REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volume 13, Issue 3, 24th October 2024, Pages 245 – 267

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14938

Learning the Concept of Linear Function by Implementing a Sequence on the Motion of Objects

Isaias Miranda[1], Lesly Anaid Vargas-Rivera[2], & Ulises Salinas-Hernández[3]

1) *National Polytechnic Institute, CICATA-Legaria,* México
2) *Technical, Industrial and Commercial High School, No. 0011*, México
3) *National School College of Sciences and Humanities, UNAM,* México

Abstract

The concept of function is perhaps one of the most important in mathematics. Its importance lies not only in relating variables of different nature, but also in its vast applications across various scientific disciplines. However, its teaching and learning have become topics of interest for research in mathematics didactics. Based on the terms of objectification, semiotic means and joint labor of the Theory of Objectification, this article analyzes the learning process of the meaning of linear function in three high school students (14-15 years old) as they deal, for the first time, with a didactic sequence in which the rectilinear motion of objects is graphically represented and tabulated. The methodology was qualitative, in its case study modality. The results indicate that, during the sequence, students identify the correspondence between variables and manage to write algebraic expressions from the information in the graphs. The article concludes with a discussion of the pedagogical implications of the design of this sequence.

Keywords

Linear function, theory of objectification, rectilinear motion

To cite this article: Miranda, I., Vargas-Rivera, L. A., & Salinas-Hernández, U. (2024). Aprendizaje del concepto de función lineal a partir de la implementación de una secuencia didáctica sobre el movimiento de objetos. *Journal of Research in Mathematics Education, 13*(3), pp. 245-267. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14938
Corresponding author(s): Isaias Miranda
Contact address: imirandav@ipn.mx

REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volumen 13, Número 3, 24 de octubre de 2024, Páginas 245 – 267

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14938

Aprendizaje del Concepto de Función Lineal a partir de la Implementación de una Secuencia Didáctica sobre el Movimiento de Objetos

Isaias Miranda[1], Lesly Anaid Vargas-Rivera[2], y Ulises Salinas-Hernández[3]

1) *Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria*, México
2) *Escuela Secundaria Técnica, Industrial y Comercial, No. 0011*, México
3) *Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM*, México

Resumen

El concepto de función es, quizá, uno de los más importantes de las matemáticas. Su importancia radica no solo en poder relacionar variables de distinta naturaleza, sino en la vasta aplicación que de ella se hace en diversas disciplinas científicas. Sin embargo, su enseñanza y aprendizaje se han convertido en temas de interés para la investigación en didáctica de las matemáticas. Con base en los términos de objetivación, medios semióticos y labor conjunta, todos ellos acuñados en la Teoría de la Objetivación, en este artículo se analiza el proceso de aprendizaje del significado de función lineal en tres estudiantes de secundaria (14-15 años) al momento de resolver, por primera vez, una secuencia didáctica en la que se representa gráficamente, y por medio de tablas, el movimiento rectilíneo de objetos. La metodología fue cualitativa, en su modalidad de estudio de caso. Los resultados indican que, durante la secuencia, los estudiantes identifican la correspondencia entre variables y logran escribir expresiones algebraicas a partir de la información de las gráficas. El artículo concluye con una discusión sobre las implicaciones pedagógicas del diseño de esta secuencia.

Palabras clave

Función lineal, teoría de la objetivación, movimiento rectilíneo uniforme

Cómo citar este artículo: Miranda, I., Vargas-Rivera, L. A., y Salinas-Hernández, U. (2024). Aprendizaje del Concepto de Función Lineal a partir de la Implementación de una Secuencia Didáctica sobre el Movimiento de Objetos. *Journal of Research in Mathematics, 13*(3), pp. 245-267. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14938
Correspondencia Autores(s): Isaias Miranda
Dirección de contacto: imirandav@ipn.mx

El estudio de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función ha sido de interés para varios investigadores en didáctica de las matemáticas (Leinhardt et al., 1990; Mirin et al., 2020; Sajka, 2003; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992). Por ejemplo, Sierpinska (1992) comenta que los estudiantes tienen dificultades al relacionar las diferentes formas de representación de una función (algebraica, gráfica, tabular), así como en describir una relación entre variables al momento de interpretar gráficas y de manipular símbolos matemáticos. En el caso particular del concepto de función lineal, el estudio de DeJarnette et al. (2020) revela que las interpretaciones de una estudiante sobre el significado de la pendiente de una recta pueden diferir del significado de los profesores. En específico, DeJarnette et al. muestran cómo, mientras que la estudiante de su estudio considera a la pendiente como una razón, su profesora la considera como el número obtenido de dicha razón. Resultados similares a los encontrados por Dejarnette et al. pueden observarse en la investigación de Calle et al. (2023). En ésta se reporta que profesores de secundaria asociaban a la pendiente de una recta los siguientes cuatro significados: geométrico, trigonométrico, algebraico y funcional.

Ahora bien, las dificultades en el uso del concepto de función no se restringen al ámbito de problemas exclusivamente matemáticos. En algunas investigaciones se documenta que, en el caso del concepto de función lineal, esas dificultades se encuentran en la interpretación de gráficas que representan el movimiento de objetos (Dubinsky y Harel, 1992; Miranda et al., 2007, 2013). Si bien estas gráficas pueden ser generadas con la ayuda de un software, la investigación de Salinas-Hernández y Miranda (2018) muestra que, en un primer momento, el simple uso de la tecnología no conduce a una interpretación adecuada de este concepto. Una de las dificultades identificadas al interpretar las gráficas es que los estudiantes (y, en ocasiones, los profesores) interpretan la gráfica de una función como el movimiento físico de un objeto; es decir, confunden la trayectoria del objeto con su gráfica (Dubinsky y Harel, 1992).

Además de estudiar las dificultades de los estudiantes para comprender el significado del concepto de función, el modo como esas dificultades se logran superar también es un tema que ha llamado la atención a los investigadores de este campo. Por ejemplo, con el uso de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2006) y la Teoría Comognitiva (Sfard, 2008), la investigación de Sandoval-Troncoso y Ledezma (2021) muestra la importancia que tiene, para estudiantes universitarios, el gesto corporal al momento de comunicar las gráficas de diversas funciones de variable real. Los resultados indican que incorporar la comunicación gestual en el diálogo contribuye a que los estudiantes mejoren su comprensión sobre este concepto matemático.

Al igual que los gestos, el diseño de actividades también es un medio para que los estudiantes mejoren su comprensión del significado de función lineal. Para comprender el pensamiento de los estudiantes al resolver problemas que involucran el concepto de función, Günster y Weigand (2020) desarrollaron tareas en un ambiente digital (Geogebra) para estudiar el pensamiento funcional de los estudiantes y, a la vez, ayudarlos a comprender el significado de la expresión $f(x) = mx + b$.

Con este artículo pretendemos contribuir a las investigaciones cuyo interés es proponer actividades que permitan a los estudiantes aprender el significado del concepto de función lineal. De este modo, el artículo parte de una situación de movimiento para que, a partir de ella, los estudiantes puedan iniciar el estudio del concepto de función lineal. En específico, con base en la sugerencia de algunas investigaciones (e.g., Salinas-Hernández & Miranda, 2018; Uhden et al., 2012) que enfatizan la necesidad de relacionar conceptualmente las matemáticas y la física, así como en los antecedentes del uso de la TO para analizar el proceso de aprendizaje del concepto de función (Sandoval-Troncoso y Ledezma, 2021), se elabora y aplica una propuesta de enseñanza del concepto de función a partir de una secuencia didáctica cuyo tema principal es el movimiento rectilíneo uniforme. Así, se pretende responder la siguiente pregunta de investigación: *¿cómo la solución de una secuencia didáctica que implica el movimiento de objetos, y realizada por estudiantes de tercer grado de secundaria, influye en su aprendizaje del concepto de función lineal?* Para ello, el objetivo consiste en analizar, con base en la aplicación de la TO, el proceso de aprendizaje del concepto de función lineal de un grupo de estudiantes de tercer grado de secundaria al resolver los problemas de la secuencia.

La Teoría de la Objetivación

En esta sección se detallan los términos de la TO que fueron utilizados para el análisis de los datos tomados durante esta investigación.

La TO fue creada en el campo de la educación matemática para estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de nivel básico (Radford, 2006, 2010). La TO, inspirada en la psicología de Vygotsky (1978), conceptualiza el aprendizaje como un proceso colectivo, arraigado en las características sociales, culturales e históricas del individuo. Según la TO, la producción del conocimiento está ligada a las formas culturales de pensamiento, en donde la realidad simbólica y material brindan las bases para interpretar, comprender y transformar las ideas y los conceptos que forman los individuos en conexión con la realidad (Radford, 2013). El concepto de objetivación (el concepto que le da el nombre a la TO) es precisamente ese proceso de reconocimiento que realizan los individuos de esas formas culturales de pensamiento; es “una transformación del conocimiento objetivo cultural en un objeto de conciencia” (Radford, 2013, p. 25). En este sentido, en la TO, el aprendizaje se caracteriza por un proceso de objetivación.

Otro de los conceptos principales de la TO es el de medios semióticos de objetivación. De acuerdo con Radford (2003), los medios semióticos son:

> Objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos usan intencionalmente en el proceso de creación de significado social para lograr una forma estable de consciencia, para hacer aparentes sus intenciones y llevar a cabo sus acciones para lograr el objetivo de sus actividades (p. 41).

Con esta definición, Radford (2003) destaca que el aprendizaje no es un concepto que se asocia exclusivamente con la mente. Los medios semióticos pueden ser, también, objetos tangibles, no tangibles (como el lenguaje verbal y gestual) o simbólicos (como las gráficas y tablas) que son usados por el individuo para que éste, paulatinamente, tome conciencia del significado de algún concepto (por ejemplo: el de función lineal). Este proceso de *tomar conciencia* es lo que caracteriza al aprendizaje. Esto quiere decir que la conciencia de los estudiantes puede ser observada por medio de lo que los estudiantes gesticulan, hablan y escriben; así como por los signos que usan. En otras palabras, son los medios semióticos usados por los estudiantes los que les permiten tomar conciencia del significado de los conceptos matemáticos.

En desarrollos posteriores de la TO, Radford propone que los medios semióticos de objetivación sean identificados como parte de la actividad del estudiante en el momento de resolver problemas matemáticos (D'Amore y Radford, 2017). Vale decir que el concepto de actividad no debe concebirse como únicamente lo que hace el estudiante de manera visible ni como únicamente lo que éste le va dando forma a su pensamiento en la medida que intenta resolver un problema. Por un lado, los medios semióticos de objetivación son parte de la actividad que lleva a cabo el estudiante conforme éste encuentra la solución de un problema. Esto quiere decir que la actividad es, también, mediadora del conocimiento: "La actividad mediadora ejerce su mediación por medio de artefactos, formas de uso de artefactos y también por medio de formas y modos de interacción humana" (D'Amore y Radford, 2017, p. 109). Pero, por otro lado, y dado que la actividad en la TO no es una actividad exclusiva de un estudiante, sino una actividad conjunta (Radford y Roth, 2011) (es, de hecho, una actividad de enseñanza-aprendizaje (Radford, 2020)), los medios semióticos de objetivación caracterizan la labor conjunta en la que "ambos, profesores y estudiantes, se afirman en su producción y se realizan como seres humanos en lo que hacen" (Radford, 2020, p. 28).

La elaboración de la secuencia didáctica tuvo la finalidad de generar una actividad conjunta en la que principalmente los estudiantes usaran medios semióticos que contribuyeran a su comprensión del concepto de función lineal.

Metodología

Sujetos Participantes y Contexto del Estudio

La metodología de esta investigación es cualitativa, en su modalidad de estudio de caso. De acuerdo con Cohen et al. (2007), este tipo de modalidad parte del supuesto de que los contextos reales son un poderoso determinante de causas y efectos. Al ser una instancia específica de un fenómeno, el estudio de caso permite investigar y reportar la compleja dinámica de las relaciones humanas. Aún más, debido a que nuestro interés se basó en la necesidad de conocer los procesos de aprendizaje de estudiantes a los que no se les había enseñado la definición de función lineal, de acuerdo con Stake (2005), nuestro estudio de caso es intrínseco.

La investigación se llevó a cabo en una escuela secundaria pública de México, con estudiantes de tercer grado (14-15 años), en el curso Matemáticas III, impartido por la segunda autora de este artículo. Es importante enfatizar que los estudiantes participantes de esta investigación ya habían tomado el curso Física en el grado escolar anterior. Así, los estudiantes conocían expresiones matemáticas como $v = \frac{d}{t}$, correspondiente a la rapidez que lleva un objeto moviéndose en línea recta con velocidad constante. Ahora bien, aun cuando los estudiantes sabían resolver ecuaciones lineales de la forma $ax + b = 0$, a ellos no se les había enseñado la definición del concepto de función lineal; de este modo, ellos aún no asociaban esas ecuaciones con este concepto. Acorde con la metodología sugerida por D’Amore y Radford (2017), la clase fue dividida en equipos de tres estudiantes cada uno.

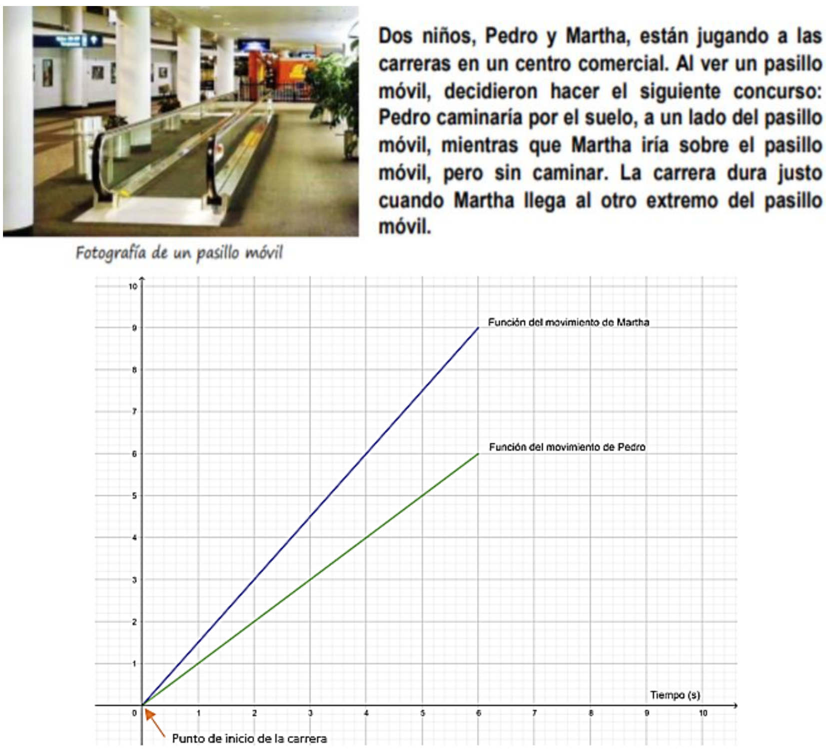
Diseño del Instrumento Didáctico, Estrategias de Recolección y de Análisis de los Datos

Con base en la sugerencia de Kjeldsen y Lützen (2015) según la cual los profesores de ciencia deben enfatizar el rol que ha tenido la problematización de fenómenos físicos en el surgimiento del concepto de función, la secuencia elaborada para esta investigación tiene la característica de abordar el concepto de función lineal por medio del movimiento lineal de objetos y la de tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes tales como: trayectoria, posición, desplazamiento, distancia recorrida por un objeto, velocidad, dirección y tiempo.

La secuencia didáctica (Figura 1) inicia de la siguiente forma:

Figura 1

Gráfica y Texto Iniciales de la Secuencia Didáctica



La aplicación de la secuencia coincidió con el momento en que la profesora del grupo introducía, por primera vez, el concepto de función lineal en sus clases. La secuencia se desarrolló en cinco momentos y tuvo la finalidad de que los estudiantes aprendieran paulatinamente el concepto de función lineal. Cada momento correspondía a una sesión de clase (50 minutos de duración cada una). A los estudiantes se les pidió que escribieran todas sus respuestas en sus hojas de trabajo. Cada momento fue elaborado con base en un objetivo didáctico. En este artículo reportamos únicamente los tres primeros momentos. A continuación, se describe el propósito didáctico de cada uno de los tres momentos:

- Momento Uno (M1) (Inicio): ubicar al estudiante en la temática del concepto de función lineal a partir de la lectura del texto inicial de la secuencia. Para ello, con base en la gráfica de la Figura 1, se escribieron preguntas como: *¿cuánto tiempo duró la carrera?, ¿cuál fue la distancia que recorrió Martha en el transcurso de la carrera?, ¿quién iba ganando la carrera en el primer segundo? ¿y quién, al transcurrir dos segundos?, ¿cómo lo sabes?*
- Momento Dos (M2) (Desarrollo): ayudar a los estudiantes a asociar la variación de la distancia respecto del tiempo. Los estudiantes debían llenar una tabla y contestar preguntas que les permitieran asociar estas dos variables con una función algebraica de la forma $f(x) = mx$.
- Momento Tres (M3) (Desarrollo): ayudar al estudiante a representar algebraicamente funciones de la forma $f(x) = mx + b$. Para ello, el texto principal de la secuencia fue modificado al añadir dos competidores a la carrera. Esto permitió que los estudiantes observaran más rectas para establecer diferencias y similitudes entre ellas.

La recolección de datos se hizo por medio de grabación en audio de las conversaciones de todos los equipos, de notas de campo tomadas por la docente del grupo y de las respuestas escritas en las hojas de trabajo. Una vez que se escucharon todas las grabaciones, seleccionamos al equipo conformado por Esteban, Alejandro y Natalia (pseudónimos), pues consideramos que sus respuestas ilustran la presencia de un proceso de objetivación, caracterizado por establecer paulatinamente una relación entre las variables de tiempo y distancia. Los tres autores nos reunimos durante varias sesiones para analizar las respuestas de este equipo. El análisis fue dividido en extractos, los cuales fueron transcritos en su totalidad y organizados por episodios.

Resultados, Discusión de los Datos y Aportaciones

M1 (Inicio): Las primeras Experiencias sobre el Significado de Concepto de Función Lineal

Después de leer el texto inicial, los estudiantes centraron su atención en la gráfica que acompaña a dicho texto. Después de leer la pregunta ¿cuánto mide el pasillo móvil?, la conversación del equipo fue la siguiente:

Episodio 1. Contextualización: lectura e interpretación de la gráfica

L1 Alejandro: Pues se supone que si Martha está en el pasillo móvil y no se está moviendo, y llevan un tiempo exacto, pues recorrió 9 metros, mientras que Pedro, al caminar, fue más rápido y llegó antes, pero la distancia que recorrió Martha fue de 9 metros en el ...

L2 Natalia: (*interrumpiendo a Alejandro*) ... en los 6 segundos.

L3 Esteban: Entonces tiene que medir 9 metros.

L4 Natalia: Aquí me pone a pensar que dice (*refiriéndose al texto inicial*) que Martha iba sobre el pasillo móvil sin caminar y recorrió más que Pedro que iba sobre el pasillo ¿entienden?

L5 Esteban: Por eso, se detuvo ya que estaba ahí (*coloca su dedo índice en el punto (0,0), después lo mueve a lo largo del eje del tiempo y señala el punto (0,6); finalmente, mueve su dedo en forma vertical hasta llegar al punto (6,9), en la gráfica de la función de Martha*)

L6 Natalia: La carrera terminó cuando Martha llegó al otro extremo del pasillo móvil, cuando Martha llegó... fueron a los 6 segundos.

En su intervención, Alejandro centra su atención en las coordenadas de los puntos finales de cada una de las funciones de la gráfica inicial (L1). Él identifica, explícitamente, que Martha recorre 9 metros en 6 segundos; de manera implícita, reconoce que, en este mismo tiempo, Pedro ha recorrido 6 metros. Aunque Alejandro aún no sea consciente que los puntos (6,6) y (6,9) no contravienen la definición del concepto de función, su análisis le proporciona elementos visuales para que, en estudios posteriores, logre distinguir que es posible que un mismo valor de la variable independiente puede asociarse con dos valores de la variable independiente, siempre y cuando se traten de funciones distintas. El objetivo didáctico de esta primera pregunta tenía precisamente este objetivo de aprendizaje.

Sin embargo, Alejandro interpreta que es Pedro, y no Martha, el que caminó “más rápido y llegó antes” (véase L1). Esto se observa en dos hechos. El primero se refiere a que Alejandro reconoce que Martha y el pasillo móvil representan un mismo movimiento (L1); el segundo se refiere a que, si se traza visualmente una recta vertical desde el punto (6,0) hasta los puntos finales de las rectas de la gráfica inicial, el punto (6,6) está “antes” que el punto (6,9) (Obsérvese que esta visualización se corrobora en los gestos de Esteban en L5).

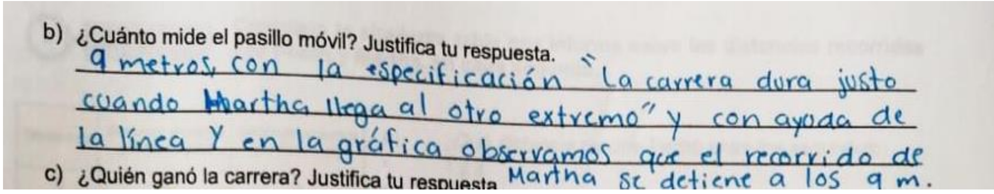
Ahora bien, la intervención de Alejandro no responde la pregunta ¿cuánto mide el pasillo móvil? Fue Esteban quien da la respuesta correcta (L3). Pero Natalia requiere una justificación más precisa que le permita convencerse de esta respuesta. Su intervención en L4 contraviene la intervención de Alejandro. Natalia centra su atención en el significado de los puntos (6,6) y (6,9). Para ella, el punto (6,9) indica que es Martha quien recorre más metros que Pedro. Es decir, Natalia no observa la posición visual de los puntos (6,6) y (6,9), sino interpreta la relación entre las variables involucradas en ellos.

Los gestos de Esteban en L5 tienen la intención tanto de argumentar su respuesta de L3 como de apoyar la reciente intervención de Natalia. En términos de la TO, los gestos de Esteban son medios semióticos que son usados intencionalmente para hacer aparecer, a la conciencia de él y a la de sus compañeros, la interpretación del movimiento descrito en el texto del problema. Sus gestos, a su vez, son una manera visual de establecer una relación biunívoca entre el tiempo y la distancia recorrida por Martha y Pedro.

El resultado de la discusión del Episodio 1 se observa en la respuesta consensuada de los estudiantes (Figura 2). El contenido de la respuesta no tiene rastros de los comentarios verbales de los estudiantes; sin embargo, esos comentarios fueron necesarios para darle forma a las palabras escritas. De algún modo, los diferentes comentarios verbales pronunciados por el equipo quedan resumidos por la labor conjunta entre los integrantes (Radford, 2020). La respuesta escrita permite inferir que los estudiantes observan la gráfica de Martha para determinar en qué momento ella terminaba la carrera.

Figura 2

Respuesta del Equipo de Natalia a la Pregunta ¿Cuánto mide el pasillo móvil?

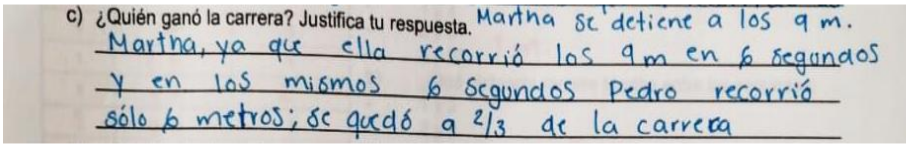

b) ¿Cuánto mide el pasillo móvil? Justifica tu respuesta. 9 metros, con la especificación "La carrera dura justo cuando Martha llega al otro extremo" y con ayuda de la línea Y en la gráfica observamos que el recorrido de Martha se detiene a los 9 m.

c) ¿Quién ganó la carrera? Justifica tu respuesta

Los estudiantes justificaron su respuesta por medio de relacionar el texto principal con la función de cada corredor; en específico, con el eje de coordenadas (“línea Y”, en su respuesta). Su respuesta indica que los estudiantes hacen uso de las variables de la gráfica para interpretar el significado de los puntos. Esta puede ser una primera condición para iniciar el proceso de objetivación de función lineal, pues al decir “con ayuda de la línea Y en la gráfica observamos que el recorrido de Martha se detiene a los 9m”, los estudiantes asignan un valor del tiempo a un valor de la distancia. Esta respuesta es la génesis del significado de correspondencia uno a uno del concepto de función.

Figura 3

Respuesta del Equipo de Natalia a la Pregunta ¿Quién ganó la carrera?

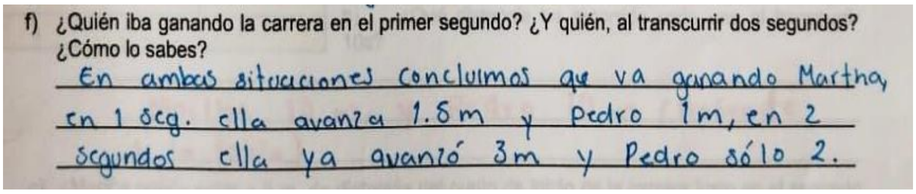

c) ¿Quién ganó la carrera? Justifica tu respuesta. Martha se detiene a los 9 m. Martha, ya que ella recorrió los 9m en 6 segundos y en los mismos 6 segundos Pedro recorrió sólo 6 metros; se quedó a 2/3 de la carrera

Cuando ellos escriben que Martha “recorrió los 9 m en 6 segundos y en los mismos 6 segundos Pedro recorrió sólo 6 metros”, podemos observar que, al hacer la correspondencia para un valor de las abscisas (tiempo), asignan un único valor para las ordenadas (tiempo); es decir, a 6 segundos le hacen corresponder 9 metros y 6 metros. Con estas respuestas, los estudiantes pueden comenzar a darse cuenta de que, a pesar de tener un mismo valor de tiempo (6 segundos), es posible tener dos valores distintos de la distancia porque se trata de dos movimientos diferentes entre sí.

Estas respuestas indican la viabilidad de introducir por primera vez el concepto de función lineal por medio de una secuencia didáctica que aborde el movimiento de objetos y no por medio de la definición matemática del concepto de función. Al asignar a un mismo valor del tiempo dos valores distintos de la distancia, los estudiantes no cometen errores en la aplicación de la definición. De hecho, sin conocer esta definición, ellos saben que el valor del tiempo está asignado a movimientos distintos (Figura 4).

Figura 4

Respuestas del Equipo de Natalia a las Preguntas ¿Quién iba ganando la carrera en el primer segundo? ¿Y quién, al transcurrir dos segundos?


f) ¿Quién iba ganando la carrera en el primer segundo? ¿Y quién, al transcurrir dos segundos? ¿Cómo lo sabes?
En ambas situaciones concluimos que va ganando Martha, en 1 seg. ella avanza 1.5 m y Pedro 1 m, en 2 segundos ella ya avanzó 3 m y Pedro sólo 2.

La respuesta de la Figura 4 muestra que los estudiantes interpretan las gráficas en términos de una relación uno a uno entre el tiempo y la distancia recorrida. Al escribir "en 2 segundos ella ya avanzó 3m y Pedro sólo 2", los estudiantes pueden iniciar un proceso de objetivación sobre el concepto de función lineal. Aún más, si se toman en cuenta las respuestas a las preguntas de las figuras 3, 4 y 5, se puede asegurar que los estudiantes ya adquirieron la habilidad de notar, en la gráfica, una relación de correspondencia entre el tiempo y la distancia. No debe entenderse, sin embargo, que las preguntas del M1 son suficientes para lograr un completo aprendizaje sólido del concepto de función. El M2 fue elaborado para garantizar la continuidad del proceso de objetivación de los estudiantes.

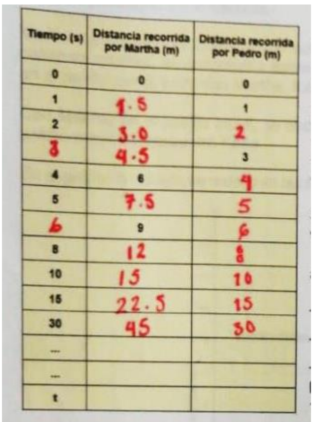
M2 (desarrollo): Interacción de los Estudiantes con la Nueva Información. Funciones de la Forma $f(x) = mx$

En el M2 los estudiantes continuaron analizando el movimiento de Pedro y Martha a partir de una tabla (ver Figura 5) que les permitiera establecer, con mayor precisión, la relación entre tiempo y distancia.

Algunas celdas de la tabla se dejaron intencionalmente vacías para que los estudiantes las llenaran. El objetivo de esta decisión fue incentivar a que los estudiantes relacionaran entre sí las variables de las columnas. Se esperaba que los estudiantes usaran las gráficas de la Figura 1; sin embargo, el episodio 3 muestra que el equipo encontró los valores de la tabla de manera distinta.

Figura 5

Tabla que Muestra las Respuestas del Equipo de Natalia sobre las Distancias Recorridas por Pedro y Martha en cada Segundo



Tiempo (s)	Distancia recorrida por Martha (m)	Distancia recorrida por Pedro (m)
0	0	0
1	1.5	1
2	3.0	2
3	4.5	3
4	6	4
5	7.5	5
6	9	6
8	12	8
10	15	10
15	22.5	15
30	45	30

---		
t		

Episodio 2. Relaciones de correspondencia

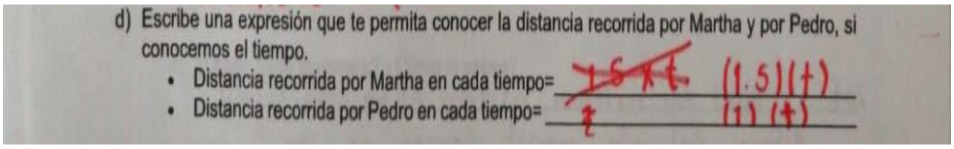
L7 Alejandro: Primero, en el tiempo de segundos, vamos a ordenarlos como va: 1, 2, 3, hasta llegar al que va…
L8 Esteban: ¡Pero primero falta el nueve!
(…)
L9 Alejandro: Sí es 6 (*refiriéndose al número que va después del 5, en la columna Tiempo)*
L10 Profesora: ¿Cómo supieron que era seis?
L11 Alejandro y Esteban: (*contestaron casi simultáneamente*) porque así va la numeración, sólo observamos que así iba (*se refieren la numeración*).
L12 Natalia: (*interrumpe a sus compañeros*) ¡Ah! ¡No! Yo digo que… nos están dando la distancia recorrida por Martha, yo digo que dividamos eso, como en Física (*se refiere al curso de Física que tomó en ciclo escolar anterior*) (*permanece en silencio por unos segundos y continúa*); nueve entre 1.5 serían 6.
L13 Profesora: ¿Por qué 1.5?
L14 Natalia: Porque 1.5 son los metros que avanza por segundo Martha… ¡Entonces sí son 6!
(…)
L15 Esteban: Entonces podemos irlo haciendo así: si Martha recorre 1.5 metros por segundo, podemos ir multiplicando así por cada segundo.

Durante la conversación entre L7 y L11, la relación entre las variables de la tabla no ha sido aún objeto de consciencia para Alejandro y Esteban. De hecho, ambos estudiantes habían acordado colocar los números de manera progresiva. Por el contrario, Natalia toma en cuenta los valores de la columna de la distancia recorrida por Martha y los divide entre los valores de la columna del tiempo. Con su intervención, ella ofrece al equipo una manera distinta de obtener el tiempo de 6 segundos: sugirió dividir 9 entre 1.5 (L12). Además de aportar un método correcto para obtener el tiempo, se destaca que Natalia logra conectar, aún de manera incipiente, temas de su curso anterior de Física con el tema de función lineal. El cálculo novedoso de Natalia permitió que Esteban aportara nueva información sobre la forma de calcular la distancia recorrida. Él menciona que se puede tomar en cuenta el valor que recorre Martha en un segundo y multiplicarlo por el tiempo (L15); es decir, a diferencia de su intervención en L11, Esteban, en L15, ya establece una relación entre la distancia recorrida por Martha y el tiempo que a ella le lleva recorrerla.

Haber asociado una relación entre las variables de tiempo y distancia de la tabla, por parte de Esteban, es un indicador de su progreso en la toma de conciencia del significado del concepto de función. Al observar que el aumento de los valores de la distancia es constante (1.5), Esteban se aproxima a la objetivación de la representación algebraica de una función lineal de la forma $f(x) = mx$. En este momento de la secuencia, la relación co-variacional entre tiempo y distancia comienza, al menos de manera verbal, a expresarse algebraicamente. De hecho, al solicitarle a los miembros del equipo que escribieran las expresiones matemáticas de la distancia recorrida por Pedro y por Martha, la observación de Esteban ("Entonces podemos irlo haciendo así: si Martha recorre 1.5 metros por segundo podemos ir multiplicando así por cada segundo") facilitó sus respuestas al inciso d) de la secuencia (ver Figura 6).

Figura 6

Expresiones Escritas por el Equipo de Natalia de las Distancias Recorridas por Martha y Pedro



d) Escribe una expresión que te permita conocer la distancia recorrida por Martha y por Pedro, si conocemos el tiempo.

- Distancia recorrida por Martha en cada tiempo= ~~1.5 x t~~ (1.5)(t)
- Distancia recorrida por Pedro en cada tiempo= ~~t~~ (1) (t)

Con base en la respuesta de la Figura 6, podemos inferir que el papel de la secuencia didáctica en el desarrollo del discurso de los estudiantes, la tabla de la Figura 5 y las preguntas del M2 ayudaron a los estudiantes a escribir una expresión que generara la función de movimiento de Pedro y de Martha; es decir, ayudaron a que ellos pudieran representar la función lineal en su forma algebraica. Sin embargo, la intervención de la profesora fue también determinante para la escritura de las expresiones $(1.5)(t)$ y $(1)(t)$. En el siguiente episodio se muestra cómo dicha intervención motiva la actividad de los estudiantes.

Episodio 3. Diálogo al escribir las expresiones algebraicas para la función de movimiento de Pedro y Martha

L16 Esteban *(lee la pregunta d):* Escribe una expresión que te permita conocer la distancia recorrida por Martha y por Pedro, si conocemos el tiempo. Eh…
L17 Alejandro: ¿una expresión? (*haciendo muecas mostrando la dificultad al comprender la palabra "expresión"*)
L18 Esteban: ¿Sería uno "ene" o…?
L19 Profesora: (*Atendiendo la duda de Alejandro*) Sí Alejandro, como una regla o fórmula que te permita conocer la distancia recorrida de Pedro y Martha.
L20 Profesora: ¿qué representaría la "ene"?
L21 Esteban: ¿"Ene"? el tiempo, o bueno el número. El tiempo.

L22 Profesora: OK, observemos la tabla. ¿Por qué no le pusieron datos o números en donde hay puntos suspensivos?
L23 Natalia: Porque no hay un tiempo específico
L24 Profesora: Ok, más abajo hay una letra (*señalando la letra "t" que se encuentra en la columna del tiempo en la tabla de la figura 5*) que significa…
L25 Esteban: *(interrumpe a la profesora)* ¡Tiempo! entonces sería 1.5t es igual al recorrido por Martha.
L26 Profesora: ¿Y en Pedro?
L27 Natalia: ¡1t! (*contesta inmediatamente*).

La participación de Esteban en L18 hace visible lo que él mismo dijo en L15, pero con el recorrido de Pedro. Esteban propone verbalmente la expresión $1n$. La objetivación de Esteban, como un indicativo de su aprendizaje, se evidencia cuando él identifica que la letra n puede significar el valor del tiempo. En otras palabras, Esteban ha generalizado parte de una expresión algebraica de una función lineal: la n puede ser t. De esta manera, él pudo enunciar la expresión algebraica del movimiento de Martha (L25). Natalia, aunque no se haya mostrado muy participativa en esta parte de la conversación, estuvo atenta a la discusión de sus compañeros y de la profesora. Incluso, propuso la expresión algebraica que representa el movimiento de Pedro en términos del tiempo: "1t" (L27). Las intervenciones de Esteban y de Natalia muestran que la aparición de las expresiones algebraicas de los movimientos de Pedro y de Martha ante su conciencia puede interpretarse como el producto de una colaboración entre pares. A partir de la intervención de Natalia en L14, en el episodio 2, y hasta la de Esteban en L25, en el episodio 3, se puede notar que el trabajo colaborativo contribuyó a que los estudiantes concibieran una forma algebraica de describir el movimiento y de relacionar las variables de tiempo y posición.

Vale destacar que los estudiantes lograron, hasta este momento de la conversación, plantear una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$. Sin embargo, aún no pede asegurarse que ellos sean conscientes de que las dos expresiones por ellos propuestas, $1.5t$ y $1t$, sean un ejemplo de esa expresión. De hecho, los estudiantes asocian sus respuestas más con la expresión algebraica $d(t) = at$, que con la forma $f(x) = mx$. En la primera expresión, "a" es entendida por los estudiantes como la "velocidad" (en estricto sentido, rapidez) que recorre cada sujeto (Pedro o Martha) en cada segundo.

Antes de pedirles a todo el grupo que resolvieran las actividades del M3, una estudiante de otro equipo, refiriéndose al movimiento de Martha, externó a la profesora que ella había observado que en la última pregunta del M2 (¿quién iba ganando la carrera en el primer segundo? ¿y quién, al transcurrir dos segundos? ¿cómo lo sabes?) "la distancia recorrida por cada segundo no cambiaba". Añadió que para Pedro ocurre lo mismo; sólo que, en este caso, al transcurrir cada segundo él avanza 1m. La estudiante cuestionó el hecho de que no cambie la velocidad va a ocurrir siempre (dando como ejemplo si otra persona participara en la carrera). Ante esta pregunta, la profesora compartió con todo el grupo, en voz alta, la inquietud de su compañera. Este comentario propició que muchos estudiantes miraran su material de trabajo y asintieran con la cabeza; otros sólo asintieron sin recurrir a su material impreso.

La profesora aprovechó este comentario para enfatizar que "este número que no cambia" (haciendo referencia al valor que había mencionado la estudiante) recibe el nombre de constante y que, a su vez, este número, en el problema de Pedro y Martha, es multiplicado por un valor llamado variable, que nombramos "tiempo". Un estudiante, al escuchar esta aclaración, preguntó "¿variable porque puede cambiar?". La profesora asintió y profundizó aún más en este tema. Ella indicó lo siguiente: "la distancia recorrida por Martha, por ejemplo, va a depender de la variable, es decir del tiempo. Si yo les pregunto a qué distancia iba Martha en el segundo 3, ¿qué responderían y por qué?". Esa pregunta fue contestada por otro estudiante: "4.5 metros, porque ella recorre 1.5 metros cada segundo, entonces sólo multiplicamos eso por el tiempo que usted diga… la variable".

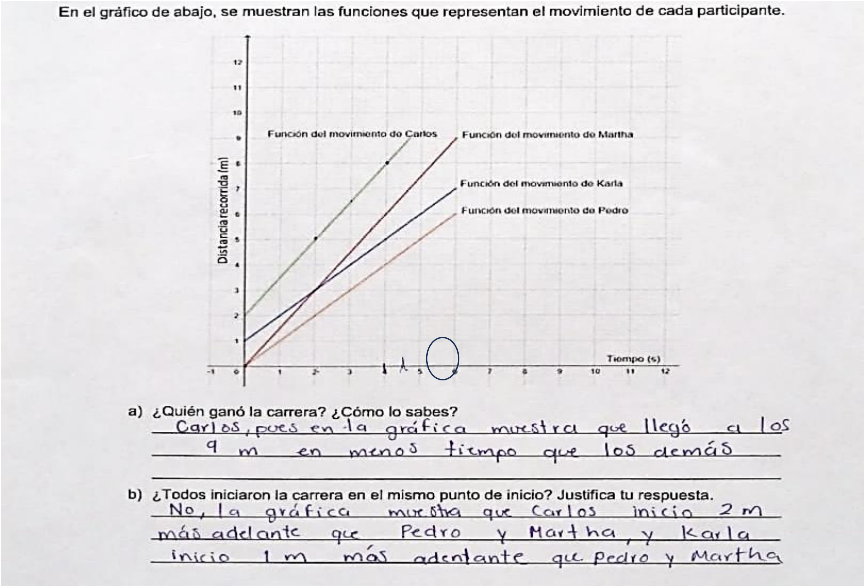
Después de esta respuesta, la profesora también pidió a todos los estudiantes que observaran que había otro valor que podíamos desconocer, por lo que podría también recibir el nombre de variable. Un estudiante mencionó que este dato era "la distancia recorrida". La profesora señaló que, sin embargo, esta es llamada variable dependiente, y preguntó a los estudiantes por qué creen que recibía ese nombre. Una estudiante contestó: "pues porque va a depender del tiempo". La profesora, después de apoyar esta respuesta, dio algunos ejemplos sobre cómo podíamos escribir las expresiones solicitadas en el inciso d) (ver Figura 6). Se les mencionó que en lugar de escribir "Distancia recorrida por Pedro", se podría escribir $Dp(t)$, que significaba "valor de la distancia recorrida por Pedro en función del tiempo". Esta nomenclatura fue adoptada por los estudiantes del grupo.

La conversación grupal de la profesora con todos los estudiantes puede caracterizarse como lo que Radford (2020) ha denominado la labor conjunta entre estudiantes y profesor. Al asociar $Dp(t)$ con oraciones como "valor de la distancia recorrida por Pedro en función del tiempo", la profesora contribuye a la toma de conciencia de sus estudiantes sobre el concepto de función lineal.

M3 (desarrollo). Interacción de los Estudiantes con la Nueva Información del Problema de Pedro y Martha. Funciones de la Forma $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$

En el M3 los estudiantes trabajaron con gráficas y expresiones algebraicas de la forma $f(x) = mx + b$.

Figura 7
Primera Interacción con las Funciones de la Forma $f(x) = mx + b$



Los estudiantes no mostraron dificultad en contestar las dos preguntas de la Figura 7. Esto fue constatado por la profesora, pues observó que el tiempo de respuesta de esas preguntas fue menor que el tiempo de respuesta de las preguntas del M1. Esto nos permite suponer que, con respecto a los primeros intentos de interpretar las gráficas (Episodio 1), en el M3 los estudiantes manipulan las gráficas como una relación entre variables. La marca dejada por el equipo de Natalia entre el segundo 4 y 5 (ver óvalo en Figura 7) objetiva, en general, el proceso de relacionar las variables tiempo y distancia; en particular, objetiva la relación entre el punto (9,0) de la función del movimiento de Carlos con la ordenada asociada a ese punto (4.5).

Los estudiantes también se dan cuenta, a partir de la interpretación de las gráficas, de que no todos los competidores iniciaron en el mismo lugar, pues observan que las ordenadas al origen de cada una de las rectas de la gráfica señala el lugar de donde cada competidor inició su carrera. Esto es un indicador de que los integrantes del equipo logran hacer una relación entre las variables de la gráfica. Esta toma de conciencia contribuye, como se ve en el siguiente episodio, a que los estudiantes puedan escribir una expresión para ese tipo de funciones.

Episodio 5. Generación de expresiones para los nuevos competidores añadidos al texto original

L28 Natalia: (*Lee las instrucciones de una de las preguntas*): En la actividad anterior, generaste expresiones para obtener la distancia recorrida por Pedro y Martha en función del tiempo. Plantea una expresión para las funciones de Carlos y Karla. (*Termina de leer las instrucciones y continua)* … Lo que no cambia es la constante por *x*, la constante por el tiempo (*haciendo referencia a lo comentado de manera grupal).*
L29 Esteban: La constante por el tiempo, y tendría que ser de Carlos, ¿Carlos cuánto avanza?, es lo mismo que Martha.
L30 Natalia: ¿Cuál es la constante, la distancia?

L31 Alejandro: (*Responde a la pregunta de Natalia*) No, la constante es la velocidad
L32 Esteban: (*Responde a la pregunta de Natalia*) La velocidad que lleva. Creo lleva la misma velocidad que Martha pues… si van en el mismo lugar, bueno… pero él (*se refiere al movimiento de Carlos*) avanzó desde dos metros. Es la misma fórmula que Martha *(compara las rectas de Martha y de Carlos).*
L33 Natalia: Yo digo que es $D_c(t) = 1.5t$. Pero Karla sí iba con una velocidad diferente a la de Pedro, entonces podríamos decir que recorrió 5 metros en 6 segundos, ¡ah no!, 6 metros en 5 segundos.
L34 Esteban: Pero hay que tomar en cuenta que ya lleva un metro. Son…
L35 Natalia: No igual, pero ella llegó hasta el 7.
L36 Esteban: Pero empezó en el 1.
L37 Natalia: ¡Ah! Entonces sí lleva la misma que Pedro.

El episodio anterior se generó cuando los estudiantes intentaron plantear una expresión para el movimiento de Carlos y Karla, dos competidores de la carrera añadidos al texto original del problema. En las primeras líneas, Natalia, en cuanto termina de leer las instrucciones (L28), menciona: “Lo que no cambia es la constante por x, la constante por el tiempo”. Al parecer ella intenta plantear la expresión siguiendo la forma $f(x) = mx$, que se obtuvo en los ejercicios anteriores. Aun cuando en su lenguaje no aparece explícitamente el tiempo, Natalia es consciente de que la variable x es el tiempo. Esto indica que ella comprende que la variable puede ser representada por cualquier letra. En este sentido, su intervención se concentra en el significado de esa representación. Otro ejemplo de esta representación de la variable se había visto anteriormente con Esteban (L18) al plantear las expresiones para Pedro y Martha.

Es interesante notar que, en este momento de la discusión, los estudiantes ya podían reconocer que, en la gráfica del movimiento de los competidores, existen cantidades que varían y que son constantes. Obsérvese cómo Alejandro corrige a Natalia y le asegura que lo que es constante es la velocidad (L31). Otro ejemplo del modo como la secuencia favorece la identificación de las variables se da en el comentario de Esteban, quien pretende argumentar que la velocidad es la que permanece constante (L32). En su intervención de L32, Esteban se ha dado cuenta de que la gráfica de Carlos es similar a la de Martha, lo que le hace creer que aquel lleva la misma velocidad que ésta; sin embargo, también se da cuenta de una diferencia entre las gráficas: la de Carlos indica que “él avanzó desde dos metros”. A pesar de que Esteban advierte esta diferencia, asegura que la expresión de la función (en sus palabras, “fórmula”) de Carlos es la misma que la de Martha. Es Natalia, quien al escuchar a Esteban, le da forma matemática a la expresión de Carlos (L33). Es decir, la ecuación $D_c(t) = 1.5t$, propuesta por Natalia, es la confirmación de lo que Esteban acababa de decir. Con base en la TO, puede decirse que esa ecuación representa la labor conjunta realizada por Esteban y Natalia respecto del modo de significar el movimiento de uno de los competidores.

Pero Natalia, después de mencionar la ecuación de Carlos, dirige su atención a la gráfica de Karla y la compara con la de Pedro (L33). A diferencia de Esteban, quien había identificado que la velocidad de Carlos era la misma que la de Martha, Natalia asegura que las velocidades de Karla y de Pedro son distintas entre sí (“Pero Karla sí iba con una velocidad diferente a la de Pedro”). La característica del paralelismo entre dos rectas no significó lo mismo para Natalia que para Esteban.

Ahora bien, el hecho de que el paralelismo de las rectas de Karla y Pedro no signifique para Natalia que estos dos competidores llevan la misma velocidad, no significa que Natalia no se encuentre en un proceso de objetivación del concepto de función, es decir, en un proceso de toma de conciencia. Lo que ella continúa diciendo en L34 es la base de ese proceso. Al inferir que Karla “recorrió 5 metros en 6 segundos”, y después corregir este dato (“¡ah!, no, 6 metros en 5 segundos”), Natalia está tomando conciencia de una de las características del concepto de función: establecer una correspondencia entre variables. Puede decirse que su análisis, basado principalmente en una observación visual de la gráfica, es la génesis de la futura comprensión del concepto de función. Que la correspondencia variacional sea caracterizada con más precisión será una acción que Natalia podrá reconocer a medida que ella y sus compañeros solucionen los problemas de la secuencia.

El análisis de Natalia no solo se circunscribe a determinar una asociación entre variables. En su respuesta, ella ha observado que es importante tomar en cuenta que Karla inicia un metro después de Pedro; es esta la razón por la que asegura que Karla recorrió 6 metros, y no 7 metros. Esto se observa con mayor claridad en L35, cuando ella asegura que Karla llegó “hasta el 7”. Independientemente de que Natalia haya equivocado el valor del tiempo correspondiente al valor de 7 metros en la gráfica de Karla, Natalia es consciente de que, para analizar el movimiento de Karla, no solo es necesario asociar los valores del tiempo con los de la distancia, sino también considerar el punto (0,0) como referencia y otorgarle significado a los puntos de intersección de las rectas con el eje vertical (ordenada al origen). Esta referencia del punto (0,0) ya había sido observada por Esteban al analizar el movimiento de Carlos, y fue nuevamente mencionada (de manera implícita) por él en su intervención sobre el movimiento de Karla (L34 y L36).

La participación final de Natalia en este episodio evidencia que su proceso de objetivación (y también el de sus compañeros de equipo) sobre el movimiento de los nuevos competidores de la carrera (Carlos y Karla) aún no ha terminado. A diferencia de su intervención en L33, Natalia, en L37, se convence que Karla “sí lleva la misma [velocidad] que Pedro”. Los motivos de su convencimiento radican en la labor conjunta que ella sostuvo, principalmente, con Esteban. Este trabajo le ha permitido significar de otra manera la velocidad de Karla.

Aun cuando es correcta su interpretación de la velocidad de Karla, Natalia y los integrantes de su equipo aún siguen confundidos. De hecho, en la conversación del episodio 5, la expresión $D_c(t) = 1.5t$ propuesta por Karla no ha sido completamente aceptada por Esteban. Si bien el equipo se ha dado cuenta de que las posiciones iniciales de Karla y Pedro son importantes para el análisis de sus gráficas, aún no han podido asociarlas con expresiones algebraicas. Ante esta confusión, los integrantes del equipo de Natalia llaman a la profesora, quien se encontraba visitando otros equipos. Le preguntan cómo podían representar la diferencia de posiciones si ahora Karla y Carlos no habían empezado desde “el punto de inicio” (el punto (0,0)).

La profesora, al observar lo que el equipo de Natalia tenía escrito en su hoja de trabajo, mencionó a los estudiantes que podían dejarla con los valores que habían obtenido hasta ese momento ($D_c(t) = 1.5t$ y $D_k(t) = 1t$ para el movimiento de Carlos y Karla, respectivamente), y que más adelante rectificarían su respuesta al llenar la tabla de la Figura 8. La profesora sabía que, tanto en el llenado de esa tabla como en las respuestas a las preguntas colocadas debajo de la tabla, los estudiantes se verían obligados a explicar esas diferencias.

Figura 8

Respuestas del Equipo de Natalia, Basadas en la Tabla que Debían Llenar sobre las Distancias Recorridas por todos los Competidores de la Carrera

Considera la siguiente tabla. Llena los datos de las distancias recorridas por cada participante de la carrera según lo indican las columnas.

Tiempo (s)	Distancia recorrida por Martha (m)		Distancia recorrida por Carlos (m)		Distancia recorrida por Pedro (m)		Distancia recorrida por Karla (m)	
	Expresión que generaste $D_M(t)=$	Valor de la distancia observada en el gráfico	Expresión propuesta $D_C(t)=$	Valor de la distancia observada en el gráfico	Expresión que generaste $D_P(t)=$	Valor de la distancia observada en el gráfico	Expresión propuesta $D_K(t)=$	Valor de la distancia observada en el gráfico
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								

Comprueba que la expresión que propusiste cumpla con los valores de la gráfica.

a) ¿Los valores coinciden? Algunos sí (Pedro y Martha) los de Karla y Carlos No.

b) Si los valores no coinciden, ¿qué tienes que hacer ~~para que ambos valores sean~~ en las expresiones iguales (el de la función que propusiste y el que se obtiene al observar la gráfica)?

Agregarle en forma de suma los metros que llevan de ventaja

$D_C(t)=1.5t+2$ $D_K(t)=1t+1$

c) ¿Te parece que la carrera es justa? Justifica tu respuesta.

No, porque Karla y Carlos empiezan con ventaja en la distancia (Carlos 2mt y Karla 1mt que los demás; Pedro y Martha)

Una vez que los estudiantes terminaron de llenar la tabla, los estudiantes se dieron cuenta de que los valores por ellos calculados y los observados en la gráfica cartesiana no coincidían. La profesora les preguntó qué podían hacer con las expresiones algebraicas para que estos valores (los calculados por ellos) coincidieran con la información observada en las gráficas de la Figura 7. Es importante observar que la pregunta del inciso b) incluye, en su redacción, la palabra “función”. Esto se hizo para que los estudiantes se familiarizaran con este concepto, incluso sin antes haberlo definido formalmente.

Aun cuando la pregunta de la profesora indujo a que la modificación solicitada en el inciso b) debía hacerse en las expresiones algebraicas, Esteban insistió en que la modificación debía hacerse en las gráficas, pues dijo en voz alta: “todos [los participantes de la carrera] empezarán desde el mismo punto [origen]”. Al escuchar esto, sin embargo, Natalia añadió, en la hoja de trabajo de su equipo, la frase “en las expresiones” para enfatizar que lo que debía cambiarse eran las expresiones algebraicas y no las rectas de los competidores (ver óvalo de la Figura 8).

La profesora les pidió que observaran los valores de su tabla. Natalia y Esteban, casi de manera inmediata y simultánea, contestaron $D_c(t) = 1.5t + 2$. Los estudiantes justificaron su respuesta al afirmar que se tiene que “agregar” la ventaja que tiene cada participante. Esta inmediatez en su respuesta es producto, principalmente, de la conversación que Natalia y Esteban sostuvieron en el episodio 5. La duda generada sobre si había que considerar la posición inicial de Carlos y Karla en sus expresiones algebraicas quedaba ahora resuelta. La expresión para Karla, $D_K(t) = 1t + 1$, mostrada en el inciso b) de la Figura 8, fue también propuesta inmediatamente por Esteban y Karla.

Las modificaciones a las expresiones matemáticas de los movimientos de Karla y Carlos indican que la secuencia favorece paulatinamente el proceso de objetivación de los estudiantes sobre el concepto de función. Aun sin conocer la definición formal de este concepto, los estudiantes se dan cuenta de que, al iniciar la carrera, el valor de las posiciones de Carlos y

Karla es distinto del valor de las posiciones de Martha y Pedro, respectivamente. Este reconocimiento les permitirá abordar, posteriormente, el significado matemático del término b en la expresión $f(x) = mx + b$.

Discusión de los Resultados y Aportaciones

Los resultados obtenidos en la presente investigación contribuyen a resaltar la importancia que algunos investigadores (Günster y Weigand, 2020; Pinto et al., 2022; Rolfes et al., 2018) le han dado al diseño de actividades respecto de la oportunidad que éste le puede brindar a los investigadores de estudiar: 1) el proceso de comprensión del concepto de función lineal y 2) los efectos de las representaciones del concepto de función en el razonamiento utilizado por los estudiantes al momento de resolver las actividades. En cuanto al proceso de comprensión, aun cuando nuestro diseño no involucra el uso de herramientas digitales, podemos afirmar que, al igual que los estudiantes reportados en Günster y Weigand (2020), los estudiantes reportados en este artículo fueron superando paulatinamente las dificultades reportadas en estudios sobre la identificación de representaciones algebraicas que deben hacer los estudiantes al conocer las representaciones gráficas de funciones (Leinhardt et al., 1990; Sfard, 1992; Sierpnska, 1992). Ahora bien, a diferencia de la investigación de Günster y Weigand, nuestro diseño de secuencia no estuvo basada en un marco teórico específico; sino en algunas investigaciones previas (Miranda et al., 2007, 2013; Salinas-Hernández y Miranda, 2018; Radford, 2009) sobre el modo de concebir el movimiento lineal de objetos.

Respecto de los efectos producidos por las diversas representaciones (algebraica, gráfica y tabular) del concepto de función en la forma en que estudiantes razonan los problemas, los resultados obtenidos en este artículo refuerzan los hallazgos de Rolfes et al. (2018), en el sentido de que el uso de tablas fue más apropiado que el uso de graficas al momento de cuantificar las expresiones de las funciones del movimiento. Los episodios 2 y 5 muestran que los estudiantes de nuestro estudio pudieron obtener expresiones algebraicas con ayuda del análisis de las tabla de las figuras 5 y 8. Con base en los estudios previos sobre las dificultades de los estudiantes sobre la significación de las expresiones algebraicas de las funciones (Eisenberg, 2002), es muy posible que dicho análisis hubiera sido más difícil para los estudiantes si se les hubiera solicitado obtener las expresiones de los corredores a partir de las gráficas de las figuras 1 y 7. Una de las características del diseño de la secuencia consistió precisamente en permitir que los estudiantes realizaran análisis cuantitativos y cualitativos tanto de las gráficas como de las tablas con la finalidad de dar sentido al movimiento de los corredores.

Otra característica que distingue el diseño de la secuencia propuesta en este artículo de otros diseños es la de entrelazar el concepto de función con problemas de movimiento. Aun cuando el movimiento de objetos es un tema abordado en diversas investigaciones en educación matemática (Miranda et al., 2013; Speiser et al., 2003; Radford, 2009), educación de la ciencia (Ebersbach et al., 2011) e, incluso, en estudios cognitivos (Zheng & Goldin-Meadow, 2002), su interrelación con el aprendizaje del concepto de función es un tema aún por investigar.

Con base en nuestros resultados, creemos que cada uno de los momentos en los que se dividió la secuencia favoreció la existencia de una toma de conciencia sobre el significado del concepto de función. Cada momento forma parte de un proceso caracterizado por el uso de las variables tiempo y posición y por la interrelación de una variable con la otra. En el M1, a partir de la lectura directa de las gráficas, los estudiantes pudieron percatarse que, para conocer las características del movimiento de los corredores, debían asociar un valor del tiempo con otro de posición. En el M2, los estudiantes podían visualizar esa relación de manera más precisa, por medio del llenado de una tabla y de la propuesta de expresiones matemáticas que dieran cuenta del movimiento de los dos corredores. En el M3, la relación entre el tiempo y la posición de los corredores fue observada con mayor detalle debido a que los estudiantes no solo debían dar cuenta de que era necesario asignar a todo valor del tiempo un único valor de la posición, sino que la posición inicial con la que algunos competidores iniciaban la carrera también debía tomarse en cuenta en esa relación.

Sostenemos que la secuencia es un medio apropiado para introducir a los estudiantes al significado general de función y al de función lineal, en particular. En este sentido, la secuencia es una propuesta didáctica que puede ayudar a los profesores a organizar sus clases. Además, con base en el análisis de lo realizado por los estudiantes, la secuencia puede ser también una propuesta pedagógica en términos de que al profesor le permita lograr una formación integral caracterizada por hacer notar a los estudiantes que las ecuaciones del movimiento lineal de objetos, abordadas en el curso de Física, son ejemplos de funciones lineales.

Conclusiones y Reflexiones Finales

El objetivo de este trabajo fue analizar, con base en algunos conceptos de la TO, el proceso de aprendizaje de tres estudiantes de secundaria sobre el concepto de función lineal mediante la aplicación de una secuencia didáctica que implica el movimiento de objetos. Respondiendo a nuestra pregunta de investigación, el análisis muestra que la toma de conciencia sobre la importancia de relacionar las variables de tiempo y distancia, para comprender el movimiento de los competidores, fue paulatina. En este sentido, consideramos que el tema del movimiento de objetos es propicio para que estudiantes, que por primera vez aborden el concepto de función lineal, logren relacionar dos conjuntos: el del tiempo y el de la distancia. La ventaja de abordar en el salón de clases el concepto de función lineal a partir de la solución de problemas sobre el movimiento lineal de objetos se debe tanto a la fluidez con la que se puede relacionar la posición con el tiempo como al hecho de que el movimiento es un tema que puede mencionarse sin necesidad de usar definiciones formales, pues *estar en movimiento* es una experiencia cotidiana de todo individuo.

Investigaciones posteriores son necesarias sobre cómo los estudiantes pueden utilizar secuencias del movimiento para definir conceptos como rango, dominio de una función y función por partes. También son necesarias propuestas de secuencias de movimientos acelerados, de tal manera que los estudiantes logren disociar el movimiento lineal con el concepto de función lineal.

Referencias

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia*, *37*(1), 1-23. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.1

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6a. ed). Taylor & Francis.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

DeJarnette, A. F., McMahon, S., & Hord, C. (2020). Interpretations of slope through written and verbal interactions between a student and her tutors in Algebra 1. *REDIMAT*, *9*(2), 121-146. https://doi.org/10.17583/redimat.2020.4242

Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America.

Ebersbach, M., Van Dooren, W., & Vershaffel, L. (2011). Knowledge on accelerated motion as measured by implicit and explicit tasks in 5 to 16 years old. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(1), 25-46. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9208-5

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, pp. 140-152). Kluwer Academic Publishers.

Günster, S. M., & Weigand, HG. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM Mathematics Education*, *52*(7), 1259–1274. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01179-1

Kjeldsen, T. H., & Lützen, J. (2015). Interactions between mathematics and physics: The history of the concept of function-teaching with and about nature of mathematics. *Science and Education*, *24*(5-6), 543–559. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9746-x

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

Miranda, I., Radford. L., & Guzmán (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, *19*(3), 5-30. https://doi.org/10.24844/EM1903.01

Miranda, I., Radford. L., & Guzmán. (2013). Un origen matemático vs. dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 183-208. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.27

Mirin, A., Weber, K., & Wasserman, N. (2020). What is a function. En A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala, P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1156-1164). Cinvestav/AMIUTEM/PME-NA. https://pmena2020.cinvestav.mx/Program-Proceedings/Proceedings

Pinto, E., Cañadas, M. C. & Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0501_02

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación [Special issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 103-129.

Radford, L. (2009). "No! He starts walking backwards!": Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM Mathematics Education*, 41(4), 467-480. https://doi.org/ 10.1007/s11858-009-0173-9

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *REDIMAT*, 2*(1)*, 7-44. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 15-31.

Radford, L., & Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 227-245. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9282-1

Rolfes, T., Roth, J., & Schnotz, W. (2018). Effects of tables, bar charts, and graphs on solving function tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik,* *39*(1), 97-125. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0124-x

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229-254. https://doi.org/10.1023/a:1026033415747

Salinas-Hernández, U., & Miranda, I.(2018). Relating computational cartesian graphs to a real motion: An analysis of high school students' activity. En N. Presmeg, L. Radford, W.-M. Roth, & G. Kadunz (Eds.), *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research* (pp. 55-71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_4

Sandoval-Troncoso, L., & Ledezma, C. (2021). Los gestos, una manera de comunicar matemática: El caso particular de las funciones. *Educación Matemática, 33*(2), 205–226. https://doi.org/10.24844/EM3302.08.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Mathematical Association of America.

Speiser, B., Walter, C. & Maher, C. A. (2003). Representing motion: An experiment in learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 1-35. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00002-6

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (3a ed., pp. 443–446). Sage Publications.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in Physics Education. *Science and Education*, *21*(4), 485-506. https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Zheng, M., & Goldin-Meadow, S. (2002). Thought before language: How deaf and hearing children express motion events across cultures. *Cognition*, 85(2), 145-175. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(02)00105-1