ISBN: 84-600-9563-O

MODELOS VISUALES EN UNA CLASE DE MATEMÁTICAS

Mª Dolores Moreno Martel

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

La enseñanza de las Matemáticas en las últimas décadas ha hecho más hincapié en un enfoque de los contenidos en procesos cuyas características se alejan del pensamiento espacial. Sin embargo, actualmente, el lenguaje visual se utiliza como recurso didáctico de apoyo, tanto al lenguaje aritmético como al algebraico. En esta ponencia presentamos, a modo de ejemplo, actividades que se resuelven haciendo uso del razonamiento inductivo y de la visualización. En cada una de las situaciones estudiamos casos particulares, buscamos regularidades y nos servimos de modelos visuales para generalizar los resultados obtenidos.

Abstract

The teaching of Mathematics in the last decades has placed more emphasis on a focus of the contents in processes whose characteristics are far from spatial thought. However, at present, visual language is used as a means of didactical support to both arithmetical and algebraical languages.

In this paper, some examples of activities that can be solvved by means of visualization and inductive reasoning are presented. In each of the situations we have considered individual cases, looked for regularities and made use of visual models to generalize the obtained results.

Consideraciones generales

El concepto de visualización o pensamiento visual está ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales de objetos, las cuales posibilitan la evocación de éstos cuando no están directamente presentes.

La visualización ha desempeñado un papel importante en el trabajo creativo de los matemáticos. Así, los pitagóricos estudiaban los números y sus relaciones mediante configuraciones diversas realizadas con piedrecillas. Descartes, en la Regla XII para la dirección del espíritu señala: *Finalmente, es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo; ya para descubrir aquellas cosas que deben ser comparadas entre sí de modo que no se omita ningún elemento de la habilidad humana.* El cálculo del siglo XVII surgió con un componente visual y así se mantuvo en su desarrollo a lo largo de los siglos siguientes. El formalismo en el siglo XX relegó a un segundo término la visualización. Sin embargo, en la actualidad, la influencia de las imágenes visuales en el pensamiento matemático y en el aprendizaje y comprensión de las matemáticas es un tema de gran interés para los educadores.

Por lo general, no sólo se admite que la habilidad de visualizar relaciones matemáticas puede adquirirse y mejorarse (Zimmermann, 1991), sino que el hecho de mejorar la educación visual da lugar a un aumento de la intuición, a la vez que proporciona al alumnado una mayor capacidad de entendimiento (Cunningham, 1991). Los datos aportados por muchas investigaciones ponen de manifiesto que algunas dificultades en el aprendizaje del cálculo, el álgebra y la geometría pueden suavizarse y evitarse si a los estudiantes se les anima a usar y a interiorizar gráficos o representaciones visuales asociadas a dichos conceptos. Del mismo modo, investigadores y especialistas aceptan, cada vez más, que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual ofrece a los alumnos otras vías para pensar y hacer matemáticas. Por otra parte, el procesamiento correcto de la información visual requiere una preparación previa que implica familiarizarse con las actividades de descodificación de la imagen.

A continuación, ofrecemos actividades, diseñadas por nosotros, en las que la expresión visual ayuda a comprender una regla y a producir razonamiento inductivo.

Actividades:

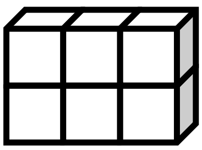
- Se pretende que el alumnado compruebe esta igualdad haciendo uso de un modelo tridimensional elaborado para la ocasión:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2) = \frac{1}{4}\cdot n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)$$

Veamos el modelo y su interpretación. Para ello, consideremos el caso n = 3:

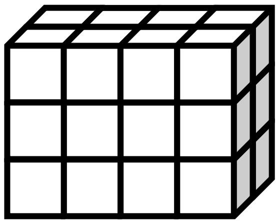
$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot(3 + 1)\cdot(3 + 2)\cdot(3 + 3)$$

El primer miembro de la igualdad se puede ver como la suma de los tres volúmenes correspondientes a los siguientes paralelepípedos:



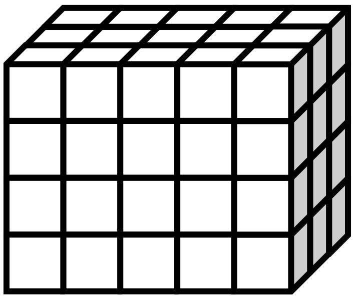
$V_1 = 1\cdot 2\cdot 3$

Fig.1



$V_2 = 2\cdot3\cdot4$

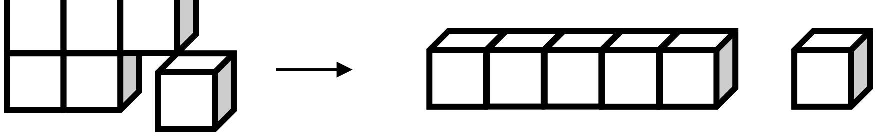
Fig.2



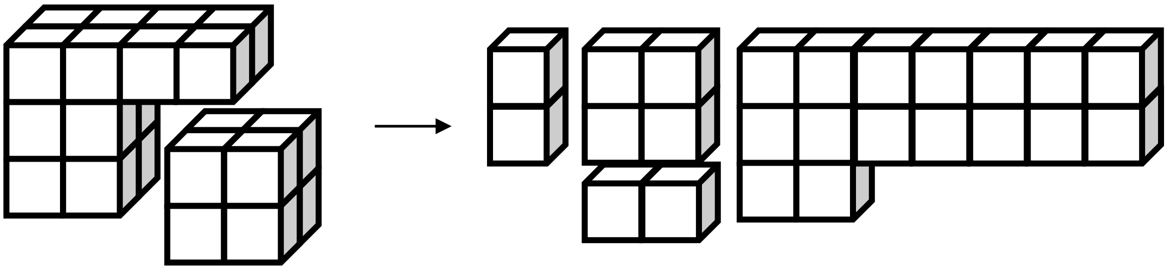
$V_3 = 3\cdot4\cdot5$

Fig.3

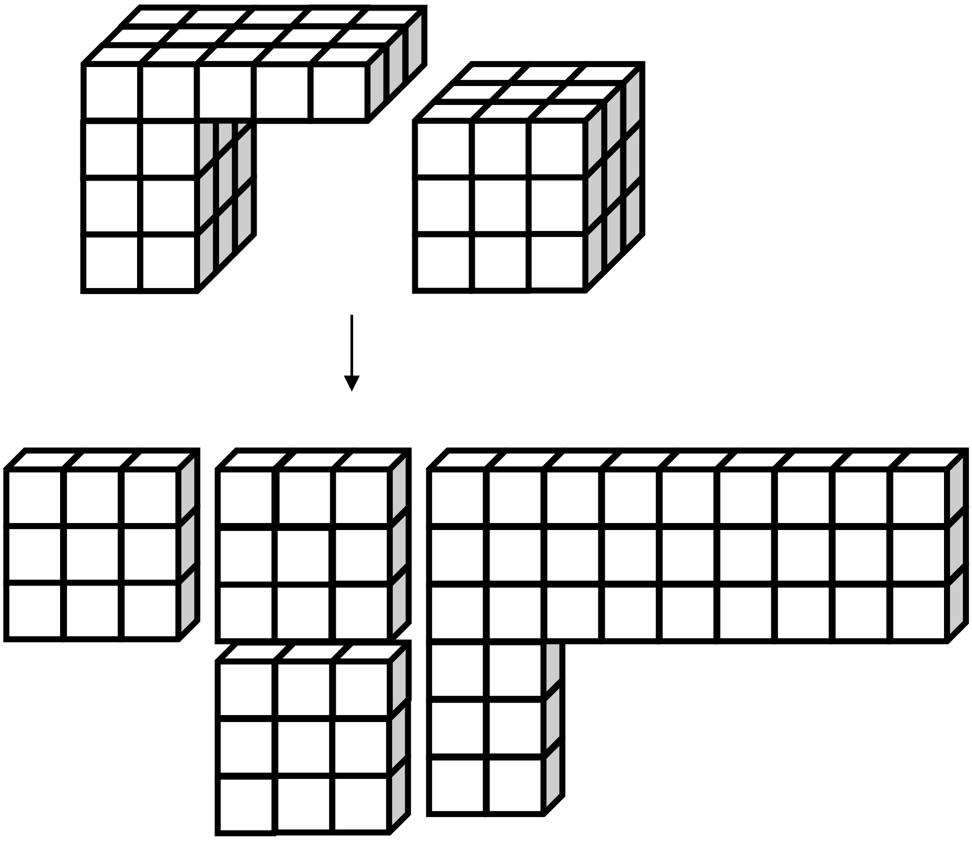
Seguidamente, los paralelepípedos anteriores se descomponen de esta forma:



$V_1 = 1^3 + 5\cdot1\cdot1$



$$V_2 = 2^3 + 8\cdot(2\cdot1\cdot1) = 2^2\cdot1 + 2\cdot(2\cdot1\cdot1) + 8\cdot(2\cdot1\cdot1)$$



$$V_3 = 3^3 + 11\cdot(3\cdot1\cdot1) = 3\cdot(3^2\cdot1) + 11\cdot(3\cdot1\cdot1)$$

A continuación, agrupamos todas las partes obtenidas y formamos el ortoedro (Fig.4), cuyo volumen coincide con la suma:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 = 1^3 + 5\cdot 1\cdot 1 + 2^2\cdot 1 + 2\cdot(2\cdot 1\cdot 1) + 8\cdot(2\cdot 1\cdot 1) + 3\cdot(3^2\cdot 1) + 11\cdot(3\cdot 1\cdot 1)$$

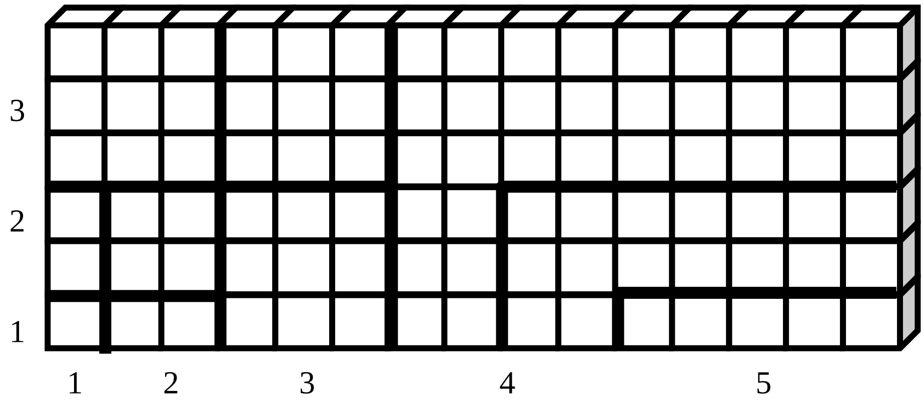


Fig.4

Por otro lado, el volumen es el producto de las medidas de sus dimensiones, es decir:

$$V_4 = (1 + 2 + 3)\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3 + 1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5 + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 3\cdot(3 + 1)\,(3 + 2)\cdot(3 + 3)$$

Por tanto, al igualar valores, tenemos:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot(3 + 1)\cdot(3 + 2)\cdot(3 + 3)$$

La igualdad se generaliza, ya que se puede demostrar que:

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + ... + n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2) =$$
$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + (1 + 2 + 3 + ... + n)\cdot(5 + 2\cdot(n - 1)) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)$$

- Asimismo, hemos obtenido una visualización para la propiedad:

$$5\cdot1 + 8\cdot2 + 11\cdot3 + ... + (5 + 3\cdot(n - 1))\cdot n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+3)}{2}$$

Para el caso n = 3 será:

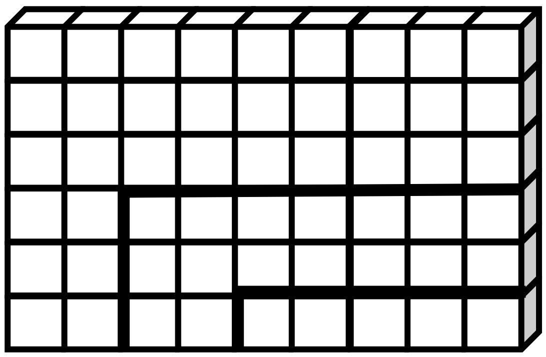


Fig.5

El ortoedro (Fig.5), está constituido por:

- Cinco cubos unidad.
- Ocho paralelepípedos, cada uno compuesto por dos cubos unidad.
- Once paralelepípedos, cada uno formado por 3 cubos unidad.

Así que:

$$V_5 = 5\cdot1 + 8\cdot2 + 11\cdot3$$

Del mismo modo, el volumen es el producto de las medidas de sus dimensiones, luego:

$$V_5 = (1 + 2 + 3)\cdot(2\cdot3 + 3) = \frac{3\cdot(3+1)\cdot(2\cdot3+3)}{2}$$

Por tanto, al igualar resultados se comprueba que:

$$5\cdot1 + 8\cdot2 + 11\cdot3 = \frac{3\cdot(3+1)\cdot(2\cdot3+3)}{2}$$

- Probar que todo número impar cuadrado perfecto disminuido en una unidad, es múltiplo de 8.

En este caso utilizamos la configuración puntual (Fig.6) como instrumento para obtener la regla enunciada. Para ello, aconsejamos al alumnado dibujar algunos términos más, escribir debajo de cada figura el número que representa y su desarrollo aritmético e indicar cómo es el término que ocupa el lugar n.

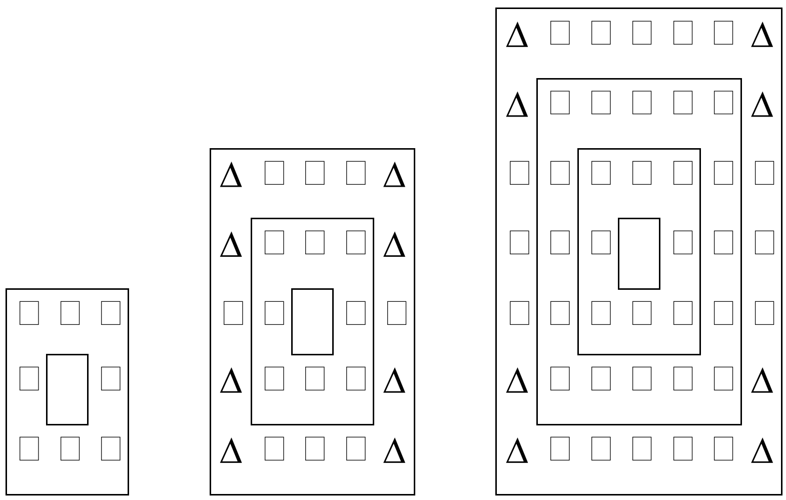


Fig.6

$3^2 - 1 = 8$

$5^2 - 1 = 8 + 8 + 2·4 = 8 + 2·8 = 8·(1 + 2)$

$7^2 - 1 = 8 + 2·8 + 2·8 + 2·4 = 8·(1 + 2 + 3)$

....

$(2n + 1)^2 - 1 = 8·(1 + 2 +3+ ...+ n)$

Referencias bibliográficas

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid: Pirámide.

Nelsen, R. (1996). *Proofs Without Words*. Washington: The Mathematical Association of America.

Socas, M.M. et al. (1989*). Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Zimmermann, W.; Cunnigham, S. (1991). "Visualization and the Nature of Mathematics" in W. Zimmermann y S. Cunnigham (edts), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.