REPRESENTACIONES Y RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICAS. EJEMPLOS DE ACTIVIDADES

María Dolores Moreno Martel
Agustín Morales González

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo pretendemos ofrecer una muestra variada de situaciones, en su mayor parte propuestas en clase a los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado, en las que una representación adecuada resulta esencial para llevar a cabo diversos tipos de razonamientos, tales como el inductivo, el analógico, y el deductivo. Sin embargo, hemos constatado que su uso no está exento de dificultades, entre las cuales quizás la principal sea la poca costumbre que la mayoría de nuestros alumnos tiene de pensar con representaciones visuales y, mucho menos de elaborarlas por sí mismos.

Abstract

In this paper we will show several practical situations that have been proposed to our pupils of the Teacher Training Faculty in which a suitable representation is required to produce several types of mathematical reasoning. However, its use suppose a lot of difficulties owing to the lack of custom that the greater part of these pupils have to make use of visual representations as support to the process of reasoning in Mathematics.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
Mª. D. Moreno; A. Morales (2001). *Representaciones y razonamientos en Matemáticas. Ejemplos de actividades, pp. 173-190*

Consideraciones generales

Si tenemos en cuenta la naturaleza de las Matemáticas, constataremos que la visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática; así lo entendió Gauss hasta el punto de considerar a las Matemáticas como una "ciencia del ojo".

Esta importancia es puesta de relieve por M. de Guzmán (1996) al señalar que *las ideas, conceptos y métodos de las Matemáticas presentan una gran cantidad de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas del campo...* de modo que *la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.*

Si bien es cierto que desde un punto de vista formalista se han puesto muchas objeciones al empleo de dibujos, figuras, y en general, representaciones gráficas dado que su empleo puede conducir a errores, actualmente parece haber una tendencia a recuperar el papel de la visualización en todos los niveles de la actividad matemática.

Creemos oportuno mencionar aquí la cita recogida en Nelsen (1993), debida a Halmos, según la cual para ser un buen estudiante de Matemáticas se debe haber nacido con la habilidad de visualizar, de modo que la mayoría de los profesores trata de desarrollar esta habilidad en sus estudiantes. Recuerda asimismo el clásico consejo de Polya relativo a la conveniencia de dibujar una figura a la hora de resolver un problema.

Las representaciones planas de figuras tridimensionales pueden llevar a confusiones si no se interpretan correctamente

- ÁNGULOS EN EL CUBO

Determina la medida de los ángulos que forman los segmentos trazados en los cubos de las figuras que siguen. En la primera, los segmentos gruesos corresponden a diagonales de dos caras laterales contiguas, mientras que en la segunda los puntos marcados son los puntos medios de las aristas respectivas.

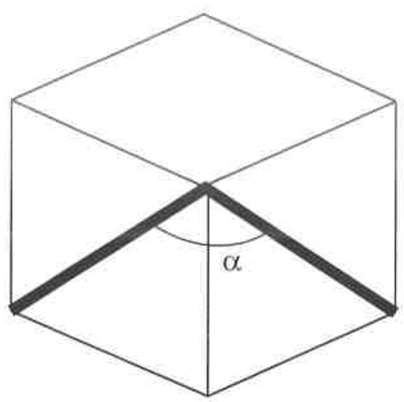


fig. 1

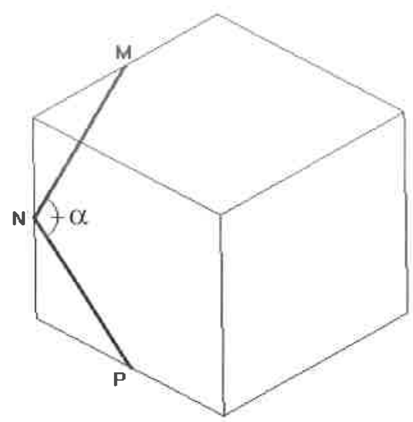


fig. 2

Comentario

En relación con la figura 1. debemos indicar que el ejercicio no resulta fácil para nuestros alumnos. Es frecuente escuchar, tras unos minutos de reflexión, que se trata de un ángulo recto. Este error se deriva, por una parte, de la poca familiarización que tienen con la perspectiva isométrica y, por otra, del hecho de que no dudan en sumar dos ángulos de 45° sin tener en cuenta que ello no es lícito, dado que no se encuentran en el mismo plano. La respuesta correcta, 60°, no se deduce fácilmente a menos que unamos los extremos de los segmentos resaltados mediante otro segmento que resulta ser una diagonal de la base del cubo.

Para la figura 2, resulta conveniente completar el polígono que resulta al seccionar el cubo por el plano determinado por los puntos M, N y P (hexágono regular), para llegar al resultado correcto.

En ocasiones, resulta práctico modificar la representación mediante procedimientos diversos

- CUADRADOS INSCRITO Y CIRCUNSCRITO

¿Cuál es el área del cuadrado inscrito a la circunferencia de la figura 3, si la medida del lado del cuadrado circunscrito es **a** unidades?

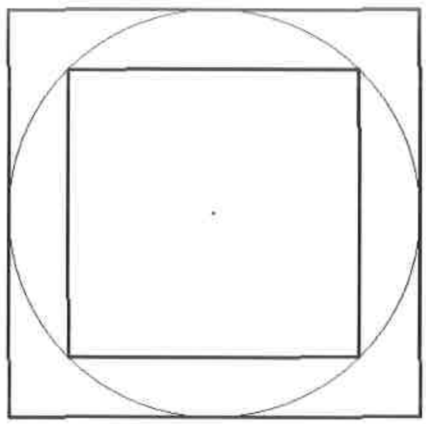
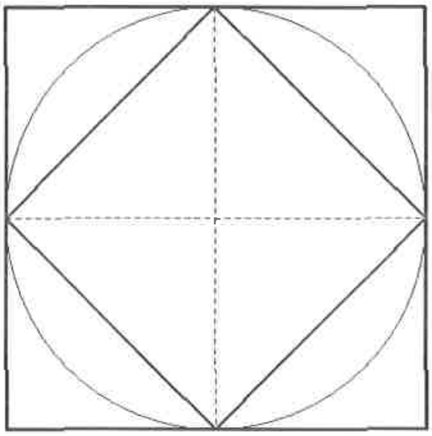


fig. 3

Comentario

En la figura 4 podemos observar que basta un giro de 45 grados del cuadrado inscrito para que quede claro que su área es la cuarta parte de la del cuadrado circunscrito.



Al mismo

fig. 4

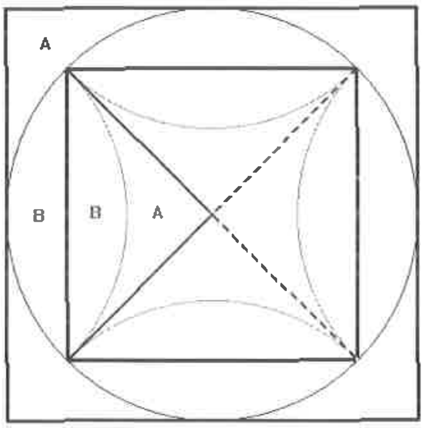
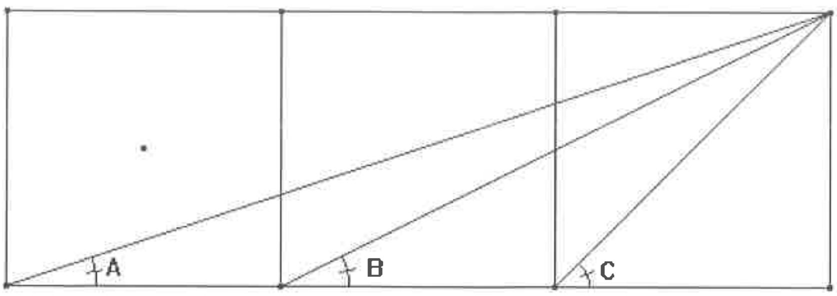


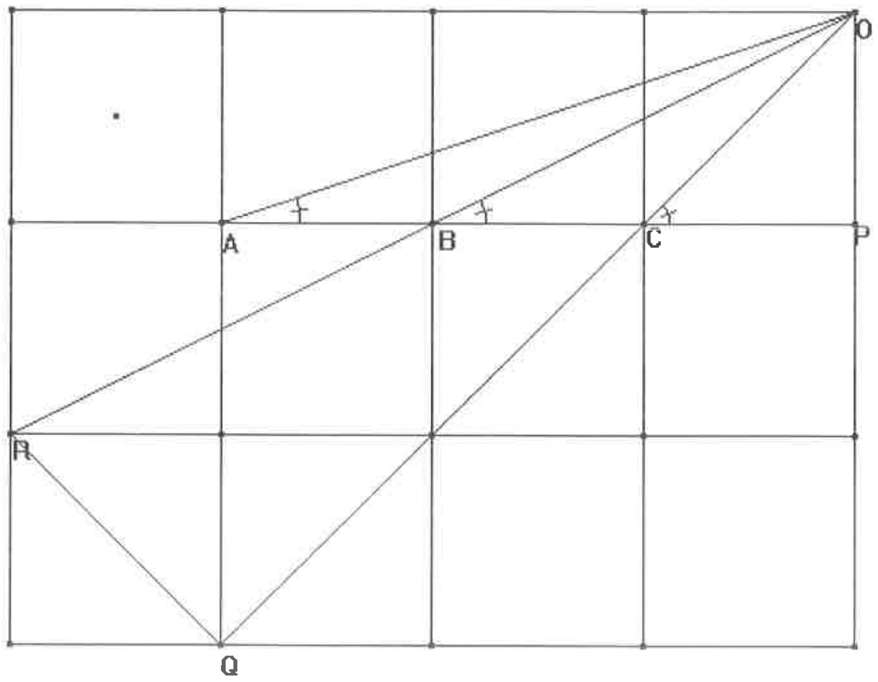
fig. 5

Al mismo resultado se llega si consideramos la figura 5, en la que se ha aplicado el concepto de simetría axial, sin más que comprobar que las superficies denotadas por A y B son, respectivamente congruentes.

- SUMA DE ÁNGULOS

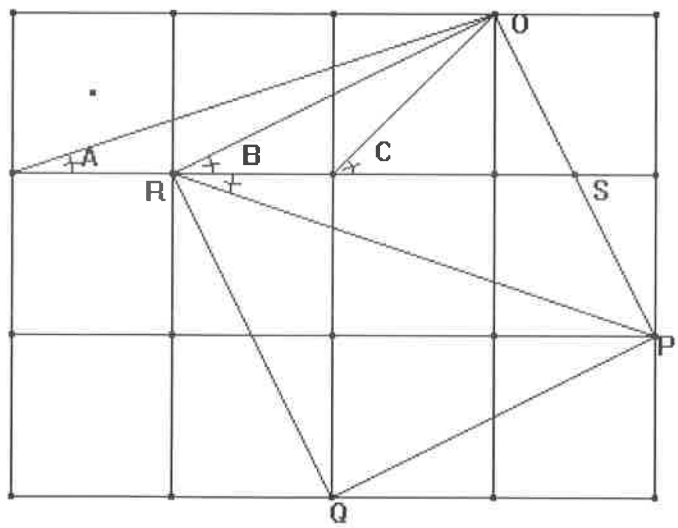
Sirviéndote sólo de la geometría elemental (no es lícito usar ni siquiera la Trigonometría) tienes que demostrar que C es la suma de A y B.





Si ampliamos la cuadrícula y prolongamos los segmentos OB y OC, vemos que los triángulos APO y OQR son semejantes, por lo que los ángulos A y O son iguales. Y como C = B + O, C = B + A.

Otra manera consiste en construir el cuadrado OPQR siguiente:

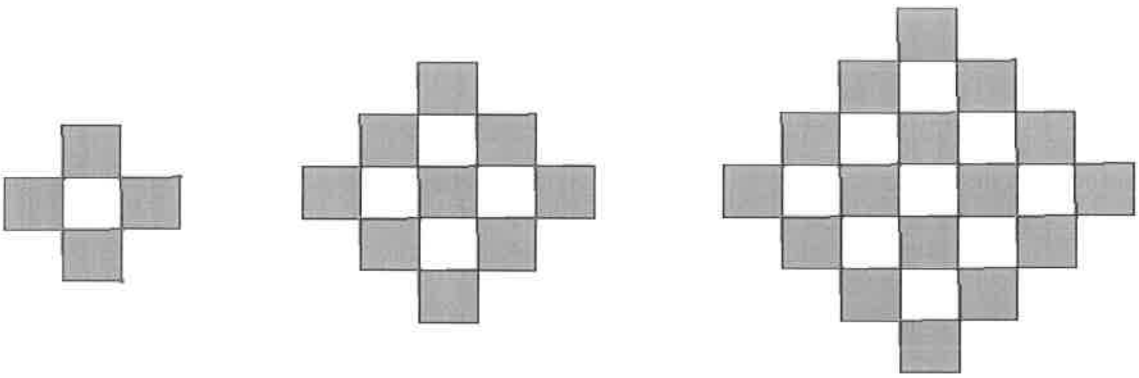


El ángulo A sc ha transportado de tal forma que coincida con el ángulo de lados las semirrectas R_S y R_P, respectivamente. Por lo tanto, A + B = C, ya que, ambos ángulos son mitades de un recto.

Las representaciones resultan muchas veces fundamentales para permitir realizar razonamientos inductivos que conduzcan a la obtención de una fórmula general

- MOSAICO DE AZULEJOS

¿De cuántos azulejos se componen los modelos 1, 2, 3, ..., n de la figura que sigue?



Estrategia a) Se basa en la idea de la simetría horizontal de las figuras.

ORDEN	ANCHO	NÚMERO DE CUADRADOS
1	3	$3 + 2 \cdot 1$
2	5	$5 + 2 \cdot (1 + 3) = 5 + 2 \cdot 2^2$
3	7	$7 + 2 \cdot (1 + 3 + 5) = 7 + 2 \cdot 3^2$
12	25	$(2 \cdot 12 + 1) + 2 \cdot [1 + 3 + ... + (2 \cdot 12 - 1)] =$ $= (2 \cdot 12 + 1) + 2 \cdot 12^2$
n	2n + 1	$(2 \cdot n + 1) + 2 \cdot [1 + 3 + ... + (2 \cdot n - 1)] =$ $= 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n^2 = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1$

Estrategia b) Se basa en completar cuadrados

ORDEN	ANCHO	NÚMERO DE CUADRADOS
1	3	$(2 \cdot 1 + 1)^2 - 4 \cdot 1$
2	5	$(2 \cdot 2 + 1)^2 - 4 \cdot (1 + 2)$
3	7	$(2 \cdot 3 + 1)^2 - 4 \cdot (1 + 2 + 3)$
12	25	$(2 \cdot 12 + 1)^2 - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 12)$
n	2n + 1	$(2 \cdot n + 1)^2 - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1$

Estrategia c) Se basa en la consideración de cuadrados negros y blancos

ORDEN	ANCHO	NÚMERO DE CUADRADOS NEGROS	NÚMERO DE CUADRADOS BLANCOS	TOTAL
1	3	$2 \cdot 1 + 2$	1	
2	5	$2 \cdot (1 + 2) + 3$	$2 \cdot 1 + 2$	
3	7	$2 \cdot (1 + 2 + 3) + 4$	$2 \cdot (1 + 2) + 3$	
12	25	$2 \cdot (1 + 2 + ...+ 12) + 13$	$2 \cdot (1 + 2 + ...+ 11) + 12$	
n	2n + 1	$2 \cdot (1 + 2 + ...+ n) +$ $+ (n + 1) = n^2 + 2\cdot n + 1=$ $= (n + 1)^2$	$2 \cdot [1 + 2 + ...+ (n-1)] + +$ $n =$ $= n^2$	$\mathbf{2n^2+2n+1}$

- NÚMEROS DE LUCAS

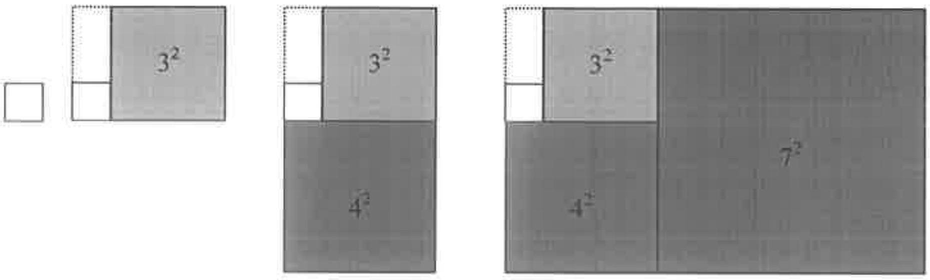
Determinar la suma de los cuadrados de los n primeros números de Lucas.

Los números de Lucas son parecidos a los de Fibonacci, pues tienen análogas propiedades y semejantes relaciones con la Biología. Se construyen de la misma forma, pero los primeros números son diferentes. Los primeros números de Lucas son 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...

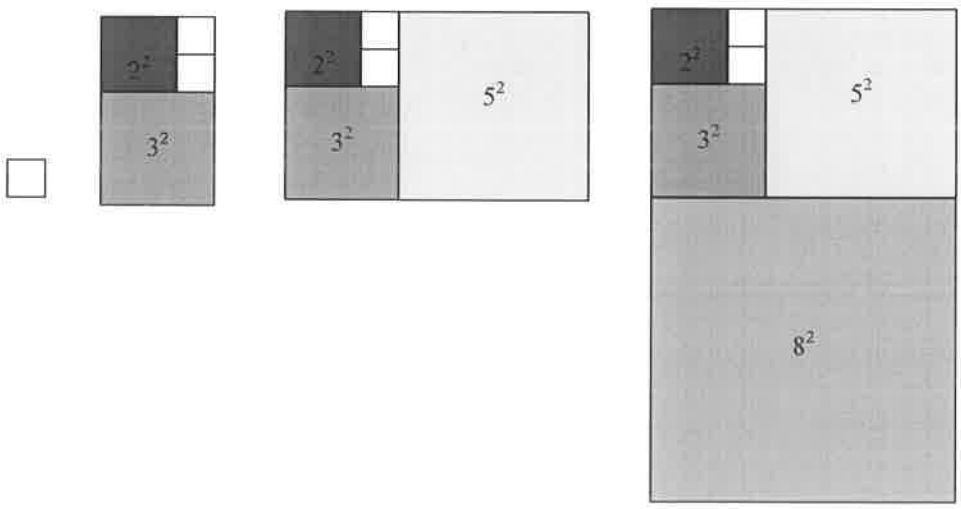
En nuestro caso tenemos:

$L^2_1 = 1$
$L^2_1 + L^2_2 = 1 + 9 = 10$
$L^2_1 + L^2_2 + L^2_3 = 1 + 9 + 16 = 26$
$L^2_1 + L^2_2 + L^2_3 + L^2_4 = 1 + 9 + 16 + 49 = 75$
....
$L^2_1 + L^2_2 + L^2_3 + L^2_4 + ... + L^2_n = L_n \cdot L_{n+1} - 2$

El siguiente modelo visual puede servir para encontrar el término general.



Este modelo se ha diseñado por analogía del correspondiente de la de Fibonacci que se muestra a continuación:



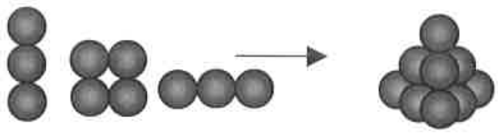
- "PIRÁMIDES" DE BOLAS

El puzzle "La pirámide de veinte bolas" consiste en construir una pirámide con las piezas siguientes:

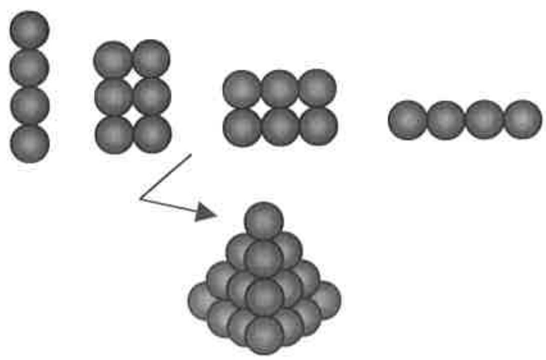
En la actividad que se propone pretendemos también construir otros puzzles mediante la generalización del de veinte bolas. Para ello, se analizan casos más sencillos y se busca una regularidad. Así, tenemos:

La pirámide de 4 bolas:

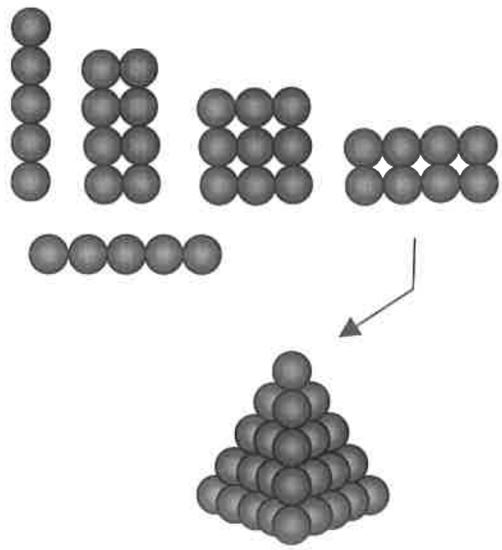
La pirámide de 10 bolas:



La pirámide de 20 bolas:



La pirámide de 35 bolas:



En el caso general se tienen n piezas de la forma siguiente:

Una tira de n bolas, dos tiras adosadas de n-1 bolas cada una, tres tiras adosadas de n-2 bolas cada una..., n-1 tiras adosadas de 2 bolas cada una y n tiras adosadas de 1 bola cada una. El valor de n coincide con el número de bolas que constituyen cada arista de la pirámide.

El número total de bolas que hay en cada pirámide es siempre un término de la siguiente sucesión: 4, 10, 20, 35, ... Cada número coincide con el resultado obtenido al sumar el total de bolas existente en cada piso de la pirámide. Por consiguiente:

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + ... + (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = =1/2 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n + 1)) = 1/6 \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$

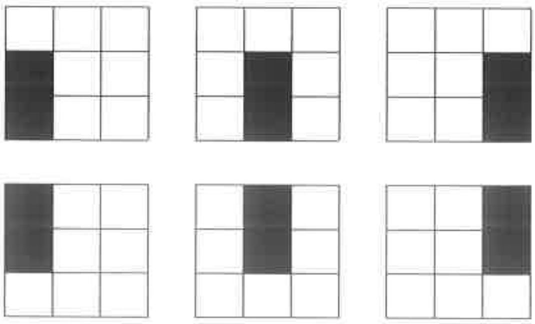
- RECTÁNGULOS EN UN TABLERO DE DIMENSIONES $n \cdot n$

Se pretende encontrar el número de rectángulos que hay en un tablero de dimensiones $n \cdot n$.

Para realizar el recuento de forma sistemática hemos elaborado unas tablas. En una de ellas se representan los tipos de rectángulos según sus dimensiones y, en la otra, el número de rectángulos de cada tipo. Vamos a estudiar el caso 3·3.

El número de rectángulos de cada tipo se determina mediante traslaciones del rectángulo correspondiente en el tablero. Por ejemplo:

Hay seis rectángulos tipo 1·2, en un tablero de 3·3.



Tipos

3 · 3	2 · 3	1 · 3
3 · 2	2 · 2	1 · 2
3 · 1	2 · 1	1 · 1

Nº de rectángulos

1	2	3
2	4	6
3	6	9

El total de rectángulos será la suma de los datos de la segunda tabla. Este resultado se puede obtener sumando los valores de las filas, es decir,

$$(1+2+3)+(2+4+6)+(3+6+9)=(1+2+3)+2\cdot(1+2+3)++$$
$$3\cdot(1+2+3)=(1+2+3)^2$$

Asimismo, se obtiene el mismo resultado sumando los datos que están en las casillas del mismo color, o sea,

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$$1+(2+2+4)+(3+6+9+3+6)=1+8+27=1^3+2^3+3^3$$

Por lo tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

Generalizando:

Tipos

n^2	$(n-1)\cdot n$	$(n-2)\cdot n$	...	$3\cdot n$	$2\cdot n$	n
$n\cdot(n-1)$	$(n-1)^2$	$(n-2)\cdot(n-1)$	...	$3\cdot(n-1)$	$2\cdot(n-1)$	$n-1$
$n\cdot(n-2)$	$(n-1)\cdot(n-2)$	$(n-2)^2$	...	$3\cdot(n-2)$	$2\cdot(n-2)$	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$3\cdot n$	$(n-1)\cdot 3$	$(n-2)\cdot 3$	...	3^2	$2\cdot 3$	3
$2\cdot n$	$(n-1)\cdot 2$	$(n-2)\cdot 2$	...	$3\cdot 2$	2^2	2
n	$n-1$	$n-2$	...	3	2	1^2

Número de rectángulos

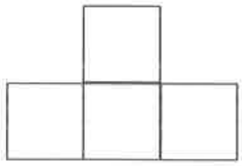
1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
2	4	6	...	$2\cdot(n-2)$	$2\cdot(n-1)$	$2\cdot n$
3	6	9	...	$3\cdot(n-2)$	$3\cdot(n-1)$	$3\cdot n$
...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	$(n-2)\cdot 2$	$(n-2)\cdot 3$		$(n-2)^2$	$(n-2)\cdot(n-1)$	$(n-2)\cdot n$
$n-1$	$(n-1)\cdot 2$	$(n-1)\cdot 3$		$(n-1)\cdot(n-2)$	$(n-1)^2$	$(n-1)\cdot n$
n	$2\cdot n$	$3\cdot n$	...	$n\cdot(n-2)$	$n\cdot(n-1)$	n^2

Por lo tanto:

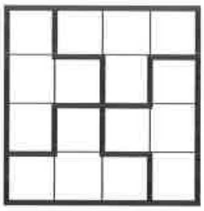
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 =$$
$$(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n)^2$$

- ENSAMBLANDO PIEZAS

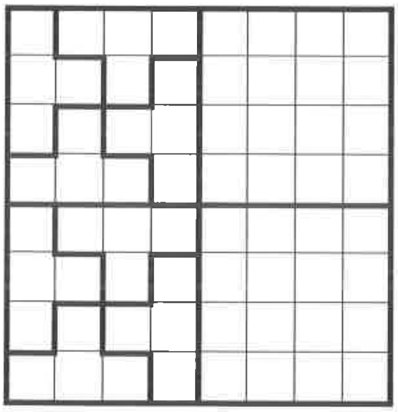
Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado n · n ensamblando piezas del tipo:



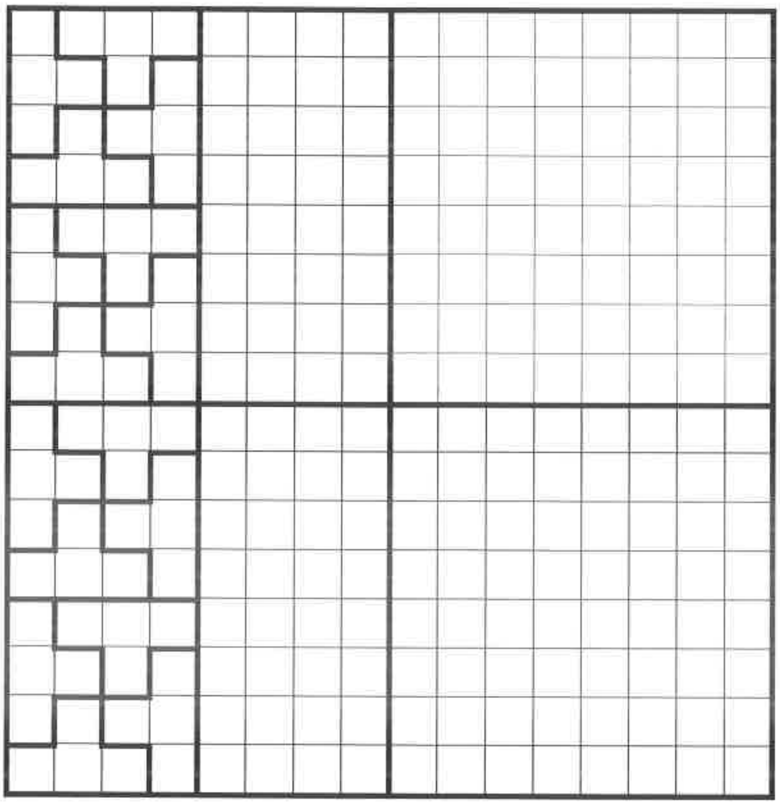
Observa que el área de cada cuadrado es un múltiplo de 4. De esta manera, no hay cuadrados de 3 · 3, 5 · 5, 7 · 7, 9 · 9, ... Parece que sí hay de 4 · 4, 8 · 8, 16 · 16, 32 · 32,   . En efecto: Con cuatro piezas formamos el de 4 · 4 de la manera siguiente:



Con cuatro figuras como la anterior formamos el de 8 · 8:



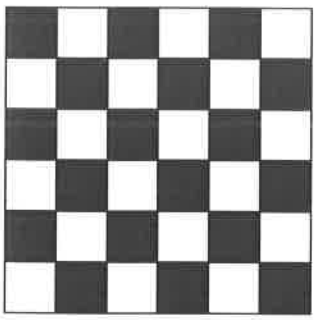
Con cuatro figuras como la anterior tenemos el de 16 · 16, y así sucesivamente:



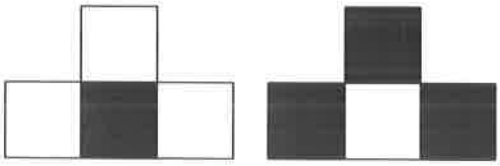
El de 12 · 12, contiene en cada lado el de 4 · 4 tres veces; el de 20·20, cinco veces; el de 24 · 24, seis veces; etc.

Ahora, para el resto de los casos: 6 · 6, 10 · 10, 14 · 14, 18 · 18, ... no es posible ensamblar esas piezas.

En efecto, si utilizamos la estrategia consistente en considerar que los cuadrados buscados adoptan un aspecto similar al del tablero de ajedrez, de acuerdo con la figura que sigue:



Y, dado que los tetraminós que tienen que recubrir el tablero son de los dos tipos que se indican:



Si **x** simboliza el número de tetraminós del primer tipo, e **y**, los del segundo, entonces:

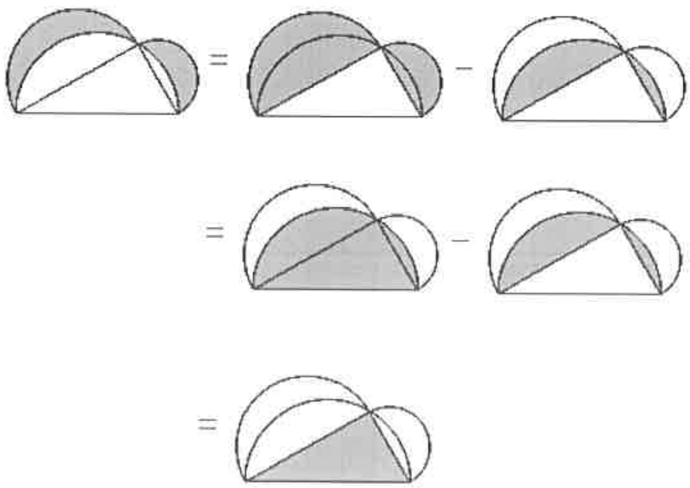
El número de cuadrados negros será: $3y + x = n^2/2$

El número de cuadrados blancos será: $3x + y = n^2/2$

Resolviendo el sistema se obtiene: $x = y = n^2/8$, que es un número natural sólo si n^2 es múltiplo de 8.

Una secuencia de representaciones puede resultar válida para la demostración visual de propiedades

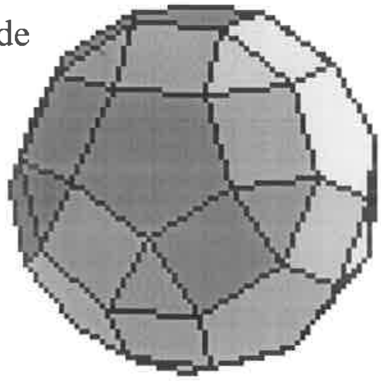
- PROPIEDAD DE LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES



El disponer de un modelo real de un cuerpo geométrico, o de una representación adecuada del mismo, permite resolver situaciones que requieren el uso del pensamiento visual

- EL ROMBICOSIDODECAEDRO (3, 4, 5, 4)

El poliedro semirregular (o arquimediano) de la figura está limitado por 20 triángulos equiláteros, 30 cuadrados y 12 pentágonos. Determina el número de caras, aristas y vértices de dicho poliedro.



El número de caras, 62, es inmediato. Veamos cómo varios alumnas de la Facultad de Formación del Profesorado, en el transcurso de la asignatura optativa "Recursos y materiales didácticos para la enseñanza de las Matemáticas", han obtenido el número de aristas y el de vértices. La comprobación se puede realizar mediante la fórmula de Euler.

A) JÉSSICA (Educación Especial)

- Aristas: Basta tener en cuenta que cada lado de los 12 pentágonos es, a su vez, lado de los cuadrados. Por tanto, tendremos 12 x 5 = 60 aristas. Pero, además, tendremos que considerar las aristas aportadas por los 20 triángulos, es decir, 20 x 3 = 60 aristas. En total, tendremos 60 + 60 = 120 aristas.

- Vértices: Si observamos uno cualquiera de los 12 pentágonos, observamos que cada uno de sus vértices lo es también de dos cuadrados y de un triángulo, por lo que sólo tendremos que multiplicar 12 por 5, es decir, 60 vértices.

B) CATHAYSA (Educación Infantil)

- Aristas: Todos los pentágonos y triángulos están delimitados por cuadrados, cuyos lados constituyen los de aquellos, por lo que sólo es necesario multiplicar el número de cuadrados por el número de lados de cada cuadrado, es decir, 30 x 4 = 120 aristas.

- Vértices: Cada vértice del poliedro lo es de dos cuadrados, por lo que sólo es necesario hacer (30 x 4) / 2 = 60.

C) CARMEN DELIA (Educación Musical)

- Aristas: En principio, tendríamos 5 x 12 + 4 x 30 + 3 x 20 = 240 aristas, pero si tenemos en cuenta que cada dos caras comparten una arista, es necesario dividir por dos, es decir, 240/2 = 120 aristas.

- Vértices: De la misma forma, tendríamos 240 vértices, pero como en cada vértice del poliedro concurren cuatro caras, debemos dividir por cuatro; esto es 240/4 = 60 vértices.

Referencias bibliográficas

GUZMÁN, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Labor: Barcelona.

- (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Pirámide.

NELSEN, R.B. (1993). *Proofs Without Words.* Washington: The Mathematical Association of America.

RICO, L. y otros (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* ICE-Horsori: Barcelona.

STACEY, K.; GROVES, S. (1999). *Resolver problemas. Estrategias.* Madrid: Narcea.