ISBN: 84-600-9563-O

GEOMETRÍA ELEMENTAL Y REALIDAD. PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Agustín Morales González

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En las clases que dedicamos a la enseñanza de algunos aspectos, tanto conceptuales como didácticos, de la Geometría Elemental, en el Centro Superior de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, cada vez más sentimos la necesidad de abordar algunas cuestiones que pongan de relieve la utilidad práctica de lo que enseñamos, dado que hemos constatado que ello aumenta el interés de nuestros alumnos por la asignatura, procurando en todo momento no perder de vista que el razonamiento sería el gran contenido que debemos considerar.

Dichos aspectos prácticos se muestran por medio de la realización de una serie de actividades algunas de las cuales se presentan a continuación. Su realización requiere representar, abstraer, relacionar, estimar, ..., y muchas de ellas nos permiten mostrar el carácter dinámico, es decir, asociado al concepto de función, de la Geometría que enseñamos.

Abstract

In the classes that we dedicate to the teaching of some aspects, not only conceptual, but didactic of Elementary Geometry in the Superior Teacher Training Centre in the University of Las Palmas de Gran Canaria, we feel more and more the need to approach some questions that put emphasis on the practical utility of what we teach, since we have verified that it increases the interest of our pupils for the subject, aiming at all times not to lose sight of the fact that reasoning should be the great content to be considered.

These practical aspects are shown by means of the realization of a series of activities, some of which are presented as follows. Their realization requieres pupils to represent, to abstract, to relate, to estimate, ..., and many of them allow us to show the dynamic character, that is to say, associated with the function concept, of the Geometry that we teach.

Consideraciones generales

Señala Corbalán (1995) que, si bien la realidad es una, la experiencia nos muestra que, ante la misma realidad, cada persona ve no sólo lo que le interesa o atrae, sino lo que está entrenado para percibir.

La educación matemática que se lleva a cabo en los colegios e institutos no suele contemplar un aspecto tan importante como es el enseñar a observar la realidad con ojos matemáticos por lo que, como indica el citado autor, la mayoría de los alumnos es incapaz de aportar ejemplos que hagan ver la plasmación de las Matemáticas en casos reales no escolares. Ello contrasta con el hecho de que "prácticamente todo lo que la sociedad actual ofrece no se habría podido conseguir sólo con Matemáticas, pero tampoco sin ellas" (Alsina, 1998).

Para abordar situaciones reales desde un punto de vista matemático no siempre se requiere un nivel de conocimientos elevado. Muchas de las actividades que mostramos en este artículo han sido llevadas a cabo con nuestros alumnos del Centro Superior de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, tanto estudiantes de Magisterio como alumnos del Curso de Cualificación Pedagógica (C.C.P.) y, por medio de ellas procuramos, no sólo que se conciencien de la utilidad de las Matemáticas, sino que desarrollen capacidades propias de esta ciencia tales como representar, abstraer, relacionar y estimar, entre otras.

Las actividades que siguen son una muestra de lo que proponemos.

Relación de actividades

1. PRISMAS DE GALILEO

Comparar los volúmenes de los diferentes prismas rectos, cuya base es un polígono regular, que se obtienen doblando oportunamente una hoja de papel de dimensiones a y b (a>b).

RESOLUCIÓN

Este ejercicio lo solemos proponer a nuestros alumnos una vez estudiados los conocidos como "Cilindros de Galileo". Es sabido que la relación entre los volúmenes de los dos cilindros que se obtienen curvando oportunamente en uno u otro sentido una hoja de papel de dimensiones a y b (a>b) viene dada por el cociente a/b.

Nos proponemos ahora realizar la misma experiencia, pero considerando prismas en vez de cilindros.

Si comenzamos formando dos prismas de bases triángulos equiláteros, cuyos lados de la base son, respectivamente, a/3 y b/3, obtenemos, al igual que en el caso de los cilindros, $V_1/V_2 = a/b$.

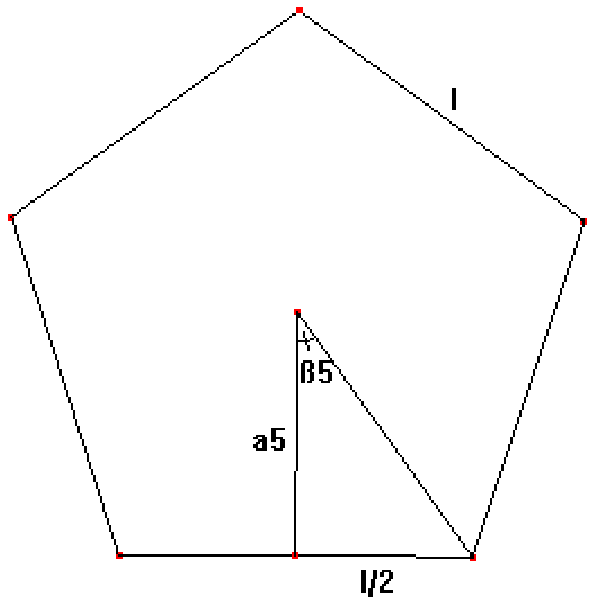
Asimismo, para prismas de bases cuadradas, de lados respectivos a/4 y b/4,
obtenemos también la relación $V_1/V_2 = a/b$.

Para el pentágono regular, son conocidas las fórmulas que siguen, que nos proporcionan el área de un pentágono regular en función del lado:

$$A(5,l) = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{1}{4} l^2 \Phi \sqrt{5(\Phi^2+1)}$$

donde Φ = simboliza el conocido como "número de oro", cuyo valor aproximado es 1,618.

Sin embargo, se hace preciso obtener una fórmula para el área del pentágono regular a partir de la cual podamos obtener la generalización válida para el área de todo n-gono regular.



De la figura adjunta deducimos:

$$\beta_5 = \frac{1}{2}(\frac{360}{5})$$

$$tg(\beta_5) = \frac{l}{2a_5} \Rightarrow a_5 = \frac{l}{2tg(\frac{1}{2}\frac{360}{5})}$$

$$p_5 = 5l$$

Por tanto, el área del pentágono regular viene dado por la expresión:

$$A(5,l) = \frac{1}{2}5l\frac{l}{2tg(\frac{180}{5})} = \frac{5}{4tg(\frac{180}{5})}l^2$$

Luego, para el n-gono regular, tendremos:

$$A(n,l) = \frac{n}{4tg(\frac{180}{n})} l^2$$

Los volúmenes de los dos prismas de bases un n-gono regular vienen dados, respectivamente, por:

$$V_1(n,l_1) = A_1(n,l_1)b = \frac{n}{4tg(\frac{180}{n})}(\frac{a}{n})^2 b$$

$$V_2(n,l_2) = A_1(n,l_2)a = \frac{n}{4tg(\frac{180}{n})}(\frac{b}{n})^2 a$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos la relación de volúmenes deseada:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow V_1 = \frac{a}{b} V_2$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = (\frac{a}{b} - 1)V_2$$

$$\Delta V(\%) = \frac{\Delta V}{V_2} \bullet 100 = (\frac{a}{b} - 1) \bullet 100$$

Para una hoja DIN-A4 (rectángulo de dimensiones 297 mm y 210 mm, es decir, cuyo módulo aproximado es $\sqrt{2}$) se tiene $\Delta V(\%) \cong 41{,}43\%$.

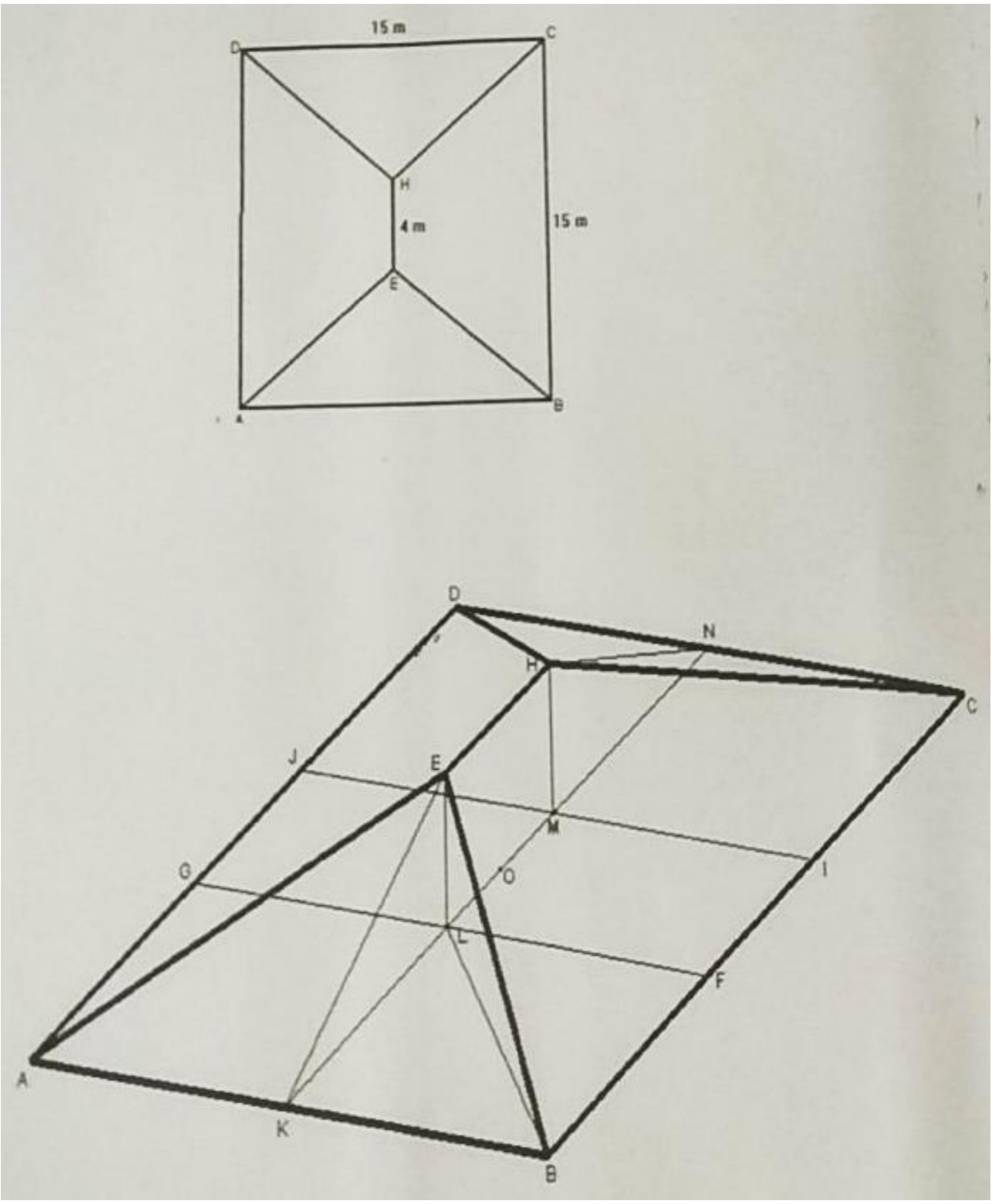
2. EL TEJADO

La figura adjunta representa la planta del tejado de una casa. La altura del tejado es de 5 m y todas las medidas se expresan en metros. Se pide:

a) Realizar una maqueta del tejado, a escala 1:100.

b) Superficie de los faldones.

c) Volumen limitado por los faldones y el plano horizontal.



RESOLUCIÓN

a) Para obtener el desarrollo plano de la maqueta pedida basta hallar la medida real de los lados no básicos de los trapecios isósceles que aparecen en el tejado.

Ello puede hacerse sin más que aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos LKB (contenido en el plano horizontal, siendo L la proyección de E sobre dicho plano) y ELB (EB es el valor buscado), en este orden.

Así tenemos:

$$LB = \sqrt{(LK)^2 + (KB)^2} \approx 8{,}65$$

$$EB = \sqrt{(EL)^2 + (LB)^2} \approx 10{,}56$$

Las medidas anteriores vienen dadas, lógicamente, en metros.

También, si se prefiere, puede tomarse un sistema de ejes cartesianos, con origen en D, por ejemplo. Es fácil ver que las coordenadas de A y E son las que siguen: A(15, 0, 0) y E(9,5; 7,5; 5), luego basta hallar el módulo del vector AE para obtener el valor deseado.

b) El área de los faldones se obtiene como suma de las áreas de los dos triángulos más las de los dos trapecios. Así, resulta el valor 282,76 m^2.

c) El volumen pedido puede obtenerse de varias maneras:

1) Si "cortamos" el tejado por dos planos verticales, paralelos al eje definido por DC, y que pasan, respectivamente, por los puntos E y H, tendremos dos pirámides más un prisma triangular. La suma de sus volúmenes nos da el valor deseado, que resulta ser de 425 m^3.

2) También podemos hallar dicho valor sin más que restar al volumen del prisma triangular (de altura 15 m) el volumen de las dos pirámides (anterior y posterior) deficientes.
3) Quizás el procedimiento más simple sea la aplicación de la fórmula de Herón para el "pequeño altar" (sólido cuyas bases son dos rectángulos, de lados respectivamente paralelos,

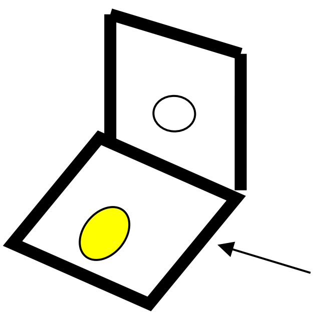
$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_3)$$

pero no necesariamente semejantes). Para nuestro tejado, el rectángulo superior se reduce a un segmento. Dicha fórmula es la que sigue:

donde $h = 5$, $B_1 = 15^2$; $B_2 = 0$; $B_3 = 9{,}5 \cdot 7{,}5 = 71{,}25$ (B_3 es la llamada base intermedia o equidistante). Si sustituimos valores obtenemos $V = 425$ (m^3).

3. LA ZONA ILUMINADA

¿Para qué valor del ángulo de inclinación de los rayos solares se verifica que la zona iluminada sobre la superficie horizontal es congruente con el agujero circular practicado en el plano vertical de la figura?



RESOLUCIÓN

La observación de la figura desde el punto de vista señalado por la flecha da lugar a la figura 1. A partir de ella es fácil concluir en que el ángulo buscado ha de ser de 45º, tal como aparece en la figura 2.

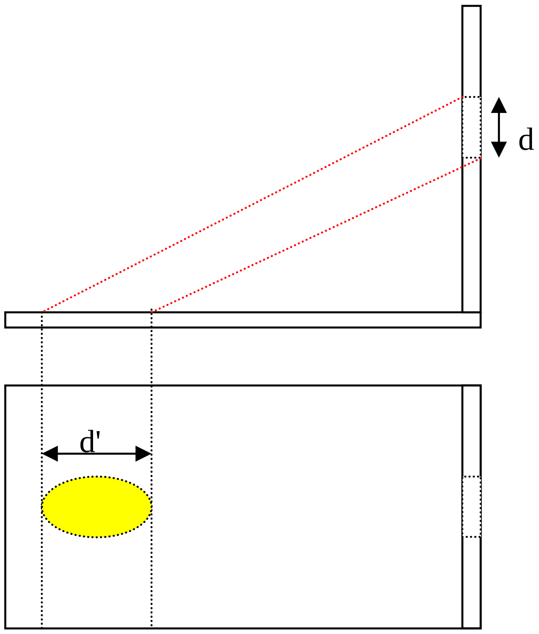


fig. 1

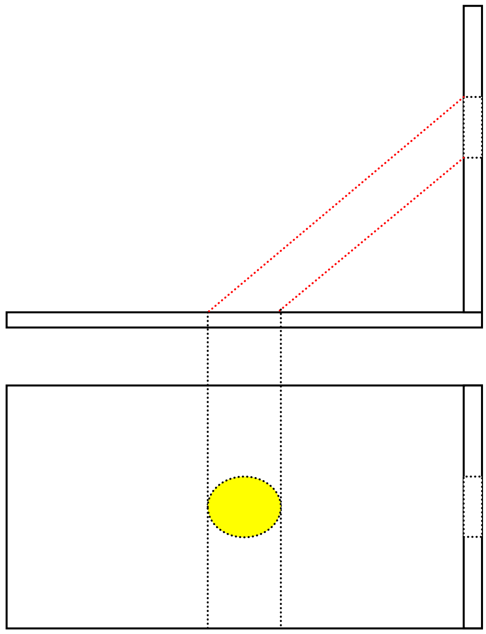
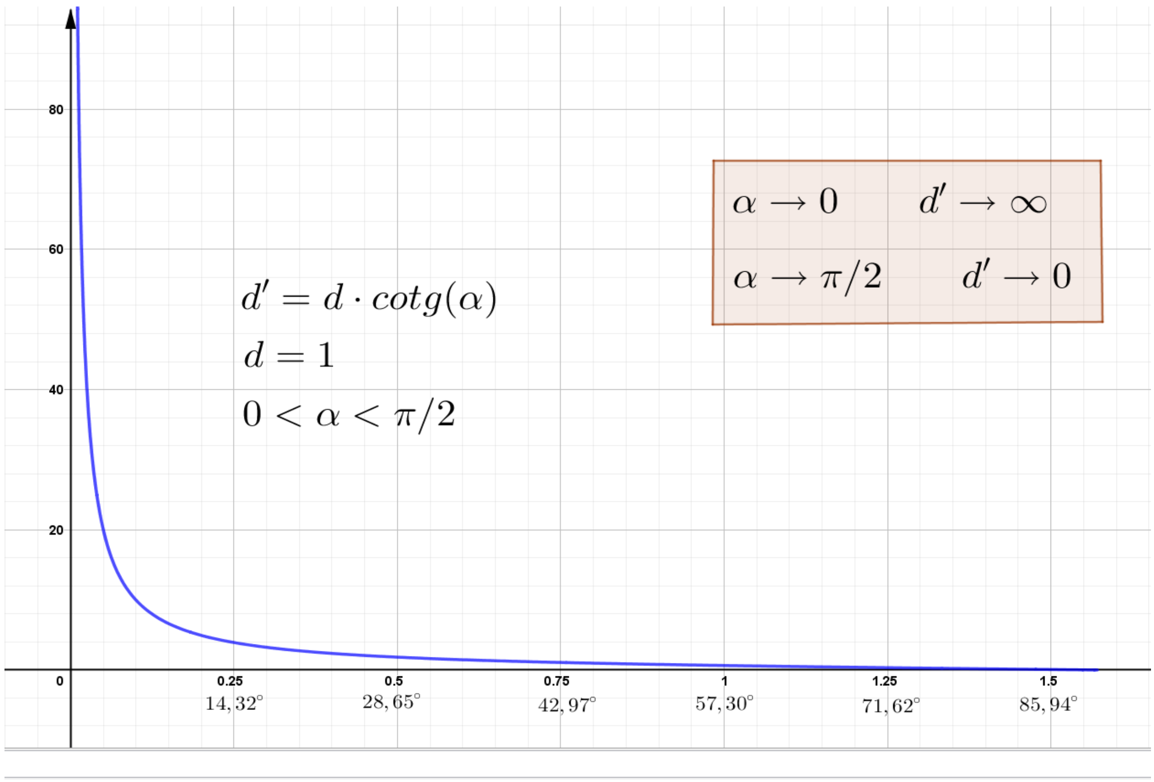


fig. 2

Si α simboliza la medida del ángulo que forman los rayos solares con la horizontal, la variación de d´frente a α viene dada por la relación d' = d cotg (α), como puede comprobarse.

La gráfica correspondiente (para d = 1) se muestra a continuación:

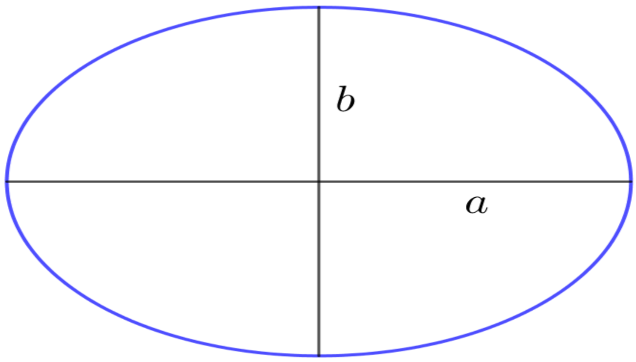


4. LA LATA DE ATÚN

En la figura se representa a escala 1:1 la planta elíptica de una lata de atún de 120 ml de capacidad que puede encontrarse en el mercado. Se pide:

a) Altura útil de la lata.
b) Cantidad de chapa utilizada para su construcción.
c) Idem si la lata tuviese la forma de un cilindro circular recto de la misma altura.
d) Medidas que debería tener una lata geométricamente semejante a la de partida si debe contener 180 ml de producto.

RESOLUCIÓN:



1. Altura útil de la lata

Supóngase que, midiendo con una regla graduada las longitudes, a y b de los semiejes , obtenemos

A partir de la expresión $V = \pi \cdot a \cdot b \cdot h$, que proporciona el volumen del cilindro elíptico, obtenemos

2. Cantidad de chapa utilizada

El área total, A_t, la obtendremos sumando al área lateral, A_l, dos veces el área de la base, A_e, es decir, $A_t = 2\ A_e + A_l$.

El área, A_e, limitada por la elipse, viene dada, como es sabido, por $A_e = \pi \cdot a \cdot b$, mientras que el área lateral, $A_l = l_e \cdot h$.

Para el cálculo de la longitud de la elipse, l_e, usaremos la fórmula aproximada dada por Srinivasa A. Ramanujan (1987-1920) que sigue:

$$l_e \approx \pi\left[(3a+3b)-\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\right]$$

Obsérvese que si en ella hacemos a = b, obtenemos l_e = 2·π·a (circunferencia).

Sustituyendo a y b por sus valores respectivos, obtenemos:

$l_e \approx 25{,}88$ (cm); $A_l \approx 64{,}7$ (cm^2); $A_t \approx 160{,}84$ (cm^2)

Conviene señalar que la fórmula de Ramanujan proporciona valores que difieren poco respecto de los que se obtendrían de la aplicación de la fórmula simplificada
$l_e \approx \pi\cdot(a+b)$, siempre que los valores de a y b sean similares.

3. Cantidad de chapa si la lata tuviese la forma de un cilindro circular recto de la misma altura.

Al ser $V = \pi\cdot r^2\cdot h$, serán

$$r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}} \qquad A_t = 2\pi\frac{V}{\pi h}+2\pi\sqrt{\frac{Vh}{\pi}}.$$

Sustituyendo valores, obtenemos $A_t \approx 157{,}40$ (cm^2), es decir, se ahorrarían 3,44 cm^2 de chapa que representan un 2,14% de la superficie de la chapa empleada si el cilindro fuese elíptico.

4. Medidas que debería tener una lata geométricamente semejante a la de partida si debe contener 180 ml.

Al ser la razón de volúmenes igual al cubo de la razón de semejanza, k, tenemos:

$$k = \sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} = \sqrt[3]{\frac{180}{120}} \approx 1{,}15.$$

Luego las medidas de la nueva lata serán:

$a_2 = k\, a_1 \approx 1{,}15 \cdot 5{,}1 \approx 5{,}9$ (cm)

$b_2 = k\, b_1 \approx 1{,}15 \cdot 3{,}0 \approx 3{,}4$ (cm)

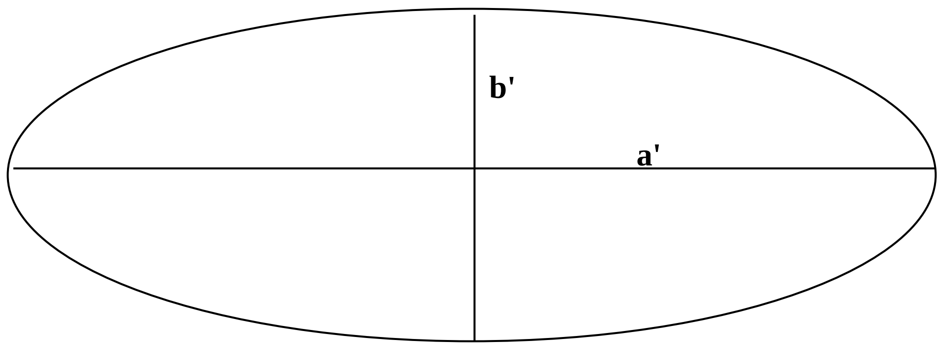
$h_2 = k\, h_1 \approx 1{,}15 \cdot 2{,}5 \approx 2{,}9$ (cm)

5. EL HUEVO DE DINOSAURIO

El dibujo de la figura muestra la representación de un embrión de dinosaurio dentro de un huevo de 45 cm de longitud. Estimar el volumen del huevo.

RESOLUCIÓN

El huevo tiene una forma parecida a un elipsoide de revolución. A efectos prácticos, podemos considerarlo engendrado por la elipse que sigue:



Los semiejes de la elipse que se ajustó al dibujo que se entregó a los alumnos tienen por medidas: $a' \approx 9{,}9$ (cm) y $b' \approx 3{,}0$ (cm).

La elipse que genera el huevo real tendrá unos semiejes de medidas: $a = 45/2 = 22{,}5$ (cm) y b que tendremos que determinar. Al ser semejantes las elipses, deberá cumplirse:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

de donde resulta $b \approx 6{,}8$ (cm).

El volumen del elipsoide de semiejes a, b, c viene dado por

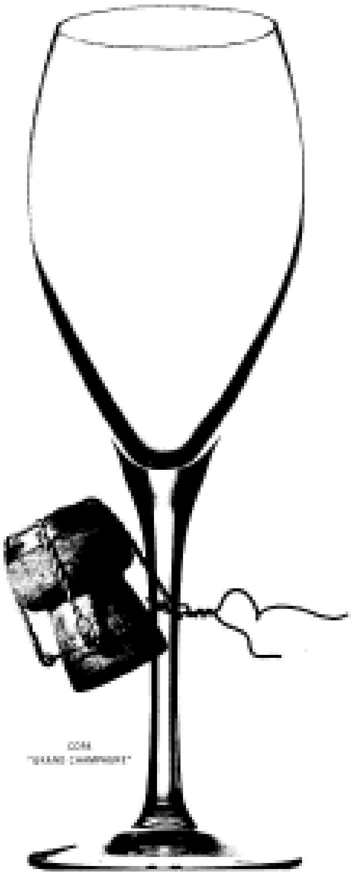
$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

En nuestro caso, al ser de revolución, se tiene $b = c$. Sustituyendo valores, obtenemos $V \approx 4.358$ (cm^3).

¿Cómo podría estimarse la superficie de la cáscara del huevo?

6. LA COPA DE CHAMPAGNE

La figura adjunta representa una copa de champagne a escala real. Se pide determinar, de forma aproximada, su capacidad.



RESOLUCIÓN

Dividimos la copa mediante segmentos horizontales paralelos que equidistan 10 mm; de este modo obtenemos una serie de rodajas, cada una de las cuales se asemeja a un tronco de cono. Al ser la altura de cada "tronco de cono" constante, bastará medir los radios R y r de cada una de la rodajas y hallar su volumen aproximado mediante la conocida fórmula $V = Pi/3 (R^2+r^2+Rr)\cdot h$, para lo que resulta práctico utilizar una hoja de cálculo. La suma de todos los volúmenes nos permite determinar la capacidad buscada. Lógicamente, cuanto menor tomemos la altura de las rodajas, más exactitud obtendremos.

A continuación se muestran los cálculos realizados para una copa geométricamente semejante a la de la figura, cuyas dimensiones, medidas de forma aproximada, son las que se indican. Se ha tomado, para todas las rodajas, h = 10 (mm). La capacidad aproximada de la copa resulta ser de 665 (ml).

CAPACIDAD DE LA COPA DE CHAMPAGNE			
R	r	Pi/3 (R2+r2+Rr) * h	
(mm)	(mm)	(mm3)	
37,5	40	47189,5	
40	43	54129,8	
43	44,5	60138,1	
44,5	46	64332,1	
46	46	66476,3	
46	46	66476,3	
46	44,5	64332,1	
44,5	42,5	59457,4	
42,5	39,5	52833,9	
39,5	34,5	43074,0	
34,5	30	32727,6	
30	24,5	23407,5	
24,5	21	16291,8	
21	19,5	12888,4	
19,5	0	2787,4	
	SUMA	666542,0	mm3
		Aprox. 665 ml	

Referencias Bibliográficas

Alsina, C. (1998). *Contar bien para vivir mejor.* Barcelona: Rubes.
Alsina, C. et al. (1996). *Enseñar Matemáticas.* Barcelona: Graó.
Alsina, C. et al. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.
Corbalán, F. (1995). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana,* Barcelona: Graó.
Chevallard, Y. et al. (1997). *Estudiar Matemáticas.* Barcelona: ICE-Horsori.
Macnab, D.S.; Cummine, J.A. (1992). *La enseñanza de las Matemáticas de 11 a 16.* Madrid: Aprendizaje Visor.
Rico, L. et al. (1997): *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.