ISBN: 84-931584-2-9

LAS REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (De Vega, 1984).

En este artículo haremos un resumen de las investigaciones más relevantes sobre el tema, centrándonos en los tipos de representaciones utilizadas en la resolución de los problemas aritméticos. Expondremos, a continuación, una propuesta para resolver problemas aritméticos en la Educación Primaria mediante el uso de dos sistemas de representación, que hemos desarrollado y llevado al aula. Terminaremos justificando la importancia del uso de diferentes sistemas de representación en el aprendizaje de las Matemáticas (NCTM, 2000).

Abstract

The representations and their role in the learning of Mathematics constitute an important research line (Resnick and Ford, 1981). Among the reasons of their importance we could mention, fundamentally, two: the first one has to do with the own Mathematics, in those that the representations are something inherent to them, and the other one is of psychological type, since the representations improve the understanding in the students (De Vega, 1984).

In this paper we will make a summary of the most excellent research on the topic, centering us in the types of representations used in the arithmetic problems solving. We will expose, next, a proposal to solve arithmetic problems in Primary Education by means of two representation systems, that we have developed and implemented in the classroom. We will finish justifying the importance of the use of different representation systems in the learning of Mathematics (NCTM, 2000).

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
J. Hernández; M. M. Socas (2000). *Las representaciones en la resolución de problemas aritméticos, pp. 149-170*

Introducción

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

Igualmente, importante es la relación entre las representaciones y la resolución de problemas en general, y de los problemas aritméticos en particular.

La resolución de problemas aritméticos

La forma tradicional de resolver los problemas aritméticos se plantea como el paso de un sistema de representación sintáctico-verbal a un sistema de representación formal, esto es, partiendo de la lectura del enunciado, el alumno ha de elegir y ejecutar una o varias operaciones aritméticas.

El tratamiento que los problemas verbales aritméticos reciben, tanto en la instrucción del profesor como en los libros de texto, sigue, en general, el siguiente modelo de competencias:

Representación Verbal ——— **Traducción** **Representación Numérica** ——— **Solución**

y el modelo de implementación en el aula suele seguir un esquema similar a:

Ejemplos (Prototipos) **Imitación** ——— **Representación numérica** | **Solución**

Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos ¿Cuántos sellos tiene Ángel?	91 -27 64	Ángel tiene 64 sellos

De esta forma, la resolución de problemas se convierte, como afirman muchos alumnos, "*en una actividad mecánica donde el objetivo es elegir y ejecutar cálculos aburridos*".

Sin embargo, un análisis superficial de los libros de texto de la LOGSE, muestra como la mayoría de los ejemplos van acompañados de representaciones pictóricas, que intentan aportar luz sobre el enunciado, pero que no constituyen ningún sistema de representación, e incluso podemos poner en duda la información que arroja sobre el problema; realmente su única función parece ser estética.

Este artículo intenta aportar datos sobre la importancia y las limitaciones del uso de varios sistemas de representación en la resolución de problemas aritméticos, apoyándonos en algunos de los resultados obtenidos en una parte de la investigación realizada para obtener el grado de Doctora (Hernández, 1997).

Este trabajo pretendía aportar datos para analizar el Objetivo 1º de dicha investigación: "Estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas que los alumnos ponen en juego en la resolución de un problema aritmético verbal, ver cómo influye en ellos el aprendizaje de un modelo de competencia para resolver dichos problemas, mediante el uso de un nuevo sistema de representación no verbal para la resolución de problemas (sistema de representación visual-geométrico) y qué tipo de conexión realizan con los esquemas tradicionales en los que han sido instruidos".

En concreto, vamos a mostrar ejemplos de las entrevistas realizadas a los alumnos, después de haber desarrollado un diseño de instrucción en el que se les enseñaba a resolver problemas utilizando un sistema de representación que hemos denominado Sistema de Representación Visual-Geométrico (SRVG), yuxtapuesto al sistema de representación aritmético, dentro de un modelo de competencia, previamente diseñado, que seguía la estrategia de Polya y los sistemas de representación de Goldin (Hernández y Socas, 1994).

El diseño de instrucción para la resolución de problemas aritméticos verbales (DIRPA)

El objetivo principal de este diseño es introducir a los alumnos en un modelo de competencia para resolver problemas aritméticos, usando dos sistemas de representación yuxtapuestos: el SRVG y el sistema formal aritmético (SA), el primero de ellos es desconocido por los alumnos y, por tanto, necesita una instrucción precisa.

El modelo de competencia no tiene una instrucción explícita, sino que se trata de ir introduciendo al alumno en él, apoyándonos en una ficha-modelo que hemos confeccionado. La conexión entre ambos sistemas, aspecto que destacamos, ayuda al alumnado a realizar reflexiones metacognitivas y le permite clarificar el concepto que tiene de las distintas operaciones.

Otro aspecto tenido en cuenta es la presencia en el diseño de todos los tipos de problemas, según las estructuras semánticas, y es en esta variedad de problemas donde el alumno puede desarrollar distintas estrategias de razonamiento.

Este diseño, dentro de una teoría cognitivista del aprendizaje, potencia las actividades del alumno, dejando al profesor como un orientador de las mismas. La actuación del profesor se centra en la explicación del nuevo sistema de representación (su semántica y su sintaxis), aunque en algunos momentos son los propios alumnos los que las descubren.

El modelo de competencias usado consta de las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado; 2. Comprensión; 3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica; 4. Representación, ejecución y solución formal;

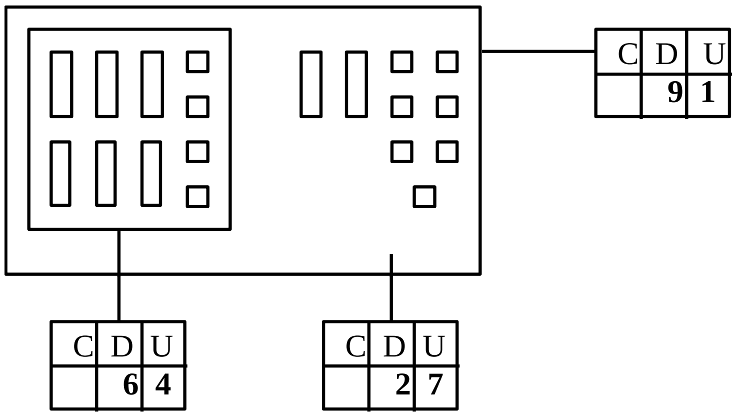
5. Soluciones; 6. Comprobación de la solución.

Es en la fase 3, donde planteamos el uso del SRVG, que es un sistema mixto que comprende:

- ◊ Elementos del sistema de representación no verbal, del que tomamos la configuración geométrica bidimensional (el rectángulo) para representar desde operaciones aritméticas hasta las relaciones partes-todo, elementos del sistema de planificación o estratégico, donde hacemos intervenir la relación partes-todo y las estructuras semánticas.
- ◊ Elementos del sistema de representación formal aritmético del que utilizamos la representación simbólica de los números (las etiquetas).

Utilizando este sistema, el problema:

El problema: “Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?” se representaría y resolvería así:



Presentamos, a continuación, a modo de ejemplo, el comportamiento de tres alumnos (Lara, Alexis y Antonio) de 4º de Primaria con unas características muy diferentes, en la resolución de un problema aritmético.

Lara es una alumna de rendimiento alto, pero que desde un primer momento muestra un rechazo hacia el uso de sistemas de representación visuales, ya que decía que era alargar innecesariamente un problema, dado que con las operaciones era mucho más fácil de realizar.

Éste es el protocolo de la resolución del problema "Luis tiene 321 ptas. y María 119 ptas. ¿Cuántas pesetas tiene Luis más que María?" (A: Alumna, E: entrevistador):

A*:* (Lee el problema en voz baja, muy rápido) *¿Puedo hacerlo directamente con las operaciones?*

E*: ¿Qué operación elegirías?*

A: *Una resta, porque dice que Luis tiene 321 y María 119 ptas. y me pregunta que cuánto tiene Luis más que María.* (Ejecuta la operación correctamente).

E: *¿Podrías hacer un dibujo que representara el problema?*

A: *Pondría el dinero que tiene Luis y después separaría lo que tiene María, pero no puedo... no me da bien, así que tengo que cambiar una moneda de 5.* (Representa las monedas de Luis y separa lo que le corresponde a María. El dibujo es exactamente una representación del esquema partes-todo y la misma representación y solución gráfica, pero utilizando como simbología las monedas).

Alexis es un alumno de rendimiento medio, pero con una fuerte capacidad gráfica. Prefiere resolverlo mediante la representación visual-geométrica, más que con operaciones. Aunque su rendimiento en Matemáticas es aceptable, las ve como una materia rutinaria y algorítmica. Veamos como se desarrolla su proceso de resolución:

A: (Lee el problema en voz baja)

E: ¿Entiendes la pregunta?

A: Dice que..(lee el texto, pero enfatizando los datos y la pregunta. Pasa a hacer el diagrama: representa la cantidad total y separa la cantidad de la colección menor, obteniendo el resultado)

E: ¿Cuál es la solución?

A: 202.

E: ¿Lo podrías hacer con una operación?

A: Sí (Hace la resta).

E: ¿Por qué una resta?

A: Porque necesito quitar a lo que tiene Luis lo que tiene María.

El tercer alumno (Antonio) que presentamos es de rendimiento bajo. Le falta comprensión lectora y no posee ningún tipo de estrategias que le permitan hacer una representación correcta del problema. Se mueve entre dos operaciones: o es sumar o es restar, pero no sabe por qué. Sólo está seguro que sumar es para ver cuánto tienen entre los dos. Con cantidades pequeñas es capaz de resolverlo mediante conteo, pero la magnitud de las cantidades de este problema le desborda este tipo de técnica.

E: Léelo. (Rápidamente se dispone a escribir) *¿Ya entiendes la pregunta?*

A: Que tengo que sumar cuánto dinero tiene María y Luis.

E: ¿Es esa la pregunta? Léelo de nuevo.

A: Restar.

E: Restar ¿para qué?

A: Para saber lo que tiene María.

E: Lee lo que dice acerca de María.

A: 119.

E: ¿Entonces? ¿Por qué no haces un dibujo?

A: (Dibuja dos muñecos. Intento que personalice los personajes con jugadores de fútbol) *Restar para ver lo que tiene Luis.*

E: El problema dice que Luis tiene 321 ptas.

A: Tengo que sumar...

E: ¿Para qué?

A: Para ver cuanto tienen entre los dos. (Le pido que lo vuelva a leer. Le planteo que imagine que los personajes son él y su hermano y le repito el problema, pero se decide a hacer la suma).

E: 440 ¿qué es?

A: Lo que tienen los dos.

E: Eso está bien, pero ¿quién tiene más dinero?

A: Luis.

E: Y ¿cuánto más tiene?

A: 440 (Paso a ponerle un problema similar con cantidades inferiores a 20, por ver si el orden de las magnitudes es lo que le está creando problemas. Lo resuelve correctamente ayudándose de los dedos, pero no sabe qué operación está efectuando. Al final afirma que es la resta. Por analogía dice que en el problema planteado ha de hacer una resta. La ejecuta mal).

A continuación, vamos a exponer algunas ideas sobre la noción de representación.

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra *representación* con relación al aprendizaje, a la enseñanza y al desarrollo de las Matemáticas. Dar una definición de representación es algo complicado actualmente. Janvier (1987), citando un estudio de Denis-Dubois (1976), apunta que en la literatura psicológica se usa el término representación, al menos, en los tres caminos siguientes:

1) Como una organización material de símbolos, tales como diagramas, gráficas, esquemas, que se refieren a otras entidades o que actúan como modelos de procesos mentales.

2) Como una organización del conocimiento en el “sistema mental humano” o en la memoria a largo plazo.

3) Solamente como imágenes mentales que el individuo puede formar, siendo éste un caso especial del anterior. El hecho de considerarlo como una tercera forma se debe a la importancia de la investigación en este dominio y a su claro marco teórico. Janvier considera que las configuraciones imagísticas de Goldin (1987) se pueden considerar en el segundo grupo, pero

también pertenecen al tercero.

El propio Janvier se identifica con la primera definición, cuando se refiere a “esquemas o ilustraciones”, y con la segunda, cuando se refiere a “concepción”. Para él, una representación sería como una especie de estrella-iceberg que mostraría sólo una punta cada vez. Esta descripción de representación tiene la ventaja de insistir en el carácter inseparable que tiene un conjunto de esquematizaciones.

En el segundo camino, los psicólogos se dividen en dos corrientes: los que apoyan la hipótesis dual de Paivio, que sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, y los que proponen un único formato representacional abstracto, semántico y proposicional que subyace como sustrato común a las palabras e imágenes (de Vega, 1984).

Para Kaput (1987) “*cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Hay, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirán las siguientes cinco entidades:*

1) El mundo representado.

2) El mundo representante.

3) Qué aspectos del mundo representado han sido representados.

4) Qué aspectos del mundo representante hacen la representación.

5) La correspondencia entre los dos mundos.

Goldin (1993) presenta, como resumen del grupo que trabajó sobre representación en los Congresos del PME, las diferentes interpretaciones dadas a este término:

a) Como soportes físicos, externos (incluyendo entornos de ordenador): Una situación física estructurada y externa o un conjunto de situaciones que pueden ser descritas matemáticamente o vistas como un soporte de una idea matemática (p.e. la línea numérica, ...).

b) Como soportes lingüísticos: Aspectos verbales, sintácticos y semánticos del lenguaje en los que los problemas son propuestos y con los que las Matemáticas son discutidas.

c) Como construcciones matemáticas formales: Un significado diferente de "representación", que enfatiza el entorno del problema externo al individuo, sería una estructura formal o un análisis matemático de una situación. Aunque hay un sentido en el cual las Matemáticas pueden ser vistas como "internas", el énfasis se pone en "representación" como una herramienta analítica para formalizar o precisar ideas matemáticas o conductas matemáticas.

d) Como representaciones cognitivas internas: Aspecto muy importante, que incluye las representaciones individuales internas de los estudiantes, de sus ideas matemáticas, tales como áreas o funciones, así como los sistemas de representación cognitiva en sentido amplio, que pueden describir los procesos del aprendizaje humano y de la resolución de problemas. En los últimos años, diferentes investigaciones (Presmeg, 1985) están destacando la importancia que tiene el uso de métodos visuales en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles, de forma que faciliten a todos los alumnos la comprensión y, en particular, a aquellos visualmente orientados. La idea de visualización la planteamos, en el sentido usado por Presmeg, como una forma de utilizar diagramas para comprender y resolver los problemas. Uno de los trabajos pioneros en este campo es el de Krutetskii (1969, 1976), considerado como uno de los estudios más notables sobre las habilidades individuales utilizadas en resolución de problemas. Krutestkii, después de un estudio de 12 años, publicó su trabajo donde *"clarifica los hechos que caracterizan la actividad mental de aquellos alumnos dotados para las Matemáticas al resolver problemas variados*" (p. 78). Encontró, entre otros, que los estudiantes al resolver un problema aíslan tres aspectos importantes: las relaciones funcionales entre los datos esenciales, las cantidades no esenciales para el problema tipo, pero necesarias para una variante específica, y las cantidades extrañas que no son necesarias. Del análisis de las soluciones de los problemas concluyó que aparecen tres tipos de estudiantes: analíticos, geométricos y armónicos.

El tipo analítico comprende a aquellos estudiantes que siempre resuelven los problemas mediante cálculos o ecuaciones, procurando no tener que apoyarse en diagramas o dibujos geométricos. El tipo geométrico, por el contrario, trata de plasmar sus razonamientos en dibujos y diagramas. Y, finalmente, el tipo armónico mantiene un equilibrio entre sus razonamientos analíticos y los gráficos o visuales.

Goldin (1987) formalizó dentro de su *Model for Competency in Mathematical Problem Solving,* basado en el procesamiento de la información, los cinco sistemas de representación, planteando la importancia del uso de los mismos y, en particular, de los sistemas de representación no verbales, como un procedimiento alternativo a la resolución de problemas por traducción directa.

Castro (1994) afirma que las representaciones (en su caso, las configuraciones puntuales) proporcionan un modelo intuitivo para el desarrollo del pensamiento numérico, que potencia la comprensión mediante la visualización.

Duval (1993, 1995) distingue entre lo que llama objetos matemáticos y sus representaciones, y sostiene que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento, y es esencial en la actividad matemática poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

Según este autor, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas:

1. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ésta ha sido formada.
3. La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro, en el cual conserva la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Duval afirma que existen tres razones que confirman que el dominio y la coordinación entre varios sistemas de representación es fundamental para el pensamiento humano:

- La economía de tratamiento, pues hay facetas de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otro.
- La complementariedad de los sistemas, ya que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa.
- La necesidad de coordinación de registros de representación para la conceptualización, pues la comprensión reposa sobre la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación.

Terminamos esta reflexión abordando las relaciones entre las representaciones y los problemas aritméticos verbales.

Los sistemas de representación gráfica se han utilizado en los problemas aritméticos para facilitar al niño la representación mental de los mismos. Carpenter, Hiebert y Moser (1983) señalan que una precipitada introducción en el simbolismo conduce a transformar la resolución de un problema en una simple elección de operaciones, apartándose al niño de la elaboración de estrategias adaptadas a la estructura semántica.

Riley y otros (1983) desarrollan su hipótesis sobre la naturaleza de la habilidad de los niños respecto de la resolución de problemas aritméticos verbales. Según ellos, la mejora en el desempeño o rendimiento, es consecuencia, principalmente, de una mejor comprensión de ciertas relaciones conceptuales. Distinguen tres tipos principales de conocimientos que se aplican durante la resolución: los esquemas de los problemas, que les permiten comprender las diversas relaciones semánticas existentes; los esquemas de acción, para representar los conocimientos del modelo acerca de las acciones que intervienen en la resolución, y los conocimientos estratégicos, para la planificación de estrategias. Diferentes investigaciones que se llevaron a cabo mediante una instrucción sobre el uso de esquemas mostraron mejoras en el desempeño y rendimiento de los niños.

Threadgill-Sowder y Sowder (1982) y López-Real y Veloo (1993), entre otros, han probado que se produce una mejora significativa cuando los problemas aritméticos verbales son presentados en forma gráfica o cuando se les ayuda a diseñar diagramas.

En la resolución de problemas aritméticos se usan como sistemas de representación, entre otros, los siguientes: diagramas de Venn, operadores de Dienes, la recta, los diagramas de Fuson-Willis.

Los diagramas de Venn fueron potenciados por la incorporación del lenguaje conjuntista. Su base está en el esquema partes/todo. Hay dos posibilidades de uso, como podemos ver en las figuras 2.1 y 2.2, si bien Castro y otros (1987) se inclinan por el uso de un único conjunto que englobe las partes (figura 2.2), para no repetir elementos dos veces: como pertenecientes al total y a su subconjunto.

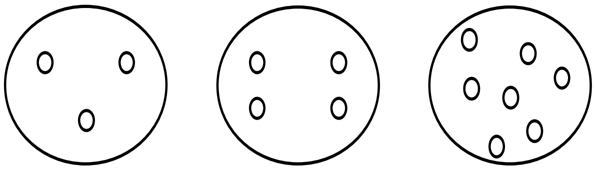


Figura 2.1

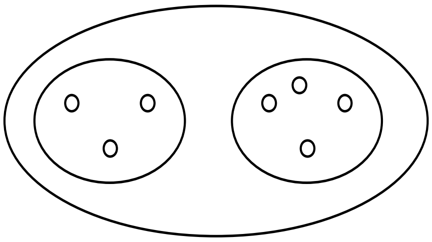


Figura 2.2

La máquina operadora de Dienes (Dienes, 1976) resalta el carácter dinámico de los problemas aditivos de cambio. Consta de una entrada, un cambio u operador y una salida.

Lindvall y Tamburino (citado por Greeno, 1987) instruyeron a 22 alumnos de 1º, en 8 tipos de diagramas para ayudar a los niños a resolver problemas (Figura 2.3). La ejecución mejoró una media de 3.4 puntos (sobre 20) y en un test de transferencia, con problemas con números mayores que requieren dos pasos, mejoró 4.2 puntos (sobre 20).

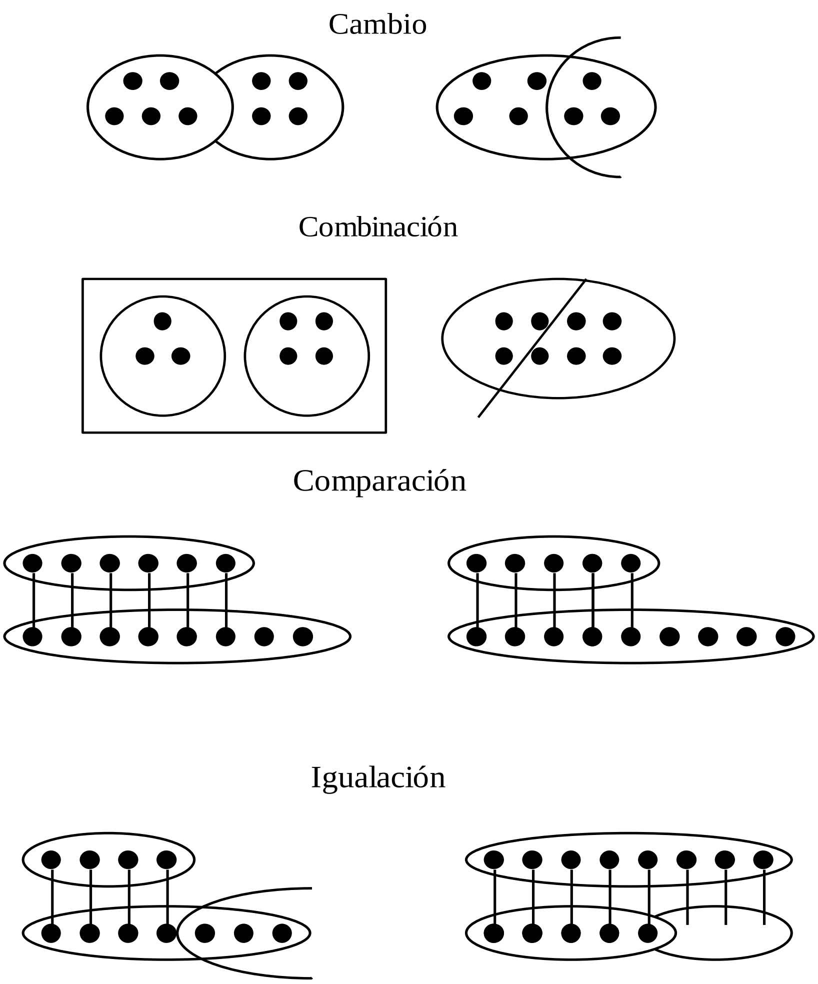


Figura 2.3

Bethencourt (1986) utiliza diagramas de Venn para ilustrar las distintas operaciones y, a continuación, utilizando un programa instruccional enseña a los niños una representación gráfica basada en la recta real y en el esquema partes-todo (Figura 2.4).

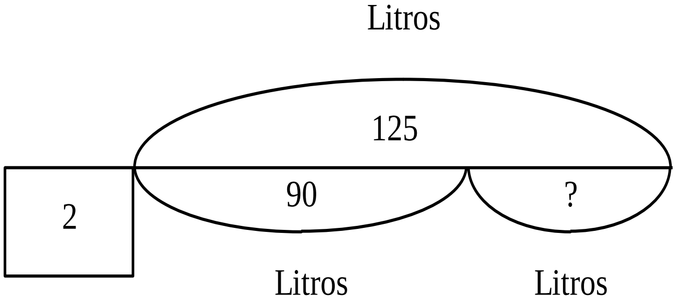


Figura 2.4

De Corte y otros (1989) desarrollan un programa experimental, en el que usan tres representaciones gráficas diferentes para los problemas aditivos de cambio, comparación y combinación. Desde su punto de vista, su objetivo es "*que los niños construyan, al menos, inicialmente, una variedad de modelos visuales para representar problemas que les ayuden a ser conscientes y a comprender las relaciones semánticas esenciales entre las cantidades implicadas en los problemas*" (Figura 2.5).

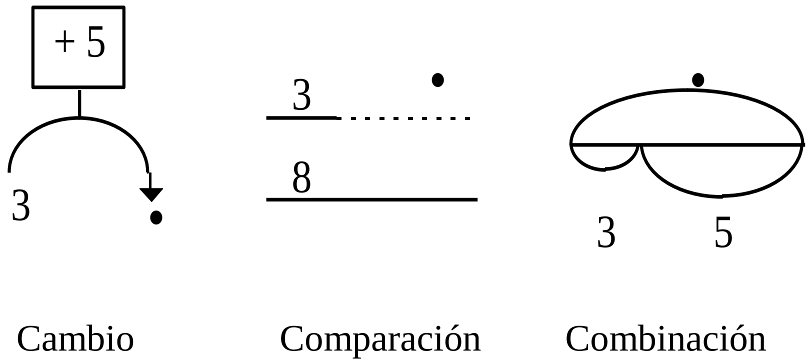


Figura 2.5

Willis y Fuson (1988) y Fuson y Willis (1989) en un estudio con alumnos de 2º grado, presentaron también tres dibujos esquemáticos diferentes para los problemas aditivos de cambio, combinación y comparación. Sus resultados evidencian cómo los niños hicieron más intentos para usar el diagrama de combinación en problemas de cambio y comparación, que el uso de los diagramas de cambio y comparación para los problemas de combinación. Cuando usaron un dibujo de combinación para problemas de cambio o comparación tuvieron menos respuestas correctas que si usaban los diagramas de cambio y comparación y, lo más notable fue el uso por muchos niños de un dibujo de comparación para los problemas de combinación-parte desconocida. Los diagramas que presentaron son semejantes en su apariencia y utilización a las regletas Cuisenaire.

Conexiones entre los sistemas de representación

Las conexiones matemáticas constituyen hoy uno de los objetivos esenciales de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Estas conexiones tienen una doble dimensión: conexiones internas de las Matemáticas y conexiones externas. Entre las conexiones internas tenemos las conexiones entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una. Y, entre las conexiones externas, tenemos las conexiones en la elaboración de modelos para situaciones del mundo real o para situaciones que se dan en otras disciplinas.

El uso de diferentes representaciones plantea un problema fundamental relacionado con las conexiones entre ellas. Lesh, Post y Behr (1987) describen los distintos papeles de las representaciones y las conexiones entre ellas, y destacan el importante papel que juegan en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas. Una de las conclusiones que obtienen de sus investigaciones es que los niños tienen dificultades en la comprensión de los problemas verbales, en los cálculos, pero también es deficiente su comprensión sobre los modelos y lenguajes necesarios para representar (describir e ilustrar) y manipular estas ideas. Además, las deficiencias en las traslaciones de una representación a otra influyen en el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras la mejora en estas habilidades potencia la adquisición y el uso de las ideas matemáticas elementales (p. 36).

En nuestro modelo de competencia se sugiere desarrollar con profusión las conexiones internas, esto es, entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una, y las conexiones externas con el mundo real. Es importante recordar que, cuando los estudiantes son capaces de trasladar una misma situación problema a diferentes representaciones, tendrán a un tiempo un conjunto potente y flexible de herramientas para resolver problemas y un aprecio más profundo por la coherencia y belleza de las Matemáticas.

No podemos acabar sin explicitar lo que los Estándares (NCTM, 2000) apuntan sobre las representaciones.

Estándar 10: Representaciones

Los programas instruccionales en Matemáticas deben enfatizar las representaciones matemáticas para favorecer la comprensión matemática, de forma que todos los estudiantes:

- Creen y usen representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.
- Desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que pueda ser usado con provecho, con flexibilidad y apropiadamente.
- Usen representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Consideraciones finales

En este artículo hemos intentado reflexionar sobre el papel que juegan los Sistemas de Representación en la resolución de problemas. A la luz de dichos resultados se ha puesto de manifiesto la complejidad que tiene el trabajar con distintos sistemas de representación, sobre todo en el establecimiento de conexiones entre ambos.

Nos apoyamos en Duval que afirma que la enseñanza, con respecto a los sistemas de representación, sólo tiene en cuenta la formación de representaciones y las transformaciones dentro de un sistema de representación y se considera que la traducción entre ellos es evidente. Sin embargo, esto no es así, y algunos bloqueos y obstáculos para la comprensión surgen de la imposibilidad de representar mediante un cierto sistema aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otros. De hecho, indica que la comprensión de un concepto matemático está íntimamente relacionada con el dominio de la coordinación entre sus sistemas de representación.

En las entrevistas hemos podido comprobar como el uso del sistema de representación visual-geométrico y el modelo de competencia favorece en los alumnos la exteriorización de habilidades de tipo cognitivo, heurístico y metacognitivo.

Nos encontramos también con alumnos que tenían ya interiorizado el modelo tradicional de resolución de problemas, por lo que a partir del enunciado iban rápidamente a realizar la operación correspondiente. La adquisición de este nuevo lenguaje fue lograda sólo por algunos alumnos, siendo, los de mayor rendimiento, capaces de realizar una buena representación mental del problema, lo que como apuntan Resnick y Ford (1981), constituye el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas.

Asimismo, hemos podido observar cómo existe una relación entre las habilidades que exteriorizan y su capacidad para resolver el problema. Como muchos autores afirman (Lester, 1983, De Corte, 1993, Schoenfeld, 1992), los alumnos que demuestran poseer más habilidades metacognitivas se presentan como los mejores resolutores.

Referencias bibliográficas

BETHENCOURT, J.T. (1986). *Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. Tenerife.
CARPENTER, T.P., HIEBERT, J. y MOSER, J.M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, pp. 55-72.
CASTRO, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.
CASTRO, E., RICO, L. y CASTRO, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Síntesis. Madrid.
DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. Beltrán, M.D. Prieto, V. Bermejo y D. Vence (Eds) (1993): *Intervención psicopedagógica.* Pirámide. Madrid.
DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1989). Teaching word problems in the Primary School: What Research has to say to the teacher. En B. Greer y G. Mulhern: *New Directions in Mathematics Education.* Routledge. London.
DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* pp. 37-65.
DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang. Suisse.
DE VEGA, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza. Madrid.
DIENES, Z.P. (1976). *Estados y operadores.* Teide. Barcelona.
FUSON, K. y WILLIS, G. (1989). Second grader's use of schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81,* pp. 514-520.
GOLDIN, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.
GOLDIN, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. *Paper presentado en el XVII PME*. Japan.
GREENO, J. (1987). Instructional representations based on research about understanding. En A. Schoenfeld (Ed): *Cognitive Science and Mathematics Education.* LEA. Hillsdale. New Jersey.
HERNÁNDEZ, J. (1997). Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación

yuxtapuestos. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.
HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M.M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma, 16,* pp. 82-90.
JANVIER, C. (Ed) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.
KAPUT, J. (1987). Toward a theory of symbol use in Mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.
KRUTETSKII, V.A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. En J. Kilpatrick, I. Wirszup (Eds): *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Vol. 2.* Stanford, California: School Mathematics Study Group.
KRUTETSKII, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* University of Chicago Press.
LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1987). Representations and translation among representations in Mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
LESTER, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. En R. Lesh y M. Landau (Eds): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press. New York.
LÓPEZ-REAL, F. y VELOO, P.K. (1993). Children's Use of Diagrams as a Problem-Solving Strategy. En *Proceedings of the XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Japan.
NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Electronic Version.
PAIVIO, A. (1978). Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and cognition, 6,* pp. 199-208.
PRESMEG, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school Mathematics: A classroom investigation.* Tesis doctoral. Cambridge.
RESNICK, L. y FORD, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction.* (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós-MEC. Madrid).
RILEY, M.S., GREENO, J.G. y HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in Arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed): *The development of mathematical thinking*. Academic Press. New York.
SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics. En D.A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning.* A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.
THREADGILL-SOWDER, J. Y SOWDER, I. (1982). Drawn versus verbal

formats for mathematical story problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, pp. 324-331.

WILLIS, G. y FUSON, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Pschylogy, 80*, pp. 192-201.