Universidad de Oviedo

Aula Abierta

Volumen 53, número 3 julio-septiembre, 2024/págs. 211-220

Conocimiento probabilístico común y especializado de futuros profesores de secundaria al interpretar un informe sobre la COVID-19

Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada
Mail: rocioaarroyo@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3201-8542

María M. Gea
Universidad de Granada
Mail: mmgea@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5229-0121

Carmen Batanero
Universidad de Granada
Mail: batanero@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4189-7139

RESUMEN

Un fin de la enseñanza de la probabilidad es desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes, que debe estar apoyado por un conocimiento adecuado de los profesores encargados de la enseñanza. En este trabajo se analiza el conocimiento matemático común y especializado de 66 profesores en formación de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. La tarea propuesta implica aplicar su alfabetización y razonamiento probabilístico al interpretar una noticia sobre la COVID-19 tomada de los medios de comunicación. Para evaluar su conocimiento común, sobre dicha noticia se les plantean cinco preguntas probabilísticas y de toma de decisión, utilizadas previamente con estudiantes de Bachillerato; y para analizar su conocimiento especializado, se les pide identificar los objetos matemáticos requeridos para resolver la tarea. Los resultados indican un buen conocimiento probabilístico común, con algunos problemas en la probabilidad compuesta. Los participantes reconocieron un alto número de conceptos matemáticos en la tarea, aunque mostraron menor capacidad para identificar otros objetos y confusión entre varios tipos de objetos. Se concluye con la necesidad de reforzar el conocimiento probabilístico de los futuros profesores.

Palabras clave: Alfabetización, conocimiento probabilístico común, conocimiento probabilístico avanzado, formación docente de futuros profesores de secundaria, razonamiento.

Prospective secondary school teachers' common and specialised knowledge when interpreting a COVID-19 report

ABSTRACT

An aim of probability teaching to develop students' probabilistic reasoning, which needs adequate knowledge in the teachers in charge of teaching. This paper analyses the common and specialised mathematical knowledge in 66 prospective secondary and high school teachers. The proposed task involved applying their probabilistic literacy and reasoning when interpreting a news report on COVID-19 taken from the media. To assess their common knowledge, five probabilistic and decision-making questions (previously used with high school students) were asked about the article. To analyse their specialised knowledge, participants were asked to identify the mathematical objects required to solve the task. The results indicate good common probabilistic knowledge, with some problems in compound probability. Participants recognised a high number of mathematical concepts in the task with less ability to identify other objects and confusion between various types of objects. It concludes with the need to reinforce the prospective teachers' probabilistic knowledge.

Keywords: Literacy, common probabilistic knowledge, specialized probabilistic knowledge, prospective teacher of secondary school, reasoning.

ISSN: 0210-2773
DOI: https://doi.org/10.17811/rifie.20627

1. Introducción

La probabilidad se incluye en la educación secundaria para fundamentar el estudio de la inferencia y complementar otras ramas de la matemática (Bargagliotti *et al.*, 2020). Además, la probabilidad posibilita el análisis de los sucesos aleatorios en los que se precisa tomar decisiones que afectan a la persona (Reb *et al.*, 2024; Yoe, 2019). El objetivo es proporcionar a los estudiantes una alfabetización probabilística (Gal, 2005; Johannssen *et al.*, 2021) suficiente para enfrentarse a las situaciones aleatorias que le rodean en su vida personal y profesional, desarrollando también su razonamiento probabilístico (Batanero *et al.*, 2023), necesario en diversas disciplinas.

Para cumplir este propósito en España, en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato se proponen contenidos (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022a; MEFP, 2022b) sobre probabilidad simple, compuesta y condicional, teorema de Bayes y distribuciones de probabilidad. La enseñanza en estos niveles educativos se basa casi en exclusiva en el aprendizaje de definiciones, propiedades y resolución de problemas tomados de libros de texto (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021). Es poco habitual enfrentar a los estudiantes con situaciones en las que deban aplicar su conocimiento y razonar sobre la probabilidad para tomar decisiones (Sanabria y Núñez, 2017).

La necesidad de alfabetización y razonamiento probabilístico se hizo evidente durante la pandemia debida a la COVID-19 (Gal y Geiger, 2022), cuando la información estadística relacionada fue utilizada por las autoridades sanitarias y gubernamentales para tomar decisiones que incumbieron al ciudadano (Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2020). En ese sentido, tanto el desarrollo de una adecuada alfabetización y razonamiento probabilísticos en los estudiantes como el uso de noticias en medios de comunicación como recurso didáctico requieren que el profesorado desarrolle los conocimientos necesarios para analizar el aprendizaje a partir de dichos recursos (Alsina *et al.*, 2020).

Con estas consideraciones, el objetivo de este trabajo es analizar el conocimiento matemático común y especializado de una muestra de estudiantes que se preparan para profesores de ESO y Bachillerato en una tarea dirigida a desarrollar su alfabetización y razonamiento probabilístico. Este objetivo da lugar a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características presenta el conocimiento probabilístico común y especializado de profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en formación al interpretar una noticia tomada de los medios de comunicación? Para responderla, se pidió a los participantes interpretar una noticia sobre la COVID-19 y analizar los conocimientos probabilísticos requeridos para resolverla. En lo que sigue, se describen los fundamentos, metodología de la investigación y resultados, finalizando con algunas recomendaciones para la formación del profesorado.

2. Marco teórico

El trabajo se apoya en las ideas de alfabetización y razonamiento probabilístico, junto con elementos del Enfoque Ontosemiótico y del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor, que se describen a continuación.

2.1. Alfabetización y razonamiento probabilísticos

La resolución de tareas en probabilidad requiere alfabetización probabilística, entendida en el modelo de Gal (2005) según las siguientes competencias:

- Capacidad de calcular o estimar probabilidades simples, compuestas o condicionales en situaciones cotidianas.
- Utilizar adecuadamente el lenguaje del azar, tanto los términos matemáticos como los empleados en la vida diaria y medios de comunicación.
- Reconocer el papel de la probabilidad en diferentes contextos.
- Poder plantear preguntas críticas sobre la información relacionada con el azar, reconocer las conclusiones que pueden obtenerse, la relación de la fiabilidad de una predicción con el tamaño de la muestra, y el posible sesgo en los datos.

Gal (2005) también tiene en cuenta la actitud crítica ante la información probabilística, el control de las creencias sesgadas sobre la probabilidad y la valoración de la probabilidad como instrumento para trabajar situaciones aleatorias.

Es necesario, además, un razonamiento probabilístico suficiente al solucionar problemas de probabilidad o valorar una afirmación probabilística (Batanero *et al.*, 2023; Sánchez y Valdez, 2017). Este se requiere para establecer la credibilidad de la evidencia (si la información es suficiente y válida) y su fuerza inferencial (generalización a otra población o contexto) (Schum, 2001).

Borovcnik (2016) describe las siguientes componentes del razonamiento probabilístico:

- Capacidad para equilibrar los elementos psicológicos (creencias personales sobre la aleatoriedad) y formales (elementos matemáticos de la situación) cuando se utiliza la probabilidad.
- Comprender que no existen criterios directos o algoritmos para lograr un resultado seguro en situaciones aleatorias.
- Capacidad de discriminar aleatoriedad y causalidad, sin interpretar siempre una relación como de causa y efecto entre dos variables asociadas.
- Diferenciar la solución de un problema y la toma de decisión, porque en esta última pesan otros criterios, además de la información matemática.

Otras componentes del razonamiento probabilístico (Batanero y Borovcnik, 2016) son: a) reconocer la influencia de las probabilidades previas para realizar un juicio de probabilidad (así, la probabilidad de desarrollar un tipo de cáncer depende de la edad, género y antecedentes familiares); b) comprender la asimetría de las probabilidades condicionales, en las que no pueden intercambiarse el suceso condicionado y el condicionante; c) reconocer el carácter teórico de la independencia, necesario para aplicar muchos métodos estadísticos, aunque no siempre fácil de determinar; d) interpretar correctamente las probabilidades muy pequeñas o muy grandes; y e) interpretar correctamente la correlación y asociación.

2.2. Tipos de objetos matemáticos en el enfoque ontosemiótico

Se utiliza la clasificación de los diferentes tipos de objetos matemáticos que se pueden observar en un texto o práctica matemática, del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino *et al.*, 2007; 2019):

- Situaciones-problemas: aplicaciones que conllevan actividad matemática. En este estudio se propone preguntas de probabilidad y toma de decisión en una situación sobre la COVID-19.

- Lenguajes: expresiones verbales, simbólicas, tabulares o gráficas empleadas para enunciar, resolver o comunicar la solución de una situación-problema.

- Conceptos: definiciones de objetos matemáticos implicados en la resolución.

- Propiedades: proposiciones que regulan el uso de conceptos y relacionan diferentes conceptos que, generalmente, han sido demostradas.

- Procedimientos: algoritmos, operaciones o técnicas de cálculo que se aplican en la resolución de una situación-problema.

- Argumentos: enunciados que validan o explican las proposiciones y procedimientos.

2.3. Conocimiento didáctico-matemático del profesor

Actualmente se asiste a un crecimiento de la investigación sobre el profesor de matemáticas que ha generado diferentes modelos teóricos para describir su conocimiento. Todos coinciden en que el profesor necesita conocimiento matemático del contenido que se enseña en su nivel escolar, que en el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) propuesto en el EOS (Godino, 2009; Godino *et al.*, 2017; Pino-Fan *et al.*, 2015) se describe como *conocimiento común*, y *conocimiento avanzado del contenido matemático*, que permite articular su enseñanza en niveles educativos superiores. Además, el profesor necesita conocimiento didáctico-matemático, que en el modelo CDM se describe mediante las siguientes facetas: epistémica (conocimiento del significado de los objetos y prácticas matemáticas para su enseñanza), ecológica (relación del contenido matemático con otros temas del currículo y con la sociedad), cognitiva (conocimiento de los aprendizajes, dificultades y razonamientos de los estudiantes), afectiva (conocimiento y manejo de actitudes, creencias y emociones de los estudiantes y las suyas propias), mediacional (conocimiento de recursos didácticos, entre ellos los tecnológicos) e interaccional (manejo del discurso del aula).

En este trabajo se analiza el conocimiento matemático común y la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del modelo CDM, entendida como conocimiento especializado (Hill *et al.*, 2008), en un grupo de futuros profesores al resolver una tarea basada en un informe sobre la COVID-19 tomado de los medios de comunicación.

3. Antecedentes

La investigación centrada en el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad ha crecido en los últimos años (por ejemplo, Alonso-Castaño *et al.*, 2021; Burgos *et al.*, 2022; Gómez *et al.*, 2014; Valenzuela-Ruiz *et al.*, 2023; Vásquez y Alsina, 2015). Dicha investigación resalta carencias en la formación del profesorado.

Burgos *et al.* (2022) muestran un conocimiento didáctico-matemático insuficiente en un grupo de futuros profesores de educación primaria al evaluar las soluciones de sus estudiantes o proponer propuestas didácticas para ayudarles a superar sus errores. Tanto Gómez *et al.* (2014) como Vásquez y Alsina (2015) encuentran escaso conocimiento especializado de los futuros profesores de educación primaria al identificar los objetos matemáticos implícitos en una tarea. Respecto a los futuros profesores de ESO y Bachillerato, Valenzuela-Ruiz *et al.* (2023) obtienen un conocimiento matemático común adecuado, pero escasa competencia en el reconocimiento de los objetos matemáticos implícitos en las tareas escolares. No se ha encontrado trabajos centrados en el razonamiento probabilístico de los profesores (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024), ni en su interpretación de información tomada de los medios de comunicación.

Algunos antecedentes evalúan el razonamiento probabilístico de estudiantes en contextos extraescolares o su interpretación de enunciados de probabilidad en noticias de la prensa. En esta línea, Sánchez y Valdez (2017) analizan este razonamiento en 30 estudiantes de Bachillerato en comparación de probabilidades usando urnas y muestreo, indicando que apoyan su razonamiento en ideas de variabilidad, independencia y aleatoriedad.

Puesto que en la tarea planteada a los participantes en este trabajo se presentan probabilidades compuestas, cuyo cálculo está condicionado por la dependencia o independencia de los sucesos, se consideran también las investigaciones relacionadas con la independencia y la probabilidad condicionada (ej., Huerta y Bresó, 2017). Estos trabajos describen sesgos de razonamiento, como no comprender la asimetría de las probabilidades condicionadas (Borovcnik, 2016) o confundir condicionamiento y causalidad (Díaz y de la Fuente, 2007).

Se considera también los trabajos que analizan la interpretación de probabilidades pequeñas, como el de Burns *et al.* (2010), quienes sugieren que estas suelen ser sobreestimadas o considerarse nulas. También es difícil estimar la probabilidad de que aparezca un suceso de probabilidad pequeña cuando se repite muchas veces en un experimento (Santos y Dias, 2015).

En un trabajo previo (Álvarez-Arroyo *et al.*, 2022), se analizó el razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia sobre la COVID-19. La competencia en responder este tipo de preguntas es un componente del razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016; Batanero y Borovcnik, 2016). La mayor parte de los estudiantes de la muestra fueron capaces de calcular la probabilidad simple y del complementario de un suceso, pero tuvieron dificultad con la probabilidad compuesta. En el presente trabajo se utiliza el mismo cuestionario, que se completa con una pregunta sobre el conocimiento especializado del contenido (faceta epistémica en el modelo CDM del conocimiento del profesor).

4. Método

En España, para ejercer como profesor de matemáticas en un centro de ESO y Bachillerato (alumnos de 12 a 16 años y de 16 a 18 años, respectivamente) se requiere aprobar un concurso-oposición. Los requisitos del concurso son una titulación universitaria en matemáticas, ciencias o ingeniería, y una certificación en competencias didácticas y conocimientos curriculares, así como prácticas docentes. Dicha certificación se consigue cursando un máster específico orientado a la formación del profesorado.

La muestra estuvo formada por 66 estudiantes matriculados en dicho máster (curso académico 2021-2022 de la Universidad de Granada). La mitad había cursado una titulación universitaria en matemáticas y el resto otras titulaciones científicas (estadística, física, arquitectura o ingeniería). Todos habían realizado uno o varios cursos universitarios de probabilidad. A estos participantes se les había enseñado en un taller las características de la alfabetización y razonamiento probabilístico y sus componentes. Además, previamente, habían trabajado en la identificación de los objetos matemáticos en otras tareas.

4.1. Cuestionario y análisis

En la Figura 1 se presenta el cuestionario propuesto a los participantes del estudio, que parte de una noticia publicada en los medios de comunicación al inicio de la pandemia causada por la COVID-19. La noticia indica que, en Lucena, la incidencia acumulada por la COVID-19 fue 723 casos diagnosticados por cada 100 000 habitantes en los 14 días anteriores a la fecha de su publicación.

En la siguiente tabla aparecen el número de casos diagnosticados de coronavirus de los últimos 14 días por cada 100.000 habitantes. En el momento de la publicación (El Diario, 24 de noviembre), los españoles se estaban preguntando si podrán celebrar la Navidad y reunirse con sus seres queridos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de Lucena esté infectada?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de Lucena no esté infectada? ¿Te parece grande o pequeña?
3. Si en Lucena coinciden dos personas en una reunión, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna esté infectada?
4. Si en vez de dos personas coinciden tres, la probabilidad de que ninguna esté infectada ¿será mayor o menor que en el caso anterior? ¿Crece o disminuye la probabilidad de que nadie esté infectado si aumentamos el número de personas? Explica por qué.
5. En vista de los datos, si tuvieras que decidir el número máximo de personas en las cenas de Nochebuena o Navidad, ¿qué número recomendarías y por qué?
6. Indica los contenidos matemáticos implicados en la resolución de esta tarea: a) conceptos (definiciones) que se requiere conocer; b) propiedades que regulan la actividad matemática que se realiza; c) procedimientos de resolución; d) lenguaje que se aplica; y e) demostraciones y argumentaciones que se formulan para concluir dicha resolución.

Figura 1: Tarea propuesta a los futuros profesores. *Elaboración propia.*

Identificados estos datos, las primeras cinco preguntas permiten analizar el conocimiento probabilístico común en contexto:

- P1: requiere el cálculo de una probabilidad simple (enfoque frecuencial).
- P2: evalúa la interpretación del cálculo de una probabilidad complementaria.
- P3: estudia el cálculo de una probabilidad compuesta y la independencia entre sucesos.
- P4: analiza la argumentación de la tendencia de contagio en función del número de personas reunidas.
- P5: pide una toma de decisión en base al conocimiento probabilístico y/o contextual.

Además, la pregunta P6 permite caracterizar el conocimiento probabilístico especializado (faceta epistémica) mediante la identificación de objetos matemáticos —según EOS— involucrados en la tarea.

Recogidas las respuestas escritas e individuales de los participantes al cuestionario, se llevó a cabo un análisis de contenido de las mismas (Krippendorff, 2018) con los siguientes pasos:

- Se eligió la unidad de análisis, que fue cada una de las respuestas individuales de los futuros profesores a cada pregunta del cuestionario.
- Se creó un sistema de variables y categorías de análisis para codificar la información. Cada variable fue la respuesta de una pregunta, y las categorías se describen en la Sección 4.2.
- Esta codificación fue depurada de manera cíclica e inductiva mediante la lectura detallada de cada respuesta para dar coherencia y sentido a las categorías definidas. La fiabilidad del proceso se aseguró con la continua revisión y consulta entre las autoras de esta investigación.

4.2. Categorías de análisis

En esta sección se describe la clasificación de respuestas de los futuros profesores a cada pregunta del cuestionario.

4.2.1. Categorías de análisis de las preguntas 1 a 5: Conocimiento común de la probabilidad.

- Pregunta 1: Probabilidad simple. Se pide la probabilidad de un caso positivo en Lucena, considerando las siguientes respuestas:
  - *Respuesta correcta,* identificando por «+» al suceso «ser positivo en COVID-19» y aplicando la regla de Laplace: $P(+) = 723/100\,000 = 0{,}0073$ o bien dando la respuesta en porcentaje (0,723%). Se diferencia quien realiza una interpretación crítica del resultado o quien utiliza la regla de tres en el cálculo.
  - *Respuesta errónea,* interpretando la probabilidad como porcentaje o usando un divisor incorrecto, obteniendo una probabilidad más alta de la esperada.
- Pregunta 2: Probabilidad del complementario. Se requiere la probabilidad de que una persona no estuviese infectada por la COVID-19 en Lucena en la fecha dada, determinando las siguientes categorías:
  - *Respuesta correcta,* calculando e interpretando correctamente la probabilidad pedida. Sea «−» el suceso «ser negativo en COVID-19», aplicando la probabilidad del complementario: $P(-) = 1 - P(+) = 0{,}99277$, o bien 99,277%, lo que indica alta probabilidad de no estar contagiado.
  - *Respuesta errónea,* dando la probabilidad correcta, pero interpretándola incorrectamente indicando que es pequeña, o interpretando la probabilidad como porcentaje o viceversa.
- Pregunta 3: Probabilidad compuesta. Se solicita la probabilidad de que dos personas estuviesen infectadas, clasificando las respuestas en:
  - *Respuesta correcta,* aplicando la regla del producto y mostrando comprensión de la independencia de sucesos. El estudiante calcula la probabilidad mediante la fórmula: $P(\text{ningún } +) = (0{,}99277)^2 = 0{,}9856$, que implica una habilidad de cálculo de probabilidades (Gal, 2005).
  - *Respuesta incorrecta,* interpretando incorrectamente la regla del producto, aplicando la regla de la suma o la regla de Laplace.

- Pregunta 4: Tendencia al aumentar el número de personas. En esta pregunta se espera una argumentación de que la tendencia al contagio es función del número de personas reunidas, basada en cálculos anteriores, deduciendo que la probabilidad de no tener casos positivos en las reuniones disminuye al aumentar el número de reunidos (n). Las respuestas se han codificado con el siguiente criterio:

  — *Respuesta correcta, justificada con cálculos matemáticos.* La probabilidad pedida será P(ningún +) = $0{,}99277^n$. Al ir multiplicando números menores que 1 para calcular la probabilidad, el producto cada vez es menor y su complementario (probabilidad de al menos un contagio) mayor.

  — *Respuesta correcta, justificada por el contexto.* Indica que la probabilidad es menor, sin justificarlo con cálculos matemáticos, sino por conocimiento del contexto.

  — *Respuesta errónea* por interpretación incorrecta de la regla del producto, aplicar la regla de la suma, aplicar incorrectamente la regla de Laplace, o cometer errores de cálculo.

- Pregunta 5: Decisión en base al estudio previo. Se pide tomar una decisión sobre el número de personas a reunirse en base a la información disponible y las respuestas a las preguntas anteriores. Las respuestas se han codificado como sigue:

  — Interpretación correcta, utilizando la probabilidad obtenida en los cálculos anteriores y recomendando un número razonable.

  — Interpretación correcta, utilizando la probabilidad obtenida en los cálculos anteriores sin recomendar un número concreto.

  — Asume como válido el número de personas recomendado por las autoridades sanitarias difundido reiteradamente a través de los medios de comunicación.

  — Recomienda invitar sólo a las personas convivientes sin utilizar los cálculos.

  — Otras razones en función de sus creencias personales sin considerar los cálculos previos o las recomendaciones de las autoridades sanitarias.

  — Razonamientos erróneos o no impone restricciones.

4.2.2. Categorías de análisis de la pregunta 6: Conocimiento especializado de la probabilidad.

La pregunta 6 analiza la competencia de análisis de los objetos matemáticos en la tarea, que corresponde a la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. Del análisis a priori realizado y consensuado por las autoras del trabajo, los objetos matemáticos requeridos en su resolución son los siguientes:

- Conceptos que intervienen: aleatoriedad y experimento aleatorio, sucesos elementales y compuestos, suceso complementario, probabilidad simple y compuesta, dependencia e independencia, frecuencias, fracciones, porcentajes y operaciones aritméticas.
- Propiedades que regulan la actividad matemática: equiprobabilidad de los sucesos elementales (cada persona), reglas de la suma y el producto, probabilidad del suceso complementario, regla de Laplace, y propiedades básicas de la probabilidad.
- Procedimientos de resolución: lectura e interpretación de los datos, cálculo de diversos tipos de probabilidad, transformación de porcentajes en probabilidad y viceversa, operaciones aritméticas y toma de decisiones.
- Lenguaje: la noticia y preguntas dadas en lenguaje verbal, numérico y gráfico; se espera, también, aplicar el lenguaje simbólico y vocabulario propio del tema.
- Demostraciones y argumentaciones: se espera utilizar argumentos basados en el cálculo de probabilidades o en los datos disponibles, interpretar los resultados y usarlos en la toma de decisión justificadamente.

5. Resultados

En esta sección se presentan los resultados, incluyendo algunos ejemplos de respuestas en las que los sujetos se han codificado como Sx, siendo «x» el número asignado para cada sujeto de la muestra.

5.1. Resultados en el conocimiento probabilístico común

5.1.1. Cálculo de una probabilidad simple

En la Tabla 1 se presentan los resultados de la primera pregunta, donde una amplia mayoría (93,9%) da una respuesta correcta, obtenida y expresada en términos de probabilidad. Esta respuesta muestra la habilidad de cálculo de probabilidades sencillas, que es parte de la alfabetización probabilística (Gal, 2005). Un único participante (S56) añadió un comentario crítico al cálculo, mostrando su conocimiento del contexto, y otro obtuvo la respuesta correcta aplicando la regla de tres (S17):

S56: $\frac{723}{100\,000}$. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así, ya que en la incidencia acumulada puede haber contagios no contabilizados (asintomáticos, no se han hecho la prueba, etc.).

$$\text{S17: } \left.\begin{matrix} 723 - 100\,000 \\ x - 1 \end{matrix}\right] \rightarrow x = \frac{723}{100\,000} = 0{,}00723.$$

Tabla 1.
Resultados en la pregunta 1 (cálculo de probabilidad simple).
Elaboración propia.

	Total (n=66)	
Respuesta	Frecuencia	%
Correcta, probabilidad o porcentaje	60	90,9
Correcta, añade comentario crítico	1	1,5
Correcta, regla de tres	1	1,5
Incorrecta, interpreta probabilidad como porcentaje o viceversa	2	3,0
Error en cálculo de porcentaje	2	3,0

Aunque con poca frecuencia, algunos futuros profesores aún confunden la interpretación de la probabilidad y el porcentaje (S62) o utilizan un denominador incorrecto (S43).

S62: $\frac{723}{100\,000} \cdot 100 = 0{,}723$ es la probabilidad por cada 100 000 habitantes de que haya un infectado en Lucena.

S43: $\frac{723}{10\,000} = 0{,}0723 \rightarrow 7{,}2$ % de estar infectado

Estos resultados mejoran los de Álvarez-Arroyo *et al.* (2022) con estudiantes de Bachillerato, pues casi una quinta parte de ellos leyó incorrectamente los datos e interpretó la tendencia como probabilidad de estar contagiado de COVID-19.

5.1.2. Cálculo de la probabilidad complementaria

En la pregunta 2, el 97% de los participantes calcula correctamente la probabilidad complementaria, aunque sólo el 62,1% interpretan correctamente su magnitud (Tabla 2). Por ejemplo, S61 interpreta correctamente las probabilidades pequeñas y sus contrarias, evidenciando dicha componente del razonamiento probabilístico (Borovcnick, 2016). Otros participantes realizan el cálculo sin interpretar el resultado o dan una interpretación subjetiva (S1).

S61: 1–0,000723 = 0,99277. Me parece una probabilidad muy grande, ya que es muy próxima a 1.

S1: 1–0,000723 = $P(\bar{A})$. Que sea grande o pequeña dependerá de la gravedad de la enfermedad y de la salud inicial de los contagiados.

Tabla 2.
Resultados en la pregunta 2 (cálculo e interpretación de la probabilidad complementaria). *Elaboración propia.*

Respuesta	Total (n=66)	
	Frecuencia	%
Correcta, cálculo e interpretación	41	62,1
Correcta en cálculo, interpretación subjetiva	6	9,1
Correcta en cálculo, sin interpretación	13	19,7
Correcta en cálculo, interpretación incorrecta	4	6,1
Cálculo e interpretación incorrecta	2	3,0

Más de un cuarto de los participantes (28,8%) no dominan adecuadamente la interpretación de la probabilidad pequeña, que es una componente del razonamiento probabilístico (Borovnik, 2016; Gal, 2005). Al igual que en la pregunta 1, algunas respuestas muestran una interpretación errónea de la probabilidad como porcentaje o viceversa. Los resultados superan los de Álvarez-Arroyo *et al.* (2022), pues en su caso solo el 40% dio una respuesta correcta.

5.1.3. Cálculo de una probabilidad compuesta

En esta pregunta (probabilidad compuesta de que, dadas dos personas, ninguna esté infectada), se debe aplicar la independencia entre sucesos, cuya comprensión es parte de la alfabetización probabilística (Gal, 2005) y del razonamiento probabilístico (Sánchez y Valdez, 2017), y que realizan la mayor parte de la muestra (Tabla 3).

Tabla 3.
Resultados en la pregunta 3 (cálculo de la probabilidad compuesta). *Elaboración propia.*

Respuesta	Total (n=66)	
	Frecuencia	%
Cálculo correcto, aplicando la independencia	51	77,2
Correcta, cuestiona la hipótesis de independencia	4	6,1
Interpretación incorrecta de la regla del producto	3	4,5
Cálculo incorrecto de la probabilidad compuesta	4	6,1
Otros errores	4	6,1

Aproximadamente, una cuarta parte de participantes tuvo dificultad al calcular la probabilidad en experimentos compuestos, que es parte de la alfabetización probabilística (Gal, 2005). Generalmente, calcularon la probabilidad de que coincidan dos personas no contagiadas en la reunión (S46).

S46: $\left(\frac{1}{100\,000-723}\right)\left(\frac{1}{99\,277}\right) = 1{,}0115 \cdot 10^{-10}$

En otros casos, se aplica la regla de la suma (S53) o se calcula la probabilidad de elegir dos personas dadas al azar entre los no contagiados (S10). Además, alguno cuestiona la independencia (S37), que es un conocimiento propio de un nivel académico básico.

S53: P = 1 – P(A) – P(B) = 1 – 2P(A) = 1 – 2(0,9927) = 98,55%.

S10: C= ninguna de las 2 personas infectadas → $P(C) = \frac{2}{100\,000-723} = 0{,}0000201$.

S37: Si suponemos que los sucesos A_1=«contagiado A» y A_2=«contagiado B» son independientes: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (0{,}99277)^2 = 0{,}98559$.

En el trabajo de Álvarez-Arroyo *et al.* (2022), solo un estudiante de Bachillerato dio la respuesta correcta a esta pregunta; el resto cometió distintos errores, siendo el más numeroso el aplicar la regla de la suma (28,9%), y muchos estudiantes no respondieron (27,6%).

5.1.4. Efecto del número de experimentos en la probabilidad compuesta

Como muestra la Tabla 4, el 80% de participantes da una respuesta correcta a la pregunta 4, ya sea en base a los cálculos previos (74,2%) o por conocimiento del contexto (7,6%). Algunos calculan adecuadamente probabilidades e interpretan correctamente probabilidades pequeñas, como S35, y otros se basan en su conocimiento del contexto, como S39. En ambos casos se muestra capacidad de lectura crítica y de interpretación de probabilidades pequeñas (Borovcnik, 2016).

S35: Si hay tres personas la probabilidad será menor. La probabilidad disminuye pues, para n personas

$$(0{,}99277)^n \to 0$$
$$n \to \infty$$

S39: Si aumentamos el número de personas, la probabilidad de que nadie esté infectado bajará, ya que el riesgo será mayor y es más probable que uno esté infectado.

Tabla 4.

Resultados en la pregunta 4 (efecto del tamaño de la muestra). Elaboración propia.

Respuesta	Total (n=66)	
	Frecuencia	%
Correcta, con interpretación justificada por cálculos	49	74,2
Correcta, con interpretación justificada por contexto	5	7,6
Interpretación correcta, con error de cálculo	3	4,5
Otros errores	6	9,1
No responde	3	4,5

Siguen apareciendo errores de cálculo de la probabilidad compuesta, incluso con interpretación correcta (S46), y aplicación incorrecta de la regla de la suma (S52). Incluso encontramos interpretaciones contrarias a la realidad, que denotan falta de razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016).

S46: $P = \left(\frac{1}{99\,277}\right)\left(\frac{1}{99\,277}\right)\left(\frac{1}{99\,277}\right) = 1{,}022 \cdot 10^{-15}$. Más pequeña → disminuye al aumentar la población que puede no estar infectada.

S52: 1 – 0,00723×3 = 0,97851. Menor. Disminuye, ya que hay más probabilidad de que alguno esté infectado conforme aumenta el número de personas.

En el trabajo de Álvarez-Arroyo *et al.* (2022) solo un estudiante de Bachillerato dio la solución y argumentación correcta, aunque un 50% da un argumento correcto sin utilizar cálculos.

5.1.5. Toma de decisión

Tras analizar las respuestas a la pregunta 5 (Tabla 5), sólo el 33,3% basa su recomendación en los cálculos, como S39. Aunque más del 50 % realiza cálculos, generalmente no proporcionan una cifra concreta de personas a reunirse (S12). Sólo unos pocos (10,6%) aceptan sin discutir lo asumido por las autoridades, añadiendo los cálculos realizados (S6) o recomendando invitar sólo a los convivientes (S2).

S39: Considero que en torno a un 90% (o 95%) de que nadie esté infectado es una buena proporción, por lo que recomiendo 14 personas aproximadamente.

S12: Cuanto menos mejor porque la probabilidad de infectarse sube conforme aumentamos las personas.

S6: 10 personas porque la probabilidad es igual a 92% y puedes ser un buen número.

S2: Personas que viven en la misma casa.

Tabla 5.

Resultados en la pregunta 5 (toma de decisión). *Elaboración propia.*

Respuesta	Frecuencia	%
Interpretación correcta, recomendando un número	22	33,3
Interpretación correcta, sin especificar número	12	18,2
Lo que indiquen las autoridades sanitarias	4	6,1
Solo convivientes	3	4,5
Creencias personales, sin cálculo	14	21,2
Razonamiento erróneo o sin restricciones	5	7,5
No responden	6	9,1

Muchos de ellos deciden un número menor que el propuesto por las autoridades sanitarias, mostrando una estimación correcta de la probabilidad pequeña, que es una componente del razonamiento probabilístico (Batanero y Borovcnik, 2016), mientras que el 21,2% se basa en sus creencias personales, sin utilizar la probabilidad (S1). Otros proponen un razonamiento matemáticamente erróneo (S48) o no imponen restricciones (S62), y el resto produce otros errores o no responde.

S1: Depende de la gravedad de la enfermedad, tasa de mortalidad, pues con resfriado común no existía ningún límite.

S48: Según lo visto parece que no importa la gente que se reúna en las cenas. Pero debemos tener en cuenta que el % de no estar infectado es sobre 100 000 habitantes cuando en Lucena hay 42 712 habitantes y encima aumenta la tendencia un 35%.

S62: No habría restricciones si todos los componentes o la gran mayoría no están contagiados.

Por el contrario, Álvarez-Arroyo *et al.* (2022) encuentran un porcentaje considerablemente más alto de estudiantes de Bachillerato asumiendo el principio de autoridad (27,6%) y el 50% resolvió esta pregunta en base a sus creencias personales.

5.2. Resultados en el conocimiento especializado de la probabilidad

En la pregunta 6, los futuros profesores clasificaron los objetos matemáticos por tipología (conceptos, propiedades, etc.) e identificaron un gran número de objetos matemáticos en la tarea, especialmente conceptos (Tabla 6). La mayor parte de los objetos fueron identificados correctamente (Figura 2).

Tabla 6.
Resultados en la pregunta 6 (identificación de objetos). Elaboración propia.

	Correctos	Incorrectos	Total
Conceptos	265	81	346
Propiedades	148	19	167
Procedimientos	129	33	162
Lenguaje	116	0	116
Argumentos	82	37	119
Total	740	170	910

La variabilidad por participante es grande (Figura 2), desde no identificar ningún objeto en su categoría hasta identificar 11 en la categoría de conceptos. Los valores más típicos (cuartiles en gráficos de caja de la Figura 2), son entre 2 y 5 conceptos, entre 1 y 3 propiedades, de 0 a 3 procedimientos, de 1 a 2 tipos de lenguajes, y de 0 a 2 argumentos.

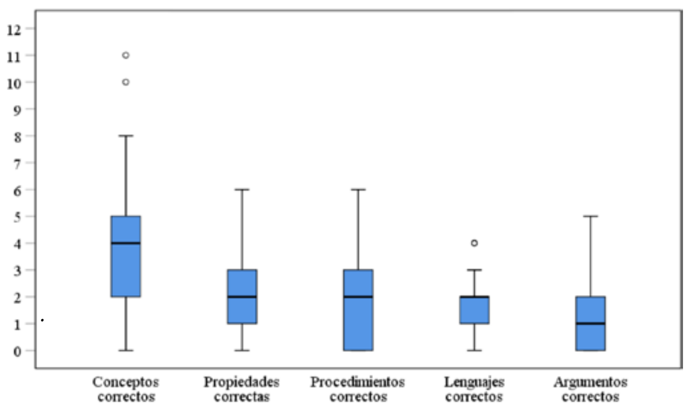

Figura 2. Distribución del número de objetos matemáticos identificados correctamente. *Elaboración propia.*

En la Tabla 7 se recogen todos los objetos matemáticos identificados correctamente por los participantes, ordenados de mayor a menor frecuencia en cada tipología. Se observa que supieron identificar los objetos más significativos trabajados en la tarea, aunque otros solo fueron citados de manera puntual.

Tabla 7.
Objetos correctamente identificados en la pregunta 6, según frecuencia. *Elaboración propia.*

Objeto matemático identificado	Nº participantes que lo identifican
Propiedades:	
Probabilidad	54
Sucesos, unión, intersección, sucesos compuestos, compatibles	37
Independencia o dependencia	35
Probabilidad condicionada	28
Suceso complementario	23
Fracciones, porcentajes y operaciones aritméticas	22
Espacio muestral o probabilístico	21
Variable aleatoria	10
Muestra	10
Otros*: Población-individuo; fenómenos deterministas y aleatorios; frecuencia absoluta y relativa; casos favorables y posibles; teorema de Bayes; equidistribución.	25
Propiedades:	
Probabilidad del complementario	41
Probabilidad de la intersección, regla del producto	34
Regla de Laplace	27
Probabilidad de la unión, regla de la suma	15
Propiedades básicas de la probabilidad	15
Otros*: independencia; probabilidad condicional; operaciones con sucesos; ley de los grandes números; relación porcentaje-probabilidad; casos favorables; número de resultados finito.	16
Procedimientos:	
Cálculo de la probabilidad de la intersección, regla del producto	21
Cálculo de la probabilidad del complementario	18
Regla de Laplace	18
Cálculo de probabilidades	17
Otros*: leer e interpretar tablas y gráficos; cálculo de porcentajes; operaciones aritméticas; cálculo de probabilidad compuesta de sucesos independientes; aplicar métodos o propiedades estadísticos; diagrama de árbol; identificar variables; cálculo de probabilidad condicional; toma de decisiones; regla de la suma; conocimiento del contexto.	55
Lenguaje:	
Verbal, coloquial	36
Matemático (simbólico), formal	24
Gráfico	16
Vocabulario específico, lenguaje estadístico	13
Tabular	12
Numérico	10
Varios estilos de lenguaje	5
Argumentos:	
Demostraciones basadas en cálculo de probabilidades	19
Gran variedad de argumentos	11
Interpretar y analizar resultados	10
Otros*: argumentaciones a partir de los datos; interpretación crítica de la información; interpretación subjetiva (experiencia personal); uso de la probabilidad para tomar decisiones; basados en la lógica matemática o propiedades numéricas; reflexión sobre la información en los medios de comunicación; demostración por recurrencia; modelización.	42

*Objetos matemáticos identificados con una frecuencia inferior a 10.

Respecto a los errores en la identificación de objetos matemáticos (Tabla 8), destaca el número de estudiantes que identifican como concepto lo que es una propiedad o un procedimiento, o bien confundieron propiedades y procedimientos. Otros indican que no había procedimientos, posiblemente por tener una visión de procedimiento más compleja. Aunque las citas respecto al lenguaje fueron escasas, no hubo identificaciones incorrectas, y muchos de los participantes identificaron el lenguaje verbal como «coloquial». Finalmente, dentro de los argumentos se resalta el número de participantes que solamente indicaron que había variedad de argumentos dando ejemplos, pero sin indicar el tipo de argumento.

Tabla 8.

Objetos incorrectamente identificados en la pregunta 6, según frecuencia. Elaboración propia.

Errores de identificación	Nº participantes que lo cometen
Objetos incorrectamente identificados como conceptos:	
Regla de Laplace	20
Cálculo o comparación de probabilidades	16
Regla del producto	13
Lectura e interpretación de datos o del enunciado	8
Operaciones aritméticas	5
Elaboración de un diagrama en árbol	3
Objetos incorrectamente identificados como procedimientos:	
Argumentos	15
Procedimientos que no intervienen en la situación	10
Se indica que no hay procedimientos	7
Argumentos incorrectamente identificados:	
Solo se señala que hay variedad de argumentos, sin indicar tipo	19
Cálculo de probabilidades	6
Solo indican la propia respuesta como argumento	5

6. Conclusiones

Los resultados del estudio revelan un buen conocimiento común del contenido probabilidad de los participantes. En primer lugar, se observó su alfabetización probabilística (Gal, 2005), pues mostraron conocimiento del lenguaje probabilístico y competencia para identificar los datos de la noticia y calcular probabilidades en preguntas sencillas (dos primeras preguntas). También, se observó un adecuado razonamiento probabilístico, interpretando correctamente enunciados probabilísticos y eligiendo el modelo probabilístico correcto para aplicar en la situación planteada (Borovcnik, 2016). De acuerdo con Sánchez y Valdez (2017), este razonamiento probabilístico se evidencia al resolver un problema de probabilidad no rutinario y al utilizar argumentos para probar la verdad de sus afirmaciones.

Los resultados fueron mucho mejores que los de estudiantes de Bachillerato obtenidos en Álvarez-Arroyo *et al.* (2022). Se observa, sin embargo, dificultades que debieran haber superado los participantes en relación al cálculo de la probabilidad compuesta y al efecto del número de experimentos en la misma. Se resalta también en algunos participantes el uso de creencias personales en la toma de decisión en lugar del cálculo probabilístico. Estas evidencias nos alertan, según hallazgos obtenidos en la literatura de investigación (Burns *et al.*, 2010; Santos y Dias, 2015).

Respecto al conocimiento especializado de la probabilidad, analizado mediante la identificación de objetos matemáticos en la tarea, se observó un desempeño mejor que en otras investigaciones previas similares (Gómez *et al.* 2014; Valenzuela *et al.*, 2023; Vásquez y Alsina, 2015). Se notó, sobre todo, una buena identificación de los conceptos que intervienen en la situación; no obstante, el número del resto de objetos identificados fue menor. Se apreció confusión en la clasificación de los objetos, por ejemplo, al clasificar propiedades como conceptos, o propiedades y procedimientos. En este sentido, el formador de profesores debe tener en cuenta estos resultados para mejorar el conocimiento matemático común y especializado de los futuros profesores enfrentándoles a situaciones poco habituales en la enseñanza que se plantea en los libros de texto (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021).

Dado el carácter no aleatorio de la muestra participante y el hecho de haber utilizado una única tarea, reconocemos la limitación del estudio y la necesidad de continuar este trabajo. Los participantes en el taller estuvieron muy motivados por la actividad y su contexto. Pensamos que se abre una línea de investigación para el desarrollo de este tipo de tareas que podrían complementar adecuadamente otras destinadas a la formación de profesores por dos motivos: por un lado, hacen ver a los participantes una utilidad real de la probabilidad en la vida diaria, al tiempo que se refuerza su conocimiento didáctico-matemático (Alsina *et al.*, 2020; Borovnick, 2016); y por otro, conciencia a los participantes de algunos de sus sesgos de razonamiento. Además, este tipo de actividades permite introducir a los futuros profesores en la noción de riesgo que, de acuerdo con Borovcnik y Kapadia (2018), constituye un concepto paralelo al de probabilidad y debe ser tenido en cuenta en su enseñanza.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M., y Rodríguez-Muñiz, L. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics*, *9*(24), 3300. https://doi.org/10.3390/math9243300

Alsina, Á., Vásquez Ortiz, C. A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon*, *104*, 99-128.

Álvarez-Arroyo, R., Lavela J. F., y Batanero, C. (2022). Razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato al interpretar datos de la COVID-19. *Journal of Research in Mathematics Education, 11*(2), 117-139. https://doi.org/10.17583/redimat.9741

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. (2020). Pre-K-12 *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report II*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Batanero, C., y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education*, *56*, 5-17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa, 25*(2), 127-144. http://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p127-144

Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). Statistics and probability in high school. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1491-1516.

Borovcnik M., y Kapadia R. (2018). Reasoning with risk: Teaching probability and risk as twin concepts. En C. Batanero y E. Chernoff E. (Eds.), *Teaching and learning stochastics* (pp. 3-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_1

Burns, Z., Chiu, A., y Wu, G. (2010). Overweighting of small probabilities. En J. Cochran, L. A. Cox, P. Keskinocak, J. Kharoufeh y J. C. SmithWiley (Eds.), *Encyclopedia of operations research and management science*. Jonh Wiley. https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0634

Burgos, M., López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. G., y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia*, *36*(1),1-24. http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38

Díaz, C., y de La Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128-148. https://doi.org/10.29333/iejme/180

Gal, I. (2005). Towards «probability literacy» for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.

Gal, I., y Geiger, V. (2022). Welcome to the era of vague news: a study of the demands of statistical and mathematical products in the COVID-19 pandemic media. *Educational Studies in Mathematics*, *111*(1), 5-28. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10151-7

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, *20*, 13-31.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics,* 39(1), 38-43.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, 28,* 209-229. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Huerta, M. P., y Bresó, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 87-106. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.188

Johannssen, A., Chukhrova, N., Schmal, F., y Stabenow, K. (2021). Statistical literacy. Misuse of statistics and its consequences. *Journal of Statistics and Data Science Education*, *29*(1), 54-62. https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1860727

Krippendorff, K. (2018). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, *76*, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, *82*, de 6 de abril de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con

Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en educación secundaria. *Paradigma*, *42*(e1), 191-220. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p191-220.id1023

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Alsina, Á. (2020). Deficits in the statistical and probabilistic literacy of citizens: Effects in a world in crisis. *Mathematics*, *8*(11), 1872.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Reb, J., Luan, S., y Gigerenzer, G. (2024). *Smart Management: How Simple Heuristics Help Leaders Make Good Decisions in an Uncertain World.* The MIT Press.

Sanabria, G., y Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *17*(2), 1-13. https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3079

Sánchez, E., y Valdez, J. C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 127-143. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.180

Santos, C., y Dias, C. (2015). A probabilistic approach to coincidences: the birthday paradox. *Pensamiento Matemático*, *5*(2), 55-60.

Schum, D. A. (2001). *The evidential foundations of probabilistic reasoning*. Northwestern University Press.

Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C., Begué, N., y Garzón-Guerrero, J. A. (2023). Conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución de la media muestral de profesorado de Bachillerato en formación. *Uniciencia, 37*(1), 44-64. http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.3

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*, 27-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Yoe, C. (2019). *Principles of risk analysis: decision making under uncertainty.* CRC press.