Capítulo 5

Metodología de enseñanza en espiral en competencias de matemáticas

Luis F. Cáceres y Víctor M. Reyes

Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

5.1 Resumen

La estrategia de enseñanza y aprendizaje a través del modelo de espiral está alineada con los estudios que establecen que la matemática se aprende mejor poco a poco y en periodos de tiempo largos. De esta manera, la retención de los conceptos y destrezas, por parte de los estudiantes, aumenta significativamente. En competencias de matemáticas sucede lo mismo, el aprendizaje se va dando mediante etapas, revisando conceptos y profundizando a medida que se va integrando conocimiento nuevo. En este trabajo estudiamos el aprendizaje en espiral y presentamos ejemplos de esta metodología en olimpiadas matemáticas. En particular mostramos algunos ejemplos en áreas clásicas de competencias matemáticas como geometría, álgebra, conteo y teoría de números. También mostramos ejemplos de distintas olimpiadas, unas de ellas con objetivos de popularización de la matemática y otras orientadas hacia estudiantes talentosos.

5.2 Introducción

La matemática está desarrollada en pedazos lineales, que obviamente se van ramificando y conectando, pero en esos segmentos lineales, los conceptos se van construyendo a partir de conceptos previos, comenzando de aspectos sencillos y logrando llegar a conceptos más complejos y abstractos. Esta linealidad en la matemática puede ser una de las razones principales de su dificultad, ya que un estudiante que no domine ciertos temas tendrá mayor dificultad para entender y dominar temas futuros. La pregunta que nos hacemos es, si el hecho que la matemática sea lineal implica que la debemos enseñar de manera lineal, en bloques, o la debemos enseñar en espiral. La respuesta a esta pregunta se basa, obviamente, en el efecto positivo que queremos en cuanto al aprendizaje por parte del alumno.

El psicólogo estadounidense Jerome Bruner, durante la década de los sesenta (Bruner, 1960), observó que se podían obtener muy buenos resultados en clases de alta complejidad como la matemática, aplicando una metodología que consistía en presentar al estudiante en una primera instancia una serie de conceptos y destrezas a un nivel básico, tanto, que se podían aprender de manera muy intuitiva y práctica. Una vez dominadas estas destrezas se introducían de manera posterior conceptos de mayor complejidad y dificultad de manera progresiva, estos respaldados por los conocimientos previamente adquiridos, no solo en la primera etapa, sino también, aquellos que provenían de otras temáticas de la materia e incluso de otras ramas de estudio y de la vida cotidiana. A partir de esto desarrolla lo que conocemos hoy como la metodología de enseñanza en espiral.

Aunque se ha demostrado que la educación en espiral es muy eficiente, hay que reconocer que desarrollar un currículo con enseñanza en espiral es complicado. En ese sentido, surgen preguntas fundamentales como por ejemplo: ¿cuándo debemos enseñar determinado concepto y destreza?, ¿hasta qué nivel de profundidad?, ¿cuándo debemos revisitar el tema para profundizar y conectar con otros conceptos? Esta dificultad ha causado que no necesariamente se enseñe de esta manera en muchos sistemas educativos. Además, analizando la metodología en distintos contextos, varios autores (Gibbs, 2014) han llegado a la conclusión que la metodología en espiral es altamente eficiente, pero se ha fracasado en su implementación.

Por otro lado se sugiere que la metodología en espiral estudiada y propuesta por Bruner responde a los tres estados en los que la cognición humana se produce. Enactivo, que se refiere al aprendizaje a través de la acción y la manipulación de objetos;

el icónico que se basa mayormente en la representación visual de los objetos y el simbólico donde ya se usan las palabras o símbolos para describir los objetos o fenómenos (Johnston, 2012).

Otra característica importante que Bruner fomentaba en su metodología, es el hecho que los errores son bienvenidos porque de ellos se puede sacar aprendizaje positivo. Justamente la metodología en espiral ayuda a detectar los errores comunes que los estudiantes cometen y el docente puede construir conocimiento a partir de esos errores. Esta idea es compartida por muchos psicólogos que piensan que los errores ayudan a aprender. Como plantea en Giraldez (s.f.) lo importante es la pregunta ¿cómo podemos ayudar a nuestros estudiantes a aprender de sus propios errores?

La metodología de currículum en espiral se usa en distintas áreas incluyendo matemáticas, lenguaje, ciencias, ciencias sociales, entre otros. En matemáticas su uso en algunos momentos es prácticamente obligatorio. Los estudiantes aprenden la suma de números enteros positivos en los primeros grados de primaria y en los últimos grados aprenden esta operación con números negativos, decimales y fracciones. Después en escuela intermedia y superior suman con variables, con expresiones algebraicas en general y después con funciones, etc.

Desde este punto de vista es natural que la matemática en general se enseñe usando la metodología en espiral. En ese sentido, las preguntas que nos interesan son: ¿cómo hacerlo?, ¿en qué temas hacerlo?, ¿cuándo hacerlo?, ¿cómo dividir un tema en particular para estudiarlo en bloques?, entre otras. En matemáticas esta disyuntiva se hace aún más complicada porque la cantidad de conceptos, estrategias y algoritmos que un estudiante debe aprender en su paso por la escuela es extensa.

La matemática se construye sobre ella misma (Oswal, 2022). El cálculo requiere trigonometría, la trigonometría requiere un entendimiento sólido de geometría y el álgebra, estos a su vez requieren un buen dominio de aritmética. Los estudiantes pasan estos cursos, muchas veces con notas bajas, lo que implica que tienen lagunas en el conocimiento, que van a influir en el aprendizaje de los temas subsiguientes. De esta manera se van arrastrando deficiencias en temas básicos y estas deficiencias se ven engrandecidas cuando el estudiante se tiene que enfrentar a temas más avanzados y abstractos, por consiguiente a la frustración de no entender y no poder fácilmente llenar esos vacíos.

En consonancia con lo anterior, el estudiante debe aprender estas destrezas en distintas áreas, de cierta forma diferentes, como geometría, álgebra, estadística, conteo, entre otras y cada una de estas áreas a su vez tiene temas y subtemas. Para un maestro es entonces un reto, estar revisitando temas y garantizando que de todas formas se cubra todo el currículum. Por esta razón, el diseño del currículum en espiral es complicado y supone que no se tenga que re-enseñar, sino que se vaya profundizando y agregando temas a medida que se pasa por contenidos ya estudiados, de esta forma garantizar que se cubren los temas de los currículos con la formalidad y profundidad adecuada.

5.3 La Metodología de Enseñanza en Espiral

En sus estudios de educación, Bruner observó que la metodología de enseñanza de las matemáticas en espiral es muy efectiva, de hecho él plantea que esta estrategia es efectiva en general para enseñar asignaturas de mayor complejidad.

En esta metodología en espiral los conceptos y destrezas no se estudian desde su inicio hasta su final, es decir en bloque o de forma lineal, sino que se presentan de manera básica y más adelante se vuelven a presentar conectándose y profundizando con destrezas que el estudiante ha aprendido a lo largo del tiempo.

En una enseñanza en bloque, se espera que el estudiante tenga todas las herramientas para entender desde lo más básico hasta lo más avanzado del concepto. Entonces se empieza y se termina el estudio del concepto en un bloque continuo de tiempo. Sin embargo, esto acarrea de manera usual una saturación en el estudiante que juega un papel negativo, en particular en materias complejas como la matemática, la sensación de que el contenido está fuera del alcance de su propio entendimiento es un factor de fracaso para los estudiantes. La metodología en espiral plantea un aprendizaje gradual a lo largo de meses durante un grado determinado o incluso años, tomando así varios grados de la educación del estudiante.

Al establecerse un proceso gradual que evita la saturación en el contenido abordado, el estudiante no necesariamente experimenta la frustración de aprender contenidos excesivamente complejos y extensos, sino más bien, adquiere confianza en su aprendizaje y se vuelve partícipe de este proceso, ya que es consciente de que revisitará el tema de manera más profunda en el futuro y esto lo incentiva a realizar investigaciones por su cuenta. Además, el estudiante es capaz de observar su propio progreso cada vez que revisita el tema.

La enseñanza en espiral, que envuelve fuertemente la repetición, ha demostrado ser una estrategia importante para que el alumno vaya madurando poco a poco los conceptos y destrezas. En ese sentido, a la metodología en espiral se le asocia directamente el concepto de revisitar un tema, sin embargo, esto no se debe confundir con la metodología de re-enseñanza, es decir, que no se vuelvan a explicar los conceptos previos, sino que a partir de estos y con las experiencias adquiridas, se construya el conocimiento más avanzado. En otras palabras mantiene la secuencia lógica del currículo a enseñar, con la diferencia que los temas tienen una jerarquía de importancia y dificultad progresiva. Justamente esta es una de las dificultades más grandes de esta metodología, pues la misma asume que el estudiante ya conoce los temas básicos o intermedios previos.

Una de las ventajas de la enseñanza en espiral comparada con la enseñanza en bloque, es que el profesor se da cuenta constantemente de los conceptos o destrezas que el alumno no conoce o que ha olvidado, esto le permite reforzar o inclusive re-enseñar estos conceptos. Cuando la enseñanza se da en bloque, el profesor no necesariamente se da cuenta de conceptos que no fueron suficientemente aprendidos por el estudiante. A su vez, el profesor también es capaz de identificar qué contenidos fueron meramente memorizados por el estudiante, permitiendo de esta manera, buscar estrategias que le permitan profundizar en estos contenidos, en beneficio de la adquisición de conocimiento a un nivel más profundo, dando como resultado una mejor integración entre temas, asignaturas y la misma realidad.

La enseñanza en espiral también plantea un aumento de la dificultad de manera progresiva y planificada, como se ilustra en la Figura 5.1, dando comienzo con una introducción básica y simple del tema a tratar, permitiendo al estudiante familiarizarse de manera general con el contenido, posteriormente al revisitar el tema se deben introducir más detalles del mismo, aumentando la dificultad y complejidad, sin descuidar que dicha transición debe efectuarse de manera fluida, para evitar la saturación en el estudiante. Es vital en esta etapa, dejar en claro la relación que hay entre los conceptos antiguos y los nuevos, y cómo estos se pueden relacionar con todo su entorno académico o la vida cotidiana.

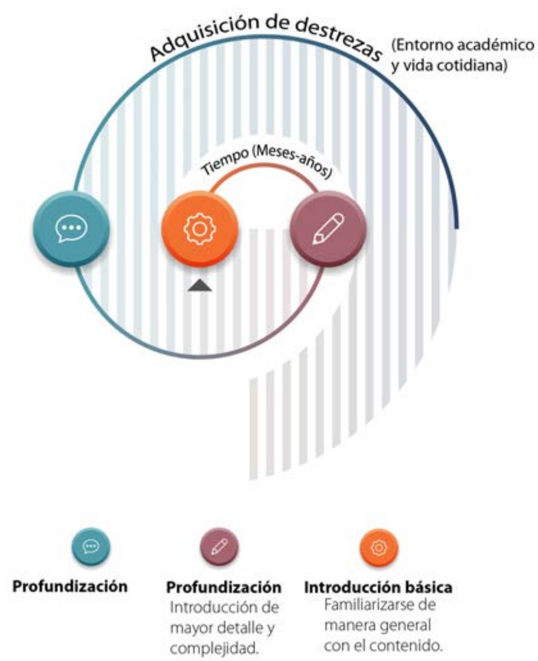

Figura 5.1: *Enseñanza en espiral*

Por el hecho que mencionamos anteriormente, en donde la matemática está construida de muchos pedazos lineales, es prácticamente inevitable, en algunos casos, usar de manera natural la metodología en espiral. Por ejemplo, el concepto de circunferencia, con un centro y un radio debe ser introducido con anterioridad, pues se necesita para conectarlo con problemas de área, perímetro entre otros. Por lo tanto no podríamos esperar a ver el tema en álgebra, en donde se define formalmente, con el concepto de distancia, y donde se desarrolla la teoría para escribir una ecuación, completando cuadrado, etc. También cabe recalcar que el concepto de circunferencia se visitará fuera de la clase de matemáticas, como en física cuando se estudie el movimiento circular uniforme o en dibujo técnico donde se estudiarán de manera precisa sus propiedades de tangencia.

La enseñanza en espiral no solamente se refiere a añadir conceptos nuevos y conectarlos con un concepto ya estudiado, también la podemos apreciar en la dificultad y profundización de un determinado problema. Esto lo ejemplificamos en la siguiente sección con problemas de olimpiadas. Podemos tener un mismo problema en distintos grados de dificultad para estudiantes de distintas edades. La madurez matemática y de razonamiento en general, adquirida por el estudiante le permite abordar un problema, que ya había tenido, pero ahora tenerlo con un grado de mayor dificultad.

El modelo de enseñanza en espiral va alineado directamente al constructivismo (Saborio, 2019). El desarrollo de conceptos o destrezas lo hacemos en el momento apropiado, cuando el estudiante ya conoce ese concepto en otro contexto, o con otra profundidad, para que ahora, cuando ya tiene otras experiencias, pueda construir conocimiento más profundo. Además, el aprendizaje en espiral permite que cada estudiante, de acuerdo a sus conocimientos previos y a sus experiencias de razonamiento, logre afianzar los conocimientos y adquiera destrezas y conocimientos mas profundos. Una de las principales ventajas que tiene el aprendizaje en espiral es justamente que los conceptos y destrezas son aprendidos de manera significativa, y eso permite que el estudiante logre una mejor retención. Los docentes nos quejamos de la poca capacidad de retención que tienen nuestros estudiantes en general, la enseñanza en espiral es una propuesta fuerte para atacar este problema.

En general el modelo de un currículo en espiral de acuerdo a los estudios de Bruner plantea entonces tres principios fundamentales:

- El estudiante revisita un tema o un área varias veces a través del año escolar o a través de distintos años escolares.
- La complejidad del tema aumenta cada vez que se revisita el tema.
- El aprendizaje se va construyendo basado en aprendizaje previo.

La filosofía que hay detrás del aprendizaje en espiral sugiere que el ser humano está en aprendizaje continuo y ese aprendizaje se va fortaleciendo de acuerdo a experiencias y aprendizajes nuevos.

Hay muchos ejemplos en el currículum de varios sistemas educativos en donde se implementa la enseñanza en espiral en algunos temas particulares (Drew, 2013). Por ejemplo el tema de fracciones, tema fundamental que se enseña en la escuela primaria y que inclusive estudiantes universitarios aún no dominan, se puede comenzar enseñando fracciones simples, después más complejas, luego comenzar a sumar y restar fracciones y finalmente a multiplicar y dividir fracciones. Esto se puede hacer de manera continua, pero el currículo en espiral sugiere que se divida en partes y se enseñe revisitando el tema, después de intercalar otros temas, o inclusive que se enseñe y se revisite en varios años escolares. Por otro lado, las operaciones de fracciones también se pueden enseñar comenzando con las más simples, por ejemplo las que tienen denominador igual y después continuar con las más generales. Otro punto de vista puede sugerir que es mejor enseñar las operaciones y fracciones de manera general y entonces ver las fracciones más simples luego como casos especiales. En cualquier caso se puede aplicar la metodología de enseñanza en espiral.

5.4 Aprendizaje en Espiral en las Competencias Matemáticas

Las competencias matemáticas vistas como una estrategia de aprendizaje, cuyo marco teórico se basa mayormente en la solución de problemas, usa fuertemente la metodología en espiral. Muchas de estas competencias, a nivel nacional e internacional, no se ofrecen necesariamente de acuerdo al grado del estudiante, sino más bien de acuerdo a la edad. En la región de Iberoamérica hay competencias regionales como la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) y la Olimpiada del Cono Sur y hay olimpiadas que abarcan un número mayor de países como la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (IBERO). Por otro lado, hay Olimpiadas mucho más grandes como la Olimpiada Mundial de Matemáticas (IMO).

En varias de estas olimpiadas no siempre existe necesariamente un currículo completamente definido, pero hay áreas de la matemática y temas particulares que son los que se cubren. En estas olimpiadas se ve claramente la metodología de espiral. Por ejemplo, en el área de geometría en la OMCC, uno de los temas más avanzados que se cubre son los cuadriláteros cíclicos. Un estudiante que desee participar en esta Olimpiada y ser exitoso en los problemas de geometría sabe que necesita conocer este tema a profundidad. Por otro lado, para olimpiadas como la IBERO o la IMO, el conocimiento sobre cuadriláteros cíclicos es un tema fundamental, pero la utilización de conceptos más fuertes como eje radical, potencia, etc., cuya base principal son los cuadriláteros cíclicos son temas también muy importantes.

Una competencia donde podemos estudiar y analizar el aprendizaje en espiral es la competencia Canguro Matemático. Este evento es la competencia internacional de matemáticas más grande del mundo, en la que participan millones de estudiantes de más de 90 países. El Canguro matemático está disponible para varios niveles educativos en la escuela preuniversitaria y podemos apreciar y ejemplificar esta estrategia de enseñanza fácilmente.

5.4.1 Dificultades variadas

En la competencia Canguro Matemático encontramos problemas que podríamos llamar "problemas de seguimiento". en ese sentido se plantea un problema con una estrategia básica para un cierto nivel y después se plantea la misma situación pero que requiere herramientas mas sofisticadas para su solución. Una de las intenciones de hacer esto, es que justamente el estudiante al ver nuevamente la situación pueda usar la experiencia de haber resuelto el ejercicio básico. Esta dinámica es un buen ejemplo de una estrategia de implementación de la metodología en espiral. Los siguientes dos problemas están tomados de los exámenes de Écolier y Cadet de la competencia Canguro Matemático del año 2022.

Problema 5, Écolier, 2022: Kengu siempre hace un gran salto seguido de dos pequeños saltos en la recta numérica, como se muestra en la Figura 5.2. Kengu comienza en 0 y termina en 16. ¿Cuál es el número de saltos que hace Kengu?

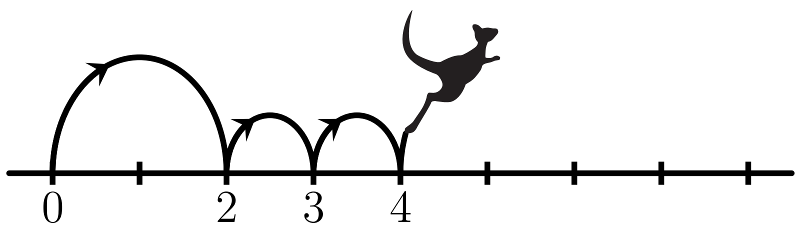

Figura 5.2: *Pequeños saltos del canguro*

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

Solución: Este primer problema requiere ver un patrón; darse cuenta por ejemplo, que se requieren 3 saltos para avanzar 4 unidades. Por lo tanto para avanzar 16 unidades se requieren $3 \cdot 4 = 12$ saltos. Como los números del problema son pequeños, otra manera de abordar el problema es simplemente hacer el proceso hasta el 16 y contar los saltos.

Problema 3, Cadet, 2022: A Kengu le gusta saltar sobre la recta numérica. Siempre hace dos saltos grandes seguidos de tres saltos pequeños, como se muestra en la Figura 5.3, y luego repite este proceso una y otra vez. Kengu comienza su rutina de salto en 0. ¿En cuál de estos números aterrizará Kengu durante su rutina?

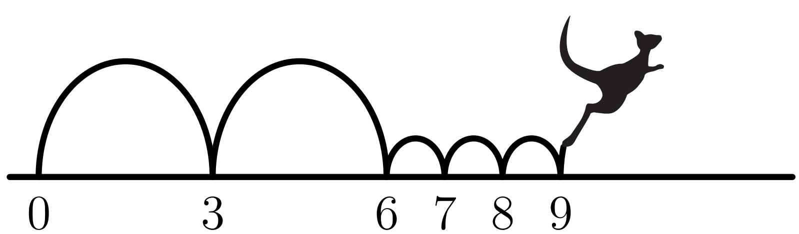

Figura 5.3: *Grandes saltos del canguro*

A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

Solución: Este problema, aunque se podría hacer también de manera exhaustiva, haciendo todos los saltos hasta llegar a los números de las alternativas de la respuesta, eso requiere más tiempo y no es necesariamente la solución más elegante. Mirando el patrón notamos que el canguro siempre visita los números que son múltiplos de 3. Con esa información podemos saber la respuesta pues en las opciones múltiples el único múltiplo de 3 es el 84. Por otro lado, ¿Cómo saber que Kengu no cae en otros de los números de las opciones?; esto requiere un poco mas de análisis. Un patrón se obtiene cada 9 unidades, así que si dividimos 84 entre 9 notamos que $84 = 9 \cdot 9 + 3$. Por lo tanto, el 84 corresponde a 9 veces el patrón y un salto más de 3 unidades. Es decir, que Kengu cae en un punto equivalente al punto del 3 en el primer patrón. Con esto podemos ver que Kengu no visita el 85 ni el 86 y tampoco visita el 82 y el 83.

La Competencia canguro Matemática tiene exámenes en seis niveles: Pre-Écolier, Écolier, Benjamin, Cadet, Junior y Student; es decir básicamente un nivel para dos grados del sistema educativo, comenzando desde primaria. Esto permite encontrar varios problemas de este estilo, en donde la idea puede ser la misma, pero la dificultad y las herramientas que ese usan dependen del nivel.

5.4.2 Algunos ejemplos en conteo

A continuación, mostramos una serie de problemas del área de conteo. Comenzamos con un problema que requiere contar, pero se puede hacer de manera exhaustiva, que es la forma usual como aprenden a contar los niños en grados de educación primaria. Después mostramos dos problemas, conectados a este primero, pero que requieren propiedades de divisibilidad y propiedades más sofisticadas de conteo.

En el primer problema se requiere identificar cuándo un número es divisible por 3 pero no es necesario saber la regla de divisibilidad del 3 ya que los números son pequeños y fáciles de verificar. También se requiere contar, pero no es necesario saber técnicas de conteo pues se puede simplemente hacer una lista exhaustiva de las posibilidades.

Problema Benjamin: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden armar usando los tres dígitos $1, 2, 4$ de tal manera que los dígitos vecinos siempre sumen a un múltiplo de 3?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

Solución: El 1 y el 2 siempre tienen que ir juntos y el 2 y el 4 también tienen que ir juntos, por lo tanto las únicas posibilidades son 124 y 421.

El siguiente problema es uno clásico de conteo en donde el principio de multiplicación ayuda a contar rápido.

Problema Cadet: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden armar usando solamente dígitos pares?
A) 10 B) 13 C) 100 D) 200 E) 500

Solución: Para el dígito de las centenas tenemos cuatro opciones: $2, 4, 6, 8$. Para el dígito de las decenas tenemos cinco posibilidades: $0, 2, 4, 6, 8$. De igual manera para el dígito de las unidades tenemos cinco posibilidades. Por lo tanto, por el principio de multiplicación, tenemos en total $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números que cumplen las condiciones del problema.

Al juntar las estrategias de los ejercicios anteriores podemos solucionar problemas que incluyan tanto las reglas de divisibilidad como el conteo.

El siguiente problema fue el último del nivel Junior de la Competencia Canguro Matemático 2023. El examen del nivel Junior tiene 30 preguntas, así que este problema es uno de los más difíciles de este nivel. Aquí se requiere un conocimiento más profundo de la regla de divisibilidad del 3 y aunque se pudiera hacer una lista exhaustiva de los casos, saber el principio de multiplicación facilita el conteo.

Problema 30 Junior 2023: Pia quiere escribir los enteros del 1 al 9 en las nueve cajas que se muestran en la Figura 5.4, de tal manera que los enteros en cualesquiera tres cajas adyacentes sumen a un múltiplos de 3. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

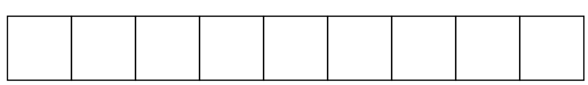

Figura 5.4: *Múltiplos de tres*

A) 6^4 B) 6^3 C) 2^9 D) $6!$ E) $9!$

Solución: Para tener una suma divisible por 3 necesitamos que aparezcan los residuos módulo 3 en el patrón ABCABCABC con $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$. Hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ posibilidades para ordenar los residuos $0, 1, 2$ de acuerdo a las letras A, B, C. Una vez hecho esto hay 6 maneras de ordenar los números que dejan residuo 1 al dividirse por 3, es decir: $1, 4, 7$. Hay 6 maneras de ordenar los números que dejan residuo 2 al dividirse por 3, es decir: $2, 5, 8$; y hay 6 formas de ordenar los números que dejan residuo 0 al dividirse por 3, es decir: $3, 6, 9$ en los lugares con el residuo correspondiente. En total hay $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ posibles distribuciones deseadas.

El siguiente problema fue el problema 9 en el nivel Student de la competencia Canguro Matemático del 2023. El examen del nivel Student tiene 30 problemas, así que este es catalogado de nivel medio fácil.

Problema 9 Student 2023: Cada uno de los números enteros del 1 al 9 se deben colocar en una de las 9 casillas de la Figura 5.5, para que tres números cualesquiera en casillas consecutivas sumen un múltiplo de 3. Los números 7 y 9 ya se han colocado. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden llenar las casillas restantes?

	7		9					

Figura 5.5: *Múltiplos de tres con dos números dados*

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Solución: Como $7 = 2 \cdot 3 + 1$ y $9 = 3 \cdot 3$, el número entre 7 y 9 debe tener la forma $3x + 2$ para que la suma de los tres sea divisible por 3. Esto nos da las opciones 2, 5 y 8 para este cuadrado. El primer cuadrado debe llenarse con un número de la forma $3x$ por la misma razón, y esto da las opciones 3 y 6. Por lo tanto, tenemos un total de $3 \cdot 2 = 6$ formas posibles de llenar los dos cuadrados al lado del dígito 7. Junto al 9, volvemos a necesitar un dígito de la forma $3x + 1$, y por tanto debe ser 4 o 1, y al lado, un dígito de la forma $3x + 2$, de los cuales aún nos quedan dos dígitos sin utilizar. Esto nos da un total de $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ formas de llenar los 6 cuadrados más a la izquierda. Esto obliga a una única opción para cada uno de los cuadrados restantes, ya que estos deben ser de la forma $3x$, $3x + 1$ y $3x + 2$, respectivamente, y solo queda un dígito de cada tipo por colocar. Esto significa que hay un total de 24 opciones para distribuir los dígitos de forma que cumplan las condiciones.

5.4.3 Algunos ejemplos en álgebra

En el apartado algebraico tomaremos como tema central la ecuación, este concepto se aborda desde muy temprano en la formación de los estudiantes y, si bien es cierto que en sus primeras presentaciones estos no tienen un lenguaje algebraico formal, sí son capaces de asociar valores numéricos a símbolos que los representan, a su vez, las propiedades de la igualdad, como la transitividad empiezan a ser parte fundamental de la solución de problemas, tal como podemos verlo en el siguiente ejemplo asociado con la Figura 5.6:

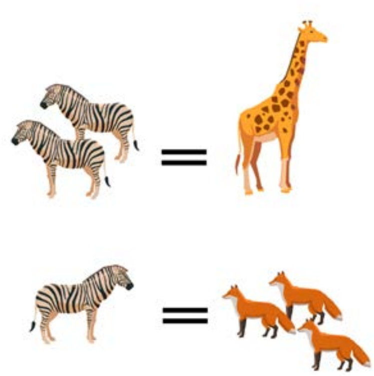

Figura 5.6: *Cebras, jirafa y zorros*

Problema PreÉcolier, 2019: Dos cebras pueden transportar tantas mercancías como una jirafa. Una cebra puede transportar tantas mercancías como 3 zorros. ¿Cuántos zorros se necesitan para cargar la misma mercancía que una jirafa?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solución: Una cebra puede cargar lo que tres zorros, por lo que dos cebras pueden cargar lo que seis zorros. Como la jirafa puede cargar lo que dos cebras, por transitividad, entonces se necesitan seis zorros para cargar lo de una jirafa.

Con el paso del tiempo el estudiante adquiere el lenguaje formal del álgebra, aprende cómo declarar variables y plantear ecuaciones, y aunque los problemas aun no poseen tanta dificultad como para forzosamente resolverlos mediante este lenguaje, su uso le da seguridad a la hora de abordarlos y encontrar una solución precisa. En el siguiente ejemplo podemos apreciar dicha situación:

Problema Cadet: Lucy tiene algunos dulces. Ella le da la mitad a Aidan, y una tercera parte de lo que le queda a Brandon, finalmente, le da a Kartik una cuarta parte de los dulces sobrantes. Si Brandon tiene dos dulces más que Karnik, ¿cuántos dulces tenía Lucy al empezar?
A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

Solución: Si Lucy tiene x dulces, entonces, Aidan recibe $\frac{x}{2}$, Brandon $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)$ y Kartik $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Además como Brandon tiene dos dulces más que Kartik tenemos:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2$$

De lo cual podemos obtener que $x = 24$

Ahora bien, en esta etapa el estudiante además ha adquirido conocimientos en otras áreas de la matemática, y puede combinarlos con sus conocimientos sobre ecuaciones para resolver problemas como el presentado a continuación. En este ejemplo el estudiante debe tener conocimientos sobre los lados de un triángulo ya que no solo debe plantear las ecuaciones que le permitan encontrar las medidas, sino también, debe discriminar cuál de las dos soluciones posibles es compatible con la figura de triángulo.

Problema Cadet: La suma de las medidas de dos lados de un triángulo isósceles es $20cm$. La suma de las medidas de otro par de sus lados es $30cm$. Encuentra el perímetro del triángulo.
A) $35cm$ B) $40cm$ C) $45cm$ D) $50cm$ E) Otra respuesta

Solución: Si asignamos a la medida de los lados iguales del triángulo x y a al lado restante y, se puede obtener el siguiente sistema, si asumimos que los lados iguales suman $20cm$:

$$\begin{aligned} x + x &= 20 \\ x + y &= 30 \end{aligned}$$

De lo que se obtiene que $x = 10$ y $y = 20$. Por otro lado, si asumimos que los lados diferentes suman $20cm$ se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + x &= 30 \\ x + y &= 20 \end{aligned}$$

Y se obtiene que $x = 15$ y $y = 5$. Es fácil ver que la primera solución a pesar de ser una respuesta coherente para el sistema de ecuaciones no cumple con la desigualdad triangular, por lo que no puede ser solución del problema. En el segundo caso si se satisface la desigualdad triangular y así el perímetro será $35cm$.

Ya bien establecido el concepto de ecuación, el aumento de la dificultad de los problemas tendrá un papel fundamental en el desarrollo analítico del estudiante, así, las aplicaciones de estas en temas como la geometría y el análisis de funciones serán indispensables. En los siguientes problemas veremos situaciones similares a las anteriores, pero con un mayor grado de dificultad.

Problema Student: Exactamente la mitad del volumen de una copa de cristal, como la se muestra en la Figura 5.7, está llena de champaña, si la altura de la copa (sin la base) es h, ¿hasta qué altura está llena la copa?

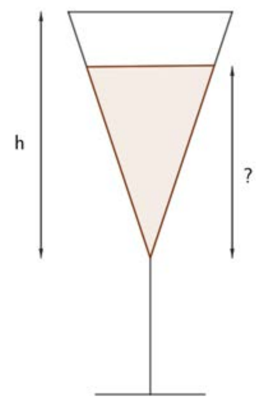

Figura 5.7: *Copa*

A) $\dfrac{2h}{3}$ B) $\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$ C) $\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ D) $\dfrac{3h}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}h}{4}$

Solución: Si el radio de la copa está dado por R y la altura por h, y el volumen de la champaña, está dado por el radio r y la altura x, entonces obtenemos la ecuación, $\frac{1}{3}\left(\pi R^2\right) h = 2\frac{1}{3}\left(\pi r^2\right) x$. Que simplificando sería:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{2x}{h}$$

.

Además, note que si dividimos por la mitad el triángulo isósceles que forma la copa, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes de los cuales se desprende la ecuación:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{x}$$

Al resolver estas ecuaciones para x obtenemos $\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

En el siguiente ejemplo se muestra un ejercicio de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2023, en el que el concepto de ecuación debe usarse de manera más avanzada y conectándolo con otros conceptos. En este caso es una ecuación que envuelve funciones y operaciones entre funciones. En el ejercicio se pide solucionar la ecuación, pero en este caso solucionarla, es encontrar las funciones que la satisfagan.

Problema 3, IBERO 2023: Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que:

$$2023f\left(f\left(x\right)\right) + 2022x^2 = 2022f\left(x\right) + 2023\left[f\left(x\right)\right]^2 + 1$$

para cada entero x.

Solución: Como en (AOPS, 2023) considerar la ecuación:

$$2023\left(f(f\left(x\right)) - f\left(x\right)^2 - 1\right) = 2022\left(f\left(x\right) - x^2 - 1\right)$$

Esto implica que 2023 divide el lado derecho de la ecuación y como 2023 y 2022 son primos relativos, entonces 2023 divide a

$$\left(f\left(x\right) - x^2 - 1\right)$$

para todo x. Por lo tanto, 2023 divide a $\left(f(f(x)) - f(x)^2 - 1\right)$ y entonces 2023^2 divide el lado izquierdo de la ecuación. Por inducción es fácil probar que 2023^n divide el lado izquierdo de la ecuación para todo entero positivo n. Entonces el lado izquierdo de la ecuación es 0 y por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es 0. Por lo tanto $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{Z}$. Por último, es fácil probar que efectivamente esta función satisface la condición.

En Figura 5.8 se puede apreciar un resumen del trayecto en espiral de los ejemplos anteriores, cómo partimos del concepto natural de ecuación y se profundizó en cada etapa, aumentando detalles, complejidad, interrelación con otras áreas de la materia, etc.

Figura 5.8: *Trayecto en espiral de problemas de álgebra*

5.4.4 Algunos ejemplos en geometría

En los siguientes problemas del área de geometría veremos, cómo el estudio de la circunferencia nos lleva a través de la profundización de sus propiedades, empezando por el análisis del comportamiento de ángulos asociados a las mismas, hasta problemas de competencia en los que se aplican los conceptos como cuadriláteros cíclicos, potencia de un punto, eje radical, etc. La Figura 5.9 será utilizada en el primero de los problemas que se consideran a continuación:

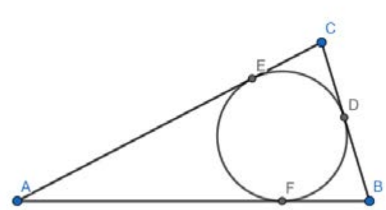

Figura 5.9: *Circunferencia inscrita*

Problema Junior: En el triángulo ABC, $\angle A = 40^o$. Los puntos D, E y F son los puntos tangentes a la circunferencia inscrita al triángulo. La medida del $\angle EDF$ es:

A)40^o B) 50^o C) 60^o D) 70^o E) 80^o

Solución: Sea O el centro de la circunferencia, los segmentos OE y OF son perpendiculares a los segmentos AE y AF respectivamente, por lo que la medida $\angle EOF = 180^o - 40^o = 140^o$. Como el ángulo central $\angle EOF$ abre el mismo arco que el ángulo inscrito $\angle EDF$, entonces $2\angle EDF = \angle EOF$, lo que implica que $\angle EDF = 70^o$.

En el problema anterior vemos cómo entran en juego los conceptos de ángulo inscrito, ángulo central y la relación entre ellos, así como también la perpendicularidad de la recta tangente a la circunferencia. En el siguiente problema se unen a las ya conocidas propiedades de los ángulos inscritos y centrales, las propiedades de triángulos isósceles.

Problema Student: En la Figura 5.10 se muestra que $\angle A = 11^o$. Si el segmento AB es igual al radio de la circunferencia, ¿cuál es la medida del $\angle COD$?

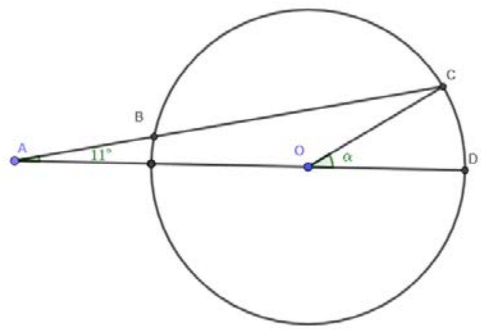

Figura 5.10: *Ángulo exterior*

A)60^o B) 44^o C) 33^o D) 66^o E) $22{,}5^o$

Solución: El triángulo ABO es isósceles, por lo tanto $\angle BOA = 11^o$. Entonces, por ángulo exterior tenemos $\angle CBO = 22^o$. Pero el triángulo OBC también es isósceles, así que $\angle OCB = 22^o$. Luego $\angle BOC = 180^o - 22^o - 22^o = 136^o$. Por lo tanto, $\angle COD = 180^o - 11^o - 136^o = 33^o$.

En el siguiente ejemplo, donde se considera la Figura 5.11, el problema toma el concepto de cuadrilátero ortogonal y el valioso teorema de Pitágoras en su solución.

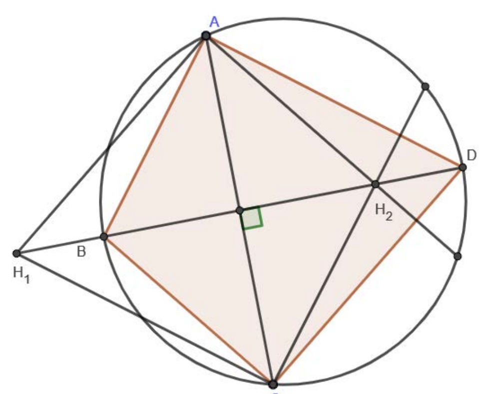

Figura 5.11: *Cuadrilátero ortogonal*

Problema Student: El cuadrilátero ortogonal $ABCD$ está inscrito en un círculo de radio R. Si H_1 y H_2 son los ortocentros de los triángulos ABC y ADC, respectivamente, y $AC = \frac{24}{13}R$, la suma de las medidas de los segmentos de recta BH_1 y DH_2 es:
A) $\frac{20}{13}R$ B) R C) $\frac{3}{2}R$ D) $\frac{7}{13}R$ E) $\frac{14}{13}R$

Solución: Sean M el punto medio de AC, C_1 el circuncentro del triángulo ABC y del triángulo ADC (nótese que es el mismo para los dos triángulos, ya que es el centro del cuadrilátero cíclico). Es conocido que la distancia de un vértice del triángulo al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto al vértice, es decir $BH_1 = 2C_1M$ y $DH_2 = 2C_1M$. Como el cuadrilátero es ortogonal, por Pitágoras se tiene que $(C_1M)^2 + (CM)^2 = R^2$. Por hipótesis $CM = \frac{24}{26}R$. Sustituyendo resulta que $(C_1M)^2 + \left(\frac{24}{26}R\right)^2 = R^2$. De aquí se obtiene que $C_1M = \frac{5}{13}R$. Por lo tanto, $BH_1 + DH_2 = 2\frac{5}{13}R + 2\frac{5}{13}R = \frac{20}{13}R$.

En el siguiente problema se usan propiedades básicas de paralelogramos y triángulos. Además se usa una propiedad fundamental de los ángulos inscritos: los triángulos inscritos en una circunferencia en donde uno de sus lados es un diámetro de dicha circunferencia, son siempre triángulos rectángulos.

Problema 2, OMCC 2008: Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O tal que AC es un diámetro. Se construyen los paralelogramos $BAOE$ y $DCOF$. Demuestre que si los puntos E y F pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Solución: Considere la Figura 5.12. Como $BAOE$ es un paralelogramo se tiene $AO = BE$ y $AB = OE$. Pero si E está en la circunferencia entonces $OE = OB = OA$, o sea que $OA = OB = BA$ y el triángulo AOB es equilátero. Entonces $\angle OAB = 60^o$. Como $\angle ABC = 90^o$ (ángulo inscrito en una semicircunferencia) se sigue que $\angle OCB = 30^o$. Un razonamiento análogo muestra que $\angle DCA = 60^o$ y $\angle DAC = 30^o$. Por lo tanto, $\angle BCD = \angle BAD = 30^o + 60^o = 90^o$, y $ABCD$ es un rectángulo.

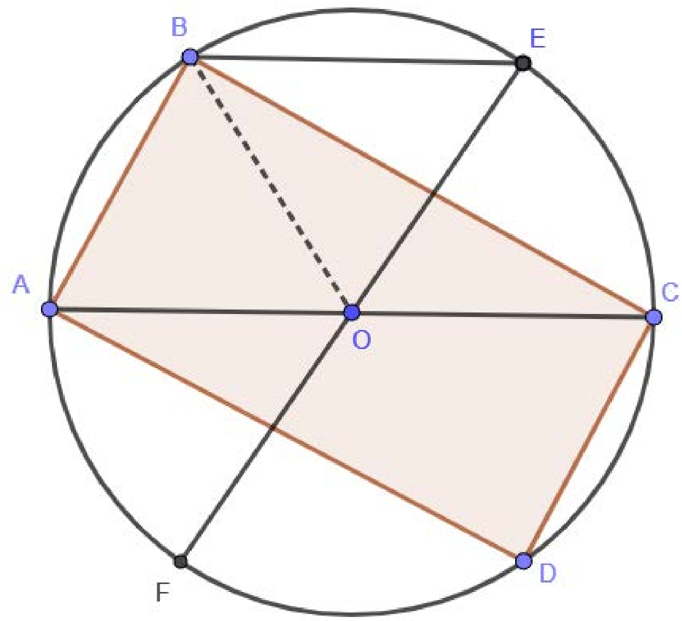

Figura 5.12: *Rectángulo inscrito*

Las olimpiadas internacionales de matemáticas, dedicadas a estudiantes talentosos, como la IMO, la IBERO, la OMCC han ido subiendo de dificultad a medida que pasan los años. Por esta razón es difícil valorar las dificultades con respecto a años anteriores. En adición a la dificultad también se han ido agregando temas que antes no se cubrían. Eso lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo comparado con el anterior.

Problema 5, OMCC 2023: Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y Γ la circunferencia que pasa por A, B y C. Sea D el punto diametralmente opuesto A en Γ y l la tangente a Γ en D. Sean P, Q y R los puntos de intersección de BC con l, de AP

con Γ tal que $Q \neq A$ y de QD con la altura del triángulo ABC en A, respectivamente. Defina S como la intersección de AB con l y T como la intersección de AC con l. Muestre que S y T están sobre la circunferencia que pasa por A, Q y R.

Solución:
En la Figura 5.13 observamos que $\angle CTS = \angle CTD$. Además $\angle CTD + \angle TDC = 90^o$ y $\angle TDC + \angle CDA = 90^o$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \angle CTS &= \angle CTD \\ &= 90^o - \angle TDC \\ &= \angle CDA \end{aligned} \tag{5.1}$$

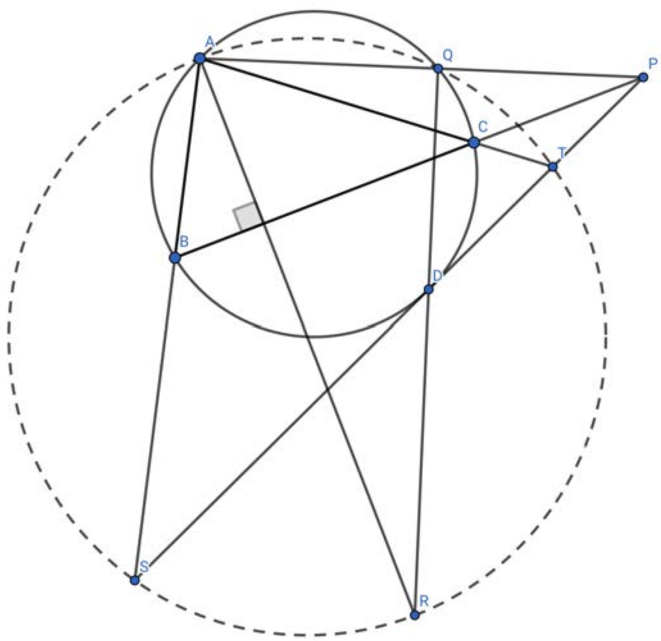

Figura 5.13: *Cinco puntos concíclicos*

Pero $\angle CDA = \angle CBA$ pues ambos son inscritos que abren el arco $\widehat{AC}$. Por lo tanto, $\angle CTS = \angle CBA$. Esto implica que $BCTS$ es cíclico.

Luego, por potencia tenemos $PT \cdot PS = PC \cdot PB = PQ \cdot PA$, por lo que $AQTS$ es cíclico. También tenemos que $\angle AQR = \angle AQD = 90^o$, por lo que para demostrar que los cinco puntos S, T, A, Q, R son concíclicos basta demostrar que el circuncentro del triángulo ATS está en AR. Esto se puede probar demostrando que la tangente al circuncírculo del triángulo AST en el punto A es perpendicular a AR, es decir paralela a BC. En efecto, el ángulo inscrito $\angle TSA$ es igual al ángulo semiinscrito (formado por dicha tangente y AT) que abre el arco $\widehat{AT}$. Por otro lado, como $BCTS$ es cíclico, se tiene que $\angle TSA = \angle BCA$. Esto prueba que la tangente al circuncírculo del triángulo AST en el punto A es paralela a BC.

Para finalizar la sección de geometría se presenta un problema de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas de 2023, en la que se sigue tratando problemas con la propiedad de cuadriláteros cíclicos, pero esta vez agregando al problema encontrar el lugar geométrico que cumple la condición dada.

Problema 4, IBERO 2023: Sean B y C dos puntos fijos en el plano. Para cada punto A del plano, fuera de la recta BC, sea G el baricentro del triángulo ABC. Determine el lugar geométrico de puntos A tales que $\angle BAC + \angle BGC = 180^o$.

Solución: Sea D el punto medio de BC. El lugar geométrico solicitado es el círculo ω con centro D y radio $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$, excluyendo los dos puntos que se encuentran sobre BC.

Sea A_1 el reflejo de A a través de D, como se muestra en la Figura 5.14. La condición dada es equivalente a que el cuadrilátero $BGCA_1$ sea cíclico, por lo que, por potencia de un punto, se debe cumplir que:

$$DG \cdot DA_1 = BD \cdot DC \tag{5.2}$$

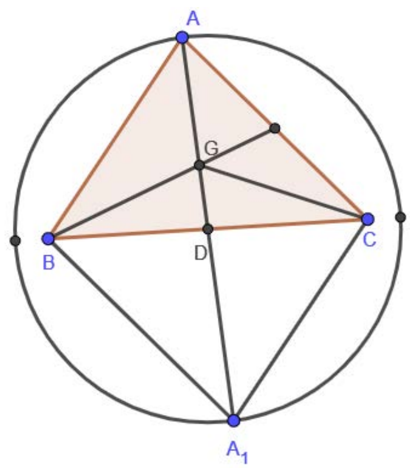

Figura 5.14: *Lugar geométrico*

Como G es el baricentro del triángulo ABC, entonces $DA_1 = DA = 3DG$, Luego $DG = \dfrac{DA}{3}$. Por otro lado, $DB = DC = \dfrac{BC}{2}$. Sustituyendo estas ecuaciones en (5.2) se obtiene:

$$\frac{AD^2}{3} = \frac{BC^2}{4}$$

Por lo tanto,

$$AD^2 = \frac{3 \cdot BC^2}{4}$$

Luego $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$ y entonces A debe pertenecer a ω. Como BC y su punto medio D están fijos, entonces todos los puntos de ω cumplen la condición, excepto los que caen en la línea BC pues allí se forman triángulos degenerados. Esto termina la demostración.

5.5 Conclusiones

En matemáticas puede parecer muy natural el uso de la metodología en espiral para su enseñanza, ya que muchos de los conceptos aprendidos se revisitan de manera obligatoria. Sin embargo, la implementación de esta metodología no es sencilla pues se puede confundir fácilmente con re-enseñanza y aunque la re-enseñanza no es mala, si trae problemas a los docentes para alcanzar a cubrir las destrezas y conceptos de los respectivos currículos.

Una de las ventajas importantes de la metodología en espiral es que el aprendizaje se da de manera continua, por lo tanto, es más difícil que los estudiantes olviden los conceptos y destrezas aprendidos y esto les permitirá avanzar de manera más efectiva en la adquisición de conceptos más profundos.

La metodología de espiral es una herramienta importante para el docente, ya que puede identificar de manera más clara las debilidades académicas de sus estudiantes.

Una de las desventajas mayores de la metodología en espiral, es el tiempo que consume la planificación de los currículos. En ese contexto deben ser bien pensados de tal manera que no se convierta en repetición de temas y por consiguiente el periodo escolar no alcance para cubrir y profundizar en los temas.

A nivel de los currículos universitarios no se encuentran estudios en el área de la metodología en espiral. El problema sigue siendo evidente. Por ejemplo los estudiantes ven el concepto y las técnicas para encontrar límites en el curso de cálculo diferencial y cuando las tienen que usar en los cursos siguientes, por ejemplo para series, no dominan el tema y muchos de ellos ni recuerdan el tema. La metodología en espiral podría ser una solución a este problema.

En olimpiadas matemáticas es más fácil seguir esta metodología, ya que muchos de los estudiantes que participan voluntariamente en estas competencias adquieren conocimientos para solucionar problemas y de cierta forma están ávidos de adquirir más conocimientos para solucionar problemas más retadores y para participar en competencias de más alto nivel. Eso sucede mucho en el caso de las Olimpiadas Internacionales.

5.6 Referencias bibliográficas

1 AOPS (2023). *Iberoamerican Math Olympiad*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h3151809p28631506

2 Akveld, M. y Cáceres, L. (2022). AKSF & Math Kangaroo: The world's largest International Mathematics Competition. *Notices*, 69, 11, pp. 1956-1960.

3 Bruner, J. (1960). *Process of education*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

4 Drew, C. (2023). *Bruner's spiral curriculum - the 3 key principles*.
https://helpfulprofessor.com/spiral-curriculum/

5 Gibbs, B. C. (2014). Reconfiguring Bruner: Compressing the Spiral Curriculum. *Phi Delta Kappan*, v95, n7, pp. 41-44.

6 Giraldez, A. (s.f.). *El error como oportunidad de aprendizaje. ¿Y si dejamos de castigar los errores?*, Educación 3.0.
https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/dejamos-castigar-los-errores/

7 Glosario Currículum en Espiral.
https://grupoaspasia.com/es/glosario/curriculum-en-espiral/

8 Johnston, H. (2012). *The Espiral Curriculum*.
https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED538282.pdf

9 Montagud, N. (2019). *Curriculum en espiral: qué es y cómo se usa en educación*.
https://psicologiaymente.com/desarrollo/curriculum-espiral

10 Oswal, Y. (2022). *Why is Mathematics Difficult?*
https://timesofindia.indiatimes.com/readersblog/wordsoul/why-is-mathematics-difficult-48082/

11 Saborio, A. (2019) *Teorías del Aprendizaje según Bruner*.
https://www.psicologia-online.com/teorias-del-aprendizaje-segun-bruner-2605.html
https://www.overleaf.com/project/6550b392e33e719f1f160ccf