE: Propia

2. Cuadrilátero completo

Definición: Se denomina cuadrilátero completo al conjunto de cuatro rectas de un plano tales que no haya tres de ellas que pasen por un mismo punto, denominada lados, y los seis puntos por éstas determinados, llamados vértices. (Santaló, 1966, pp.133-134).

En la FIGURA 2, se presenta el cuadrilátero completo mnpq, cuyos lados son las rectas m, n, p y q y los vértices son los puntos A, B, C, D, E y F.

Definición: Dos vértices son opuestos cuando no pertenecen a un mismo lado. Además cada par de vértices opuestos determinan una recta diagonal.

En la FIGURA 2, hay tres pares de vértices opuestos: A y C, B y D, E y F; cada par determina, respectivamente, las rectas diagonales d_1, d_2 y d_3.

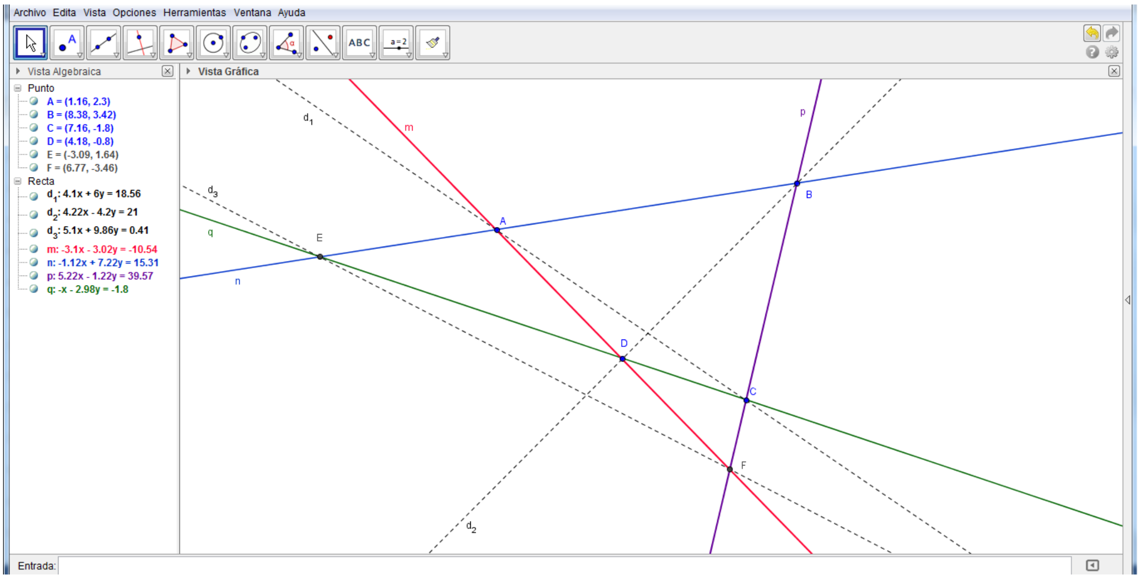

FIGURA 2: Cuadrilátero completo mnpq
FUENTE: Propia

3. Grupo armónico de rectas

Definición:

> Se dice que cuatro rectas abcd (pensadas en tal sucesión) de un haz de rectas U [...], forman un grupo armónico cuando existe un cuadrilátero completo que tiene un par de vértices opuestos que pertenecen a a; otro par de vértices opuestos que pertenecen a b; otro vértice a c y el otro que pertenece a d.
> El cuadrilátero mnpq que sirve para definir o construir un grupo armónico de rectas se denomina cuadrilátero constructor. (Pascali, 1952, p. 67). (FIGURA 3).

Propiedad 1: La armonía es un invariante proyectivo.

Significa que si cuatro rectas de un haz forman grupo armónico y se aplican una serie de transformaciones proyectivas, se obtienen cuatro entes geométricos que conforman un grupo armónico. Por ejemplo, si se cortan las rectas a, b, c y d (grupo armónico), con una recta que no contenga al centro U, se obtienen cuatro puntos que forman grupo armónico.

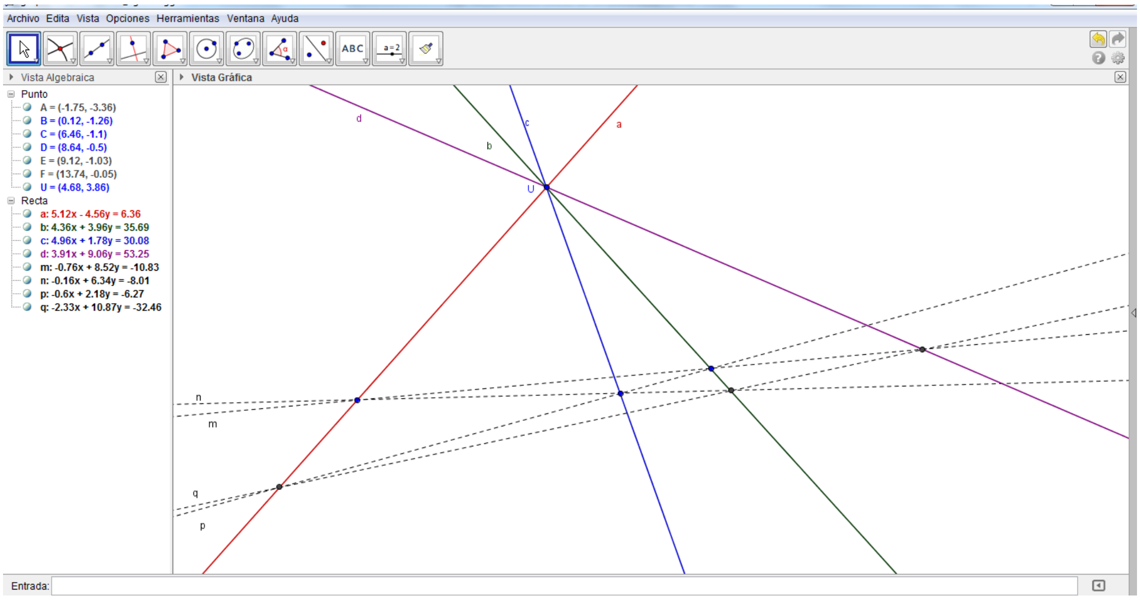

FIGURA 3: Grupo armónico de rectas U(abcd)
FUENTE: Propia

4. Perspectividad y proyectividad

Perspectividad entre haces de rectas

Definición: Hay una correspondencia uno a uno, entre las dos haces de rectas, si existe una relación que asocia a cada recta del primer haz una y solo una recta del segundo haz, y viceversa. Cuando existe una correspondencia uno a uno, a cada recta y su asociada se las denomina correspondientes.

Definición: Los haces de rectas U(a,b,c,d,e,...) y U'(a',b',c',d',e',...) son perspectivos desde la recta u, cuando los pares de rectas correspondientes se cortan en puntos que pertenecen a u. (FIGURA 4).

Se denota: $U(a,b,c,d,e,...) \overset{u}{\overset{=}{\wedge}} U'(a',b',c',d',e',...)$. Además, la recta u recibe el nombre de eje de perspectividad, y la determinada por los centros U y U' (recta p) se auto-corresponde. (Ayres, 1971, pp. 8-11). Puede comprobarse, de manera sencilla, que si se componen una serie de perspectividades, por lo general, el resultado final no será una perspectividad. Es decir:

$$U(a,b,c,d,e,...) \overset{u}{\overset{=}{\wedge}} U'(a',b',c',d',e',...) \overset{v}{\overset{=}{\wedge}} U''(a'',b'',c'',d'',e'',...) \overset{w}{\overset{=}{\wedge}} U'''(a''',b''',c''',d''',e''',...)$$

Generalmente, resulta la no existencia de una recta que contenga las intersecciones de las rectas de los haces de centros U y U''', aunque se puede afirmar que existe una correspondencia entre los elementos de ambos haces. A esta correspondencia se la denomina proyectividad y se la simboliza de la siguiente forma:

$$U(a,b,c,d,e,...)\,\bar{\wedge}\,U'(a''',b''',c''',d''',e''',...)$$

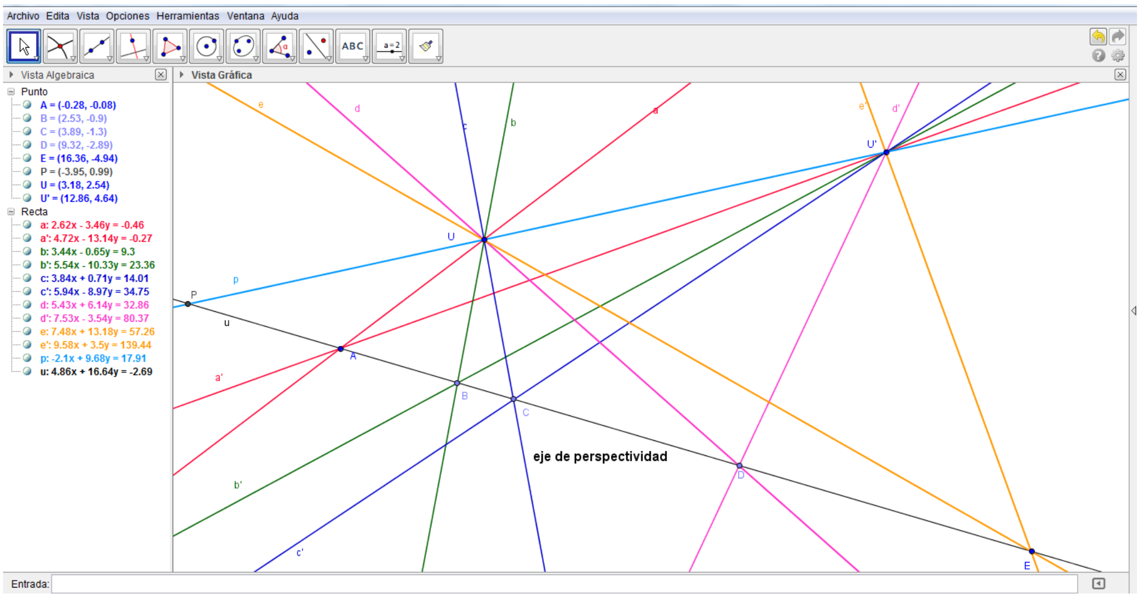

FIGURA 4: Haces de rectas perspectivos
FUENTE: Propia

Perspectividad entre rectas

Definición: Hay una correspondencia uno a uno, entre dos rectas, si existe una relación que asocia a cada punto de la primera recta uno y solo un punto de la segunda recta, y viceversa. Cuando existe una correspondencia uno a uno, a cada punto y su asociado se los denomina correspondientes.

Definición: Las rectas u(A,B,C,D,E,...) y u'(A',B',C',D',E',…) son perspectivas desde el punto O, cuando los pares de puntos correspondientes determinan rectas que se cortan en O. (FIGURA 4). Se denota: $u(A,B,C,D,E,...)\overset{O}{\overset{=}{\wedge}}U'(A',B',C',D',E',...)$. El punto O recibe el nombre de centro de perspectividad, y el determinado por la intersección de las rectas u y u' (punto P) se auto-corresponde. (Ayres, 1971, pp. 8-11).

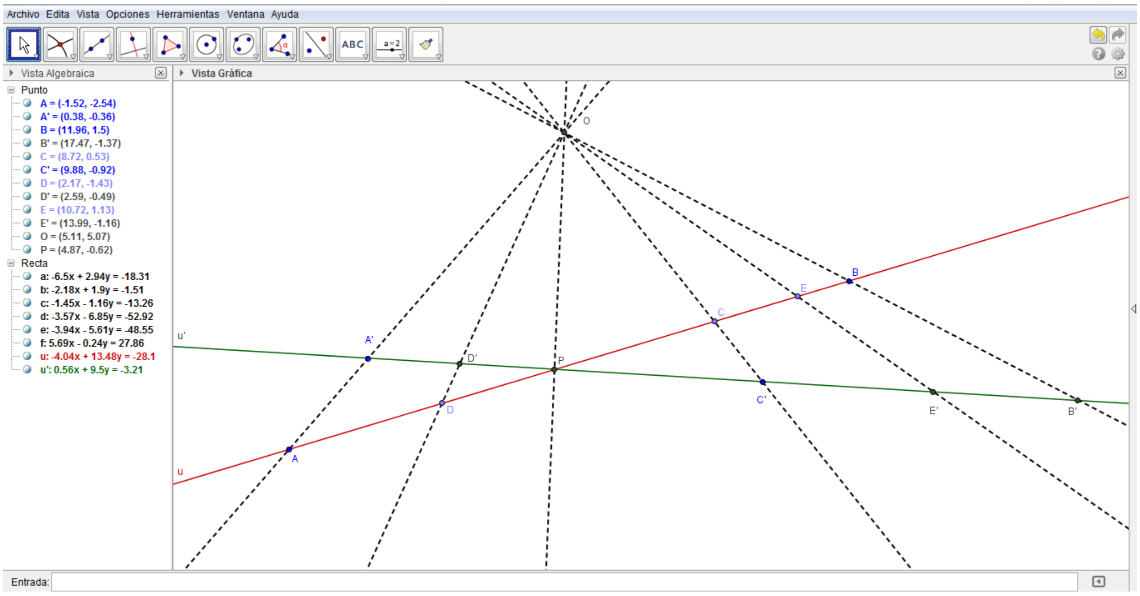

FIGURA 5: Rectas perspectivas
FUENTE: Propia

5. Construcción de la proyectividad entre dos haces de rectas

Propiedad 2: La proyectividad entre dos haces de rectas queda determinada por tres pares de rectas correspondientes.

En la FIGURA 6, se aprecian dos ternas de rectas pertenecientes a los haces de centro U y U', es decir, U(a,b,c,...) y U'(a',b',c',…).

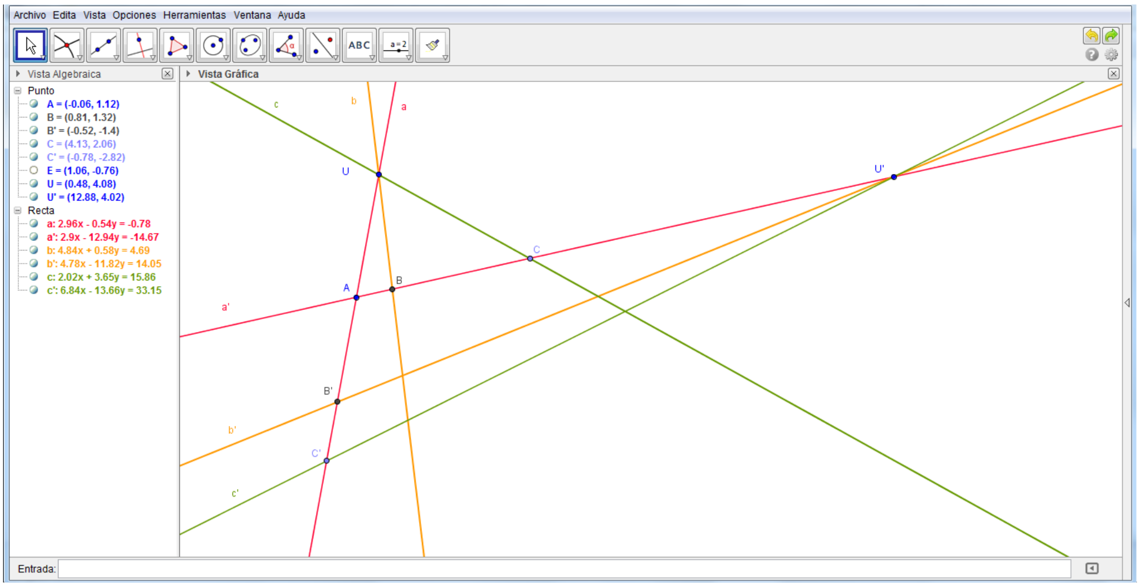

FIGURA 6: Construcción de la proyectividad (a)
FUENTE: Propia

Al cortar la recta a con las tres rectas de U', quedan determinados los puntos A, B' y C'; y al hacer lo propio con a', se obtienen A, B y C.

De estas operaciones, resulta que las rectas a y a’ son perspectivas desde un punto, en razón que A se auto-corresponde. A fin de ubicar el centro de perspectividad (O), solo resta trazar las rectas que contienen a los pares de puntos correspondientes (B con B’ y C con C’). (FIGURA 7).

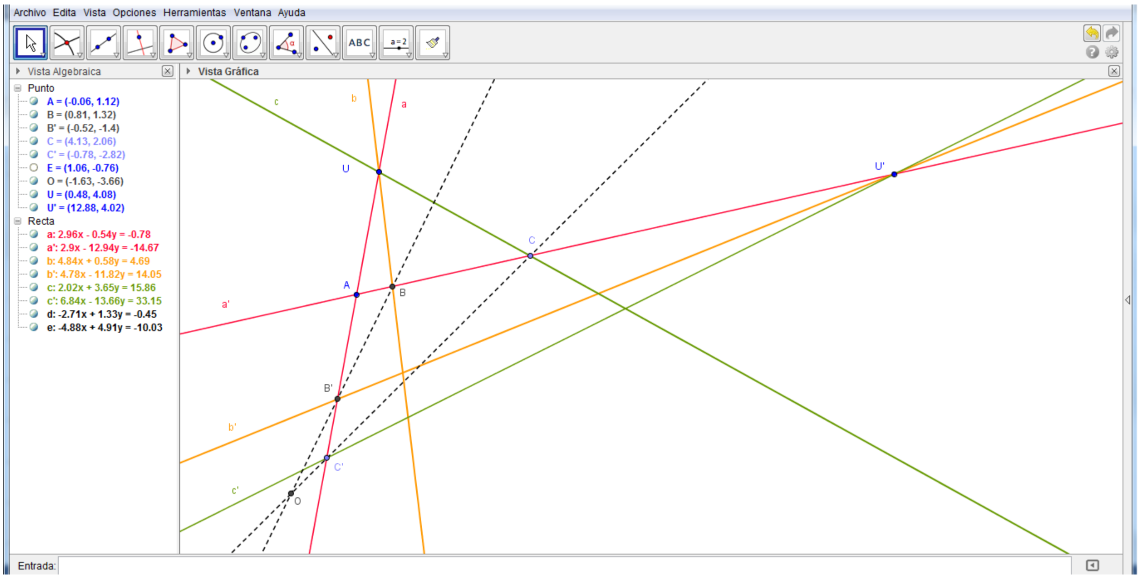

FIGURA 7: Construcción de la proyectividad (b)
FUENTE: Propia

Para determinar nuevos pares de rectas correspondientes se deben aplicar las transformaciones que subyacen en la construcción realizada previamente. A saber, como se puede observar en la FIGURA 8:

- Tazar la recta d, de U
- Determinar el punto D, (intersección de a’ y d)
- Proyectar D desde O y cortar con a, a efectos de obtener D’
- Proyectar D’ desde U ’, para determinar la recta d

6. Cónica lugar

Definición: Cónica lugar (o cónica puntual), es el lugar geométrico de los puntos de corte de los pares de rectas correspondientes de dos haces de rectas proyectivos y no perspectivos, de un mismo plano. Si los haces de rectas son perspectivos, el lugar geométrico degenera en dos rectas: el eje de perspectividad y la recta que une los centros de los haces. (Santaló, 76, p. 27). (FIGURA 9).

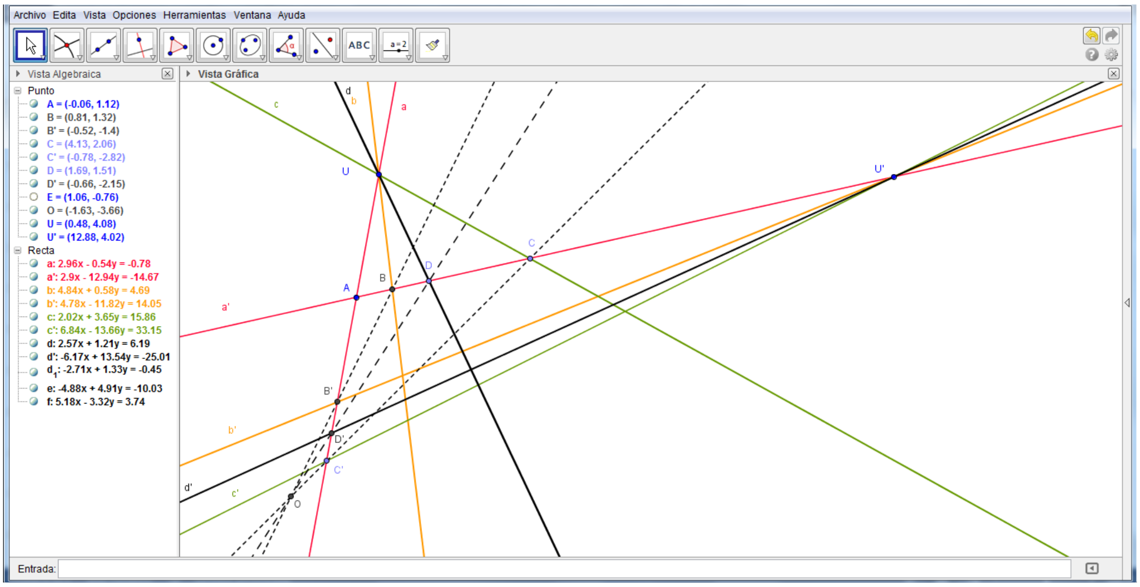

FIGURA 8: Construcción de la proyectividad (c)
FUENTE: Propia

Puede comprobarse, de forma simple, que los puntos U y U' cumplen con la condición de pertenecer a la cónica.

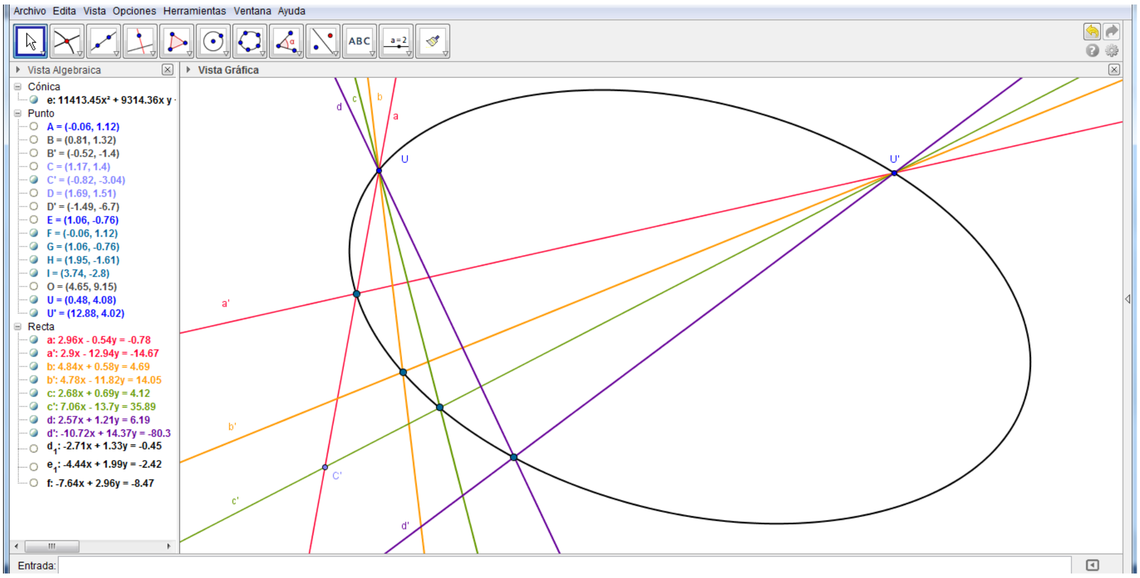

FIGURA 9: Cónica lugar (elipse)
FUENTE: Propia

Si se imponen condiciones a los haces y a sus rectas se obtienen elipses, parábolas o hipérbolas. Estas construcciones quedan propuestas para otra presentación.

7. Teorema de Steiner

Propiedad 3: Si desde dos puntos cualesquiera de una cónica lugar se proyectan los demás, se obtienen dos haces de rectas proyectivos y no perspectivos, en los que se corresponden las rectas que proyectan un mismo punto. (Pascali, 1952, p.136).

En la FIGURA 10 se observan los haces, proyectivos y no perspectivos A(b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,...) y B(a’,c’,d’,e’,f’,g’,h’,i’,j’,k’,...)

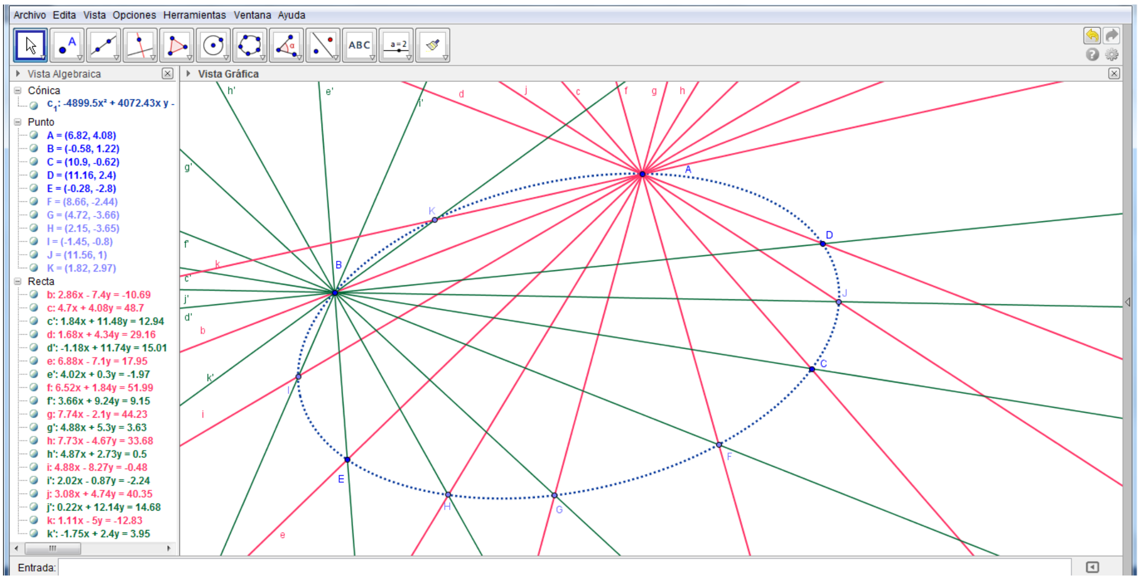

FIGURA 10: Teorema de Steiner
FUENTE: Propia

Consecuencia: Cinco puntos de un plano, de los cuales no hay tres alineados, determinan una cónica y solo una.

En efecto, si se toman dos de los cinco puntos, por ejemplo A y B, y desde los cuales se proyectan a los demás, se obtienen dos ternas de rectas, cada una de las cuales pertenece a un haz, cuyos centros son los puntos A y B. Por la Propiedad 2, pude afirmarse que es factifle la construcción de la proyectividad que intercede entre los haces de rectas y, por ende, la construcción la cónica lugar. (FIGURA 11).

En un archivo de GeoGebra, se insertó la imagen del logotipo del software (FIGURA 12) y utilizando los conceptos y propiedades enunciados en párrafos previos, queda justificada la construcción de la imagen representativa.

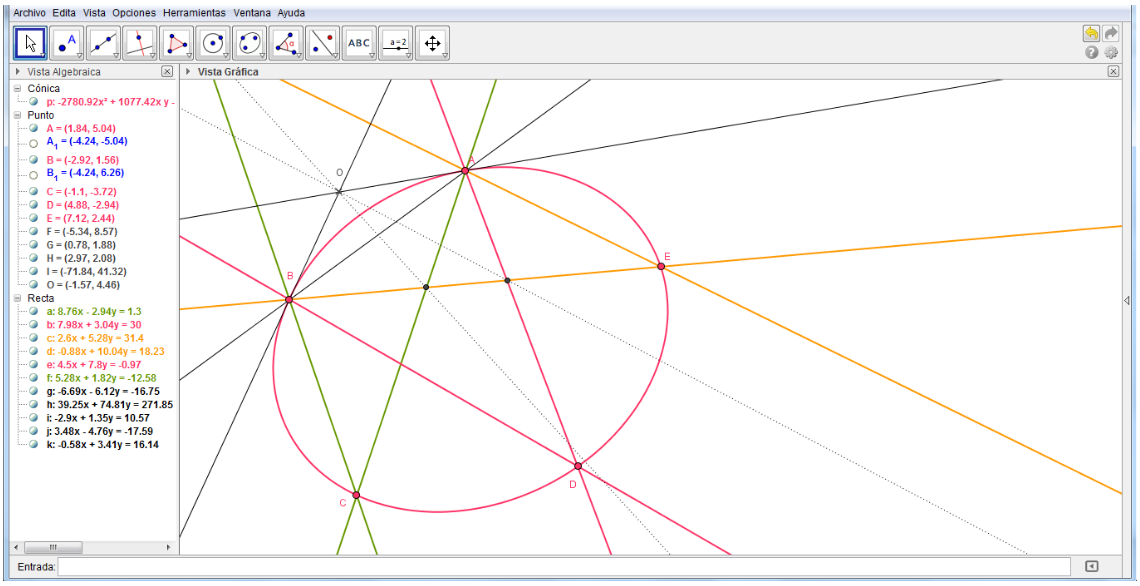

FIGURA 11: Consecuencia del Teorema de Steiner
FUENTE: Propia

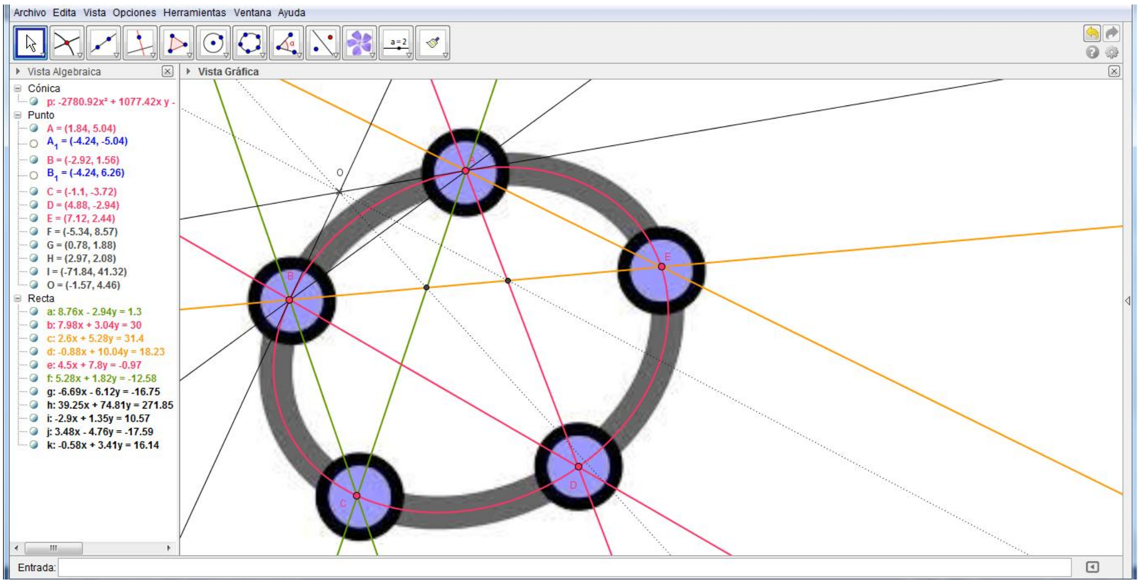

FIGURA 12: Construcción del logotipo de GeoGebra
FUENTE: Propia[5]

Consideraciones finales

Partiendo del logotipo de GeoGebra, se han recuperado una serie de definiciones y propiedades que permitieron dar cuenta del Teorema que inspiró, al creador del Software, en el diseño de la imagen que lo representa.

[5] Logotipo proveniente de http://www.geogebra.org

Referencias bibliográficas

AYRES, F. (1971). *Geometría Proyectiva.* McGraw-Hill: México.

BINIMELIS BASSA, M. (2011). *Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal*. Rodesa: Navarra.

ETAYO GORDEJUELA, F. (2010). Matemáticas y realidad. Geometrías no euclídeas y universo. En *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Esp.)* Vol. 104, N° 1, pp. 97-105.

PASCALI, J. (1952). *Geometría Proyectiva.* Talleres gráficos Pagani Hnos.: Buenos Aires.

RUIZ, A. (1999). *Geometrías no euclidianas. Breve historia de una gran revolución intelectual.* San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

SANTALÓ, L. (1966). *Geometría proyectiva.* EUDEBA: Buenos Aires.

SANTALÓ, L. (1976). *Geometrías no euclidianas.* EUDEBA: Buenos Aires.

UGARTE VILUMBRALES, L. (2002). Geometría proyectiva plana. En *Un paseo por la Geometría 2001-2002*. Centro virtual de divulgación de las matemáticas. Real Sociedad Matemática Española. Recuperado de http://www.rsme.es/rec/pgt0102.pdf.