



<https://doi.org/10.15446/ideasyvalores.v73n184.102823>

PAUL NATORP. “NÚMERO, TIEMPO Y ESPACIO EN SUS RELACIONES CON LAS FUNCIONES PRIMITIVAS DEL PENSAMIENTO”^{*}

PAUL NATORP

Trad. Laura Pelegrin^{**}

Rijksuniversiteit Leiden – Leiden–Países bajos

Presentación

Paul Natorp publica “Número, tiempo y espacio en sus relaciones con las funciones primitivas del pensamiento” en la revista *Philosophische Monatshefte* en 1900. Este escrito es de gran relevancia por dos motivos centrales. En primer lugar, Natorp adelanta las tesis centrales que luego presentará en *Los fundamentos lógicos de las ciencias exactas*, el trabajo principal de su primer periodo de producción. En segundo lugar, en esta presentación puede evidenciarse el núcleo de la propuesta filosófica de Natorp en diálogo con la filosofía kantiana. Sin embargo, también el artículo exhibe de forma clara y concisa la crítica fundamental del neokantismo de Marburgo a Kant. Natorp argumenta que: a) espacio y tiempo no son formas de la intuición sino funciones del pensamiento; y b) no hay nada dado a la intuición, sino que el objeto es puesto por el pensar. Este escrito es uno de los no tan numerosos lugares en los que el neokantismo de Marburgo se dirige abiertamente contra Kant.

^{*} “Nombre, temps, espace, dans leurs rapports avec les fonctions primitives de la pensée” *Philosophie générale et Métaphysique* 1 (1900): 261-287.

^{**} lauraalejandraperlegrin@gmail.com / ORCID: 0000-0002-0309-7560



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.

Número, tiempo y espacio en sus relaciones con las funciones primitivas del pensamiento

Ensayo de deducción

§1. El sistema de las funciones primitivas del pensamiento

1. El estudio de la lógica consiste en mostrar cómo el objeto del conocimiento se construye en el pensamiento y de acuerdo con las leyes del pensamiento.
2. El conocimiento de estas leyes, es decir, el conocimiento lógico, no es el conocimiento psicológico. Estas leyes no determinan, en todo caso no directamente, el conocimiento como un evento en relación a una vida psíquica, sino el desarrollo del contenido del conocimiento a partir de datos iniciales, según un método que somete a una ley el progreso de conocimiento a conocimiento. El mejor ejemplo de este progreso metódico del conocimiento ha sido proporcionado por las matemáticas hace ya mucho tiempo. Por lo tanto, así como ni la tabla de Pitágoras ni los elementos de Euclides son un estudio psicológico, así tampoco la lógica, según la definición que se dio aquí, es una parte o dependencia de la psicología.
3. Ella no es por eso, como otros quisieran, una ciencia legislativa, así como la tabla de Pitágoras no es una tabla de la ley dónde Euclides es legislador. El pensamiento correcto no es correcto porque se deba pensar así, sino que se debe pensar así porque es correcto; es decir, la forma en la que pensamos existe y de otro modo no existe. El sentido de estas palabras *existe* y *no existe* se puede definir con precisión.
4. Si el conocimiento consiste en un progreso metódico del pensamiento, se debe poder encontrar un número limitado de procedimientos fundamentales que hagan posible y aseguren este progreso. Estas son las hipótesis metódicas necesarias y suficientes para el pensamiento del objeto que investigamos bajo el nombre de categorías.
5. Pensar es aprehender el múltiple en la unidad. El pensamiento del múltiple, como tal, da el proceso fundamental de la cuantificación; el pensamiento de la unidad de este múltiple, como tal, da el proceso de la cualificación. El proceso de la cantidad se logra en tres niveles, como sigue:
 - a. Introducción del proceso cuantitativo en general, por la posición de un comienzo: unidad en el sentido de singularidad, unidad numérica.

- b. Progreso de un objeto a otro y a otro más, y así sucesivamente, de modo que en el pasaje de un término a un término nuevo, el que fue puesto anteriormente quede puesto, y que en la separación misma subsista un enlace entre el nuevo y el antiguo: pluralidad, multitud indeterminada.
 - c. Conclusión de una serie de posiciones en una sola, que mantiene y resume el contenido de todas las precedentes en el concepto de un todo o de la unión cerrada de partes: unidad del múltiple, multiplicidad determinada.
- Representación simbólica de los tres niveles:

I
III...
(I) (II) (III)...

- 6. De este modo, la unidad representa la introducción del proceso en general, la pluralidad representa la continuación de este proceso, el movimiento de un término a otro en forma de separación; una pone la cantidad de un modo absoluto, la otra de un modo relativo;¹ la multitud determinada representa el detenimiento en un grado alcanzado, no con la intención de permanecer allí sino de partir del punto alcanzado como desde un nuevo comienzo para avanzar sin fin hacia nuevas etapas. Esta serie de grados resulta, luego, de la naturaleza del pensamiento como proceso discursivo. Así, el proceso cuantitativo describe en estos tres grados un decurso circular, de modo tal que, para la determinación de las multitudes ilimitadas, los medios de determinación sean igualmente ilimitados. Este, y solamente este, es el sentido puramente cuantitativo de lo infinito, que no es por lo tanto un nivel más del proceso cuantitativo sino un signo que caracteriza todo el proceso tripartito por el que ponemos la cantidad.
- 7. El proceso de la cualidad debe desarrollarse en una gradación correspondiente. Esto resulta no solamente del hecho de que esta gradación se deriva de la constitución fundamental de nuestro pensamiento discursivo, sino también del hecho de que los dos momentos fundamentales de la síntesis, que se expresan por la cualidad y la cantidad, la unidad de pensamiento (en el centro de la mirada intelectual) y la diversidad que une (el dominio que se ve desde este centro), se corresponden necesariamente.

.....

1 La unidad es absoluta en tanto que la pluralidad es puesta en relación a ella, y ella en relación a nada más. Pero no es una determinación absoluta del objeto, como tal enteramente dependiente de la elección del punto de vista. Se puede decir que la unidad en general es absoluta, la que es puesta en cada caso particular es relativa. Aquí se trata de la primera.

Los niveles son:

- a. Posición de la identidad como fundamento de la tesis cualitativa en general o como principio de comparación: unidad cualitativa, uniformidad.
 - b. Posición de eso que es cualitativamente otro y de nuevo otro, y así sucesivamente, de modo que, en el pasaje de un término a otro, el que fue puesto anteriormente quede puesto, y que en la separación misma subsista un enlace entre el nuevo y el antiguo: diversidad o pluralidad cualitativa, multiformidad.
 - c. Unión de lo que quedó distinguido en el segundo nivel en la unidad más alta, es decir, más central, del género. Lo diverso (dice Aristóteles) es diverso en algo o con relación a algo, por lo tanto, aquello con lo que se diversifica lo hace al mismo tiempo uno y lo mismo: esta unidad es el género, el género es así el análogo cualitativo de la unión cuantitativa; es unidad cualitativa de lo que es cualitativamente múltiple, totalidad en el sentido cualitativo. Pero mientras que la unidad puramente *compositiva* de la cantidad no significa sino una aprehensión exterior, periférica, de una multiplicidad pensada de antemano, la unidad *comprehensiva* del género es pensada como conexión interna, central, como encerrando en sí la razón de la multiplicidad, como fuente u origen de donde la multiplicidad proviene. Aquí es necesario detenerse, especialmente porque este origen no es absoluto. El pensamiento busca solamente el camino hacia el origen, y alcanza solamente orígenes relativos, de modo que el problema del origen se plantea siempre de nuevo. El proceso cualitativo también conduce entonces a un proceso al infinito.
8. Así los dos procesos fundamentales de la cantidad y la cualidad se corresponden en toda su evolución y ellos plantean en una estrecha interdependencia los signos fundamentales del progreso del conocimiento, su extensión periférica y su profundización central; es decir, su unificación. Pero lo que es primero en sí es la unidad primitiva del tercer nivel de la cualidad. Pues en el pensamiento, el contenido determina al continente, la altura del punto de vista establece la extensión del horizonte.
 9. No es sino teniendo en cuenta los dos procesos a la vez que se obtiene el concepto de magnitud, como distinto de aquel de multitud. La magnitud, evaluada simplemente como multitud por el número discreto (ver §2), no expresa sino el múltiple de una unidad dada, pero no determina la magnitud de la unidad misma, más bien supone ya la magnitud suponiendo la unidad. Y si se tiene en cuenta esta magnitud ya supuesta, el pasaje de un valor a otro por

la multitud pura aparece como insuficientemente determinado. Parece que de 0 a 1, de 1 a 2, etc. (y también de a sin importar qué tan grande sea n), siempre hay una laguna que la pura multitud supera pero no colma. En otros términos, el número, entendido como simple expresión de la multitud, es discreto; la numeración es pensada como una limitación. Pero no sirve de nada llamar *dada* la cosa que se debe limitar, la magnitud en general. Es necesario que lo dado sea pensado, y asimismo primitivamente elaborado por el pensamiento; eso solo puede ser dado por una función anterior del pensamiento. Y esto no puede ser sino la cualidad. Ella esclarece, en efecto, lo que la pura cantidad dejó oscuro, la continuidad de la magnitud. Pues esta continuidad no expresa sino la totalidad entera de los valores, cualesquiera que sean, que pueden situarse entre dos límites dados; es decir, expresa que todo límite puesto en un intervalo por la arbitrariedad del pensamiento puede ser superado a su vez por la misma arbitrariedad, y que entonces la enunciación hecha debe valer sin ninguna restricción para los valores situados o que pueden situarse entre los límites determinados. Esta totalidad, que es pensada como superando toda multitud, puede ser concebida solo cualitativamente y no cuantitativamente; es decir, como “todo hombre” no significa un número asignable, no asignable ni tampoco infinito, sino *cualquiera que sea hombre*, y entonces tal o cual cosa es verdadera sin excepción de todo lo que satisfaga la condición puesta, sea uno o muchos o infinitos, asignable o no asignable. La magnitud como variable, es decir, variable sin límites, a través de todo valor posible, es la simple expresión de una tal totalidad cualitativa. Por ejemplo, el camino de un punto a otro en el espacio es concebido como pasaje continuo si la totalidad de los puntos intermedios es concebida como determinada cualitativamente y no cuantitativamente según una ley cualquiera (identidad de dirección o variación definida de dirección).

10. El proceso por el que se pone la magnitud es único, pero basta para la posición de magnitudes infinitamente variadas entre las cuales son pensables las nuevas relaciones, y, en tanto que ellas deben coexistir en un solo conocimiento, estas relaciones deben necesariamente ser pensadas. Es necesario, por lo tanto, un nuevo proceso para someter estas relaciones a una ley. Un proceso tal no puede surgir de una síntesis simple (esto se agota por los dos procesos inseparables de la cantidad y de la cualidad), sino de una síntesis de síntesis. Su rol es ordenar uno a partir de lo otro, de lo que resulta un sistema de orden, es decir *un* orden total. Es esto lo que corresponde a la “relación” kantiana.

11. Como este proceso se basa, él también, en una síntesis, es sometido a una gradación análoga a aquella de la cantidad y de la cualidad. Su rol es, lo hemos dicho, establecer el orden no solo entre los términos de una serie (esto lo hacen la cantidad y la cualidad) sino entre series de series, entre los términos correspondientes, y finalmente, entre un sistema de series. La posibilidad de un orden de este género exige primero una serie de comparación fija como fundamento de toda la disposición. Así como el primer postulado del proceso cuantitativo es la unidad en tanto principio cuantitativo y, por ende, como medida o medio de determinación de la multitud, <y así> como el primer postulado del proceso cualitativo es la identidad en tanto principio cualitativo y, por ende, como fundamento de comparación de la diversidad cualitativa; del mismo modo, el primer postulado de una disposición en series es una serie tipo, que sirve de medida común, única, idéntica, uniforme y continua para todas las disposiciones requeridas, por lo tanto, la construcción de un sistema de lugares, de una escala donde se inscribe el curso de cada una de las variaciones comparadas, por así decirlo. Se verá a continuación (§3 y §4) que es esta necesidad la que introduce el concepto del tiempo único absoluto, de espacio único absoluto, y también del movimiento rectilíneo uniforme como última medida del cambio en la naturaleza, y así se satisface la exigencia intelectual de la estabilidad como fundamento de toda determinación del cambio (sustancialidad). Pero aquí no se trata sino del postulado general de una disposición en serie de magnitudes, válida también para el uso puramente matemático.
12. En segundo lugar, es necesaria una ley según la cual una serie de cambios cualquiera pueda ordenarse término a término según otra; es decir, que determine la correspondencia de término a término para la nueva serie según aquella que ha sido adoptada por una serie anterior; esto implica correspondencia entre los índices de términos de diferentes series: $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ y los grados de la escala o serie tipo. Tomando aquí en consideración la ley de la transformación de término a término, obtenemos la base de la exigencia lógica de la causalidad o conexión sucesiva (causa = antecedente regular). Sin embargo, no se trata aquí ahora sino de la posibilidad de un orden en serie de magnitudes en general, es decir, del concepto general de función.
13. Pero la relación regular de serie a serie estará fundada solo insuficientemente en tanto el postulado de la correspondencia regular de término a término se extienda solo a una pluralidad arbitraria y fortuita, y no a una totalidad de series de cambios dada por cualquier definición. Aún más, la serie fundamental estará ella

misma incompletamente determinada y, por lo tanto, todo orden particular que la suponga. Por lo tanto, la primera y la segunda exigencias no estarán verdaderamente satisfechas sino admitiendo también esta tercera; a saber, que la regularidad del cambio en cada serie aislada sea considerada como determinada por una relación regular no solamente con una serie cualquiera sino con todas las series de cambios simultáneos que concurren para determinarla; esta es la demanda de una dependencia funcional recíproca y continua o de un sistema de magnitudes, lo que corresponde a la categoría de la acción recíproca simultánea.

14. Este nuevo proceso tripartito de la disposición en series, considerado como proceso lógico fundamental, da él también apertura a un desarrollo infinito. Un sistema alcanzado se vuelve a su vez principio de nuevas series y sistemas de series y así indefinidamente. Como objetivo último, sin embargo, tenemos en vista el orden único final de lo que existe. Este orden es postulado por el concepto completamente determinado de ser: ser en sentido amplio significa cualquier determinación del pensamiento, ser en sentido estricto o existencia significa determinación completa que supone a la base un sistema u orden único en vistas del cual cada individuo es determinado. El proceso de la disposición en series, en su extensibilidad infinita, hace posible una determinación progresiva hacia este objetivo infinitamente lejano de un orden único de la existencia. Esta exigencia de unidad establece la separación entre las matemáticas y las ciencias naturales. Ella sola diferencia una naturaleza como conjunto dinámico universal –y por lo tanto único– de un sistema, cualquiera sea, de relaciones matemáticas abstractas. El pensamiento matemático es puramente metódico, aun cuando sea objetivamente aplicable, pues el método que desarrolla es aquel de pensar el objeto en general. Pero es solamente el pensar conforme a esta exigencia de la unidad de la determinación que es plenamente el pensar objetivo, pensar no de un objeto posible en general, sino *del* objeto real.² Que el conocimiento de

-
- 2 Incluso los grados de modalidad del conocimiento se pueden deducir en un sentido puramente matemático; es decir, independientemente de la exigencia de la unidad de la determinación; se obtiene de esta manera una significación puramente matemática de lo posible, de lo real y de lo necesario, diferente de su significación en el pensamiento del objeto natural. Es suficiente, en el tema de la modalidad, hacer notar que ella no representa una nueva forma primitiva o una nueva dirección de la síntesis, sino que ella da una expresión sistemática al progreso gradual de la síntesis en general, y de este modo, al carácter progresivo del conocimiento. Su importancia no es por esto poca, ella sirve de base para los conceptos instrumentales tan potentes como los de la hipótesis y la prueba; de la prueba inductiva o constructiva; y de la prueba deductiva.

la existencia deviene así una tarea infinita, es eso lo que se debía esperar del carácter general del conocimiento sintético. No hay forma de escapar a este hecho. Para la existencia del objeto pensado (después de que se debió abandonar el pensamiento de la cuestión de su esencia), referirse a lo dado (experiencia, percepción; en fin, sensación) será vano. Lo dado debe ser pensado, y no se piensa en una existencia dada, la experiencia, la percepción o la sensación, sino en esta completa determinación que solo el pensamiento puede suministrar (según el proceso de la relación sobre la base de la cantidad y la cualidad), pero no puede nunca proporcionar definitivamente. No es el objeto (experiencia, percepción, sensación) el que da la conexión determinada de pensamientos, sino que es esta la que de acuerdo con las leyes de la relación determina el objeto y da así a la experiencia (percepción, sensación) un contenido determinado.

§2. El número

15. La primera expresión científica del procedimiento puramente cuantitativa es la numeración; la expresión general del *quantum* es el número, concebido, inicialmente, como número natural, es decir, entero absoluto. Como tal, el número no es una magnitud en el sentido definido más arriba (9).
16. La construcción de la serie natural de los números se comprende por las leyes del proceso cuantitativo. Como expresión pura del proceso tomado en sí mismo y de modo general, ella es necesaria y universal, única y la misma en todas sus aplicaciones, indefinidamente prolongable, pues el proceso que la funda tiene recursos ilimitados (6); es homogénea, pues sus términos, según su determinación misma, no son sino los numeradores y todos igualmente producidos por yuxtaposición; por lo tanto, ellos no se distinguen para el pensamiento por ningún otro signo que su lugar en la serie; además, todo término de la serie contiene la serie entera, porque el proceso de la numeración está determinado desde el comienzo y, consecuentemente, a partir de cualquier término dado por una regresión hacia el comienzo o una progresión al infinito.³

3 cf. G. F. Lipps. *Unters. üb. d. Grundlagen der Mathematik. Wundt's Philos. Stud.* t. XI. 268. Para comprender claramente esta predeterminación de cada término de la serie infinita de números, es necesario un sistema de numeración decimal o de otro tipo, es decir, un sistema finito de signos por los que, una vez que hemos definido su significación y su uso, cada número tiene su expresión determinada hasta el infinito. La posición de un sistema tal (que presupone las simples reglas del cálculo) tiene así un fundamento lógico y no es un puro medio mnemotécnico.

17. Los modos simples del cálculo, primero en el dominio de los números enteros absolutos, resultan directamente de la consideración de las relaciones dadas entre los números y solo someten estas relaciones a un conocimiento metódico. Se trata aquí de un ser, no de un acto. La matemática no actúa, ella contempla; sus objetos no se pueden modificar o eliminar, aumentar o disminuir, unir o separar, multiplicar, dividir, transformar o suprimir; ellos solamente *son*, en una determinación invariable; pero por el hecho de que son, ellos se relacionan de alguna manera los unos con los otros y el desarrollo completo de estas relaciones es el sentido puramente científico del cálculo.
18. Adición. Llamo + 1 “la unidad considerada a partir de un punto de partida dado”. El punto de partida de una numeración se llama cero y se designa en nuestro sistema de cifras por el signo 0. Poner el 0 en el punto de partida de la numeración absoluta es decir que no se parte de nada, que no se supone nada, que uno se dispone simplemente a contar. Luego, el 1 de la serie natural se expresa por 0 + 1, 2 por 0 + 2, y así sucesivamente. Pero se puede también tomar como punto de partida un número cualquiera de una primera numeración, por ejemplo tomar el 1 como un cero relativo, y contar de nuevo a partir de este número (con 1, 2, etc.). Este es el concepto de 1 + 1, 1 + 2... (es decir; que se cuenta 1, 2 a partir de 1 como un cero relativo), en general el concepto de una suma. La ecuación numérica $1 + 1 = 2$, o, más completamente,

$$1 + 1 = 0 + 2 \quad (1)$$

significa así que es lo mismo contar uno a partir de la unidad de una primera numeración considerada como cero relativo, o dos a partir del comienzo de la primera numeración, es decir, del cero absoluto. Esto es lógicamente muy diferente, pero numéricamente son dos modos equivalentes e intercambiables. Ya esta primera ecuación –y ocurre lo mismo en todas las otras–, afirma la sustitución de términos equivalentes, pero no idénticos.

19. Sustracción. De acuerdo con lo que se acaba de decir, la situación relativa de dos números cualquiera es expresable por la situación equivalente de un cierto número en relación con el cero. Esta es la relación aritmética expresada por el signo menos (-); nosotros la llamamos relación de posición, es la correspondiente al segundo grado de la cantidad (5, *b*). $1 + 1 = 2$ significa, lo hemos dicho, que se va de 1 a 2, contando 1 a partir de la unidad tomada como 0 relativo; es decir, de la misma manera que se va de 0 a 1. Es esta misma equivalencia de relaciones de 2 a 1 y de 1 a 0 la que se expresa directamente por la ecuación

$$2-1 = 1-0 \quad (2)$$

que tiene entonces, en otra forma, el mismo contenido que la ecuación (1).

Se ve de este modo que a la progresión aritmética corresponde una igualdad aditiva entre las sumas de los medios y extremos.

20. La sustracción, en el caso donde el segundo número es más grande que el primero, resulta inmediatamente para nosotros de considerar el hecho de que una relación es por definición recíproca y que su expresión puede por lo tanto invertirse. El contenido de las ecuaciones (1) y (2) puede entonces también expresarse por la ecuación

$$1-2 = 0-1 \quad (3)$$

Esta es la expresión más directa del hecho de que se va de 1 a 2 de la misma manera que de 0 a 1. Definimos entonces $1-0 = +1$ (lo que concuerda con la explicación dada más arriba de esta expresión [18]), $0-1 = -1$ (pues 0 es el punto de partida salvo convención contraria), y se obtiene el número positivo y negativo (más o menos uno), y, como fundamento de comparación del más o del menos, por consiguiente como límite entre los números positivos y negativos, el cero relativo (± 0). Como expresión general del proceso de la numeración relativa, se puede ahora, con el número positivo, el cero y el número negativo construir la serie relativa de números. Ella progresa en los dos sentidos al infinito, pues la posibilidad de la numeración relativa es tan ilimitada como aquella de la numeración absoluta.

21. La deducción de la multiplicación y de la división es exactamente paralela a aquella de la adición y de la sustracción. Su fundamento es esta relación con la unidad numérica que es puesta al mismo tiempo que cada número; es decir, que es con la unidad que se cuenta: contar es solamente yuxtaponer las unidades; dos es dos unidades, lo que se escribe: 2.1; y aquí 1 no es el primer lugar de la serie de números, sino más bien la unidad funcional absoluta con la que contamos. Así, en la multiplicación, la unidad aparece con una doble función: ella cuenta y ella es contada. Por su parte, el número dos es también un par (1.2); es decir, que se puede también contar con él como con una unidad relativa nueva: un par, dos pares, etc. La unidad con la que contamos tiene por lo tanto, como el cero a partir del que se cuenta, una significación absoluta y una significación relativa. Según esto, la ecuación $2.3 = 6$ (es decir, = 6.1) expresa que contando dos con el número tres, tomado como unidad relativa, o seis con la unidad absoluta originaria, se llega

al mismo resultado; esto no quiere decir que sea lógicamente la misma cosa, sino que son modos de operación equivalentes, por lo tanto intercambiables; donde uno es posible, el otro lo es también. De este modo, ya se tiene eso que se llama proporción geométrica; nosotros preferimos llamarla proporción métrica, ella corresponde al tercer grado de la cantidad (5 c). En efecto, el hecho enunciado más arriba puede también expresarse como sigue: como 2 es a 1, 6 es a 3 ($6 : 3 :: 2 : 1$); y esta relación puede también invertirse en $3 : 6 :: 1 : 2$, lo que se puede leer directamente: se va de 3 (tomado como unidad relativa de una nueva numeración) a 6 contando 2. Se obtiene a partir de allí $1/n$ como valor inverso de $n/1$, el concepto de n veces más, n veces menos. No hay que hablar de multiplicación o de división de números: nosotros multiplicamos y dividimos nuestras operaciones, pero los números no se separan ni se unen para producir una progenitura; sino que son, y con ellos se dan sus relaciones.

22. Probamos que los números relativos, tanto con respecto a la medida como a la situación, se comportan a su vez como los números absolutos primitivos, que por consiguiente, bajo ciertas reglas, se les puede aplicar los modos del cálculo tanto a ellos como a su relación con los números absolutos. No se debería decir que ellos representan una extensión *artificial* del sistema de números absolutos o *naturales*, pues ellos simplemente desarrollan completamente el contenido metódico ya incluido en los últimos. La relatividad es el carácter fundamental del número, pues ella es la del pensamiento sintético. El cero y el uno absolutos no son sino los medios para tomar un punto de apoyo en la infinidad de relaciones en general. La posición absoluta es provisoria, la posición relativa es definitiva.
23. De la génesis del número fraccionario y negativo, se debe separar completamente aquella del número irracional e imaginario. En el primer caso, se transfiere simplemente la función de la unidad a una multiplicidad determinada; en el segundo caso, aquella función del cero se transfiere a una posición dada de la serie primitiva de números, pero todas las relaciones de medida y de situación permanecen independientes de este cambio del punto de partida, que está claramente fundado sobre la relatividad del proceso numérico. Al contrario, con el número irracional, se pone en una relación métrica con la unidad a partir de una multiplicidad que no está dada en la serie primitiva, sino que es originalmente elaborada; con el número imaginario, se pone en una relación de situación con el cero de la serie primitiva un lugar situado absolutamente afuera de esta serie, relación que tampoco está dada sino cuya

introducción amplía singularmente el concepto supuesto hasta ahora de relaciones métricas o de situación. La cuestión es saber cómo justificar lógicamente una transgresión tal de conceptos. Ella está justificada por el hecho de que el pensamiento está autorizado a superar todo límite que se pone a él mismo (9), a condición de que este progreso sea continuo; es decir, de que los nuevos avances puedan ser efectuados por una extensión metódica del mismo proceso que sirvió para los primeros: esto es lo que quiere decir en nuestro caso que la ley de formación de números reales y racionales debe poder subsumirse como un caso particular a esa de los números irracionales e imaginarios. La expresión técnica de esta extensión es el número *general*. Como el pasaje de un número a la magnitud (9) está estrechamente ligado a estas extensiones, es necesario detenernos en este punto.

24. Gracias al carácter relativo de la relación métrica $n : 1$, es posible multiplicar indefinidamente los lugares situados en un intervalo dado, por ejemplo de 0 a 1. Pero como los lugares multiplicados se cuentan siempre con los mismos números primitivos (con la única diferencia de que la significación métrica cambia con la elección de la unidad), la relación de posición de 0 a 1, a 2, etc., queda siempre invariable, entre 0 y 1 no hay lugar para ninguna intercalación. El orden de situación así formado es inagotable por el número de sus términos, pero está completamente determinado por su definición; es un sistema cerrado, no susceptible de extensión sobre los principios admitidos hasta ahora. Sin embargo, es posible añadir a una numeración de este género otra numeración cuya constitución formal sea la misma pero cuya unidad no sea mesurable por ningún número del primer sistema; de lo que se sigue que entre dos números cualesquiera de estas diferentes numeraciones no tienen lugar relaciones métricas. Denominamos los números de dos sistemas de este tipo diferentes por la elección de unidades *inconmensurables* –unos en relación con los otros–, o *irracionales* –uno en relación con la unidad del otro–, mientras que todos los números de uno solo de los sistemas descritos se dice que son conmensurables entre ellos o racionales en relación con sus unidades. Se sigue de esto que dos numeraciones inconmensurables no pueden tener más de un término común. Haciendo coincidir para cada una de ellas este término con el 0, ya que en cada una de ellas el cero es desplazable; el teorema, entonces, se expresa así: dos numeraciones inconmensurables no tienen ningún término común excepto el 0. Queda así excluida toda equivalencia entre números de dos numeraciones inconmensurables. Tampoco los conceptos admitidos hasta ahora del más y del menos son aplicables

a numeraciones de este tipo, pues por el momento, el más y el menos no significan más que la situación relativa en una sola y la misma numeración, tal como la hemos definido antes. Sin embargo, como al menos el 0 de las dos numeraciones se supone en común, es necesario también que las dos series de más y de menos de los dos sistemas coincidan. Pero entonces, aunque ningún número de una de las numeraciones corresponda exactamente a un número de la otra; sin embargo, se puede concebir esta relación de un término v cualquiera de la segunda numeración con el conjunto de n , de modo que v , aunque no se encuentre él mismo en ningún lugar en la serie de n , divide esta serie de tal manera que cada término de la primera parte precede a cada término de la segunda en la numeración que parte de 0. Entonces, v no se corresponde, sin embargo, con ningún lugar de la serie de n sino con el corte; no con un lugar, sino con una separación de lugares.

Dicho esto, los conceptos de más y de menos, que hasta ahora no expresaban sino eso que es contado antes o después de un cierto lugar de una serie única, admiten esta extensión que, si v corresponde a un corte en la serie de n , decimos de todos los números n que caen de un lado del corte, que son más pequeños; de todos los que caen en el otro lado, que son más grandes que v . Las relaciones generales válidas para los números racionales que existen entre el más y el menos (por ejemplo, que el más sumado a más o multiplicado por el más da más), subsisten según esta extensión. De este modo, un valor v no se determina por una ecuación, sino por un sistema de inecuaciones relativas a los números racionales, y conforme a esta determinación, es posible colocar este valor en todas las relaciones, incluso métricas, con los números racionales. Es necesario solamente establecer aún la condición bajo la cual esta determinación (admitida hasta ahora solamente como posible) tiene efectivamente lugar para cualquier número dado v . Esta condición, al parecer, no se puede enunciar de una manera exhaustiva y positiva. Sin embargo, en un caso simple, el de las raíces irracionales, es fácil ver la razón de la determinabilidad: aquí la nueva relación $v : 1$ se obtiene por la división en partes iguales de la relación métrica fundamental en términos racionales $n : 1$; es decir, conforme a una proporción $1 : v = v : v^2 = \dots$, donde el último término, por ejemplo, v^2 , coincide con un valor racional; en otros términos, se supone que la nueva relación métrica $v : 1$ goza de la propiedad de que su simple repetición conduce a una dada la relación racional $n : 1$. El valor v es único, esto resulta inmediatamente de que si la ecuación $x^m = n$ (donde m y n son los números racionales absolutos) tuviera dos raíces reales distintas, el más multiplicado

por el más (y nuevamente por el más, y así sucesivamente) daría el igual, lo que fue excluido también para los valores irracionales. Pero el valor mismo de la raíz solo es determinable, aquí como en cualquier lugar, por una serie de inecuaciones; a saber, podemos decir de todo número racional si es menor o mayor que el valor en cuestión.

Si se introduce el principio de la continuidad del número al mismo tiempo que el número irracional o para fundarlo, no se puede hacer esto sin restricción. O bien fundamos la hipótesis de la continuidad sobre la *intuición*, haciendo corresponder, por una convención arbitraria, cada punto de una recta a un número, o bien introducimos directamente la continuidad en el número, suponiendo que a cada corte del sistema racional corresponde un número irracional. En los dos casos, es necesario decir que la totalidad de los números que pueden ser puestos en correspondencia con los lugares no determinables racionalmente no está dada por una definición positiva y exhaustiva; queda determinar lo que hay que entender por el *conjunto* de valores de un intervalo dado. Sin duda, esto significa: todos los números posibles, sin ningún concepto de límite infranqueable. Esto es admisible, pero solamente si agregamos una determinación positiva de naturaleza cualitativa, la de la dirección. Mostraremos en qué sentido una determinación tal es posible incluso para el número puro.

25. Al igual que la relación métrica $n:1$ queda invariable por el cambio de unidad, lo mismo pasa con la relación de situación $n-o$ por desplazamiento del o . Una nueva relación con el cero no es concebible sino en una numeración nueva, que no puede estar relacionada con la primera sino por el cero en común. Pero los valores positivos de una no se corresponderán a los valores positivos de la otra, los valores negativos a los valores negativos; sin embargo, podemos concebir –e inicialmente no podemos sino concebir– una inversión de dos sentidos, de modo que los valores positivos de una correspondan a los valores negativos de la otra y viceversa. La expresión de este hecho en el cálculo está provista por el cambio de signo en las operaciones métricas; este cambio es, en efecto, independiente de dichas operaciones: haciendo abstracción del signo, los mismos valores numéricos dan, en todas las operaciones métricas, los mismos valores numéricos. El signo del resultado se calcula según el signo de los datos, teniendo en cuenta que un signo menos significa una inversión de la dirección fundamental en la dirección opuesta o viceversa, el signo menos añadido al signo menos es la inversión de una inversión, por lo tanto, el retorno a la primera dirección. Así, al pasaje de la dirección \mathfrak{r}_o a la dirección

R_1 , o viceversa –donde R_0 es la dirección fundamental, de o hacia las cantidades positivas, R_1 la dirección opuesta hacia las cantidades negativas– corresponde una multiplicación por -1 . Con eso están ya dados dos géneros de relaciones con el cero (direcciones), y también el proceso de un cambio (primero de una inversión) de estas relaciones (cambio de dirección). Este cambio de dirección puede repetirse indefinidamente, y obtenemos así una serie R_0, R_1, R_2, \dots expresable por la serie de potencias de $-1, (-1)^0, (-1)^1, (-1)^2 \dots$ e infinita como ella en los dos sentidos si consideramos los cambios regresivos. Sin embargo, en realidad, siempre se repiten las dos mismas direcciones R_0 y R_1 pues son las únicas que han sido presupuestas hasta ahora. De donde se sigue que todas las potencias pares de (-1) son iguales a $(+1)$, las potencias impares a (-1) . Sin embargo, en tanto que hemos definido dos direcciones y un procedimiento de cambio de dirección en general, podemos por una creación del pensamiento poner un número mayor de direcciones. Y la hipótesis que se presenta primero después de la que ya fue dada es la división por partes iguales del único cambio de dirección dado de R_0 a R_1 , expresable aritméticamente por $(-1)^{1/2}$ o $\sqrt{-1}$, geoméricamente por la rotación de 90° , la mitad de aquella de 180° . El uso de la expresión media proporcional tomada de las relaciones métricas tiene un fundamento doble: primero, la proporción métrica y la proporción de dirección caen ambas bajo el concepto general de la proporción como repetición de la misma relación: al igual que en la multiplicación métrica se calculan los cálculos, en la multiplicación de signos, los signos más y menos son aplicados al más y al menos (la serie de potencias de (-1) es la repetición indefinida del signo menos, etc.). En segundo lugar, en la elevación a la potencia de números provistos de signos, se encuentra a la vez la repetición del mismo cambio métrico y aquella del mismo cambio de dirección. No hay pues nada que innovar en el empleo del signo $\sqrt{-1}$, no hay de nuevo sino la hipótesis de una dirección de números diferente de la dirección positiva y negativa, pero que se conecta a cada una de ellas de un modo definido, y por la que, una vez que la admitimos, solo esta designación corresponde a los otros usos del signo. Que nos ciñamos a la sola unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ (de otro modo, obtendríamos las diferentes raíces de la unidad correspondiente a una división cualquiera del círculo), se funda sobre el hecho de que un cambio de dirección es esencialmente circular. Ya el pasaje de R_0 a R_1 es en cierto sentido un retorno a la dirección fundamental, pues R_1 está dada con R_0 y no se distingue sino en el pensamiento; asimismo $R_{1/2}$ significa la brecha más grande de dirección entre R_0, R_1 , y por medio de estas

dos direcciones consideradas como coordenadas, es decir, con la ayuda del número complejo ordinal, podemos expresar todos los lugares que se cuentan a partir del mismo o en todas las direcciones del continuo en dos dimensiones. Las analogías geométricas, que se imponen aquí inevitablemente, están de hecho fundadas, no porque transporten los conceptos de la intuición al dominio del número, sino porque el pensamiento responde con sus propios medios a las exigencias de la intuición. Los sistemas de números superiores son posibles, pero no tienen, según la opinión de los matemáticos, sino un interés técnico. Los modos necesarios y suficientes del número, como expresión metódica del procedimiento cuantitativo-cualitativo, y como base de la relación (en forma de función) están agotados por lo que precede.

§3. *El tiempo*

26. Las leyes del tiempo y del espacio resultan de las leyes de la magnitud por la adición de la condición de una determinación completa de un orden único que una todas las direcciones posibles de la magnitud. Es este orden único el que Kant tenía en vista cuando distinguió al tiempo y al espacio como intuiciones de los conceptos puros, y les asignó un lugar, no en la Lógica, sino en la Estética Transcendental. Pero tiempo y espacio no son para él objetos, son modos originarios de la intuición (la *Disertación* de 1770 dice expresamente: leyes); son maneras en las que el múltiple del fenómeno se une según las relaciones de sucesión y de simultaneidad. Así, la función de la intuición consiste en ordenar según ciertas relaciones. Por eso, la intuición se asemeja mucho al pensamiento, particularmente, al pensamiento de la relación, que es también una función de orden y persigue también un orden único. Además, la intuición debe, a diferencia del concepto, ser una representación inmediata, no mediata del objeto; él debe ser dado por ella y no solamente concebido; los objetos son representados en el espacio y el tiempo y no solo bajo estos como notas comunes. Pero en la cumbre del método crítico, nada es dado separado del pensamiento; inicialmente, el objeto puede ser dado solo por una función primitiva del pensar. Es esto lo que dice expresamente una nota de la 2ª edición de la *Crítica de la razón pura* (§26); es primero por una síntesis “que no pertenece a los sentidos”, sino en la que “el entendimiento determina la sensibilidad”, que el espacio y el tiempo son dados como intuiciones. Solo sacamos la consecuencia plena de las propias premisas de Kant, cuando decimos que las determinaciones del espacio y el tiempo son todas sin excepción determinaciones del

pensamiento; por una parte, determinaciones de la magnitud, que pueden deducirse de las leyes de la síntesis cuantitativo-cualitativa; por otra parte, determinaciones de la relación, cuyo objetivo es esta determinación de la síntesis cuantitativo-cualitativa que completa el concepto de objeto matemático con aquel de objeto natural. Es precisamente por esto que el espacio y el tiempo son condiciones fundamentales de la determinación de la existencia en la experiencia; pues existencia significa justamente la determinación completa del objeto pensado, lo que es el objetivo de toda determinación del objeto en conformidad a las categorías. Y por la misma razón, el espacio y el tiempo aparecen también como órdenes de sensaciones, pues la sensación, el último testimonio de la existencia, no es sino la expresión más determinada de la exigencia de una determinación última. Sobre este fundamento podemos deducir sin excepción, por un lado, las determinaciones matemáticas del tiempo y del espacio, por otro, sus determinaciones reales, que los diferencian de los puros conceptos.

27. El tiempo representa en última instancia la “discreción” o, por así decirlo, la acentuación del ser, de modo más completo: el orden de la discreción. Ella afirma la exterioridad de los elementos en la conciencia, pues cada uno allí está puesto como por sí, en una conciencia particular, y por ello discretamente, y al mismo tiempo en un orden determinado, el uno después del otro, es decir, cada uno en su lugar en una serie sucesiva. Pero esto mismo es directamente numeración, cuyo concepto está contenido también en aquel de la sucesión (es decir, el uno después del otro, primero, segundo, etc.). Y si parece ser una observación puramente psicológica que la numeración, inversamente, es siempre una sucesión –el concepto de número, de hecho, no implica sucesión sino que se extiende también a lo simultáneo–, al menos es verdadero que el único carácter distintivo de la sucesión –a saber, que la llegada del término siguiente borra la existencia del precedente, y que por lo tanto los momentos del tiempo se excluyen en la existencia–, no afecta a las determinaciones puramente matemáticas, sino a las determinaciones reales del tiempo. En cuanto a lo primero, no hay diferencia, todos los atributos de la serie lineal de números reales son aplicables también al concepto de tiempo.
28. El tiempo comparte con el número la propiedad de ser único (16), infinito, homogéneo; también aquí cada término de la serie contiene la serie entera; cada punto del tiempo está determinado por su relación con lo que precede y con lo que sigue, y así al infinito. Al cero como punto de partida absoluto de la numeración corresponde el presente como punto de partida igualmente absoluto de

la duración; pero podemos también contar o contar hacia atrás la duración, a partir de cualquier punto del tiempo considerado como cero relativo; es decir, como presente. Podemos contar o contar hacia atrás pues, como el número a partir del cero absoluto o cero relativo, así el tiempo, a partir del presente absoluto y de todo presente relativo, corre en una dirección única en sí; no es el curso del tiempo lo que la regresión invierte sino su contenido: ponemos el contenido en la misma serie 1, 2... pero en el orden inverso. Sin embargo, con la dirección fundamental se da al mismo tiempo la dirección opuesta, en el sentido de que toda relación puede ser invertida. Por el contrario, cuando se trata del tiempo, no hay ni una pluralidad de direcciones, que darían aplicación al número complejo, ni tampoco hay cuando se trata del tiempo una inversión real en su dirección. Sería inexacto llamar a la simultaneidad una segunda dimensión del tiempo: dos tiempos no pueden ser simultáneos, pues lo simultáneo es lo que pasa en un mismo tiempo. Podríamos señalar esta diferencia, que todos los modos temporales, que son siempre discretos, pueden y deben siempre ser pensados como teniendo en su base al tiempo mismo como soporte único y continuo. Pero en el mismo sentido, también la continuidad numérica, como género, se pone por encima de todos los modos numéricos que son siempre “discretos” y no agotan nunca “el” número mismo; es decir, la posibilidad general de una numeración. Podemos también en el continuo del tiempo delimitar las extensiones, sumarlas, sustraerlas, multiplicarlas y dividir las al infinito. Por lo tanto, la matemática del tiempo coincide desde todo punto de vista con la de la serie lineal y continua en una dimensión. Es por esto que no hay matemática propia del tiempo, como sí hay una del espacio.

29. Si el tiempo, con sus determinaciones matemáticas, el tiempo absoluto *matemático* de Newton, que “fluit aequabiliter”, existe realmente, es una cuestión mal planteada. Él no significa una existencia sino una medida de la determinación de la existencia; solo la existencia determinada en el tiempo único absoluto estaría absolutamente determinada. Pues existencia quiere decir determinación completa, determinación del objeto de una manera absolutamente única, que implica como primera condición la determinación en un orden temporal absolutamente único. Pero la determinación real del objeto de la experiencia es posible solo relativamente, y, por lo tanto, ella puede y debe ser realizada con las determinaciones puramente relativas del tiempo, las que, sin embargo, se acercan indefinidamente a las absolutas por los progresos del conocimiento. El tiempo absoluto es así un concepto límite, indispensable para la

expresión del método del conocimiento natural; no es el concepto de un objeto de la naturaleza que sea dado o cuya existencia deba ser demostrada, no es tampoco una determinación de la existencia de un objeto natural dado o que incluso se deba demostrar que existe. Si podemos notar en este sentido la “idealidad” del tiempo, será quizá menos chocante o se dirigirá contra él menos ataques desorientados. Establecer una solidaridad funcional única del devenir, este es el problema puesto por el concepto de existencia, por el sentido mismo de esta afirmación: *algo es*, es decir que está completamente determinada en el pensamiento. Esta solidaridad mide primero lo que debería medirla, el tiempo. Es esto lo que ve el empirista, para quien la determinación de un lapso de tiempo está dada solo por la determinación de un lapso del devenir, que a su vez está condicionada por la solidaridad funcional de las series de cambios paralelos. No ve que esta solidaridad es inevitablemente puesta como única, aunque sea hipotética, con la constante reserva de la corrección relativa a todo lo que hay de particular en la disposición temporal; que por lo tanto en virtud de la misma necesidad transcendental, es necesario poner al tiempo como único, así como absoluto, y por eso *a priori*, pues, como se ha dicho con gran razón, este tiempo único y absoluto no es ni puede ser dado. El criticismo, por lo tanto, según la concepción aquí expuesta, supera el relativismo, que toma lo que es bueno del empirismo, cuando dice: esta teoría es errónea en tanto que considera como absolutamente determinada la serie o las series particulares, más o menos numerosas, de cambios que hemos logrado hasta aquí poner en relación funcional; cuando con esto ella hace la hipótesis de un tiempo particular realmente existente para toda solidaridad limitada de series determinadas, –“el tiempo es la perspectiva horaria de la tierra”, dice un empirista–. En lugar de esto, el criticismo considera, desde el inicio, como puramente hipotética toda uniformidad supuesta de series de cambios, por lo tanto, todo tiempo supuesto como dado, y no puede obtener como resultado de numerosas hipótesis de este género sino una hipótesis fundada sobre una base más amplia, análoga a las aproximaciones sucesivas de una serie infinita. Pero afirma que en oposición a esta infinitud de valores aproximados, es metódicamente necesario pensar el valor límite, que por eso es al mismo tiempo límite de la determinación de existencia. Negar esto sería como negar el concepto de existencia, es decir, el problema del conocimiento y de la experiencia. Este es el sentido de la tesis: el tiempo no es una determinación del objeto en sí (es decir, de un objeto que estaría determinado absolutamente), sino que es un medio metódico de

determinación del objeto en la experiencia (objeto que no puede nunca ser determinado absolutamente). Buscamos en vano lo que un empirismo consciente de sí mismo quisiera o podría oponer a una tesis semejante, que exhibe tan bien su legitimación.

30. Los momentos del tiempo se excluyen en la existencia; es decir, la serie de existencias en el tiempo debe ser construida de modo que a un punto único del tiempo no le pueda ser asignado sino un solo momento de la existencia, con exclusión de todos los otros; como en la numeración, un término idéntico no es contado sino una vez y a un número idéntico no le puede ser asignado sino un solo término de la serie. El orden temporal es, por así decirlo, la numeración (seriación, disposición) de la existencia en la que cada lugar individual no puede ser ocupado sino individualmente.
31. Pero en tanto el tiempo, como pura disposición, no puede ser dado sino en y por su contenido, es necesario que el orden temporal se exprese en un orden del devenir que lo represente puramente, así en un devenir que se establezca como uniforme (igual en tiempos iguales). Pero la determinación de cualquier serie de cambios como uniforme no es posible, a su vez, sino sobre el fundamento de una conexión regular de series diferentes que se corresponden término a término. Pues, es solamente con la ayuda de una correspondencia de este género (relación funcional) que el orden de los eventos en las series individuales puede determinarse según la sucesión y la simultaneidad (ley de la sucesión y de la simultaneidad como construcción del curso temporal objetivo de los eventos según la idea directriz de Kant, *cf.* *KrV*, Analogías de la experiencia). La prueba se saca de las leyes de la relación (11-13).

§4. *El espacio*

32. Como el tiempo, el espacio no es sino un orden de situación y como tal puede deducirse en sus determinaciones matemáticas de las leyes del número ¿De dónde viene esta dualidad en el orden de las situaciones, dualidad que el número ignora, y de dónde viene, junto con las numerosas concordancias en los principios, la divergencia en el detalle? Los lugares del tiempo son sucesivos, los del espacio son simultáneos, los unos se excluyen en la existencia, los otros se condicionan y se implican mutuamente. Esto conduce a la diferencia fundamental: la representación del tiempo es una separación en la conciencia, la del espacio es la aprehensión de estos elementos, inicialmente separados, en el todo de una representación única, es una unión de elementos que implica una determinada relación recíproca entre estos elementos. Una multiplicidad espacial no

puede entonces ser pensada como multiplicidad en la conciencia, a menos que la recorramos sucesivamente en la representación; por lo tanto, a menos que la convirtamos en un curso de tiempo. Inversamente, una serie de momentos temporales, y así, el tiempo en su totalidad como magnitud, como unidad (la duración), no es representable si no lo transformamos en un continuo espacial en una dimensión. Por ello, ambos, el espacio como representación de lo simultáneo, el tiempo como representación de lo sucesivo, quedan bien diferenciados, sin posibilidad de confusión, porque la conciencia de la separación y la conciencia de la unión se condicionan recíprocamente, pero quedando siempre bien distinguidas idealmente. El número contiene en sí lo uno y lo otro: exteriorización en una serie, unión en un todo. Pero en tanto la exteriorización es condición de la unión, todos los atributos resultantes convendrán igualmente al tiempo y al espacio, mientras que todas las determinaciones resultantes de la unión serán propias al espacio o, al menos, no serán aplicables al tiempo sino por una consciente metáfora. La primera característica vale para todas las determinaciones que conciernen a la serie de números como orden puramente lineal. Así toda la matemática de la serie homogénea en una dimensión se aplica sin cambios tanto al tiempo como al espacio, en su forma fundamental, la línea recta.

33. Al contrario, el espacio parece hacer aparecer una cosa plenamente nueva en la multiplicidad de dimensiones. Kant ocultó el problema, pues en su residuo de empirismo, él busca comprender el tiempo y el espacio como “intuiciones”; es decir, como una suerte de algo dado. Las tres dimensiones y la característica particular del espacio como figura ortoide parecen ser para él un puro hecho, del que no es posible ni necesario dar cuenta. Pero esto conduce inevitablemente a esta consecuencia, que el espacio no podría ser *a priori*. Para el tiempo, no surgió tal duda ¿Por qué? ¿Por qué no se pregunta si entre dos instantes no hay más que un tiempo o si dos tiempos paralelos no se intersecan en el infinito? Evidentemente, porque no podemos sino pensar al tiempo como único y únicamente determinado, y por lo tanto como figura lineal y ortoide. Pero esta es una pura suposición *a priori*; a saber, el tiempo es necesariamente único porque la existencia es única, o de lo contrario, sería necesario negar todo conocimiento de objeto, por lo tanto, toda experiencia. Sin embargo, ¿no debería seguirse por lo mismo que es necesario representarse un espacio único y, por lo tanto, que hay una necesidad de tales determinaciones de este espacio único, en lugar de los numerosos espacios posibles *in abstracto*, que hagan existente un solo espacio entre todos esos que

podemos pensar? Solo queda dar las razones que explican por cuáles determinaciones del espacio esta exigencia es satisfecha. Kant no ha intentado dar estas razones en absoluto, y en la laguna que ha dejado, el empirismo ya desplazado busca anidarse de nuevo. No obtenemos nada con las reclamaciones contra la geometría no euclidiana y sus eventuales consecuencias empíricas que se refieren a una necesidad de intuición del espacio ortoide en tres dimensiones; es necesario rehusarse a dar una deducción estricta, sea del espacio euclidiano, sea de cualquier otra determinación que resulte válida para el único espacio existente.

34. Sin embargo, podemos darnos cuenta de la posibilidad general de una multiplicidad de dimensiones espaciales, opuestas a la unidad de la dimensión del tiempo. La resolución en elementos simples debe, con toda conexión, hacer desaparecer toda ley particular, todo modo distintivo de conexiones. Ella puede conservar solo los elementos que se deben unir, como tales, por lo tanto, con la posibilidad general de una conexión (pues aún se requiere un orden en la distinción), pero sin ninguna determinación relativa a la naturaleza particular de su conexión. Esto vale para la numeración, en tanto que ella establece puramente una acentuación y notación uniforme; por lo tanto, un orden de elementos; y a esto corresponde en todo respecto el orden en una dimensión en el tiempo. Pero tan pronto como la conexión es considerada como tal, es necesario que esté a la base una determinada ley de conexión. Llegaríamos así fácilmente a la conclusión de que se pueden elegir, e incluso exigen ser admitidas del mismo modo, conexiones en número infinito y, por lo tanto, dimensiones en número infinito. Pero la posibilidad de la conexión está limitada por la condición de que los diferentes modos de unión que deben introducirse deben ser representados en una conexión única y cerrada entre sí. Por eso, es ahora indispensable una limitación cualquiera del número de dimensiones. Además, como la conexión sistemática de existencias exige que el pasaje de todo elemento a todo otro sea determinable por una misma ley, es necesaria una construcción tal que permita poner las diferentes direcciones coexistentes como resultantes de un solo centro común, pues es así y solo así que todo elemento dado en una misma existencia única podrá ser alcanzado metódicamente y calculado uniformemente, partiendo de cualquier otro según una única ley fundamental.
35. Nosotros ponemos así a la base que dos elementos cualesquiera del espacio determinan un segmento en longitud y en dirección, de tal manera que la longitud no es determinada sino presuponiendo determinada la dirección. Admitido esto, el concepto de la recta

es para el espacio, como para el número y el tiempo, un concepto fundamental, e incluso anterior al de la longitud. Sin embargo, de hecho, es imposible pensar una longitud como determinada sin hacerla reposar sobre la idea de recta (como determinación de la naturaleza de la relación de término a término por el solo dato de los extremos). La longitud de una curva no es definible sino sobre la hipótesis preliminar de una ley definida de un cambio continuo de dirección. Si reemplazamos el concepto de recta por el de más corto camino, para quitarle al primero el carácter de noción fundamental, introducimos un concepto indefinido y que queda indefinible sin esta noción. Pensamos ahora un número sin dirección, que no puede dar la magnitud, y la longitud debe ser una magnitud.

36. Como todo lo que sigue va a depender de la aceptación de este punto de partida, se nos permitirá justificarlo en algunas palabras más. Preguntamos: ¿por qué no podemos partir de una serie cerrada ab , en vez de una serie abierta, lineal, que no vuelva sobre sí misma? Debido a que la serie cerrada supone que las relaciones ab , ba se siguen al mismo tiempo en el mismo sentido (pues ellas se encadenan en una serie única) y en sentidos opuestos (pues ellas se reúnen en a y en b como $+$ y $-$). Diremos que esto se puede pensar; de lo contrario, no podremos pensar un cambio circular en absoluto. Pero esto, de hecho, no es pensable sino como cambio de dirección continuo o discontinuo, lo que supone la identidad de la dirección como principio de medida o de comparación. El cambio de dirección no es el concepto lógicamente primero, no es definible sino bajo la suposición de la identidad de la dirección, así como lo otro supone a lo mismo. Para hablar más matemáticamente: una curva $+a$ no es definible sino con la ayuda de una curva o , como el más y el menos no existen sino en relación al cero. En consecuencia, las figuras no-ortoides no son pensables sino como modificaciones de figuras ortoides, y no existirían sin que existieran las últimas; es decir, no existen las figuras no ortoides sino en las figuras ortoides.
37. Admitido esto, podemos fácilmente establecer una ley para las direcciones resultantes del mismo cero. Con una dirección fundamental o -1 es inmediatamente dada la dirección opuesta o -1 . Se pueden poner direcciones diferentes de estas dos a partir del mismo punto de partida, pero no se puede pensar que la diferencia respecto a la dirección fundamental es mayor que respecto a la dirección opuesta. El cambio de dirección ya se ha presentado más arriba (25) como esencialmente circular. En consecuencia, todas las diferencias entre las direcciones extraídas del mismo origen

están comprendidas entre 0 y un máximo, donde el cambio de dirección posible tiene su máximo en el cambio de dirección 1 , que corresponde a una pura inversión de dirección. Si definimos el cambio continuo de dirección entre la dirección fundamental y su opuesta como una rotación, la rotación a su vez puede tener una dirección diferente, pero es necesario de nuevo poner como base la rotación de dirección idéntica que define el plano, y los cambios de dirección de las rotaciones tienen de nuevo un máximo 1 . Sin embargo, como esta transformación, es decir la rotación del plano, debe a su vez ejecutarse de una manera homogénea, de esto resulta el espacio homogéneo en tres dimensiones, es decir, el espacio euclídeo. Nuestro principio de deducción no conduce a más dimensiones. Pues, según él, no es necesario introducir nuevas dimensiones sino para hacer posible *el pasaje continuo de una dirección a la dirección opuesta*. En verdad, la rotación del plano tiene dos direcciones opuestas entre las cuales se requiere un pasaje continuo. Pero esto no exige una dimensión nueva, pues en el espacio de tres dimensiones, el plano tiene dos rotaciones fundamentales (según dos ejes rectangulares), cada una de las cuales proporciona visiblemente el pasaje continuo requerido por la otra. De esta construcción resultan inmediatamente los “axiomas” característicos del espacio euclidiano: a) Dos rectas no tienen sino un punto en común (35); b) Dos direcciones que difieren de una tercera del mismo ángulo y en el mismo sentido son iguales y no forman ningún ángulo. Toda construcción en este espacio puede efectuarse a partir de un punto cualquiera, conservando las relaciones métricas y angulares, y esto en una escala cualquiera; pues en el espacio absolutamente homogéneo cualquier distancia puede representar cualquier otra. Una constante espacial finita (o curvatura diferente de cero) es excluida, pues si por cada par de puntos una recta es igualmente determinada en magnitud y en dirección, toda medida absoluta de longitud (menor distancia, mayor, o distinguida en lo que sea) es imposible.

38. Del espacio puro absoluto en su relación con la existencia podemos decir, como del tiempo puro absoluto, que no es él mismo un concepto de existencia sino solamente término y límite de la determinación de existencia. Esto basta para mostrar el absurdo de una deducción empírica de la naturaleza ortoide o no ortoide del espacio.
39. Dado que el espacio no tiene una existencia por sí, que las partes del espacio coexisten solo puede significar la necesidad de relacionar las conexiones espaciales, en tanto que conexiones, con un solo momento de la existencia, es decir, del tiempo (30). La serie de momentos del tiempo debe así ser expresada en una serie de

conexiones espaciales, de conexiones que tengan siempre el mismo contenido o, en todo caso, un contenido idéntico en su suma. Pues tanto el tiempo como el espacio son puros órdenes de situaciones, ellos no pueden introducir ninguna cosa nueva o suprimir ninguna cosa real, crear o anular la existencia. Así, el orden espaciotemporal no puede ser concebido sino como cambiando continuamente; a saber, como orden de los elementos de la existencia única que, siempre la misma, se reemplaza en el espacio según el curso del tiempo. De este modo es dado el concepto de la materia eterna e indestructible, no sujeta a ningún aumento ni disminución, sino solamente a los cambios espaciales; este concepto se deriva, pues, puramente de aquel de movilidad en el espacio. Pero la permanencia de los elementos materiales puede ser pensada solo: a) como permanencia en su estado de movimiento, si hacemos abstracción de sus cambios de posición que se determinan entre sí por la causalidad; y b) en tanto que ellos deben ser caracterizados individualmente, como conservación de un factor idéntico para cada individuo y determinando sus cambios recíprocos (masa). Para el último punto, es difícil establecer una estricta necesidad lógica; en efecto, solo determinamos empíricamente la magnitud de este factor para cada elemento supuesto. El primer punto, por el contrario, está estrictamente fundado en la lógica. Pero no nos aseguramos por eso un hecho que deba ser corroborado empíricamente, hacemos una suposición necesaria para toda explicación de la solidaridad funcional del devenir: en virtud de esta suposición, es solo el cambio del estado de movimiento, y no su permanencia, que se debe justificar por las causas.

40. Ahora bien, sería necesario determinar los cambios matemáticos generales de movimiento en el tiempo y el espacio, de modo que se distinga como realmente existente un solo sistema entre los sistemas de cambios posibles solo en matemática. En tanto que esto se logra por medios puramente lógicos –a saber, por aquellos de la síntesis matemático-dinámica–, la ciencia así construida, la mecánica, es necesariamente la primera ciencia natural general, sea en el sentido de que todas las leyes de la naturaleza se reducen en última instancia a la mecánica, sea porque todos los cambios en la naturaleza están sometidos en primer lugar a las leyes mecánicas, y no obedecen a otras sino dentro de los límites permitidos por esta. Si queremos hacernos una representación más determinada de la posibilidad de una tal deducción lógica de la mecánica, no hay más que recordar los rasgos fundamentales de la mecánica

de acuerdo con Henri Hertz.⁴ El objeto de la mecánica es, según *Los principios de la mecánica* (1894 §308): deducir los fenómenos que suceden en el tiempo y las propiedades de sistemas materiales dependientes del tiempo, de sus propiedades independientes del tiempo. Pero en el concepto de sistema material se encuentra comprendida (según la definición §121) la continuidad de la cohesión regular de los puntos del sistema, lo que quiere decir (según §115) que el darse de todos los desplazamientos finitos posibles de puntos del sistema está contenido en el darse de todos los desplazamientos posibles infinitamente pequeños que aquellos recorren en línea recta continua; y que más desplazamientos posibles no pueden cambiar sino de una manera continua. Se supone que el móvil último es la partícula de masa (§3), es decir, el sustrato puntual idéntico e indestructible del cambio local continuo. Pero esta partícula está determinada como invariable solo por la solidaridad regular de los cambios del sistema; es decir, el móvil último debe ser tomado con determinaciones invariables tales que se vuelva construible una dependencia regular de cambios de movimiento. En esta construcción no son necesarios, según Hertz, otros conceptos fundamentales que aquellos ya introducidos: tiempo, espacio y masa. La fuerza newtoniana y la energía en el sentido moderno no son conceptos fundamentales y nuevos, sino diferentes expresiones de las leyes del movimiento, e incluso, expresiones criticables, en tanto que hacemos reaparecer en las fuerzas las acciones a distancia y, en las energías, las energías potenciales como esencialmente distintas de las cinéticas. Para evitar estas suposiciones criticables, Hertz apoya la mecánica sobre esta sola ley fundamental (§308): todo sistema libre persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme a lo largo de la línea más recta posible, ley que para ciertos sistemas de cuerpos es un hecho de experiencia (sólidos en el vacío, fluidos perfectos en contenido cerrado); por lo otro, se entiende por hipótesis, por una parte, porque se retrotraen los cambios en apariencia discontinuos de cuerpos perceptibles a los cambios continuos de sus partículas imperceptibles (percusiones); por otra parte, porque hacemos la hipótesis de movimientos invisibles de masas imperceptibles, cuya acción se manifiesta por los movimientos visibles de masas perceptibles (acción a distancia, calor, etc., §315-317). Esta ley no podría fundarse sobre la experiencia sola, ella estaría lógicamente fundada si estuviera demostrado que ella satisface, con el mínimo

.....
 4 ¿Es necesario destacar que no debemos por esto considerar esta deducción como definitiva?

de hipótesis necesarias y suficientes, la exigencia de la determinación unívoca de las situaciones y de velocidades de un sistema en cada instante, según su estado en un instante dado (§331).