UNA POSIBLE AXIOMATIZACIÓN FINITA DE LÓGICA POLIVALENTE

ANTONIO GONZÁLEZ CARLOMÁN

RESUMEN

En 1976 Wronski demostró que era imposible desarrollar una axiomática finita de Lógica polivalente para 6 valores. En 1977 Urquhart demostró la misma imposibilidad para 5 valores. En este trabajo resumimos el desarrollo de una axiomática finita de Lógica polivalente para cualquier número de valores (incluso para infinitos valores), pero sobre parejas ordenadas de fórmulas. No podemos garantizar su completitud, pero sí garantizamos una máxima aproximación a ella.

ABSTRACT

In 1976 Wronski proved that it was impossible to develop a finite axiomatic of the many valued logic for 6 values. In 1977 Urquhart proved the same impossibility for 5 values. In this work we summarise the development of a finite axiomatic of the many valued logic for any number of values (even for infinite values) but about couples of formulas. We can't guarantee it to be complete, but we can guarantee a maximum approximation to it.

INTRODUCCIÓN

Alasdair Urquhart publicó el trabajo «Many Valued Logic» en D. Gabbay-F. Guenthner (eds.), «Handbook of Philosophical Logic», vol. III, pp. 71-116. Reidel, Dardrech, 1986, donde indica que, en 1976, Wronski demostró la imposibilidad de desarrollar una axiomática finita de lógica polivalente para 6 valores, y donde Urquhar demostró la misma imposibilidad para 5 valores.

En estos momentos es importante encontrar una salida a la imposibilidad de la axiomatización finita de lógica polivalente para 7 valores ya que, si se encuentra, podríamos construir un ordenador que utilizase lógica difusa: se podrían dar, respectivamente, los cinco valores $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}$ y $\frac{5}{6}$ a los cuantificadores difusos «muy poco», «poco», «bastante», «mucho» y «muchísimo», y agregarle posteriormente los dos valores teóricos $\frac{0}{6}$ (0) y $\frac{6}{6}$ (1).

Evidentemente, la imposibilidad de axiomatización finita de lógica polivalente demostrada por Wronski y Urquhar se refiere a la axiomatización finita de proposiciones representadas por fórmulas; sin embargo, en este trabajo, pretendemos dar una salida a esta imposibilidad, proponiendo una axiomatización finita de parejas ordenadas de fórmulas. Además, esta axiomatización finita es válida para cualquier número discreto de valores racionales $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, en que $n \in N^*$, e incluso para valores continuos pertenecientes al intervalo [0,1].

I. BREVE EXPOSICIÓN DE LA PRIMERA PARTE DEL TRABAJO

1. Términos, variables y signos lógicos

a) Términos sujetos

Llamamos términos sujetos a la sucesión de infinitos signos $s_{n \in N^*}$ (s_1, s_2, s_3, ...).

Utilizamos los términos sujetos para dar nombre a los distintos elementos de un colectivo U al que llamamos universo del discurso.

b) Términos predicados

Llamamos términos predicados a la sucesión doble de infinitos signos $p_{n,m \in N^*}$.

$p_{11}, p_{12}, p_{13}\ldots$ (términos predicados unitarios)
$p_{21}, p_{22}, p_{23}\ldots$ (términos predicados binarios)
$p_{31}, p_{32}, p_{33}\ldots$ (términos predicados ternarios)
....

Utilizamos los términos predicados enearios para dar nombre a los distintos conjuntos formados con enepletes ordenados de elementos del universo del discurso U.

Utilizamos también el signo «=» (igual) como un término predicado binario especial con el que damos nombre al conjunto diagonal de U.

c) Variables sujetos

Llamamos variables sujetos a la sucesión de infinitos signos $x_{n \in N^*}$ (x_1, x_2, x_3...).

Utilizaremos las variables sujetos para reservar sitios en las fórmulas lógicas, que a continuación definiremos, que serán ocupados por elementos del universo del discurso U; pero a los que nunca darán nombre.

d) Signos lógicos

Llamamos signos lógicos a los signos $\neg$, $\vee$, $\forall$ a los que damos respectivamente los nombres de negación, disyunción y cuantificación universal.

2. Fórmulas lógicas

Llamamos fórmulas lógicas a las construidas siguiendo solamente los siguientes pasos:

1. Siendo n, $m \in N^*$ y representando a_1, a_2, ...a_n indistintamente a términos sujetos o a variables sujetos; $p_{n,m}a_1a_2...a_n$ es una fórmula lógica.

En el caso de representar a_1, a_2, ...a_n exclusivamente a términos sujetos, utilizaremos la fórmula lógica $p_{n,m}a_1a_2...a_n$ para afirmar que el eneplete ordenado (a_1, a_2, ...a_n) forma parte del conjunto de enepletes ordenados de U que $p_{n,m}$ menciona.

2. Si P representa abreviadamente a una fórmula lógica y le anteponemos el signo lógico $\neg$ (negación), obtenemos la fórmula lógica $\neg P$ (léase: no P).

3. Si separamos las fórmulas lógicas P y Q por el signo lógico $\vee$ (disyunción), obtenemos la fórmula lógica $P \vee Q$ (léase: P o Q).

4. Representando x abreviadamente a una variable sujeto x_1, x_2, x_3, ...; si anteponemos $\forall x$ (cuantificador universal de x) a una fórmula lógica P, obtenemos la fórmula lógica $\forall xP$ (léase: todo x P).

Las fórmulas (en adelante, cuando digamos «fórmula» nos referiremos exclusivamente a las fórmulas lógicas) obtenidas mediante el paso 1 las llamamos atómicas, y las obtenidas mediante los pasos 2, 3 y 4 las llamamos moleculares respectivamente mediante negación, disyunción y cuantificación universal de la variable x (en adelante, cuando digamos «variable» nos referiremos exclusivamente a la variable sujeto).

Las fórmulas obtenidas mediante los pasos 1, 2 y 3 las llamamos proposicionales.

Si la fórmula P fue utilizada para construir una fórmula molecular Q, decimos que P es una subfórmula de Q.

3. Variables ligadas y libres. Fórmulas abiertas o cerradas

a) Variables ligadas y libres

Una variable x tiene ocurrencias ligadas en una fórmula Q, si sólo aparece en subfórmulas de Q, del tipo $\forall xP$, o si Q es del tipo $\forall xP$.

La variable x tiene ocurrencias libres en Q si aparece en ella de otra manera distinta a la anterior.

b) Fórmulas abiertas o cerradas

Una fórmula es abierta, en determinadas variables, cuando existen ocurrencias libres de ellas.
Una fórmula es cerrada cuando no es abierta.

4. Cierre de una variable en una fórmula

Si una fórmula P está abierta en la variable x y sustituimos todas las ocurrencias libres de x por un término sujeto a (mediante a representamos a uno de los términos sujetos $s_1, s_2, s_3, \ldots$), la nueva fórmula obtenida, que convenimos en representar mediante $P(x/a)$, decimos que es un cierre por sustitución de x por a.
Si anteponemos a P la cuantificación universal de x, $\forall x$, la nueva fórmula obtenida, $\forall xP$, decimos que es un cierre por cuantificación universal de x.

5. Interpretación sobre U

Representando P(U^n) ($n \in N^*$) al conjunto de partes de todos los enepletes ordenados (U^n) del universo U, tenemos una interpretación I sobre U cuando definimos las aplicaciones:
I_s: $s_{n \in N^*} \rightarrow$ U
I_{pn}: $p_{n,m \in N^*} \rightarrow$ P(U^n) ($n = 1,2,3\ldots$)

6. Valoracion de fórmulas

Siendo $V = [0,1]$ (todos los números reales iguales o mayores que 0 e iguales o menores que 1) o $V = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \frac{n}{n}\right\}$, y F el conjunto de todas las fórmulas cerradas, definimos la aplicación ϕ: $F \rightarrow V$ de tal modo que, para P, $Q \in F$.
1° Si P es una fórmula atómica, $\phi(P)$ es un valor arbitrario de V.
2° $\phi(\neg P) = 1 - \phi(P)$.
3° $\phi(P \vee Q) =$ max. $\{\phi(P), \phi(Q)\}$.
4° Dado un universo del discurso U y siendo R una fórmula cerrada o abierta sólo en la variable x; si representamos por $\phi(R)_{x \in U}$ al conjunto o familia de números de V que resulten de sustituir x por cada elemento del universo U, entonces $\phi(\forall xR) = \inf\phi(R)_{x \in U}$ (extremo inferior de la familia $\phi(R)_{x \in U}$. Si V es finito, este extremo inferior coincide con el mínimo de la familia).

Propiedades que se demuestran

6.1. Siendo $P \wedge Q$ abreviación de $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.
$\phi(P \wedge Q) =$ min. $\{\phi(P), \phi(Q)\}$.

6.2. Siendo $\exists xP$ abreviación de $\neg\forall x\neg P$.
$\phi(\exists xR) = \sup\phi(R)_{x \in U}$ (extremo superior de la familia $\phi(R)_{x \in U}$. Si V es finito, este extremo superior coincide con el máximo de la familia).

7. Relaciones binarias entre fórmulas

a) Relación implicación lógica

$P \Rightarrow Q$, si y sólo si $\phi(P) \leq \phi(Q)$ ($P \Rightarrow Q \equiv \phi(P) \leq \phi(Q)$).
$P \Rightarrow Q$ indica, por lo tanto, que el valor (grado de fiabilidad) de P es igual o menor que el de Q.

b) Relación de equivalencia

$P \Leftrightarrow Q$, si y sólo si $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$ ($P \Leftrightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$).
$P \Leftrightarrow Q$ indica, por lo tanto, que los valores (grados de fiabilidad) de P y de Q son iguales.

Propiedades que se demuestran

7.1. $\phi(P \vee \neg P) \geq \frac{1}{2}$

7.2. $\phi(P \wedge \neg P) \leq \frac{1}{2}$

7.3. Siendo $P \rightarrow Q$ abreviación de $\neg P \vee Q$

$\phi(P \rightarrow Q) = 1 \equiv\rightarrow P \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow Q \equiv\rightarrow \phi(P \rightarrow Q) \geq \frac{1}{2}$

8. Implicación lógica como tautología y como consecuencia

a) Tautología

Una implicación lógica $P \Rightarrow Q$ es una tautología si y sólo si dicha implicación lógica se cumple para cualquier interpretación sobre U.

b) Consecuencia

Una implicación lógica $P \Rightarrow Q$ es consecuencia de un conjunto de implicaciones lógicas α, si y sólo si, para cualquier interpretación sobre U, es suficiente el cumplimiento de las implicaciones lógicas pertenecientes a α para que se cumpla $P \Rightarrow Q$. Tal circunstancia la indicaremos por $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$.
Si $P \Rightarrow Q$ fuese una tautología, tal circunstancia sería indicada por $\Vdash P \Rightarrow Q$.

Propiedades que se demuestran

8.1. Tautologías fundamentales:

A_1. $\Vdash \neg\neg P \Rightarrow P$.

A_2. $\Vdash P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$.

A_3. $\Vdash P \vee (P \wedge Q) \Rightarrow P$.

A_4. $\Vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Rightarrow P \vee (Q \wedge R)$.

A_5. $\Vdash P \Rightarrow P \vee Q$.

A_6. Existe una fórmula $u \in F$ tal que

$\Vdash P \Rightarrow u$.

A_7. $\forall x P \Rightarrow P$.

A_8. Siendo P no abierta en x

$\Vdash P \Rightarrow \forall x P$

8.2. Consecuencias fundamentales.

R_1. $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \Vdash P \Rightarrow R$.

R_2. $\neg P \Rightarrow \neg Q \Vdash Q \Rightarrow P$.

R_3. Siendo P subfórmula de R y representando $R|_Q^P$ la fórmula resultante de sustituir P por Q en R.

$P \Leftrightarrow Q \Vdash R \Leftrightarrow R|_Q^P$.

R_4. Siendo R no abierta en x

$P \Rightarrow Q \Vdash \forall x(R \vee P) \Rightarrow R \vee \forall x Q$.

9. Axiomática

9.1. Siendo P, Q y R fórmulas lógicas cualesquiera, x cualquier variable, y mencionando u a la fórmula $= s_1 s_1$ $(s_1 = s_1)$, llamamos axiomas, o esquemas de axiomas, a las siguientes implicaciones lógicas.

A_1. $\neg\neg P \Rightarrow P$.

A_2. $P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$.

A_3. $P \vee (P \wedge Q) \Rightarrow P$.

A_4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Rightarrow P \vee (Q \wedge R)$.

A_5. $P \Rightarrow P \vee Q$.

A_6. $P \Rightarrow u$.

A_7. $\forall x P \Rightarrow P$.

A_8. Siendo P no abierta en x, $P \Rightarrow \forall x P$.

9.2. Derivación.

Llamamos derivación a una sucesión de conjuntos de implicaciones lógicas sucesivamente incluidos, $\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \ldots \subseteq \alpha_n$ $(n= 2,3,4\ldots)$, de tal manera que los axiomas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 y A_8 pertenezcan al conjunto α_2, y que las implicaciones lógicas del conjunto α_{j+1} que no pertenecen al conjunto α_j $(j= 1,2,\ldots, n-1)$, sean obtenidas, siendo P, Q y R fórmulas cualesquiera, aplicando las siguientes reglas:

R_1. Si $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R \in \alpha_j$, entonces $P \Rightarrow R \in \alpha_{j+1}$.

R_2. Si $\neg P \Rightarrow \neg Q \in \alpha_j$, entonces $Q \Rightarrow P \in \alpha_{j+1}$.

R_3. Siendo P una subfórmula lógica de R; si $P \Leftrightarrow Q \in \alpha_j$, entonces $R \Leftrightarrow R|_Q^P \in \alpha_{j+1}$.

R_4. Siendo R no abierta en x; si $P \Rightarrow Q \in \alpha_j$, entonces $\forall x(R \vee P) \Rightarrow R \vee \forall x Q \in \alpha_{j+1}$.

Si la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es una derivación y la implicación lógica $P \Rightarrow Q$ pertenece al conjunto α_n, decimos que $P \Rightarrow Q$ se deriva del conjunto α_1, e indicaríamos tal condición mediante $\alpha_1 \vdash P \Rightarrow Q$.

Si $\alpha_1 = \emptyset$, entonces $P \Rightarrow Q$ toma el nombre de implicación lógica distinguida, e indicaríamos tal condición mediante $\vdash P \Rightarrow Q$.

9.3. Siendo $V= \{0,1\}$ (lógica binaria); si introdujéramos $u \Rightarrow P \vee \neg P$ como axioma A_9, entonces tal axiomática es completa.

II. PARTE SEGUNDA DEL TRABAJO

Se desarrolla la axiomática proposicional con los axiomas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6, y con las reglas R_1, R_2 y R_3.

III. PARTE TERCERA DEL TRABAJO

Se desarrolla la lógica polivalente cuantificada, añadiendo a la axiomática utilizada en la parte segunda los axiomas A_7 y A_8, y la regla R_4.

IV. PARTE CUARTA DEL TRABAJO

Se desarrolla la lógica binaria proposicional, añadiendo a la axiomática utilizada en las partes dos y tres el axioma A_9. El desarrollo de la lógica binaria cuantificada coincide enteramente con lo desarrollado en la lógica polivalente cuantificada en la parte tercera.

V

El desarrollo y las demostraciones de lo aquí expuesto, se encuentran en el libro «Lógica polivalente axiomatizada», Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.