



## HABILIDADES COGNITIVAS EN RELACIÓN CON LA SUSTITUCIÓN FORMAL, LA GENERALIZACIÓN Y LA MODELIZACIÓN QUE PRESENTAN ALUMNOS DE 4º DE ESO

Raquel Ruano Barrera  
Martín M. Socas Robayna,

Universidad de La Laguna

### Resumen

En este artículo se presenta y analiza un cuestionario relativo a tres procesos específicos del Lenguaje Algebraico: Sustitución Formal, Generalización y Modelización. Además, se estudian los resultados obtenidos al pasar este cuestionario a una muestra de 20 alumnos de cuarto de la ESO.

El trabajo es parte de un estudio más amplio que pretende analizar los procesos de sustitución formal, generalización y modelización y sus implicaciones didácticas con alumnos de Secundaria, así como el papel que juegan estos procesos en la transición de la Aritmética al Álgebra.

### Abstract

In this article a questionnaire relative to three specific processes of Algebraic Language: Formal substitution, Generalization and Modelization is presented and analyzed. The results obtained when this questionnaire was carried out to a sample of 20 students of the fourth course of ESO, are also studied.

The work is a part of a bigger study that tries to analyze the processes of formal substitution, generalization and modelization and its teaching implications with students of Secondary Education, as well as, the paper that these processes play in the transition of Arithmetic to Algebra.

## **Introducción**

El álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones. La Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización son tres procesos específicos del Lenguaje Algebraico.

Este trabajo forma parte de uno más amplio en el que se analizan estos tres procesos y sus implicaciones didácticas con alumnos de Secundaria. En este artículo nos limitaremos a presentar y analizar los resultados de un cuestionario realizado a una muestra de alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria. Los principales objetivos del cuestionario son:

- Analizar cómo los estudiantes realizan conversiones entre registros, cómo contextualizan el lenguaje algebraico y cómo interpretan y comprenden el significado de los signos, las letras y las expresiones algebraicas, dada su importancia para realizar los procesos de sustitución formal, generalización y modelización que nos ocupan.
- Analizar las habilidades conceptuales y procedimentales de los alumnos respecto de los procesos mencionados anteriormente, a través de un cuestionario con ejercicios sobre expresiones que involucran letras con significado algebraico.

Antes de la presentación y el análisis del cuestionario, haremos algunas consideraciones acerca de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización.

No son muchos los autores que ven la *sustitución formal* como un proceso claramente diferenciable de otros. Nosotros consideramos que es un instrumento de cálculo algebraico importante ya que se utiliza en muchos procesos matemáticos como la generalización y la modelización, pero que diferenciarlo y

tratarlo adecuadamente tendría consecuencias beneficiosas para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Dentro de la sustitución formal vamos a tratar cuatro tipos de acciones: la realización de transformaciones, el reconocimiento de una sustitución, las sustituciones y los cambios de registro.

Las transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que se encuentra a mitad de camino entre lo puramente formal y el conocimiento explícito de su significado. Por ejemplo, de la identidad  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$  se obtiene al reemplazar  $a$  por  $a+c$  y  $b$  por  $b+d$ , la expresión  $(a+c+b+d) \cdot (a+c-b-d) = (a+c)^2 - (b+d)^2$ , proceso en el que variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables.

Otra tarea que vamos a trabajar en el cuestionario es el reconocimiento de sustituciones, por ejemplo, la verificación de que  $x = 3$  satisface  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , cuando  $x$  se sustituye por 3.

Los procesos de sustitución que conducen de  $2 + 5 = 5 + 2$  a  $a + b = b + a$  o de  $2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$  a  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ , al igual que los anteriores, también son procesos formales, y las sustituciones son una de las cuatro tareas que trataremos.

El paso del lenguaje habitual al algebraico, cambios de registro, también es una acción que consideramos dentro de la sustitución formal y que tratamos en el cuestionario. Por ejemplo, en el lenguaje habitual tenemos, el doble de  $x$ , que tras hacer el cambio de registro y pasar al lenguaje algebraico queda como  $2x$ .

La *generalización* es un elemento fundamental del pensamiento algebraico que de otra manera sería simplemente trabajar con símbolos. A veces la habilidad de operar esconde el no entendimiento del significado general de lo

que estamos haciendo. Son muchos los autores que han tratado la generalización. Así Reggiani (1994) la entiende con una doble vertiente:

- Habilidad de pasar de lo particular a lo general.
- Habilidad de ver lo general en lo particular

En cambio Radford (1996) considera que es un procedimiento que llega a una conclusión que posteriormente hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. Así, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación. Además, no está libre de contexto, sino que depende de los objetos que estemos generalizando.

A la hora de confeccionar y analizar nuestro cuestionario tendremos en cuenta las consideraciones hechas por ambos autores.

Dentro de la generalización, distinguiremos las siguientes acciones: *la particularización*, que consiste en ver los casos particulares dentro de lo general; *la iteración*, que es la repetición de un proceso; *la recursión*, procedimiento que se utiliza para definir o probar una propiedad que depende de un parámetro  $n$  cuyo campo de variación son los números naturales; y por último, *la generalización*, que haciendo uso de la inducción pasa de lo particular a lo general.

La *modelización* también ha sido estudiada por muchos autores. Según Janvier (1996) implica una fase de formulación que se completa con una de validación. Durante la fase de formulación se examina un fenómeno o situación para establecer alguna relación entre las variables implicadas. Estas relaciones proceden de las observaciones o simplemente de conjeturas hechas sobre la situación bajo estudio. Además, comprende una serie más o menos compleja de transformaciones u operaciones matemáticas que por último lleva a un modelo expresado simbólicamente. La fase de validación consiste en comprobar la validez del modelo regresando a la realidad que se supone representa.

Consideraremos en la modelización tres fases:

- Explicitación y reconocimiento de la regla. En ella se realiza el reconocimiento y la familiarización con la situación del problema.
- Formulación y resolución en términos de la regla. En esta fase se realiza la formulación del modelo y la resolución del problema en términos del modelo.
- Validación de la regla e interpretación. Validación del modelo e interpretación de los resultados en el problema.

### **Diseño del cuestionario**

Se constituye, inicialmente, un único cuestionario con 15 preguntas distribuidas en 48 ítems. Tras realizar una prueba con 4 alumnos de ESO y Bachillerato, dos y dos respectivamente, encontramos que empleaban mucho tiempo en su ejecución y dejaban las últimas preguntas sin contestar, especialmente por cansancio. Este motivo nos llevó a distribuir las preguntas en dos partes que llamamos C1 y C2, respectivamente. La parte C1, contiene 9 preguntas, con un total de 28 ítems. En relación con los temas de estudio, cuatro de estas preguntas están dedicadas a la sustitución formal (13 ítems) y cinco a la generalización. La parte C2 tiene seis preguntas (20 ítems) de las que tres están relacionadas con la generalización (14 ítems) y el resto con la modelización.

Como es natural en la elaboración de este cuestionario se han tenido en cuenta diferentes fuentes, en particular el trabajo de Palarea (1998) del que se ha extraído la mayoría de las preguntas. Por ejemplo, la pregunta 5 de la parte C2 es una adaptación del trabajo anterior. Las preguntas 8 y 9 de la parte C1 pertenecen a Socas, Camacho, Palarea, y Hernández (1989). Por último, la pregunta 3 de la primera parte y la 6 de la segunda han sido confeccionadas por los autores.

## **Objetivos y criterios de corrección de las preguntas del cuestionario**

A continuación explicaremos el modo de corrección y el objetivo de cada pregunta del cuestionario

El cuestionario se organiza en torno a tres procesos: sustitución formal, generalización y modelización. Como ya dijimos en la introducción, distinguiremos, así mismo, diferentes acciones dentro de cada proceso.

En la sustitución formal diferenciaremos cuatro tipos de acciones diferentes. Las cuatro primeras preguntas están dedicadas, respectivamente, a cada una de estas tareas:

- la realización de transformaciones
- el reconocimiento de una sustitución
- las sustituciones
- los cambios de registro

En la generalización distinguiremos también cuatro tipos de acciones:

- la particularización
- iteración
- recursividad
- generalización

Y en la modelización, tres:

- reconocimiento de la regla
- formulación de la regla
- validación de la regla

### PARTE PRIMERA o C1

Las cuatro primeras preguntas están orientadas a averiguar las habilidades cognitivas del grupo de alumnos en relación con la *sustitución formal*. Si los alumnos contestan correctamente a este bloque, querrá decir que son capaces de

realizar correctamente sustituciones formales y que reconocen cuál es la transformación efectuada dadas dos expresiones.

#### PREGUNTA 1

---

Realiza las siguientes transformaciones:

- a) Si  $a = 2b$  ¿en qué se transforma  $5a + 3$ ?
  - b) Si  $a = b + 3$  ¿en qué se transforma  $5a + 3b$ ?
  - c) Si  $a = 2b$  ¿en qué se transforma  $(a + 3) \cdot (3 - a)$ ?
- 

En esta pregunta pretendemos que los alumnos sustituyan las variables de una expresión por otras expresiones más complejas que son nuevamente variables. Se considerará correcta si el alumno realiza la sustitución completa, es decir, si hace la transformación correcta y opera para llegar al resultado. Si el alumno contesta correctamente a la pregunta demostrará su capacidad para realizar adecuadamente el proceso de sustitución formal en un contexto aditivo/multiplicativo, así como, su habilidad en el manejo de las propiedades distributiva, distributiva doble y conmutativa, y su destreza en la realización de operaciones en las que intervienen números y letras. Tomaremos como incorrecta la ausencia de respuesta o una sustitución no válida. Ambas demostrarían que el alumno no sabe realizar la sustitución formal. Teniendo en cuenta esto, dividiremos las respuestas dadas por los alumnos en tres grupos: correcta, incorrecta y un tercer grupo intermedio en el que se englobarán todas aquellas en las que la sustitución sea correcta, pero no se realicen las operaciones para completar la respuesta o éstas no sean válidas. Los alumnos que pertenezcan a este grupo sabrán realizar la sustitución pero no tendrán la destreza necesaria para trabajar con letras. Esto nos ayudará a averiguar si el correcto manejo de las letras va asociado a una correcta sustitución o no.

PREGUNTA 2

---

En cada uno de los casos siguientes halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de la columna A a la B.

	A	B
a)	$5x - 17$	$5 \cdot (y + 1) - 17$
b)	$e \cdot (j + 7)$	$(j + 7) \cdot (f - 2)$
c)	$v \cdot x$	$h \cdot r \cdot h \cdot v$
d)	$2/p$	$k/pq$

---

Si el alumno contesta correctamente a esta pregunta, demostrará que reconoce el proceso de sustitución que se ha realizado. Las sustituciones algebraicas no resultan tan fáciles como las numéricas, a las que los alumnos están acostumbrados. Por esto, además de considerar correcta una respuesta genérica del tipo  $x = y + 1$ , se posibilita que le asignen valores numéricos a las letras, que permitan verificar las correspondientes sustituciones.

PREGUNTA 3

---

- a) ¿Podrías escribir de forma general la propiedad conmutativa?
  - b) ¿Podrías escribir de forma general dos números consecutivos cualesquiera?
- 

Aquí queremos averiguar qué habilidades poseen los alumnos para realizar una sustitución formal sin darles pautas para ello. Además, veremos si tienen la necesidad de usar letras, comprobaremos si conocen la propiedad conmutativa y en qué contexto la utilizan (aditivo/multiplicativo), y si conocen qué significa que dos números sean consecutivos. El ítem (3, b) se ha propuesto para ver si realmente saben realizar sustituciones, ya que es posible que hayan memorizado

la propiedad conmutativa y, por lo tanto, el ítem anterior sólo suponga un ejercicio de memoria, o por el contrario no sepan cuál es la propiedad conmutativa y no puedan realizar el ejercicio. Consideraremos correcto (3,a) si escriben la propiedad conmutativa, para la suma o para el producto, utilizando letras. (3, b) será correcto si responden  $n, n + 1$ . No tomaremos como correcto las particularizaciones, pues esto reflejaría que a pesar de conocer la propiedad conmutativa y qué son números consecutivos, el alumno es incapaz de realizar una sustitución o no ve la necesidad del uso de las letras.

#### PREGUNTA 4

---

Si  $x$  es un número cualquiera:

- a) Escribe el número que es 3 más  $x$ .
  - b) Escribe el número que es 5 menos  $x$ .
  - c) Escribe el número que es dos veces tan grande como  $x$ .
  - d) Escribe el número que es el 50% mayor que  $x$ .
- 

La pregunta cuatro es típica de conversión de registros. Los alumnos deberán hacer la conversión del lenguaje habitual al algebraico en un contexto netamente numérico. Además de su habilidad para convertir del lenguaje habitual al algebraico, mostrarán cómo utiliza las letras, si ve la necesidad de hacerlo o no y si considera oportuno el uso de paréntesis, destrezas que le serán útiles para generalizar y modelizar correctamente. Nos parece importante conocer si los alumnos son capaces de realizar estas conversiones dada la importancia de las mismas a la hora de modelizar. En la modelización, el alumno deberá averiguar cuáles son las relaciones que existen en el lenguaje habitual entre las distintas variables y luego convertirlas al lenguaje algebraico. Esta pregunta está directamente relacionada con las 4, 5 y 6 de la segunda parte, que son preguntas sobre modelización. Si el alumno contesta adecuadamente a

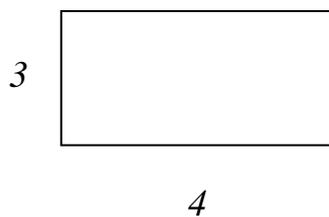
esta pregunta querrá decir que sabe realizar las conversiones y, por tanto, si no responde correctamente a las preguntas 4, 5 y 6 no será por este motivo, sino porque no sabe modelizar. Volveremos a tratar estas dos preguntas más adelante.

El resto de preguntas de C1 están dedicadas a la *generalización*. Las dos siguientes preguntas son del mismo estilo. En ambas la dificultad va aumentando con cada ítem, existe una ayuda visual y se presentan en un contexto geométrico.

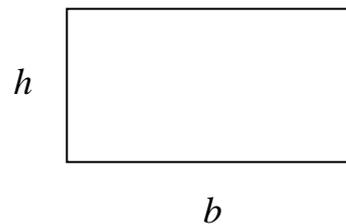
#### PREGUNTA 5

---

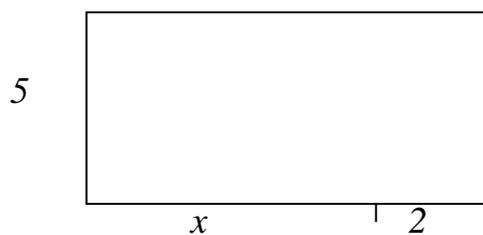
¿Cómo expresarías el área de las siguientes figuras?



a) Área = \_\_\_\_\_



b) Área = \_\_\_\_\_



c) Área = \_\_\_\_\_

---

Con esta pregunta pretendemos analizar principalmente si los estudiantes son capaces de ver en lo general, los casos particulares que se les presentan, aún cuando, estos casos particulares incluyan letras. Si los alumnos contestan que el área del primer rectángulo es 12 lo habrán hecho correctamente, e implicará que

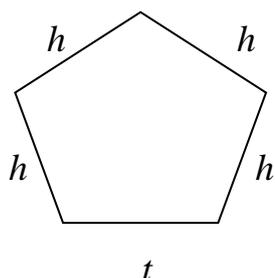
conocen la fórmula del área del rectángulo y que reconocen el caso particular cuando los lados valen respectivamente 3 y 4. Si además también contesta bien a los ítems (5, b), (5, c), querrá decir que saben generalizar. En general, si las respuestas no son correctas, podremos inferir que, aún conociendo la fórmula para calcular el área del rectángulo, no son capaces de transformarla en un contexto en el que se requiere el manejo de la representación simbólica. Con esta pregunta también analizaremos si los estudiantes se plantean la necesidad de usar paréntesis, cuántas y cuáles son las formas válidas de expresar el área de estas figuras, y si saben cómo interpretar las letras o qué hacer con ellas.

---

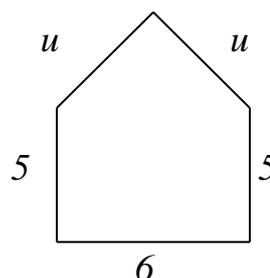
### PREGUNTA 6

---

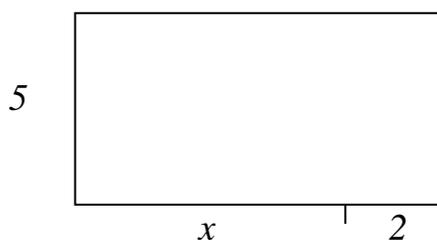
¿Cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?



a) Perímetro = \_\_\_\_\_



b) Perímetro = \_\_\_\_\_



c) Perímetro = \_\_\_\_\_

---

Esta pregunta tiene la misma intención que la pregunta anterior, sólo que ahora, en el contexto aditivo de perímetro. Los alumnos, a menudo, confunden el área con el perímetro, por este motivo hemos seleccionado esta pregunta, para analizar qué ocurre en estas situaciones aditivas en relación con la generalización.

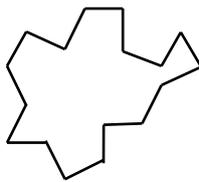
La siguiente pregunta 7, como las anteriores, pretende averiguar, igualmente, si los alumnos saben generalizar en un contexto geométrico distinto. La diferencia con las anteriores está en que las figuras que se presentan son menos usuales y se establecen dos niveles en el proceso de generalización lineal. En el primero, se trata de una situación concreta (7, a) con el soporte de una figura completa. En el segundo, con una respuesta general y con el soporte de una figura incompleta (7, b).

### PREGUNTA 7

---

¿ Qué se podría escribir para el perímetro de estas figuras?

a)



Todos los lados miden 7.

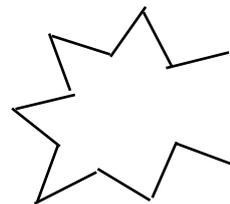
Hay en total 17 lados.

P = \_\_\_\_\_

b) Parte de esta figura no está dibujada.

Hay  $n$  lados en total, todos de longitud 2.

Halla su perímetro. P = \_\_\_\_\_



---

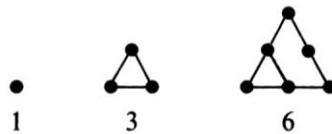
Claramente, aceptamos que los alumnos encontrarán las mayores dificultades en el ítem (7, b) que descubre el proceso general y en el que la figura está incompleta. Algunas de las posibles respuestas incorrectas a este ítem son aquellas que surgen de omitir que la figura no está completa y hallar el perímetro como si lo estuviera, o cerrar la figura con los lados que se crean necesarios. Cualquiera de estas respuestas demostraría la incapacidad de estos alumnos para generalizar cuando no tienen una ayuda visual completa.

Esta pregunta 8, y la siguiente 9, son representativas de generalizaciones cuadráticas y son ejemplos típicos del uso del método inductivo de razonamiento matemático. Muchas veces la generalización va unida a la

iteración; éste es el caso de las dos preguntas siguientes. En ambas se les pide que realicen una generalización de una fórmula cuadrática.

### PREGUNTA 8

Los números  $1, 3, 6, \dots, n(n+1)/2$  recibían el nombre de números triangulares, ya que podían ser dispuestos en forma de triángulos:

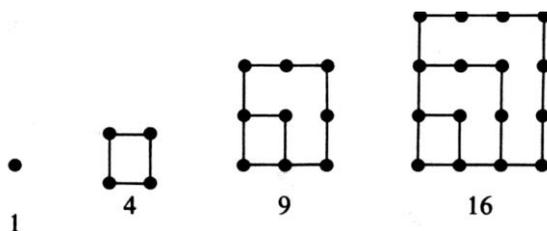


- ¿Podrías dibujar el siguiente triángulo?
- ¿Podrías dibujar el triángulo que ocupa la posición 6?
- ¿A qué posición corresponde el triángulo que tiene por número triangular asociado el 45?
- ¿A qué número corresponde el triángulo que ocupa la posición  $n$ ?

Dada una sucesión de números triangulares los alumnos deben darse cuenta del modo de obtención de los números triangulares. En los dos primeros apartados la generalización que deben realizar es concreta. En el ítem (8, c) vamos un paso más allá, les damos uno de los números triangulares de la sucesión y queremos que nos indiquen que posición ocupa éste. Es interesante averiguar si sabe reconocer las incógnitas que se le plantean y cómo resuelven la ecuación (procedimientos algebraicos, algebraicos, tanteo, etc.). Como ya dijimos, si los alumnos responden correctamente a la pregunta demostrarán su destreza para realizar generalizaciones de fórmulas cuadráticas. Además, tendrán interiorizados aspectos relativos al concepto de sucesión. También sabrán reconocer las incógnitas de una ecuación, método de resolución, y lo más que nos interesa, utilizar las letras como números generalizados.

PREGUNTA 9

Los números 1, 4, 9, 16,... recibían el nombre de números cuadrados, ya que podían ser dispuestos en forma de cuadrados:



- ¿Podrías dibujar el cuadrado siguiente?
  - ¿Podrías dibujar el cuadrado que ocupa la posición 6?
  - ¿A qué número corresponde el cuadrado que ocupa la posición  $n$ ?
- 

Inicialmente, esta pregunta presentará menor dificultad para los alumnos que la primera, ya que el modo de construcción de los números cuadráticos es en apariencia más sencillo. Hemos intentado que la respuesta correcta a cada ítem: construcción gráfica del número cuadrático siguiente, generalización cercana y obtención de la fórmula general, les vaya llevando a consolidar el proceso de generalización. En este caso no se les da la fórmula general para un número cualquiera, sino que deberán obtenerla ellos si lo consideran necesario. De este modo analizaremos la necesidad de utilización de las letras como números generalizados que tienen los alumnos para este tipo de situaciones.

---

SEGUNDA PARTE o C2

Los alumnos no suelen estar habituados a preguntas del estilo de la siguiente, por este motivo puede resultar bastante difícil para ellos.

PREGUNTA 1

---

Expresa si las siguientes expresiones son verdaderas: Siempre (S), Nunca (N) o algunas veces (A). Si la respuesta es (A), explica para qué valores de las letras.

- a)  $a + b = a + b$
  - b)  $p + q = p + s$
  - c)  $h + m = h + 2m$
- 

En esta pregunta 1, ya se ha realizado la generalización, pretendemos averiguar si los alumnos son capaces de reconocer que las letras se están utilizando como números generalizados y averiguar para qué rango de valores se verifican las igualdades. Se espera que los apartados b) y c) tenga mayor dificultad que el a). Para tomarlos como correctos los alumnos tendrán que explicar en qué casos se da la igualdad o dar un ejemplo para el que se verifique. Creemos que, en general, los alumnos comprobarán la igualdad a lo sumo para un número entero positivo y si se verifica dirán que se cumple siempre, lo que implicaría un análisis parcial del proceso.

PREGUNTA 2

---

Dadas las expresiones:

$$p$$

$$p + 7$$

$$p - 2$$

$$2p$$

¿Puedes contestar?

- a) La menor de ellas es \_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_

b) La mayor de ellas es \_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_

---

c) No se puede contestar porque \_\_\_\_\_

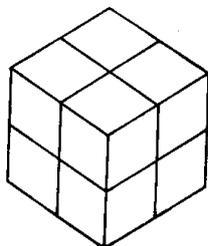
---

La pregunta 2, pretende analizar cómo razona el alumnado cuando se le presenta una cuestión de ordenación con expresiones que incluyen una letra con valor desconocido. Queremos comprobar si se emplea una estrategia de sustitución, considerando la “ $p$ ” susceptible de tomar cualquier valor dentro de un conjunto de valores posibles. Esperamos que los alumnos realicen un análisis incompleto de las expresiones, basado, o bien en la sustitución de “ $p$ ” por algún valor numérico (en general, un único valor entero positivo) o por la comparación de una parte de la expresión (la numérica):  $+7$ ,  $-2, \dots$ , “el doble de”. Consideraremos correcta la pregunta si nos dan el rango de valores para el que se verifica su respuesta. Por ejemplo, si nos dicen que la menor es  $p-2$  deberían decir que esto ocurre en el intervalo  $(-2, 2)$ . Esto reflejaría que consideran la  $p$  como un número generalizado.

La pregunta 3, es del estilo de la 8 y la 9 de la parte C1, se les pide que generalicen una expresión en un contexto geométrico utilizando el lenguaje visual. La principal diferencia es que en este caso, la situación que se presenta está en el espacio, no en el plano como las anteriores.

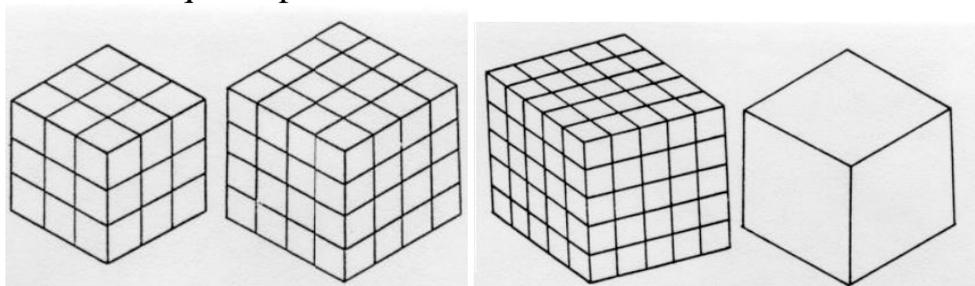
PREGUNTA 3

Dado el cubo del dibujo de arista 2 unidades, responde a las siguientes preguntas:



Si se sumerge este cubo “grande” en un recipiente con pintura:

- ¿Cuántos cubos “pequeños” forman el cubo mayor?
- ¿Cuántos cubos “pequeños” tienen pintadas las 3 caras?
- ¿Cuántos solamente 2 caras?
- ¿Cuántos solamente 1 caras?
- ¿Cuántos ninguna?
- ¿Cuál es la suma de las respuestas dadas en los apartados anteriores?
- Compara las respuestas dadas en los apartados a) y f), ¿existe alguna relación entre ellas? Haz lo mismo con los cubos siguientes y completa la tabla que se presenta a continuación:



Dimensiones del cubo	Número de caras pintadas					Número total de cubos
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						
$n$						

h) ¿Ocurrirá lo mismo si el cubo sumergido tiene dimensiones  $n$  ?

Añade a la tabla una fila con estos datos y comprueba los resultados anteriores (para 2, 3, 4, 5, 6).

---

Creemos que los alumnos no tendrán demasiadas dificultades en los apartados del a) al g) pues pueden contestarlo por simple recuento de las caras. Con esta pregunta pretendemos ver si encuentran la regularidad y saben generalizarla a cualquier dimensión.

Ahora comentamos las preguntas 4, 5 y 6, de esta segunda parte, en este caso, dedicadas a la modelización. En la pregunta 4, se propone un problema verbal que se encuentra en un contexto geométrico. Es fácilmente resoluble, sin necesidad de realizar muchas cuentas, sin más que hacer un dibujo y tener clara la diferencia entre área y longitud. Aunque este ejercicio no corresponde propiamente a ninguno de los procesos que estamos estudiando, hemos creído conveniente incluirlo en este cuestionario para que nos dé más pistas sobre cómo y cuándo utilizan los alumnos las letras ya que éstas están muy vinculadas a los tres procesos analizados.

#### PREGUNTA 4

---

Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio.

a) ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

---

Con esta pregunta queremos ver si los alumnos poseen la habilidad para representar en el lenguaje formal, elementos que figuran dentro de enunciados

verbales en un contexto geométrico. Diferenciaremos dos etapas en la resolución del problema, la de conversión y la de resolución. En la etapa de conversión comprobaremos si los alumnos son capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, así como, si entienden la pregunta formulada y plantean la ecuación adecuada. En la etapa de resolución atenderemos a las estrategias utilizadas para la resolución de la misma (tanteo, procedimientos aritméticos, algebraicos o la combinación de varias) y a la comprobación de que el resultado dado satisface las condiciones del problema.

Como ya mencionamos al comentar la pregunta 4 de C1, en las dos preguntas siguientes queremos ver si los alumnos son capaces de encontrar un modelo.

#### PREGUNTA 5

---

En el supermercado un kilo de peras cuesta 125 pesetas; un kilo de plátanos 60 pesetas, el kilo de ciruelas 325 pesetas y cada kiwi cuesta  $b$  pesetas. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compran a la semana 2 kilos de peras,  $p$  kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

- a) ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?
  - b) ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?
  - c) Si el precio por kiwi es de 20 pesetas y compra a la semana 1 kilo de plátanos, ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?
- 

En esta pregunta queremos detectar si los alumnos son capaces de encontrar un modelo y utilizarlo. Para ello, deben realizar conversiones en dos contextos simultáneos: dinero y frutas, y se les pide que obtengan y apliquen el modelo

*precio total = precio unidad x número de unidades.* Para obtener el modelo los alumnos deberán encontrar las relaciones entre los precios y las unidades de fruta, lo que presenta dificultad pues se utilizan letras en ambos contextos.

En la última pregunta, la número 6, los alumnos también deberán encontrar un modelo para el problema presentado. En principio presenta mayor dificultad que el anterior porque el contexto elegido no es tan conocido por los alumnos como el de las frutas y el dinero. Además, en este ejercicio existe la dificultad añadida de la utilización de fracciones.

#### PREGUNTA 6

---

#### **Una batalla de la conquista de Canarias.**

Guanches, con sus hondas y piedras, contra ingleses, con sus arcabuces.

La “efectividad” de los ingleses es de  $1/5$ , es decir, 1 de cada 5 ingleses alcanza a herir a un guanche (cada 5 minutos). La efectividad de los guanches es de  $1/20$  (la cuarta parte de la efectividad inglesa).

- a) ¿Cuánto tiempo debería tardar la batalla?
  - b) ¿Quiénes deben ganar la batalla?
- 

En esta situación se presenta un contexto general. Se pretende analizar el comportamiento de los alumnos, por ejemplo, en relación con el hecho de fijar o no el número de participantes para dar respuesta a los diferentes apartados.

#### **Administración del cuestionario**

La población del estudio está constituida por estudiantes de Educación Secundaria del IES San Matías, del barrio de San Matías en La Laguna. La muestra elegida fue de 60 estudiantes: dos grupos de alumnos de 4º de ESO y uno de 1º de Bachillerato Tecnológico, a los que se suministró el cuestionario. Los alumnos no habían recibido instrucción previa a la ejecución de este

cuestionario y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda. Lo realizaron en dos sesiones de 50 minutos, una para cada parte, durante su clase de Matemáticas en dos días distintos. Tras la corrección del cuestionario, la muestra quedó reducida a 50 alumnos debido a que algunos alumnos sólo hicieron una de las dos partes del cuestionario. Los resultados que se presentan a continuación pertenecen a una muestra de 19 alumnos de 4º de ESO.

### **Análisis e interpretación de los resultados**

En la tabla que se presenta a continuación se exponen los resultados de la primera parte del cuestionario. Se especifica, el tema sobre el que trata la pregunta, el número de la pregunta y el ítem. Además se añade el número de respuestas correctas (B), regulares (R), erróneas (M) y no contestadas (NC). Las tres columnas siguientes pertenecen a los porcentajes de respuestas correctas (%B) y no contestadas (%NC) y al puesto que ocupa cada ítem en el cuestionario con relación al porcentaje de acierto (Nº). En caso de que el porcentaje de acierto en dos ítems sea el mismo se ha colocado en primer lugar el que tiene menor porcentaje de ausencia de respuesta.

Como se puede observar, sólo hay dos ítems de esta primera parte, los correspondientes a la pregunta tres, que no han tenido ninguna respuesta correcta. En general, los porcentajes de pregunta no contestada no son muy altos, sólo (2, d), (3, a) y (8, d) superan el 50 %. Los porcentajes más altos de respuestas correctas se han dado en ítems relacionados con la sustitución formal, pues todos han sido superiores al 60%, a excepción del apartado d de la pregunta cuatro. Las preguntas dedicadas a la generalización también han tenido unos porcentajes de acierto altos aunque menores que las relacionadas con la sustitución. De los 13 ítems dedicados a la sustitución formal, 9 se encuentran entre los 14 con más acierto de esta primera parte del cuestionario.

*Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan alumnos de 4º de ESO*

TEMA	PREGUNTA	ITEM	B	R	M	NC	% B	% NC	Nº	
<i>Sustitución Formal</i>	1	a	5	12	0	2	89%	10%	2	
		b	2	13	2	2	79%	10%	5	
		c	1	16	0	2	89%	10%	3	
	2	a	15	-	2	4	79%	21%	6	
		b	14	-	1	4	74%	21%	10	
		c	12	-	4	3	63%	16%	14	
		d	5	-	4	10	26%	53%	24	
	3	a	0	-	2	17	0%	89%	40	
		b	0	-	12	7	0%	37%	36	
	4	a	14	-	5	0	74%	0%	7	
		b	12	-	7	0	63%	0%	12	
		c	12	-	7	0	63%	0%	12	
		d	4	-	12	3	21%	16%	26	
	<i>Generalización</i>	5	a	14	-	5	0	74%	0%	7
			b	15	-	4	0	89%	0%	1
			c	4	-	14	1	21%	5%	25
6		a	14	-	4	1	74%	5%	8	
		b	13	-	4	2	68%	10%	11	
		c	7	-	10	2	37%	10%	20	
7		a	14	-	2	3	74%	16%	9	
		b	9	-	6	4	47%	21%	18	
8		a	5	1	12	1	26%	2%	23	
		b	6	1	10	2	32%	10%	21	
		c	3	0	9	7	16%	37%	31	
		d	1	0	6	12	5%	63%	34	
9		a	12	0	6	1	63%	5%	13	
		b	9	1	6	3	47%	16%	17	
		c	4	0	7	8	21%	42%	28	

A continuación se presenta una tabla análoga a la anterior que corresponde a la segunda parte del cuestionario, C2.

TEMA	PREGUNTA	ITEM	B	M	NC	% B	% NC	Nº	
<i>Generalización</i>	1	a	15	3	1	79%	5%	4	
		b	3	15	1	16%	5%	29	
		c	1	15	3	5%	16%	32	
	2	a							
		b	0	19	0	0%	0%	35	
		c							
	3	a	14	5	0	74%	0%	7	
		b	8	10	1	42%	5%	19	
		c	7	10	2	37%	10%	20	
		d	9	8	2	47%	10%	16	
		e	12	3	4	63%	21%	15	
		f	4	11	4	21%	21%	27	
		g	0	2	17	0%	89%	40	
h		0	2	17	0%	89%	40		
<i>Modelización</i>	4	a	3	13	3	16%	16%	30	
	5	a	0	11	8	0%	42%	37	
		b	1	8	10	5%	53%	33	
		c	6	2	11	32%	58%	22	
	6	a	0	5	14	0%	74%	39	
		b	0	8	11	0%	58%	38	

Como podemos ver, aunque hay menos ítems que en C1, pues los porcentajes de ítem no contestado son mayores que en la primera parte, se supera el 50% en 6 de ellos. El número de aciertos en preguntas relacionadas con la modelización es bajísimo, dado que de los 6 ítems dedicados a este tema, la mitad tienen 0 aciertos y ninguno supera el 35% de respuesta correcta. Sólo uno de ellos, (5, c) se encuentra entre el 50% de los de mayor acierto.

Si comparamos ambas tablas, observamos que los resultados de C1 fueron, a excepción de la pregunta 3, mejores que en C2. La ausencia de respuesta es considerablemente mayor en la segunda parte.

### Conclusiones y valoraciones

Las consideraciones que comentamos como conclusión están basadas en los resultados de este cuestionario para esta muestra concreta.

En primer lugar ordenamos los tres procesos atendiendo al porcentaje medio de aciertos, diferenciando porcentajes que se obtienen teniendo en cuenta aquellas preguntas en las que no ha habido aciertos y porcentajes que se obtienen sin tenerlos en cuenta, y corresponden a los tantos por ciento de las columnas tercera y quinta, respectivamente.

[0, 25]	Modelización	8,8%	Modelización	17,7%
(25, 50]	Generalización	40%	Generalización	45%
(50, 75]	Sustitución formal	55,4%	Sustitución formal	72%
(75, 100]				

Si además establecemos cuatro niveles de dificultad: máximo [0, 25] y mínimo [75, 100], podemos situar los tres procesos en niveles de dificultad diferentes. En general, puede observarse que los porcentajes no son excesivamente altos, sólo se supera el 50% en la sustitución formal. Existen diferencias sustanciales entre el número de respuestas correctas de cada proceso, pudiéndose separar y ordenar los distintos procesos.

Queda claro que los alumnos dominan la sustitución formal, dado que 9 de los 13 ítems se encuentran entre los del 50% de más acierto. Podemos observar que, si no consideramos las preguntas en las que no ha habido ningún acierto, el porcentaje sube considerablemente.

Encontramos diferencias entre el número de respuestas correctas de las preguntas dedicadas a la generalización de C1 y las de C2. Los alumnos responden con más acierto en C1 que en C2; conjeturamos que probablemente la ayuda visual que explícitamente se incorporó a estas preguntas, facilita el proceso de generalización, situación que no se da en la mayoría de las de C2. Además, en la mayor parte de los ítems de C1 relacionados con la generalización, la tarea que debían realizar era la particulación, acción ésta que parece que los alumnos dominan (ver la tabla siguiente).

No existe, tampoco, demasiada diferencia en el porcentaje de acierto, pues si eliminamos las preguntas en las que éste es cero, 15 de los 27 ítems se encuentran entre los del 50 % de más acierto.

Los resultados obtenidos con este grupo nos aportan poca información sobre el proceso de modelización. Los alumnos tienen graves dificultades en todo lo que implica la identificación, interpretación y uso de un modelo. Es llamativo que de los 6 ítems dedicados a este proceso, tres no hayan obtenido ninguna respuesta correcta.

Si ahora ordenamos los tres procesos en relación con el porcentaje medio de aciertos dentro de cada grupo, atendiendo a los tipos de acciones realizadas en cada proceso, obtenemos:

<b>Sustitución Formal</b>	Realización de transformaciones	75%	1
	Reconocimiento de una sustitución	51,25%	4
	Sustituciones	0%	10
	Cambio de registros	58,75%	2
<b>Generalización</b>	Particularización	55,63%	3
	Iteración	47,5%	5
	Recursividad	20%	7
	Método inductivo	10%	8
<b>Modelización</b>	Reconocimiento del modelo	25%	6
	Formulación del modelo	5%	9
	Validación del modelo	0%	10

Está claro que en esta muestra, aunque pequeña, existen diferencias sustanciales entre los tres procesos y dentro de cada proceso en las acciones consideradas.

Los alumnos tienen un mayor dominio de las preguntas relacionadas con la sustitución formal que con los aspectos relacionados con la generalización y la modelización. Se nota especialmente que tienen grandes dificultades en todo lo que tiene que ver con los modelos, su interpretación y su uso.

Así mismo, parece que tienen menores dificultades con la sustitución formal y dentro de ésta con la realización de transformaciones. Los ítemes correspondientes a esta tarea, (1, a), (1, b), (1,c) ocupan las primeras posiciones: 2, 3 y 5, respectivamente. La que menor porcentaje de acierto presenta es la sustitución. Los ítemes (3, a) y (3, b) relativos a esta tarea ocupan las posiciones 40 y 36, respectivamente. Muchos de los ítemes relacionados con la generalización superan a estos dos relativos a la sustitución.

Dentro de la generalización existen grandes diferencias que dependen de la tarea que se realiza. Así, parece que los alumnos dominan la tarea de particularización, es más, el ítem (5, b) de la primera parte del cuestionario es el que tiene mayor porcentaje de acierto. Hay otros ítemes, especialmente los dedicados a la particularización y algunos de los de iteración, que tienen mejor posición que los dedicados a la sustitución formal. Por este motivo, parece adecuado que se intercalen tareas de sustitución formal con tareas relacionadas con la particularización en los procesos de transición de la Aritmética al Algebra.

La presencia de estos niveles de dificultad asociados a estos tres procesos nos sugiere la necesidad de cuidar el tratamiento de estos aspectos en el ámbito escolar y, de encontrar indicios que nos permitan asegurar la necesidad de separar estos procesos para organizar propuestas de enseñanza-aprendizaje más coherentes.

El estudio iniciado continua con otro grupo de 4º de ESO, lo que nos va a permitir comparar los resultados. Además, de analizar estos mismos procesos en otros niveles educativos, por ejemplo, con alumnos de Bachillerato.

### **Referencias bibliográficas**

JANVIER, C. (1996).“Modeling and the initiation into Algebra.”. En Bednarz, Kieran y Lee. *Approaches to Algebra*, pp. 225-238. Kluwer: Dordrecht.

FREUDENTHAL, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel: Dordrecht.

PALAREA, M.M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna. Sin publicar.

RADFORD, L. (1996). "Some reflections on teaching Algebra through generalisation." En Bednarz, Kieran y Lee. *Approaches to Algebra*, pp. 107-114 Kluwer: Dordrecht.

REGGIANI (1994). "Generalization as a basis for Algebraic thinking: observations with 11-12 year old pupils." PME XVIII. Vol. IV, pp 97-104. University of Lisbou. Portugal.

SOCAS, M.M.; CAMACHO, M; PALAREA, M.M. y HERNÁNDEZ, J. (1989) *Iniciación al Álgebra*. Matemáticas Cultura y Aprendizaje núm. 23. Síntesis: Madrid.