



UNAS NOTAS SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD

Juan Antonio García Cruz

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo presentamos unas notas sobre las dificultades que muestran los sujetos al enfrentarse a problemas de probabilidad. Los resultados se han tomado de recientes investigaciones. También se hace una llamada de atención sobre las propuestas didácticas para la enseñanza de la probabilidad en los niveles básicos y secundario.

Abstract

This paper outline some difficulties observed when a subject try to answer a probabilistic question. The main results are taken from newrly research approach. Also focus attention on new didactical proposal for the teaching of probability as a school subject.

Las diferentes reformas, que han tenido lugar en las últimas décadas, han resaltado la importancia de los conceptos de probabilidad y estadística en la formación básica de los ciudadanos. Ausentes prácticamente de el curriculum en los años sesenta, hoy se contemplan incluso en el curriculum de primaria (MEC, 1989), tanto en nuestra propuesta curricular como en los estándares publicados por el National Council of Teachers of Mathematics en los Estados Unidos de América (NCTM, 1989; NCTM 2000). Sin embargo, incluir en un curriculum un tema novedoso no significa que, automáticamente, este tema pase a ser considerado y enseñado según la propuesta. En este trabajo presentamos algunos problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad.

Existen dos ámbitos de estudio, bien diferenciados, que han producido investigación básica sobre la probabilidad. Uno de ellos es el campo de la Psicología Experimental, el otro es el campo de la Educación Matemática.

El primero se ha interesado, fundamentalmente, por una descripción teórica de los procesos cognitivos que desarrollan los individuos independientemente de los conceptos matemáticos subyacentes. En el campo de la psicología experimental interesa, principalmente, cómo un individuo toma decisiones en situaciones de incertidumbre. En este sentido los investigadores cognitivos son *observadores* y *descriptores* de lo que ocurre cuando el individuo tiene que tomar decisiones en tales situaciones.

Por otro lado, la investigación en Educación Matemática se puede considerar de *intervención*. Aquí, el interés principal es cambiar las ideas y concepciones de los alumnos sobre la estadística y probabilidad. En este sentido interesan, entre otras, respuestas a las preguntas siguientes:

¿Cómo se comprende un concepto?

¿Cómo se usa el conocimiento adquirido?

¿Cómo debería diseñarse el proceso de enseñanza?

¿Es diferente el aprendizaje en estadística y probabilidad que en las otras ramas de la Matemática?

Poca o nula conexión ha existido entre los dos ámbitos (Shaugnessy, 1992). Sin embargo, es muy necesaria la colaboración entre la investigación sobre los procesos cognitivos que gobiernan el pensamiento estocástico y los medios por los cuales se desarrolla. Uno de estos medios lo constituye la enseñanza básica y secundaria. Como ya hemos señalado, desde la década de los sesenta, se incrementó la presencia de los contenidos de estadística y probabilidad en los curriculum de la mayoría de los países desarrollados. Sin embargo, tal inclusión no ha tenido un desarrollo satisfactorio y algún trabajo de investigación debería realizarse al respecto para clarificar las dificultades inherentes a la propuesta curricular.

Cualquier propuesta curricular debería partir y fundamentarse en alguna teoría del aprendizaje o construcción del conocimiento, de otro modo sólo sería una propuesta más basada en apreciaciones personales o en el desarrollo lógico de la disciplina. Esto último no la diferenciaría de las que hasta el momento se ha planteado.

Las teorías operativas del aprendizaje (Piaget, 1987; Dörfler, 1991) se fundamentan en la complementariedad existente entre las acciones y las reflexiones. Se ha cuestionado el papel que pueden jugar tales teorías para

interpretar y guiar el aprendizaje de la probabilidad debido a la carencia de una base operativa para la probabilidad (Borovcnik y Peard, 1996). Se puede hallar una solución de la ecuación $x^3+2x=11$ por aproximaciones sucesivas, es decir mediante ensayo y error (intentos). Sin embargo, no es posible aplicar el mismo método a un problema de probabilidad, como, por ejemplo, ¿cuál será el siguiente resultado que obtengamos al lanzar un dado? Tal carencia, invita a buscar otra fundamentación teórica, diferente, para la construcción de las nociones probabilísticas. Tal teoría se basa en la interacción existente entre las intuiciones y las reflexiones. Fischbein (Kapadia y Borovcnik, 1991) considera las intuiciones como conocimiento inmediato, un conjunto de relaciones que dirigen la comprensión y las acciones del sujeto. Tal conjunto incluye un sistema de creencias y la estructura cognitiva asociada con un cierto modelo matemático. Por otro lado, un modelo matemático es una representación objetiva y comunicable de percepciones intuitivas.

La incertidumbre es un aspecto inevitable de la condición humana. Los conceptos de probabilidad y estadística son cada vez más utilizados por las personas en situaciones cotidianas. Muchas elecciones significativas, tomas de decisión importantes, se realizan en situación de información escasa o prácticamente nula. Al no disponer de información amplia y de formación adecuada, las personas utilizan fundamentalmente un conjunto de creencias. Tales creencias son una aproximación subjetiva al problema de asignar una probabilidad a un suceso. Este uso de juicios intuitivos, creencias, prejuicios, etc, son sólo una forma de suplir la carencia de estrategias normativas para la asignación de probabilidad que sólo es posible cuando se dispone de un modelo formal para la probabilidad. Tal modelo formal es el objeto de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, la investigación en psicología nos indica que, a pesar de la instrucción, prevalecen los juicios intuitivos

(Tversky y Kahneman, 1983). Luego una propuesta de enseñanza y aprendizaje que tuviera en cuenta la mutua relación entre intuiciones y reflexiones sería muy prometedora, tanto en la descripción de cuándo y por qué encuentran problemas los estudiantes como también en cómo debería diseñarse la enseñanza para intervenir sobre concepciones inadecuadas (Borovcnik y Peard, 1996).

La teoría desarrollada por Fischbein sobre la mutua relación existente entre las intuiciones y las nociones matemáticas que aprenden los alumnos, constituye el fondo sobre el cual se ha desarrollado una nueva aproximación empírica al estudio interpretativo de las respuestas dadas por el sujeto a cuestiones relativas a probabilidad. Su objetivo principal es derivar conocimiento útil hacia la enseñanza de la probabilidad, partiendo de la complementariedad supuesta entre intuiciones e ideas matemáticas (Borovcnik y Bentz, 1991).

Veamos un ejemplo que nos servirá para ilustrar las diferentes interpretaciones dadas a la respuesta del sujeto, lo que supone una alternativa más rica, respecto de la investigación, de la asunción de que los ítems representan una situación que permite el afloramiento de una única intuición y una única solución. De forma que ciertas respuestas y razonamientos ilustran la comprensión y el tipo de razonamiento utilizado por el sujeto.

Lanzamiento de una moneda (Green, 1982).

Se lanza una moneda ordinaria cinco veces y siempre se obtiene cara.

Señala la respuesta que consideres más apropiada de entre las siguientes:

(A) La próxima vez es más fácil que salga, de nuevo, cara.

(B) La próxima vez es más fácil que salga cruz.

(C) La próxima vez es igual de fácil cara que cruz.

(D) No lo sé.

Los resultados obtenidos por Green (A) 11%, (B) 12%, (C) 77%.

Interpretación de las respuestas:

Simetría (ingenua): Razonamiento ingenuo basado en la simetría del espacio muestral $\{C, X\}$, puede proporcionar como respuesta la igualdad en cara y cruz, es decir (C). Si, por el contrario, en vez del espacio muestral, se toma en consideración la muestra se puede concluir con la respuesta, tendente a equilibrar, (B).

Sesgo: La información sesgada de cinco caras en los mismos lanzamientos puede inducir al sujeto a reformular un contexto no probabilístico para el ítem. De aquí se puede llegar a la respuesta (A).

Conflicto reflexión-decisión: Si el sujeto evalúa las posibilidades a priori en 50% para cada alternativa, el resultado de la reflexión consiguiente conduce a no disponer de una respuesta para la cuestión formulada. Y aquí cabe cualquiera de las respuestas dadas en el ítem.

Reconocimiento de un patrón: El patrón lógico visible en la muestra puede ser utilizado para realizar la predicción. Aquí cabría la respuesta (A), mantenimiento del patrón observado.

Estrategia normativa: Se utiliza la hipótesis $p(C)=1/2$ y la información contenida en la muestra CCCCC para evaluar de nuevo la probabilidad $p(C)$, mediante un test de hipótesis.

Según el tipo de ítem analizado cabe describir nuevas posibles interpretaciones que conducirían a nuevos patrones de razonamiento y, por lo tanto, a caracterizar nuevas estrategias de abordar la cuestión por el sujeto y de elaborar una respuesta. Todo ello es una muestra de las dificultades que encontramos a poco que profundicemos en los comportamientos individuales.

Espero que estas notas, realizadas apresuradamente para este seminario, sirvan de reflexión a ustedes y a mí mismo.

Referencias bibliográficas

BISHOP, A et al. (editores). (1991). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A. et al. (editores) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

BOROVNIK, M Y H.-J. BENTZ (1991). 'Empirical research in understanding probability', en R. Kapadia y M. Borovnik (editores) *Chance encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

BOROVNIK, M Y R. PEARD (1996). 'Probability', en A. Bishop et al (editores) *International Handbook of Mathematics Education*, Part 1, 239-287. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

DÖRFLER, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics', en A. Bishop et al (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, 63-85. Kluwer Academic Publishers.

GREEN, D.R. (1983), 'A survey of Probability Concepts in 3000 Pupils Aged 11-16 Years', en *Proceedings of the first Conference on Teaching Statistics*, vol II, Teaching Statistic Trust.

GROUWS. D.A.(editor). (1991). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company. New York.

KAPADIA, R Y M. BOROVCNIK (editores) (1991). *Chance encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

KAPADIA, R Y M. BOROVCNIK (1991). "The educational perspective" en R. Kapadia y M. Borovnik (editores) *Chance encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

M.E.C. (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia. USA.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia. USA.

PIAGET, J. (1987). *Introducción a la Epistemología Genética: El pensamiento Matemático*. Editorial Paidós. Mexico.

SHAUGNESSY, J.M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. En H. A. Grows (editor) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.

TVERSKY, A. Y KAHNEMAN, D. (1983). Extensional versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgment. *Psychological Review*, 90, 4, 293-315.