

La yupana modificada para la resolución de problemas aditivos en una escuela intercultural de Perú: adición y sustracción sin y con canje

The modified yupana for solving additive problems in an intercultural school in Peru: addition and subtraction without and with exchange

Henry-Mark Vilca-Apaza,¹ Fredy Sosa Gutierrez,² Manuela Daishy Casa-Coila,³ Dometila Mamani-Jilaja,⁴ Alex Junior Huanca Larico⁵

Resumen: Las dificultades en la resolución de problemas aditivos son una problemática que afecta a niños de Perú, y repercute negativamente en el desarrollo de competencias matemáticas y apatía a esta ciencia. El objetivo del presente fue determinar si la yupana, o ábaco peruano, como recurso didáctico, es eficaz para la resolución de problemas aditivos sin y con canje en estudiantes del segundo grado de una escuela intercultural de Perú. El estudio es cuasiexperimental con grupo experimental y control. Se realizó en una población de 108 niños de 7 a 8 años de edad, con una muestra no probabilística por conveniencia de 30 y 29 niños, respectivamente. Los datos se obtuvieron con la Prueba de Resolución de Problemas con una validez mayor a 37 puntos

Fecha de recepción: 26 de marzo de 2023. **Fecha de aceptación:** 14 de mayo de 2024.

¹ Universidad Nacional del Altiplano, Instituto de Investigaciones Sociales 'José Antonio Encinas', hvilca@unap.edu.pe, <https://orcid.org/0000-0001-6982-7645>.

² Universidad Nacional del Altiplano, Instituto de Investigaciones Sociales 'José Antonio Encinas', fredysosa@unap.edu.pe, <https://orcid.org/0000-0001-6473-3877>.

³ Universidad Nacional del Altiplano, Facultad de Ciencias de la Educación, mcase@unap.edu.pe, <https://orcid.org/0000-0001-6335-7697>.

⁴ Universidad Nacional del Altiplano, Facultad de Ciencias de la Educación, domamani@unap.edu.pe, <https://orcid.org/0000-0003-2357-8684>.

⁵ Universidad Nacional del Altiplano, Instituto de Investigaciones Sociales 'José Antonio Encinas', alekeybroly@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0008-5700-9010>.

(favorable). Según los resultados, la capacidad de resolver problemas aditivos sin y con canje, en el grupo experimental, mejoró en 8,67 puntos. Se concluye que la yupana modificada, como recurso didáctico, es eficaz para resolver problemas de adición y sustracción sin y con canje de hasta tres cifras.

Palabras clave: *ábaco, adición, canje, interculturalidad, recurso didáctico, resolución de problemas, sustracción, yupana.*

Abstract: Difficulties in solving additive problems are a problem that affects children in Peru, and has a negative impact on the development of mathematical skills and apathy towards this science. The objective of this study was to determine if the yupana, or Peruvian abacus, as a didactic resource, is effective for solving additive problems without and with exchange in second grade students of an intercultural school in Peru. The study is quasi-experimental with an experimental and control group. It was carried out in a population of 108 children from 7 to 8 years of age, with a non-probabilistic convenience sample of 30 and 29 children, respectively. The data was obtained with the Problem Solving Test with a validity greater than 37 points (favorable). According to the results, the ability to solve additive problems without and with exchange, in the experimental group, improved by 8.67 points. It is concluded that the modified yupana, as a didactic resource, is effective for solving addition and subtraction problems without and with exchange of up to three figures.

Keywords: *abacus, addition, exchange, interculturality, didactic resource, problem solving, subtraction, yupana.*

1. INTRODUCCIÓN

La matemática es fundamental no solo porque proporciona conocimientos y habilidades para la vida (Pérez y Ramírez, 2011; Castro *et al*, 2021; Berrocal y Palomino, 2022) sino porque, además, ayuda a afrontar con éxito cuestiones y desafíos relativos a aspectos personales, profesionales, sociales y científicos (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], 2017); sin embargo, es el área que evidencia mayores problemas de aprendizaje. El Ministerio de Educación del Perú, en el 2019 realizó la Evaluación Muestral (EM-2019) a fin de verificar los aprendizajes logrados en la competencia 'Resuelve problemas de cantidad' según Currículo Nacional, que comprende la capacidad de uso de operaciones en estudiantes del segundo grado de educación primaria a nivel nacional (siete a ocho años de edad). Los resultados indican que solo 17.00% logra desarrollar satisfactoriamente dicha competencia; en tanto, 31.90%, 40.80% y 10.30% se encuentra en el nivel 'En proceso', 'Previo al inicio' y 'En inicio', respectivamente, haciendo un total de 83.00% que no logran desarrollarla, situación que se refleja en el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) promovido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). La problemática se agrava en los niños del medio rural de Puno, con alta presencia de culturas indígenas quechua y aymara, que asisten a una escuela castellanizante excluyente de sus elementos culturales y su lengua, promotor del racismo epistémico (Vilca *et al*, 2018).

Aunque la EM-2019 no precisa las dificultades que se presentan al resolver problemas de cantidad, la evaluación diagnóstica aplicada a los estudiantes del segundo grado de la institución educativa Glorioso 821 de Macusani, Perú, advierte que son errores en la adición 'llevando' o con reagrupación (cambio de un orden de magnitud inferior a otro superior) y sustracción 'con préstamo' o con reagrupación, dificultades que no les permiten hallar la respuesta correcta, tal como advirtió Bernedo (2018). Los niños aún no evidencian haber consolidado su pensamiento aditivo y sustractivo, específicamente en la resolución operatoria de problemas. Cuando los niños operan la adición 'llevando' de dos cifras, en este caso $24+46$, al sumar las unidades $4+6$ escriben como resultado 10, es decir, aún no comprenden el proceso de 'canje' de 10 unidades por una decena o, si lo hacen, lo hacen de forma automática, no comprenden el 'por qué' se 'lleva 1' al orden superior de las decenas (figura 1). De igual modo, al resolver un problema que implica el uso de la resta 'con préstamo' de tres cifras como $495-357$ (figura 2), al restar las unidades $5-7$ colocan como resultado '2',

obviando acudir al 'préstamo' de una decena para incrementar (reagrupar) el minuendo. Entonces 'una decena' más 'cinco unidades' resulta 15 y $15 - 7$ es 8 y no 2. Obvian que el 'minuendo' debe ser mayor al 'sustraendo' para efectuar la resta. Las consecuencias no se limitan a 'no poder resolver el problema' sino, y lo que es peor, el niño crece con la idea de que 'no sirve para las matemáticas', cultivando así el rechazo a esta ciencia.

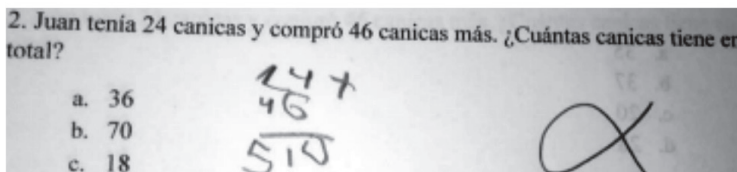


Figura 1. Dificultad en la adición con canje - Prueba de entrada.

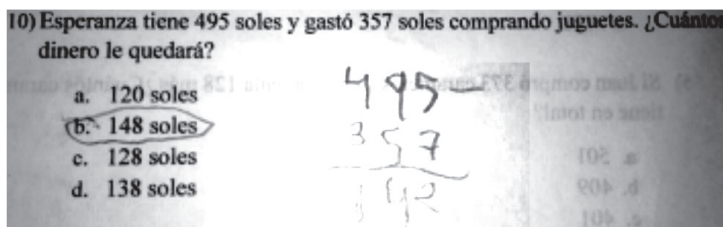


Figura 2. Dificultad en la sustracción con canje - Prueba de entrada.

Sin embargo, estas dificultades en la resolución operatoria de problemas matemáticos no son un mero error de procedimiento de ejecución como indicó Caballero (2005), requiere comprensión y dominio de procesos previos como la composición y descomposición de números dentro del sistema decimal, comprensión del concepto y proceso del canje, comprensión del valor posicional de los números, conocido también como valor relativo de acuerdo a la posición (Martínez *et al.*, 2021). También pueden estar vinculados a que no dominan aún los conceptos o no han descubierto la estrategia correcta para resolverlo (Berrocal y Palomino, 2022). El comprender dichas propiedades matemáticas de las operaciones resulta fundamental para resolver matemáticamente un problema de adición y sustracción con precisión.

Es fundamental que, en los primeros años de la educación básica, los niños desarrollen la capacidad de comprender las operaciones básicas (adición,

sustracción, multiplicación y división), el pensamiento aditivo y sustractivo, para desenvolverse eficientemente en cualquier situación de la vida, y sea esa la base para el desarrollo de capacidades matemáticas más complejas y actitudes positivas hacia la matemática, siendo esta la base para todas las áreas del conocimiento. Es importante que dominen las propiedades de los números y las operaciones, es decir, desarrollen habilidades para la descomposición y agrupación (Barreda-Mora *et al.*, 2018). La resolución de problemas es una actividad significativa para el desarrollo de habilidades y estrategias en el aprendizaje de la matemática (Rodríguez *et al.*, 2017; Castro *et al.*, 2021), y no es un fin en sí mismo, sino el medio para alcanzar otros fines, por ejemplo, adquirir conocimientos complejos de otras áreas y para la vida.

En parte, esta realidad se deriva de una enseñanza y aprendizaje retórica de la matemática, es decir, expositiva y sin materiales educativos más que la pizarra y plumones (López, 2015; Guzmán *et al.*, 2018), donde el estudiante escucha y el profesor expone (Berrocal y Palomino, 2022). Un aprendizaje óptimo exige, entre otros factores, no solo el abandono de la memorización de conceptos matemáticos o aplicación de procedimientos de forma mecánica (Sandoval, 2006; Gasco, 2016; Berrocal y Palomino, 2022), sino del empleo de materiales educativos concretos que puedan ayudar a asimilar conceptos abstractos y comprender procedimientos de resolución, especialmente cuando los niños están, de acuerdo a Jean Piaget, en la etapa de las Operaciones Concretas (7 a 11 años), caracterizada por la necesidad de aprender manipulando. Nótese el mismo informe de la UMC-2019 al indicar que del total de estudiantes (17%) que alcanzaron el nivel 'Satisfactorio', el 67.70% lo hicieron porque sus profesores emplearon materiales en la enseñanza con mayor y menor frecuencia en el área de matemática.

A fin de revertir la problemática descrita, se identificó un instrumento de cálculo nemotécnico inca, la yupana, con bondades para la educación matemática. Diversos autores como Villavicencio (1983), Pachas (2016), Aroca y Lasso (2016), Apaza (2017), Guzmán *et al.* (2018), Bustos *et al.* (2019), Mora y Valero (2019), Carrillo (2020), Figueroa y Mena (2020) exponen las cualidades para el aprendizaje de las operaciones aritméticas en educación básica a nivel América Latina (Hernández, 2004; Vilca-Apaza *et al.*, 2023), como hacer del lenguaje matemático abstracto un lenguaje comprensible. La yupana, un material concreto, permite la construcción del número al facilitar desarrollar los procesos de seriación, clasificación, ordinalidad, cardinalidad, correspondencia biunívoca y conservación (Pardo, 2018; Yon y Muená, 2020), procesos previos para la suma

y resta. Del mismo modo, Paragua *et al.* (2021) lo aplicó en el aprendizaje de la multiplicación de números enteros en estudiantes universitarios.

Entre otras aplicaciones poco conocidas está que con la yupana es posible desarrollar operaciones complejas como números decimales, fracciones, enteros, radicales, matrices, vectores, raíz cuadrada, potenciación, logaritmos, razonamiento lógico matemático, con posibilidad de adaptarse a diferentes niveles educativos (inicial, primaria, secundaria y superior) y zonas (rural y urbana) (Wilca-Apaza *et al.*, 2023). Inclusive, se han desarrollado yupanas digitales (Rojas y Stepanova, 2015) o videojuegos como la yupana Yupi 10 de Montalvo-Castro (2014), cuyos efectos requieren ser investigados científicamente en futuras investigaciones.

Por lo expuesto, el objetivo del estudio fue determinar si la yupana modificada (YM) es un recurso didáctico eficaz para desarrollar la capacidad de resolver problemas aditivos de adición y sustracción de números naturales, con y sin canje en estudiantes del segundo grado de una escuela intercultural de Perú de habla quechua y castellana, donde los aprendizajes son en ambas culturas y no se limitan a la originaria. Sin embargo, cuando se aprende la matemática occidental, se presentan problemas diversos, siendo uno de ellos en la resolución de problemas de cantidad. Es importante acercar a los niños a la cultura occidental, partiendo de su cultura y no apartándolos de lo propio, evitando procesos traumáticos de aprendizaje, aburrimiento, apatía y temor a la matemática.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 LA YUPANA Y EL MÉTODO DE WILLIAM BURNS

La literatura oficial presenta al ábaco inca o *yupana*, del quechua 'contar' (Radicati, 1951; Ríos, 2013; Paragua *et al.*, 2021), como un logro cultural inca; aunque sus orígenes se remontan a tiempos preincaicos (Moscovich, 2006; Pachas, 2016). El mérito de los incas fue su perfeccionamiento y masificación a lo largo del Tawantinsuyo. Esta herramienta matemática es un tablero de cálculo (Radicati, 1951; Pareja, 1986) donde se realizaba no solo operaciones matemáticas básicas como suma, resta, multiplicación y división con números naturales, sino complejas con decimales, potencia, raíz cuadrada, logaritmos y matrices (Wilca-Apaza *et al.*, 2023). Ha de saberse que, desde el hallazgo de la yupana arqueológica de Chordeleg (1869) en Ecuador y luego en Perú, se ha encontrado una diversidad de yupanas, entre arqueológicas y etnográficas que son presentadas en el estudio

de Vilca-Apaza *et al.* (2023). A este último corresponde la yupana de Guamán Poma de Ayala (figura 3, izquierda), que se encuentra graficada en la página 360 de *El primer nueva corónica y buen gobierno* hallada en la Biblioteca Real de Copenhague en Francia en 1908. Un tablero rectangular de 4 columnas por 5 filas sobre el que se han propuesto varios métodos de cálculo. El primero en interpretarlo fue Winer (1876), seguido de Wassén (1931), Radicati (1951), Mendizábal (1976), Burns (1981), De Pasquale (2001) y otros.

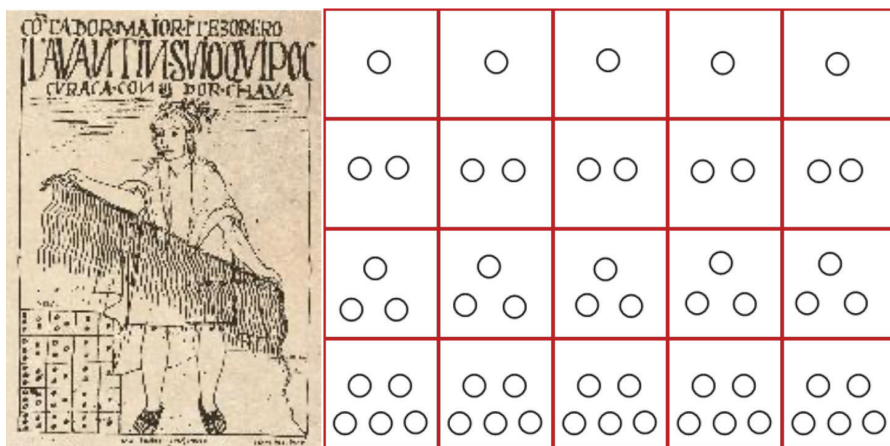


Figura 3. La yupana de Guamán Poma en su posición original vertical (izquierda) y recreación de la misma en posición horizontal (derecha). Fuente: Guamán (1615, p. 360).

La *Historia Natural y Moral de las Indias* de José de Acosta (2008[1590], p. 211) ofrece una cita que fue fundamental para la interpretación de la yupana de Guamán Poma "tomarán... sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasaran un grano de aquí; trocarán tres de acullá, y en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente, sin error tilde".

Wassén (1931), quien lo mantuvo en su posición original (forma vertical), postulaba que los círculos blancos de la yupana eran hoyos del tablero y los de color negro indicaban que estaban cubiertos por fichas empleadas para realizar cálculos en el sistema de numeración decimal. Las unidades se ubican en la primera fila inferior; las decenas, en la segunda; las centenas, en la tercera, las unidades de millar, en la cuarta; y las decenas de millar, en la quinta. La progresión de los valores de las semillas depende de su posición en la tabla. La

propuesta inicial de Wassén fue que en el primer casillero cada agujero tiene el valor de uno ($5 \times 1 = 5$), en el segundo el valor de cinco ($3 \times 5 = 15$), en el tercero quince ($2 \times 15 = 30$) y en el último treinta ($30 \times 1 = 30$). Dicha propuesta fue incompatible con el sistema de numeración decimal, siendo un recurso didáctico poco apropiado para la enseñanza de la matemática. Al no ser sostenible, quedó desfasada, sirviendo de base a otros estudios.

Con los avances de Wassén, Radicati Di Primeglio (1979), manteniendo la posición original de la yupana, propuso un método original y quizá la más próxima a como los incas la emplearon (Wilca-Apaza *et al.*, 2023). Para Radicati el tablero de la yupana no lleva grabada los círculos, los valores se deben representar y conservar mentalmente, requiriéndose del trabajo nemotécnico, de la capacidad de abstracción y cálculo mental. Una posibilidad que va de la mano con la etapa del pensamiento formal de Piaget. En este método cada columna, independiente de las otras, sirve para representar un número. El tablero tiene los valores 5-3-2-1 para todas las filas, estos deben multiplicarse por las potencias de base 10 (Pacheco, 1999). Los valores en la primera fila (que representa a las unidades) son $5 \times 10^0 = 5$, $3 \times 10^0 = 3$, $2 \times 10^0 = 2$, $1 \times 10^0 = 1$; en la segunda (decimales), $5 \times 10^1 = 50$, $3 \times 10^1 = 30$, $2 \times 10^1 = 20$, $1 \times 10^1 = 10$; en la tercera (centenas), $5 \times 10^2 = 500$, $3 \times 10^2 = 300$, $2 \times 10^2 = 200$, $1 \times 10^2 = 100$; en la cuarta (unidades de millar), $5 \times 10^3 = 5000$, $3 \times 10^3 = 3000$, $2 \times 10^3 = 2000$, $1 \times 10^3 = 1000$; y en la quinta (decenas de millar), $5 \times 10^4 = 50000$, $3 \times 10^4 = 30000$, $2 \times 10^4 = 20000$, $1 \times 10^4 = 10000$. Siendo así, la ficha adquiere un valor dependiendo del casillero en que se encuentre.

Un ejemplo de adición de números naturales es: para $18 + 22 + 47$, el método es (ver figura 4): En a) están representados los sumandos, por razones didácticas se han empleado marcas, para el 18 se usa "o", para 22 "." y para 47 "x". En b) se simplifican las fichas de valor 2 y 3 que hacen 5 por lo que se coloca en la casilla '5'. En esta misma casilla, dos fichas que hacen 10 deben ser llevadas a la casilla '1' de las decenas. En c) en la casilla del '10', tenemos ahora tres fichas en '1' y en la del '2' una ficha, luego su valor es 50, que debe ser colocado con una ficha en la casilla del '5'. En d) se observa que no hay más simplificaciones, la reducción está completa, siendo la respuesta 87.

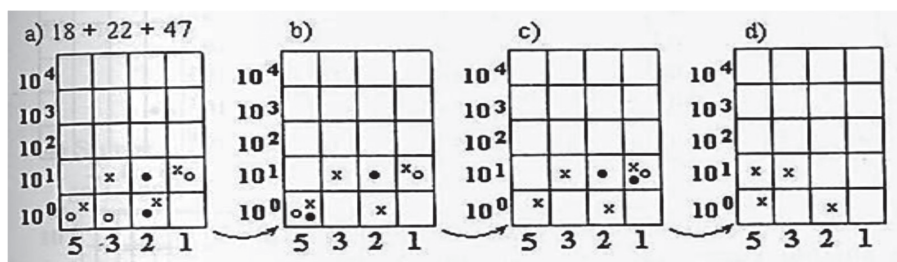


Figura 4. Adición en la yupana de Radicati. Fuente: Pacheco (1999, p. 43).

Por su parte, el método de Burns (1981) resulta más asequible, objetivo y práctico, donde cada uno de los agujeros de la Yupana deben ser cubiertos con semillas, piedrecillas o fichas para representar números y realizar operaciones aritméticas. Burns, revirtió la posición original del tablero, girándola 90° en sentido contrario a las agujas del reloj, dándole posición horizontal (figura 3, derecha), conservando las celdas y sus respectivos agujeros o valores. De derecha a izquierda, la primera columna representa al orden de las unidades; la segunda a las decenas; la tercera a las centenas, así sucesivamente. Cada columna tiene cuatro casillas con agujeros en las cantidades siguientes 5-3-2-1, de abajo hacia arriba. El cálculo de las operaciones matemáticas se realiza en las casillas 5, 3 y 2 que suman 10, lo que permite detectar órdenes en el sistema decimal. La 'casilla 1' (de un agujero) es la 'casilla memoria' y equivale a 10. Las semillas deben colocarse siempre de abajo hacia arriba (5-3-2). En la yupana de base decimal, diez unidades forman una unidad de orden inmediato superior y viceversa. Si en la columna de las unidades ya se tiene los diez agujeros llenos, que equivale a una decena, se las debe 'canjear' por una ficha que debe colocarse en el agujero 'memoria' de las decenas. Esto facilita realizar canjes entre órdenes con seguridad (de unidades a decenas y viceversa). Con este método, el cálculo aritmético resulta más sencillo y objetivo que el método de Radicati que es abstracto o mental.

Obsérvese la figura 5. En la yupana de Burns, para sumar $76 + 15$, se inicia representando el primer sumando con 6 fichas en la columna de las unidades y 7 en las decenas (a); el segundo sumando, con 5 fichas en las unidades y 1 en las decenas (b). Luego, por el método de simplificación, como 6 y 5 suman 11 (5, 3, 2 y 1), diez fichas de las unidades son 'llevadas' (canje) (una ficha en la casilla memoria) a la columna de las decenas, quedando 1 en las unidades (c). En la columna de las decenas, 7 y 1 son 8, más una ficha 'canjeada' son 9.

El conteo da como resultado 91 (d). En la figura 6, para efectuar la resta $56 - 34$, se debe emplear fichas de diferentes colores. Primero, se representa las fichas del minuendo (6 fichas en las unidades y 5 en las decenas) y luego el sustraendo (4 en unidades y 3 en decenas). Por el método del retiro, dado que el sustraendo es la cantidad a quitar, retiramos 4 pares de fichas de las unidades y 6 pares de las decenas, siempre que sean fichas opuestas. El resultado es la ficha o fichas que quedan, en este caso 22. Estas resoluciones son de acuerdo al método original de Burns.

El método que ha tenido mayor aceptación en la educación matemática, a nivel de América Latina, es el de William Burns Glynn (1981), empleado en 96% de experiencias desarrolladas (Vilca-Apaza *et al.*, 2023), debido a que es el que mejor se adapta a las necesidades pedagógicas escolares de los niños en la etapa del pensamiento concreto.

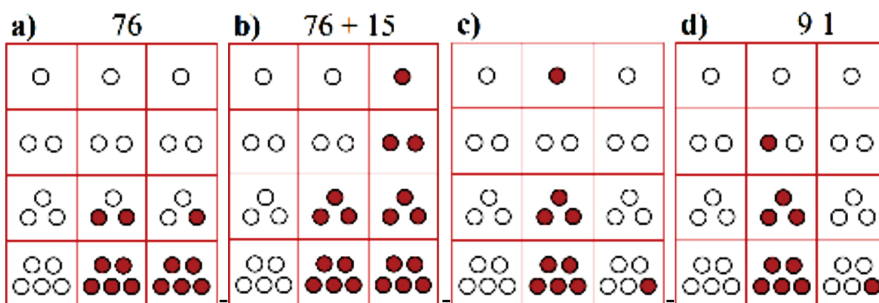


Figura 5. Adición en la yupana de Burns.

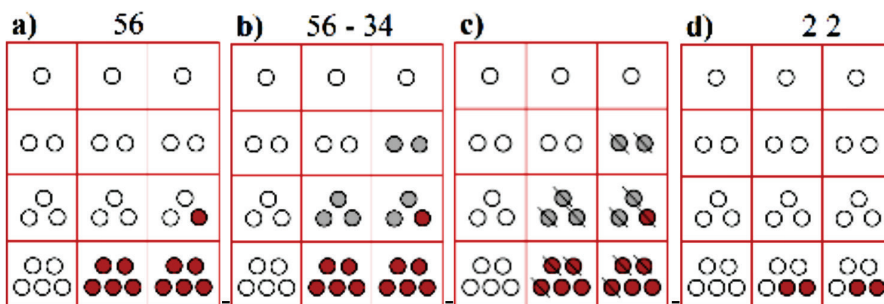


Figura 6. Sustracción en la yupana de Burns

2.2 LA YUPANA MODIFICADA (YM) COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN SIN Y CON CANJE

Con base en el tablero horizontal de Burns, los niños elaboraron su yupana modificada (YM) a partir de la propuesta hecha por los investigadores. No fue objetivo de la investigación la validación cultural de la YM, su modificación fue con fines de mejorar la comprensión de los conceptos de canje y resolución de problemas matemáticos. El diseño obedece a razones didácticas (figura 3, derecha), a la edad de los niños y para operar con el método de marcha objetiva de Burns. Se empleó material de bajo costo y reciclable como corrosppum (verde, rosado, celeste y negro), cartón simple de 51 cm x 30 cm para la base, tapas de botella de gaseosa de los colores verde, rojo y azul (fichas), silicona, plumón indeleble y tijera (figura 7). Es un tablero modificado de seis y tres columnas adecuado para la adición y sustracción de hasta 3 cifras. Las filas comprenden el 'valor posicional', la 'casilla memoria', el 'espacio de cálculo' y la 'fila de resultados'.

El 'valor posicional' consigna las iniciales U (unidades), D (decenas) y C (centenas) que ayudan a identificar y diferenciar los órdenes. La 'casilla memoria' queda sin agujero y sirve para representar el segundo sumando o el sustraendo. Es también la casilla de los canjes que posibilita representar la cantidad 'llevada' en las sumas y la cantidad 'prestada' en las restas, permitiendo comprender el porqué de un canje. Por ejemplo, cuando las casillas 5, 3 y 2 de las unidades se han completado con fichas, las 10 deben ser reemplazadas por una ficha en la 'casilla memoria' de las decenas. Esta configuración es la que permite comprender y realizar con facilidad la suma y la resta con canje (llevando o prestando). Siendo la yupana un elemento cultural propio, puede motivar a aprender la matemática partiendo de lo suyo. El 'espacio de cálculo' está conformado por las casillas 5, 3 y 2, haciendo un total de 10. La 'fila de resultados' es donde se escriben las respuestas simbólicamente.

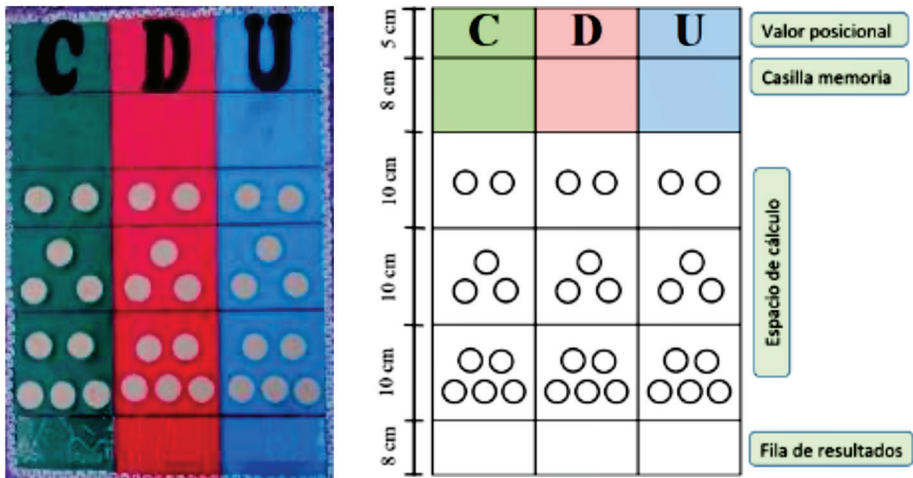


Figura 7. Versión final de la Yupana modificada.

Se denominan problemas aritméticos a aquellos enunciados que presentan datos cuantitativos, donde existen relaciones entre los datos y la acción propuesta, cuya resolución requiere de ejecutar operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división (Echenique, 2006). Pueden ser prácticos, cuando están relacionados a actividades u objetos de su comunidad, y formales si no están vinculados al contexto (García-García *et al.*, 2014). Su grado de dificultad pone a prueba la capacidad cognitiva del niño. Dichos problemas aditivos o aditivo-sustractivos implican una solución racional de la situación problemática donde interviene la operación de adición y sustracción (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2019), requieren de la acción mental de realizar un algoritmo aritmético, precisa que el resolutor comprenda y determine si el problema debe ser resuelto aplicando el algoritmo de adición o sustracción (problema de primer nivel o simple) o empleando ambos (problema de segundo nivel o complejo). La resolución debe ser secundada de material educativo, cuando se trata de niños del periodo de las operaciones concretas, para hallar la respuesta con precisión.

Los problemas aditivos tienen una estructura semántica siguiente: cambio, combinación, comparación e igualación (Riley *et al.*, 1983; Cañadas y Castro, 2011; Rodríguez-Nieto *et al.*, 2019), diferenciándose por su complejidad semántica de sus enunciados. Un problema con estructura de cambio es "Juan compró 405 gallinas para su granja. Si ya tenía 216, ¿cuántas gallinas tiene en total?"; una de combinación: "Al cumpleaños de Pedro asistieron 65 varones y 74

mujeres. ¿Cuántas personas asistieron en total?"; una de comparación: "Leonar tiene 12 ovejas y Anel 9 ovejas más que Leonar. ¿Cuántas ovejas tiene Anel?" y una de igualación: "Juan tiene 12 alpacas. Si perdió 47 alpacas, ¿cuántas alpacas tenía al inicio?" No solo es importante resolver los problemas con precisión sino comprenderlos. Por lo que, la variación de estas estructuras es importante porque permite desarrollar la capacidad de pensamiento, lo contrario implica que los estudiantes memoricen y resuelvan problemas aditivos tipo (de demanda cognitiva baja).

La resolución de problemas aditivos es una de las habilidades del razonamiento lógico matemático y es un proceso cognitivo, creativo y complejo en el que el estudiante debe idear o 'pensar' un método de resolución empleando sus conocimientos previos y procedimientos algorítmicos como heurísticos (Marino y Rodríguez, 2015, citado por Blanco-Benamburg *et al.*, 2021). Este proceso heurístico, no necesariamente lineal, comprende pasos como la representación (moviliza conocimientos lingüísticos, semánticos y esquemáticos para comprender el problema), planificación (estrategia que aplicará para resolverlo como el uso de tablas, dibujos, ecuaciones, etc.), ejecución (realización de cálculos y representación visual-pictórica como dibujos, materiales, diagramas y esquemas) y supervisión (evaluación de la respuesta como del procedimiento) (Proença, 2022). Pólya (1989) los llama comprensión, concepción de un plan, ejecución y visión retrospectiva. Es en este proceso de ejecución o resolución operatoria que juega un rol importante la yupana.

La manipulación de material concreto como la YM en los primeros grados es importante porque activa los sentidos del estudiante para acceder al conocimiento, estimula los órganos sensoriales de quien aprende, poniéndolo en contacto con el objeto de aprendizaje, reteniéndose 90% de lo que se realiza (Sandoval, 2006; Vargas, 2017). Ayuda a formar y comprender conceptos al propiciar las fases del aprendizaje de la matemática: concreta (manipulación de la yupana), gráfica (representación) y simbólica (conceptos), garantizando que este último esté dotado de significado. Permite resolver problemas realizando funciones cognitivas como representar cantidades, comprender el sistema decimal, realizar canjes, resolviendo operaciones aritméticas correctamente. Facilita la comprensión del concepto y habilidad de 'canje', el porqué se lleva o presta una cantidad de determinado orden posicional. Adecuado para comprender la composición y descomposición de cantidades y tratamiento de la numeración decimal (Apaza, 2017). La enseñanza abstracta puede causar que los niños no comprendan estos procesos matemáticos, por lo que los primeros conceptos y

destrezas deben estar vinculados a la utilización de recursos didácticos, para transitar gradualmente a lo formal.

En la resolución y verificación de problemas que requieren agregar, quitar, unir o igualar es necesario el empleo de material concreto (Sandoval, 2006). Tanto en la adición, un algoritmo de composición que consiste en 'unir' o 'añadir' y 'combinar' (Obeso, 2017) dos o más cantidades (números) llamados 'sumandos' para obtener otra cantidad mayor o total llamada 'suma'; como en la sustracción que es una operación aritmética consistente en 'quitar' o 'sustraer' de una cantidad llamada 'minuendo' otra denominada 'sustraendo' para obtener una cantidad menor llamada 'resta' o 'diferencia', la YM permite realizar estas operaciones cumpliendo las fases del aprendizaje concreta, gráfica y simbólica, y facilita la comprensión del concepto de 'canje', sea 'préstamo' o 'llevada', al ser un soporte objetivo.

En el ejemplo: "La mamá de Anel tenía 374 paquchas⁶ y compró 245 más. ¿Cuántas paquchas tiene ahora?", como *primer paso*, se representa el primer sumando 374 en el área de cálculo (3 fichas en la columna de las centenas, siete en las decenas y cuatro en las unidades); mientras el segundo sumando se coloca auxiliariamente en la casilla memoria (2 fichas en las centenas, 4 en las decenas y 5 en las unidades). *Segundo paso*: añadir el segundo sumando a los agujeros vacíos del área de cálculo, de faltar agujeros, se debe realizar 'canjes', en este caso 'llevar'. Al sumar $4 + 5$ en las unidades, no hay dificultad; sin embargo, en las decenas, al añadir 7 a 4, faltan espacios, por lo que es necesario 'canjear' (llevar) 10 fichas por una ficha en las centenas (1 ficha en la casilla memoria), de este modo el niño comprende que aquello de 'llevar 1' significa llevar 10 decenas. *Tercer paso*: Contabilizar las cantidades de las columnas para obtener la suma; en las unidades se tienen 9, en las decenas 1 (igual a 10) y en las centenas 6 (igual a 600), haciendo una suma de $600 + 10 + 9 = 619$ (figura 8). La YM es idónea porque se adecua al sistema decimal y sobre todo porque tiene un diseño que permite hacer cambios o canjes.

⁶ Paqucha. Llámese en idioma quechua a la alpaca, auquénido que vive en Puno, Perú.

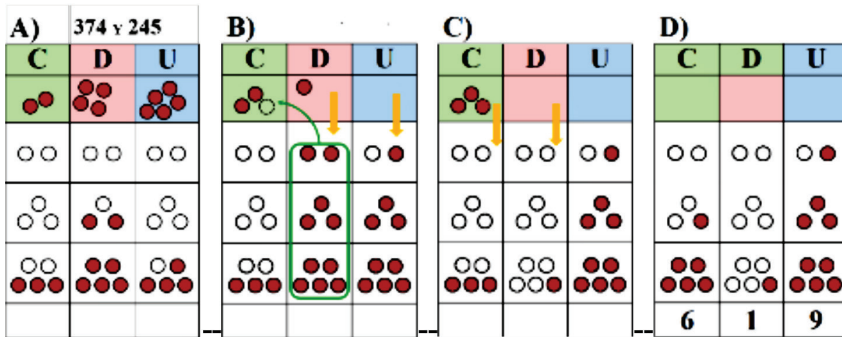


Figura 8. Sustracción con y sin canje en la yupana modificada.

En el ejemplo de la figura 9: "Leonar compró 425 figuritas para su álbum. Si Ferdinand tiene 326 figuritas menos, ¿cuántas figuritas tiene?" Comprendido el problema e identificado la operación a aplicar, se procede a efectuar la resta en la yupana. Tratándose de una operación de 'quitar' se debe emplear fichas de dos colores, en este caso, rojo para el minuendo y amarillo para el sustraendo. *Primer paso:* representamos el minuendo (5 fichas en las unidades, 2 en las decenas y 4 en las centenas); mientras que, en las casillas memoria colocamos el sustraendo (6 en las U, 2 en las D y 3 en las C) (a). *Segundo paso:* ingresamos el sustraendo en la zona de cálculo. Retiramos fichas, un sustraendo por un minuendo, hasta que no quede ninguna ficha del sustraendo en ningún orden (b); de lo contrario, se acude al préstamo, tal cual sucede en el orden de las unidades. Una ficha de la decena se convierte en 10 unidades (c), con lo que podrá retirar la ficha sustraendo restante (d). *Tercer paso:* se contabilizan las fichas sobrantes del minuendo en cada orden, siendo esa la respuesta (e).

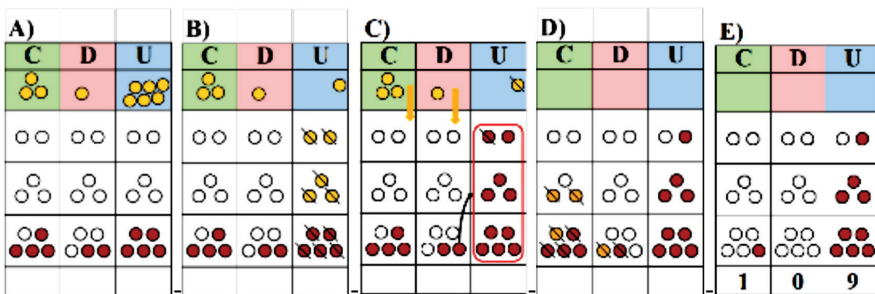


Figura 9. Sustracción con y sin canje en la Yupana modificada.

3. METODOLOGÍA

3.1 LUGAR DE ESTUDIO

La investigación se desarrolló en la institución educativa primaria intercultural del distrito de Macusani, capital alpaquera del Perú, región de Puno, históricamente multicultural y multilingüe (castellano-quechua), el mismo que se ubica a 4,315 m.s.n.m., al sur de Perú, con coordenadas geográficas -14.068470837762654 -70.43137081562463 y, una temperatura mínima y máxima de 3,9°C y 5,2°C.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA DE ESTUDIO

El estudio estuvo constituido por 108 estudiantes de habla bilingüe (quechua-español) del segundo grado (7 a 8 años de edad) de la institución educativa primaria Glorioso 821 de la Unidad de Gestión Educativa Carabaya - Macusani, constituido por las secciones A (30 estudiantes), B (29), C (25) y D (24), de acuerdo a la Nómina de matrícula 2022 de la institución. Tratándose de grupos preconstituidos, la muestra se determinó por muestreo no probabilístico por conveniencia (Hernández *et al.*, 2014; Ñaupas *et al.*, 2018). Se eligieron las dos secciones con mayor composición estudiantil, uno para el grupo experimental (30) y el otro para el grupo control (29). Según, la Prueba de Entrada ambos grupos inician el tratamiento en iguales condiciones de nivel de conocimiento, tal como se aprecia en la tabla 2, donde el GE tiene un promedio de 8,53 y el GC, 8,55 puntos, con un $p=0,984 > 0,05$ que indica que no existe diferencia significativa entre los puntajes.

3.3 TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El estudio midió la eficacia de la aplicación de la yupana modificada para la resolución de problemas aditivos; por lo que, corresponde a una investigación cuantitativa y al tipo de investigación experimental. Debido a que se trabajó con grupos intactos, el diseño fue el cuasiexperimental, con grupo experimental (GE) y control (GC) (Hernández *et al.*, 2014), con prueba de entrada y salida. En dichos diseños no se asigna al azar los sujetos, sino que los grupos ya están conformados (Carrasco, 2013).

3.4 INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

El instrumento empleado para la obtención de datos sobre la capacidad de resolución de problemas aditivos fue la Prueba de Resolución de Problemas (PRP) para así valorar los aprendizajes y sus fundamentos (Jarero *et al.*, 2013). Se empleó en sus formas Prueba de Entrada (PE) para el diagnóstico y Prueba de Salida (PS) para verificar el cambio. Se formularon 10 reactivos en forma de problemas propuestos que permitieron verificar el desarrollo de la capacidad 'Resuelve problemas aditivos', cinco referidos a la adición y cinco a la sustracción, sin y con canje (tabla 1), de acuerdo al Currículo Nacional de Perú, con una puntuación de 2 puntos por respuesta correcta, 20 puntos en total (sistema vigesimal). El examen de juicio de expertos (tres docentes de la UNA Puno con especialidad en educación primaria) alcanzó un índice de validez de 37 puntos (favorable) y un índice V de Aiken de 0.91, que indican que el instrumento tiene validez de contenido (Galicia *et al.*, 2017) y un índice de confiabilidad alfa de Cronbach de 0,70 que significa consistencia interna aceptable.

Tabla 1. Características del instrumento: Prueba de Resolución de Problemas

Operación	Tipos de reactivos	Núm. Ítems	Valoración (puntos)
Adición	Problema de adición de dos cifras sin canje	1	2
	Problema de adición de dos cifras con canje	1	2
	Problema de adición de tres cifras sin canje	1	2
	Problemas de adición de tres cifras con canje	2	4
Sustracción	Problema de sustracción de dos cifras sin canje	1	2
	Problema de sustracción de dos cifras con canje	1	2
	Problema de sustracción de tres cifras sin canje	1	2
	Problemas de sustracción de tres cifras con canje	2	4
Total	8	10	20 puntos

3.5 PROCEDIMIENTO

El periodo de ejecución comprendió los meses de septiembre y octubre del año 2022, empatando con la planificación curricular de la institución. El procedimiento inició con la obtención de la autorización de la institución educativa y el consentimiento de los padres de familia. Se aplicó la PE a ambos grupos a fin de medir las capacidades matemáticas al inicio del experimento. Se procedió con la aplicación de la yupana modificada (10 sesiones de aprendizaje de 60 minutos de duración cada una y dos veces por semana) al grupo experimental. La sesión consistió en: *Inicio*: motivación, saberes previos, problematización y propósito; *Desarrollo*: familiarización del problema, búsqueda y ejecución de estrategia (resolución de problemas con la yupana modificada elaborada por los niños), socialización y reflexión. Se desarrollaron problemas con operaciones de adición y sustracción con dos dígitos sin canje, con tres cifras con y sin canje. Entre tanto, en el grupo control se desarrollaron expositivamente los mismos temas, sin el uso de recurso educativo. El proceso culminó con la aplicación de la PS a ambos grupos con una duración de 45 minutos. La participación de los investigadores fue en la etapa de planificación (planes, material y coordinación), ejecución de sesiones y posterior tratamiento y redacción del manuscrito.

3.6 PROCESAMIENTO Y DISEÑO ESTADÍSTICO

El procesamiento estadístico de datos, tanto descriptivo como inferencial, se efectuó en el aplicativo IBM-SPSS v.27. La estadística descriptiva consistió en tablas de porcentajes y medidas de tendencia central. La prueba de hipótesis se hizo con la T de Student en SPSS, a un nivel de confianza del 95.00%, con una regla de decisión de: si valor de la probabilidad $< 5\%$ (0,05) se acepta la H_a : Existe diferencia significativa de medias; caso contrario, se acepta la H_o : No existe diferencia significativa entre medias. La prueba de normalidad, Shapiro-Wilks para $n < 50$, indica que los datos siguen una distribución normal, por lo que se aplicó la prueba estadística paramétrica de T de Student ($p < 0.05$). Para determinar la diferencia de medias entre las PE y entre las PS del GC y GE, se aplicó la prueba de diferencia de medias de grupos independientes; y para determinar la diferencia de medias entre la PE y PS del grupo experimental, la prueba de diferencia de medias de grupos emparentados.

4. RESULTADOS

De acuerdo a los resultados de la PE, 66.70% de estudiantes del GE y 86.20% del GC del segundo grado de la IEP Glorioso 821 se encontraban en el nivel 'En inicio' con un promedio de 8,53 y 8,55 puntos, respectivamente (tabla 2). Ello quiere decir que, los estudiantes tenían dificultades para resolver problemas de adición y sustracción sin y con canje, antes del experimento. La prueba de muestras independientes al 95% de confianza arroja un valor $p=0,984 > 0,05$, con lo que se rechaza la H_a , es decir, no hay diferencia significativa entre los puntajes de las pruebas de entrada de ambos grupos.

Tabla 2. Resultados sobre la capacidad de resolver problemas aditivos, grupo experimental y control, prueba de entrada y salida.

Grupo	Capacidad de resolver problemas	Prueba de entrada		Promedio preprueba (puntos)	Prueba de salida		Promedio posprueba (puntos)
	Escala de calificación	fi	%		fi	%	
Experimental	<i>En inicio</i> (00-10)	20	66.70	8,53	0	0.00	17,20 (+8,67)
	<i>En proceso</i> (11-13)	7	23.30		1	3.30	
	<i>Logro previsto</i> (14-16)	3	10.00		11	36.70	
	<i>Logro destacado</i> (17-20)	0	0.00		18	60.00	
Control	<i>En inicio</i> (00-10)	25	86.20	8,55	10	51.70	11,31 (+2,76)
	<i>En proceso</i> (11-13)	1	3.40		6	13.80	
	<i>Logro previsto</i> (14-16)	3	10.30		2	34.50	
	<i>Logro destacado</i> (17-20)	0	0.00		0	0.00	

Luego de la experimentación, 60% de estudiantes del GE se ubican en el nivel 'Logro destacado' en cuanto a la capacidad de resolver problemas aditivos, tanto adición como sustracción, incrementando de 8,53 a 17,20 puntos, con una mejora de 8,67 puntos de su promedio y un $p=0,001 < 0,05$, que significa que, gracias al empleo de la yupana, como recurso didáctico, los estudiantes del GE evidencian mejores habilidades para resolver problemas aditivos con canje y sin canje hasta tres cifras. En tanto, en el GC, un porcentaje mayoritario, 51.70%, aún continúa en el nivel 'En inicio', apreciándose solo un incremento de 2,76 puntos en su promedio, ello quiere decir que aún tienen dificultades para

resolver problemas aditivos. También es notorio que entre la prueba de salida del GE y GC, existe una diferencia de medias de 5,89 puntos y un valor de $p=0,001 < 0,05$, aceptándose la H_a : hay diferencia significativa entre los puntajes de las pruebas de entrada entre ambos grupos. Los estudiantes aprendieron a resolver problemas aditivos de adición y sustracción con y sin canje sin dificultad porque entendieron los procesos previos, el concepto de canje y el procedimiento que la yupana posibilita. Cuando se aprende con materiales, se aprende mejor y se pierde el miedo a las matemáticas.

Tabla 3. Resultados de la resolución de problemas aditivos en estudiantes del grupo experimental: adición y sustracción sin y con canje..

Capacidad	Ítems evaluados	Puntaje PE*	Promedio Entrada	Puntaje PS*	Promedio Salida
Resuelve problemas aditivos: adición	adición sin llevar con dos cifras	15,33	9,87	19,33 (+4,00)	16,80 (+6,93)
	adición llevando con dos cifras	7,33		16,00 (+8,67)	
	adición sin llevar con tres cifras	16,00		18,67 (+2,67)	
	adición llevando con tres cifras	3,33		14,00 (+10,67)	
Resuelve problemas aditivos: sustracción	sustracción sin préstamo con dos cifras	15,33	7,20	20,00 (+4,67)	17,60 (+10,40)
	sustracción con préstamo con dos cifras	4,00		17,67 (+13,67)	
	sustracción sin préstamo con tres cifras	12,67		19,33 (+6,66)	
	sustracción con préstamo con tres cifras	0,00		13,33 (+13,33)	

* PE = Prueba de Entrada, PS = Prueba de Salida.

Referente a las operaciones sin y con canje, de acuerdo a la tabla 3, se observa que la yupana modificada tiene mayor eficacia en la resolución de problemas con canje. Al inicio del experimento, en relación a la adición, los niños tenían mayores dificultades en las capacidades de resolver problemas de adición 'llevando' de dos y tres cifras, ubicándose en el nivel 'En inicio' con 7,33 y 3,33

puntos respectivamente; y la capacidad de resolver operaciones de adición ‘sin llevar’ de dos cifras y de tres cifras alcanzaba mejores puntuaciones de 15,33 y 16,00 puntos. Culminado el experimento, la capacidad de resolver problemas de adición sin canje de dos y tres cifras ha mejorado en 4,00 y 2,67 puntos respectivamente; y la capacidad de resolver problemas aditivos ‘llevando’ de dos y tres cifras en 8,67 y 10,67 puntos respectivamente, siendo la habilidad más beneficiada con el empleo de la YM elaborada por los mismos niños.

Del mismo modo, en la sustracción, antes del experimento, los resultados indican que la capacidad de resolver operaciones de sustracción ‘sin préstamo’ de dos y de tres cifras alcanzaban 15,33 y 12,67 puntos respectivamente y la capacidad de resolver problemas de sustracción ‘con préstamo’ de dos cifras y de tres cifras alcanzaban 4,00 y 0,00 puntos, respectivamente. La situación ha mejorado notoriamente en la Prueba de Salida. La capacidad que más se desarrolló fue la de resolver operaciones de sustracción ‘con préstamo’ de dos y de tres cifras, con 13,67 y 13,33 puntos de incremento en sus promedios; mientras que la capacidad de resolver problemas de sustracción ‘sin préstamo’ de dos y tres cifras mejoró ligeramente en 4,67 y 6,66 puntos. Los niños comprenden que se debe acudir al préstamo cuando el minuendo es menor al sustraendo y que el prestarse 1 decena equivale a 10 unidades.

Respecto de la adición y sustracción, se advierte también que, gracias al empleo de la YM, la capacidad de resolver problemas de sustracción es la que más se desarrolló con un incremento de 10,40 puntos en su promedio, de 7,20 a 17,60 puntos; en tanto, la capacidad de resolver problemas de adición mejoró en 6,93 puntos en promedio, de 9,87 a 16,80 puntos.

5. DISCUSIÓN

Con los resultados expuestos, el estudio ha demostrado que la YM tiene cualidades para la educación matemática dentro de un contexto intercultural en el que la escuela incorpora elementos culturales originarios al proceso de enseñanza-aprendizaje, específicamente para que niños de segundo grado aprendan a sumar y restar sin dificultad cuando se trata de operaciones sin o con canje. Los resultados obtenidos, refuerzan los alcanzados por otros modelos de yupana como el empleado por Zeballos (2019), quien logró que 80% de estudiantes mejoraran la estimación y cálculo en la resolución de problemas de cantidad, y el de Huanca y Mamani (2021) en niños aymaras y quechuas del medio rural

de Puno, donde 42.7% y 50% ambos grupos experimentales alcanzaron la escala Logro Destacado. Sin embargo, respecto del estudio de Obeso (2017) y Bernedo (2018), en el que estudiantes monolingües del tercer grado (8 a 9 años) de Lima lograron resolver operaciones de 'adición llevando' y 'sustracción prestando' de hasta tres cifras con el apoyo de una yupana sin modificar, el presente estudio revela que el niño puede comprender y resolver dichos ejercicios mucho antes, desde el segundo grado, con el apoyo de material concreto adaptado como la yupana modificada didácticamente.

La importancia del uso de recursos didácticos para optimizar aprendizajes ha sido expuesta por varios autores (Martínez *et al.*, 2021; Santana *et al.*, 2022). Pero al aprender con la YM, un material llamativo, motivador, autóctono, adaptado didácticamente, los niños no solo logran resolver operaciones con precisión, sino que viven aprendizajes ocultos y ricos para su formación integral. Las siguientes expresiones de los niños: "Resolver problemas es más bonito en la yupanita", "Es más fácil prestarse y llevar en la yupana", "Comprobaré mi respuesta en la yupana" o "Hemos aprendido, hemos pensado", son evidencia de que participaron activamente, inclusive los más inhibidos preguntan y dialogan horizontalmente entre ellos y con el profesor, se apoyan, hasta se convierten en *yachachiqkuna* (pequeños profesores) porque la yupana promovió el coaprendizaje. La YM estimula la participación personal y multipersonal (Guzmán *et al.*, 2018), el aprendizaje cooperativo y autoconstructivo (Gasco, 2017; Berrocal y Palomino, 2022).

La matemática se aprende mejor cuando es parte de lo propio. La matemática aborigen debe sintonizar con la de la escuela (Bishop, 1999; Vilca-Apaza *et al.*, 2021) y viceversa, cuidando el uso indiscriminado de los elementos culturales de los grupos minoritarios advertido por Pais (2011) y Greer, (2013). Siendo Macusani una zona alpaquera, los problemas propuestos fueron contextualizados, con elementos de su cultura: "Juan tiene 12 alpacas. Si perdió 47 alpacas, ¿cuántas alpacas tenía Juan?" Hoy, la escuela intercultural, además de favorecer el desarrollo del pensamiento, revalorar los saberes ancestrales y la identidad, tiene el reto de devolverle dignidad (Vilca-Apaza *et al.*, 2021). No solo los recursos didácticos sino también los contenidos deben ser contextualizados lingüística y culturalmente, es decir, no solo es fundamental que los niños aprendan a partir de sus saberes previos como indica Ausubel (2000), sino que dichos saberes sean de su cultura, como el hecho de emplear palabras quechuas como *paqucha* (alpaca) en el planteamiento y el empleo de la yupana con efectos positivos en la resolución de problemas de adición y sustracción. El entorno

cultural es fundamental para organizar actividades de adición y sustracción (Sandoval, 2006; Santana *et al.*, 2022).

Es necesario precisar que, el método de la YM en la presente investigación, para realizar sumas y restas, especialmente con canje, es el de William Burns, en razón de que se adecúa a las necesidades pedagógicas y psicológicas de los niños de esta edad, de la etapa de las Operaciones Concretas de acuerdo a la Teoría de Piaget. Sin embargo, es necesario precisar que existen otros modelos y métodos de uso de la yupana, como el método abstracto de Radicati, que ha sido empleado en investigaciones por Vilchez (2014) y Hernández (2004) en Colombia, logrando mejorar la resolución de problemas en el grupo experimental. La resolución de problemas matemáticos, en tanto permiten el análisis, síntesis, interpretación y evaluación, tiene efectos positivos en el desarrollo del pensamiento crítico (Llerena-Vivanco, 2022). El método de Radicati es ideal para desarrollo del cálculo mental y el pensamiento matemático abstracto para niños de grados superiores de la etapa de las operaciones formales, el mismo requiere mayores estudios.

La mejora en la resolución de problemas, especialmente el de la sustracción, está relacionada con el cumplimiento de los cuatro principios de Resnick y Omanson (1987), citado por Caballero (2005) que la YM permite desarrollar: a) comprender que todo número está compuesto por otros. Por ejemplo, 7 se puede componer de 5 y 2 o 3, 3 y 1. b) Los valores convencionales de los números depende de sus posiciones espaciales en el sistema decimal. Por ejemplo, 7 adquiere diferente valor, 7 en unidades, 70 en decenas y 700 en centenas. c) Efectuar las operaciones por partes comprendiendo que un número está compuesto por otros. Por ejemplo, $35-15$ se puede descomponer en $30+5$ y $10+5$, para restarse unidades ($5-5$) y decenas ($30-10$). d) Recomposición y conversión de la cantidad del 'minuendo'. Si los estudiantes tienen dificultades para comprender números negativos, en la yupana es posible enseñar y aprender a recomponer o reagrupar el minuendo en caso sea menor al sustraendo, por ejemplo, $45-39$. Es conveniente enseñar la descomposición de $30-30$ y de $15-9$.

En la YM los estudiantes entienden cómo sumar con reagrupación. Este material autóctono permite entender, lo que advierte Hiebert *et al.* (1997), citado por Barrera-Moya *et al.* (2018), que en la suma 35 y 47 entiende el significado de los numerales 35 y 47, que 35 es 3 decenas y 5 unidades y que 47 es 4 decenas y 7 unidades, y aprende a identificar que existen varias formas de combinar los números. Es importante también porque ayuda a descomponer una cantidad en

cantidades menores, por ejemplo 9 en 5, 3 y 1, o cantidades mayores a 10, por ejemplo 17 en 10 y 7. De esta manera, ayuda a comprender los procesos de composición y descomposición de números. La YM también permite comprender el proceso de ‘canje’, primero de manera objetiva, para que comprendido el proceso lo puedan efectuar de manera formal.

El método del ensayo error es parte del aprendizaje de la matemática utilizado inclusive por los talentosos (Rodríguez *et al.*, 2017). La YM permite a los niños verificar los resultados y corregir, cuantas veces sea necesario, los errores al sumar y restar, por ser un soporte tangible. En la suma con reagrupación $377+423$ de la figura 10, una vez representado los sumandos, se observa que, en las unidades, al tener ya 10 fichas, se requiere ‘llevar’ las 10 unidades a una decena. Seguidamente, y del mismo modo, en las decenas $7+2$ hacen 9, más una decena suman 10 decenas, las mismas deben ser canjeadas (llevadas) al orden de las centenas. En las centenas, $3+4+1=8$. En el conteo final se tienen ocho centenas, cero decenas y cero unidades, resultando 800, el mismo es representado simbólicamente.



Figura 10. Representación de los sumandos (izquierda), simplificación y canje (centro), resultado (derecha).

6. CONCLUSIONES

Cuando los estudiantes de 7 a 8 años de edad aprenden de la mano con materiales concretos optimizan sus aprendizajes, más aún en el periodo de las operaciones concretas. El presente estudio concluye que la yupana modificada (YM) es un recurso didáctico eficaz para la resolución operatoria de problemas aditivos de adición y sustracción sin y con canje de hasta tres cifras en niños

bilingües quechua-castellano del segundo grado de una escuela intercultural, en razón de que incrementaron su promedio de 8,53 a 17,20 puntos, con una mejora de 8,67 puntos y un p valor de $0,001 < 0,05$ entre la prueba de entrada y prueba de salida, y una diferencia de 5,89 puntos respecto de la media del grupo control y un valor p de $0,001 < 0,05$ de muestras independientes al 95% de confianza. Esto quiere decir que la YM, con el empleo del método objetivo de William Burns, resulta ser un apoyo concreto en la obtención de resultados con precisión, pues al ser un material manipulativo ayuda a comprender significativamente el proceso de ‘canje’ tanto en la suma como en la resta con reagrupación, cumpliendo de esta manera con las fases del aprendizaje de la matemática: concreta, gráfica y simbólica.

Referente a las operaciones sin y con canje, los resultados específicos permiten concluir que la YM tuvo mejor eficacia en el desarrollo de habilidades matemáticas para operar sumas y restas con canje de dos y tres cifras. La capacidad de resolver problemas de adición con canje de dos y tres cifras incrementó en 8,67 y 10,67 puntos, respectivamente; y la capacidad de resolver problemas de sustracción con canje de dos y tres cifras, en 13,67 y 13,13 puntos. Los estudiantes han mejorado significativamente su capacidad de resolver problemas aditivos que requieren ‘canje’ de hasta tres cifras, debido a que la yupana modificada está diseñada para que los niños comprendan y resuelvan operaciones de adición llevando y sustracción con préstamo hasta de tres cifras. Los niños comprenden el ‘por qué’ se ‘lleva 1’ al orden superior y ‘por qué’ se ‘resta 1’ del orden superior, es decir, comprendieron el proceso del canje.

Se reconoce que el estudio se realizó en una muestra pequeña designada por muestreo probabilístico intencional, siendo necesario ampliarla en futuras investigaciones y otros contextos. Existen otros modelos de yupana, cuyas bondades para la educación matemática aún no se han estudiado. Se sugiere migrar la YM a la era digital y estudiar sus bondades como recurso multimedia en el marco de la enseñanza-aprendizaje interactiva. Finalmente, además del método Burns, empleado en el presente estudio, existe el método abstracto de Carlos Radicati para el uso de la yupana, el cual se recomienda para promover el desarrollo del pensamiento formal en los niños, cuyos beneficios requieren ser investigados científicamente. La yupana puede constituirse en una opción pedagógica para la educación matemática no solo para el Perú sino para América Latina.

AGRADECIMIENTO

Al Vicerrectorado de Investigación y al Instituto de Investigaciones Sociales “José Antonio Encinas” de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno - Perú.

REFERENCIAS

- Acosta, J. (2008). *Historia natural y moral de las Indias*. CSIC. (Trabajo original publicado en 1589).
- Apaza Luque, H. J. (2017). *La yupana, material manipulativo para la educación matemática. Justicia social y el cambio educativo en niños de las comunidades quechuas alto andinos del Perú* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid]. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/680462>
- Aroca Escobar, A. Y. y Lasso Avilés, K. Y. (2016). *La yupana como material didáctico en el desarrollo de operaciones básicas matemáticas en los grados segundo y tercero de educación básica primaria* [Tesis pregrado, Universidad Surcolombiana]. <https://biblioteca.usco.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=44110>
- Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Kluwer.
- Barrera-Mora, F., Reyes-Rodríguez, A. y Mendoza-Hernández, J. G. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación matemática*, 30(3), 122-150. <https://doi.org/10.24844/em3003.06>
- Bernedo Navarrete, G. M. (2018). *Efecto del programa yupanamat en las operaciones aritméticas en estudiantes de primaria, Magdalena 2016* [Tesis maestría, Universidad César Vallejo]. <https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/14689>
- Berrocal Ordaya, C. y Palomino Rivera, A. A. (2022). Capacidad de resolución de problemas matemáticos y su relación con las estrategias de enseñanza en estudiantes del primer grado de secundaria. *Educación Matemática*, 34(2), 275-288. <https://doi.org/10.24844/EM3402.10>
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Temas de educación Paidós.
- Blanco-Benamburg, R., Palma-Picado, K. y Moreira-Mora, T. E. (2021). Estrategias cognitivas ejecutadas en la resolución de problemas matemáticos en una prueba de admisión a la educación superior. *Educación Matemática*, 33(1), 240-267. <https://doi.org/10.24844/em3301.09>

- Burns Glynn, W. (1981). La Tabla de Cálculo de los Incas. *Boletín de Lima*, III(11), 15. <http://www.boletindelima.com/1981-11.htm>
- Bustos, C., Vergara, L.H. y Luque, C. J. (2019). El ábaco inca y las operaciones aritméticas. <https://pdfslide.net/documents/anexo-abaco inca-yupanapdf.html>
- Caballero Reales, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid]. <https://eprints.ucm.es/id/eprint/7283/1/T28929.pdf>
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En Segovia y Rico (Coord.). *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (pp. 75-98). Pirámide.
- Carrasco, S. (2013). *Metodología de la investigación científica*. 6ta. Edición San Marcos.
- Carrillo, V. P. (2020). *Técnicas etnomatemáticas para el desarrollo del cálculo mental de los estudiantes de segundo año de EGB de la Unidad Educativa Carlos María de la Condamine* [Tesis maestría, Universidad Nacional de Chimborazo]. <http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/6839>
- Castro, W. F., Velásquez-Echavarría, H. y López-Sora, J. (2021). Recursos didácticos y contextos usados por futuros profesores de matemáticas. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 35(69). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a20>
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra.
- Figueroa Fallas, E. y Mena Picado, H. (2020). Material: La yupana y el quipu como herramienta didáctica para el abordaje de las operaciones fundamentales. <https://mep.go.cr/sites/default/files/page/adjuntos/yupana-quipu.pdf>
- Galicia, L., Balderrama, J. y Navarro, R. (2017). Validez de contenido por juicio de expertos: Propuesta de una herramienta virtual. *Apertura*, 9(2), 42-53. <https://doi.org/10.32870/ap.v9n2.993>
- García-García, J., Navarro Sandoval, C. y Rodríguez Vásquez, F. M. (2014). La resolución de problemas en un contexto Ñuu Savi: un estudio de casos con niños de sexto grado de primaria. *Educación Matemática*, 26(1), 127-152. <http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-1-5.pdf>
- Gasco Txabarri, J. (2016). El empleo de estrategias en el aprendizaje de las matemáticas en enseñanza secundaria obligatoria. *Revista de Investigación Educativa*, 34(2), 487-502. <http://dx.doi.org/10.6018/rie.34.2.222901>
- Gasco Txabarri, J. (2017). Diferencias en el uso de estrategias en el aprendizaje de las matemáticas en enseñanza secundaria según el sexo. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 8(1), 47-59. <https://doi.org/10.18861/cied.2017.8.1.2638>

- Greer, B. (2013). Teaching through ethnomathematics: possibilities and dilemmas. En K. Berger, V. Brodie, V. Frith & K. LeRoux (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Mathematics Education and Society Conference*. Vols 1 and 2. (pp. 282-290). Hoerikwaggo: Mathematics Education & Soc.
- Guamán Poma de Ayala, F. (1987). *Primer nueva crónica y buen gobierno*. Historia 16. (Trabajo original publicado en 1615).
- Guzmán, L., Huamani, V. y Moya, N. (2018). *La aplicación de la yupana y la taptana para favorecer la resolución de problemas de adición y sustracción en los estudiantes del 3er grado de educación primaria de la I.E.B. "comunidad shipiba" del distrito del Rimac durante el año 2016* [Tesis de pregrado, Universidad de Ciencias y Humanidades]. https://repositorio.uch.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12872/209/Guzman_LE_Huamani_V_Moya_NG_educacion_primaria_tesis_2018.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Hernández García, C. A. (2004). Una Yupana dinámica para cada niño. *Nodos y Nudos*, 2(17), 7-80. <https://doi.org/10.17227/01224328.1234>
- Hernández, S., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. 6ta edición. McGraw-Hill/Education.
- Huanca Larico, A. J. y Mamani Quispe, M. E. (2021). *La eficacia de la yupana para la resolución de problemas aditivos en niños del segundo grado de las escuelas rurales de la región Puno, Perú 2020* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Altiplano]. <https://renati.sunedu.gob.pe/handle/sunedu/3226541>
- Jarero Kumul, M., Aparicio Landa, E. y Sosa Moguel, L. (2013). Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos: Un estudio de caso a nivel superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 213-243. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1623>
- Llerena-Vivanco, O. G. (2022). Resolución de problemas matemáticos para desarrollar el pensamiento crítico en estudiantes de educación primaria. *Maestro y Sociedad*, 19(1), 458-468. <https://maestrosociedad.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/5513>
- López Calloapaza, C. R. (2015). *Los materiales educativos concretos en el aprendizaje significativo del área de matemáticas en los estudiantes del sexto grado de educación primaria en la institución educativa particular Ana Frank del distrito de Mariano Melgar, Arequipa 2015* [Tesis de pregrado, Universidad San Agustín de Arequipa]. <http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/2098>
- Martínez de la Mora, M. H. C., Xolocotzin Eligio, U. y Quintero Zazueta, R. (2021). Las relaciones entre entidades componentes del valor posicional y su didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 277-298. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2432>

- Ministerio de Educación. (2023). Evaluaciones nacionales de logros de aprendizaje. <http://umc.minedu.gob.pe/resultadosnacionales2019/>
- Montalvo-Castro, J. (2014). Reciclaje digital educativo. Diseño de un videojuego a partir de la yupana o ábaco de los Incas. https://www.researchgate.net/publication/273782510_Reciclaje_digital_educativo_Diseño_de_un_videojuego_a_partir_de_la_yupana_o_abaco_de_los_Incas
- Mora, L. C. y Valero, N. (2019). La yupana como herramienta pedagógica en la primaria. https://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana_como_herramienta_pedagogica.pdf
- Moscovich, V. (2006). Yupana, tabla de contar inca. *Revista Andina*, 43, 93-127. https://www.academia.edu/1130617/Yupana_tabla_de_contar_inca
- Ñaupas, H., Valdivia, M., Palacios, J. y Delgado, H. (2018). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Quinta edición. Ediciones de la U.
- Obeso Macassi, R. M. (2017). *El uso de la yupana en el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas en los alumnos del 3° grado de educación primaria de la I.E. 80006 'Nuevo Perú' Urbanización Palermo - Trujillo-2015* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Trujillo]. <http://dspace.unitru.edu.pe/handle/UNITRU/7982?show=full>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el desarrollo lectura, matemáticas y ciencias. https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf
- Pachas De La Colina, C. E. (2016). *Jugando aprendemos a sumar y restar con la yupana*. 1ra edición. Hecho por Computadora. <http://repositorio.cultura.gob.pe/handle/CULTURA/355>
- Pacheco Rios, O. (1999). *Del Quipu a la yupana: el computador ancestral*. Serie Etnogeometría para la etnomatemática N° 2. Editorial Cepdi.
- Pais, A. (2011). Criticisms and contradictions of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 209-230. <https://www.jstor.org/stable/41485898>
- Paragua Morales, M., Paragua Macuri, M. y Paragua Macuri, C. (2021). Relación entre Yupana y el aprendizaje de la multiplicación de números integrales. *Revista Meta-Rating*, 13(38), 81-100. <http://dx.doi.org/10.22347/2175-2753v13i38.2956>
- Pardo, J. (2018). *Aplicación de la yupana como estrategia etnomatemática para la construcción del número en niños del primer y segundo grado de la Institución Educativa No 54163 del distrito de San Jerónimo - 2017* [Tesis de posgrado, Universidad Nacional del Altiplano]. <http://repositorio.unap.edu.pe/handle/UNAP/9530>

- Pareja, D. (1986). Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana. *Revista Integración, temas de matemática*, 4(1), 37-52. <https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/1205>
- Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169-194. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&tlng=es.
- Piaget, J. (1979). *El mecanismo del desarrollo mental*. Editora Nacional.
- Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas
- Proença, M. C. de. (2022). Habilidades Matemáticas na Resolução de Problemas: análise da compreensão de futuros professores. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 36(74). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a09>
- Radicati di Primeglio, C. (1951). *Introducción al estudio de los quipus - El sistema contable de los Incas*. Librería Studium
- Riley, M., Greeno, J. y Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Academic Press.
- Ríos, J. (2013). Las Matemáticas ancestrales y la Yupana. *Revista Tarea*, 82, 41-47. http://tarea.org.pe/images/Tarea82_41_Jesus_Rios.pdf
- Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, A. y Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación Matemática*, 29(2), 159-186. <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol29/2/06Rodriguez.pdf>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Navarro Sandova, C., Castro Inostroza, A. N. y García González, M. (2019). Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. *Educación Matemática*, 31(2), 75-104. <https://doi.org/10.24844/EM3102.04>
- Rojas-Gamarrá, M. y Stepanova, M. (2015). Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(3), 46-68. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274041587004.pdf>
- Sandoval Castañeda, D. (2006). La enseñanza de las operaciones de suma y resta a través de la resolución de problemas en primer grado de educación primaria. Tesis de pregrado. Universidad Pedagógica Nacional, México. <http://200.23.113.51/pdf/26389.pdf>
- Santana Espitia, A. C., Herrera Rojas, A. N. y Fajardo Santamaría, J. A. (2022). Mediación en la enseñanza de adición y sustracción en Perú y Colombia. *Revista de Psicología (PUCP)*, 40(2), 767-792. <https://dx.doi.org/10.18800/psico.202202.005>

- Vargas Murillo, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos Hospital de Clínicas*, 58(1), 68-74. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1652-67762017000100011&lng=es&tlng=es.
- Vilca Apaza, H. M., Yapuchura Saico, C. R., Mamani Apaza, W. W. y Sardón Ari, D. L. (2018). Maestros indigenistas y sus experiencias socio-educativas en el altiplano peruano en el Siglo XX. *Comuni@cción: Revista de investigación en comunicación y desarrollo*, 9(2), 90 - 100. <https://www.comunicacionunap.com/index.php/rev/article/view/281>
- Vilca-Apaza, H. M., Bermejo-Paredes, S. y Sardón Ari, D. L. (2021). Los Sistemas de Numeración Aymara: cambios y Valor Formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1701-1722. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a22>.
- Vilca-Apaza, H. M., Mamani Apaza, W. W., Maraza Vilcanqui, B. y Bizarro Flores, W. H. (2023). Yupana o ábaco inca, a 100 años (1912-2022): experiencias y posibilidades de educación matemática en América Latina. *Comuni@cción: Revista de Investigación en Comunicación y Desarrollo*, 14(1), 86-102. <https://doi.org/10.33595/2226-1478.14.1.804>
- Vilchez Chumacero, R. (2014). La enseñanza de la matemática usando la yupana. *BIG BANG FAUSTINIANO*, 3(3), 3-6. <http://datos.unjpsc.edu.pe/index.php/BIGBANG/article/view/236>
- Villavicencio, M. (1983). *Numeración, algoritmos y aplicación de relaciones numéricas y geométricas en las comunidades rurales de Puno*. Ministerio de Educación.
- Wassén, H. (1931). The Ancient Peruvian Abacus. Editado por E. Nordenskiöld (ed.). *Comparative ethnological studies* (vol. 9. Gotemburgo, pp. 189-205).
- Yon, J. y Muena, L. (2020). Aplicación del material didáctico 'yupana' para el desarrollo de capacidades matemáticas en niños y niñas de cinco años de la Institución Educativa Inicial N ° 628 Villa Primavera, Ucayali 2019. *Innova Shimnambo*, 2(2), 50-60.
- Zevallos, R. (2019). *La Yupana en el aprendizaje de la matemática* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle]. <http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/4038>

Autor de correspondencia

HENRY-MARK VILCA-APAZA,

Dirección: Universidad Nacional del Altiplano, Av. Floral 1153, Puno
CP. 21001
hvilca@unap.edu.pe