FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
ISBN: 84-931584-2-9

ALGEBRA PARA TODOS. ANÁLISIS DE UN MATERIAL DIDÁCTICO: "PUZZLE ALGEBRAICO"

Martín Manuel Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

La diversidad cognitiva en el aula originada por las diferencias individuales del alumnado supone un reto al profesorado que aborda el tratamiento didáctico del Lenguaje Algebraico como una parte del currículo común y básico de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

En la actualidad uno encuentra disponibles en el mercado, en las Escuelas, en los centros de Enseñanza Secundaria, en los Centros de Profesores, decenas de materiales educativos diseñados para facilitar la enseñanza de las Matemáticas, pero muchas son las preguntas, aún hoy sin respuesta, que se hace el profesorado acerca del uso de los materiales concretos con fines didácticos en clase de Matemáticas.

En este trabajo se reflexiona sobre el significado de "Álgebra para todos" y se presenta un nuevo material denominado: "Puzzle Algebraico"; se formula, además, una propuesta de implementación de este material en los procesos enseñanza/aprendizaje del Álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y se lo relaciona, finalmente, con el tratamiento de la diversidad del aula.

Abstract

The diversity cognitive in the classroom originated by the individual differences of the pupil supposes a challenge to the teaching profession that approaches the didactic treatment of the Algebraic Language as a part of the common and basic curriculum of Mathematics in the Obligatory Secondary Education.

At the present time one finds available in the market, in the Schools, in the Secondary Education centers, in the Centers of Teachers, dozens of educational materials designed to facilitate the teaching of Mathematics, but many are the questions, still today without answer, that one makes the teaching profession about the use of the concrete materials with didactic purposes in classroom of Mathematics.

In this work it is meditated on the meaning of "Algebra for all" and a denominated novel material is presented: "Algebraic Puzzle", it is formulated, also, a proposal of implementation of this material in the teaching/learning processes of the Algebra in the Obligatory Secondary

Education and it is related, finally, with the treatment of the diversity in the classroom.

Introducción

Las representaciones externas (representaciones semióticas) constituyen un tema de relevante actualidad, tanto en el ámbito curricular como de investigación. Así, por ejemplo, los Estándares Curriculares (NCTM, 1989), proponen un desarrollo de los contenidos de las Matemáticas de las enseñanzas no universitarias organizado en torno a cuatro ejes: Matemáticas como resolución de problemas; Matemáticas como comunicación; Matemáticas como razonamiento; y Conexiones matemáticas, en los que el uso de representaciones semióticas múltiples constituye una recomendación a tener en cuenta en los cuatro ejes anteriores, pero especialmente en los de Comunicación y Conexiones, en los términos siguientes: "*Los estudios de Matemáticas deben dar oportunidad a los estudiantes para que puedan modelizar situaciones usando representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas*" (NCTM, 1991, pp. 75, 83, y s.s.).

Análogamente los nuevos Estándares 2000 (NCTM, 2000), además de mantener los cuatro ejes anteriores (Resolución de problemas; Comunicación; Razonamiento y prueba; y Conexiones), añaden un nuevo eje: Representación.

En concreto el Estándar número 10 señala:

"Los programas de instrucción en Matemáticas desde Educación Infantil hasta Bachillerato deben permitir a todos los estudiantes:

- Crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.

- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas en la resolución de problemas.

- *Usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos sociales y matemáticos"* (NCTM, 2000, pp. 67, 136, 206, 280 y 360).

Nuestra actual Reforma Educativa (MEC, 1989) también destaca la utilización de diferentes representaciones semióticas para fomentar el conocimiento matemático de todos los estudiantes. Los contenidos de las Matemáticas escolares en el currículo de la ESO se organizan en cinco bloques que se presentan agrupados en tres ámbitos separados: hechos, conceptos y principios; procedimientos, que se ubican en torno a: utilización de distintos lenguajes, algoritmos y destrezas, y, estrategias generales; y actitudes, valores y normas, que a su vez presentan dos categorías: apreciación de las Matemáticas y organización y hábitos de trabajo.

Por ejemplo, en relación con el uso de diferentes sistemas de representación, además de situarlos en los contenidos de procedimiento, en el último curso de la Secundaria Obligatoria los alumnos tienen dos opciones en el Área de Matemáticas: "A" y "B". Los contenidos son los mismos, pero cambia el enfoque y en consecuencia, la metodología. La opción A, tienen un carácter terminal y está orientada al desarrollo de capacidades relacionadas con la aplicación de las Matemáticas para obtener y transmitir información, a la posibilidad de utilizar lo aprendido en un conjunto amplio y diverso de ocasiones, a la puesta en práctica de estrategias personales para analizar y resolver problemas, a interpretar informaciones diversas y argumentaciones que utilicen conceptos, términos, representaciones y otros elementos relacionados con las Matemáticas. En general, presupone la limitación del uso de representaciones simbólicas, de formalismos no estrictamente necesarios. La opción B, se caracteriza por una Matemática que pone mayor peso en los aspectos formales: asignar mayor importancia a las capacidades relacionadas con el empleo de lenguajes simbólicos y representaciones formales, así como la tendencia a una precisión más alta en la utilización de conceptos, términos y cantidades.

De igual manera, las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981), que se ha desarrollado con profusión en estos últimos veinte años. Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1985).

El papel de las Representaciones Semióticas Múltiples, en la formación y comprensión de conceptos, ha sido destacado por diferentes investigadores; en este sentido, Janvier (1987), Hiebert (1988), Hiebert y Carpenter (1992), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), Rico, Castro y Romero (1996), Palarea y Socas (1995 y 1998), Socas y Palarea (1996), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento matemático.

En este trabajo tomaremos como hilo conductor las representaciones externas y se comentará el significado de “Álgebra para todos”, además, de presentar un nuevo material denominado “Puzzle Algebraico”. Se aportan ideas para la implementación de este material en los procesos de enseñanza/aprendizaje del Álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, y para relacionarlo con algunos aspectos del tratamiento de la diversidad del aula en una clase de Matemáticas.

El desarrollo se hará en los cinco apartados siguientes: los objetos matemáticos y los procesos de “culturización de las Matemáticas” y “matematización de la cultura”; Matemáticas para todos. El enfoque realista; materiales didácticos como representaciones semióticas; material didáctico: “Puzzle Algebraico”; actividades con el Puzzle Algebraico: números enteros y ecuaciones de segundo grado; y consideraciones finales.

Los objetos matemáticos y los procesos de "Culturización de las Matemáticas" y "Matematización de la cultura"

El aprendizaje escolar en Matemática podemos considerarlo como un prolongado proceso de asimilación y reconstrucción por parte del alumnado de ciertos aspectos de la cultura matemática. La práctica docente en Matemática se plantea entonces como la búsqueda de modos de actuación que faciliten y provoquen en el alumno el proceso de asimilación y reconstrucción de diferentes aspectos de la cultura matemática. En este sentido hemos de considerar las Matemáticas escolares como elemento de cultura, y es una referencia obligada en el estudio y determinación de las finalidades de la educación matemática. Su carácter histórico y su consideración como un sistema de prácticas y de realizaciones conceptuales, ligadas a un contexto social e histórico concreto, son elementos indispensables en este estudio. La enseñanza de la Matemática forma parte del sistema educativo obligatorio de cualquier país, que es el encargado de transmitir la herencia cultural básica de cada sociedad. Al ser la Matemática una disciplina del currículo, éste no puede ser ajeno o contrapuesto a los valores de esa cultura y sociedad.

Nos encontramos entonces con dos procesos claramente diferenciados que caracterizamos como "culturización matemática", entendida como el proceso de construcción o descubrimiento de los objetos matemáticos que dan origen al saber matemático sabio o enciclopédico; y "matematización de la cultura", entendida como el proceso de enseñanza-aprendizaje que se debe generar al situar las Matemáticas como un conocimiento cultural para todos los ciudadanos, al menos hasta los dieciséis años, y que se caracteriza por el saber matemático a enseñar.

Destacamos algunas características de estos procesos:

- Los objetos de las Matemáticas se “construyen” o se “descubren” con los recursos que aporta cada contexto cultural en términos de lenguajes, valores y signos.
- Los objetos matemáticos sufren en su construcción o descubrimiento un proceso de “fosilización” en el que pierden las referencias a su evolución, a su historia, e incluso a sus relaciones internas (descontextualización) y se convierten en meros signos.
- El sistema educativo retoma estos objetos fosilizados de la cultura matemática, convertidos en meros signos para recorrer un camino inverso, es decir revertirlos de nuevo, pero de forma generalizada, a la cultura ciudadana.

El proceso de matematización de la cultura devuelve a la comunidad unas Matemáticas que no son de ninguna manera ni propiedad, ni exclusividad de un sector o grupo cultural, situación que sí aparece en el proceso de culturización matemática; es por ello, que la función tradicional asignada a las Matemáticas en el Sistema Educativo se modifica profundamente.

En resumen, sucede entonces que el proceso original de “Culturización de las Matemáticas”, tiene que recorrer en los sistemas educativos un camino inverso con la intención de facilitar una “Matematización de la cultura”, en general, con la buena intención de promover el uso correcto de sus objetos y de generar o descubrir nuevos objetos.

El conjunto de transformaciones que padece los objetos de la “Culturización de las Matemáticas” (saber sabio) hasta convertirse en objetos de la “matematización de la cultura” (saber a enseñar), es de lo que se ocupa la “Transposición Didáctica” (Chevallard, 1991).

En este trabajo diferenciamos los objetos pertenecientes a uno u otro proceso, aunque en general nos vamos a referir a la “matematización de la cultura”.

A modo de ejemplo, de lo anteriormente expuesto, podemos señalar que la Historia de la Matemática, no es en sí misma Didáctica, y debe entenderse como la génesis de un proceso selectivo denominado “culturización de las Matemáticas” en el que individuos privilegiados generan este proceso (sentido histórico), mientras que cuando hablamos de la “matematización de la cultura” (saber a enseñar), este proceso no es selectivo, sino que es para todos y cada uno de los individuos (sentido didáctico).

Matemáticas para todos. El enfoque realista

La Reforma Educativa en los niveles no universitarios que se lleva a cabo a partir del curso 1989-90 (MEC, 1989) se sustenta en el equilibrio entre dos principios básicos: comprensividad (currículo básico y común, retraso de la selección y especialización, extensión de la obligatoriedad, compensación de desigualdades y promoción de la igualdad de oportunidades educativas), y atención a la diversidad (medidas ordinarias y extraordinarias de atención y respuesta a la diversidad de los alumnos en los centros).

El currículo de Matemáticas de la escuela comprensiva se basa en la idea de un currículo general e inclusivo para todos los alumnos, y la atención a la diversidad deberá contemplar, simultáneamente, las capacidades cognitivas y los conocimientos matemáticos que tiene en ese momento el alumnado concreto, además de sus intereses y motivaciones. Tener esto en cuenta supone adaptar las estrategias docentes y actuaciones educativas más adecuadas, en cada caso.

En definitiva, estos principios se concretan entre un currículo común de Matemáticas que supone un conocimiento de acceso general y un currículo diversificado de Matemáticas que supone un conocimiento de acceso diferencial.

La preocupación por organizar un currículo de Matemáticas escolares que responda a las necesidades de la mayoría y respete las características individuales no es una cuestión reciente. La recomendación “Matemática para todos”, tiene su origen en el movimiento de reformas para la enseñanza de las Matemáticas emprendido por los Estados Unidos y Gran Bretaña en los años cincuenta, y que se extiende progresivamente a los demás países occidentales. Esta política activa de reformas se basaba en determinados objetivos generales, uno de los cuales consistía en aumentar el nivel general de la educación de la mayoría, centrando la formación general en las Ciencias Naturales y en las Matemáticas (Howson y otros, 1981).

El papel tradicional de las Matemáticas aparece cuestionado como instrumento para legitimar estatus sociales que establecen divisiones entre el trabajo intelectual y manual, y, como consecuencia, emerge la función formadora de la Matemática como un conocimiento básico compartido, al menos hasta los dieciséis años. Es en este contexto donde surgió el movimiento “Matemáticas para todos”.

En nuestro país, con cierto retraso, el currículo de Matemáticas incorpora las “Matemáticas para todos” como una de sus ideas básicas, es decir, extiende la enseñanza de las Matemáticas al conjunto de la población hasta los dieciséis años, y esto genera un choque frontal con la concepción anterior de una matemática escolar minoritaria.

Las preguntas que surgen son inevitables: ¿Qué Matemática debemos seleccionar que sirva para todos?, pero, ¿Son éstas, verdaderas Matemáticas?

El movimiento las “Matemáticas para todos” propone un proceso de matematización de la cultura que se concibe como unas Matemáticas que no son propiedad, prerrogativa o dominio exclusivo de un grupo cultural, como se da en el proceso de culturización matemática. Esto supone tanto un cambio profundo de la función asignada a las Matemáticas en el sistema educativo, como un cambio profundo también, en las relaciones de interacción en el aula.

En resumen, la "Matemática para todos" es un principio básico en los diferentes estándares del NCTM (1989, 91 y 2000), y se formula bajo el llamado "principio de equidad" que debe orientar las Matemáticas escolares.

En este momento, la implementación de un currículo común y básico que respete la diversidad de los alumnos es para nosotros de sumo interés porque es ésa la naturaleza del currículum de Matemáticas que, como profesores, tenemos que implementar en nuestro sistema educativo.

El profesorado se encuentra en estos momentos con cambios curriculares que le enfrenta a nuevas tareas, entre otras, las que suponen un currículo básico y abierto en Matemáticas que obliga a valorar y elegir entre diversas alternativas pedagógicas la más adecuada a su realidad.

En términos más concretos la propuesta curricular en Matemáticas plantea grandes desafíos a los programas de Matemáticas.

Con referencia al alumnado: "todos" estudiarán matemáticas al menos hasta los dieciséis años, y "todos" deberán aprender a "hacer" Matemáticas y comprobar que "las Matemáticas tienen sentido".

Esto choca frontalmente con los planteamientos de los profesores de Matemáticas sobre los programas anteriores, es decir, lo que se propone es considerablemente distinto de la práctica habitual en Matemáticas. En el modelo actual prima el conocimiento sobre las Matemáticas. Ahora se propone el "hacer" Matemáticas; obviamente, la diferencia es notable.

De otra manera: se propone que la comprensión matemática no se refiera a la cantidad de conocimientos de Matemáticas que tiene el alumno sino a la competencia del razonamiento matemático desarrollado por este.

Si tomamos el símil del fútbol, vemos claramente que no es lo mismo saber sobre fútbol que hacer fútbol, claro está que es importante aprender algunos conceptos matemáticos (o aprender algunas reglas del fútbol como el "offside" o el "libre indirecto") y practicar algunos procedimientos para adquirir algunas destrezas (o practicar el manejo del balón con la pierna izquierda o el saque de esquina), pero también es importante que todos los alumnos tengan la oportunidad de resolver problemas (actuar jugando partidos de fútbol) según su nivel de aptitud.

La actividad matemática implica la opción de transformar el programa de Matemáticas en un programa de actividades en forma de resolución de problemas, a partir de los cuales se puedan desarrollar conocimientos y destrezas. En este planteamiento activo de las matemáticas es evidente que una amplia colección de actividades interesantes no es suficiente, el conocimiento adquirido depende de los conocimientos previos de los alumnos y de sus expectativas, es decir, el conocimiento debe tener el soporte de los conocimientos anteriores y debe conducir a alguna parte.

En relación con los profesores, éstos han de adecuar su “epistemología de profesor” para negociar con sus alumnos un contrato didáctico (Brousseau, 1986) en el que ambos se comprometen a "hacer Matemáticas" y a "darle sentido a las Matemáticas", es decir, propiciando y aceptando, respectivamente, un conjunto de situaciones-problemas que pueden y deben ser trabajados fundamentalmente en grupo, a semejanza de como lo harían los matemáticos en sus investigaciones.

La pregunta es: ¿es posible desarrollar e implementar un programa de matemáticas que refleje tal visión?, es decir, ¿es posible desarrollar e implementar el programa de matemáticas que propone nuestra reforma educativa?

El enfoque realista

El enfoque realista de la Educación Matemática se sitúa en Holanda, en el Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática, de la Universidad de Utrecht. Los datos que vamos a aportar se refieren al proyecto Wiskobas (Matemáticas en la escuela primaria 6-12 años), y están extraídos del trabajo de Treffers (1987); también se desarrolla un proyecto similar para la Enseñanza Secundaria con los mismos principios denominado Wiskivon.

El marco teórico de la propuesta metodológica en el enfoque Realista se sustenta especialmente en la “matematización”, que parte de la “fenomenología” de Freudenthal y conecta con la “teoría de niveles” de van Hiele. Analizamos brevemente sólo aspectos de la “matematización” y de la “fenomenología”, ya que los niveles de van Hiele no están directamente relacionados con el análisis que se está realizando.

Veamos en primer lugar la “matematización”.

Freudenthal concibe la Matemática como una actividad humana y propone en sus trabajos la “actividad matemática” como base de la enseñanza.

La “matematización” se debe entender como una actividad estructurada y organizada en la que se adquieren conocimientos y habilidades matemáticas mediante el descubrimiento de conceptos, conexiones y estructuras matemáticas. Se distinguen dos formas de actividad: la matematización horizontal y la matematización vertical.

La actividad matemática como matematización horizontal, *nos lleva, a partir de problemas del mundo real, a problemas expresados en símbolos matemáticos, lo que posibilita el tratamiento matemático de estos problemas,* y está caracterizada por el uso de los siguientes procesos generales: identificar las Matemáticas en contextos generales, esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras, descubrir relaciones, descubrir regularidades, reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas, transferir un problema real a uno matemático, transferir un problema real a un modelo matemático conocido, etc.

Esta forma de entender la actividad matemática consiste en enfrentar al alumno a la situación de: o*rganizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos y descubrir regularidades, relaciones y estructuras.*

La actividad matemática como matematización vertical *consiste en el tratamiento de las situaciones planteadas, por parte de los alumnos, con procesos específicamente matemáticos.*

De esta manera, la matematización vertical está caracterizada por el uso de los siguientes procesos generales: representar una relación mediante una fórmula, probar regularidades, refinar y ajustar modelos, usar diferentes modelos, combinar e integrar modelos, formular un concepto matemático nuevo, generalizar, etc. (Lange, 1987, pp. 43- 44).

La matematización tiene un carácter progresivo y se realiza de forma cíclica mediante la exploración fenomenológica y la estructuración matemática, junto con una articulación de pasos precisos en la enseñanza y en el aprendizaje.

Freudenthal eligió el lema: *"Matemáticas para todos y cada uno"*, para caracterizar los trabajos del Instituto Holandés de Educación Matemática que en la actualidad lleva su nombre (IOWO y grupo OW&OC). Habla de Prematemáticas (Freudenthal, 1971), y se expresa así en su consideración al desarrollo de las Matemáticas en el niño:

"Matemáticas en el nivel más bajo utilizado para permitir el inicio como una actividad. Los experimentos, y en particular el de Dienes, han demostrado que los niños pueden rendir bastante en este nivel de Matemáticas, es decir, que pueden desarrollar una actividad que, en un nivel superior, pueda ser interpretada como Matemáticas. Este nivel básico es una condición indispensable de las Matemáticas. Esto es algo que debería

resaltarse en aquellas personas que objetan correctamente diciendo que no se trata en modo alguno de Matemáticas. Se trata de nivel básico, son prematemáticas indispensables".

Comentamos a continuación algunas ideas relevantes de Freudenthal relativas a la fenomenología:

- Freudenthal mantuvo durante toda su vida la crítica que hizo al movimiento de la "Matemática Moderna" (enfoque estructuralista) por comenzar la actividad en Matemáticas por los conceptos, en vez de por las aplicaciones; por ejemplo, comenzar por el concepto de Grupo, en vez de por situaciones que pueden organizarse con esa estructura. A esta práctica del movimiento de la "Matemática Moderna" le llamó "Inversión didáctica".

- Para él, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medio de organización de los objetos del mundo, sus propiedades, acciones que hacemos sobre ellos y propiedades de las acciones.

- La adquisición del concepto es, para él, un objetivo educativo secundario, que - al menos en la enseñanza obligatoria – puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y en todo caso es posterior a ésta.

- Señala Freudenthal que, en situaciones de enseñanza/aprendizaje la triada de Bruner (enactivo, icónico y simbólico) no ayuda mucho, al menos, con niños mayores.

- La posición del aprendizaje estructural (conceptual) es: "para tener un cierto X (objeto) concebido, se enseña o se intenta enseñar el concepto de X". Pero es obvio, continúa Freudenthal que muchos de los conceptos, a las edades que se presentan, "no son factibles"; por esta razón se intenta materializar los conceptos en un "embodiment" ("concretización" o "encarnación"). Sin embargo, esas concreciones son usualmente falsas. Desde el punto de vista de la Didáctica, esto significa para Freudenthal que *"El carro va delante del caballo"*, o lo que es lo mismo, *"Enseñar abstracciones haciéndolas* *concretas"***.** Lo que sugiere entonces es la "fenomenología didáctica", que es preparar el enfoque contrario: *"empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización"***.**

En definitiva, Freudenthal propone, en oposición a la adquisición de conceptos mediante "embodiments" concretas, la constitución de objetos mentales basado en la fenomenología.

Afirma en relación con el caso de las fracciones (capítulo 5 de su fenomenología) que *"la división del pastel puede ser olvidada tan pronto como el estudiante domine las fracciones algorítmicamente. En contradicción con esta aproximación, el material que sirve para la constitución mental de fracciones tiene un valor duradero y definitivo".*

Comentamos, ahora, algunas ideas de Freudenthal desde una perspectiva semiótica. Veamos, antes, algunas ideas previas.

Como sabemos, los términos: "fracción", "número entero" y "ecuación de segundo grado", pueden tener usos diferentes dependiendo del "contexto" o campo de aplicación.

- Fracción, por ejemplo, aparece en contextos como: "fracturación" (dividir cantidades, todo y parte, ...), "medida" (magnitudes, razón, proporción, ...), "operador", ...

- Número entero, por ejemplo, aparece en contextos de variación o estado como: "substraendo", "número con signo", "número relativo" (cantidad discreta o continua (magnitud dirigida)), "número aislado" (resultado de una operación o solución de un problema o ecuación), número entero (formal), ...

- Ecuación de segundo grado, por ejemplo, aparece en contextos como: "igualdad entre cantidades discretas y continuas de magnitud" (montones de boliches, equivalencia de áreas), "valor numérico de una expresión algebraica", "relación funcional", "intersección curva y recta" (eje OX, etc.), "ceros de una función", ...

- Resolución de una ecuación de segundo grado, por ejemplo, aparece en contextos como: “métodos informales” (métodos experimentales: ensayo y error, …), “métodos formales algebraicos” (reducción a ecuaciones de primer grado (factorizar), completar binomios al cuadrado, fórmulas, ...), “métodos formales no algebraicos” (diagramas, geométricos, puzlles, tableros, ...), “método funcional” (la incógnita como variable), ...

Decimos que los términos: “fracción”, “número entero” y “ecuación de segundo grado”, pueden tener “sentidos” diferentes dependiendo del “contexto” o campo de aplicación. A efectos de claridad, consideramos el término “sentido” para referirnos a cada uno de los usos del término matemático considerado, y “significado”, para referirnos al conjunto de sentidos del término matemático (Katz, 1979).

El conjunto de todos los sentidos de “fracción”, “número entero” y “ecuación de segundo grado” constituye el “campo semántico” de los términos anteriores. El conocimiento del campo semántico de un término es lo que llamamos “saber enciclopédico” (saber sabio). Cada uno de estos sentidos puede ser divididos o no en indicadores semánticos. Estos indicadores semánticos caracterizan lo que generalmente consideramos como “concepto”.

Aclaradas estas decisiones terminológicas a favor de la comprensión, volvamos a las ideas desarrolladas en la propuesta realista:

La identificación del contexto en el que “fracción”, “número entero” y “ecuación de segundo grado”, se están usando, permite al sujeto interpretarlo correctamente y atenerse a la restricción semántica que establece dicho contexto. Sin embargo, el sujeto elabora un campo semántico personal a partir de los usos de los términos: “fracción”, “número entero” y “ecuación de segundo grado”, en los diferentes contextos.

A este campo semántico personal es a lo que Freudental llamaría aproximadamente “objeto mental” de “fracción”, “número entero” o "ecuación de segundo grado". Para él, el saber matemático a enseñar que proponen los sistemas educativos debería expresarse de manera que abarquen suficientemente el saber enciclopédico y permitan interpretar a los alumnos todas las situaciones en que haya de usar: "fracción", "número entero" o "ecuación de segundo grado".

Pero esto constituye una verdad a medias; el término "fracción", "número entero" o "ecuación de segundo grado", que quiera implementarse en el sistema educativo en cualquiera de sus estadios de desarrollo: "semiótico", "estructural" o "autónomo" (Socas, 1997), aparece necesariamente como una restricción de su campo semántico.

Por tanto, la necesidad de introducir "contextos" (naturales – Freudenthal- o artificiales – Bruner, Dienes, ...) en la enseñanza de las Matemáticas para generar un conocimiento personal tiene problemas. Nuevamente nos encontramos con el dilema de: "enseñar abstracciones haciéndolas concretas". En la propuesta realista: "el carro continúa también delante del caballo".

Si queremos una matematización de la cultura, para que este conocimiento matemático haga su efecto y se vuelva al final cultural, es necesario facilitar una enseñanza de las Matemáticas que permita al individuo eliminar posteriormente estos contextos que por otra parte provocan el deslizamiento metacognitivo (Socas, 1999), introduciendo sentidos no adecuados.

La pregunta continúa abierta, tanto en el uso de los contextos naturales de Freudenthal como en los contextos artificiales de Bruner o Dienes, incluso en el supuesto que los alumnos recorran los diferentes contextos: ¿Cómo se produce la descontextualización y se genera la integración en la estructura cognitiva del sujeto?

Materiales didácticos como representaciones semióticas

Los objetos o dispositivos educativos presentes en las diferentes actividades de enseñanza/aprendizaje generan múltiples problemas, tanto desde el punto de vista de la práctica educativa como desde la investigación didáctica. La tendencia en la literatura respecto a la organización de estos objetos o dispositivos es variada, pero podemos observar tres grandes tendencias: caracterización de los objetos educativos, tipologías y problemas derivados de su uso (Socas, 1999).

La caracterización de los objetos educativos a fin de organizarlos, como señala Coriat (1997), es extremadamente difícil. A pesar de los diferentes términos propuestos para su organización, no es posible encontrar organizaciones puras. No obstante, a efectos de tener un punto de referencia organizado, podemos usar el acercamiento pragmático propuesto por este autor, que utiliza el término “recurso didáctico” para considerar todos aquellos materiales que el profesor usa en clase (pizarra, cuadernos, libros, calculadoras, juegos, ordenadores, etc.), y el término “material didáctico” para aquellos que se construyen con fines educativos específicos como los utensilios comunes, los materiales educativos y los juegos.

Podemos identificar, en este acercamiento pragmático, los materiales didácticos con los materiales manipulativos anteriormente descritos y tendríamos una primera organización útil, al menos para identificar el objeto acerca del que hablamos.

Como hemos indicado, los materiales didácticos han tenido una relevancia restringida en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas; incluso dentro del enfoque conceptualista y los trabajos de innovación desarrollados han sido claramente insuficientes y en muchos casos, inoperantes.

El resurgimiento, en la década de los ochenta, del estudio de los aspectos sintácticos y semánticos de las representaciones semióticas formales de los objetos matemáticos, a fin de explicar las interpretaciones de los estudiantes de estas representaciones formales (Rojano, 1994), supone de hecho el desarrollo de una perspectiva más amplia que la perspectiva conceptualista: la psicolingüística que, al considerar las representaciones semióticas de los objetos matemáticos como lenguaje, amplía la perspectiva conceptualista y permite incorporar la dimensión semiótica a las representaciones de los objetos matemáticos. Esta dimensión semiótica del material didáctico, utilizada en las representaciones de un objeto matemático, puede ayudar a clarificar la propuesta pragmática de organización.

Desde esta perspectiva podemos avanzar más en la organización anterior (Coriat (1997) y Szendrei (1996)), y considerar el material didáctico como un sistema de representación semiótico para un objeto matemático dado, pero esto no es obviamente una adaptación inmediata.

Esta posición supone en nuestro trabajo considerar tres aspectos como esenciales, Socas (1999):

a) La necesidad de un acercamiento pragmático a los sistemas de representación semióticos. En este sentido optamos por una organización para estos sistemas en la que consideramos tres situaciones distintas: analógica, digital y mixta.

b) Aceptar como hipótesis de partida que el uso del material didáctico en el sentido de representación semiótica puede facilitar en gran medida la actividad matemática, porque estimula y favorece el desarrollo del conocimiento matemático.

c) Asumir que la utilización de materiales didácticos como representaciones semióticas es una forma racional de tratamiento de la diversidad en cualquier etapa educativa, y en especial en la enseñanza obligatoria: Primaria y ESO, para preservar el principio de "equidad" que estamos considerando en la expresión "Matemáticas para todos".

Es claro que los materiales educativos no pueden lograr por sí mismos enseñar Matemáticas, es más, las Matemáticas son un valor añadido al material; de esta manera, el material que es un medio de enseñanza lo convertimos, muchas veces, en un objeto de enseñanza. Se da por tanto la siguiente paradoja: mientras el profesorado considera al material como un control semántico del objeto matemático, éste se convierte para el alumno en un objeto de enseñanza y por tanto no es un modelo correcto y no permite el control esperado. Parece razonable dar otro enfoque al uso del material concreto en clase de Matemáticas, consideradas éstas como un producto cultural donde es esencial el lenguaje.

En el proceso de matematización de la cultura, desde la perspectiva del lenguaje, podemos articular con coherencia el material didáctico como un registro de representación semiótico para un objeto matemático dado.

Para poder utilizar un material didáctico como registro de representación en un proceso de enseñanza –aprendizaje, se necesita realizar una “transformación adaptativa” (Socas, 1999), de manera que este material didáctico se configure como un registro de representación “autosuficiente” (Palarea y Socas, 1994), es decir, que permita tanto las elaboraciones sintácticas como las semánticas del objeto matemático.

Pensamos que:

1. El uso del material didáctico, en este sentido, puede facilitar en gran medida la actividad matemática, porque estimula y favorece el desarrollo del conocimiento matemático.

2.- La utilización de materiales didácticos como registros de representaciones semióticas autosuficientes será importante en cualquier etapa educativa: Primaria, ESO y Bachillerato, donde es esencial que los alumnos exploren conceptos matemáticos expresados en diferentes representaciones semióticas. Dichas exploraciones deben centrarse tanto en los registros de representación semióticos analógicos como en los registros de representación digital.

Material didáctico: "Puzzle Algebraico"

Debemos indicar que el material que denominamos "Puzzle Algebraico", objeto de comentario en este trabajo, del que haremos a continuación una breve presentación, es uno de los tres materiales concretos: "Tablas de contar, sumar y multiplicar", "Tablero Matemático" y "Puzzle Algebraico", elaborados como Registros de representación autosuficientes, para abordar con sentido de continuidad, el Pensamiento Numérico y Algebraico en Primaria y Secundaria Obligatoria (Socas, 1998 a y b y 2000 a y b).

El resurgimiento en la década de los ochenta del estudio de los aspectos sintácticos y semánticos de las representaciones semióticas formales de los objetos matemáticos, con objeto de explicar las interpretaciones de los estudiantes de estas representaciones formales, aportó una dimensión nueva a la manera de ver y utilizar el material didáctico en clase de Matemáticas. La perspectiva de considerar el material didáctico como una representación semiótica de un objeto matemático puede ayudar a clarificar su uso en los procesos de enseñanza –aprendizaje. Esto supone que el material no puede ser usado directamente como un objeto, tal y como se presenta en el mercado, sino que se necesita realizar "transformaciones adaptativas" del mismo, de manera que se configure este material didáctico como un sistema de representación semiótico "autosuficiente", permita tanto las elaboraciones sintácticas como las semánticas del objeto.

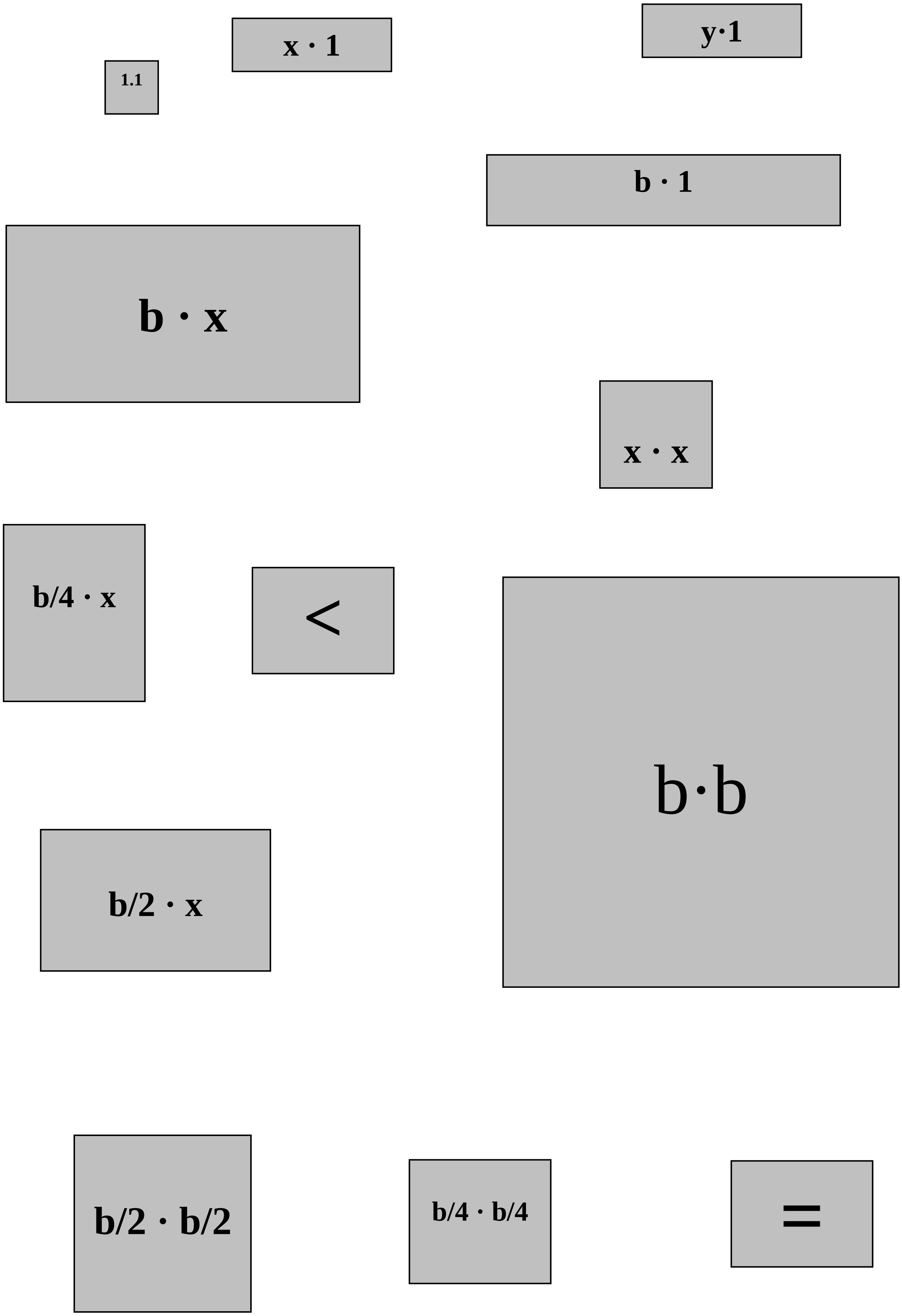
En este sentido, el material didáctico que presentamos con el nombre: "Puzzle algebraico", pretende ser un ejemplo de representación semiótica autosuficiente para los objetos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, ecuaciones de segundo grado, etc.

Es un material especialmente indicado para objetos matemáticos que se trabajan en la Educación Secundaria Obligatoria y pretende involucrar a los alumnos con otras maneras de trabajar las Matemáticas, en particular el lenguaje algebraico.

Introducción al Puzzle algebraico

Puzzle formado por 132 fichas que se distribuyen en 13 piezas de diferentes colores (azul claro y azul oscuro), dimensiones y signos. Está organizado en torno a cinco tipos de actividades: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y otras situaciones.

Las 13 piezas del Puzzle Algebraico son:


x · 1
y·1
1.1
b · 1
b · x
x · x
b/4 · x
<
b·b
b/2 · x
b/2 · b/2
b/4 · b/4
=

Actividades con el Puzzle Algebraico: números enteros y resolución de ecuaciones algebraicas de segundo grado.

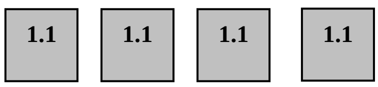
Veamos, a título de ejemplos, algunas actividades con el Puzzle Algebraico, tales como representar cantidades numéricas positivas y negativas y resolver ecuaciones algebraicas de segundo grado por el método de completar cuadrados.

El objetivo en la primera actividad es conocer y hacer representaciones con cantidades positivas y negativas utilizando la ficha unidad del puzzle algebraico.

Las primeras actividades están dirigidas al conocimiento de las fichas del puzzle que se va a utilizar; en este caso, se comienza con la ficha unidad positiva y negativa, para pasar luego a la representación de cantidades positivas y negativas.

Por ejemplo:

Representar: + 4 unidades



Representar: - 3 unidades

De esta manera podemos hacer un recorrido por diferentes contenidos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado, ... que pueden ser representados mediante las distintas fichas del puzzle.

Como ejemplo, veamos la resolución general de la ecuación de segundo grado: $x^2 + b\,x = c$, mediante la estrategia de formar cuadrados.

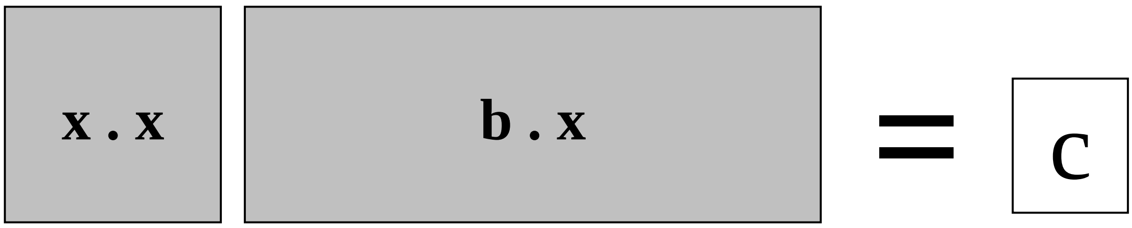
El objetivo, en la segunda actividad, es comprender el significado de una ecuación de segundo grado con una incógnita y descubrir reglas de transformación para resolver la ecuación.

Se basa en la idea del valor numérico de una expresión algebraica y se pretende encontrar la medida del lado desconocido de un cuadrado de área conocida.

Para construir gráficamente, la resolución de la ecuación: $\mathbf{x^2 + b\,x = c}$, por el método HINDÚ de completar cuadrados son necesarias, las fichas del puzzle: **x·x**, **b·x**, **b/2 · x** y **b/2 · b/2**,.

Tomemos la ecuación general $x^2 + b\,x = c$, en la que estamos considerando 1 el coeficiente de x^2. Encontrar una solución a esta ecuación es determinar los valores de x que hacen que el valor numérico de la expresión $x^2 + b\,x$, sea c. El procedimiento es buscar el lado desconocido de un cuadrado cuya área podemos conocer y que tenemos que construir, a partir del cuadrado de lado x, desconocido, y del rectángulo de lados b (conocido) y x (desconocido).

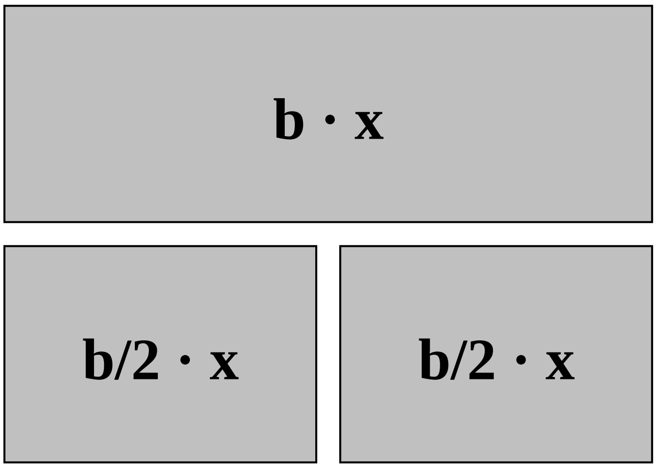
Usamos las fichas **x·x** y **b·x**, y representamos la ecuación de la siguiente manera:



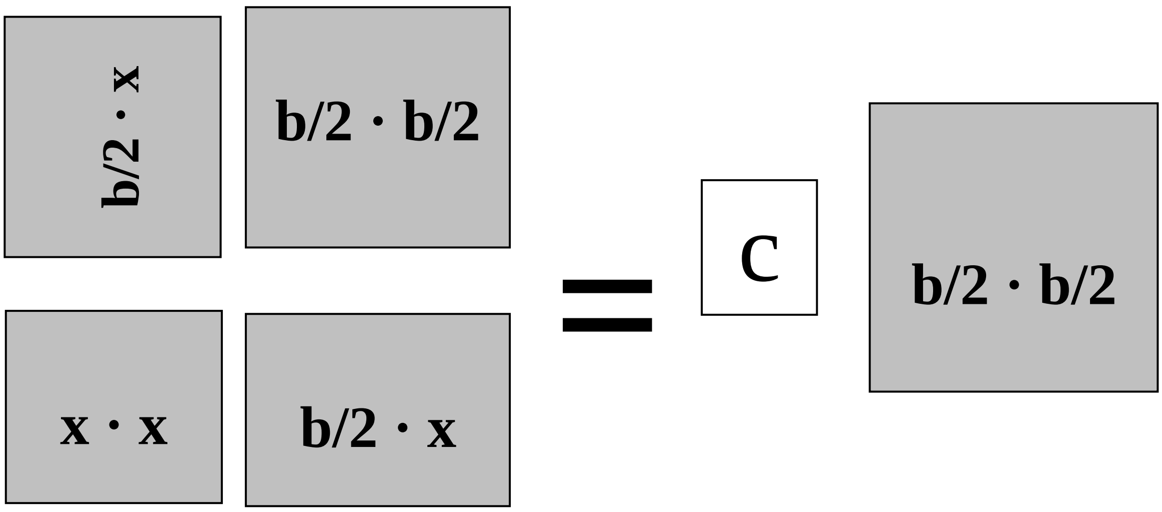
Transformamos, ahora, el primer miembro de la igualdad en un cuadrado de área conocida, respetando las reglas de simplificación y equilibrio y multiplicación por cantidades negativas.

En este caso tenemos que sustituir el rectángulo **b·x**, por dos piezas equivalentes

b/2·x y **b/2·x**, es decir:



Podemos formar el cuadrado añadiendo la ficha **b/2·b/2**, a ambos lados de la igualdad. Nos queda:



Obtenemos un cuadrado de lado ($x + b/2$), y su área es $c + (b/2)^2$. Es decir:

$(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$; $x + b/2 = \pm\sqrt{c + (b/2)^2}$, de donde:

$x = - b/2\pm\sqrt{c + (b/2)^2}$, que son las dos soluciones de la ecuación

Consideraciones finales

Formulamos, finalmente, en este apartado, una propuesta para el uso de los sistemas de representación semióticos. Consideramos oportuno indicar que un uso coherente de los Sistemas de Representación Semióticos para el Lenguaje Algebraico, debe estar organizado en torno a: usar registros de representación (Duval, 1993), usar sistemas de representación semióticos "autosuficientes" (Palarea y Socas, 1994), usar cuatro fuentes de significado (Kaput, 1987), y, articular situaciones de enseñanza que, partiendo de situaciones reales, permitan desarrollar "procesos enlazados de matematización" (Socas y Palarea, 1997).

Pasamos a comentar brevemente cada una de estas ideas.

Registros de representación.

Duval (1993), señala que un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: La presencia de una representación identificable; el tratamiento de una representación, es decir, la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada; y la conversión de una representación, entendida como la transformación de la representación, en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Sobre la construcción de conceptos, igualmente, indica que: toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa y, por tanto, la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva.

Sistemas de Representación Semióticos "autosuficientes".

Palarea y Socas (1994), caracterizan un sistema de representación semiótico “autosuficiente” cuando satisface las tres propiedades siguientes: todo objeto matemático codificado en el sistema de representación permite desarrollar elaboraciones semánticas y sintácticas, sus acciones están caracterizadas mediante operaciones internas o con magnitudes, y, es un sistema de representación semiótico significativo desde un punto de vista cultural, didáctico o matemático.

Cuatro fuentes de significado**.**

Kaput (1987) señala que cualquier Sistema de Representación Semiótico (SRS) se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado: las traslaciones entre SRS formales, por ejemplo, las traslaciones entre los sistemas de representación formal-aritmético y formal-algebraico; las traslaciones entre SRS formales y no formales, por ejemplo, las traslaciones entre representaciones mediante el lenguaje natural, las representaciones físicas, las representaciones geométricas, los diagramas, etc. y la representación formal algebraica; las transformaciones y operaciones dentro de un mismo SRS, sin referencia a ningún otro SRS, por ejemplo, las transformaciones y operaciones dentro del sistema de representación formal algebraico, sin otro significado referencial que sí mismo; y la consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los SRS intermedios, creados durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza. Estos SRS intermedios se integran en SRS más abstractros y sirven de base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de generalización mayor (a veces denominado: “abstracción reflexiva”, “encapsulación”, “reificación”, “generalización”, etc.).

“Procesos enlazados de matematización”.

Se trata de articular propuestas de enseñanza que, a partir de situaciones reales permitan desarrollar procesos de matematización tanto horizontal como vertical, además de facilitar “enlaces cognitivos” que permitan integrar todo el proceso de matematización. Socas y Palarea (1997), formulan una propuesta de enseñanza que propone el desarrollo de "procesos enlazados de matematización", que resumen en el siguiente esquema denominado "Trapecio Didáctico":

Registros formales (SRS formal algebraico) — Registros geométricos Autosuficiente (SRS: Puzzle Algebraico)

Números y operaciones (SRS formal aritmético) — Situaciones reales que involucran cantidades y relaciones

En este "trapecio didáctico" para el tratamiento del lenguaje algebraico, el camino que va desde las situaciones reales a los registros formales pasando por números y operaciones, describe los procesos de matematización horizontal y vertical en el sentido de Treffers (1987), y el camino que va desde las situaciones reales a los registros formales pasando por los registros geométricos autosuficientes ("Puzzle Algebraico"), es lo que en esta propuesta consideramos como el camino que describe "el enlace cognitivo".

El conjunto de acciones de enseñanza/aprendizaje que se describe a través del "trapecio didáctico" es lo que denominamos "procesos enlazados de matematización".

Tomando en consideración los sistemas de representación semióticos, y el significado de "Álgebra para todos", queremos señalar, finalmente, como comentarios de este trabajo:

- El poder del lenguaje algebraico radica en la posibilidad de realizar una manipulación extensiva de relaciones entre variables dentro de un sistema de representación semiótico (SRS) completamente confiable, que no requiere una atención continua del significado referencial de las expresiones intermedias generadas en la representación. El hecho de que este sistema de representación puede realizar transformaciones y operaciones sobre sí mismo es, sin lugar a dudas, un factor de su eficiencia. Pero a su vez, las aplicaciones del Álgebra en entornos muy concretos le confieren un significado más plausible, y, hasta cierto punto, esos entornos o situaciones empíricas son el origen histórico y genético del álgebra.

- Las Matemáticas, en general, y el lenguaje algebraico en particular, no pueden ser comunicadas sin los sistemas de representación semióticos y en muchas ocasiones, los estudiantes y profesores trabajan con sistemas de representación intermedios (diagramas, visual/geométrico, balanza, etc.) de manera inconsciente, con la intención de que ayuden al estudiante a ser competente en el sistema de representación convencional apropiado.

- Los objetos matemáticos se comunican mediante los SRS y existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos; sin embargo, existe la preocupación entre los matemáticos y los profesores de Matemáticas, para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por esto por lo que se han favorecido los SRS más formales frente a los SRS más visuales o caracterizados también como representaciones más intuitivas.

En este sentido, parece razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin reunir a diversas representaciones del mismo. La manipulación por parte de los estudiantes de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático, y la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado; sin embargo, éstas no pueden ser usadas en el Sistema Educativo de forma arbitraria. La propuesta de facilitar situaciones de enseñanza/aprendizaje mediante “procesos enlazados de matematización” puede ayudar a la construcción del pensamiento numérico y algebraico, respetando la diversidad cognitiva.

Referencias bibliográficas

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), 33-115. Grenoble: La Pensée Sauvage (Traducción al castellano: *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano. Universidad de Zaragoza. 1989).

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CORIAT, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN, México 1997).

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Suisse: Peter Lang.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep blue sea. *Educational Studies in Mathematics,* 3, p. 417.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer.

HIEBERT, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 19, 3, pp. 333-335.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grouws, D.A. (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. MacMillan Publishing Company.

HOWSON, G. y otros. (1981). *Curriculum Development in Mathematics.* New York: Cambridge University Press.

JANVIER, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, pp. 67-71.

KAPUT, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Rrepresentation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. (1991). Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes. En Von Glasersfeld E. (Ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publisher.

KATZ, J. (1979). *Teoría semántica.* Madrid: Aguilar.
LANGE, J. de (1987). *Mathematics, Insight and Meaning.* Utrecht: OW&OC.
MEC (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: MEC.
NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM. (Traducción al castellano, 1991: *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Granada: SAEM THALES.).
NCTM (1991): *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.
NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.
PAIVIO, A. (1978). Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and Cognition*, 6, pp. 199-208.
PALAREA, M.M., SOCAS, M.M. (1994). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement- apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans), *Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM.*, vol. 2, pp. 111-119. Toulouse. (France).
PALAREA, M. y SOCAS, M. M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. *Suma.* Vol. 20. pp. 29-35. Zaragoza.
PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998). Operational and Conceptual Abilities in the Learning of Algebraic Language. A Case Study. In *Procceeding of the PME-22.* Vol. 3, pp. 327-334. Stellenbosch, South Africa.
RESNICK, L. y FORD, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction. Hillsdale*: LEA. (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid: Paidós-MEC).
RICO, L.; CASTRO, ENC. y ROMERO, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings PME-XX*, vol. 1, pp. 87-102. Valencia. España.
ROJANO, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-56.
SOCAS, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp.125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.
SOCAS, M. M. (1998a). *"Tablas de contar, sumar y restar".* Número: 1998/38/ 28518. Gobierno de Canarias. Fecha. 18-12-1998.
SOCAS, M. M. (1998b). *"Tablas de contar, multiplicar y dividir"* Número: 1998/38/ 28519. Gobierno de Canarias. Fecha. 18-12-1998.
SOCAS, M. M. (1999). El papel de los materiales concretos con fines didácticos en las clases de Matemáticas. *Actas II Reunión Interuniversitaria*

sobre formación del profesorado e investigación en Educación Matemática. La Laguna: Universidad.

SOCAS, M. M. (2000a). "*Puzzle Algebraico"*. Número: (pendiente). Gobierno de Canarias.

SOCAS, M. M. (2000b). *"Tablero Matemático"*. Número: (pendiente). Gobierno de Canarias.

SOCAS, M. M. y PALAREA, M. M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar. *Uno*. Vol. 14, pp. 7-24. Barcelona.

SOCAS, M. M. y PALAREA, M. M. (1996). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. *Actas del Simposium Internacional sobre la "Matemática Actual"*. XXV años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna, pp. 507-521. Secretariado de publicaciones de la Universidad de La Laguna.

SZENDREI, J. (1996). Concrete materials in the classroom, en Bishop, A. J. et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* Vol. 4, pp. 411-434. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

TREFFERS, A. (1987). *Three dimensions*. Dordrecht: D. Reidel. (traducción del alemán de 1978).

TREFFER, A. y GOFFREE, F. (1985). Rational Analysis of Realistic Mathematics Educations, en Streefland, L. (Ed.). *Proceedings IX PME.* pp. 79-122. Utrecht.

VEGA, M. de (1985). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.