FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
ISBN: 84-931584-2-9

APLICACIÓN DE UN SISTEMA CATEGORIAL DE HABILIDADES COGNITIVAS AL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES

Mª Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

Este artículo recoge parte de una investigación realizada al estudiar aspectos cognitivos del pensamiento algebraico, en concreto la aplicación de un sistema categorial, que permitió el análisis de contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos en relación con la adquisición del lenguaje algebraico.

En la investigación estudiamos los aspectos cognitivos del pensamiento algebraico en términos de habilidades operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y del uso y comprensión de los sistemas de representación utilizados, concretamente en el marco de una situación de enseñanza.

En este trabajo se presenta de manera particular el análisis de la aplicación de las mismas al tópico de las ecuaciones y se indican algunos resultados obtenidos en la investigación general de ecuaciones "explorando" en el nivel de 12 a 14 años, mediante el uso de un pretest-postest en una muestra de 31 alumnos.

Abstract

This paper picks up part of an investigation carried out when studying cognitive aspects of the algebraic thought, in short, the application of a categorial system that allowed the analysis of contents developed in the classroom and to value the understanding of the students related to the acquisition of the algebraic language.

In the investigation we study the cognitive aspects of the algebraic thought in terms of operational and conceptual abilities in the processes of acquisition and use of the algebraic language and of the use and understanding of the representation systems used concretely in the frame of a teaching situation.

In this work it is presented in a particular way the analysis of the application from the same ones to the topic of the equations and some results are indicated obtained in the general investigation of equations exploring in the level from 12 to 4 years, by means of the use of a pretest-postest in a sample of 31 students.

Introducción

Este trabajo de: "Aplicación de un sistema categorial de habilidades cognitivas al estudio de las ecuaciones" está relacionado con otros trabajos, de los mismos autores, "Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico" (1998) y "La adquisición del lenguaje algebraico. Elementos organizadores de una investigación" (1999), referidos al análisis de procesos cognitivos conceptuales y operacionales de los alumnos en el aprendizaje adquirido en el tópico de expresiones algebraicas, primero de los trabajos, y en el uso y comprensión de registros o sistemas de representación utilizados también en el tratamiento de las expresiones algebraicas, segundo trabajo; se estableció un marco teórico local y se elaboró un sistema categorial que permite el análisis de contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos en relación con la adquisición del lenguaje algebraico.

El sistema de categorías elaborado para el estudio de las ecuaciones responde a tres ámbitos de estudio, al igual que el de las expresiones algebraicas, cognitivo, curricular y de implementación didáctica.

Centrados en la perspectiva cognitiva, planteamos situaciones concretas para el estudio de las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico, en el uso y comprensión de varios registros o sistemas de representación utilizados en el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales, "explorando" en el nivel de 12-14 años.

Se pretende detectar habilidades de carácter operacional y conceptual relacionadas con los conocimientos conceptuales y procedimentales que conviene caracterizar.

Hiebert y Lefevre (1986) encuentran un análisis de los dos tipos de conocimientos en Matemáticas, el conceptual y el procedimental, señalando diferentes características de cada uno de ellos:

Conocimiento conceptual	Conocimiento procedimental
◆ rico en relaciones ◆ depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna ◆ no puede aprenderse sin significado	◆ dependiente del sistema de representación simbólica ◆ implica el conocimiento de las reglas sintácticas ◆ puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos, de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan; b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos. Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

La caracterización y relación entre estos dos tipos de conocimiento es también considerada por otros autores, como, por ejemplo Douady (1986) o Sfard (1991), incluso con mejor acierto.

Indicamos asimismo que, en la organización y construcción del sistema categorial aplicado por nosotros al análisis de la comprensión del planteamiento y resolución de ecuaciones, hemos tomado en consideración a otros autores como Flanders (1977), Bisquerra (1989), Blanco y Anguera (1991) y Castro (1994).

Presentamos en el cuadro siguiente, de manera esquemática, las seis categorías relativas a habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y las siete categorías referidas a habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.).

H.C.C.O.	H.C.C.C.
O_1 Uso de las reglas de transformación.	**C_1** Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico.
O_2 Procedimientos de resolución en "x + b = c".	**C_2** Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.
O_3 Procedimientos de resolución en "a x = b".	**C_3** Conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.
O_4 Procedimientos de resolución en "ax + b = cx + d".	**C_4** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico.
O_5 Signos negativos en los coeficientes de la ecuación.	**C_5** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.
O_6 Comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas).	**C_6** Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.
	C_7 Interpretación y comprensión del signo "=".

Con el fin de facilitar la comprensión de los resultados presentados, en relación con las categorías que se refieren a las H.C.C.O. y H.C.C.C. relativas a ecuaciones, que sólo son las que nos ocupan en este momento, adjuntamos los descriptores que se recogen en los anexos 1 y 2.

Hemos de señalar que, frente a las propuestas de enseñanza/aprendizaje del álgebra basadas especialmente en procedimientos algorítmicos, nosotros proponemos, y ya lo hemos constatado en trabajos anteriores, una enseñanza/aprendizaje que conjugue tanto la representación conceptual como de procedimiento, en un marco de interpretación del álgebra como lenguaje. Por ello se han planteado unas habilidades algebraicas para analizar el tópico de ecuaciones. Las categorías concretadas en sus descriptores facilitan el análisis de las mismas.

Tareas y resultados

Los resultados que se muestran son exclusivamente referidos al Pretest y Postest que se aplicó dentro del tratamiento general de las Ecuaciones realizado en una población de alumnos de 12-14 años. Sería exhaustivo expresar todos los resultados del estudio, pues se desarrolló una instrucción en el aula para la cual se elaboró un diseño de instrucción (DISEC) (cuadernos específicamente relacionados con el tema), además de una serie de entrevistas en la que se presentaron situaciones que involucraban los contenidos de ecuaciones seleccionados y organizados en torno a las categorías de contenido algebraico del mismo sistema categorial.

El grupo de 31 alumnos se enfrentaba por primera vez a este tema de Matemática en la realización del Pretest y luego, antes de haber desarrollado la instrucción en la que se utilizó el diseño preparada para la misma, se intentó medir la eficiencia del desarrollo de la enseñanza mediante un Postest.

El Pretest estuvo formado por dos partes (Pr1 y Pr2), para no hacerlo muy largo a la hora de la aplicación, pero en él no se separaron los ítemes relativos a expresiones algebraicas de los de las ecuaciones, por ello se han seleccionado en principio los ítems del Postest (Po2) específico para ecuaciones, de los 39 que coincidían en el Pretest y Postest, y luego de éstos, se han elegido aquellos ítemes que se habían utilizado en la prueba Pretest, tanto de la primera parte como de la segunda, que en total han sido 8.

En el siguiente cuadro se muestran los ítems comparados, así como las características de los mismos y habilidades que permitieron detectar.

Característica de los ítems	Habilidades	Nº Ítem Pretest (Pr1 ó Pr2)	Nº Ítem Postest (Po2)
Relación enunciados – ecuaciones	C_3 C_6	45- 48 (Pr1)	11-14
Resolución de ecuaciones	O_4 C_3	8 (Pr1)	15
Conversión de registros	O_1 O_3 C_3	20 (Pr1)	9
Planteo y resolución de ecuaciones	O_1 O_3 C_3	9 (Pr1)	8
Planteo y resolución de ecuaciones	O_1 O_4 C_3 C_7	45 (Pr2)	7
Resolución de ecuaciones	O_1 O_4	16 (Pr1) y 4 (Pr2)	5
Problema de enunciado verbal	O_1	25 (Pr1)	1

Pasamos a comentar, en relación con los resultados obtenidos, algunas de las habilidades de carácter operacional y conceptual de los alumnos. En la presentación de los resultados se expresa el mismo lenguaje, ortografía, subrayado y presentación espacial de las respuestas de los alumnos.

Para los **ítems 45-48 de Pr1:** “En la columna de la izquierda, hay una serie de problemas. No trates de resolverlos. Cada uno de los problemas se resuelve usando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Encuentra la ecuación que corresponde a cada problema y pon el número de esa ecuación en el cuadro que se encuentra a la izquierda del problema.

	¿Cuál es la edad de María si hace 10 años tenía 40?	$6x = 3900$
46	Un hombre trabajó 6 horas, si en total ganó 3900 pesetas, ¿cuánto gana por hora?	$x = (594 : 3)\cdot 6$
	Tres hectáreas se abonan con 594 kg de fertilizante, ¿cuántos kilogramos se necesitan para abonar 6 hectáreas?	$x + 5x = 36$
	Un equipo de baloncesto ganó 5 veces más partidos que los que perdió. Si en total jugó 36 partidos, ¿cuántos perdió?	$x - 10 = 40$”

y **11-14 (Po2):** “En la columna de la izquierda, hay una serie de problemas. No trates de resolverlos. Cada uno de los problemas se resuelve usando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Encuentra la ecuación que corresponde a cada problema y pon el número de esa ecuación en el cuadro que se encuentra a la izquierda del problema.

	Un hombre trabajó 6 horas. Si en total ganó 7800 pesetas, ¿cuánto le pagaron por hora?	$x = (594 : 3)\cdot 7$
48	¿Cuál es la edad de José si hace 10 años tenía 35?	$6x = 7800$
	3 libros de cuentos iguales valen 594 pesetas, ¿cuántas pesetas se necesitan para comprar 7 libros iguales a los anteriores?	$x + 5x = 36$
14	Un equipo de concursantes contestó correctamente 5 veces más que las preguntas que falló. Si en total le hicieron 36 preguntas, ¿cuántas falló?	$x - 10 = 35$”,

encontramos que en el Postest las respuestas del 100 % han sido correctas, resultado esperado dada la sencillez del mismo.

De los 31 alumnos, sólo una alumna no lo resolvió en el Pretest, pero lo resolvió correctamente en el Postest. Esta alumna que ha dejado sin resolverlo es una alumna que habitualmente resolvió correctamente las actividades, por eso es previsible que al no sentirse segura haya optado por no contestar.

Los dos alumnos que lo resolvieron mal en el Pretest presentan situaciones diferentes. De las respuestas de la alumna nº 3:

Ítem 45	400	Ítem 11	B
Ítem 46	3600	Ítem 12	B
Ítem 47	564	Ítem 13	B
Ítem 48	4280	Ítem 14	B

no se deducen posibles procesos de resolución, sin embargo, de la alumna nº 9:

Ítem 45	50	Ítem 11	B
Ítem 46	650	Ítem 12	B
Ítem 47	1692	Ítem 13	B
Ítem 48	31	Ítem 14	B

sí se puede deducir que no se preocupó del enunciado de la actividad y se dirigió directamente a resolver los problemas verbales que aparecían y lo hizo bien en tres de los ítemes (45, 46 y 47), pero, en uno de ellos, tomó como dato 564 y no 594 que era el correcto. El ítem 48 muestra una vez más la asociación generalizada de los alumnos a asociar “ganar” a “sumar” y “perder” a “restar”, al margen de la situación contextual planteada.

En cualquiera de los casos, 29 de los 31 alumnos 73,5 % en el Pretest y el 100 % en el Postest mostraron su habilidad para reconocer “expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes”, codificada en nuestro sistema de categorías como C_6.

Con los **ítemes 8 de Pr1 y 15 de Po2:**

(8Pr1) Halla el cuadrito vacío en $4 \times \boxed{} = 56$	(15 Po2) Resuelve 13 x = 91. Explica cómo lo has hecho

es posible detectar habilidades de las categorías O_1, O_3 y O_6. Se planteó el ítem 8 utilizando portavariable en forma de $\square$ y el ítem 15 utilizando la "x" como incógnita.

En el Pretest, dos alumnos no resuelven la cuestión, pero ambos lo hacen en el Postest.

En el ítem 8, los alumnos que lo resuelven lo hacen en general bien (excepto aquellos que tienen asignado los números 12 y 20) cuyos resultados no se obtienen por operaciones habituales de los datos proporcionados.

Nº Al.	(8Pr1)
12	10
20	9

En este ítem no se puede detectar nada especial, ya que al no solicitar que explicasen el proceso seguido, los alumnos se limitaron a poner un dato numérico en $\square$ o sea la habilidad descrita en nuestro trabajo en O_3 (3.1b, anexo 1), sustitución numérica. Ninguno intentó hacer nada especial al tratarse de una sencilla multiplicación. Sin embargo, en el ítem 15 del Postest sí se solicitaba que explicasen el proceso de resolución y de los 31 alumnos, 10 han explicitado el uso del "tanteo", aunque las expresiones de otros (alumno nº 10) indican también un "tanteo" buscando un número que al multiplicarlo por 3 le diera un 1 en la última cifra. 7", que se podría incluir en la categoría O_3 y en el descriptor 3.3 (anexo 1). Asimismo en el alumno nº 20 cuya resolución es " 13 x 7 = 91… la x vale 7 porque 13·7 = 91", se intuye que hay tanteo.

La alumna nº 31 expresa sencillamente que obtuvo el resultado "multiplicando": 13·7 = 91.

Por otra parte se da la situación contraria, o sea que un alumno entiende por "tanteo" lo que realmente no lo es: es el caso del alumno nº 19: "91/13= x; x = 7…. tanteo".

Hay otro grupo que obtiene la "x" dividiendo, o sea por uso de la operación inversa mediante transposición de términos: 91: 13 = 7, es el caso de los alumnos 2, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 18, 19 (que lo ha llamado tanteo como se señaló antes), 23, 25 28 y 30: hay una expresión literal del alumno nº 2 que es: "operando a un lado las x y al otro lado lo demás…Ecuación". Se observa que no tiene claro lo que es operar con la "x" (O_3, 3.2 b, anexo 1). Observamos en el caso del alumno nº 19 que considera "tanteo" lo que realmente no es, y por eso realiza la comprobación para ver si se verifica la ecuación.

También se observa algo no habitual y es la comprobación de los resultados (O_6, anexo 1) que la han realizado 16 de los 27 alumnos que contestaron correctamente.

Consideramos que debe tenerse en cuenta, desde el punto de vista de la instrucción en el aula, la expresión incorrecta utilizada por el alumno nº 25, cuando en "13·x = 91" manifiesta que: "el 13 como estaba multiplicando lo pasé dividiendo por 91", no dividiendo a 91.

Los resultados del par de **ítemes 20 de Pr1:** "¿Cómo expresarías, con signos, letras y números: La suma de un número más el doble del mismo número ¿es igual a 24?" **y 9 de Po2:** "La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 36, ¿cuál es el número?, muestran similitud. Esto significa que la habilidad C_3 (anexo 2) de conversión de registros, desde el lenguaje habitual al lenguaje algebraico no se ha desarrollado positivamente. Es también necesario indicar que en el primero (20) sólo se solicita plantear la ecuación y en el segundo (9) se añade, resolverla.

El número de alumnos que no abordan los ítems es 1 en el Pretest y 2 en el Postest. De ellos el alumno nº 12 es el que lo deja ambas veces sin abordar y la otra es la alumna nº 10 que lo había resuelto correctamente en Pr1.

Mostramos, a modo de ejemplo, un esquema de la situación del ítem 20:

Nº alumno/a	Expresiones correctas	Expresiones erróneas	Nº alumno/a
1, 2, 21, 25, 29	a + 2 a = 24	a + b + 2 a + b = 24	22
23	b + 2 b = 24	2 a + b = 24	15
3, 4, 17, 27, 28, 31	x + 2 x = 24	x + y 2 = 24	8
13	x + x. 2 = 24	b + b^2	11
26	8 + 16 = 24	x + 10 = 24	20
5	8 + (2·8) = 24	6 + 6 = 12; 2·12= 24	9
16	8+(2·8)=8 + 16=24	3 + 3 + 6 = 24	14
6	+ … + 2 …. = 24	6 + 6 + 12 + 12 = 24	19
7	△ + 2 △ = 24	12 + 12 = 24	24, 30
		12	10
		4 + 2·10 = 24	18

En general hay algo evidente y es que los alumnos tienen predisposición a encontrar un número concreto que verifique la igualdad propuesta, más que a plantear la ecuación, o sea a ver la incógnita como una respuesta, como cantidad numérica. No en vano del ítem del Pretest, del que se pedía sólo el planteamiento, de los 30 alumnos que se enfrentaron a él, 10 alumnos dieron valores numéricos (7 erróneos y 3 correctos).

Siguiendo con el análisis del ítem 20 del Pr1, se detecta asimismo que a veces intentan descomponer 24 en sumandos o en otras expresiones al margen del enunciado propuesto, por ejemplo 12 +12= 24 (alumnos números 24 y 30) y 6 + 6 = 12, 2·12 = 24 (alumno número 9).

Hay casos (alumno número 14 p. ej: "3 + 3 + 6 = 24"; alumno número 19: "6 + 6 + 12 + 12 = 24"), donde no se considera el signo "="

Aparecen como equivalencia y se utiliza erróneamente (alumno nº 6 o alumno nº 7). Asimismo registros personales como son "…" o "△" para expresar la incógnita.

Se detecta un problema de terminología al confundir "cuadrado" con "doble" el alumno nº 11.

Los resultados obtenidos de los ítemes **9 de Pr1:** "Halla el cuadrito vacío en $\square$ x 3 = 270" **y 8 Po2:** "3 pelotas valen 270 pesetas, ¿cuánto vale cada una?", muestran gran diferencia entre el Pretest y el Postest, hecho esperado al haber utilizado en el ítem 9 de Pretest un "portavariable" y en el Postest una situación contextualizada con vocabulario más significativo y cercano para los alumnos.

Aparecen en el Pretest expresiones acompañadas del signo "+" no necesario, así como un "0" a la izquierda, escrito por el alumno nº 25, que da como resultado 090.

En el Postet (ítem 8) se observa el uso de la incógnita, siempre la x, y el planteo de la ecuación con corrección, demostrando así su habilidad para la conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico (C_3).

Se observa también que algunos alumnos (1, 3, 4, 17, 19, 24 y 28) indican el significado de la incógnita.

Nº Al.	(9 Pr1)	(8 Po2)
1	Sin hacer	x = precio de una pelota 3 x = 270 270·3 = x 270 |3 00 90 90 ptas cuesta una pelota
3	40	3 pelotas 270 ptas. 1 pelota x ptas. $x = \frac{270 \cdot 1}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas aplicando la regla
4	90	3 pelotas 270 ptas 1 pelota x ptas $\frac{1 \cdot 270}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas x = 90 ptas cada pelota
17	Sin hacer	3 pelotas $\longrightarrow$ 270 ptas 1 pelota $\longrightarrow$ x ptas $\frac{270 \cdot 1}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas
19	90	3 pelotas : 270 1 pelota : x $x = \frac{270}{3}$; x = 90 ptas 270 |3 00 90
24	+ 90	3 x = 270 270 : 3 = 90 x = pelotas 90 pts = a una x 90 = 1 x
28	90	x = precio cada pelota 3 x = 270 x = 270 / 3 = 90 ptas

También aparece la aplicación de la proporcionalidad (3, 4, 15, 17 y 19).

Nº Al.	(9 Pr1)	(8 Po2)
3	40	3 pelotas 270 ptas. 1 pelota x ptas. $x = \frac{270\cdot 1}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas aplicando la regla
4	90	3 pelotas 270 ptas 1 pelota x ptas $\frac{1\cdot 270}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas x = 90 ptas cada pelota
15	90	3 —— 270 1 —— x $x = \frac{3}{1}\ \frac{270}{x}$ $x = \frac{270\cdot 1}{3} = \boxed{90 \text{ ptas}}$
17	Sin hacer	3 pelotas $\longrightarrow$ 270 ptas 1 pelota $\longrightarrow$ x ptas $\frac{270\cdot 1}{3} = \frac{270}{3} = 90$ ptas
19	90	3 pelotas :270 1 pelota : x $x = \frac{270}{3}$; x = 90 ptas $\begin{array}{r\|l} 270 & 3 \\ \hline 00 & 90 \end{array}$

En la operatividad (O_1, anexo 1) no aparecen transformaciones equivalentes en los dos miembros de la igualdad.

Un porcentaje del 54 % (5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 25, 26, 29 y 30) resuelve numéricamente (O_3, anexo 1) la situación mediante una división, o sea, haciendo transposición de términos.

Nº Al.	(9 Pr1)	(8 Po2)
5	90	270 ⌊ 3 00 90 ptas cada una
6	Sin hacer	270 : 3 = 90 ptas cada pelota
7	90	3 pelotas 270 pts cada una 270 : 3 = 90 pts cada pelota
8	90	270 : 3 = 90 ptas cada una
9	90	90 ptas.
10	90	270 ⌊ 3 00 90 ptas cada una
12	30	270 ⌊ 3 00 90 90 ptas cada pelota
13	90	270 ⌊ 3 00 90 90 pesetas vale cada pelota
14	90	$\frac{270}{3}$ = 90 ptas vale cada pelota
16	90	270 ⌊ 3 00 90 pts cada pelota
18	90	270 3 00 $\boxed{90}$ pesetas cada una $\boxed{270 : 3 = 90}$
20	90	3 → 270 ⌊ 3 00 90 cada una
21	90	270 ⌊ 3 00 90 ptas vale cada pelota.
25	090	3 pelotas = 270 ptas 270 ⌊ 3 00 $\boxed{\text{90 ptas vale 1 pelota}}$
26	90	270 ⌊ 3 00 90 pts cada pelota.
29	+ 90	270 : 3 = 90 ptas cada pelota
30	90	270 ⌊ 3 00 90 pts c/u

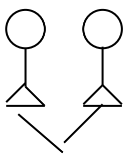
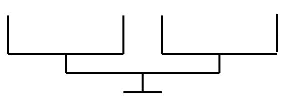
Otro hecho que distingue los resultados de ambos ítemes es la presencia de la unidad (peseta) en los resultados y especificando en ocasiones cada uno, al contrario de la situación en el Pretest en el que no aparece nunca la unidad.

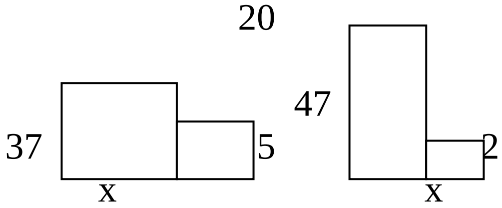
La alumna nº 31 no resolvió este ítem en el Pretest y en el Postest sí lo hizo, pero olvidó poner la incógnita: 3 = 270 ……. 270 : 3 = 90 ptas.

En los ítems **45 de Pr2:** "En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas?" **y el 7 de Po2:** "En una empresa el `presidente tiene 37 años y el dueño 46. La suma de las edades del presidente y sus 5 empleados (todos de la misma edad) es igual a la del dueño con la de dos de sus empleados, ¿cuál es la edad de cada uno de sus empleados?", las respuestas son muy variadas.

Es evidente que la compresión del signo igual (C_7) no es la adecuada. Por ejemplo 73 = 64 (alumno nº 2), y, 5x + 37 = 2x + 46 = 5x – 2x = 3x (alumno nº 3).

Estos ítems son de los pocos donde los alumnos explicitan el sistema de representación de equilibrio de la balanza, alumno nº 5 y el sistema de representación visual/geométrico, alumno nº 7 y. Este último como uno de los intentos de resolución entre otros de carácter netamente numérico.

Nº Al.	(45 Pr2)	(7 Po2)
5	 37 46 3 años cada una 15 + 6 52 52 9 9 9 9 9	x = edad de1 empleado 37 + 5·3 = 49 + 2·3 37 + 5x = 46 + 2x  3x = 9 x = 3

Nº Al.	**(45 Pr2)**	(7 Po2)
7	11 +37 x5 83 55 83: 5 = 1	x= edad de un empleado 37 + 5 x = 46 + 2 x *Observaciones: Realizó varios intentos* 24 24 x5 +2 13 + 12 + 24 = 36 110 48 36:2 = 18 +37 147 28 28 20 x5 x2 x5 140 46 100 37 177 37 83 | 7 + 46 130 10 83 83 | 3 23 27 20 

El alumno número 5 utiliza registros personales específicos como son dibujos para representar a la "Madre y al Padre" del enunciado del problema y en el Postest usa el sistema de representación de equilibrio de la balanza pero sólo hace la representación de la balanza sin hacer la aplicación a ella. De la representación de la ecuación. el alumno nº 18 pone el nombre de "balanza" pero ni siquiera la dibuja.

(45 Pr2)	(7Po2)
Sin hacer	$37 + 5\,x = 46 + 2\,x$ 37 46 $37 + 5\cdot 3 = 46 + 2\cdot 3$ $\underline{+15}$ $\underline{+\ 6}$ x=3 52 52 (balanza)

Las conversiones de registro se realizan en su mayoría adecuadamente (C_3.anexo 2).

Se aprecia un mal uso del paréntesis que implica confusión entre el "-" propio de un término algebraico y "-" signo de la operación de restar (nº 6).

(45 Pr2)	(7 Po2)
Madre 37 37 + 46 = 83 Padre 46 83 : 5 = 16 es la edad de sus hijas	x edad de empleados 37 + 46 + 5x = 46 + 2x 5x (-2x) = 46 – 37 – 46 3 x = 37 x = 12 edad de cada uno de sus empleados x = edad cada uno de sus empleados 37 + 5x = 46 + 2x 5x (-2x) = 46 – 37 3x = 9 x = 3 edad de cada uno de sus empleados.

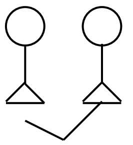
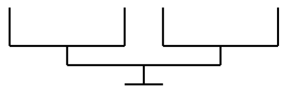
En la operatoria hay confusión entre las potencias y productos (nº 26).

Nº Al.	(45 Pr2)	(7 Po2)
26	Madre = 37 años Padre = 46 Hijitas (15) =	Presidente 37 dueño 46 $37 + x^5 = 46 + x^2$ edad de los empleados x

Se observa también "tanteo" explícito (alumnos 8 y 14),

Nº Al.	(45 Pr2)	(7 Po2)
8	Sin hacer	37 + 5·x = 46 + 2x x = 3 tanteo
14	23 años tiene cada una	37 + 5·x = 46 + 2x = 52 x = 3 por tanteo

o implícito (alumnos 5, 13, 18 y 30).

Nº Al.	(45 Pr2)	(7 Po2)
5	 37 46 3 años cada una 15 6 52 52 9 9 9 9 9	x = edad de1 empleado 37 + 5·3 = 49 + 2·3 37 + 5x = 46 + 2x 3x = 9 x = 3  13 madre 46 padre 37 + x·5 = 46 + x·2 37 + 3·5 = 46 + 3·2 37 + 15 = 46 + 6 x = 3 52 = 52 18 Sin hacer 37 + 5 x = 46 + 2 x 37 46 37 + 5·3 = 46 + 2·3 +15 + 6 x=3 52 52 (balanza)
30	46 37 9 ⌊2 - 37 +09 10 4'5 09 46 0 cada niña tiene 4'5 años. " " " cuatro años y medio	x edad de los empleados 37 + 5x = 46 + 2x 37 + 5.3 = 46 + 2.3

La resolución de la ecuación de forma "a x + b = c x + d no ha sido correcta. Se realizan transformaciones en los dos miembros de la igualdad, que no son equivalentes. Es evidente que al tener que operar con la incógnita no lo saben hacer. Un alumno (nº 22) intentó hacer el planteamiento con dos incógnitas sin darse cuenta de que las incógnitas que designó no actuaban como tales en el ejercicio concreto.

Nº Al.	(45 Pr2)	(7 Po2)
22	madre = 37 años padre = 46 ” hijas = n ”	37 = y 46 = x y + 5 a = x + 2 a empleados (edad) = a

En general se puede decir que el procedimiento utilizado en la resolución de estos ítemes es el de la transposición de términos.

Al comparar las respuestas a los **ítems 16 de Pr1:** “Halla el valor de la “x” en: 8 x + 10 = 4 x + 2”, **4 del Pr2:** “Halla el valor de la “x” en: 8x + 3 = 5 x + 9” **y el 5 del Po2:** “Resuelve: 8x + 3 = 5 x + 9. Explica cómo lo has hecho”, se observa inmediatamente que en el primer caso (16 de Pr1) dejaron de abordar el ítem 26 alumnos, en el segundo (4 de Pr2) dieciocho y sin embargo en el Postest sólo dejaron de hacerlo dos alumnos, luego parece evidente la influencia de la instrucción.

En relación con el ítem 4 del Pr2, por las soluciones que presentan es también evidente que proceden de “tanteo” (alumnos 6, 12, 13,14,7, 21 y 25, aun cuando en algunos casos no esté bien realizado y el resultado sea incorrecto.

Es singular la aparición de signos negativos (alumnos 17, 20, 21 y 25) en las soluciones, así como la forma de despejar la incógnita del alumno nº 23:

$$x = \frac{5+9-3}{8}$$

de la que se deduce que ha ido directamente a hallar el valor 8 de la “x” del término “8x” y ha operado con el resto de los coeficientes de la ecuación.

La situación en el ítem 5 del Postest es diferente. En cualquier caso sigue utilizándose el tanteo explícito (1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 22, 26, 29 y 30) e implícito (13, 18, 19 y 21).

También es destacable la observación del alumno nº 11 que relaciona dos ítems que son iguales con expresiones distintas.

En este ejercicio también aparecen los sistemas de representación que se han planteado nuevos en la instrucción: "sistema de representación del equilibrio de la balanza" y "sistema de representación visual/geométrico", aunque el alumno nº 5 manifiesta su resolución con el sistema de representación del equilibrio de la balanza y lo único que hace con ella es poner el dibujo y su expresión manifiesta una mezcla de tanteo y resolución mediante transposición de términos implícita.

El alumno nº 18 manifiesta que ha usado la balanza y sólo ha hecho tanteo.

El sistema de representación visual/geométrico es utilizado por el alumno nº 20. Sólo hace la conversión de registros (C_3, anexo 2) pero no aplica la sintaxis específica del mismo ni la de cualquier otro sistema para resolverla.

Aparecen expresiones que manifiestan no estar comprendida la estructura de una ecuación y el reconocimiento de los miembros primero y segundo de la misma, al utilizar el signo "=" de manera inadecuada (nºs 7, 21, 24 y 29).

Se observa también un mal uso del paréntesis al hacer la transposición de términos: $8x + 3 = 5x + 9$

$$8x(-5x) = 9 - 3$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

La solución la buscan con la transposición de términos; en ningún caso hacen uso de la ley de monotonía ni de la suma ni del producto. No parece que haya intencionalidad de dejar los términos con coeficiente con valor absoluto mayor como positivos, sino al azar y así surge el problema del alumno nº 25 con la operatividad con números enteros. La transposición la realizan unos haciendo secuencias en las que en cada una de ellas trasponen un término o una sola transformación de la ecuación en la que hacen la transposición completa.

Es también peculiar que no siempre agrupen los términos que contienen la incógnita en el primer miembro, que es como habitualmente proceden los alumnos.

Por último, al reflexionar acerca de los resultados de los **ítemes 25 del Pr1:** "El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)", y **1 Po2:** "Una persona ahorra cada día 230 pesetas, ¿cuánto ha ahorrado en dos semanas?", cuyo proceso de resolución es el mismo, aunque en el primer caso sólo se pide la expresión de una situación y en el segundo se cuantifica la misma en contexto similar, los resultados son buenos y muestran la capacidad de los alumnos para comprender situaciones sencillas contextualizadas, en especial cuando todos los datos son numéricos.

Aquí se muestra el planteamiento de proporcionalidad de la forma habitual como aparece en los libros de texto, como pares de magnitudes homogéneas en dos columnas, tanto en el Prestest como en el Postest.

Se pueden considerar registros personales, quizás derivados de una metodología concreta de los números enteros, la utilización de paréntesis innecesarios para las cantidades 135 y 14, e incluso dando el resultado del número de periódicos con el valor absoluto, adjuntándole el signo "mas". Asimismo el registro especial utilizado por el alumno nº 2, el de la "x" como la representación de lo que ha ahorrado en <u>dos</u> días, le ha llevado a cometer error.

Hay otra incorrección de operatividad básica cometida por los alumnos nº 3 (Pr1):

135 periódicos

x 14

540

y nº 22 (Po2): 1día = 230 pts

2 semanas (14 días) = pts

230

x 14

920

y es la de multiplicar sólo las cifras de las unidades del multiplicando por todas las del multiplicador, hecho que parece se podría superar con la reflexión acerca del resultado obtenido, o sea ver si tiene "sentido" la respuesta con los datos y enunciado general del problema. También aparece la semana considerada como 15 días y no 14 como explicita el problema (nº 11): 230

x 15

1150

230

3.450 ptas que ha ahorrado en dos semanas

Sin embargo, el "tachado" que realizan algunos alumnos de sus propias operaciones hay que considerarlo positivo porque supone una reflexión sobre su propio trabajo.

A modo de conclusión general, señalamos en relación con uno de los objetivos que nos planteábamos "Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional y procedimental) más relevantes del pensamiento algebraico con alumnos de 12-14 años", que la presencia del sistema de representación formal algebraico, con un nuevo sistema de representación visual/ geométrico y el sistema de representación visual físico de la balanza, como sistemas autosuficientes para el tratamiento inicial del álgebra, implementados a través de diseños instruccionales innovadores (DISEC para ecuaciones), permite analizar las dificultades y potencialidades de estos sistemas de representación para el lenguaje algebraico y profundizar en habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que los alumnos ponen en juego al realizar la operatividad básica (en especial el uso de los paréntesis y la sustitución formal) y detectar y analizar los problemas de conversión entre los diferentes registros.

Finalmente queremos resaltar que un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del álgebra como lenguaje, donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante, constituye el enfoque didáctico más coherente para la iniciación al lenguaje algebraico en el contexto escolar.

Referencias bibliográficas

BISQUERRA, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa.* Guía práctica. CEAC. Barcelona.

BLANCO, A. y ANGUERA, M. T. (1991). Sistemas de Codificación. *En metodología observacional en la Investigación Psicológica*. Anguera (Ed.). Vol. I. PPU. Barcelona.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'énseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-31.

FLANDERS, N. (1977). *Análisis de la Interacción Didáctica*. Anaya. Madrid.

HERSCOVICS, N., y LINCHEVSKI, L. (1991). Pre-algebraic thinking: Range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction. En Furinghetti, E (Ed.). *Proceedings PME XV*. Vol. 2, 173-180. Genova, Italia.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.). *Conceptual* *and procedural knowledge: The case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates. New York.

KIERAN, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York. 320-419

LINCHEVSKI, L. y HERSCOVICS, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknow in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30 (1), 39-65.

PALAREA, M.M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna. Sin publicar.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998). Operational and conceptual abilities in the learning of algebraic language. A case study. *Proceedings PME 22*. Vol. 3, 327-334. Stellenbosh, South Africa.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*. Las Palmas de Gran Canaria. España. Pendiente de Publicación.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico. Elementos organizadores de una investigación. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 145-171. La Laguna. España.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of Mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 22 (1), 1-36.

Anexo 1

CATEGORÍAS	DESCRIPTORES
O_1 Uso de las reglas de transformación.	**O_1** 1.1) Transformaciones en cada miembro de la igualdad independientemente. 1.2) Transformaciones equivalentes en los dos miembros de la igualdad.
O_2 Procedimientos de resolución en “x + b = c”.	**O_2** 2.1) Resolución numérica a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 2.2) Operación inversa (+). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 2.3) Otros métodos.
O_3 Procedimientos de resolución en “a x = b”.	**O_3** 3.1) Resolución numérica. a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 3.2) Operación inversa (x). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 3.3) Otros métodos.
O_4 Procedimientos de resolución en “ax + b = cx + d”.	**O_4** 4.1) Resolución numérica. a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 4.2) Operación inversa (+, .). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 4.3) Operando con la incógnita. 4.4) Otros métodos.
O_5 Signos negativos en los coeficientes de la ecuación.	**O_5** Interpretaciones del coeficiente negativo.
O_6 Comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas).	**O_6** Reconocimiento de la equivalencia de las dos cantidades.

Anexo 2

CATEGORÍAS	DESCRIPTORES
C_1 Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico. **C_2** Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza. **C_3** Conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico. **C_4** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico. **C_5** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza. **C_6** Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes. **C_7** Interpretación y comprensión del signo "=". Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.	**C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,y C_6** • Utilización de registros personales (códigos) o numéricos. • Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. • Identificación y notación de la incógnita en los diferentes registros. • Uso de letras para representar la incógnita. • La incógnita vista como una respuesta (Cantidad numérica, cantidad de una magnitud). • Planteamiento de la ecuación.**$_7$** • La ecuación vista como una totalidad o como una yuxtaposición de partes no equivalentes. • Representación del signo "=". • Conocimiento del signo "=" como equivalencia. • Conocimiento de la ecuación como colección de términos "equivalentes". • El signo "=" visto como una "operación" o como "una relación".