EL CUASI-EMPIRISMO DE IMRE LAKATOS O CÓMO INTENTAR CONSTRUIR UNA CONCEPCIÓN EMPÍRICA DE LA MATEMÁTICA

MARIO DE FRANCISCO VILLA

Departamento de Filosofía y Psicología. Facultad de Filosofía y CC. de la Educación
Universidad de Oviedo. Campus de Humanidades. 33011 Oviedo

Las concepciones de la matemática nacidas a fines del siglo XIX en el desarrollo del campo de investigación de los Fundamentos de la Matemática han ido fracasando una tras otra durante la primera mitad de siglo XX en su objetivo de dar una justificación clara y convincente del conocimiento matemático. La concepción de estas filosofías fundamentistas de la matemática como una ciencia preeminente sobre las restantes ciencias, creadora de un conocimiento seguro y cierto, fundamental y "a priori" (herencia de la tradición epistemológica occidental desde la antigüedad griega) ha demostrado engendrar más problemas que soluciones. Llegados a este punto, convendría volver la vista hacia otras concepciones y filosofías de la matemática menos exploradas hasta hoy. Imre Lakatos nos muestra con su programa cuasi-empirista un ejemplo excelente de una concepción de la Matemática distinta de las tradicionales y al mismo tiempo nos muestra, teniendo en cuenta los puntos fuertes y débiles de su concepción, un posible camino hacia la construcción de una concepción empirista sofisticada de la Matemática, de la que hoy podemos ver más de un intento en autores actuales.

Palabras clave: Cuasi-empirismo, matemática, fundamentista, analítico, "a priori".

> El les dijo: Si no veo en sus manos la señal de los clavos y meto mi dedo en el lugar de los clavos y mi mano en su costado, no creeré. (Evangelio de San Juan 20, 25)

1. Filosofías de la matemática

La reflexión filosófica sobre la matemática ha estado dominada en el último siglo por los puntos de vista de las escuelas, que podríamos llamar fundamentistas, del logicismo, formalismo e intuicionismo, cuyos principales objetivos han sido los de construir una base justificacionista que cimentara los logros de la disciplina matemática desde los tiempos antiguos hasta hoy. Es decir, son las corrientes que se han ocupado de estudiar los fundamentos de la matemática, herederas de la preocupación por el rigor del análisis matemático del siglo XIX y del ideal de necesidad y certeza absolutos del conocimiento matemático de toda la historia del saber occidental.

Los programas fundamentistas han ido fracasando a lo largo del siglo XX uno tras otro irremisiblemente[1]. Las tautologías lógicas sin contenido factual en las que el logicismo pretendía fundamentar la matemática naufragaron en un mar de paradojas y dificultades que dieron al traste con la magna obra de Frege. Los juegos manipulativos de signos formales carentes de todo significado del formalismo hilbertiano se toparon con los trabajos de Gödel desarrollados desde la propia tradición formalista. Por último, el reclamo de las construcciones mentales de los intuicionistas ha sido condenado por los mismos matemáticos a la heterodoxia al hacerse patentes los graves recortes que exigían al "corpus" aceptado de la disciplina matemática.

El punto de vista de las escuelas fundamentistas había llevado a una concepción de la filosofía de la matemática en la que esta venía a ser considerada como una rama más de la ciencia matemática en la que se establecían las raíces estables sobre las que levantar el frondoso árbol de la matemática y dentro de la cual se introducían cualesquiera consideraciones epistémicas acerca de la disciplina. Esto es lo que habría llevado a afirmar a Jean Desanti que:

> No es posible ninguna epistemología matemática que no esté instalada dentro de la matemática misma[2].

---

[1] Al menos lo han hecho en lo que se refiere a los ambiciosos objetivos finales que sostenían en un principio, sin infravalorar las aportaciones que han hecho a la reflexión sobre la ciencia matemática y a la matemática misma.

[2] Desanti, J.T. (1968), *Les idealitès mathematiqués*, París: Souil.

Sin embargo, las ideas de Lakatos vienen a ser muy distintas. Ahora la epistemología de la matemática es una epistemología crítica que pretende dar cuenta del desarrollo dinámico de la actividad del matemático como científico, echando abajo la vieja consideración del crecimiento acumulativo de la matemática a lo largo de su historia. Es decir, se exige una reconsideración de la historia de la disciplina.

2. El programa cuasi-empirista de Imre Lakatos

Imre Lakatos, filósofo con buenos conocimientos matemáticos nacido en Hungría y emigrado a Inglaterra a raíz de las revueltas de 1956, realizó importantes aportaciones a la filosofía de la ciencia durante los años sesenta y primera mitad de los setenta en un tono crítico a la filosofía del empirismo lógico, en la línea de influencia del falsacionismo popperiano, pero yendo más lejos que Popper en su sofisticación y reclamando una concepción racionalista de la ciencia frente a otros trabajos críticos como los de T.S.Kuhn. De esta manera configuró su concepción de la actividad científica de los "programas científicos de investigación".

En general, los trabajos de Lakatos en filosofía de la matemática no fueron tan conocidos como sus otros trabajos acerca de la ciencia y la mayor parte de ellos no fueron publicados más que tras su muerte, después de ser recopilados por sus amigos y discípulos John Worrall y Elie Zahar. El escrito más conocido fue su *Pruebas y refutaciones*, que fue considerado en la sombra un libro interesante y sugerente por muchos estudiantes y profesores de matemática de la universidad inglesa. En este libro Lakatos, a manera de un diálogo entre un profesor de matemática y sus alumnos en diversas sesiones de clase, ejemplifica perfectamente aquello en lo que él consideraba que consistía la dinámica de la investigación matemática, tomando a cuento un ejemplo histórico de la propia disciplina matemática: la demostración del teorema de la geometría de Euler-Descartes[3].

El núcleo de la filosofía de la ciencia de Lakatos, que por supuesto también se extiende a su filosofía de la matemática, consiste en una lucha

[3] Inmejorablemente conocido por Lakatos puesto que formaba parte de la tesis doctoral que había presentado en Cambridge en 1961.

abierta contra el escepticismo, propuesto ya desde la antigüedad griega, que intenta barrenar toda posibilidad de conocimiento seguro. Para Lakatos el deseo de responder al desafío del escepticismo al conocimiento, y hay que tener en cuenta que la matemática es considerada el paradigma de conocimiento, ha llevado a tres esquemas básicos de explicación del conocimiento humano. Dos de esos esquemas son verificacionistas y en su intento de asegurar los pilares de la certeza de nuestro conocimiento han construido concepciones de la matemática- ciencia, en general- donde la verdad y seguridad del conocimiento se transmiten bien desde unos principios primeros, seguros e indubitables hasta los enunciados más lejanos a estos en un sistema deductivo perfectamente enlazado, bien desde una base experimental firme hasta los enunciados más abstractos, teóricos y generales por medio de razonamientos inductivos.

El primero de estos esquemas es llamado por Lakatos "programa euclídeo"; en sus palabras una teoría euclídea sería aquella que:

> es un sistema deductivo en el que las proposiciones de la cúspide (axiomas) constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos), y se practican en esta cúspide inyecciones de valores de verdad infalibles, que sean del valor de verdad verdadero, y que fluyan hacia abajo por los canales deductivos de valor de verdad (pruebas) e inunden todo el sistema[4].

Dentro de este programa del conocimiento se engloban las teorías fundacionistas de la filosofía de la matemática como el logicismo y formalismo. Para Lakatos, tanto el logicismo de Russell como el formalismo de Hilbert desembocan en callejones sin salida y complejidades conceptuales como las paradojas logicistas y la teoría de tipos, que intenta solucionarlas, o los teoremas de Gödel y su descubrimiento de los sistemas O-inconsistentes.

El segundo de los esquemas es el "programa inductivista" que para Lakatos es en realidad un programa de teorías euclídeas donde la dirección de la transmisión de los valores de verdad verdaderos en el sistema de-

---

[4] Lakatos, 1987: p. 17.

ductivo se ha invertido, siendo ahora desde abajo hacia arriba, desde la experiencia sensible hasta los términos primitivos y primeros. El inductivismo ingenuo o la sofisticación del inductivismo probabilista no resisten, según Lakatos, la crítica escéptica a la prueba inductiva y el problema de la definición de los términos teóricos en base de los términos observacionales, es decir, el problema de la dicotomía teoría-observación.

El error de ambos esquemas, según Lakatos, es que han pretendido responder al problema, planteado por el escepticismo, de la regresión infinita del conocimiento de una manera equivocada. Este problema plantea la dificultad de que no podemos presentar con total seguridad ningún término como perfectamente conocido y ningún concepto como exacto al no estar seguros de que no nos podemos retrotraer a términos o conceptos más fundamentales en los que estos se basen. Es decir, no podemos presentar de una manera dogmática proyectos de trivialización del conocimiento donde se pretende establecer una base de verdad indubitable a partir de la cual se adquiera conocimiento seguro por procedimentos triviales, como las pruebas en un sistema formalista. Este error no es cometido por el tercero de los esquemas, que Lakatos propone y aún no hemos comentado, porque su respuesta al problema no es la de establecer un conocimiento dogmático, sino la de proponer un conocimiento conjetural siempre dinámico.

Este tercer esquema es el "programa empirista", donde hemos de entender empirista como falsacionista. Una teoría empirista sería:

> un sistema deductivo si las proposiciones de la base (enunciados básicos) constan de términos perfectamente bien conocidos (términos empíricos) y existe una posibilidad de inyección de valores de verdad infalibles en esa base, tal que, si el valor de verdad es falso, fluye hacia arriba por los canales deductivos (explicaciones) e inunda todo el sistema (si el valor de verdad es verdadero, no existe ninguna corriente de valor de verdad en el sistema)[5].

---

[5] Lakatos, 1987: p.18. En el artículo "La crítica y la metodología de los programas científicos de investigación" (Lakatos, 1987) Lakatos propone una versión de su concepción falsacionista de la ciencia más sofisticada donde se aparta de un

La concepción del conocimiento del "programa empirista" es conjetural. En ella los enunciados básicos son explicados por los del resto del sistema, que se halla de esta manera fuertemente enlazado, de tal manera que una teoría nunca se halla totalmente verificada, sino tan sólo bien corroborada.

El "programa empirista" se convierte en la ciencia matemática en "programa cuasi-empirista" opuesto totalmente al "programa euclídeo" (formalismo, logicismo o intuicionismo cuyo primer objetivo es la búsqueda de axiomas autoevidentes. La matemática no va a ser por más tiempo el último bastión del programa euclídeo, pues la matemática es cuasi-empírica. La matemática cuasi-empírica es una matemática conjetural y especulativa cuya regla principal es la formulación de hipótesis atrevidas con "una gran potencia explicativa y heurística" en la que la demostración perfecta pierde su antiguo valor:

> Además me ha enseñado algo importante: es incorrecto afirmar que el objetivo de un "problema (en matemática) a demostrar" es o bien mostrar concluyentemente que es verdadera determinada afirmación claramente enunciada, o bien mostrar que es falsa. El objetivo real de un "problema a demostrar" debería ser el de mejorar la conjetura ingenua original para hacerla un teorema[6].

Ese mejorar una conjetura matemática ingenua inicial es parte de la heurística lakatosiana envuelta en toda actividad científica[7], en la que podemos incluir la construcción de pruebas para el establecimiento de conjeturas, la presentación de contraejemplos locales o globales que falseen las pruebas o la conjetura misma, el ajuste de las pruebas y conjetu-

---

falsacionismo ingenuo que podría confundirse con esta formulación del "programa empirista".

[6] Lakatos, 1986: p. 58.

[7] Lakatos da una excelente explicación de lo que él entiende por heurística (heurística negativa, heurística positiva) en la parte tercera de su artículo "La crítica y la metodología de los programas científicos de investigación" (Lakatos, 1981).

ras a los contraejemplos propuestos ...etc.[8]. La demostración matemática en un sentido más tradicional deja de tener sentido[9].

La matemática es una ciencia cuasi-empírica y no es empírica pura como el resto de las ciencias porque la naturaleza de sus falsadores potenciales es, en principio, distinta de la de los del resto de las ciencias. Los falsadores potenciales de la matemática, las inyecciones de valores de verdad en el sistema, no son, como en las restantes ciencias, enunciados espacio-temporales singulares. En la matemática, en toda teoría matemática que se precie de ser válida, existen falsadores potenciales lógicos, es decir, enunciados del tipo "p&-p" que serían los únicos aceptados desde un programa como el formalista como posibles falsadores de una teoría matemática. Pero también existirían falsadores potenciales heurísticos que, según Lakatos, serían los equivalentes a los hechos firmes de las ciencias en la matemática. Las teorías y pruebas matemáticas no son siempre teorías y pruebas perfectamente formalizadas (sistemas axiomáticos claramente definidos con unas reglas de transformación y formación establecidas y unos falsadores lógicos delimitados), sino que a menudo los matemáticos trabajan sobre teorías y pruebas informales, conjeturas y refutaciones intuitivas sujetas a continuos cambios de problemas a resolver en la línea investigadora de la disciplina matemática. El concepto de falsador potencial heurístico es tremendamente confuso en Lakatos[10] y se

---

[8] Lakatos ejemplifica todos estas estrategias heurísticas de manera insuperable en su *Pruebas y Refutaciones*.

[9] "[el matemático ideal] está convencido de que la diferencia entre una demostración correcta y otra incorrecta es tan decisiva como inconfundible.[...] Pero no es capaz de explicar coherentemente qué es el rigor, ni qué requisitos hacen que una demostración sea rigurosa. En su propia especialidad, la divisoria entre demostraciones completas e incompletas es siempre un tanto borrosa y, con frecuencia, motivo de controversia." (Davis P.J. y R. Hersh, 1989 : pp. 40-41)

[10] "La contrastabilidad en matemáticas descansa sobre el resbaladizo concepto de falsador heurístico. Después de todo un falsador heurístico sólo es falsador en un sentido pickwickiano: dicho falsador no falsea la hipótesis; sólo sugiere una falsación- y las sugerencias pueden ignorarse. El falsador heurístico sólo es una hipótesis rival." I. Lakatos: "¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática?" (Lakatos, 1987 : p. 63).

halla ligado a su teoría de la prueba matemática, la cual también es muy peculiar en cierto sentido y puede aclararnos más lo que Lakatos entiende por falsador heurístico.

Lakatos divide las pruebas matemáticas en tres tipos: Pruebas pre-formales, pruebas formales y pruebas post-formales, sugiriendo así cierta línea temporal en la construcción de estas pruebas por la actividad investigadora matemática:

> (algún fogoso popperiano) dirá que tales nombres son equívocos y que yo pienso realmente que las matemáticas poseen algún patrón necesario, o al menos estándar, de desarrollo histórico-los estadios pre-formales, formales y post-formales-,y asimismo dirá que lo que deseo es inyectar un historicismo funesto en la sólida filosofía de la matemática. Cierto. A lo largo de mi escrito queda claro que es precisamente lo que me gustaría hacer[11].

La clave a descifrar de la teoría de la prueba lakatosiana es precisamente saber en qué consiste una prueba informal (pruebas pre-formales y post-formales). Una prueba informal no es una prueba formal donde no se explicitan las reglas de inferencia y axiomas lógicos en los que se encuentra basada. No se trata de una deducción hipotética en la que se difumina la lógica subyacente (como por ejemplo hacen los estructuralistas de teorías científicas al hablar de teoría informal de conjuntos en la que basan sus axiomatizaciones). Una prueba informal es sólo una especie de "experimento mental" o "muestra intuitiva" de una conjetura matemática más o menos arriesgada. En su *Pruebas y Refutaciones* Lakatos da el mejor ejemplo de prueba informal con una conjetura matemática sobre poliedros como el teorema de Euler-Descartes en la que se afirma que "Vértices-Aristas+Caras=2":

> Paso1: imaginemos que el poliedro está hueco, con una superficie hecha de goma. Si recortamos una de las caras, podemos estirar la superficie restante, poniéndola plana sobre el encerado sin romperla. Las caras y aristas se deformarán, las aristas pueden hacerse curvas, pero V y A no se alterarán, de

[11] Lakatos, 1987: p. 92.

modo que si V-A+C=2 en el poliedro original, en esta red plana tendremos que V-A+C=1 (recuérdese que hemos eliminado una cara). Paso2: triangulemos ahora nuestra red plana, pues se asemeja a un plano geográfico. Trazamos diagonales en esos polígonos que no son ya triángulos. Al dibujar cada una de las diagonales aumentamos tanto A como C en uno, de modo que el total de V-A+C no variará (fig.1). Paso3: eliminamos ahora los triángulos, uno a uno, de la red. Para eliminar un triángulo o eliminamos una arista, con lo que desaparece una cara y una arista (fig.2) o eliminamos dos aristas y un vértice, con lo que eliminamos una cara dos aristas y un vértice (fig.3). Así pues, si antes de la eliminación de un triángulo teníamos que V-A+C=1, después de eliminarlo seguirá siendo así. Al final de este proceso obtendremos un solo triángulo, en cuyo caso V-A+C=1 es verdad. Por tanto, hemos probado nuestra conjetura[12].

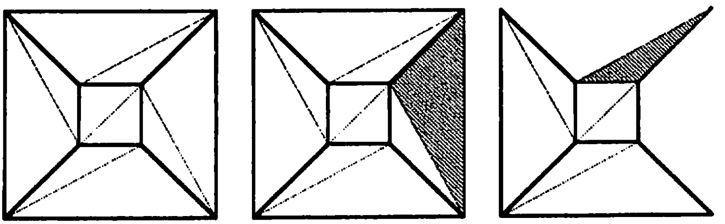

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Esta que hemos presentado es una prueba informal pre-formal. El hecho de distinguir entre tres tipos de pruebas, o mejor, entre tres estadios distintos del desarrollo de la prueba, es debido tan sólo a la manera que Lakatos tiene de presentar la heurística de la matemática. La actividad del matemático trata en primer lugar de formular conjeturas e hipótesis arriesgadas e interesantes que intenta probar mediante pruebas intuitivas como la que hemos visto (pruebas pre-formales). Tanto las conjeturas como las pruebas tienen que ser sometidas luego a contrastaciones, búsqueda de contraejemplos, estructuraciones en teoremas y lemas, análisis de las pruebas...etc. Una vez avanzado este proceso, los matemáticos llegan a obtener una prueba formal de la conjetura convirtiéndola en un teorema e introduciéndola como parte de un sistema establecido. En el

[12] Lakatos, 1986: p. 24.

caso anterior, el teorema geométrico de Euler-Descartes se transformaría en un teorema probado del algebra vectorial[13]. Las pruebas post-formales constituirían un paso más allá en el trabajo del matemático, serían pruebas metamatemáticas tales como las pruebas de decidibilidad de un sistema determinado. De este tipo consideraría Lakatos al teorema de Gödel y ,en el caso anterior, podría ser una prueba metamatemática de decidibilidad sobre le sistema del algebra vectorial axiomatizado, por ejemplo. Este proceso investigador del matemático no se acabaría nunca ya que ninguno de los pasos señalados se puede considerar el último y definitivo. Siempre cabría la posibilidad de que se encontrase algún contraejemplo a las pruebas, sean estas formales, pre-formales o post-formales.

La filosofía de la matemática de Lakatos ha dado lugar a algunos trabajos de interés[14], pero no creemos que, pese a su influencia implícita en otras concepciones[15], haya producido todos los comentarios que merece en cuanto a sus aciertos y lagunas.

3. Comentarios al cuasi-empirismo de Lakatos

El principal defecto del programa cuasi-empirista de Lakatos es que se halla expuesto en un conjunto de artículos y borradores que no dan una visión suficientemente sistematizada de su enfoque y deja numerosos cabos sueltos por atar.

Una importante laguna del cuasi-empirismo es que no llega nunca a establecer una ontología de la matemática, centrándose exclusivamente en problemas de tipo exclusivamente epistemológico. Ello no resulta una estrategia adecuada porque la pregunta por la naturaleza de las entidades matemáticas acaba saliendo a la luz más tarde o más temprano, aunque nuestros principales intereses a la hora de reflexionar sobre la disciplina matemática sean los de responder a cuestiones sobre la dinámica de las teorías matemáticas o sobre los esquemas de decisión racional que condu-

---

[13] Una exposición más detallada de este tema se halla en Lakatos, 1986.

[14] Hallett, M. ,"Towards a theory of mathematical research programmes", *British Journal for the Philosophy of Science* 30: 1-25, 135-159.

[15] Kitcher, 1984.

cen a los matemáticos a escoger unas determinadas demostraciones y desechar otras. Las distintas escuelas de filosofía de la matemática siempre han tratado de responder a la pregunta ontológica de la matemática. Para el formalismo las entidades matemáticas son sólo signos y operaciones físicas con estos según unas reglas del juego. Para logicistas como Frege, las entidades matemáticas son entidades reales pertenecientes a un mundo de ideas al estilo platónico. Los empiristas como Mill consideran a las entidades matemáticas sólo un producto de nuestra actividad mental, meras generalizaciones a partir de nuestras percepciones.

Ilka Niiniluoto[16], aprovechándose de esta laguna, critica la postura del cuasi-empirismo, contrario a una aproximación apriorista y deductivista al conocimiento matemático, desde una perspectiva estructuralista en la que se defiende que la matemática se basa en construir estructuras matemáticas pertenecientes a un Mundo Tres popperiano donde se establecen enunciados cuantitativos acerca de entidades de los otros dos mundos. De esta manera, el problema de la aplicabilidad de la matemática, misterio e incógnita desde una ontología platonista de las matemáticas propia de la defensa del apriorismo y necesidad del conocimiento matemático, se resuelve en la construcción por parte del matemático, a la hora de desarrollar su actividad creadora, de estructuras matemáticas teóricas susceptibles de representar ámbitos de la realidad que puedan ser entendidos como modelos de esas estructuras.

Otro problema del programa cuasi-empirista, ya señalado más arriba, es el de establecer de una manera clara a qué nos referimos al hablar de los falsadores potenciales de una teoría matemática. En realidad, este punto oscuro está relacionado con la poco señalada frontera que parece ser tendida por Lakatos entre las ciencias empíricas y la ciencia cuasi-empírica de la matemática. Delineando una tenue frontera entre ciencias empíricas y cuasi-empíricas, Lakatos afirma:

---

[16] Niiniluoto, 1990.

> Ahora bien, nadie estará dispuesto a sostener que la matemática es empírica en el sentido de que sus falsadores potenciales son enunciados espacio-temporales ingulares[17].

Sin embargo, la defensa del carácter contrastable y falsacionista de toda teoría científica, inclusive las de la matemática, le hace llegar a las siguientes preguntas:

> ¿Cuál es la naturaleza de las matemáticas?[...]¿Habremos de llegar, haciendo remontar los cambios de problemas através de las teorías informales hasta teorías empíricas, de modo que al final resulte que la matemática es indirectamente empírica?[18].

La identificación y difuminación de diferencias entre matemática y resto de ciencias llega a su punto culmen cuando Lakatos dice:

> Pero antes de pasar a Newton, permítaseme subrayar que "V-A+C=2 para todos los poliedros" no es ni más ni menos hecho que "todos los planetas se mueven en elipses"[19].

La diferencia entre la matemática y las restantes ciencias es una diferencia heredada de la concepción tradicional del conocimiento en la que se daba un estatuto preeminente a la matemática frente a las otras ciencias. La matemática era considerada, ya desde el mundo griego, como el paradigma de conocimiento racional, del razonamiento puro frente al falible apoyo de nuestros inseguros sentidos, y esta imagen es la que nos ha sido transmitida a lo largo de la historia hasta las concepciones habituales contemporáneas de esa ciencia. Lakatos es una voz discrepante. Para él es precisamente lo falible de nuestras construcciones teóricas, en la línea Popper, lo que hace a nuestro conocimiento científico válido.

---

[17] Lakatos, 1987: p. 57.
[18] Lakatos, 1987: p. 63.
[19] Lakatos, 1987: p. 137.

Esa duda de Lakatos, a la hora de señalar la naturaleza, común o no, de la matemática y las demás ciencias, es la que hace que Lakatos nunca llegue a dar una respuesta fija al asunto de los falsadores potenciales. Si la matemática y el resto de ciencias poseen todas esquemas falibilistas de funcionamiento y es tan sencillo señalar qué puede ser una instancia falsadora de una teoría empírica, ¿por qué resulta tan difícil explicar lo mismo en matemática?, ¿por qué resulta tan resbaladizo el concepto de falsador heurístico en matemática? (véase cita más arriba). Como señalan P.J.Davis y R.Hersh implícitamente, el problema vuelve a ser la laguna ontológica:

> Para que las matemáticas informales puedan hallarse a la par de la ciencia natural hemos de localizar sus "objetos". ¿Cuáles son los datos, los enunciados básicos de esta materia, capaces de suministrar los falsadores potenciales a las teorías matemáticas informales que sean propuestas?. Esta cuestión no es planteada siquiera en *Pruebas y Refutaciones*, a pesar de ser la principal de las cuestiones que hemos de tratar si deseamos proseguir en la construcción de una epistemología de las matemáticas que sea falibilista, o no dogmática[20].

No se puede hablar más claro: sin postura ontológica acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas no podemos saber qué son los "hechos" con los que la matemática trabaja y si estos son de la misma naturaleza que aquellos con los que operan las ciencias naturales.

No obstante, lo más acertado del esquema cuasi-empírico de Lakatos es que ha sabido dar un punto de vista distinto del de las escuelas fundacionistas, imperantes en filosofía de la matemática desde Frege con su visión esclerotizada de la ciencia. Respecto de la matemática, ha sabido dar un modelo distinto de entender la matemática y responder a las preguntas por nuestro "corpus" de conocimiento matemático de una manera distinta, algo que tendríamos que aprovechar.

---

[20] P. J. Davis y R. Hersh, 1989: p. 254.

4. Hacia una concepción empírica de la matemática

La concepción clásica de la matemática, recogida en las escuelas fundamentistas con ciertas diferencias, defiende la existencia de dos características fundamentales de la ciencia matemática que la vienen a diferenciar del resto de ciencias como una ciencia no empírica: a) La certeza y necesidad de sus afirmaciones y b) La deducción, como único esquema de razonamiento.

> La característica más fundamental que diferencia la matemática de las distintas ramas de la ciencia empírica y que da razón de su fama como reina de las ciencias es sin duda la peculiar certeza y necesidad de sus resultados.
>
> Este carácter puramente deductivo de la demostración matemática constituye la base de la certeza matemática[21].

En definitiva, estas caraterísticas conducen a establecer el carácter "a priori" y analítico de la matemática. Si tenemos en cuenta que la combinación analítico "a posteriori" es imposible y abandonamos toda posible concepción empirista de la matemática que nos conduzca a sostener el carácter "a posteriori" de la matemática, sólo nos restaría adoptar bien una postura intuicionista de estilo kantiano donde el conocimiento matemático posee una naturaleza sintética "a priori", bien un enfoque en el que la matemática se considere una ciencia analítica "a priori"[22].

Vamos a dejar aparte las dificultades del intuicionismo, cuyo principal problema, entre otros, es el de establecer qué entendemos por esa oscura

---

[21] Hempel, C. , "La geometría y la ciencia empírica" en: Newman, 1969, vol. 5.

[22] Este razonamiento eliminatorio es el que utiliza Frege en sus *Fundamentos de la Aritmética* para terminar adoptando respecto a la aritmética su particular postura logicista.

Frege, no obstante, admitía el carácter sintético de los enunciados de la geometría. El que nosotros hablemos siempre de matemática en general puede resultar a veces demasiado simplificado. Desde luego, ramas de la matemática como la geometría a menudo han gozado de una concepción distinta (sintética) de la del resto del "corpus" matemático.

noción de intuición[23], y que ha tenido como principal antecesor y representante a Kant. El intuicionismo contemporáneo también ha recogido parte de sus puntos de vista, aunque ambos han tenido una dificultad similar al tratar de dar cuenta del "corpus" de conocimiento de la matemática y la lógica. Nosotros nos centraremos en poner de manifiesto los problemas de la perspectiva analítica "a priori", que representa una de las posiciones más clásicas en filosofía de la matemática desde Leibniz.

Podríamos describir dos problemas básicos engendrados por las concepciones de la matemática como ciencia analítica y "a priori" a los que podemos llamar:

1. *El problema del origen* del conocimiento matemático, toda vez que ha sido rechazada la posibilidad de un origen en la experiencia sensible

> Así, las ideas que están ahora en la mente de los matemáticos contemporáneos están muy lejos de cualquier noción que pueda derivarse inmediatamente de la percepción de los sentidos, a menos de ser una percepción estimulada y guiada por un conocimiento matemático anterior[24].

> Como ya se ha mencionado, el estilo deductivista desgaja las definiciones generadas por la prueba de sus "pruebas antepasadas" y las presenta aisladamente de un modoartificial y autoritario. Oculta los contraejemplos globales que han llevado a su descubrimiento[25].

> ¿Cuál es el origen de estos postulados, indiscutiblemente ciertos y sin embargo incapaces de serprobados, en una ciencia donde lo demás es conclusión

[23] P. Kitcher subraya explícitamente esta dificultad del enfoque intuicionista como defensor del apriorismo en matemáticas: "The apriorist can either take a bold line, identifying intuition with some process which we recognize as occurring in our mental life, or he can leave intuition as a process characterized by its role in giving us mathematical knowledge.[...]Yet it would not do to retreat into vagueness, for our acknowledged ignorance of the character of the process is itself a handicap to its functioning as an apriori warrant." (Kitcher, 1984: p. 64).

[24] Whitehead, A. ,"La matemática como elemento en la historia del pensamiento" en: Newman, 1969, vol. 1.

[25] Lakatos, 1986: p. 168.

razonada? ¿ha sido heredada la fuente divina de nuestra razón como piensan los filósofos idealistas, o es simplemente que la ingeniosidad de los matemáticos no ha sido hasta el momento bastante aguda para encontrar la prueba?[26].

Los conceptos fundamentales de Frege o los axiomas de un sistema formalizado de Hilbert, al adquirir las peculiaridades de aprioridad y analiticidad, pierden toda justificación de su origen y se erigen ellos mismos en justificadores del resto del conocimiento matemático. ¿Por qué han de ser necesarios esos axiomas y conceptos y no otros?, ¿acaso por su autoevidencia?, ¿qué es lo que nos hace concebirlos como autoevidentes?, ¿acaso la historia de la matemática no nos prueba que, como en las otras ciencias, ha habido cambios de conceptos y de principios también en la matemática?[27].

2. *El problema de la aplicabilidad* de la matemática. Parece difícil justificar el éxito de la aplicación de la matemática, incluso de aquellas ramas que puedan resultar más abstractas y puras, si el conocimiento matemático se haya deducido a partir de unos fundamentos analíticos y "a priori" separados de la realidad empírica. Si separamos totalmente la actividad del matemático de la realidad empírica, convirtiéndola en un ejercicio de la razón pura, ¿qué nos garantizará entonces la efectiva conexión de la matemática en su aplicación a esa realidad?. La distinción entre matemática pura y matemática aplicada, tan extendida en las distintas reflexiones sobre la naturaleza de la matemática, puede ser considerada una consecuencia o intento de explicación de este problema. Pero esta distinción entre la actividad del auténtico matemático constructor de abstracciones perfectamente enlazadas y la actividad del "pseudomatemático" aplicado preocupado en buscar en el almacén de la matemática los modelos que utilizar en la descripción del mundo resulta injusta con una gran parte de las ramas de la matemática y deja a medio explicar el problema.

---

[26] Helmholtz, H. Von, "Los axiomas geométricos" en: Newman, 1969, vol. 5.

[27] Una posición deductivista de la matemática que defienda una concepción axiomática de la misma no tiene por qué defender obligatoriamente la autoevidencia de los axiomas que acepte. No obstante, Lakatos suele presentar el esquema deductivista euclídeo con esta peculiaridad (véase apartado II de este artículo).

> No estoy pensando en las consecuencias prácticas de las matemáticas. Tengo que volver sobre este punto; ahora sólo quiero decir que si un problema de ajedrez es "inútil", en el crudo sentido de la palabra, entonces lo mismo sucede para la mayoría de las mejores matemáticas, que muy pocas matemáticas son prácticamente útiles y que estas pocas son, relativamente, estúpidas[28].

> la geometría así construida es una disciplina puramente formal; la llamaremos, por tanto, geometría pura. Así pues una geometría pura no trata de ningún tema específico; en particular no afirma nada acerca del espacio físico. Todos sus teoremas son analíticos, y por tanto verdaderos con certeza precisamente porque carecen de todo contenido fáctico.[...]A la vista de la situación podemos decir que la geometría física se obtiene mediante lo que en la lógica contemporánea se llama interpretación semántica de la geometría pura[29].

Habiendo observado los callejones sin salida y los problemas que conllevan las posturas filosóficas que han impuesto su dominio en la reflexión sobre la matemática en los últimos tiempos, parece adecuado intentar adoptar nuevas perspectivas y líneas de pensamiento siguiendo el ejemplo de Lakatos en lo que respecta a este campo de la filosofía de la ciencia. Intentar recuperar una postura empirista ingenua al estilo del decimonónico J. S. Mill no resultaría una estrategia adecuada, sin embargo sí que se puede tratar de defender un empirismo más elaborado.

El primer punto clave se encuentra en tratar de echar abajo el viejo mito de la preeminencia de la matemática como paradigma de conocimiento racional. Nuestro conocimiento es un "corpus" único sometido a la experiencia, en el que no cabe delimitar regiones inmunes a la misma. No cabe la posibilidad de dar un rango de excelencia distinto a unos enunciados de dicho "corpus" sobre otros. Todos ellos tienen el mismo rango y sus diferencias son tan sólo de grado[30]. La matemática no es una disciplina científica excelente sobre las demás. ni hace falta buscarle peculiaridades o características específicas que justifiquen esa excelencia. Solamente

---

[28] Hardy, G. H., "Apología de un matemático", en: Newman, 1969, vol. 5.
[29] Hempel, C. ,"Geometría y ciencia empírica", ibid.
[30] Véase el clásico artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo".

es una parte más del conjunto total de nuestro conocimiento, una parte más de la ciencia. Por consiguiente, la matemática tendría que seguir las líneas de desarrollo y características de cualquier otra disciplina científica y los fundamentos que rigen nuestra adquisición de conocimiento, de cuyo estudio y reflexión se ocupa la epistemología.

No existe una diferencia entre ciencias empíricas y ciencias no empíricas o formales o como se las quiera llamar. Por ello, partiendo de una epistemología empirista adecuada, el intentar construir una concepción epistemológica empirista de la matemática es una posibilidad válida y una nueva dirección dentro de la propia filosofía de la matemática[31], sin desestimar otras líneas posibles.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Davis, P.J. y R. Hersh (1972), *Experiencia Matemática*, Barcelona: Labor, 1989.

Frege, G. (1891), *Fundamentos de la Aritmética*, Barcelona: Laia, 1972.

Hardy, G.H. , "Apología del matemático" en J.R. Newman (ed.), *Sigma, el Mundo de las Matemáticas*, vol. 5, México: Grijalbo, 1969.

Hempel, C.G. , "Sobre la naturaleza de la verdad matemática" en: J.R. Newman (ed.), *Sigma, el Mundo de la Matemáticas*, vol. 5, México: Grijalbo, 1969.

Hempel, C.G. , "La geometría y la ciencia empírica" en: J.R. Newman (ed.), *Sigma, el Mundo de las Matemáticas*, vol. 5 , México: Grijalbo, 1969.

Kitcher, P. (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Nueva York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976), *Pruebas y Refutaciones*, Madrid: Alianza, 1986.

Lakatos, I. (1978),*Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, Madrid: Alianza, 1987.

Lakatos, I. ,"La crítica y la metodología de los programas científicos de investigación", Valencia: Cuadernos Teorema, 1981.

---

[31] Intentos más o menos cercanos han venido fraguándose en la última década, ejemplos sobresalientes por su riqueza entre los mismos son los de Philip Kitcher (véanse referencias) o Goodman, N. , "Mathematics as an objective science" en: Tymoczcko, T. (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston: Birkhaüser, 1986.

Latour, B., *Ciencia en Acción*, Barcelona: Labor, 1992.

Moulines, U. (1982),*Exploraciones Metacientíficas*, Madrid: Alianza.

Niiniluoto, I. (1990), "Reality,truth and confirmation in mathematics: reflections on the quasi-empiricist programme", San Sebastián: Actas del I Congreso Internacional en Estructuras Matemáticas.

Polya, G. , "Cómo resolverlo" en: J. Von Newmann (ed.), *Sigma, el MUndo de las Matemáticas*, vol. 5, México: Grijalbo, 1969.

Popper, C. (1972), *Conocimiento Objetivo*, Madrid: Tecnos, 1988.

Putnam, H. (1967), "Mathematics without foundations", *The Journal of Philosophy* 64: 5-22.

Quine, W.V.O. , "Dos dogmas del empirismo" en: Quine, W.V.O. (1953), *Desde un Punto de Vista Lógico*, Barcelona: Orbis, 1984.

Stegmüller, W. ,*La Concepción Estructuralista de las Teorías*, Madrid: Alianza 1981.

Stegmüller, W. ,*Estructura y Dinámica de Teorías*, Barcelona: Ariel 1983.

Suppe, F. , *La Estructura de las Teorías Científicas*, Madrid: Editora Nacional, 1979.

Whitehead, A.N. , "La matemática como elemento en la historia del pensamiento" en: J.R. Newman (ed.), *Sigma, el Mundo de las Matemáticas*, vol 1. , México: Grijalbo, 1969.