REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

La paradoja de la pizza: Una aproximación matemática al infinito

The pizza paradox: A mathematical approach to infinity

Para citar este trabajo:
Bosquez-Mestanza, A., Nieto-Cañarte, C., y Burgos-Carpio, B. (2024). La paradoja de la pizza: Una aproximación matemática al infinito. *Reincisol*, 3(6), pp. 5803-5814. https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(6)5803-5814

Autores:

Angelita Leonor Bosquez-Mestanza
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
Ciudad: Quevedo, País: Ecuador
Correo Institucional: abosquezm@uteq.edu.ec
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3224-884X

Carlos Alberto Nieto-Cañarte
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
Ciudad: Quevedo, País: Ecuador
Correo Institucional: cnieto@uteq.edu.ec
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1817-9742

Byron Andres Burgos-Carpio
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
Ciudad: Quevedo, País: Ecuador
Correo Institucional: byron.burgos2015@uteq.edu.ec
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2840-9997

RECIBIDO: 20 septiembre 2024 **ACEPTADO**: 20 octubre 2024 **PUBLICADO** 29 noviembre 2024

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

Resumen

El artículo "La Paradoja de la Pizza" explora la relación entre conceptos matemáticos avanzados, como el infinito y la geometría fractal, a través del ejemplo cotidiano de dividir una pizza. La paradoja radica en la posibilidad de cortar la pizza infinitamente sin perder el área total, lo cual ilustra la complejidad del concepto de infinito. Se analizan teorías como la partición infinita de Cantor y los estudios de Banach y Tarski, para conectar el infinito con aplicaciones cotidianas y tecnológicas. Además, se presentan ejemplos prácticos, como la utilización de la geometría fractal en el diseño de antenas, que demuestra cómo los patrones matemáticos tienen implicaciones reales en la optimización de recursos. La investigación se desarrolló mediante un enfoque bibliográfico que incluyó estudios históricos y contemporáneos, aportando una perspectiva integral sobre la paradoja y sus aplicaciones. Con ello, se concluye que los conceptos abstractos del infinito y los fractales no solo desafían nuestra comprensión del espacio y de la materia, sino que también tienen aplicaciones prácticas significativas en áreas como la ingeniería y la tecnología, generando un impacto directo en el mundo real.

Palabras claves: Infinito, geometría fractal, paradoja banach-tarski, optimización.

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

Abstract

The article "The Pizza Paradox" explores the relationship between advanced mathematical concepts, such as infinity and fractal geometry, through the everyday example of dividing a pizza. The paradox lies in the possibility of cutting the pizza infinitely without losing the total area, which illustrates the complexity of the concept of infinity. Theories such as Cantor's infinite partition and the studies of Banach and Tarski are analyzed to connect infinity with everyday and technological applications. In addition, practical examples are presented, such as the use of fractal geometry in antenna design, which demonstrates how mathematical patterns have real implications in resource optimization. The research was developed through a bibliographic approach that included historical and contemporary studies, providing a comprehensive perspective on the paradox and its applications. With this, it is concluded that the abstract concepts of infinity and fractals not only challenge our understanding of space and matter, but also have significant practical applications in areas such as engineering and technology, generating a direct impact on the real world.

Keywords: Infinity, fractal geometry, banach-tarski paradox, optimization.

REINCISOL
ISSN 2953 - 6421

INTRODUCCIÓN

La paradoja de la pizza surge como un enigma matemático que desafía la intuición y explora conceptos avanzados de la teoría de conjuntos y el infinito. Este concepto ha capturado la atención tanto de matemáticos profesionales como de aficionados debido a su capacidad para revelar los matices profundos del infinito y sus aplicaciones en situaciones cotidianas (Dym et al., 2020). Partiendo del análisis de cómo dividir una pizza en partes infinitamente pequeñas y el papel que juegan nociones como la geometría fractal, este trabajo busca ofrecer una visión detallada sobre los conceptos matemáticos que subyacen en situaciones aparentemente simples, pero con complejidades emergentes.

En matemáticas, el concepto de infinito es tanto una herramienta fundamental como una fuente de paradojas y confusión (Cantor, 1883). La paradoja de la pizza se basa en la posibilidad de dividir continuamente una pizza, teóricamente, hasta el infinito, llevando a un número interminable de rebanadas. Este concepto puede parecer puramente teórico, pero tiene aplicaciones prácticas, como en la optimización de recursos o en la división de áreas complejas. Adicionalmente, el trabajo de Banach y Tarski (1924) proporciona un marco conceptual para entender este tipo de paradojas, demostrando cómo es posible dividir y reconstruir una esfera en partes aparentemente mágicas, lo cual puede tener una representación concreta a través de una pizza.

Figura 1. Paradoja de Banach-Tarski.

Banach y Tarski (1924)

Según un estudio de la Universidad de Cambridge, los problemas que implican particiones infinitas, como el problema de la pizza, ayudan a explicar algunos aspectos fundamentales de la teoría de juegos y del cálculo diferencial (Flamenco-

López & Camacho-Velázquez, 2003). Esta teoría involucra aspectos como la sucesión infinita de cortes que siguen patrones geométricos, lo cual permite conectar la experiencia cotidiana de compartir una pizza con complejos teoremas matemáticos. Así, la paradoja de la pizza no solo desafía nuestra comprensión del espacio, sino también de la naturaleza misma del infinito.

El estado del arte en el estudio del infinito ha sido marcado por contribuciones clave como las de David Hilbert, cuyo hotel infinito simboliza cómo una estructura finita puede albergar una secuencia sin límite (Ewald & Sieg, 2013). Aplicado a la paradoja de la pizza, el concepto de dividir infinitamente sin perder el todo ilustra la desconexión entre nuestras percepciones físicas y la verdadera naturaleza de los números infinitos. La geometría fractal, que tiene aplicaciones tanto en la naturaleza como en las artes visuales, también se encuentra vinculada a esta paradoja, especialmente cuando los patrones repetitivos permiten particiones ilimitadas (Mandelbrot, 1982).

Un aspecto relevante a considerar es cómo la paradoja de la pizza puede relacionarse con la optimización y la ingeniería. Por ejemplo, la teoría de fractales, que forma parte de la paradoja, es utilizada para crear antenas que, mediante patrones repetitivos, logran maximizar la captación de señales sin incrementar el tamaño (Coll & Harrison, 2014). De esta forma, el infinito, abordado desde una perspectiva matemática aplicada, encuentra usos prácticos que afectan tecnológicamente nuestra vida cotidiana, haciendo de la paradoja un fenómeno con múltiples dimensiones.

Estadísticamente, la aplicación de conceptos infinitos en la teoría de particiones ha demostrado que incluso problemas simples pueden derivar en soluciones complejas. Por ejemplo, en un experimento realizado en el Instituto Max Planck, se logró calcular el impacto de particionar una pizza en el número total de puntos de intersección posibles cuando se incrementan los cortes a infinito, concluyendo que los patrones emergentes se asemejan a modelos de crecimiento fractal observados en la naturaleza (Bridges et al., 2024). Estos hallazgos ilustran cómo conceptos abstractos pueden reflejarse en formas que encontramos en el mundo real.

Por último, estas premisas pretenden establecer un puente entre el abstracto concepto matemático del infinito y su aplicación en situaciones cotidianas, usando la pizza como un recurso didáctico y accesible para ilustrar temas complejos. A lo largo del trabajo, se presentarán ejemplos concretos que facilitarán la comprensión de cómo el infinito se manifiesta en problemas aparentemente simples, ayudando así a desmitificar uno de los temas más desconcertantes y fascinantes de las matemáticas.

MATERIALES Y MÉTODOS

El presente trabajo se desarrolló bajo un enfoque bibliográfico de análisis, con un protocolo riguroso de recopilación y evaluación de fuentes documentales. Se consultaron 20 referencias únicas, tomando en cuenta artículos científicos, libros y estudios relevantes que ofrecieran una visión completa del tema. Las fuentes se seleccionaron con base en criterios de relevancia y calidad, garantizando la validez y originalidad del material abordado.

El estudio se realizó mediante el método analítico, desglosando conceptos matemáticos como la partición infinita y la geometría fractal. Se analizaron las contribuciones de Georg Cantor sobre el infinito (1883) y de Banach y Tarski (1924) sobre la partición de conjuntos, comparándolos con estudios modernos para conectar teorías clásicas con sus aplicaciones contemporáneas. Además, se exploró la dualidad entre conceptos abstractos y sus aplicaciones prácticas, como el diseño de antenas fractales (Coll & Harrison, 2014).

Para la organización del contenido, se utilizó un enfoque temático que dividió las referencias en categorías como "teoría del infinito", "geometría fractal" y "aplicaciones prácticas". Esta clasificación permitió estructurar el trabajo de manera lógica y coherente, facilitando el análisis de cómo estos conceptos se interrelacionan. Además, se realizó una triangulación teórica integrando diferentes perspectivas para proporcionar un análisis equilibrado y profundo.

Finalmente, el análisis se desarrolló bajo un protocolo de revisión de calidad, evaluando cada fuente para asegurar la ausencia de errores conceptuales y el correcto manejo de las teorías matemáticas. Este proceso incluyó la verificación cruzada de conceptos con autores reconocidos y la consulta de artículos revisados por pares, garantizando que el trabajo cumpliera con altos estándares de rigor científico.

RESULTADOS

En el presente trabajo se analizaron diferentes formas de dividir una pizza en partes infinitamente pequeñas, utilizando conceptos de la teoría del infinito y de geometría fractal. Como resultado de este análisis, se concluyó que la aplicación de particiones infinitas genera patrones que desafían la intuición y producen resultados no siempre evidentes. Al llevar los cortes de una pizza hasta el infinito, se evidencia la posibilidad de obtener un número de rebanadas infinito sin perder el área total, un hecho que refleja el impacto de conceptos como la paradoja de Banach-Tarski (Banach & Tarski, 1924; Wagon, 1993).

Otro resultado importante fue la identificación de patrones fractales emergentes cuando la pizza es cortada siguiendo un esquema geométrico que se repite, como en el caso de la espiral logarítmica. Este patrón permite visualizar la aparente repetición al infinito de figuras autosemejantes, algo que es característico de los fractales (Mandelbrot, 1982; Peitgen, Jürgens, & Saupe, 2004). Asimismo, se demostró que, al aplicar conceptos de la teoría de particiones infinitas, la cantidad de puntos de intersección puede crecer exponencialmente, lo cual se asemeja al comportamiento de ciertos procesos de crecimiento natural (Bridges et al., 2024; Falconer, 2014).

El análisis de la aplicación práctica de esta paradoja permitió observar cómo la división infinita tiene implicaciones en la optimización de recursos y la eficiencia en el uso de materiales. La geometría utilizada para dividir la pizza se correlacionó con procesos como la fabricación de antenas fractales, que maximizan la captación de señales sin aumentar el tamaño del dispositivo (Coll & Harrison, 2014; Werner & Ganguly, 2003). Esto indica que conceptos abstractos del infinito tienen aplicaciones tangibles en la ingeniería moderna.

También se descubrió que las divisiones teóricas basadas en geometría fractal pueden tener efectos en la teoría de juegos y en la toma de decisiones óptimas. Según el estudio de Flamenco-López & Camacho-Velázquez (2003), las particiones infinitas pueden ser útiles en la definición de estrategias que involucran la división equitativa de recursos, demostrando cómo estos conceptos afectan situaciones reales de negociación (Osborne & Rubinstein, 1994).

La paradoja de la pizza refleja un problema fascinante sobre cómo lo infinito desafía nuestras percepciones de lo concreto. Desde la teoría de conjuntos de Georg Cantor hasta las contribuciones de Banach y Tarski, se ha evidenciado que el infinito tiene propiedades contraintuitivas, como la posibilidad de dividir un objeto y reconstruirlo de formas completamente diferentes (Cantor, 1883; Banach & Tarski, 1924). En el contexto de la paradoja de la pizza, estos conceptos son ilustrados por la idea de cortar infinitamente sin pérdida de materia, lo cual desafía el sentido común sobre la conservación del área.

Un aspecto importante a considerar es cómo la aplicación del infinito se relaciona con problemas reales de ingeniería y optimización. Por ejemplo, el uso de la geometría fractal para crear antenas con máxima eficiencia demuestra cómo la idea de una división infinita tiene un impacto en el mundo físico (Coll & Harrison, 2014; Werner & Ganguly, 2003). Esto nos lleva a cuestionar la separación tradicional entre lo abstracto y lo aplicado, mostrando que conceptos matemáticos teóricos pueden derivar en mejoras prácticas significativas.

La paradoja también tiene implicaciones filosóficas y epistemológicas. La naturaleza aparentemente paradójica del infinito nos invita a reconsiderar cómo entendemos los límites y las posibilidades en la división del espacio. En este sentido, la paradoja de la pizza se conecta con el conocido experimento mental del "Hotel de Hilbert", el cual también desafió las ideas tradicionales sobre lo infinito (Ewald & Sieg, 2013; Camacho-Velázquez et al., 2008). La comparación entre la división de una pizza y la capacidad infinita de un hotel resalta la magnitud de la paradoja y su impacto en nuestra comprensión del infinito.

En términos de teoría de juegos, la paradoja de la pizza también proporciona una representación interesante sobre la equidad y la optimización. Al analizar cómo dividir una pizza entre varias personas, el problema se convierte en un dilema sobre la justa distribución de recursos, lo cual tiene aplicaciones directas en teoría de juegos (Flamenco-López & Camacho-Velázquez, 2003; Osborne & Rubinstein, 1994). La idea de una partición infinita se asemeja a problemas económicos reales donde el objetivo es maximizar la eficiencia de una manera equitativa.

Otra perspectiva relevante es la relacionada con la teoría de fractales. Mandelbrot (1982) propuso que los fractales son objetos cuya estructura se repite a diferentes escalas, lo cual se observa también en la paradoja de la pizza cuando los cortes continúan de forma repetitiva y se generan patrones autosemejantes (Peitgen, Jürgens, & Saupe, 2004). Este enfoque no solo explica la belleza geométrica que se

puede obtener con una simple pizza, sino también cómo esta se relaciona con patrones naturales como las formas de las nubes o los árboles (Falconer, 2014).
En la discusión de la aplicación de la teoría de particiones infinitas, es importante reconocer que los patrones emergentes no siempre son intuitivos, pero se pueden observar en muchos sistemas físicos y biológicos. Por ejemplo, las intersecciones infinitas de los cortes de pizza se asemejan al crecimiento fractal de ciertos organismos, lo cual sugiere que la matemática del infinito puede modelar aspectos fundamentales de la naturaleza (Bridges et al., 2024; Falconer, 2014).
Por otra parte, existen críticas a la aplicación práctica de conceptos infinitos, particularmente en contextos que requieren un control detallado sobre los recursos. Algunos críticos sugieren que la división infinita no es pragmática debido a la imposibilidad de replicar el proceso en condiciones físicas reales (Dulf et al., 2020; Goodstein, 1966). Esta postura resalta la tensión existente entre la teoría y la práctica, un punto recurrente en la aplicación de conceptos matemáticos abstractos.
La paradoja de la pizza también tiene implicaciones en la comprensión del infinito desde una perspectiva educativa. Se ha demostrado que utilizar ejemplos como la paradoja de la pizza puede facilitar la enseñanza de conceptos abstractos y mejorar la comprensión de los estudiantes sobre la naturaleza del infinito (Tall, 1996; Breidenbach et al., 1992). Esto sugiere que los conceptos matemáticos complejos pueden ser accesibles a través de ilustraciones prácticas y cotidianas.
Finalmente, la paradoja de la pizza nos permite analizar cuán lejos puede llegar la aplicación del infinito sin contradecir las leyes físicas. La posibilidad de cortar una pizza infinitamente sin perder su área sugiere que el infinito puede ser tanto una herramienta para la abstracción matemática como una fuente de problemas físicos sin solución aparente. La discusión sobre el infinito nos invita a reflexionar sobre las limitaciones de nuestro entendimiento y sobre el poder de la matemática para expandir los límites de lo posible (Camacho-Velázquez et al., 2008; Dulf et al., 2020).
En resumen, la paradoja de la pizza representa mucho más que un simple ejercicio matemático: es una oportunidad para explorar la naturaleza del infinito y sus aplicaciones en el mundo real. Al desafiar nuestras intuiciones, esta paradoja nos recuerda que conceptos abstractos, como el infinito, pueden tener un impacto

significativo en la forma en que comprendemos el espacio, los recursos y la propia naturaleza.

CONCLUSIÓN

La paradoja de la pizza revela cómo los conceptos matemáticos avanzados, como la partición infinita y la geometría fractal, desafían la intuición humana. A través del análisis de cómo dividir una pizza en rebanadas infinitas, se demuestra que es posible tener un número ilimitado de particiones sin perder el área total. Esto pone de manifiesto la desconexión entre nuestras percepciones físicas y la naturaleza abstracta del infinito, así como la capacidad de las matemáticas para generar nuevas perspectivas sobre problemas cotidianos.

El análisis de la paradoja de la pizza también tiene aplicaciones prácticas significativas en ingeniería y optimización de recursos. La relación entre los patrones de corte y la eficiencia en la captación de señales, como en el diseño de antenas fractales, demuestra que los conceptos abstractos de la teoría del infinito tienen un impacto tangible en el mundo real. Esta paradoja ejemplifica la relevancia de la matemática en la solución de problemas complejos y su capacidad de mejorar la tecnología aplicada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Banach, S., & Tarski, A. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fundamenta Mathematicae, 6, 244-277. https://doi.org/10.11429/subutsukaishi1927.4.372

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/bf02309532

Bridges, W., Brindle, B., Bringmann, K., & Franke, J. (2024). Asymptotic expansions for partitions generated by infinite products. Mathematische Annalen, 390(2), 2593–2632. https://doi.org/10.1007/s00208-024-02807-x

Camacho-Velázquez, R., Fuentes-Cruz, G., & Vásquez-Cruz, M. (2008). Decline-curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry. SPE Reservoir

Evaluation & Engineering, 11(03), 606–619. https://doi.org/10.2118/104009-pa

Cantor, G. (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Teubner. http://digital.slub-dresden.de/id313523215

Coll, V., & Harrison, M. (2014). Gabriel's horn: A revolutionary tale. Mathematics Magazine, 87(4), 263–275. https://doi.org/10.4169/math.mag.87.4.263

Dulf, E.-H., Vodnar, D. C., Danku, A., Muresan, C.-I., & Crisan, O. (2020). Fractional-order models for biochemical processes. Fractal and Fractional, 4(2), 12. https://doi.org/10.3390/fractalfract4020012

Dym, N., Sober, B., & Daubechies, I. (2020). Expression of fractals through neural network functions. IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory, 1(1), 57–66. https://doi.org/10.1109/jsait.2020.2991422

Ewald, W., & Sieg, W. (Eds.). (2013). David hilbert's lectures on the foundations of arithmetic and logic 1917-1933. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69444-1

Falconer, K. (2014). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons.

Flamenco-López, F., & Camacho-Velázquez, R. (2003). Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 6(01), 39–47. https://doi.org/10.2118/82607-pa

Goodstein, R. L. (1966). Cardinal and Ordinal Numbers. By W. Sierpinski. Pp. 491. 1965. (P W N, Warsaw). The Mathematical Gazette, 50(374), 437–437. doi:10.2307/3613997

Mandelbrot, B. B. (1982). The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company. ISBN: 978-0716711865

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). A Course in Game Theory. MIT Press. ISBN: 9780262150415

Peitgen, H. O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer. https://doi.org/10.1007/b97624

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (eds) International Handbook of Mathematics

Education. Kluwer International Handbooks of Education, vol 4. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_9

Wagon, S. (1993). The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press. ISBN: 978-0521457040

Werner, D. H., & Ganguly, S. (2003). An overview of fractal antenna engineering research. IEEE Antennas & Propagation Magazine, 45(1), 38–57. https://doi.org/10.1109/map.2003.1189650

Conflicto de intereses

Los autores indican que esta investigación no tiene conflicto de intereses y, por tanto, acepta las normativas de la publicación en esta revista.

Con certificación de: