GeoGebra em um curso de Engenharia Civil

GeoGebra in a Civil Engineering course

JANILSON LOTERIO[1]

Resumo

Neste trabalho serão apresentadas algumas atividades de Geometria Analítica e Álgebra Linear realizadas, com o auxílio do Geogebra, durante as aulas do curso de Engenharia Civil. O objetivo inicial era apresentar aos acadêmicos, uma alternativa para o estudo dos conteúdos da disciplina. Percebeu-se, que além de ajudar na compreensão dos conceitos básicos, através da visualização dos resultados dos problemas, poderiam ser exploradas outras situações mais complexas com o Geogebra, tornando a disciplina mais desafiadora. Das atividades em sala de aula, surgiu um projeto de iniciação científica, sobre o tema, Cônicas. As atividades em sala e o projeto de pesquisa têm como base os conceitos de investigação matemática. A metodologia utilizada constitui em resolver os problemas com a aritmética e posteriormente com o com auxílio do Geogebra, finalizando com apresentação por parte dos acadêmicos e do professor dos resultados obtidos. Entre os principais resultados obtidos, está o fato de alunos e professor incorporarem o Geogebra em sua pratica educativa.
Palavras Chave: Geometria Analítica; Engenharia Civil; Geogebra; Matemática.

Abstract

In this work some of Analytical Geometry and Linear Algebra activities, with the aid of Geogebra during the lessons of Civil Engineering will be presented. The initial goal was to provide students an alternative to the study of the subject contents. It was noticed that in addition to help in understanding the basic concepts through visualization of the results of problems , more complex situations could be explored with Geogebra , making it the most challenging discipline. Activities in the classroom, one research project on the theme, Conical emerged. The activities in the classroom as the project are based on the concepts of mathematical research . The methodology is to solve the problems with arithmetic and later with the help of with Geogebra, ending with the presentation by the students and teacher of the results. Among the main results is the fact that students and teachers incorporate Geogebra in their educational practice.
Key Words: Analytic Geometry , Civil Engineering ; Geogebra , Math .

INTRODUÇÃO

O trabalho descrito, é fruto de atividades realizadas em sala de aula com três turmas com quarenta alunos em média, da segunda e terceira fases do curso de Engenharia Civil da Unifebe, durante os anos de 2012 e 2013, nas aulas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, 1 e 2 . Surgiu da necessidade, de apresentar aos acadêmicos, os conteúdos de outra maneira, que fosse além do uso do quadro branco e da exposição do professor, uma vez que se percebeu que vários conceitos não estavam sendo

[1] Unifebe - Centro Universitário de Brusque - janilson.loterio@terra.com.br

apropriados. Faltava, principalmente, visualizar o processo de resolução dos problemas propostos, ao qual, com o uso de software de geometria dinâmica, Geogebra, foi possível fazer.

Sabemos que o ensino de Geometria Analítica e Álgebra Linear têm muitos desafios. Por ser uma disciplina voltada a equações e relativamente abstrata, é compreensível a dificuldade dos alunos, principalmente na análise e resolução de problemas, logo, demonstrar aos acadêmicos de forma lúdica e ampla, esse processo, é fundamental para o sucesso do ensino-aprendizagem da disciplina. Outra questão pertinente é que alguns acadêmicos não percebem, muitas vezes, que os conceitos matemáticos, precisam de certa maturação conforme se estuda, e que alguns conceitos não são possíveis de aplica-los imediatamente. Mas, no que tange, a Geometria Analítica e a Álgebra Linear, é possível, ao menos ter melhor compreensão de seus conceitos, de forma lúdica e ampla, como também, demostrar algumas aplicações, usando softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra.

Para construir o conhecimento matemático da disciplina, no ensino superior, com o intuito de vencer as barreiras apresentadas anteriormente, buscamos apoio na investigação matemática, propostas nos trabalhos de Ponte (2010,1992) e Skovsmose (2000,2001), além das contribuições de Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2009), sobre ensino de ciências. As atividades realizadas seguem essa metodologia, priorizando a resolução dos problemas, com o uso da aritmética comutativamente ao Geogebra.

Destacamos que a proposta inicial do trabalho resumia-se em resolver com os acadêmicos problemas em sala de aula, mas, a partir dessas atividades, surgiu um projeto iniciação-científica, desenvolvido dentro da instituição, Unifebe.

1. A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Na Investigação Matemática, proposta nos trabalhos de Ponte (2010,1992), referente à Matemática, destaca-se a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais[2]:

1) *Reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões.*

[2] Discussão apresentada por Ponte, conjuntamente com Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999)

2) *Processo de formulação de conjecturas;*
3) *Realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas e*
4) *Argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado*.

Nessa linha, Skovsmose (2000), defende que uma das etapas fundamentais da investigação é a problematização. A definição do problema a ser estudado tem enorme importância para o que se deseja da investigação. Essa problematização também está presente nos estudos de Freire (1997). Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2009) apresentando os momentos pedagógicos, onde a problematização inicial também é destaque, seguida pela organização do conhecimento e a aplicação do conhecimento.

Para os autores, na problematização inicial, são apresentadas situações reais, as quais se desejam aprofundar, e que estão envolvidas nos temas e nos princípios das teorias científicas. Nesta etapa levantamos as hipóteses e os caminhos que podemos seguir na investigação. A segunda etapa, a organização do conhecimento, listamos e pesquisamos os conteúdos necessários para a compreensão dos temas da problematização inicial. Por fim, a aplicação do conhecimento destina-se, sobretudo, a abordar sistematicamente os conteúdos pelos alunos, analisando e interpretando as situações iniciais que determinaram a problematização, como outras situações que, embora não estejam diretamente ligadas ao motivo inicial, podem ser compreendidas pelo mesmo conteúdo. Nessa etapa, aplicação do conhecimento, que temos o objetivo de fazer com que os alunos articulem, constante e rotineiramente, a conceituação científica com situações reais (Delizoicov, Angotti e Pernambuco, 2009). Há uma última etapa, tão importante como às outras, a socialização dos resultados, os quais são apresentados e discutidos com a comunidade cientifica.

Muitas investigações, não são possíveis de realização devido ao tempo e a disponibilidades dos alunos e do professor, que acabam reduzindo elas em explorações matemáticas. Para elucidar essa situação apresentamos a relação entre as investigações matemáticas e outras atividades matemáticas, conforme o quadro abaixo:

Figura 1 Esquema dos diferentes tipos de tarefa para a aula de matemática.
Fonte: Ponte, 2010, p. 21

Percebemos que ao realizar a investigação, estamos propondo ao ensino de matemática atividades complexas e abertas. O sentido de aberta está relacionado às respostas que se podem obter; nos exercícios e nos problemas tem-se uma resposta pré-determinada, nas investigações produzem-se vários resultados, alguns imprevisíveis. A exploração se restringe a atividades de complexidade inferior as investigações mas abertas com tal. Durante as atividades em sala de aula, usamos a referencia das explorações matemáticas, sendo que realizamos uma investigação matemática, quando desenvolvemos o projeto de iniciação cientifica.

Para finalizarmos o conceito de investigação matemática, o ponto de partida pode ser um problema matemático ou uma situação não matemática. Percebe-se também que após o início da investigação, a conjuntura que a cerca definirá qual o melhor caminho a seguir, pois sabemos onde começamos, mas não sabemos quais resultados obteremos.

2. GEOMETRIA ANALÍTICA, ÁLGEBRA LINEAR, ENSINO E GEOGEBRA

O Geogebra é um software de geometria dinâmica, gratuito, podendo ser usado por todos os níveis de ensino. Nele é possível relacionar geometria, álgebra numa mesma situação problema, fator que fundamental para o ensino de Geometria Analítica. Foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter[3] e é usado por aproximadamente 200 países, sendo traduzido para dezenas de idiomas.

Quando aprofundamos os conceitos do que vem a ser a Geometria Analítica, percebemos que se encaixa perfeitamente com o princípio da criação do Geogebra. Recentemente em uma palestra conferida no Congresso de Latino Americano de Geogebra, seu criador Markus, relatou que o objetivo do software é unir Geometria e Álgebra, por esse motivo o nome Geogebra, “geo” geometria e “gebra” de Álgebra. Assim, uso do programa, nos permite trabalhar muitos conceitos da Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Para melhor compreensão vamos apresentar alguns conceitos sobre o tema. Segundo Elon (2011), a Geometria Analítica, baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números reais e os pontos do espaço por ternos ordenados de números reais. Dentro dessa concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meios de equações. Isso

[3] Markus Hohenwarter, Universidade de Salzburgo – Austria.

permite tratar algebricamente muitas equações geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas. Para o autor, essa relação foi responsável por extraordinários progressos da Matemática.

Para Camargo e Boulos (2005), Geometria Analítica é o estudo da geometria pelo método cartesiano, que em última análise consiste em associar equações aos entes geométricos, e do estudo dessas equações (com o auxílio da Álgebra, portanto) tirar conclusões a respeito daqueles entes geométricos. Percebe-se que os conceitos reafirmam que o uso do Geogebra em uma aula de Geometria Analítica, esta, fundamentado na própria questão de ser da disciplina. Para Baldin e Furuya (2011), a Geometria Analítica reúne técnicas e conceitos algébricos para se trabalhar numericamente os problemas da Geometria.

Quando exploramos os conceitos da disciplina, sem o uso do Geogebra, percebemos que muitos alunos tinham dificuldades em relacionar os pontos com as equações. Nos exercícios propostos, muitas vezes era necessário fazer alguns esboços do que o problema pedia e das informações que ele apresentava, para que enfim, os alunos conseguissem resolve-los. Havia uma grande dificuldade em organizar e visualizar o que está sendo solicitado. Depois da implantação do Geogebra durante as aulas, os alunos, além de melhor compreender o que estavam fazendo, também foi possível, sugerir novas situações. Isso ocorrer pelo fato do programa ter a característica de geometria dinâmica, o que normalmente desperta mais a curiosidade dos alunos.

Como percebemos a ideia de Markus, e os conceitos apresentados pelos autores , se completam de tal maneira, que poderíamos afirmar, que o uso do Geogebra em sala de aula, já é uma aula de Geometria Analítica e Álgebra Linear, pois ambos buscam relacionar pontos com equações, geometria com álgebra.

3. A INVESTIGAÇÃO E ALGUMAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS.

Como relatado anteriormente, percebemos que os acadêmicos apresentam dificuldades em organizar e visualizar alguns problemas e conceitos da Geometria Analítica e Álgebra Linear, o que consequentemente provocava desinteresse e insucesso da disciplina. Vamos relatar algumas atividades realizadas onde evidenciamos essas situações , começando pelos conceitos básicos de vetores.

a. Definição dos conceitos de Vetores

Segunda Baldin e Furuya (2011) , definimos vetores como:

Dados dois pontos quaisquer A e B, distintos, eles determinam a reta r (A.B), na qual distinguimos o segmento de reta AB. Estabelecendo um dos pontos, digamos A, como a origem do segmento , o outro ponto B como a extremidade final, tem-se determinado um sentido de percurso no segmento AB: de A para B. Determina-se, assim, um segmento orientado de A para B e denota-se por $\overrightarrow{AB}$. O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa um vetor $\vec{v}$ denotamos $\vec{v}$ =r $\overrightarrow{AB}$.

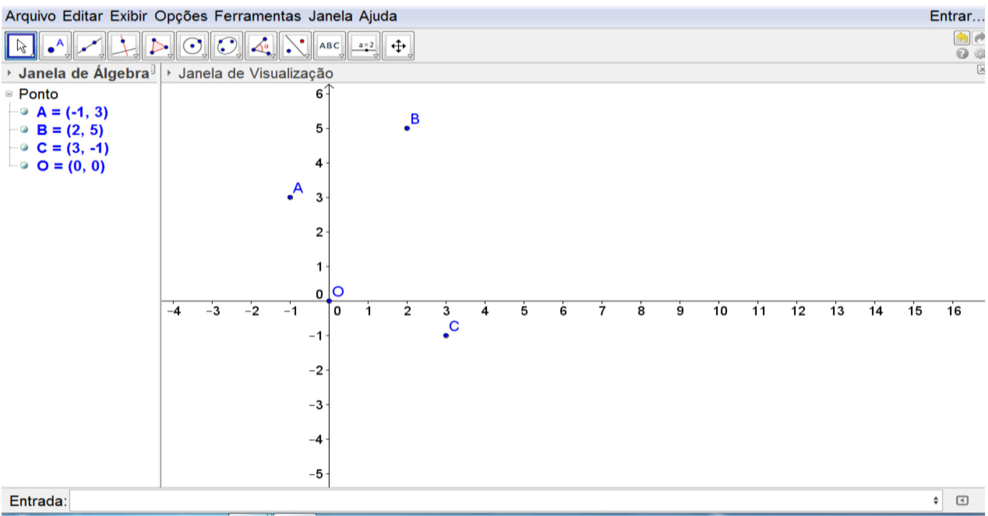
Assim vetor é representado por um segmento orientado (definido por sua direção, modulo e sentido). Existem infinitos vetores que podem representar o mesmo segmento orientado, entre eles o vetor posição, cuja origem é o ponto O (0,0). Como os vetores são definidos por dois pontos, podemos encontra-los calculando a diferença entre B-A. Um exercício muito utilizado para praticar esses conceitos e o seguinte:

1) *Dados os pontos A (-1,3), B (2,5), C(3,-1) e O(0,0), calcular $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$ (Winterle ,2000).*
   Resolução sem Geogebra.

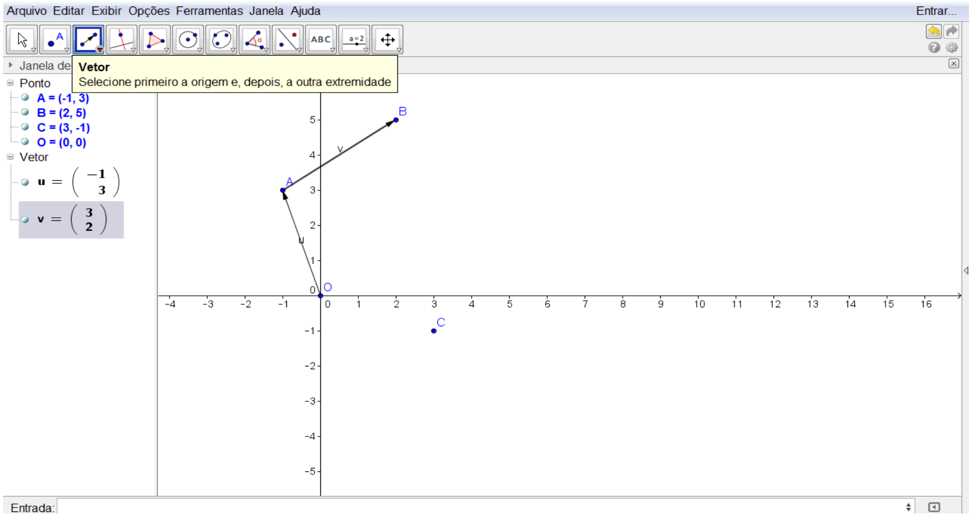
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} &= (A - O) + (B - A)\\ &= ((-1,3) - (0,0)) + ((2,.5) - (-1,3))\\ &= (-1,3) + (3,2)\\ &= (2,5)\end{aligned}$$

Encontramos aritmeticamente a solução do problema, mas dai, surgem algumas dúvidas dos alunos. A solução (2,5) significa o que? Um novo vetor ou um novo ponto? Como ele pode ser representado? Com a resolução com Geogebra, podemos responder as essas perguntas, como também explorar outras definições, através do mesmo exercício.

a) *Inserimos no campo de entrada, os pontos A.B, C e O.*

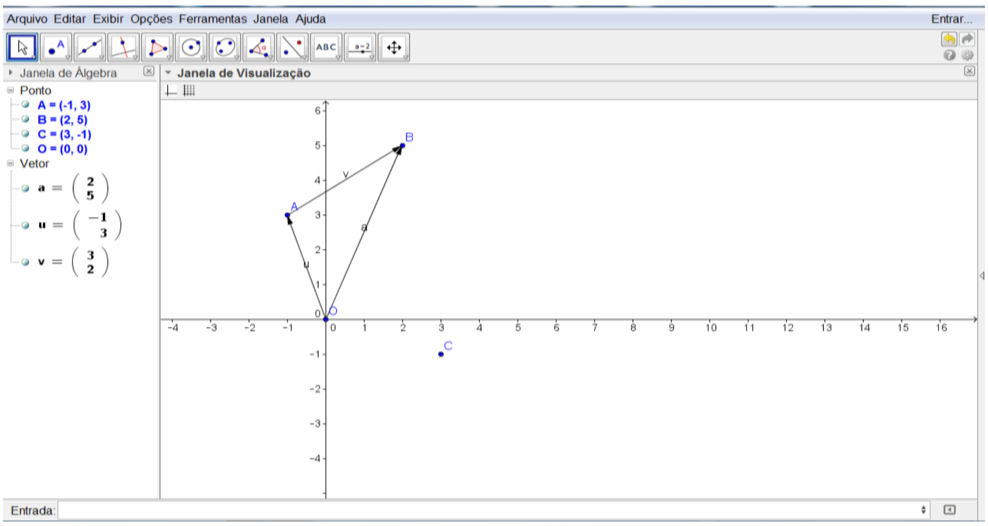


b) *Determinamos os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$, usando a ferramenta vetor definido por dois pontos.*



Encontramos os vetores $\overrightarrow{OA}$ *(-1,3) e* $\overrightarrow{AB}$*,(3,2)*, podemos reparar que esses vetores foram definidos aritmeticamente na terceira linha da equação.

c) *No campo de entrada, calculamos a operação, como os vetores* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{AB}$*, estão representados por u e v, digitamos u + v.*



O aluno, pode concluir que a soma dos pontos apresentados é um vetor (2,5), e não um ponto.

2) *Fazemos os mesmo procedimentos para os outros vetores,* $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ *e* $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

Com os vetores definidos, podemos explorar mais essa situação. Primeiro o que acontece se eu mover os pontos? Quais outras possiblidades de representar essa situação? Com esses procedimentos, para o aluno, fica fácil compreender os conceitos de vetor posição e vetor definido por dois pontos, além de visualizar o vetor resultante. Ao mudar os pontos, também é possível ver que o vetor resultante também é alterado. Fazendo a construção usando outras ferramentas pode-se analisar e comprovar á regra do paralelogramo. Existe a possiblidade de calcular o módulo do vetor usando a ferramenta *distancia*, a qual juntamente com a opção *ângulo*, ajuda a definir qual tipo é o paralelogramo. Também podemos explorar a definição de vetor formado por dois pontos (B-A), e assim perceber que o mesmo vetor tem inúmeros representantes.

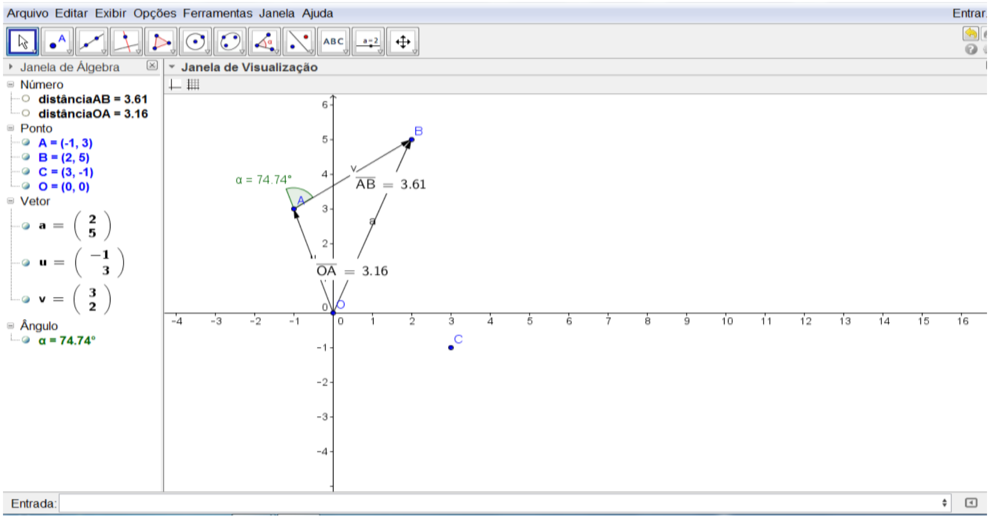


Figura 2: Usando as ferramentas distancia e ângulos

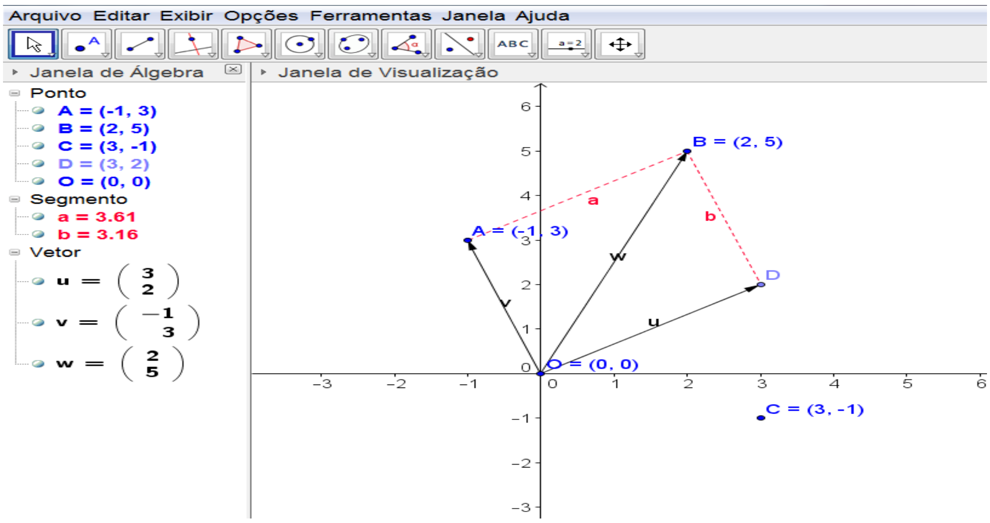


Figura 3: Regra do paralelogramo.

Esse leque de explorações utilizando a mesma situação, contribui muito para o processo de ensino aprendizagem. Vamos analisar outro exercício.

3) *Sabendo que A (2,-3), B (6,3) são extremidades de um segmento, determinar:*

a) Os pontos C,D e E que dividem o segmento de AB em quatro partes do mesmo comprimento;

b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes do mesmo comprimento;

Resolução sem Geogebra.

$$\overrightarrow{AB} = (B - A)$$
$$= (6,-3) - (-2,3) = (8,-6)$$

como AB, foi dividido em 4 partes temos que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ logo $C = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + A$

$$= \frac{1}{4}(8,-6) + (-2,3) = (0,\frac{3}{2})$$

Analogicamente temos $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, resultando respectivamente em D=(2,0) e E(4,-3/2). A questão b, temos $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, resultando em F=(2/3,1) e G(10/3, -1).

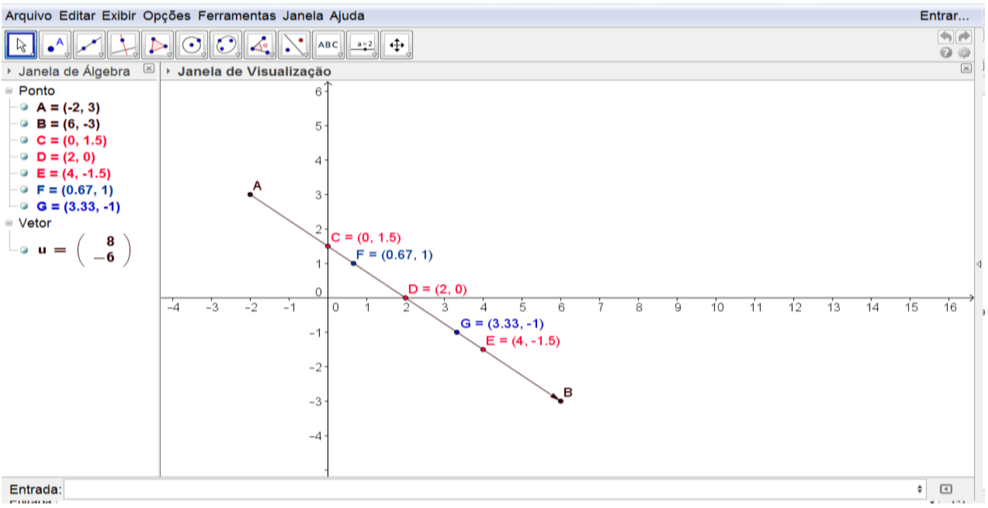
Com o Geogebra , podemos realizar a atividade da seguinte forma.

a) Inserimos os pontos A e B, no campo de entrada.

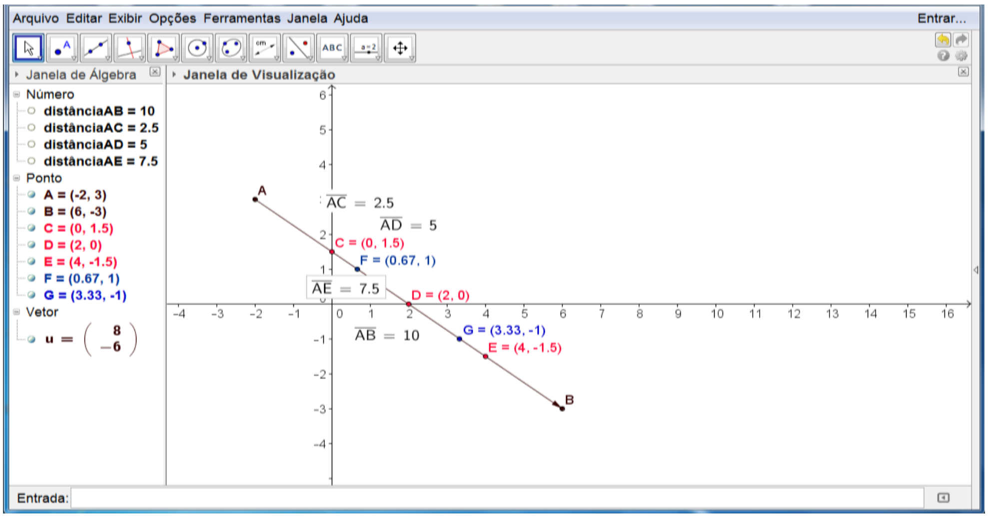
b) Construímos o vetor AB;

c) Calculamos cada ponto, seguindo a sua posição, usando também o campo de entrada.

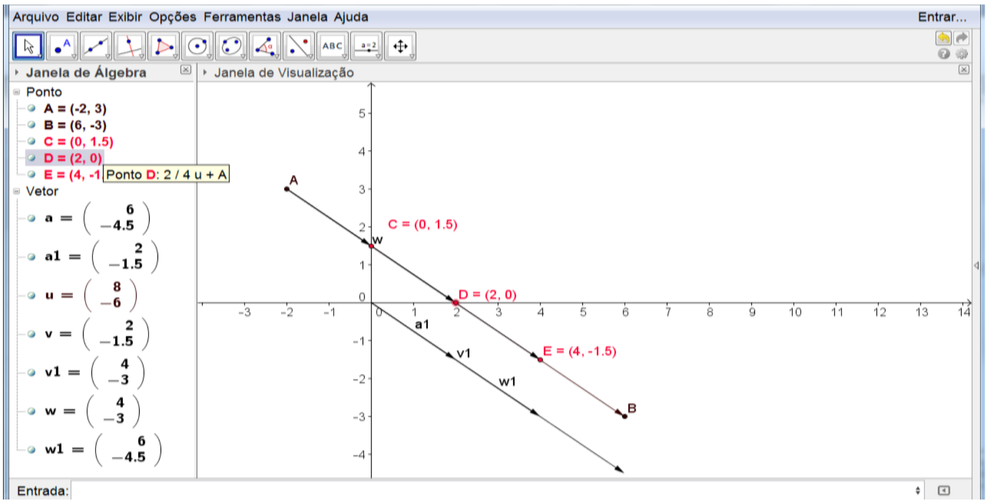
d) O resultado alcançado está abaixo.



Como na questão anterior, podemos explorar algumas definições, usando novamente a ferramenta *distancia*, comprovar os cálculos entre a distancia dos pontos, tornando-se rápido a demonstração do paralelismo entre vetores, pois se a distancia entre AC = 2,5 cm e de AB =10 cm, nota-se que AB = 4 AC, ou seja, *dois vetores são paralelos, existe um numero real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} (= \alpha)$, sendo assim dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.*



Outra exploração, é novamente construir os vetores posição, demonstração que são representantes de outros vetores. Nesse momento também, quando a construção está pronta, ao mover o ponto A ou B, podemos analisar outros vetores que se encontram na mesma situação.



Essa atividade, com o uso do Geogebra, ajuda o aluno a perceber através da janela de visualização, a resolução do problema.

b. Atividade 2 – Estudo das Retas.

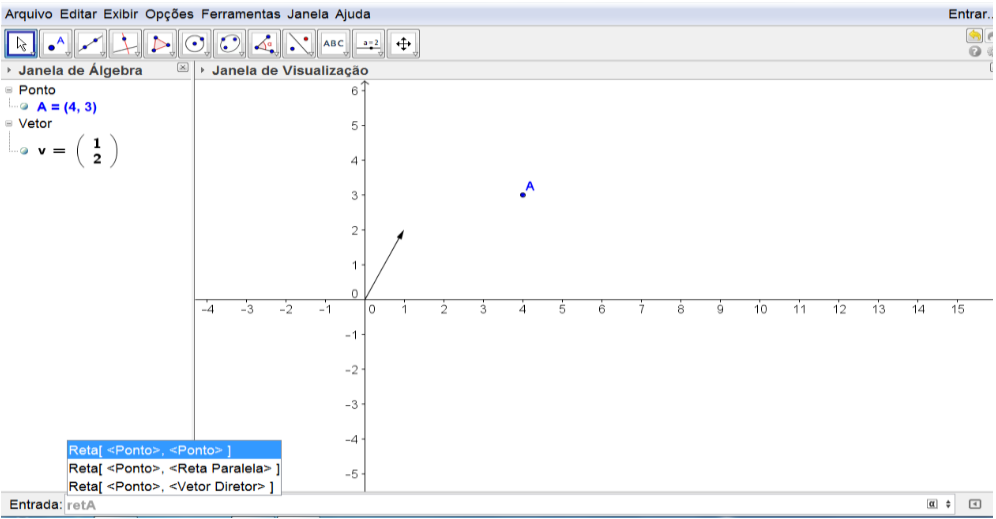
A definição de retas, no inicio dos estudos, pode ser um pouco abstrata. Pela definição temos que :

Considerando um ponto A (x_1,y_1,z_1) e um vetor não nulo v=(a,b,c). Só existe uma reta r que passa por A e tem direção de v. Um ponto P(x,y,z) pertence a r se, e somente se, o vetor AP é paralelo a v, ou seja , AP=t.v. (Winterle,2000).

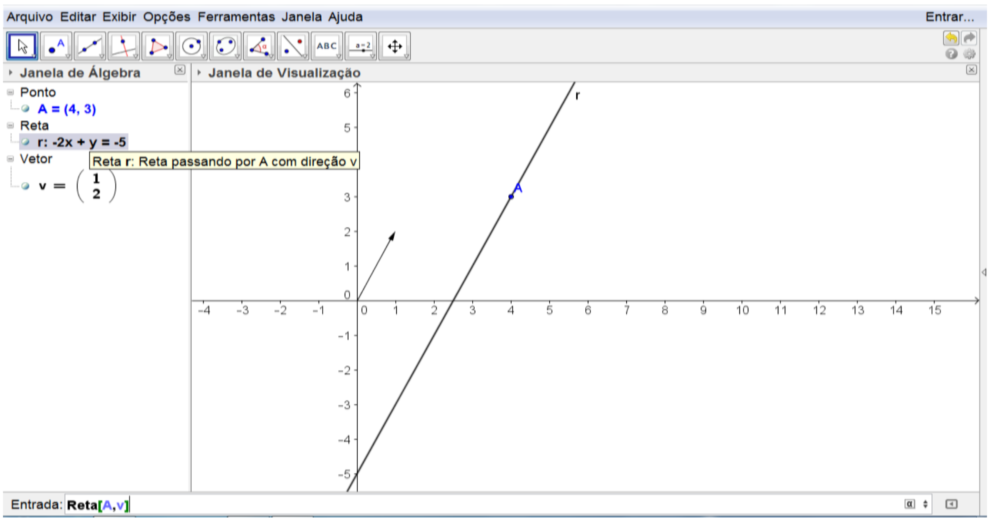
Nossa proposta é que ao invés do professor apresentar a figura que represente essa definição pronta, construa com os alunos. Vamos a ela.

1) Dados o ponto A= (3,4), pertencente à reta r, definida pelo vetor diretor v=(1,2), construa a reta r, encontre a equação vetorial e demonstre a definição de reta.

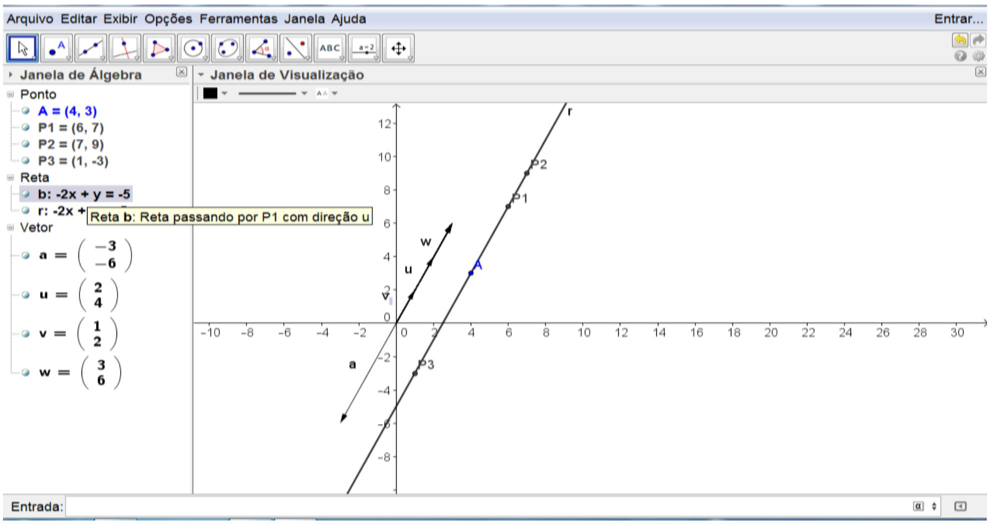
a) Inserimos no campo de entrada, o ponto A e o vetor V.



b) Usando campo de entrada digite , reta, irão aparecer alguma opções, clique em reta (ponto, vetor diretor) e insira o ponto A e v, a reta r surgira.



c) Agora podemos acrescentar os parâmetros, definido no campo de entrada P= A+2v,P=A+ 3v e P= A -3v por exemplo.



d) *Ao explorar outras situações como alterar o Ponto A, ou o vetor diretor, ou criar uma nova reta com o ponto P1 e o vetor u, por exemplos, o aluno irá perceber que além de existir inúmeros pontos da reta, que vários vetores diretores diferentes podem definir a mesma reta, e sempre a reta estará relacionada com um ponto e um vetor diretor.*

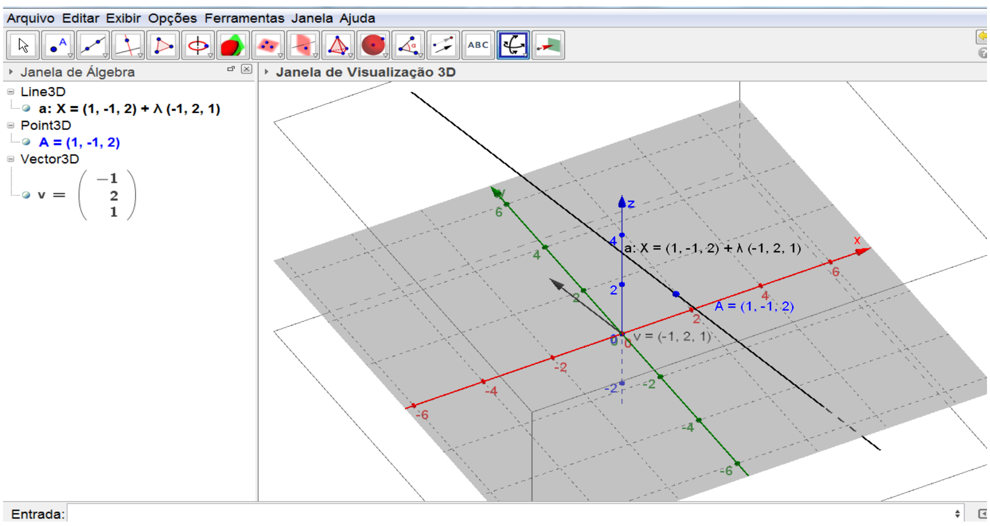
Há também uma versão 3D em teste que ajuda na visualização da reta com três componentes, observamos o exemplo a seguir.

2) *Dados o vetor diretor v= (-1,2,1) e o ponto A = (1,-1,2) determine a equação vetorial da reta.*

Resolução sem Geogebra:

(x,y,z)= (a,b,c,) +t (x1,y1,z1) ou seja (x,y,z)=(-1,2,1)+t(1,-1,2)

Como não usamos o Geogebra o acadêmico apenas visualiza as equações. Resolução com Geogebra 3D[4]



[4] Geogebra 5.0 ainda em teste.

Nesse caso pode explorar o conceito de vetor diretor e reta , além de visualizar a equação vetorial, com vetores com três componentes.

c. Atividade 3 : Plano

A definição de plano definido por dois vetores e um ponto, é outro exemplo a ser explorado. Nesse caso a versão 3D, mesmo em teste, é recomendável. Vamos ao exemplo.

1) *Qual a equação geral do plano π passa pelo ponto A(2,2,-1) e contém os vetores v =(-1,5,-3) e u =(2,-3,1);*

Resolução sem Geogebra

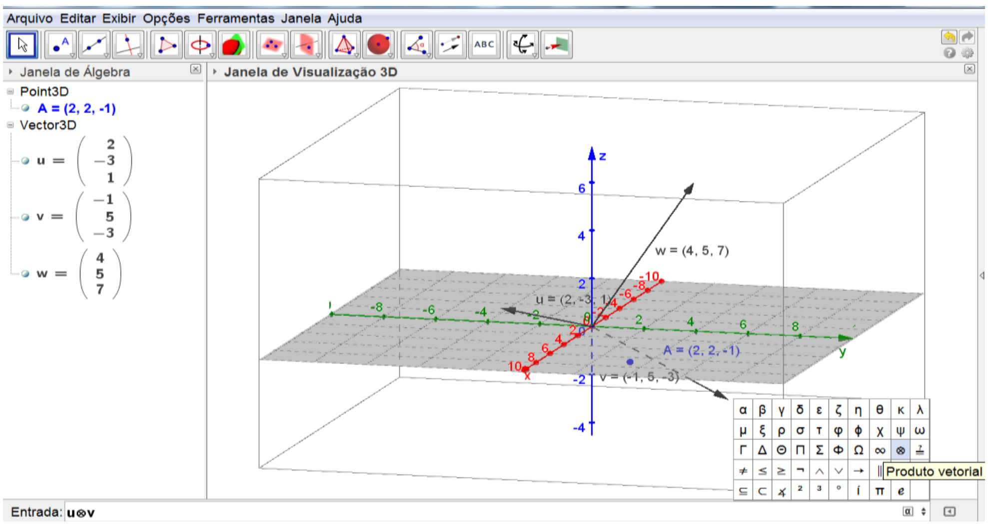
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4,5,7) \quad \text{logo}$$

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$
$$4(2) + 5(2) + 7(-1) + d = 0$$
$$4x + 5y + 7z - 11 = 0$$

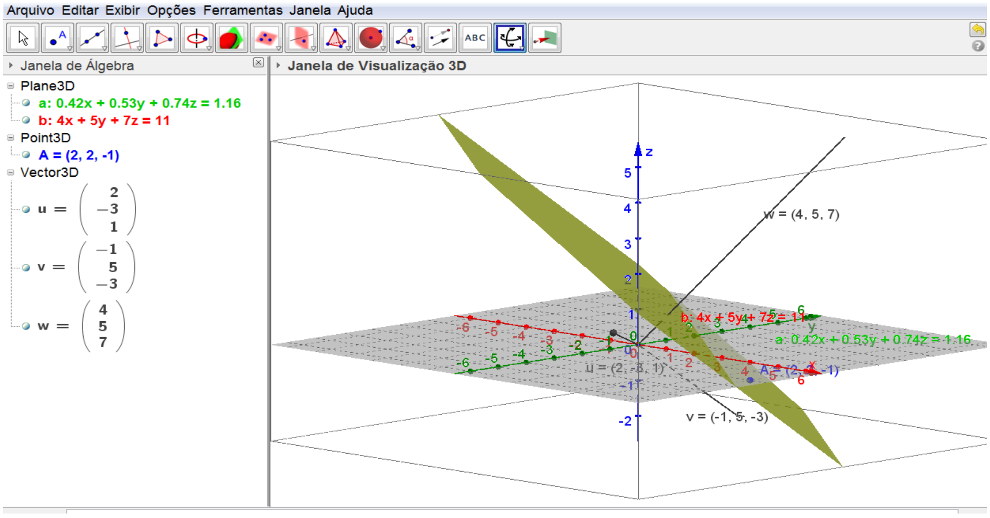
Resolução com Geogebra

a) Inserimos no campo de entrada o Ponto A e os vetores u e v. Antes porém é necessário solicitar a visualização 3D em exibir, janela de visualização 3D.

b) Devemos calcular produto vetorial entre u e v. No campo de entrada inserimos $u \otimes v$ *, (o símbolo* $\otimes$ *, que representa o produto vetorial se encontra no canto direito do campo de entrada)*



c) Depois que obtemos o vetor w, que é o produto vetorial de u e v, inserimos , no campo de entrada, o comando , plano perpendicular (ponto ,vetor)



Surgi o plano π e sua equação geral da reta. Essa atividade reforça a definição da *equação geral do plano* ponto onde temos :

Sejam A (x_1, y_1, z_1) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c), \vec{n} \neq 0$, um vetor normal (ortogonal) ao plano. Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto P (x, y, z) pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é, $\vec{n}$. (P-A)= 0 (Winterle , 2000)

Desenvolvendo essa definição encontramos a equação geral do plano definida por ax+by+cy +d=0. Em nosso exemplo para um ponto A= (2,2,-1) e um vetor normal $\vec{n}$ =(4,5,7) a equação geral é definida por 0,42x +0,53y+0,74x=1,16, quando usamos duas casas decimais, ao inserir no campo 4x+5y+7z-11=0 verificamos ser o mesmo plano.

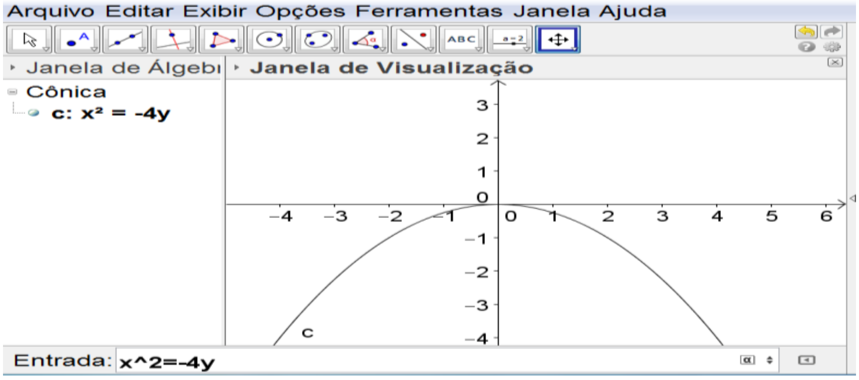
d. Atividades 4: Cônicas

Com o passar do tempo, os alunos já tem certa apropriação sobre o programa, sendo assim propomos que as atividades sobre cônicas, fossem desenvolvidas diretamente no Geogebra. A ideia é que após construir as cônicas, os alunos fossem capaz de fazer as explorações de seus elementos, como foco, extremidades, equações diretrizes etc. Vamos a um exemplo das parábolas.

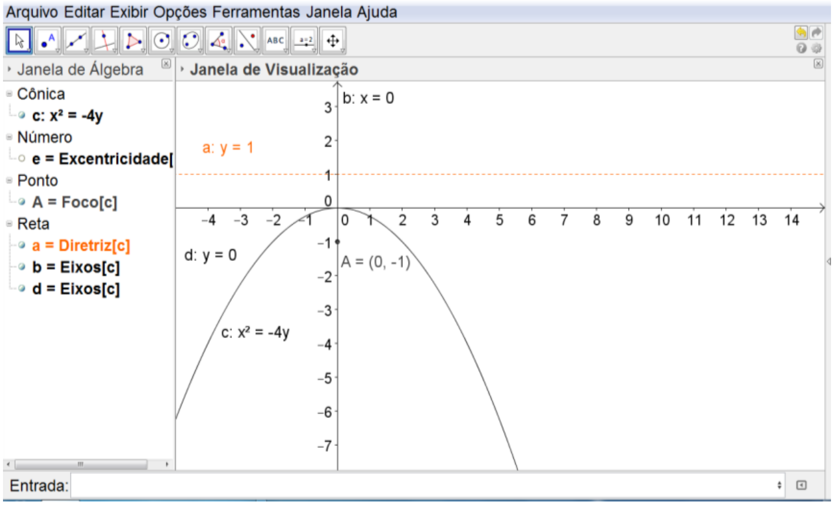
1) *Construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz, das seguintes parábolas.(Winterle, Steinbruch 1987)*

a) x^2 =-4y b) y^2=6x c) x=-y^2/8

b) *Basta inserir no campo de entrada a expressão da cônica solicitada*



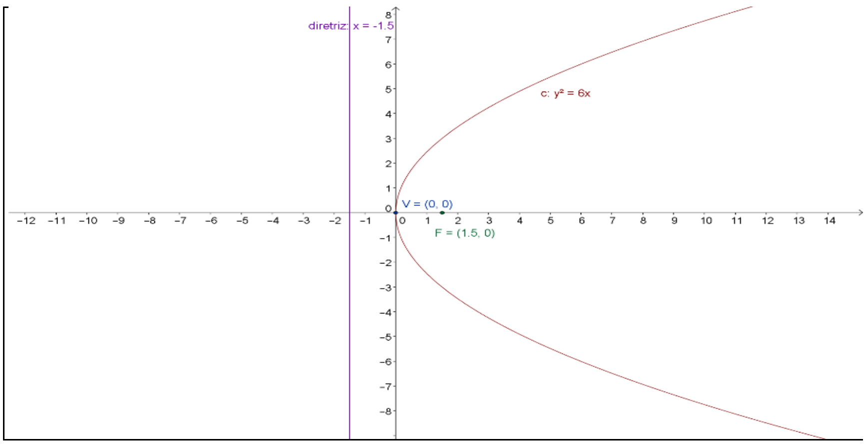
c) No campo de entrada pode se explorar os outros elementos, por exemplo digitando foco (cônica), diretriz(cônica),eixos (conicas) ou exenctricida (cônicas), irão apresentar esses elementos.



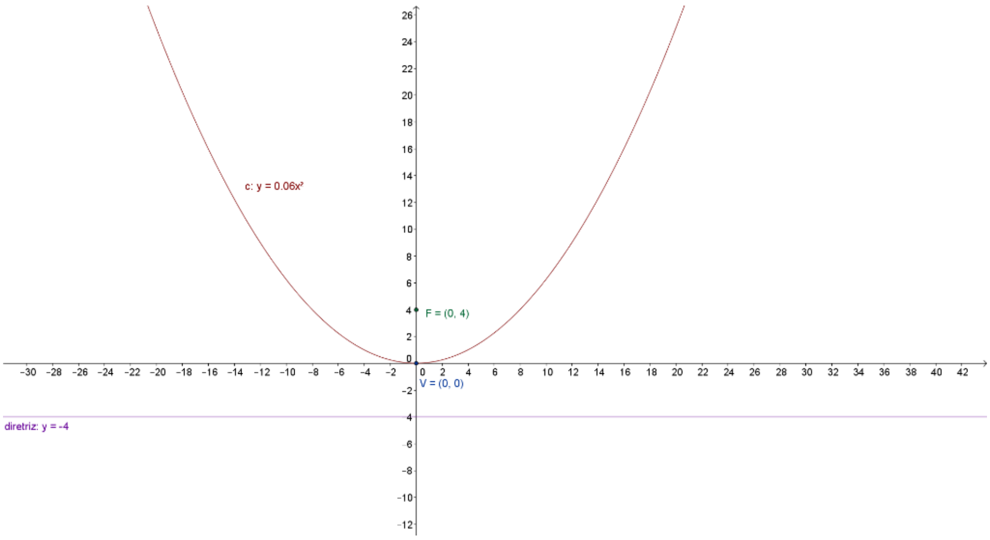
De maneira semelhante analisamos as outras parábolas. Percebe-se que os alunos conseguem compreender com mais rapidez os elementos das cônicas, quando tem a oportunidade de construi-las e comparar seus resultados.

Os resultados das outras duas seguem abaixo.

b)



(c)



Com essa atividade, a questão da concavidade, esquerda ou direita, para cima ou para baixo, é mais perceptível.

e. Atividade 5 : A cônica da Unifebe.(projeto de pesquisa)

Essa última atividade a ser apresentada, é fruto de um projeto de pesquisa de iniciação científica, realizado na instituição. O curso de Engenharia Civil da Unifebe possui apenas três anos de funcionamento, e desde seu início, procurou-se trabalhar a interdisciplinaridade e projetos de iniciação cientifica. Dessa proposta, surgiram alguns projetos como as Pontes de Macarrão e atividades envolvendo maquetes. Foi no início do ano de 2013, por meio da elaboração desse projeto de iniciação científica, sobre o estudo das Seções Cônicas, que a investigação matemática ganhou corpo.

Percebemos que a Seção Cônica, muitas vezes estava fora de alguns programas, ou no final deles, sendo assim preterido por outros conteúdos. Outra motivação do projeto está na exploração do prédio da própria Unifebe, construído com uso de cônicas. Trabalhamos essa investigação no projeto de pesquisa pois para conseguir analisá-la precisamos de dados, muitos dados. Começamos procurando conseguir e analisar ntrar a plana baixa. Isso requer um tempo maior do que o disponível em sala de aula, por isso é muito difícil fazer uma investigação em sala de aula.

Figura 4: Prédio da Unifebe
Fonte : Unifebe

No projeto de pesquisa a problematização inicial estava relacionada à questão do uso das formas quadradas em detrimentos das cônicas. Sabemos que antes de chegar ao conteúdo estudo das Cônicas há todo um caminho a ser percorrido que passa pela definição de vetores, retas e planos. Sendo assim apresentamos inicialmente alguns exemplos do uso do Geogebra na Geometria Analítica, pelos conceitos básicos de vetores, retas e planos, desenvolvidos em sala de aula e retiradas de vários livros, destacando os livros, Geometria Analítica, Winterle e Steinbruch (1987) e Vetores e Geometria Analítica, Winterle (2010). As atividades anteriores podem ser consideradas exercícios, ou seja, atividades de complexidades reduzidas, porém fechadas, quando não trabalhadas com o Geogebra. Com o seu uso, este mesmo exercícios passam a serem *explorações*, pois existe uma abertura para novos conceitos. Quando conseguimos vencer essas etapas, propomos aos alunos analisar, qual a cônica que representa a cúpula da Unifebe, apresentada na forma de investigação matemática.

Analisando os dados da planta Baixa da Unifebe temos a informação de que a altura da cúpula é igual a 6 metros, e o valor do raio dessa secção é de 10 metros. As perguntas problematizadoras são: Qual a sua forma? Será que é uma parábola? Uma elipse?

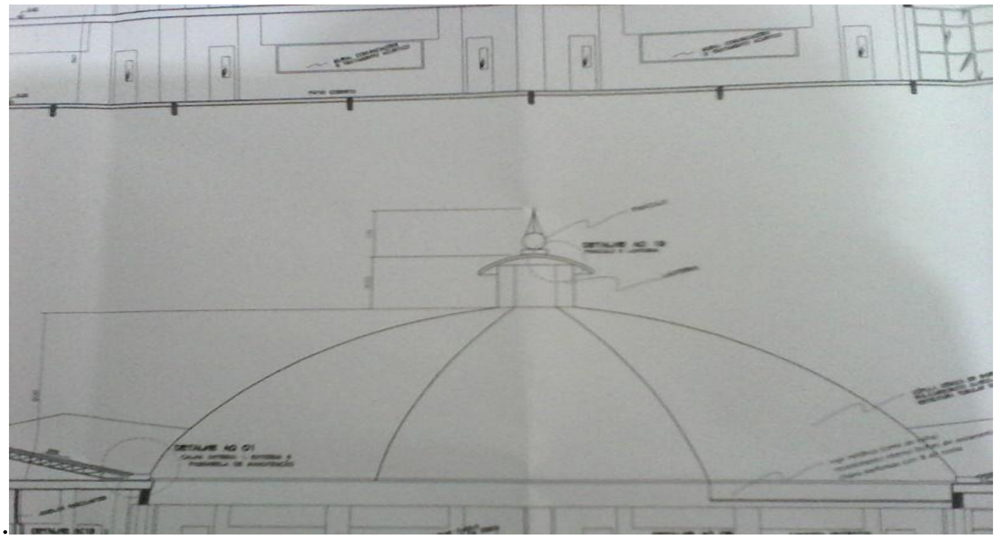
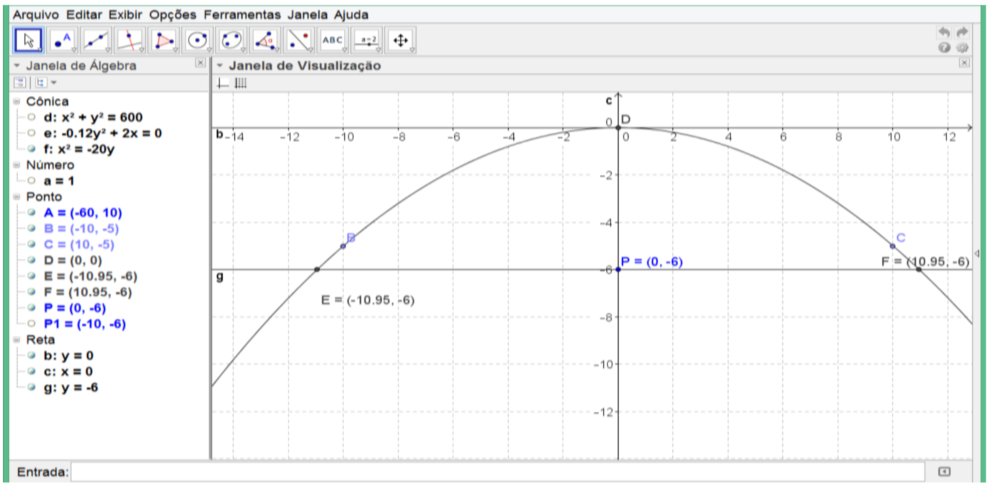


Figura 5:Planta Baixa Unifebe
Fonte : Autor

Usando os dados e fazendo a parábola da cúpula: ($x^2+y^2=600$)



Como na planta baixa o valor é de 20 metros na base, aqui temos 21,9, concluímos que pode ser que a cúpula não é uma paraboloide, com os alunos haviam sugerido.

Partimos então para a análise de outra cônica.

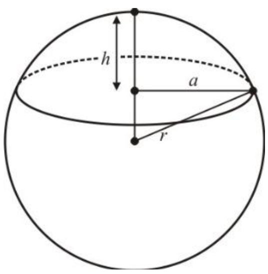


Figura 6: esfera/calota

Primeiramente devemos calcular o valor do raio da esfera: Por Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$R^2 = (R-h)^2 + a^2$$
$$R^2 = (R-6)^2 + 10^2$$
$$R^2 = R^2 - 12R + 36 + 100$$
$$R^2 - R^2 + 12R = 136$$
$$R = \frac{136}{12} = \frac{68}{6}$$
$$R = \frac{34}{3}$$

Geometricamente temos:

Ponto central = altura – raio = 6 - 34/3=-16/3

Centro da Esfera: (0,0,-16/3)

Raio = 34/3

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$$
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+16/3)^2 = (34/3)^2$$
$$X^2+y^2+(256/9)z^2+(32/3)z+256/9=1156/9$$

Simplificando

$$X^2+y^2+(z+5{,}33)^2=128{,}44$$

Encontrando a Equação, entramos com os dados no Geogebra e temos:

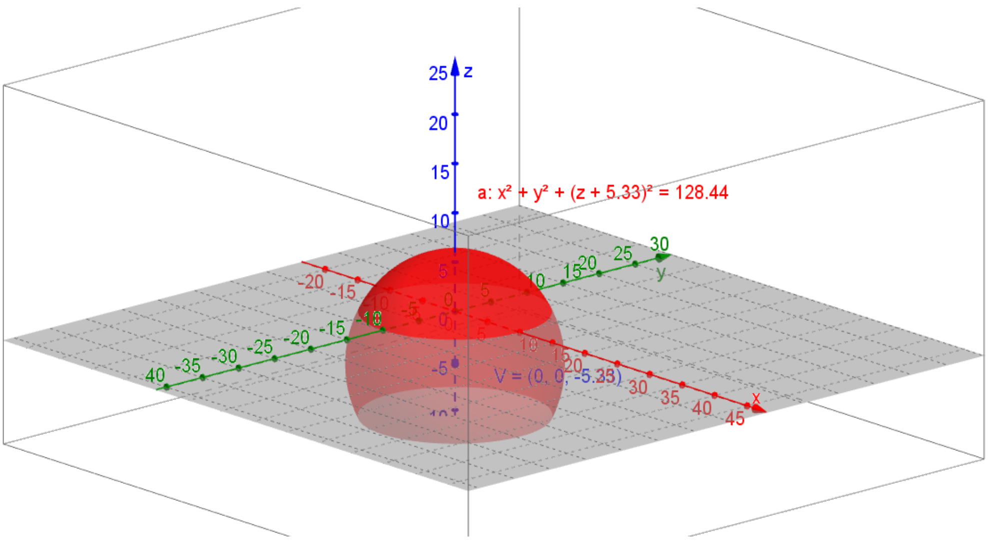


Figura 7=Esfera - cúpula da Unifebe

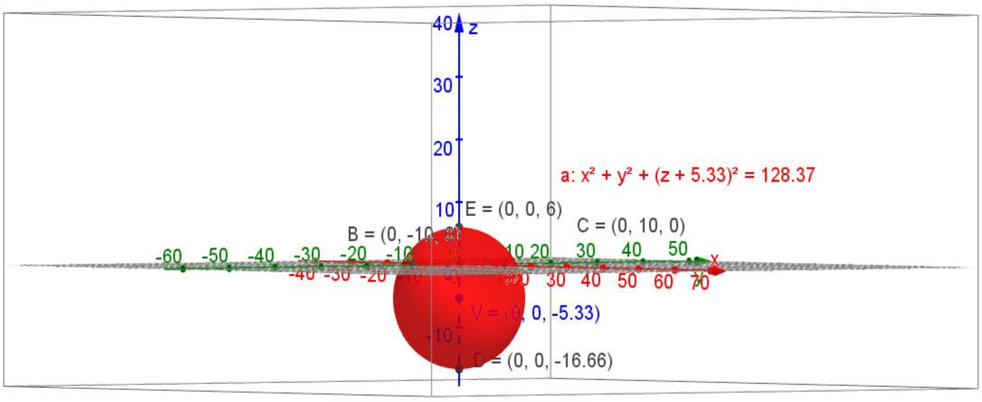


Figura 8; Unifebe cônica

Obs.: ponto E = (0,0,6) = altura da cúpula; Ponto B e C= base da cúpula = (0,-10,0) e (0,10,0), Ponto V = (0,0,-5.33) = centro da esfera, Logo podemos afirmar que essa cúpula é uma *calota esférica*.

Essa investigação levou alguns meses a ser realizada, pois os acadêmicos tiveram que procurar outros conceitos que não estavam sendo trabalhados no momento, mas que eram necessários para a resolução do problema.

4. CONCLUSÃO

Esse pequeno relato de algumas atividades realizadas em sala de aula com o auxilio do Geogebra, procura demonstrar que o uso de software de geometria dinâmica pode enriquecer muito o processo de ensino aprendizagem, nas aulas de Geometria a Analítica e Álgebra Linear. Com uma mesma aplicação vários conceitos podem ser trabalhos, com maior clareza e rapidez para sua compreensão.

Com o uso continuo, além de pesquisar de outras ferramentas e funções do Geogebra, tanto professor com aluno podem explorar mais as atividades propostas em sala, tornando as aulas mais dinâmicas, garantido um domínio mais profundo do conhecimento científico. Foi possível perceber que no início do semestre o uso do Geogebra se restringia as atividades pedidas pelos professores, porém tanto alunos quanto o próprio começaram a incorporar o Geogebra, com instrumento de desenvolvem dos assuntos trabalhados em outras situações, algumas até em outras disciplinas. Os resultados foram muito positivos e abriram caminho para novas investigações no futuro, pois quando os exercícios se transformaram em explorações, novas possiblidades de investigações surgiram. Há um longo caminho a percorre para que o Geogebra possa ser incorporado definitivamente pelo professor e aluno, como uma ferramenta diária de sala de aula, mas os primeiros passos foram dados o que nos faz concluir, que com essa atitude, as aulas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, podem ser exploradas de maneira mais lúdica e ampla, pelos alunos e professor, deixando de ser, apenas uma séries de equações e formulas, para ser aplicável, interessante e desafiadora.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDIN ,Y.Y; e FURUYA,Y.K.S; Geometria Analítica para todos : e atividades com Octave e GeoGebra - São Carlos : Edufscar, (2011

BOULOS, P. e CAMARGO, I; Geometria Analítica : um tratamento vetorial. 3 ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005

DELIZOICOV, D.; ANGOTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de ciências:** fundamentos e métodos. São Paulo: Cortês, 2009.

ELON L.L; **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 2ed. Rio de Janeiro . IMPA. (2011),

FREIRE, **Pedagogia da autonomia**. 6. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

PONTE, J.P; FERREIRA,C. VARANDAS, J.M.,BRUNHEIRA, L., e OLIVEIRA,H. **A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

PONTE, J.P; BRCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigação matemáticas na sala de aula**. 2 ed.- Belo Horizonte: Autentica Editora 2009.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: **Educação matemática:** temas de investigação. Lisboa: IIE, p. 185-239. 1992

__________. Explorar e investigar em matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*,, n. 21, p. 14, marzo 2010.Disponivel em : < http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=45#indice>. Acesso em 13 jul. 2010

SKOVSMOSE , Ole. Cenários para investigação. *Bolema*. Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91.2000.

_______________.**Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas –SP Papirus. 2001.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo **Álgebra linear**. 2. Ed. São Paulo: Makron Books.1987

__________________ **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson-Makron Books.2000