Capítulo 4

Sobre la relación entre tareas y pensamiento matemático

Ildiko Pelczer

Universidad de Concordia, Montreal, Canadá

4.1 En lugar de introducción

¿Por qué enseñamos matemáticas? ¿Cuáles son los objetivos y qué podemos emplear para alcanzarlos? Responder estas preguntas fundamentales es una invitación a reflexionar sobre las formas en que podemos abordar distintos elementos de la formación matemática en nuestros estudiantes. Se presentan respuestas a estas interrogantes desde dos perspectivas centrales: la que podemos identificar en los materiales curriculares, por lo tanto, vinculada a opiniones oficialmente sancionadas, y la que emerge de la comunidad de personas involucradas en la divulgación y en competiciones matemáticas.

En los materiales curriculares, a menudo, podemos identificar dos conjuntos de objetivos para enseñar matemáticas. Uno consiste en la adquisición de algoritmos, procedimientos y técnicas específicas de las matemáticas junto con los conceptos subyacentes. Podríamos decir que este aspecto se centra en los procedimientos. Un segundo conjunto de objetivos se expresa como el desarrollo del pensamiento matemático, incluyendo el pensamiento crítico y creativo (Gallagher et al., 2012). El desarrollo del pensamiento matemático se equipara con el desarrollo de competencias como el razonamiento inductivo, el reconocimiento de patrones y la modelización.

No es que estos dos tipos de objetivos se expresen explícitamente; más bien, es un problema identificado en la descripción detallada de los indicadores del aprendizaje de los estudiantes y su medición, junto con las herramientas ofrecidas (por ejemplo, ejercicios, tareas y actividades en los libros de texto) para lograr los objetivos de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática (por ejemplo, Kang y Kilpatrick, 1992; Hudson et al., 2014) explicaron el cambio utilizando el concepto de ”transposición didáctica” (Chevallard, 1989), que se refiere al proceso de transformar el conocimiento científico (como el creado y aceptado por la comunidad científica) en conocimiento para enseñar (como se manifiesta en los libros de texto). Hudson et al. (2014), basándose en el trabajo de Lakatos (1976), argumentan que, en última instancia, esto se puede atribuir a dos visiones diferentes de las matemáticas: una donde las matemáticas se ven como un conjunto de verdades eternas y otra donde se ven como una construcción humana falible. Aunque estas dos visiones son fundamentalmente diferentes, el mensaje de las matemáticas, tal como se construye a través de los materiales curriculares, no es tan claro.

Los problemas, tareas y actividades ofrecidas en los libros de texto son la principal fuente de actividades de enseñanza: por lo tanto, afectan el aprendizaje y la enseñanza y, en última instancia, desempeñan un papel en el acceso y la equidad (Fan et al., 2013; Hadar, 2017). Estos deben ofrecer la oportunidad para que los estudiantes adquieran las herramientas de las matemáticas. Con herramientas me refiero, por un lado, a procedimientos y algoritmos, y por otro, a formas de pensar particulares de las matemáticas.

Por lo tanto, la pregunta principal en la que me centraré es: ¿cómo podemos caracterizar las tareas que brindan la oportunidad de pensar matemáticamente (creativa y críticamente)?

Naturalmente, la tarea en sí es importante, pero para que su potencial se alcance, debe implementarse adecuadamente en el aula. La integración en la enseñanza en el aula plantea nuevas preguntas: ¿son pertinentes las tareas para clases de niveles mixtos? ¿Cuál es el papel del maestro en la implementación de las tareas? ¿Podemos permitirnos dedicar tiempo a estas tareas cuando hay tantos otros conceptos que enseñar?

Aunque estas preguntas son importantes, el enfoque de este artículo se centra en ejemplificar tareas con el potencial de mejorar el pensamiento matemático, y los demás aspectos se tratarán brevemente.

Antes de discutir esas tareas, necesitamos revisar la definición (o definiciones) que se encuentran en la literatura de investigación para el pensamiento matemático. Discutiré esto en la próxima sección.

A continuación, ofreceré ejemplos de tareas y discutiré sus características. ¿Qué aspecto de la tarea hace que, al trabajar en ellas, los estudiantes se involucren en el pensamiento matemático? ¿Quién puede crear estas tareas? En esta sección, me baso en mi experiencia liderando un círculo de matemáticas durante los últimos 8 años con estudiantes de 8 a 17 años.

Finalmente, discutiré brevemente el papel del maestro en la integración de estas tareas en el proceso normal de enseñanza.

4.2 Breve revisión de algunas definiciones

Devlin (2011) describe el pensamiento matemático como una forma de observar las cosas una vez simplificadas a sus características esenciales y analizar los patrones subyacentes. En otras palabras, identificar la estructura es la esencia del pensamiento matemático y, para hacerlo, uno debe familiarizarse con la lógica de las matemáticas y las demostraciones. Pensar matemáticamente significa aprender a mirar el mundo con ojos de matemático.

Mason et al. (2010) hacen hincapié en el pensamiento y utilizan la expresión ”pensar matemáticamente” en lugar de ”pensamiento matemático”. Como tal, el enfoque se centra en los procesos subyacentes, que los autores denominaron: especialización, generalización, conjetura, justificación y persuasión. La especialización se refiere al uso de casos concretos que resaltarían algunos elementos de la situación general. Las observaciones derivadas del estudio de casos conducen a un proceso de generalización: extendiendo el estudio a un conjunto más grande de objetos. A su vez, esto puede llevar a la conjetura: formular afirmaciones sobre una clase de objetos. Los siguientes pasos son la justificación y la persuasión, mediante los cuales se establece el valor de verdad de una afirmación. Los procesos son cíclicos en su naturaleza: en algunos casos, podríamos regresar a la especialización y refinar los hallazgos.

Monteleone et al. (2018) describen siete características del pensamiento matemático, identificadas a partir de una revisión extensa de la literatura. Estas son: 1. Conectar procedimientos/notar relaciones/generalizar conceptos; 2. Abordar problemas complejos de maneras novedosas; 3. Razonar; 4. Construir sentido; 5. Evaluar; 6. Considerar otros métodos/estrategias/soluciones alternativas y 7. Describir soluciones/aclaración de soluciones/elaboración de ideas.

En la lista anterior se incluyen características generalmente vinculadas a la creatividad: abordar problemas de maneras novedosas y generar múltiples soluciones. En la literatura de investigación, la creatividad matemática se ve como un producto, proceso o experiencia que puede manifestarse a través de la creación de ideas, conceptos y enfoques novedosos (Boud et al., 2015; Liljedahl y Sriraman, 2006). Un marco común para evaluar la creatividad matemática es mediante medidas cuantitativas de sus componentes, propuesto inicialmente por Silver (1997): fluidez, flexibilidad y novedad. Una forma particular de mejorar, pero también evaluar la creatividad matemática es a través de tareas con múltiples soluciones (Leikin y Lev, 2007; Leikin, 2011), problemas abiertos y planteamiento de problemas (Lewis y Colonnese, 2021). Por lo tanto, la interconexión entre la creatividad y el pensamiento matemáticos: la creatividad matemática presupone el pensamiento matemático, pero también contribuye a su desarrollo.

El desarrollo del pensamiento creativo es parte del currículo de matemáticas de muchos países, por lo tanto, hay una necesidad de un marco para evaluar los materiales curriculares en términos de su potencial para fomentar habilidades de pensamiento creativo. Hadar y Tirosh (2019) propusieron un marco que consta de nueve categorías y lo utilizaron para analizar libros de texto de matemáticas primarias en el contexto del currículo israelí. Su marco propuesto se sistematiza en tres temas: pensamiento lateral, pensamiento divergente y pensamiento convergente-integrador. El pensamiento lateral está vinculado a la generación de ideas novedosas, mientras que el pensamiento divergente se manifiesta en fluidez y flexibilidad. El pensamiento convergente-integrador está vinculado a la identificación de nuevas relaciones, encontrar patrones y determinar nuevas relaciones (Suherman y Vidakovich, 2022). Hadar y Tirosh (2019) concluyeron a partir de su análisis de libros de texto que hay diferencias en cuanto a dónde se enfatiza en el currículo en relación con las habilidades de pensamiento creativo y lo que se enfatiza en el libro de texto.

La investigación sobre el análisis de libros de texto se centra en evaluar las oportunidades de aprendizaje ofrecidas por las actividades, tareas y problemas en los mismos. El análisis se centra en las tareas, no en la puesta en práctica de las tareas por parte de los maestros. En este sentido, las preguntas principales se refieren a la demanda cognitiva de la tarea y la necesidad de construir una solución (por ejemplo, para tareas de resolución de problemas) versus seguir una plantilla de solución.

Estudios en este ámbito han demostrado repetidamente que una gran proporción de las tareas ofrecidas en los libros de texto tienen una baja demanda cognitiva, es decir, se basan principalmente en la memorización, la aplicación directa de fórmulas y algoritmos o soluciones modeladas (por ejemplo, Jäder et al., 2020; Jones y Tarr, 2007).

Fuera de la comunidad de investigación, hay matemáticos y educadores comprometidos en actividades de enseñanza, principalmente a través de círculos matemáticos, divulgación matemática, campamentos de entrenamiento y competiciones. Su comunidad también promueve una cierta visión de las matemáticas, por ejemplo, a través del tipo de problemas incluidos en las competiciones, el material producido para el entrenamiento, y artículos publicados en revistas especializadas (ver, por ejemplo, Mathematics Competitions, a Journal of the World Federation of National Mathematics Competition, http://wfnmc.org/journal.html).

¿Cuál es el propósito de la instrucción matemática desde este punto de vista? Soifer A. (2016), fundador de la Olimpiada Matemática de Colorado, afirmó:

> De hecho, yo sostendría que toda disciplina trata sobre la resolución de problemas. Y así, el objetivo principal de cada disciplina debería ser permitir a los estudiantes aprender a pensar dentro de la disciplina, cómo resolver problemas de la disciplina y, finalmente, de qué trata esa disciplina y qué hacen los profesionales dentro de la disciplina. (p. 16)

¿Cómo se logran estos objetivos? ¿Qué caracteriza a un problema de la Olimpiada Matemática? Soifer (2011) afirma que los problemas no necesitan requerir un alto nivel de conocimiento de contenido, se trata más de pensamiento creativo, imaginación y sentido común. Luego, continúa: ”Algunos de los problemas modelan la investigación matemática: sólo capitularían ante la experimentación con casos particulares, seguido de la observación de un patrón, seguido a su vez por la generalización, la formulación de una hipótesis y, finalmente, por una demostración” (Soifer, 2011, p. 11). Reconocemos que estos procesos son los vinculados al pensamiento matemático, como se mencionó anteriormente. Además, menciona tres ideas de prueba que están inextricablemente vinculadas a las matemáticas: la prueba por contradicción, el principio del palomar y el principio de inducción matemática. Estos constituyen elementos para ”pensar dentro de la disciplina”, como se mencionó anteriormente.

Dado el objetivo común de desarrollar el pensamiento matemático y considerando que las tareas de los libros de texto no siempre son pertinentes para fomentar el pensamiento creativo y matemático, parece natural preguntarse si los problemas de las competiciones (o tareas similares) pueden integrarse en la enseñanza en el aula.

A continuación, espero ilustrar que hay ciertos tipos de tareas, generalmente encontradas en competiciones que, con la orientación adecuada, pueden involucrar a los estudiantes en la exploración, la conjetura, el razonamiento y la demostración.

En el resto de esta presentación, me baso en mi experiencia con un círculo de matemáticas que dirigí durante los últimos 8 años. El círculo de matemáticas estaba organizado en cuatro niveles, asociados con los grados escolares 3-4, 5-6, 7-8 y 9 en adelante. Aunque se especificaban los grados escolares, los participantes decidían en qué nivel querían participar. El círculo de matemáticas se centraba en la resolución de problemas, siendo las clases basadas en temas específicos.

4.3 Tareas de construcción

Ahora discutiré un tipo de tarea que se utilizaba con frecuencia en el círculo. Por razones de referencia, lo categorizo como *tarea de construcción*. El nombre *tarea de construcción* no está institucionalizado; es una elección personal que refleja una característica esencial de la misma.

En términos generales, la característica fundamental de este tipo de tarea es la exigencia de construir un objeto matemático basado en alguna especificación. El término *objeto* se emplea aquí en un sentido muy general: puede representar un número, una configuración, un proceso, etc. Como tal, la tarea difiere de aquellas en las que se proporciona el objeto y la solicitud es probar alguna relación o propiedad con respecto al objeto. El contexto más simple en el que los estudiantes se enfrentan a este tipo de tarea es la ejemplificación: se define un nuevo concepto y los estudiantes deben crear ejemplos.

Una segunda característica es que no requieren conocimientos más allá de lo que se enseña en la escuela en el grado dado. Por lo tanto, pueden integrarse en la enseñanza.

Una tercera característica es la adaptabilidad a diferentes niveles de grado. Las tareas pueden ajustarse a diferentes niveles de grado. Este aspecto es importante, ya que a menudo se considera que las tareas matemáticas ”reales” solo se pueden ofrecer mucho más tarde, cuando los estudiantes hayan acumulado una cantidad significativa de conocimientos de contenido. Muy al contrario, elementos del pensamiento matemático se pueden trabajar desde una edad temprana, ya que los niños pueden participar en el razonamiento por contradicción, pueden comprender ideas relacionadas con el principio del palomar o la inducción, por ejemplo, incluso cuando no tienen descripciones formales disponibles.

A continuación, presentaré una caracterización y categorización de las tareas de construcción al discutir uno o dos ejemplos ”prototípicos” e identificar algunas características. Además, propongo formas en que se pueden integrar en la enseñanza en el salón de clase. La mayoría de los ejemplos siguientes se vieron con estudiantes de nivel de primaria, en los grados 5-6.

4.3.1 Categoría 1. Ingeniería inversa

Ejemplo 4.1: Proporcione un ejemplo de tres números diferentes, cada uno mayor que 1, que tengan su mínimo común múltiplo 1676. Proporcione un ejemplo de tres números diferentes que tengan el máximo común divisor igual a 12.

En las matemáticas escolares, a los estudiantes generalmente se les presentan uno o dos algoritmos para identificar el mínimo común múltiplo (mcm) o el máximo común divisor (mcd) y luego se les pide que practiquen aplicándolo. Una tarea en la que necesitan proponer números que tendrían un número dado como mcm no es común. Sin embargo, tal tarea es una mejor prueba de su comprensión conceptual del concepto de mcm que una que requiere identificar el mcm de un conjunto de números.

La construcción de estos números se basa en la comprensión del concepto de mcm y mcd, por un lado, y en la relación entre el significado del concepto y el algoritmo para identificarlo, por otro lado.

En mi experiencia, los estudiantes participan más activamente en esta tarea que en la identificación del mcm de un conjunto dado. Al trabajar en grupos pequeños, los estudiantes proponen soluciones posibles y a menudo ven que sus propuestas son refutadas por otros colegas. Algunos argumentaron que es imposible encontrar tales números, solo para ser refutados por otro que propuso considerar simplemente el número dado (1676), su mitad y su cuarta parte.

En consecuencia, la tarea brinda la oportunidad, de manera natural, de participar en alguna discusión matemática: se presenta una propuesta, luego se evalúa (al compararla con la definición o al realizar el procedimiento) y al final de ese proceso, se acepta o se refuta.

Muchos temas enseñados en la escuela permiten la formulación de tareas como la presentada anteriormente: se trata de invertir la pregunta.

La existencia de un algoritmo para crear el mcm o mcd fue el punto de partida para la creación de números. Sin embargo, para tener éxito en la resolución de la tarea, se debe hacer explícito el vínculo entre la estructura de los números (forma prima factorizada) y la estructura del mcm (o mcd).

La existencia de múltiples soluciones puede ser un hecho sorprendente para algunos estudiantes, pero luego puede llevar a preguntas específicas de las matemáticas, como ¿hay infinitas soluciones? o ¿cuáles son todas las soluciones posibles? o ¿cómo encontrar una situación donde haya un número dado de soluciones?

El maestro puede ampliar la tarea haciendo preguntas adicionales. Por ejemplo:

- ¿Cuál es la tripleta de los números ”más pequeños” con el mcm el número dado?
- ¿Cuántas tripletas de números existen con mcm 1676?
- ¿Puedo elegir un número como mcm de modo que solo exista una tripleta de números?
- ¿Puedo elegir un número como mcm con un número predefinido de tripletas como solución?

Naturalmente, el maestro debe explorar la tarea y analizar qué otras preguntas tendrían sentido en este contexto. Sin embargo, es importante permitir que los estudiantes también planteen preguntas. Al permitir que los estudiantes formulen preguntas a sus compañeros de clase, deberán decidir sobre la pertinencia de la pregunta para el tema y la claridad de la formulación. En entornos de enseñanza tradicionales, tienen pocas oportunidades de hacerlo. Nuevamente, el papel del maestro es esencial para sondear su pensamiento, ofrecer contraejemplos (si es el caso) y, en general, notar las oportunidades para discutir matemáticas.

Ejemplo 4.2: La Figura 4.1 es la red de un cubo. Escribe los números del 1 al 6, uno en cada cara del cubo, de manera que una vez que el cubo esté plegado, en cada uno de sus vértices el resultado de multiplicar los tres números en las tres caras que concurren, se obtienen los números 10, 12, 20, 24, 30, 36, 60 y 72.

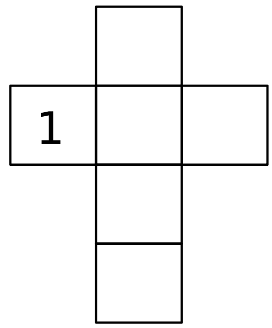

Figura 4.1: *Red de cubo*

En este problema, necesitamos ”(re)construir” una configuración que se caracteriza por los productos en los vértices. El ”objeto” es una configuración, y el punto de partida es la forma factorizada de los números dados. Queda la pregunta de qué producto da la ”mayor cantidad de información” para comenzar el proceso de (re)construcción. Se muestra una solución en la Figura 4.2.

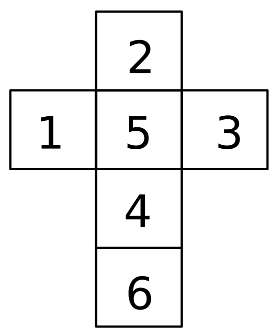

Figura 4.2: *Solución red de cubo*

Una vez más, el maestro puede ampliar la discusión y verificar el nivel de comprensión a través de preguntas. Algunos ejemplos se dan a continuación.

- Brinde un ejemplo de un conjunto de números (productos) que no se puede obtener, al cambiar uno de los números entre los productos. El producto debe obtenerse con números del 1 al 6.
- ¿Cuántos números en el conjunto de productos son divisibles por 5? ¿Hay un número mínimo y máximo para estos productos?
- En este problema, la diferencia entre el menor y el mayor producto es 62. ¿Cuál podría ser la mayor diferencia que puedes obtener en esta situación? ¿Cuál sería la menor diferencia?

En esta categoría, también incluyo tareas de construcción de naturaleza geométrica; es decir, situaciones en las que se debe crear una configuración a partir de restricciones dadas. Por ejemplo, la tarea *construir el triángulo ABC dado que el ángulo B es agudo, AC+BA=m y BC=a* requiere imaginar la construcción realizada e identificar elementos que pueden ser útiles para lograrlo.

Dado que el punto de partida para resolver las dos tareas anteriores es un algoritmo, propiedad o configuración conocida del cual no solo sabemos que existe, sino también cómo debería ser, nombro este tipo de tarea de construcción como tarea de *ingeniería inversa*.

Podemos resumir sus características de la siguiente manera:

- El *objeto* puede ser *ingenierizado inversamente*.
- El punto de entrada es un hecho conocido, algoritmo o concepto.
- El problema puede tener múltiples soluciones.
- Los estudiantes deben participar en un proceso cíclico de exploración y verificación.

4.3.2 Categoría 2. Construcción por partes

Ejemplo 4.3: Proporcione un ejemplo de un múltiplo de 17 con la suma de dígitos igual a 17.

Basándome en mis observaciones, una de las dificultades que tienen los estudiantes con el problema es que esperan ”tropezarse” con este número; algo así como ”encontrarlo mirando alrededor”. Mi hipótesis aquí, sin investigación que la confirme, es que no están acostumbrados a ”construir”, por lo tanto, el ”proporcione un ejemplo” se interpreta como una solicitud de encontrar un número ”listo para presentar” con esta propiedad.

A diferencia de los problemas presentados anteriormente, no hay una referencia (inmediata) a un algoritmo que permita alguna ingeniería inversa. La falta de un camino claro podría causar frustración en algunos estudiantes, especialmente para aquellos que tienen conceptos erróneos sobre la naturaleza de las matemáticas ”las matemáticas son solo reglas que aprender” y sobre la resolución de problemas ”todos los problemas se pueden resolver en 5 minutos o menos” (Schoenfeld, 1992). Experimentar emociones durante la resolución de problemas es normal; la cuestión es cómo ayudar a los estudiantes a lidiar con emociones negativas como la frustración. La investigación sobre el tema destaca que, en caso de una resolución exitosa, hay una transición hacia emociones positivas (Di Leo et al., 2019).

Una forma de iniciar el proceso de resolución y, potencialmente, ayudar a los estudiantes a lidiar con la frustración, es invitarlos a participar en la exploración. Con el tiempo, pueden desarrollar algunas estrategias genéricas para lidiar con tales situaciones. La exploración, la conjetura o el análisis de casos son ejemplos de ”qué hacer cuando no sabes qué hacer” (Kasuba, 2006).

Los estudiantes pueden participar en la especialización y generalización para obtener una visión del problema (el presentado anteriormente, pero también en general).

Al escribir algunos múltiplos, como $17, 34, 51, \ldots$ y observar la suma de los dígitos, los estudiantes pueden observar algunas regularidades. El maestro puede guiar esta exploración e incluso sugerir la creación de nuevos múltiplos ”cosiendo” dos múltiplos: por ejemplo, 1717 o 5134. Esta es una excelente oportunidad para sondear la comprensión de los estudiantes sobre ciertas propiedades de la relación de divisibilidad y sobre la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición (o, simplemente, sobre escribir números en una base). Aplicando esta técnica, se puede construir el número 10 268, por ejemplo.

El problema solicita un objeto (un número concreto, en este caso), sin embargo, para crear el objeto se necesita un procedimiento (en general, el procedimiento también es un objeto por crear). En caso de que los estudiantes comprendan el procedimiento (o cómo se relaciona con los conocimientos de contenido que tienen sobre la divisibilidad y las propiedades de las operaciones), podrán reutilizarlo en otra situación.

Por ejemplo, en Kasuba (2010, p.13) se discute el siguiente problema (el problema no es para el grado 5-6):

Encuentra un entero cuya representación binaria contenga 2005 0's, 2005 1's y que sea divisible por 2005.

En el artículo, el autor discute casos más pequeños, usando 2 y luego 9 en lugar de 2005, pero el proceso aplicado para identificar un número así implica el mismo procedimiento presentado anteriormente.

Incluyo también problemas que requieren una construcción gradual: comenzamos desde un estado inicial y lo modificamos mientras cumplimos con una restricción.

Ejemplo 4.4: Identifica la cantidad máxima de números que es posible organizar en una secuencia de manera que la suma de cualesquiera cinco números consecutivos sea positiva y la suma de cualesquiera siete números consecutivos sea negativa.

Dado que la solicitud es maximizar el tamaño del conjunto, el enfoque gradual es pertinente. Comenzamos con cinco números para que su suma sea positiva, agregamos uno más, luego uno más y deberíamos obtener la suma negativa. Los estudiantes deben comenzar explorando; podrían llegar a diferentes conclusiones, lo que es una excelente oportunidad para explicar y ”defender” sus resultados.

En este problema, es necesario justificar la maximalidad. Si bien los estudiantes pueden llegar por exploración a un consenso sobre el tamaño de dicho conjunto, aún pueden carecer de un argumento sobre por qué eso es máximo. Por lo tanto, para dar una solución completa, los estudiantes deben participar en la prueba (en el sentido de un argumento convincente).

Para este problema, una forma de lograrlo es escribir los números en una configuración especial: cinco por fila, donde la segunda fila comienza desde el segundo número, etc. Una vez que llegamos a la séptima fila, obtenemos una suma negativa por columna mientras que la suma en las filas es positiva. Esto demuestra que no podemos tener más de diez números en el conjunto.

Las características de este tipo de tarea son:

- El objetivo es crear un objeto, pero eso requiere crear un procedimiento (otro objeto).
- El objeto final se construye a partir de ”partes” o en ”pasos”.
- Se necesita una prueba (o justificación) para mostrar que el objeto final (hecho a partir de ”partes”) cumple con las condiciones.
- Puede haber varias soluciones al problema.

Queda para el maestro orquestar una mayor exploración, con un enfoque especial en la generalidad de la solución: ¿cuáles son otras situaciones donde se puede usar el mismo argumento? ¿Cómo podríamos crear un problema que pueda abordarse de manera similar? Este paso es importante ya que involucraría a los estudiantes en reflexionar sobre las soluciones (similar a la fase de ”mirar hacia atrás” en la resolución de problemas).

4.3.3 Categoría 3. Configuraciones imposibles

En los ejemplos mostrados anteriormente, los problemas estaban formulados de manera que sugerían la existencia de una solución (usando *proporcione*, *brinde*). Por supuesto, esto se puede modificar fácilmente en una pregunta existencial (usando *¿hay...?*). Los ejemplos a continuación están formulados intencionadamente como una pregunta sobre la existencia de una configuración en la que se cumpla cierta propiedad. La razón es simplemente que, a menudo, la respuesta es no; es decir, nos enfrentamos a la imposibilidad de una situación.

Ejemplo 4.5: ¿Es posible construir una tabla de 5×6 con los enteros del 1 al 30 de modo que la suma de los seis números en cada fila sea constante y la suma de los cinco números en cada columna también sea constante?

Ejemplo 4.6: Considere los números $1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 2021\ 2022$ escritos en una fila. Frente a cada número, podemos colocar un signo $+$ o $-$. ¿Existe una manera de colocar los signos de modo que el resultado sea cero? ¿O 1022?

En estos problemas, la pregunta es sobre encontrar una cierta configuración; todos los elementos están dados, y se trata de organizarlos de alguna manera.

A diferencia de los tipos anteriores de tareas, la exploración para este tipo de preguntas es compleja: hay demasiados casos que considerar. La complejidad sugiere considerar un caso más pequeño donde haya menos números/objetos involucrados. Una versión con números más pequeños (escala hacia abajo) debe retener las características esenciales del problema, de modo que las observaciones hechas en el caso ”reducido” sean informativas sobre el problema original.

Sin embargo, nos enfrentamos a la dificultad: ¿cuál es la característica esencial por mantener?

Por ejemplo, en el problema que se enuncia en el Ejemplo 4.5 no es obvio qué es importante en las dimensiones de la tabla: ¿es que tenemos un número par/impar? ¿Es que son números consecutivos?

O ¿deberíamos centrarnos en los números que debemos usar? ¿Son importantes los números dados? ¿Podemos cambiarlos a un conjunto diferente de números, por ejemplo, 30 números de 1?

De manera similar, para el problema del Ejemplo 4.6, si queremos reemplazar 2022, ¿qué número deberíamos elegir?

El proceso de escalar hacia abajo plantea las mismas preguntas que el proceso de escalar hacia arriba (o generalización, en este caso): comprender cómo la naturaleza de los elementos del problema (aquí, las dimensiones) juega un papel en la solubilidad.

Para la resolución de problemas, muestra la importancia de utilizar las restricciones (misma suma en fila y columna para el primer problema) y relacionar esto con el conjunto disponible de números.

El segundo problema requiere una exploración sistemática (por ejemplo, comprobando para 2, 3, etc.) antes de poder ver las características que controlan la existencia de la solución.

La conclusión es que el escalado de un problema debe aprenderse mediante la experimentación y al hacer explícitos los vínculos entre las características del problema y la configuración.

Un camino por seguir en estos problemas es formalizar las restricciones/relaciones y comenzar el razonamiento desde allí.

Los problemas de esta categoría tienen todos los elementos dados: en 4.5 sabemos los números que se deben usar, lo mismo es válido para el segundo problema. Deberíamos usar esa información.

En el primer problema, obtener la misma suma en cada fila significa que la suma de todos los números (obtenida como suma de las sumas de las filas) es múltiplo de 5, mientras que pensar de la misma manera, pero para columnas, lleva a la conclusión de que la suma de todos los números es múltiplo de 6. Dado que los números son del 1 al 30, esto no es posible. El conocimiento del contenido necesario en el problema es adición y divisibilidad, sin embargo, la tarea no es realizar la suma o la división.

Para el segundo problema, dado que conocemos la suma de todos los números involucrados (ya que conocemos todos los números), deberíamos referirnos a ella. La observación clave aquí es que podemos expresar $a - b$ como $a + b - 2b$. Por lo tanto, cualquier combinación de + y − se puede expresar como la suma de todos los números de los que restamos un número par. Dado que la suma de los números naturales hasta 2022 es impar, no podemos obtener 0 ni ningún otro número par.

Una característica especial de los problemas discutidos aquí es que debemos expresar formalmente la restricción (por ejemplo, suma de fila/columna u operaciones a utilizar) y relacionarla con los elementos del problema. En estos problemas, la exploración no es suficiente, necesitamos formalización. Esto no quiere decir que la exploración no sea informativa, porque lo es. Sin embargo, puede ser más difícil ver la relación con el problema inicial porque la conclusión no es necesariamente siempre la misma. Por ejemplo, si tomamos 2024 en lugar de 2022, podemos encontrar una disposición de + y − para obtener 0.

Estos problemas no tienen soluciones. Esto puede ser sorprendente para algunos estudiantes, ya que la mayoría de los problemas dados en la escuela no solo tienen solución, sino que tienen una solución única.

Al proporcionar a los estudiantes problemas donde la clave es demostrar la imposibilidad, los alentamos a expresar formalmente las restricciones y relacionar los elementos del problema, en resumen, a identificar la estructura del problema. Nuevamente, el problema es accesible para todos, ya que todos los estudiantes pueden intentar y observar lo que está sucediendo, todos pueden llegar a conjeturas acerca de la situación; para configuraciones pequeñas, incluso pueden hacer una verificación exhaustiva. Pero el valor real de los problemas de configuración imposible radica en la discusión que el maestro puede iniciar con los estudiantes. Al llevar estos problemas al aula, los maestros pueden discutir: a) ¿qué constituye un argumento irrefutable de que una situación no es posible? y b) la (enorme) diferencia entre ”no puedo encontrar una solución” y ”no hay solución”.

Como en la categoría anterior, surge la pregunta de la generalización: si los estudiantes comprenden el vínculo entre los elementos del problema y la conclusión de la imposibilidad, pueden proponer otras situaciones donde la conclusión sería la misma o, por el contrario, pueden diseñar situaciones donde habría solución.

La generalización es un método para hacer crecer el conocimiento matemático: uno que es particular de las matemáticas. Al integrar preguntas sobre la generalizabilidad de los resultados, los maestros transmiten a los estudiantes una característica de las matemáticas en sí mismas.

Las características de la tarea de ”configuración imposible” se pueden resumir de la siguiente manera:

- El objetivo es identificar si se puede lograr una configuración específica.
- Todos los elementos están dados.
- Se centra en demostrar la (im)posibilidad.
- Requiere formalizar las restricciones.
- Puede vincularse, para demostrar la imposibilidad, al principio de invarianza.
- Puede vincularse, para demostrar la imposibilidad, a la prueba por contradicción.

4.3.4 Categoría 4. Identificación de un orden para aplicar reglas

Algunos problemas implican transformaciones basadas en reglas dadas. Consideraremos aquellos en los que las reglas están especificadas, se proporciona un estado inicial, se especifica un estado final y la tarea es encontrar el orden en el que las reglas deben aplicarse para llegar al estado final. En algunos casos, la pregunta también es decidir si se puede alcanzar cierto estado final. Los dos siguientes problemas son prototípicos para esta categoría.

Ejemplo 4.7: Un príncipe quiere cortar las cabezas de un dragón de 100 cabezas. Puede cortar 9, 10 o 11 cabezas de un solo golpe de espada; sin embargo, inmediatamente le crecen 6, 13 o 5 cabezas, respectivamente. Si todas las cabezas son cortadas, el dragón muere. ¿Puede el dragón morir alguna vez?

Ejemplo 4.8: En los bosques de una isla mágica deambulan tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras y los leones pueden comer tanto lobos como cabras. Sin embargo, al ser una isla mágica: si un lobo se come a una cabra, se convierte en un león. Si un león se come a una cabra, se convierte en un lobo. Si un león se come a un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. ¿Cuál es el número máximo posible de animales que quedan en la isla después de que ya no sea posible que se coman entre ellos? (este problema es para grados superiores)

Algunos estudiantes pueden considerar estos problemas como insuficientemente especificados ¡pero interesantes! ¡Casi inmediatamente comienzan a probar las reglas y ver qué sucede!

El maestro debería animarlos a hacer observaciones mientras calculan diligentemente, ya que sin una serie de observaciones sobre las cuales reflexionar, el problema es solamente una suma y resta simple.

El hecho de que el orden de realizar las operaciones no esté impuesto permite un estudio sistemático (eventualmente, en una versión más pequeña del problema).

El maestro puede guiar la exploración con preguntas como: ¿qué sucede si aplicamos una regla una y otra vez? ¿Podemos cuantificar el cambio? ¿Cómo se relaciona con la regla que aplicamos?

Desde el punto de vista matemático, estos problemas a menudo se basan en el principio de invarianza. Este principio significa que ciertas características de la situación permanecen inalteradas a pesar de realizar las transformaciones. Es una estrategia central para resolver problemas, pero rara vez se informa a los estudiantes de manera explícita sobre la invariante. Por ejemplo, los problemas verbales requieren modelar la situación; a menudo, esa modelización se basa en la invariabilidad de cierta cantidad (una cantidad total se redistribuyó, por lo que las relaciones entre las partes cambian, pero no la cantidad total, etc.), pero esto no se enfatiza de manera especial.

Mientras a los estudiantes no se les enseña o informa sobre esta estrategia de resolución de problemas, pueden observar patrones que surgen de su exploración. Por ejemplo, si solo usan la primera regla (cortando 9 cabezas y creciendo 6) de manera repetida, pueden reconocer un patrón en la secuencia numérica que representa el número de cabezas restantes: 100, 97, 94, 91, ...

Pero para que sea útil para progresar con la solución, el patrón debe interpretarse en el contexto del problema.

Resolver estos problemas puede beneficiarse de formalizar el efecto de las reglas, es decir, describir explícitamente los cambios en los números inducidos por las reglas. Sin embargo, la formalización debe preceder a la exploración; es la exploración la que le da significado.

Para el primer problema, los estudiantes observan rápidamente que el cambio en el número de cabezas ocurre por un múltiplo de tres. Dado que el número original de cabezas es 100, la única manera de quitar todas las cabezas es llegar a 10 (ya que da el mismo resto cuando se divide por 3 que 100). Por lo tanto, se debe llegar a cortar 90 cabezas, y luego las diez restantes de una vez.

La solución del segundo problema se basa en seguir los cambios inducidos por cada regla y relacionarlos con la paridad del número que expresa la cantidad de cada animal.

Las características de la tarea de esta categoría se pueden resumir de la siguiente manera:

- El objetivo es identificar un orden para aplicar las reglas.
- Los estudiantes deben participar en la exploración, síntesis y reconocimiento de patrones.
- La tarea requiere participar en el razonamiento inductivo.
- Puede vincularse al principio de invarianza.

El maestro puede sondear la comprensión al pedir a los estudiantes que den ejemplos de a) situaciones no alcanzables; b) reglas ”no interesantes” (y discutir qué se puede poner bajo la categoría ”no interesante”); c) reglas que inducen un patrón diferente, etc.

Las categorías presentadas anteriormente se establecieron al comparar las características de los problemas (lo que se da, lo que se solicita, qué procesos se movilizan durante el proceso de solución), pero también consideré mis recuerdos de las reacciones de los estudiantes cuando enfrentaron estos u otros problemas similares.

Las tareas de construcción brindan a los estudiantes la oportunidad de participar en estrategias de resolución de problemas y razonamiento (inductivo, deductivo), y dejan espacio para enfoques creativos, por lo que son pertinentes para promover el pensamiento matemático de los estudiantes.

Además, los estudiantes participan activamente en la tarea, exploran, observan y generalizan. En ese sentido, estas tareas ofrecen una mejor visión de lo que significa hacer matemáticas, ayudan a normalizar el estado inicial de ”no sé” y lo transforman en ”pero lo averiguaré”.

4.4 Reflexiones finales

Desarrollar el pensamiento matemático implica aprovechar las oportunidades percibidas en los problemas y ser sistemático al hacerlo. Ciertas tareas típicas de los libros de texto pueden transformarse en ocasiones de exploración al cambiar las preguntas, al solicitar generalizaciones o al pedir propuestas de situaciones posibles o imposibles. Además de transformar las preguntas de los libros de texto (por ejemplo, al 'darle la vuelta'), los maestros pueden introducir en el aula una variedad de preguntas de concursos bien seleccionadas. El propósito del artículo fue presentar un tipo de problema que tiene el potencial de involucrar a los estudiantes en el pensamiento matemático.

Sin embargo, las tareas son oportunidades para fomentar el pensamiento matemático y la creatividad solo si son implementadas adecuadamente por el maestro. Si bien muchas de estas tareas son "divertidas", su valor radica en el aprendizaje que facilitan a través del pensamiento que provocan. Permanece la responsabilidad del maestro de coordinar la investigación, iniciar discusiones, ayudar, sin excederse, con la formalización para que ocurra el pensamiento y se aproveche el potencial de la tarea.

4.5 Referencias bibliográficas

1 Boud, D., Lawson, R. y Thompson, D. G. (2015). The calibration of student judgement through self-assessment: disruptive effects of assessment patterns. *Higher Education Research & Development*, 34:1, 45-59.

2 Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes. *In the proceedings of The International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education*, 51?62.

3 Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. A K Peters/CRC Press.

4 Di Leo, I., Muis, K. R., Singh, C.A. y Psaradellis, C. (2019). Curiosity? Confusion? Frustration! The role and sequencing of emotions during mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, 58,121-137.

5 Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: Development status and directions*. ZDM, 45(5), 633-646.

6 Gallagher, C., Hipkins, R. y Zohar, A. (2012). Positioning thinking within national curriculum and assessment systems: Perspectives from Israel, New Zealand and Northern Ireland. *Thinking skills and Creativity*, 7, 134-143.

7 Hadar, L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166.

8 Hadar, L. y Tirosh, M. (2019). Creative thinking in mathematics curriculum: An analytic framework. *Thinking skills and creativity*, 33.

9 Hudson, B., Henderson, S. y Hudson, A. (2015) Developing mathematical thinking in the primary classroom: liberating students and teachers as learners of mathematics. *Journal of Curriculum Studies*, 47:3, 374-398

10 Jäder, J., Lithner, J. y Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51:7, 1120-1136

11 Jones, D. L. y Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grade mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27.

12 Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics* 12(1), 2-7.

13 Kasuba, R. (2006). *What to do when you don't know what to do?* Macibu gramata, Riga.

14 Kasuba, R. (2010). Several Remarks on Possible Components of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Competitions*, 43(1).

15 Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

16 Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 161-168. Seoul: PME.

17 Leikin, R. (2011). *Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice*. ZDM, 43, 993-1006.

18 Lewis, W. y Colonnese, M. (2021). Fostering Mathematical Creativity Through Problem Posing and Three-Act Tasks. *Gifted Child Today*, 44(3).

19 Liljedahl, P. y Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics*, 26(1), 17-19.

20 Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Harlow: Prentice Hall.

21 Monteleone, C., White, P. y Geiger, V. (2018). Defining the Characteristics of Critical Mathematical Thinking. In Hunter, J., Perger, P., y Darragh, L. (Eds.). Making waves, opening spaces. *Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 559-566. Auckland: MERGA.

22 Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 334-370). Macmillan Publishing Co, Inc.

23 Silver, E. (1997). *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing*. ZDM, 29, 75-80.

24 Soifer, A. (editor) (2016). *ICME-13 Monograph: Competitions for young mathematicians: perspectives from five continents*. Springer Verlag.

25 Suherman, S. y Vidakovich, T. (2022). Assessment of mathematical creative thinking: A systematic review. *Thinking skills and creativity*, 44.