ISBN: 84-931584-2-9

EL USO DE LA VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS. EJEMPLOS PRÁCTICOS

Agustín Morales González
María Dolores Moreno Martel

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Nosotros constatamos la poca costumbre que tienen nuestros estudiantes de Magisterio de hacer uso de representaciones como apoyo al proceso de razonamiento en Matemáticas.

Convencidos de la necesidad de potenciar al máximo la visualización en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en esta ponencia pretendemos ofrecer una muestra variada de situaciones, casi todas propuestas en clase, en la que el uso de una representación adecuada pensamos que sirve de soporte ya sea para la resolución de un problema, la demostración de un teorema, o la mejor comprensión de un concepto difícil.

Abstract

We stated the lack of custom that our students of the Teacher Training Superior Centre have to make use of representations as support to the process of reasoning in Mathematics.

Convinced of the necessity to enhance to the maximum the visualization in the education-learning of Mathematics, in this paper we try to offer a varied sample of situations, almost all proposed in class, in which we thought that the use of a suitable representation serves as support for the resolution of a problem, the proof of a theorem, or a better understanding of a difficult concept.

Consideraciones generales

Si tenemos en cuenta la naturaleza de las Matemáticas, constataremos que la visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática; así lo entendió Gauss hasta el punto de considerar a las Matemáticas como una "ciencia del ojo".

Esta importancia es puesta de relieve por M. de Guzmán (1996) al señalar que *las ideas, conceptos y métodos de las Matemáticas presentan una gran cantidad de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas del campo...*de modo que *la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.*

Si bien es cierto que desde un punto de vista formalista se han puesto muchas objeciones al empleo de dibujos, figuras, y en general, representaciones gráficas dado que su empleo puede conducir a errores, actualmente parece haber una tendencia a recuperar el papel de la visualización en todos los niveles de la actividad matemática.

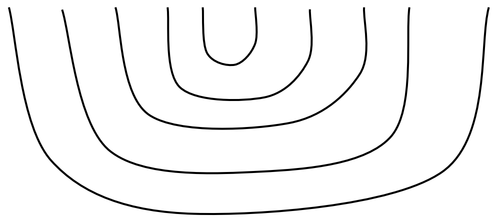
Creemos oportuno mencionar aquí la cita recogida en Nelsen (1993), debida a Halmos, según la cual para ser un buen estudiante de Matemáticas se debe haber nacido con la habilidad de visualizar, de modo que la mayoría de los profesores trata de desarrollar esta habilidad en sus estudiantes. Recuerda asimismo el clásico consejo de Polya relativo a la conveniencia de dibujar una figura a la hora de resolver un problema.

La visualización permite realizar cálculos aritméticos o algebraicos y determinar las correspondientes relaciones

Suma de los n primeros números naturales

- Mediante un modelo de arco iris

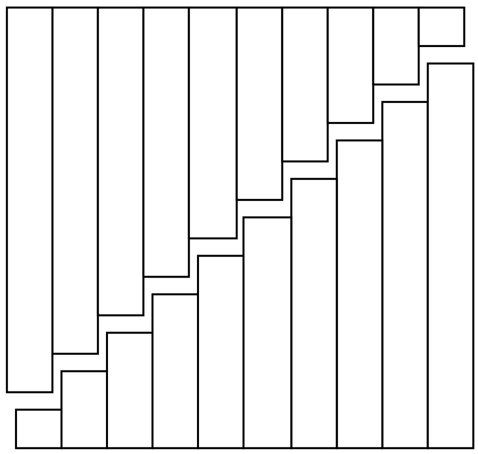
1 + 2+ 3+ 4+ 5+ 6 + 7+ 8+ 9 + 10



$$S(5) = 5 \bullet 11 = \frac{10}{2}(10+1) = \frac{10 \bullet (10+1)}{2} \Rightarrow S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

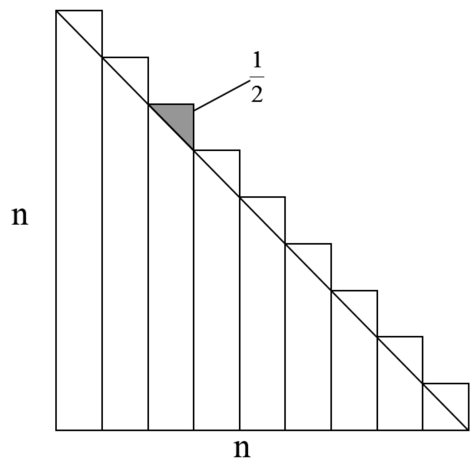
- Mediante un modelo de escalera usando Regletas Cuisenaire

La figura sugiere cómo obtener la suma de los diez primeros números naturales, y cómo generalizar el resultado.



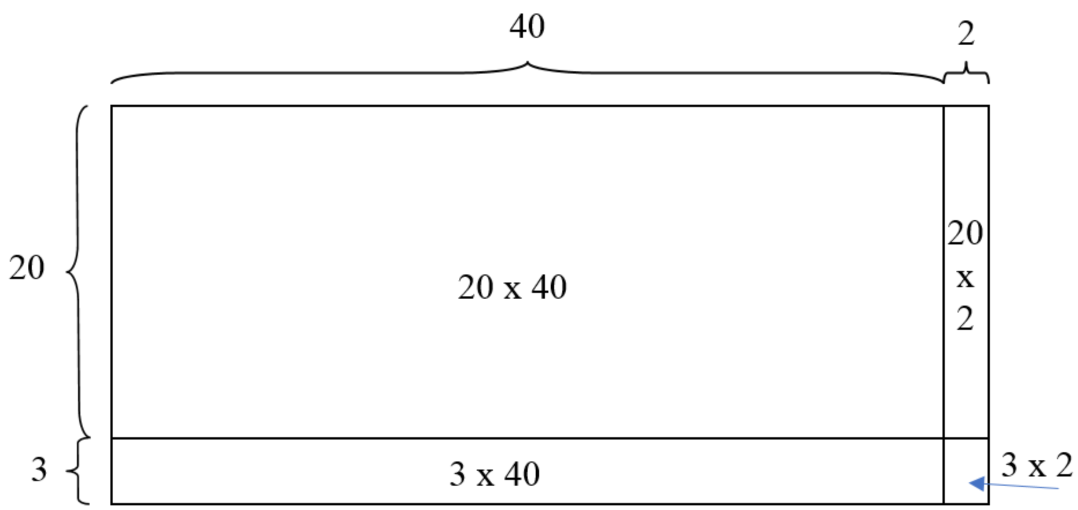
$$2 \bullet \mathrm{S}(10) = 10 \bullet (10+1)$$
$$2 \bullet \mathrm{S}(\mathrm{n}) = \mathrm{n} \bullet (\mathrm{n}+1)$$

- Mediante un modelo de áreas



Los modelos de áreas permiten visualizar otras relaciones, tales como:

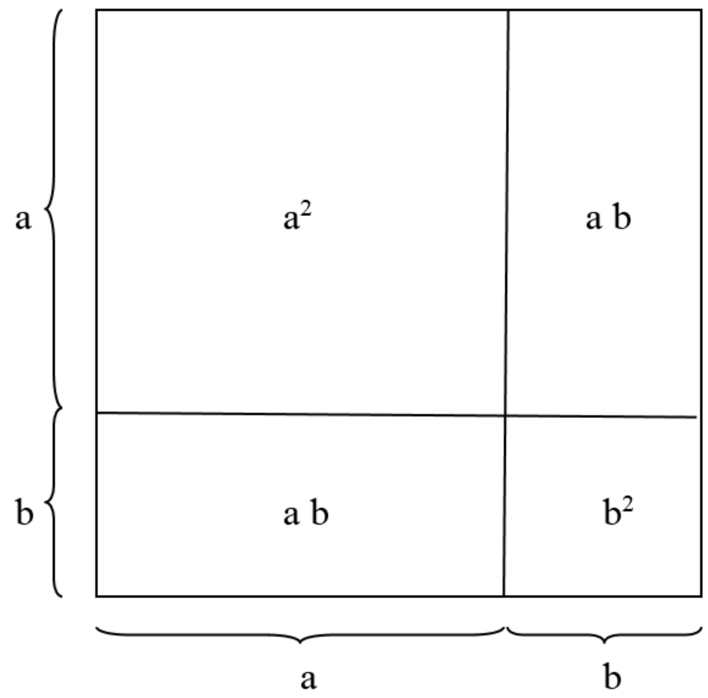
- La multiplicación de dos números: 23 x 42



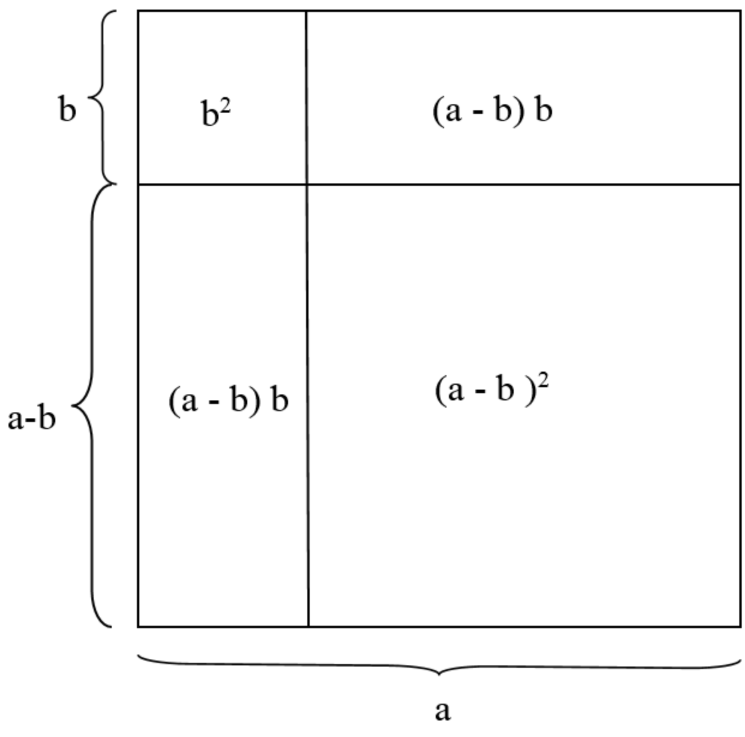
$$S(n) = \frac{1}{2} n \bullet n + n \bullet (\frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

23 x 42 = (3 + 20) · (2 + 40) = 3 x 2 + 3 x 40 + 20 x 2 + 20 x 40 = 966

- El cuadrado de un binomio



$$(a + b)^2 = a^2 + 2\ a\ b + b^2$$



$$(a - b)^2 = a^2 - 2\ (a - b)\ b - b^2 = a^2 - 2\ a\ b + b^2$$

Una representación adecuada puede facilitar la resolución de problemas no rutinarios

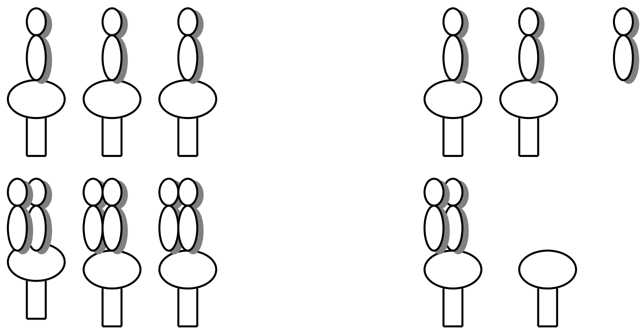
- Mochuelos y olivos

- Cada mochuelo a su olivo y sobra un mochuelo.

- Cada dos mochuelos a su olivo y sobra un olivo.

¿Cuántos mochuelos y olivos se tienen?

Sea **x** el número de mochuelos e, **y,** el de olivos.

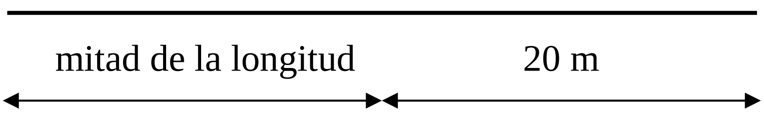


$$\left.\begin{aligned} x &= y+1 \\ (y-1)\cdot 2 &= x \end{aligned}\right\}$$

$$x = 4 \qquad y = 3$$

- El monstruo del lago Ness

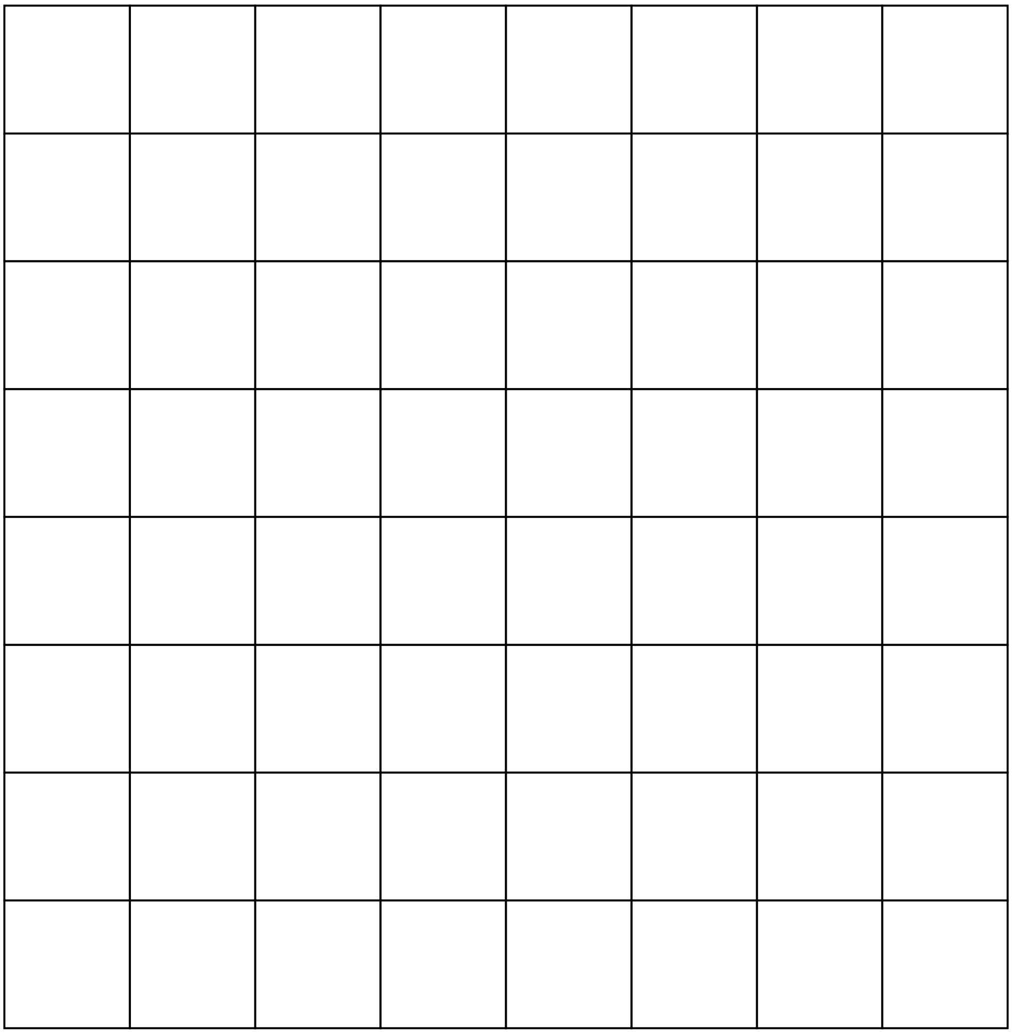
El monstruo del lago Ness tiene una longitud total de 20 m más la mitad de su propia longitud ¿Cuánto mide el monstruo de largo?

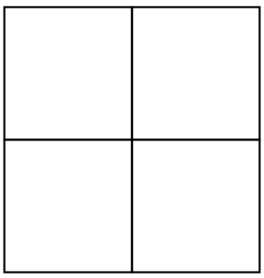


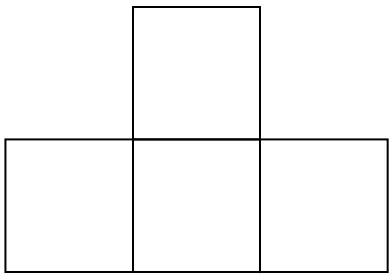
La mitad de la longitud es igual a 20 m, luego el monstruo tiene una longitud total de 40 m.

¿Puede cubrirse una cuadrícula de 8 x 8 empleando 15 tetraminós tipo podium y uno tipo cuadrado?

Este ejercicio fue propuesto por C. Alsina en unas Jornadas de la S.C.P.M. "Isaac Newton", celebradas hace unos años en Las Palmas G.C.

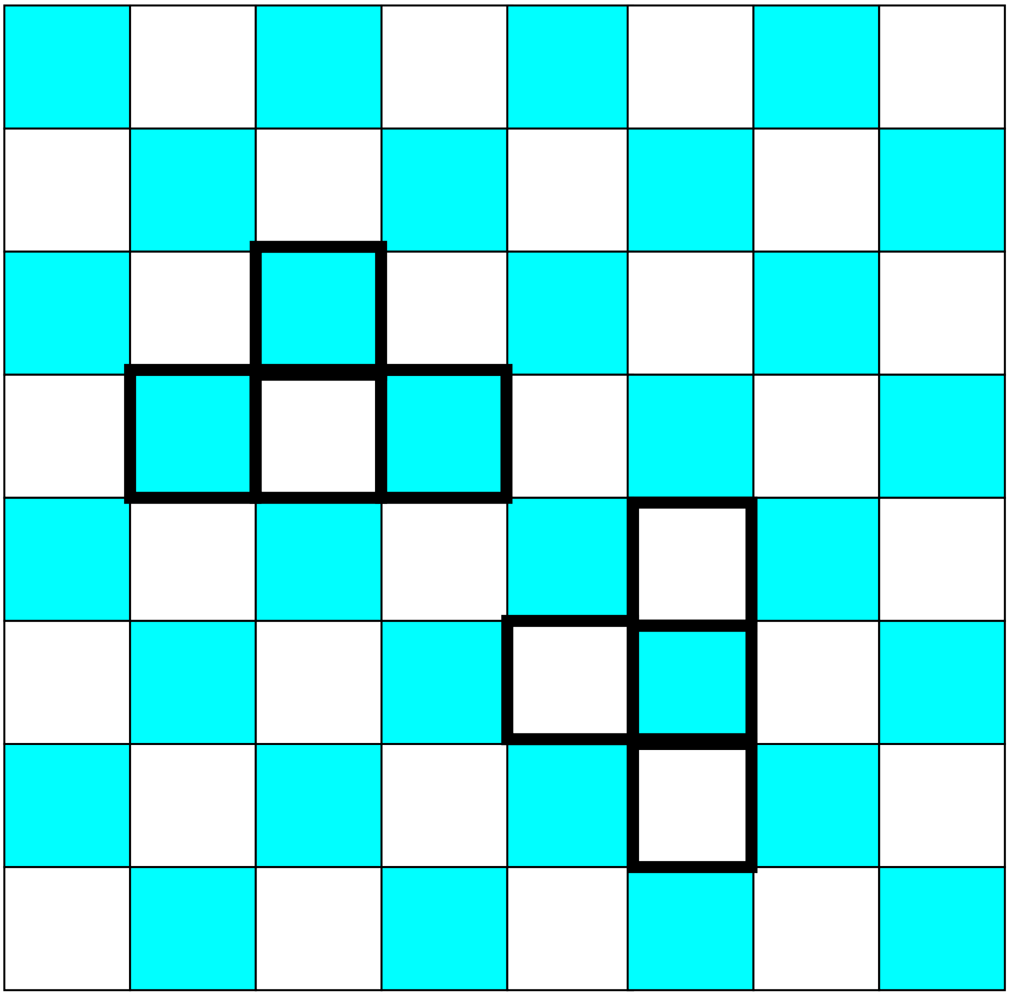






15 x 4 + 1 x 4 = 64, luego **puede** ser posible.

Sin embargo, si coloreamos oportunamente los cuadraditos según se muestra, tendremos:



Si **x** simboliza el número de tetraminós tipo A (cada uno cubre tres cuadraditos coloreados y uno blanco) e, **y,** el número de tetraminós tipo B, (cada uno cubre tres cuadraditos blancos y uno coloreado), podemos escribir:

Número total de tetraminós tipo podium: $x + y = 15$

Número total de cuadrados coloreados: $3x + 1y + 2 = 32$

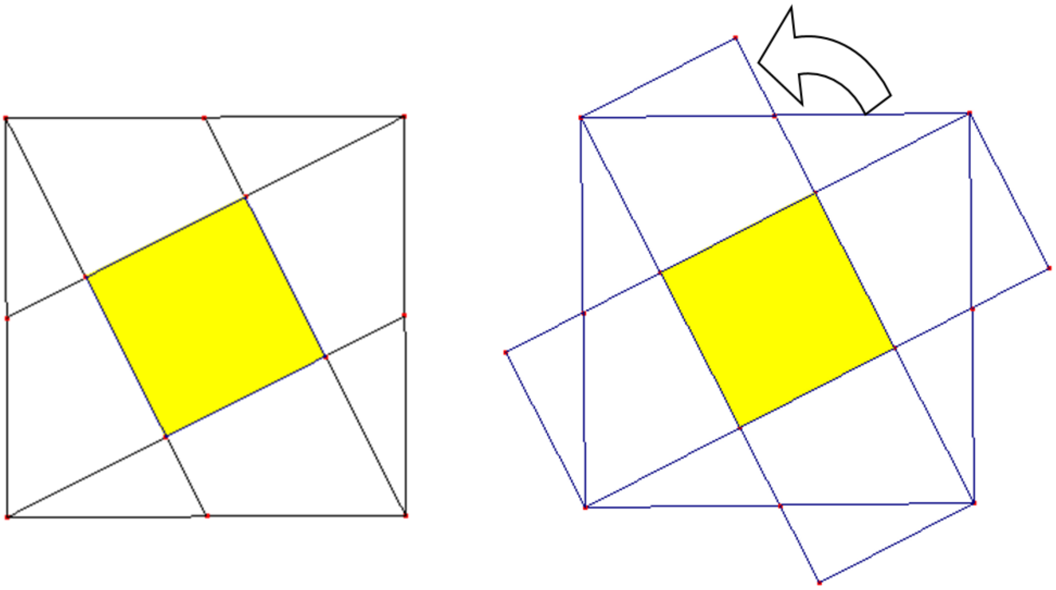
Número total de cuadrados blancos: $1x + 3y + 2 = 32$

Los sumandos de valor 2 corresponden a los cuadraditos cubiertos por el tetramino "cuadrado".

Al resolver, resulta $x = y = 15/2$, luego tal cubrimiento es imposible.

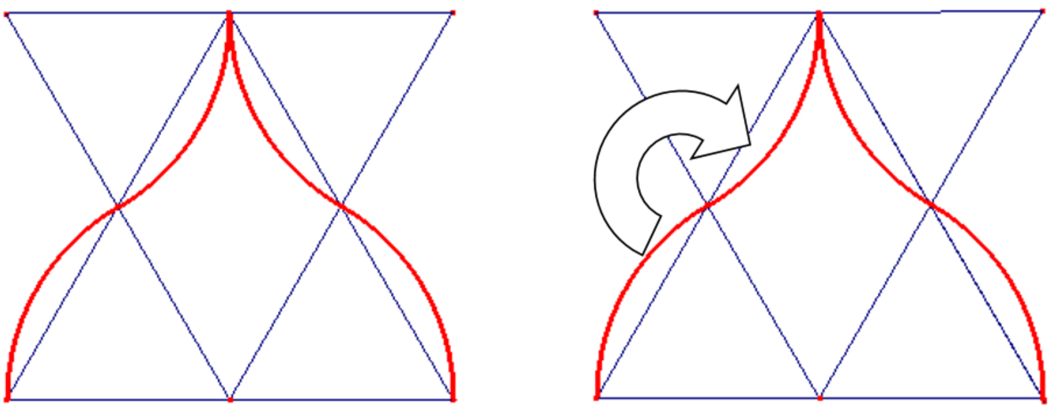
La visualización permite resolver fácilmente muchos problemas geométricos

- ¿Cuál es el área del cuadrado sombreado?



Si designamos por **a** el lado del cuadrado mayor, el lado del cuadrado sombreado será A = $a^2/5$.

- ¿Cuál es el área del arco persa de la figura si el lado del triángulo equilátero mayor mide a unidades?



Área arco persa = Área triángulo = $a^2\sqrt{3} / 4$

La visualización puede ayudar a una mejor comprensión de conceptos matemáticos difíciles

Zimmermann (1991) indica que *Conceptually, the role of visual thinking is so fundamental to the understanding of Calculus that it is difficult to imagine a succesful Calculus course which does not emphasize the visual elements of the subject. This is specially true if the course is intended to stress conceptual understanding, which is widely recognized to be lacking in many Calculus courses as now taught. Symbol manipulation has been overemphasized and ... in the process the spirit of Calculus has been lost.*

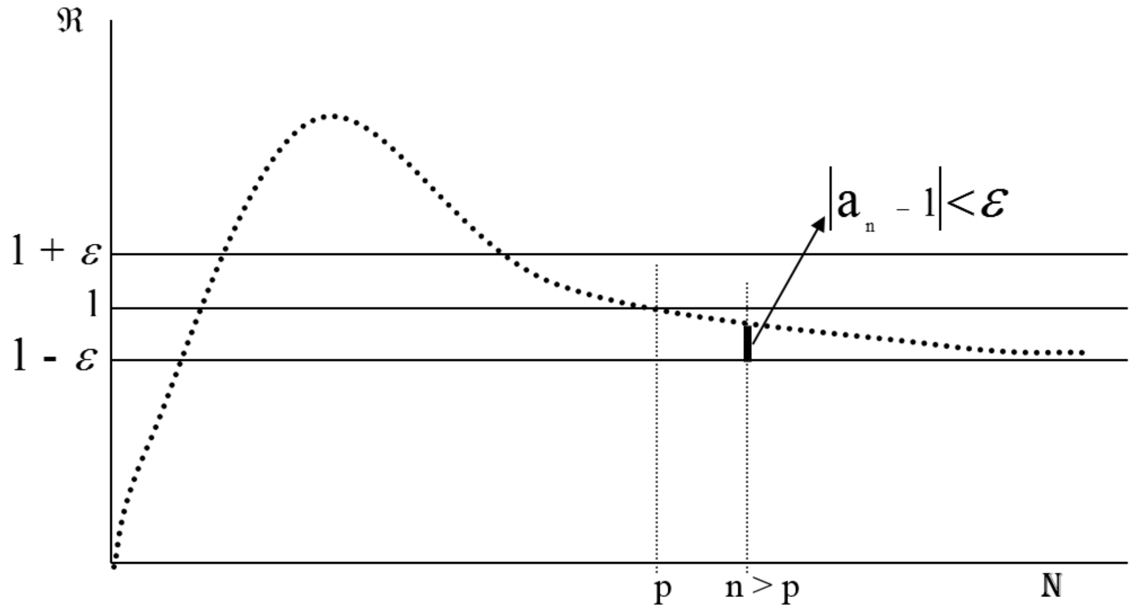
No opinaba del mismo modo Jean Dieudonné. En la introducción a su libro *Álgebra Lineal y Geometría Elemental* señala:

- *Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto.*
- *Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las "figuras" tradicionales, hablando lo menos posible de ellas (exceptuando, naturalmente, punto, recta y plano).*

En Análisis Matemático, el concepto de límite finito, l, de una sucesión de (a_n) de números reales cuando n tiende a infinito se suele introducir, en notación simbólica, como sigue:

$$\text{lím } (a_n) = l \text{ sii } \underset{\varepsilon \in \Re}{\forall \varepsilon > 0}, \exists\, p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq p \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Pensamos que la representación visual que sigue puede contribuir a la mejor comprensión del concepto.



Para Miguel de Guzmán *Las ideas conceptos y métodos de las Matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.*

Sin embargo, Eisenberg & Dreyfus (1990) señalan que *"although the benefits of visualizing mathematical concepts are often advocated, many students are reluctant to accept them; they prefer algorithmic over visual thinking.*

La visualización puede permitir la detección de errores que pueden pasar desapercibidos

Sea una f una función real de variable real, diferenciable en cierto dominio D, tal que $\forall x \in D$, se tiene f(x) = f(-x). Se verifica entonces:

a) $f'(-a) = - f'(-a)$ b) $f'(-a) = f'(a)$

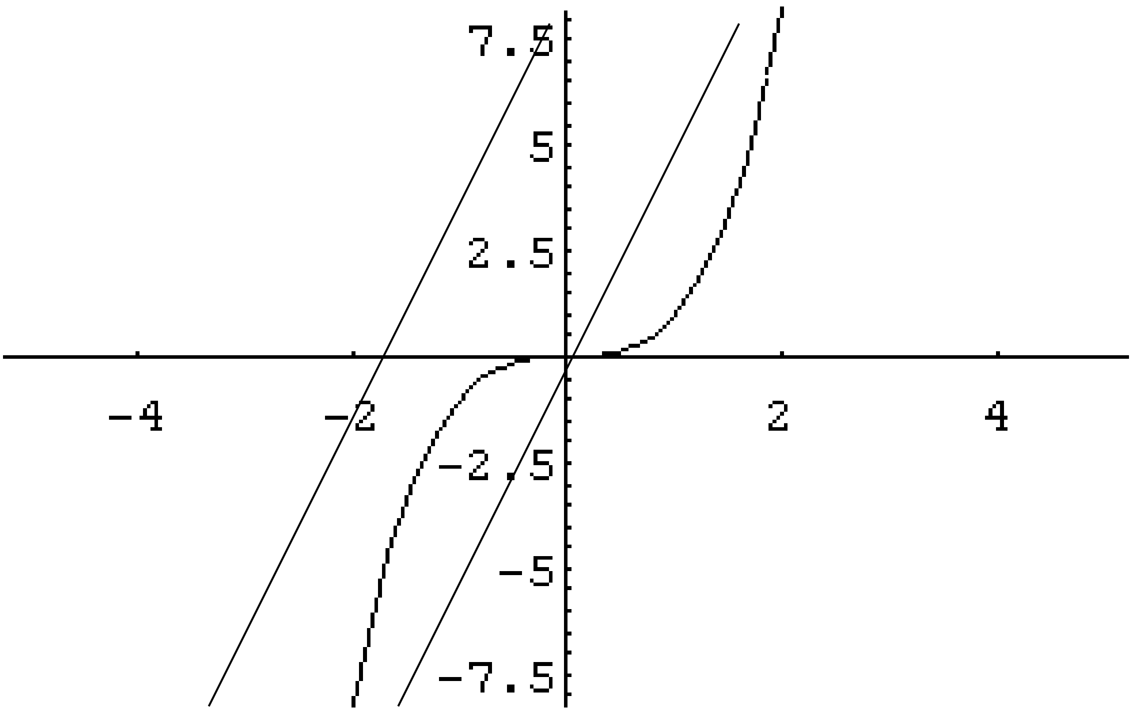
c) $f'(-a) = - f'(a)$ d) Ninguna de las anteriores.

Un estudiante de Análisis Matemático escribió:

$$f'(-a) = (f(-a))' = (-f(a))' = - f'(a)$$

Según lo cual, la correcta sería, pues, la c)

Sin embargo, si recurrimos a una representación gráfica de una función impar, tal como $f(x) = x^3$ podemos "ver" que lo escrito no es correcto sin más que observar la igualdad de las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas a y -a.

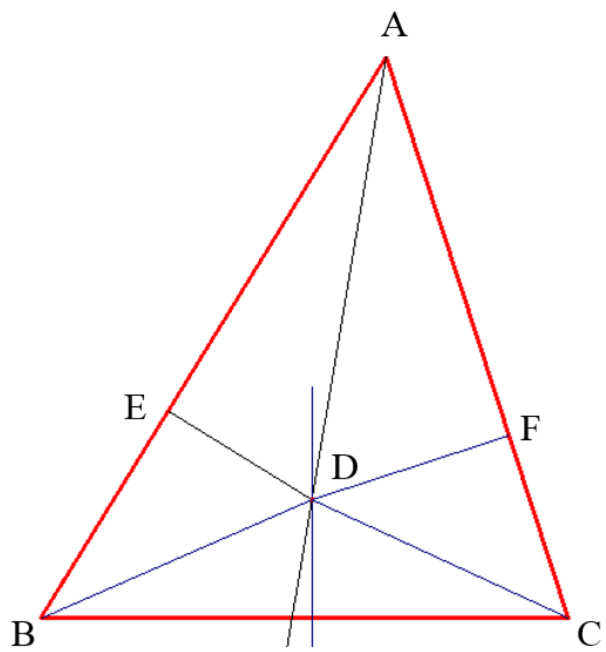


Sin embargo, una representación incorrecta como apoyo para el proceso de razonamiento puede dar lugar a una conclusión falsa

Martin Gardner (1985, p. 55) recuerda que Euclides escribió una obra que se ha perdido, denominada *Pseudaria* en la que presentaba una colección de falacias geométricas, entre las cuales bien podría figurar la que sigue: *Todo triángulo es isósceles.*

Se debe a Lewis Carroll y fue publicada por primera vez en 1892, en la obra *Mathematical Recreations and Essays.* Veamos la "demostración":

Sea ABC un triángulo **cualquiera**. Tracemos la bisectriz del ángulo A y la mediatriz del lado BC. Sea D su punto de intersección.



Tracemos los segmentos BD y CD, así como los segmentos DE y DF, perpendiculares a AB y AC, respectivamente.

Se verifica Δ(ADE) = Δ(ADF), por tener iguales la hipotenusa y un ángulo agudo. Por tanto DE=DF.

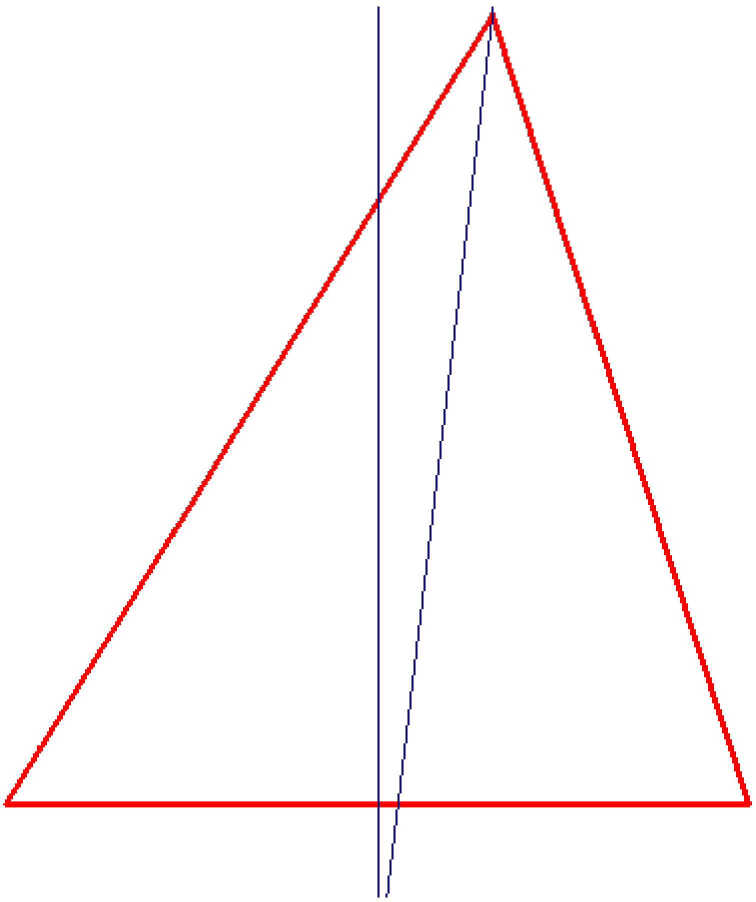
Asimismo, Δ(DEB) = Δ(DFC), por tener iguales la hipotenusa y un cateto.

Luego $\Delta(ADE) = \Delta(ADF) \Rightarrow AE = AF$

$\Delta(DEB) = \Delta(DFC) \Rightarrow EB = FC$

Sumando ambas igualdades $AB = AC$

Por tanto, $\Delta(ABC)$ es isósceles.



Un dibujo correcto nos permite comprobar la falsedad de la demostración, dado que el punto D es exterior al triángulo.

Pero, como señala Miguel de Guzmán, *la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no invalida su eficacia y potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático, tanto en el trabajo creativo, como en los procesos de comunicación y transmisión.*

Referencias bibliográficas

CASTRO, E.; CASTRO, E. (1997): Representaciones y Modelizaciones, en RICO, L. et al. (Eds.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. ICE-Horsori. Barcelona.

DE GUZMÁN, M. (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Pirámide. Madrid.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (1990): On the Reluctance to Visualize in Mathematics, en ZIMMERMANN, W & CUNNINGHAM, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. The Mathematical Association of America. Washington.

GARDNER, M. (1985): *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas.* Labor. Barcelona.

NELSEN, R. B. (1993): *Proofs Without Words.* The Mathematical Association of America. Washington.

ZIMMERMANN, W.; CUNNIGHAM, S. (1991): Visualization and the Nature of Mathematics, en W. Zimmermann y S. Cunnigham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* The Mathematical Association of America. Washington.