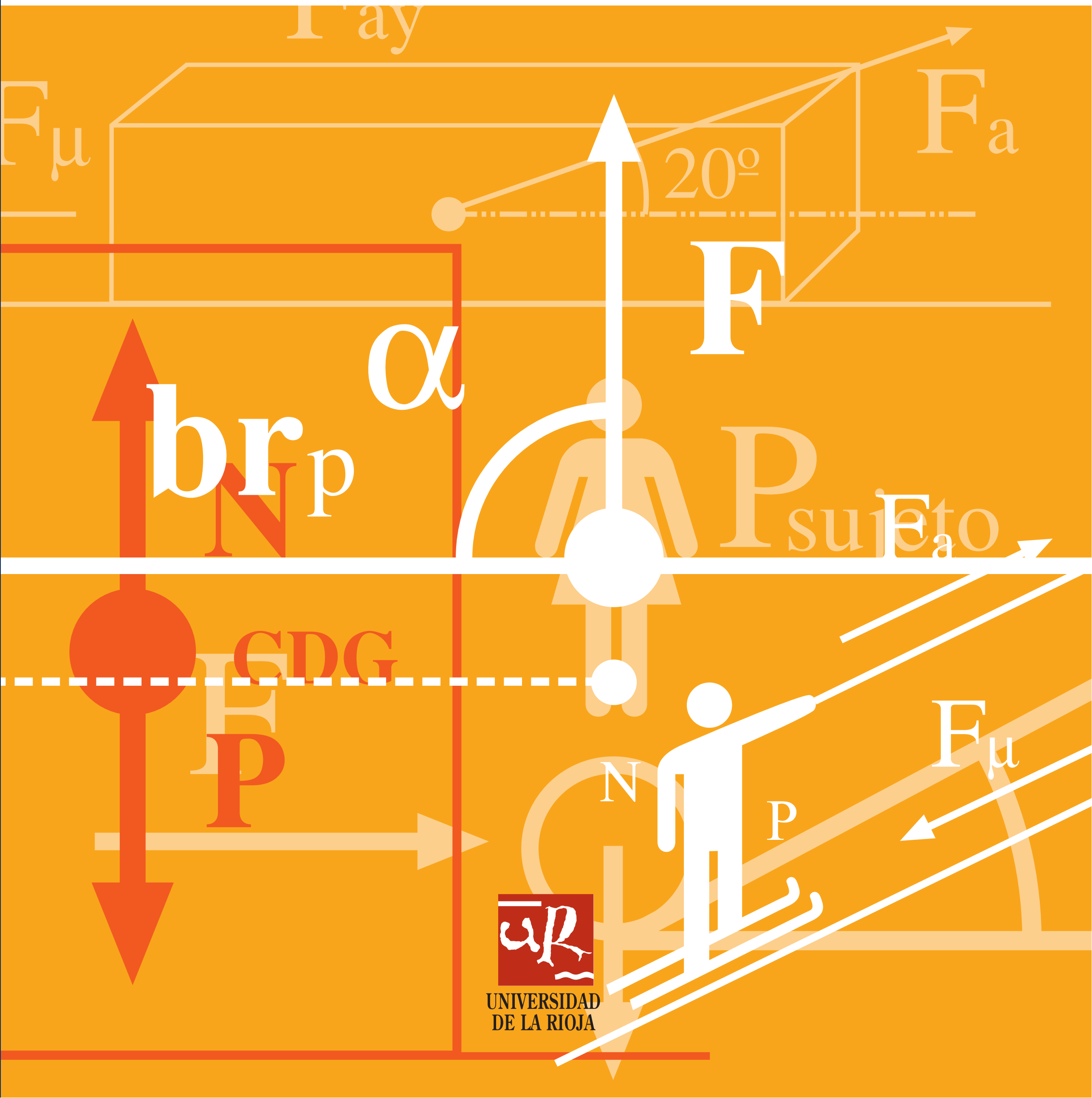
BIOMECÁNICA DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y EL DEPORTE: PROBLEMAS RESUELTOS

Eva Sanz Arazuri
Ana Ponce de León Elizondo



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

BIOMECÁNICA DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y EL DEPORTE:

PROBLEMAS RESUELTOS

MATERIAL DIDÁCTICO

Magisterio

Nº 3

Eva Sanz Arazuri
Ana Ponce de León Elizondo

BIOMECÁNICA DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y EL DEPORTE:

PROBLEMAS RESUELTOS

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2023

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-09-51561-5

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La presente publicación surge de la necesidad y demanda constante y manifiesta de los estudiantes de biomecánica de disponer de un instrumento que les permita ampliar sus conocimientos prácticos sobre los contenidos de la materia.

Así pues el objetivo planteado en esta publicación ha sido construir una herramienta de trabajo que ofrezca al estudiante universitario no sólo conocimientos de cinética, dinámica, estática, trabajo y energía en relación con el cuerpo humano, sino también, su aplicación práctica a través de resúmenes teóricos de los distintos conceptos y la formulación de 75 problemas resueltos paso a paso.

Por otra parte, el nivel de conocimientos básicos de Física de los estudiantes universitarios relacionados con titulaciones de Educación Física es muy diverso, por ello en esta publicación se ha utilizado un lenguaje y una metodología de resolución de problemas adaptados a cualquier nivel, permitiendo de esta manera que sea el propio alumno el protagonista de su aprendizaje.

Somos conscientes del cambio que la universidad española tiene que experimentar para atender el proceso de Bolonia y la convergencia en un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), de tal manera que del concepto tradicional de "universidad centrada en la enseñanza" se oriente hacia el concepto de "universidad centrada en el aprendizaje" que favorezca una mayor implicación del propio alumno en su aprendizaje.

Esta publicación, pues, constituye un instrumento complementario de las clases teóricas y prácticas de las asignaturas relacionadas con esta materia; al mismo tiempo pretende favorecer el estudio individual y aprendizaje autónomo, así como fomentar el trabajo colectivo e interactivo en seminarios, laboratorios o dinámicas de grupo.

Este libro de biomecánica se encuentra estructurado en tres bloques: Cinemática, Estática y Dinámica y, por último, Trabajo y Energía. Cada uno de estos bloques combina el tratamiento teórico a través de un resumen y 25 problemas resueltos paso a paso, haciendo un total de 75 ejercicios resueltos sobre la Actividad Física y el Deporte.

Junto al aprendizaje activo que pretende favorecer este libro, esperamos que también sirva para adquirir competencias profesionales en el ámbito de la Educación Física que tengan que ver no sólo con el "saber" sino también con el "saber hacer", principios básicos de nuestro caminar hacia Europa, y que por tanto, no sólo nos lleve al campo de los conocimientos sino también al de su aplicabilidad.

Las autoras

CINEMÁTICA

RESUMEN TEÓRICO

La cinemática describe los movimientos, sitúa los cuerpos y detalla sus movimientos basándose en espacios recorridos, velocidades y aceleraciones de dichos desplazamientos.

LOS MÉTODOS MÁS EMPLEADOS EN EL ANÁLISIS CINEMÁTICO SON:

⇒ MÉTODOS CINEMÁTICOS DIRECTOS, cuando la medición se realiza directamente sobre el sujeto.

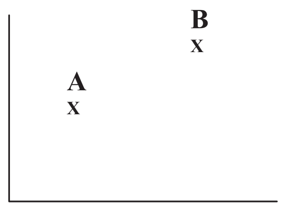
- ❖ **Goniómetro y electrogoniómetro:** Goniómetro es un aparato que sirve para medir las variaciones angulares. La aplicación puede ser directa (si se aplica directamente sobre el sujeto) o indirecta (si se aplica sobre una filmación o fotografía). El electrogoniómetro utiliza unos electrodos que permite registrar los datos con un mayor índice de acierto.
- ❖ **Acelerómetro:** Nos informa de la aceleración de un objeto en un momento determinado.
- ❖ **Células fotoeléctricas:** Se utilizan para la medición de fracciones pequeñas de tiempo en aquellos deportes en los que la velocidad media alcanzada es muy importante. Ej. pruebas de velocidad.

⇒ MÉTODOS CINEMÁTICOS INDIRECTOS, cuando la medición se realiza mediante soporte de tipo fotográfico, magnético, etc. Registran la modificación en el espacio y en el tiempo deduciendo parámetros mecánicos de especial interés para el análisis del gesto.

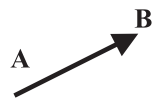
- ❖ **Fotografía de la huella luminosa:** utilizada para la obtención de trayectorias tanto articulares como balísticas. Ejemplo: pelota de tenis.
- ❖ **Fotografía cronocíclica:** múltiples tomas sobre el mismo negativo de película utilizando una cámara normal con motor incorporado. No permite analizar el movimiento tridimensionalmente. Su utilización es meramente ilustrativa.
- ❖ **Vídeo:** utilizado cuando se requiere una información rápida del gesto pero carece de rigor científico, puesto que no proporciona con exactitud los parámetros de espacio y tiempo.
- ❖ **Películas fotográficas**

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

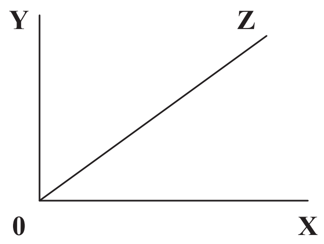
❖ **Movimiento**: cambio de posición de un cuerpo o parte de él a lo largo del tiempo, respecto a un determinado sistema de referencia.



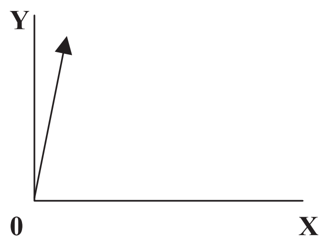
❖ **Desplazamiento**: Camino recorrido en una determinada dirección y sentido. Viene determinado por la línea recta que une la posición inicial con la final y la orientación de esta línea. El desplazamiento, pues, es una magnitud vectorial que indica distancia, dirección y sentido.



❖ **Sistema de referencia**: Para hablar de movimiento se requiere una referencia para comparar la posición del cuerpo o segmento corporal con respecto a algo.



❖ **Vector posición**: Formado por el punto (0,0) y el punto donde se encuentra el móvil (1,5)



En la descripción global del movimiento de todo el cuerpo se estudian las variaciones de posición del centro de gravedad (CDG).

En la descripción del movimiento de una parte del cuerpo se estudian las variaciones de posición del centro de masas (CDM) del segmento a analizar.

TIPOS DE MOVIMIENTO

Los movimientos se clasifican en base a tres elementos: **la trayectoria** que describen, sus **relaciones entre espacio recorrido y tiempo** y las **dimensiones en las que se mueven**.

TIPOS DE MOVIMIENTOS SEGÚN LA TRAYECTORIA:

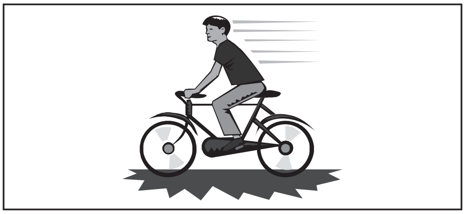
En función de la trayectoria descrita se puede hablar de tres tipos de movimientos:

- Movimientos de traslación o lineales
- Movimientos de rotación o angulares
- Movimientos combinados

❖ **Movimientos de traslación o lineales,** cuando todos los puntos de un cuerpo se trasladan de forma paralela**.** A su vez, en este grupo, se pueden diferenciar otros tres.

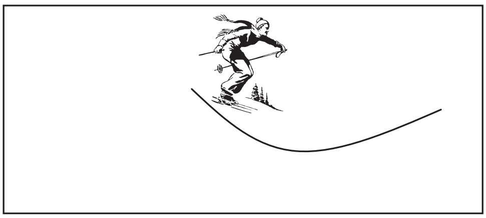
<u>Movimiento rectilíneo:</u>

Todos los puntos corporales se desplazan de forma paralela describiendo una trayectoria en línea recta. Por ejemplo un ciclista que se desplaza sin pedalear en línea recta sobre una superficie llana.



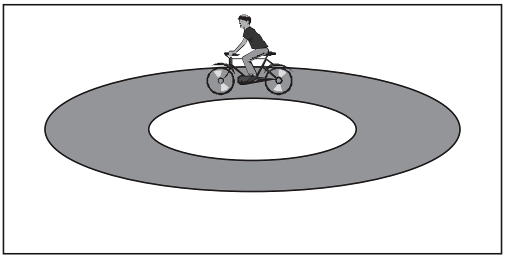
<u>Movimiento curvilíneo:</u>

Todos los puntos corporales se desplazan de forma paralela describiendo una trayectoria curva. Por ejemplo un esquiador que se deja deslizar por una pendiente en forma de "U".

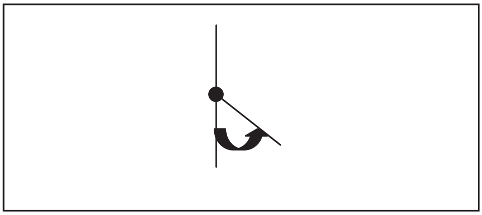


Movimientos lineales combinados:

Aquellos movimientos en los que todos los puntos corporales se desplazan de forma paralela combinando trayectorias rectas con curvas. Por ejemplo un ciclista que sin pedalear recorre una pista elíptica.



- **Movimientos de rotación o angulares,** cuando todos los puntos corporales describen el mismo ángulo de desplazamiento en el mismo tiempo. En estos movimientos siempre existe una rotación respecto a un eje de giro. Por ejemplo, en una flexión de codo todos los puntos del antebrazo describen el mismo ángulo de desplazamiento.



- **Movimientos combinados,** cuando se dan tanto movimientos lineales como angulares. Estos son los más abundantes en el mundo de la actividad físico-deportiva. Por ejemplo, un ciclista que pedalea su cuerpo se desplaza linealmente al mismo tiempo que en las caderas, rodillas y tobillos se producen movimientos angulares.

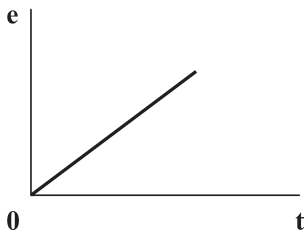
TIPOS DE MOVIMIENTOS SEGÚN LAS RELACIONES ENTRE ESPACIO Y TIEMPO:

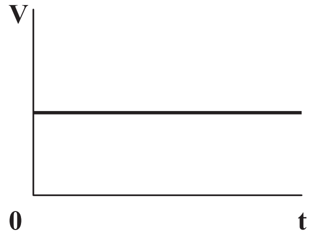
Atendiendo a la relación entre el espacio y el tiempo, podemos hablar de:

- Movimiento Uniforme
- Movimiento Uniformemente Acelerado
- Movimiento Uniformemente Decelerado
- Movimiento Variablemente Acelerado
- Movimiento Variablemente Decelerado
- Movimiento Combinado

❖ **Movimiento uniforme**

En cada incremento de tiempo se recorre siempre el mismo espacio. El desplazamiento se produce a velocidad constante, por lo que no existe aceleración.

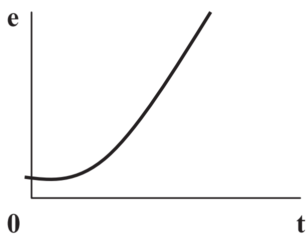


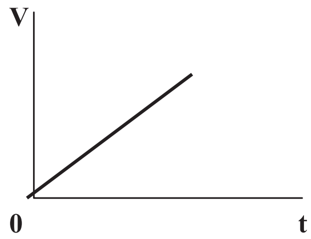


❖ **Movimiento Acelerado**

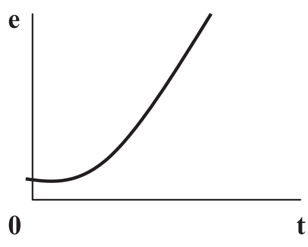
En cada incremento de tiempo la velocidad va aumentando siendo cada vez mayor el espacio recorrido por unidad de tiempo. Dependiendo de la forma de aumentar la velocidad podremos hablar de:

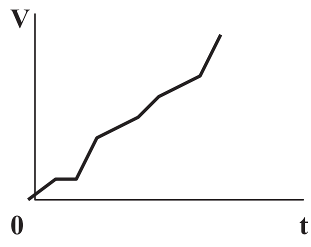
<u>Movimiento Uniformemente Acelerado</u>: si la velocidad aumenta de forma constante.





<u>Movimiento Variablemente Acelerado</u>: si la velocidad no aumenta de forma constante.

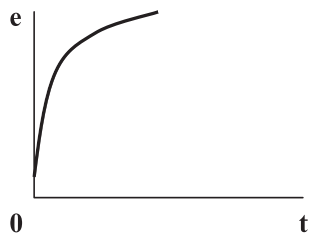


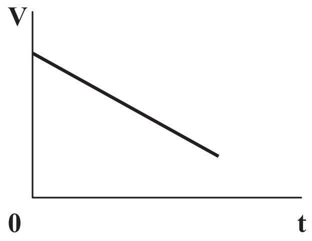


❖ **Movimiento Decelerado**

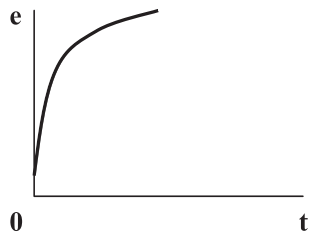
En cada incremento de tiempo la velocidad va disminuyendo siendo cada vez menor el espacio recorrido por unidad de tiempo. Dependiendo de la forma de descender la velocidad podremos hablar de:

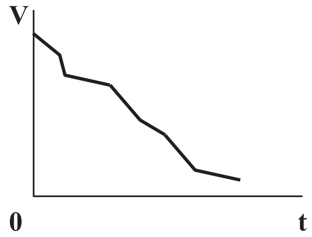
Movimiento Uniformemente Decelerado: si la velocidad disminuye de forma constante.





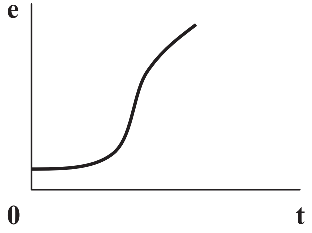
Movimiento Variablemente Decelerado: si la velocidad no disminuye de forma constante.

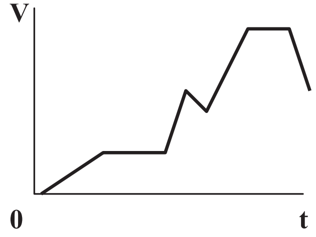




❖ **Movimiento Combinado**

Cuando en un mismo movimiento existe una combinación de los movimientos ya descritos, por ejemplo fases uniformes, fases acelerativas y fases decelerativas.



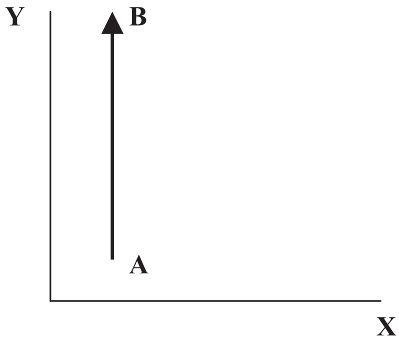


MOVIMIENTOS SEGÚN LAS DIMENSIONES EN QUE SE DESARROLLEN:

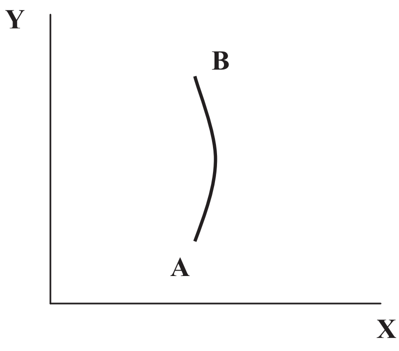
Atendiendo a las dimensiones en las que se describe su trayectoria hablaremos de movimientos en:

- Una dimensión
- Dos dimensiones
- Tres dimensiones

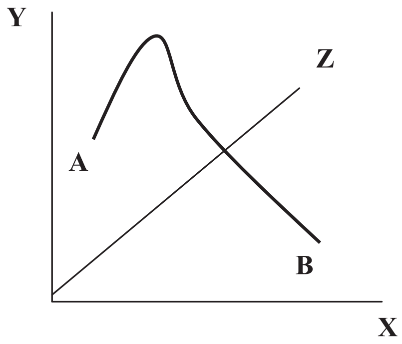
❖ **En una dimensión:** Cuando el movimiento pueda ser descrito en un solo eje. Por ejemplo el lanzamiento vertical del balón en un saque inicial en baloncesto.



❖ **En dos dimensiones:** Cuando para describir el movimiento se requiera de dos ejes o de un plano. Este es el caso de muchos movimientos articulares, por ejemplo en una abducción de hombro, para describir la variación del miembro superior necesitamos dos ejes que determinen el plano frontal en el que se desarrolla el movimiento.



❖ **En tres dimensiones:** Cuando para describir el movimiento se requiera de tres ejes. Este es el caso de las circunducciones articulares o de gestos técnicos como el golpeo de tenis.



CINEMÁTICA LINEAL

ECUACIONES DE LOS DISTINTOS TIPOS DE MOVIMIENTOS LINEALES

❖ **Movimiento Uniforme:**

La velocidad es constante, por lo tanto la aceleración es nula.

$$\boxed{V = (e_f - e_i)/t} \qquad \boxed{e_f = Vt + e_i}$$

❖ **Movimiento Uniforme Acelerado:**

La velocidad varía y la aceleración es constante.

$$\boxed{Vm = (V_i + V_f)/2 = (e_f - e_i)/t} \qquad \boxed{a = (V_f - V_i)/t}$$

$$\boxed{V_f = at + V_i} \qquad \boxed{e_f = e_i + V_i\,t + ½\,at^2}$$

CINEMÁTICA ANGULAR

Trayectoria angular: La trayectoria es una circunferencia.

Desplazamiento angular: viene dado por el ángulo central barrido por el radio (σ) y su módulo viene dado en radianes. 1 radian = 57,3º

Velocidad angular: Es una velocidad de giro, por eso no se tiene en cuenta el espacio sino el ángulo recorrido en unidad de tiempo. Se mide en radianes/sg

Aceleración angular: Es la variación de la velocidad angular en unidad de tiempo. Se mide en radianes/sg^2

ECUACIONES DE LOS DISTINTOS TIPOS DE MOVIMIENTOS ANGULARES

- **Movimiento Uniforme:**

  La velocidad es constante, por lo tanto la aceleración es nula.

$$\boxed{\omega = (\sigma_f - \sigma_i)/t} \qquad \boxed{\sigma_f = \omega t + \sigma_i}$$

- **Movimiento Uniforme Acelerado:**

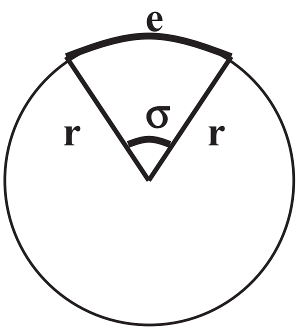
  La velocidad varía y la aceleración es constante.

$$\boxed{\omega m = (\omega_i + \omega_f)/2 = (\sigma_f - \sigma_i)/t} \qquad \boxed{\alpha = (\sigma_f - \sigma_i)/t}$$

$$\boxed{\omega_f = \alpha t + \omega_i} \qquad \boxed{\sigma_f = \sigma_i + \omega_i t + ½\, \alpha t^2}$$

RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTO ANGULAR Y LINEAL

Un radian es el ángulo cuyo radio es igual al arco y su valor es 57,3º.



1 Radian (σ) = Arco (e)/ Radio (r)

De esta relación se desprende que:

- El desplazamiento lineal es igual al desplazamiento angular por el radio de giro:

$$\boxed{e = \sigma r}$$

- La velocidad lineal es igual a la velocidad angular por el radio de giro.
- La velocidad lineal es el espacio lineal recorrido por unidad de tiempo:

$$\boxed{V = (e_f - e_i)/t}$$

Si sustituimos el espacio lineal por su equivalente según la anterior ecuación:

$$\boxed{V = (\sigma_f - \sigma_i)r/t}$$

Recordando que:

$$\boxed{\omega = (\sigma_f - \sigma_i)/t}$$

Observamos que la velocidad lineal es igual a la velocidad angular por el radio de giro:

$$\boxed{V = \omega r}$$

- Del mismo modo la aceleración lineal es igual a la aceleración angular por el radio de giro:

$$\boxed{\mathbf{a = \alpha r}}$$

Aceleración centrípeta:

En todos los movimientos angulares existe una aceleración, a pesar de que el módulo de la velocidad angular sea constante. Esta aceleración recibe el nombre de “aceleración centrípeta” y es la responsable de que la velocidad lineal cambie constantemente de dirección.

Se dirige hacia el centro de la circunferencia y es perpendicular en todos los puntos a la trayectoria lineal.

El valor de esta aceleración centrípeta depende del radio de giro y de la velocidad al cuadrado.

$$\boxed{\mathbf{a_{cp} = V^2/r}}$$

PROBLEMAS

1. Una nadadora tarda 0,33 s en cambiar su velocidad inicial de 1,35 m/s a una velocidad final de 1,55 m/s. Calcular la aceleración.
2. El vector de una partícula viene dado por la ecuación r = 12t+7. Hallar el vector desplazamiento, módulo y orientación, entre las posiciones correspondientes a t = 1s y t = 2 s.
3. Lanzamos una pelota contra un frontón con una velocidad de 13 m/s. Sabemos que rebota con una velocidad de 8 m/s y que la duración del choque es de 0,04 s. Hallar la aceleración media en este intervalo.
4. Un atleta realiza una prueba de 3000 metros y a su paso por los 800 lleva invertido un tiempo de 1 minuto y 59 segundos. ¿Qué velocidad media total debe conseguir si queremos que haga un tiempo de 7 minutos 50 segundos? ¿Qué velocidad media llevaba hasta los 800 m? ¿Qué velocidad media debe mantener desde los 800 hasta el final de la prueba?
5. ¿Qué velocidad inicial mínima debe transmitir el palo de un jugador de golf a la bola para que entre en el hoyo? (la bola se desplazará rodando por el green). La distancia inicial entre la bola y el hoyo es de 13,55 m y la desaceleración de la bola es de $-1{,}3$ m/s^2
6. Si desde los hombros del jugador de golf a la cabeza del palo hay una distancia de 1,20 m ¿cuál es la velocidad angular del sistema formado por los miembros superiores del jugador y el palo en el momento de golpeo de la bola? Calcula también la aceleración centrípeta.
7. Las ruedas de una bicicleta, con una aceleración angular constante, giran un ángulo de 350 radianes en los 5 primeros segundos. Su velocidad angular al final de este tiempo es de 120 rad/s. Calcular la aceleración angular en este intervalo de tiempo. ¿Cuál es la aceleración lineal de la bicicleta? ¿Qué espacio lineal ha recorrido en ese tiempo? El radio de la rueda de la bicicleta es de 27 cm.
8. Una gimnasta lanza verticalmente hacia arriba una maza. Si sabemos que esa maza alcanza una altura de 3,12 m, ¿de cuánto tiempo dispondrá la gimnasta para realizar un giro sobre el eje transversal agrupado antes de recoger la maza? ¿Cuál será el desplazamiento angular de la maza durante el tiempo que está en el aire si mantiene una velocidad angular constante de 25 rad/s? ¿Cuántos giros completos realiza la maza?
9. Un gimnasta realiza un salto hacia atrás, en el momento que despega el centro de gravedad forma un ángulo de 60º con la horizontal. Despega con una velocidad de 6 m/s. Calcular la velocidad horizontal y la velocidad vertical. Hallar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. ¿Cuál es el tiempo de descenso y cuál es la altura máxima y el alcance?
10. En un partido de fútbol, el jugador con balón “A” golpea el balón con el pie para pasar a los pies de un compañero situado a 60 m. Si el balón despega con un ángulo de 45º, ¿Qué velocidad inicial debe llevar para llegar a los pies del jugador “B” sin botar?

11. Si el jugador "B" decidiera recibir con la cabeza (altura 1,80 m), ¿cuánto se tendría que adelantar?

12. En una jugada de un partido de pelota el pelotari "colorao" lanza la bola contra el frontis. En el momento que la pelota despega de la mano del deportista se encuentra a una altura de 1,5 m del suelo y forma un ángulo de 33,51º. ¿Qué velocidad inicial se le aplica a la bola si alcanza una altura máxima de 2,49 m?

13. Si sabemos que en la misma jugada anterior la pelota contacta con el frontis a una altura del suelo de 1m y que el alcance horizontalmente recorrido por la bola desde que sale de la mano del pelotari es de 6,066 m ¿Con qué velocidad contacta la bola con el frontis? Calcular el módulo y la orientación.

14. En otro partido de pelota, determinar a qué velocidad debe desplazarse el jugador azul para llegar a golpear la bola en el lugar en que ésta se encuentre a una altura de 0,40 m del suelo dentro de la fase descendente de la trayectoria descrita tras el bote. Otros datos:
    - El sujeto azul se encuentra a una distancia del frontis de 15 m.
    - La bola sale de la pared desde una altura de 1,70 m del suelo.
    - El ángulo de salida es de 30º con la horizontal.
    - El módulo de la velocidad inicial es de 3,68 m/s.
    - En el bote el contacto de la bola con el suelo dura 0,39 s y se produce una deceleración de 2 m/s^2.
    - El ángulo de salida tras el bote es de 30º.

15. Una jugadora de voleibol se encuentra en la posición de saque e intenta lanzar el balón de tal forma que bote junto a la línea de fondo del campo contrario que se encuentra a 18,2 m del punto de saque. La altura del balón en el momento del despegue es de 2,06 m y la velocidad inicial vertical es de 3,26 m/s. Calcular:
    - El tiempo de vuelo del balón.
    - Cuál debe ser la velocidad horizontal para que el balón bote junto a la línea de fondo.
    - La velocidad inicial resultante (módulo y orientación).
    - Cuántos metros ha recorrido en la horizontal hasta el momento de alcanzar la altura máxima.
    - Sabiendo que la red se encuentra horizontalmente a 9,2 m del punto de saque y a una altura del suelo de 2,24 m, ¿conseguirá el balón sobrepasar la red?
    - ¿Con qué velocidad resultante contacta el balón con el suelo? (módulo y orientación).

16. En una carrera de maratón de 42 km el sujeto "A" comienza a un ritmo fuerte que mantiene más o menos constante a una velocidad de 11,25 km/h durante la primera hora y media, a partir de ahí cambia a otra velocidad que mantiene durante el resto de la prueba igual a 8,5 km/h. El sujeto "B" mantiene un ritmo constante durante los

42 km igual a 9,5 km/h. ¿Quién ganará la prueba? En caso de que sea “B”, ¿en qué punto de la prueba alcanza a “A”?

17. Un saltador de trampolín salta verticalmente hacia arriba con una velocidad de 2,5 m/s. Calcular la altura máxima alcanzada por el saltador y la velocidad al tocar el agua en las siguientes situaciones:
    - El trampolín se encuentra a 5 m de altura.
    - El trampolín se encuentra a 7 m de altura.
    - El trampolín se encuentra a 10 m de altura.
18. Si el saltador del problema anterior quiere realizar dos mortales y medio hacia adelante antes de caer al agua, ¿cuál será la velocidad angular media mínima a la que debe realizar cada mortal para que le dé tiempo de completar el ejercicio antes de sumergirse?
19. Un nadador recorre una piscina de 50 m en 25 s y una de 25 m en 14 s. Si el nadador se desplaza, en ambas pruebas, con una aceleración constante hasta una velocidad máxima que mantiene durante el resto de la prueba y considerando que el período de aceleración es el mismo para ambas pruebas, ¿cuánto tiempo dedica a la aceleración? ¿Cuál es la velocidad máxima?
20. Un jugador de voleibol que va a realizar un bloqueo salta verticalmente 0,8 m. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima?
21. Un jugador de baloncesto deja caer libremente un balón desde una altura de 2 metros. Cuando el balón se encuentra a mitad de camino, un segundo balón es lanzado en sentido descendente desde la misma altura anterior. Los dos balones contactan con el suelo simultáneamente. ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo balón.
22. Una gimnasta realiza un ejercicio en las paralelas, para finalizar el ejercicio quiere realizar 2 mortales hacia adelante y cada mortal le cuesta 0,63 s. Sabiendo que:
    - el CDG en el despegue se encuentra a una altura de 2 m,
    - el alcance recorrido durante el vuelo es de 45 cm y
    - la velocidad inicial de despegue es de 3,02 m/s,

    calcular el ángulo de salida, la altura máxima alcanzada y el alcance recorrido al finalizar el primer mortal y la altura en ese momento.
23. Un saltador de longitud realiza un salto. Sabiendo que:
    - el CDG se encuentra en la batida a una altura de 0,95 m y en el despegue a 0,30 m,
    - la velocidad horizontal de batida es de 5 m/s y
    - el ángulo de vuelo es de 35º,

    calcular la velocidad vertical que alcanza, la velocidad inicial resultante, el tiempo de vuelo, la altura máxima y el alcance.

24. En una partida de dardos, un participante en el gesto técnico realiza una menos flexión de codo cubriendo un recorrido de 0,3 radianes, empleando un tiempo de 0,04 s. Calcular la aceleración angular y la velocidad angular final del gesto técnico además de la velocidad lineal con la que sale el dardo despedido de la mano del sujeto. La distancia entre el codo y agarre del dardo es de 46 cm.

25. Continuando el problema anterior y teniendo en cuenta que el sujeto realiza el lanzamiento desde una distancia de 2 m de la diana y que el ángulo de salida del dardo es de 0º, ¿alcanzará el dardo a la diana? En caso de obtener respuesta positiva, calcular el punto de contacto tomando como referencia el centro de ésta. La diana tiene un diámetro de 80 cm y el centro se encuentra a una altura del suelo de 1,50 m mientras que el dardo es despedido desde una altura de 1,65 m.

CINEMÁTICA

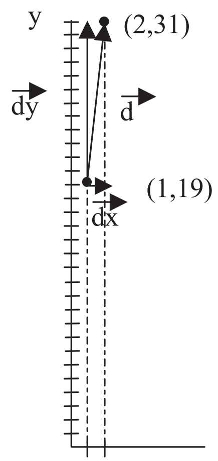
PROBLEMAS RESUELTOS

1. **Una nadadora tarda 0,33 s en cambiar su velocidad inicial de 1,35 m/s a una velocidad final de 1,55 m/s. Calcular la aceleración.**

$$a = \frac{V_f - V_i}{t} = \frac{1{,}55 \text{ m/s} - 1{,}35 \text{ m/s}}{0{,}33 \text{ s}}$$

$$\boxed{\mathbf{a = 0{,}60\ m/s^2}}$$

2. **El vector de una partícula viene dado por la ecuación y = 12x+7. Hallar el vector desplazamiento, módulo y orientación, entre las posiciones correspondientes a x = 1 s y x = 2 s.**



$x = 1 \longrightarrow y = 19$ El punto de partida viene dado por las coordenadas (1, 19)

$x = 2 \longrightarrow y = 31$ El punto final viene dado por las coordenadas (2, 31)

Los módulos de los componentes $\vec{dx}$ y $\vec{dy}$:

$|\vec{dx}| = 2\text{-}1 = 1$

$|\vec{dy}| = 31\text{-}19 = 12$

Módulo de $\vec{d}$:

Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$d = \sqrt{1^2 + 12^2}$

$d = \sqrt{145}$

$\boxed{\mathbf{d = 12{,}04}}$

La orientación de un vector viene dada por el ángulo que forma con la horizontal. En este caso coincide con el ángulo entre $\vec{d}$ y $\vec{dx}$ por lo que usamos la razón trigonométrica del Cos α para calcular la orientación:

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{dx}{d}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{12{,}04} = 0{,}08 \longrightarrow \text{arcocos } 0{,}08 = 85{,}23$$

$\boxed{\mathbf{\alpha = 85{,}23}}$

3. Lanzamos una pelota contra un frontón con una velocidad de 13 m/s. Sabemos que rebota con una velocidad de 8 m/s y que la duración del choque es de 0,04 s. Hallar la aceleración media en este intervalo.

$$a = \frac{(V_f - V_i)}{t} = \frac{(8 - 13)\ m/s}{0{,}04\ s}$$

$$\boxed{\mathbf{a = -125\ m/s^2}}$$

Se produce una desaceleración.

4. Un atleta realiza una prueba de 3000 metros y a su paso por los 800 lleva invertido un tiempo de 1 minuto y 59 segundos. ¿Qué velocidad media total debe conseguir si queremos que haga un tiempo de 7 minutos 50 segundos? ¿Qué velocidad media llevaba hasta los 800 m? ¿Qué velocidad media debe mantener desde los 800 hasta el final de la prueba?

La velocidad media total: $(e_f - e_i) / t = 3000 \text{ m} / 470 \text{ s} = 6{,}38 \text{ m/s}$

$$Vm_t = \frac{(e_f - e_i)}{t} = \frac{3000 \text{ m}}{470 \text{ s}} = 6{,}38 \text{ m/s}$$

Velocidad media hasta los 800 metros:

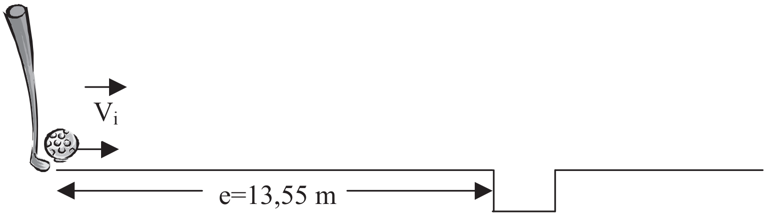
$$Vm_{800} = \frac{(e_f - e_i)}{t} = \frac{800 \text{ m}}{119 \text{ s}} = 6{,}72 \text{ m/s}$$

Velocidad media desde los 800 hasta el final:

$$Vm_{800\text{-}3000} = \frac{(e_f - e_i)}{t_{total} - t_{800}} = \frac{(3000\text{-}800) \text{ m}}{(470\text{-}119) \text{ s}}$$

$$\boxed{\mathbf{Vm_{800\text{-}3000} = 6{,}26 \text{ m/s}}}$$

5. ¿Qué velocidad inicial mínima debe transmitir el palo de un jugador de golf a la bola para que entre en el hoyo? (la bola se desplazará rodando por el green). La distancia inicial entre la bola y el hoyo es de 13,55 m y la desaceleración de la bola es de -1,3 m/s²



Se trata de un movimiento uniformemente desacelerado, por lo tanto:

$$-a = \frac{(V_f - V_i)}{t}$$

La velocidad inicial mínima será aquella que permita alcanzar el punto final con $V_f = 0$, por lo que:

$$V_m = \frac{V_i + \cancelto{0}{V_f}}{2} = \frac{V_i}{2} = \frac{e}{t}$$

En ambas ecuaciones tenemos 2 incógnitas: V_i y t. Si despejamos t en la primera y sustituimos en la segunda:

$$-a = \frac{-V_i}{t} \longrightarrow t = \frac{+V_i}{+a}$$

$$\frac{V_i}{2} = \frac{e}{V_i/a} \longrightarrow \frac{V_i}{2} = \frac{ea}{V_i}$$

Despejando V_i:

$$V_i^2 = 2ea$$

$$V_i = \sqrt{2ea}$$

Sustituyendo:

$$V_i = \sqrt{2 \cdot 13{,}55\ m \cdot 1{,}33\ m/s^2}$$ $\boxed{\mathbf{V_i = 6\ m/s}}$

6. Si desde los hombros del jugador de golf a la cabeza del palo hay una distancia de 1,20 m, ¿cuál es la velocidad angular del sistema formado por los miembros superiores del jugador y el palo en el momento de golpeo de la bola? Calcula también la aceleración centrípeta.

$V_i = 6$ m/s

La relación entre movimiento lineal y movimiento angular nos dice que:

$V = \omega r \longrightarrow \omega = V/r$

Sustituyendo:

$$\omega = \frac{6 \text{ m/s}}{1{,}20 \text{ m}} = 5 \text{ rad/s}$$

La aceleración centrípeta:

$$a_{cp} = \frac{V^2}{r} \longrightarrow a_{cp} = \frac{6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1{,}20 \text{ m}}$$

$$\boxed{\mathbf{a_{cp} = 30 \text{ m/s}^2}}$$

7. Las ruedas de una bicicleta, con una aceleración angular constante, giran un ángulo de 350 radianes en los 5 primeros segundos. Su velocidad angular al final de este tiempo es de 120 rad/s. Calcular la aceleración angular en este intervalo de tiempo. ¿Cuál es la aceleración lineal de la bicicleta? ¿Qué espacio lineal ha recorrido en ese tiempo? El radio de la rueda de la bicicleta es de 27 cm.

α = conste

Se trata de un movimiento angular uniformemente acelerado, por lo que:

$$\omega_{media} = \frac{(\omega_f + \omega_i)}{2} = \frac{\sigma}{t}$$

Sustituyendo:

$$\frac{120 \text{ rad/s} + \omega_i}{2} = \frac{350 \text{ rad}}{5 \text{ s}}$$

Despejando:

$$\omega_i = \frac{350 \text{ rad} \cdot 2}{5 \text{ s}} - 120 \text{ rad/s}$$

$$\omega_i = 140 \text{ rad/s} – 120 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_i = 20 \text{ rad/s}}}$$

La aceleración angular:

$$\alpha = \frac{(\omega_f - \omega_i)}{t} = \frac{120 \text{ rad/s} – 20 \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} = 20 \text{ rad/s}^2$$

La aceleración lineal:

$$a = \alpha \cdot r \longrightarrow a = 20 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}27 \text{ m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = 5{,}4 \text{ m/s}^2}}$$

El espacio lineal recorrido

1. $e = Vi \cdot t + 1/2\, a \cdot t^2$
2. $e = \sigma \cdot r = 350 \text{ rad} \cdot 0{,}27 \text{ m}$

$$\boxed{\boldsymbol{e = 94{,}5 \text{ m}}}$$

8. Una gimnasta lanza verticalmente hacia arriba una maza. Si sabemos que esa maza alcanza una altura de 3,12 m, ¿de cuánto tiempo dispondrá la gimnasta para realizar un giro sobre el eje transversal agrupado antes de recoger la maza? ¿Cuál será el desplazamiento angular de la maza durante el tiempo que está en el aire si mantiene una velocidad angular constante de 25 rad/s? ¿Cuántos giros completos realiza la maza?

t?

La gimnasta dispondrá del tiempo que le cuesta a la maza alcanzar la altura máxima más el tiempo que le cuesta bajar hasta el punto de partida:

h = 3,12 m

En la subida:

$h = V_i \cdot t_s + ½\, a \cdot t_s^2$

Partiendo de esta ecuación tenemos dos incógnitas: V_i y t_s

Así que debemos de buscar otra ecuación:

$$a = \frac{(V_f - V_i)}{t_s}$$

donde la V_f es la que lleva cuando alcanza la altura máxima y su valor es 0, por lo que:

$$a = \frac{-V_i}{t_s}$$

Si despejo la V_i y sustituyo en la anterior ecuación:

$a = -V_i / t_s \longrightarrow V_i = -a \cdot t_s$

$h = V_i \cdot t_s + ½\, a \cdot t_s^2 \longrightarrow h = -at_s^2 + ½\, at_s^2$

La aceleración es la gravedad que, en este caso de subida, desacelera, luego es negativa.

Sustituyendo:

$h = -½\, a \cdot t_s^2$

$3{,}12\ m = -½ \cdot (-9{,}8\ m/s^2) \cdot t_s^2$

$$t_s^2 = \frac{2 \cdot 3{,}12\ m}{9{,}8\ m/s^2}$$

$t_s = \sqrt{0{,}63\ s}$

$\boxed{\mathbf{t_s = 0{,}79\ s}}$ que es lo que le cuesta subir

El tiempo total es 2 veces el tiempo de subida, luego

$t_{total} = 2 \cdot t_s = 2 \cdot 0{,}79\ s = 1{,}58\ s$

Si la ω es constante se trata de un movimiento angular uniforme, por lo que:

$$\omega = \frac{(\sigma_f - \sigma_i)}{t} \longrightarrow \Delta\sigma = \omega \cdot t$$

$\Delta\sigma = 25\ rad/s \cdot 1{,}58\ s$

$\boxed{\Delta\sigma = 39.5\ rad}$

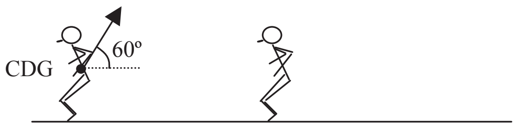
Giros completos:
Cada giro 360º
1 rad (σ) = 57,3º
luego si se desplaza 39,5 rad y cada radian equivale a 57,3º el número de vueltas completas será:

$39{,}5\ \cancel{rad} \cdot 57{,}3º/\cancel{rad} = 2263{,}35º$

2263,35º/360º = $\boxed{\textbf{6,28 vueltas}}$

9. Un gimnasta realiza un salto hacia atrás, en el momento que despega el centro de gravedad forma un ángulo de 60º con la horizontal. Despega con una velocidad de 6 m/s. Calcular la velocidad horizontal y la velocidad vertical. Hallar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. ¿Cuál es el tiempo de descenso y cuál es la altura máxima y el alcance?

Se trata de un movimiento parabólico donde el CDG en la salida se encuentra a la misma altura que en la llegada.



Cualquier vector puede descomponerse en 2 vectores perpendiculares. Así:

$V_i = 6$ m/s

$V_{ix} = V_{ih}$?

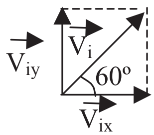
$V_{iy} = V_{iv}$?

ts ?

t_b ?

h_{max} ?

x ?



V_{ix} se calcula con la razón trigonométrica del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{V_{ix}}{V_i}$$

despejando nos queda:

$V_{ix} = \cos 60 \cdot 6$ m/s

$$\boxed{\mathbf{V_{ix} = 3\ m/s}}$$

V_{iy} se calcula con la razón trigonométrica del seno:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{V_{iv}}{V_i}$$

despejando:

$V_{iy} = \text{Sen } 60 \cdot 6$ m/s

$$\boxed{\mathbf{V_{iy} = 5{,}19\ m/s}}$$

Tiempo de subida:

Se trata de un movimiento en el eje de las “yes”, uniformemente decelerado, donde la deceleración es la gravedad y la velocidad cuando se alcanza la altura máxima es nula, por lo que:

$$g = \frac{\overset{0}{\cancel{V_{fy}}} - V_{iy}}{t_s} \Longrightarrow -9{,}8\ m/s^2 = \frac{-5{,}19\ m/s}{t_s}$$

despejando:

$$t_s = \frac{+5{,}19\ m/s}{+9{,}8\ m/s^2}$$

$\boxed{\mathbf{t_{subida} = 0{,}52\ s}}$

Al ser un movimiento parabólico en el que la CDG en la salida se encuentra a la misma altura que en la llegada, el tiempo de bajada es igual al de subida:

$t_{bajada} = t_{subida} = 0{,}52\ s$

La altura máxima:

$h = V_{iy} \cdot t_s + ½ g \cdot t_s^2$

$h = 5{,}19\ m/s \cdot 0{,}52\ s + ½\ (-9{,}8\ m/s^2) \cdot (0{,}52\ s)^2$

$h = 2{,}69\ m - 1{,}32\ m$

$\boxed{\mathbf{h = 1{,}37\ m}}$

El alcance:

En el eje de las “xs” no actúa ninguna fuerza externa si despreciamos el rozamiento del aire, por lo que se trata de un movimiento uniforme donde:

$V_x = x/t_{total}$

El tiempo total es la suma del de subida y bajada.

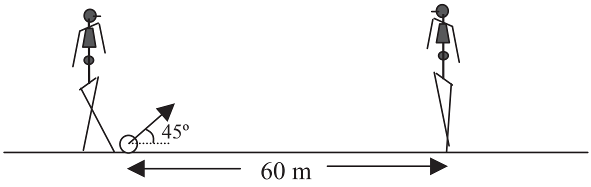
$t_{total} = t_{subida} + t_{bajada} = 0{,}52\ s + 0{,}52\ s = 1{,}04\ s$

Despejando:

$x = V_x \cdot t_{total} = 3\ m/s \cdot 1{,}04\ s$

$\boxed{\mathbf{x = 3{,}12\ m}}$

10. En un partido de fútbol, el jugador con balón "A" golpea el balón con el pie para pasar a los pies de un compañero situado a 60 m. Si el balón despega con un ángulo de 45º, ¿Qué velocidad inicial debe llevar para llegar a los pies del jugador "B" sin botar?



V_i ?

Se trata de un movimiento parabólico en el que el CDG en la salida se encuentra a la misma altura que en la llegada.

En el eje de las "Xs" se trata de un movimiento uniforme luego la V_x es constante si despreciamos el rozamiento del aire:

$V_x = x / t_{total}$ donde: $V_x = \cos 45º \cdot V_i$ por lo que

$$V_i = \frac{60 \text{ m}}{t_t \cdot \cos 45º}$$

Tenemos 2 incógnitas: V_i y el t_{total}

Centrándonos en el movimiento descrito en el eje de la "Yes", que es uniformemente decelerado en la subida y uniformemente acelerado en la bajada, tenemos que en la subida:

$$g = \frac{V_{fy} - V_{iy}}{t_s}$$ donde la V_{fy} es 0, luego

$$g = \frac{-V_{iy}}{t_s}$$ y donde $V_{iy} = \text{sen } 45º \cdot V_i$ por lo que

$$V_i = \frac{-g \cdot t_s}{\text{sen } 45º}$$ sabiendo que el tiempo de subida es la mitad del total:

$$V_i = \frac{-g \cdot ½\ t_{total}}{\text{sen } 45º}$$

Sustituimos en la ecuación de las "Xs" y tenemos en cuenta que en la fase de subida, la fuerza de la gravedad imprime desaceleración, por lo que la aceleración de la gravedad (g) es negativa, se opone al movimiento:

$$V_i = \frac{+9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} t_{total}}{\text{sen } 45º} = \frac{60\ \text{m}}{t_{total} \cdot \cos 45º}$$

Despejando el t_{total} nos queda:

$$t_{total} = \sqrt{\frac{60\ \text{m} \cdot \text{sen } 45º \cdot 2}{\cos 45º \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}}$$

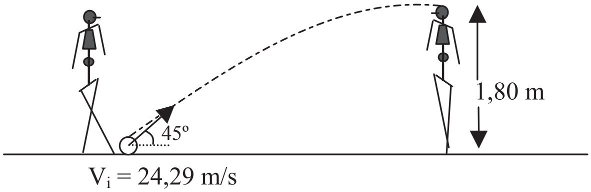
$$t_{total} = \sqrt{\frac{84{,}85\ \text{s}^2}{6{,}92}} = 3{,}50\ \text{s} = t_{total}$$

Sustituyendo en cualquiera de las 2 ecuaciones

$$V_i = \frac{60}{t_t \cdot \cos 45º} = \frac{60}{3{,}50 \cdot \cos 45º}$$

$$\boxed{\mathbf{V_i = 24{,}29\ m/s}}$$

11. Si el jugador "B" decidiera recibir con la cabeza (altura 1,80 m) ¿cuánto se tendría que adelantar?



Se trata de un movimiento parabólico en el que el CDG en la salida se encuentra más bajo que en la llegada. Luego el tiempo de subida no es igual al de bajada.

El tiempo de subida ha sido calculado en el problema anterior: $t_s = 1{,}75$ s

A partir de estos datos calculamos la altura alcanzada en la subida:

$h = V_{iy} \cdot t_s + ½\, g \cdot t_s^2$

$h = V_i \cdot \text{sen } 45º \cdot t_s + ½\, g \cdot t_s^2$

Al sustituir, tenemos en cuenta que en la fase de subida, la fuerza de la gravedad imprime desaceleración, por lo que la aceleración de la gravedad (g) es negativa, se opone al movimiento:

$h = 24{,}29 \text{ m/s} \cdot 0{,}70 \cdot 1{,}75 \text{ s} + ½ \cdot (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot (1{,}75 \text{ s})^2$

$\underline{h = 15 \text{ m}}$

Luego el espacio recorrido en la bajada será

$h_b = h_{subida} - h_{cabeza}$

$h_b = 15 \text{ m} - 1{,}80 \text{ m} = 13{,}20 \text{ m}$

Pasamos ahora a conocer el tiempo de bajada:

$h_{bajada} = ½\, g \cdot t_b^2$

$13{,}20 \text{ m} = ½ \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t_b^2$

$$t_b = \sqrt{\frac{2 \cdot 13{,}20 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}}$$

$\boxed{\mathbf{t_b = 1{,}64 \text{ s}}}$

El tiempo total es la suma del tiempo de subida y bajada:

$t_t = t_s + t_b$

$t_t = (1{,}75 + 1{,}64) \text{ s}$

$\boxed{\mathbf{t_t = 3{,}39 \text{ s}}}$

Con lo que el alcance será:

$x = V_x \cdot t_{total}$

$x = V_i \cdot \cos 45^o \cdot t_{total}$

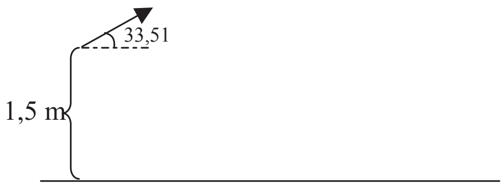
$x = 24{,}29 \text{ m/s} \cdot 0{,}70 \cdot 3{,}39 \text{ s}$

$\boxed{\mathbf{x = 58{,}20\ m}}$

Luego se tendrá que adelantar:

60 m - 58,20 m = $\boxed{\mathbf{1{,}80\ m}}$

12. En una jugada de un partido de pelota el pelotari "colorao" lanza la bola contra el frontis. En el momento que la pelota despega de la mano del deportista se encuentra a una altura de 1,5 m del suelo y forma un ángulo de 33,51º. ¿Qué velocidad inicial se le aplica a la bola si alcanza una altura máxima de 2,49 m?



Se trata de un movimiento parabólico, por lo tanto se desglosa en el eje "x" y el eje "y".

En el eje "y" el movimiento es uniformemente decelerado en la subida.

Cuando alcanza la altura máxima la $V_{fy} = 0$, por la que podemos decir que:

$$g = \frac{-V_{iv}}{t_s} \Longrightarrow t_s = \frac{-V_{iv}}{g} \Longrightarrow V_{iy} = g \cdot t_s$$

Otra fórmula del movimiento uniformemente acelerado es :

$h = V_{iy} \cdot t_s + ½\, g \cdot t_s^2$

Sustituyendo el t_s en la igualdad anterior:

$$h = V_{iy} \frac{-V_{iy}}{g} + ½\, g \cdot \left(\frac{-V_{iy}}{g}\right)^2$$

$$2{,}49 - 1{,}5 = \frac{-V_{iy}^2}{-9{,}8\ m/s^2} + ½\,(-9{,}8\ m/s^2)\,\frac{-V_{iy}^2}{(-9{,}8\ m/s^2)^2}$$

$$0{,}99\ m = \frac{V_{iy}^2}{9{,}8\ m/s^2} - ½\ \frac{V_{iy}^2}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$0{,}99\ m = ½\frac{V_{iy}^2}{9{,}8\ m/s^2} \Longrightarrow V_{iy} = \sqrt{0{,}99\ m^2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 2}$$

$$\boxed{V_{iy} = 4{,}40\ m/s}$$

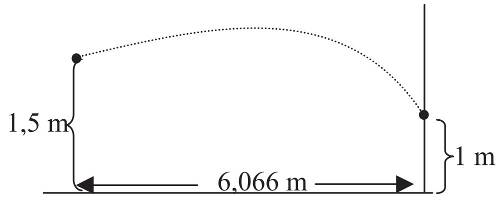
Siendo V_{iy} el cateto opuesto al ángulo, podemos calcular V_i con la razón trigonométrica del seno:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{V_{iy}}{V_i}$$

$$V_i = \frac{V_{iy}}{\text{sen } \alpha} = \frac{4{,}40}{\text{sen } 33{,}51}$$

$$\boxed{\mathbf{V_i = 8\ m/s}}$$

13. Si sabemos que en la misma jugada anterior la pelota contacta con el frontis a una altura del suelo de 1m y que el alcance horizontalmente recorrido por la bola desde que sale de la mano del pelotari es de 6,066 m ¿Con qué velocidad contacta la bola con el frontis? Calcular el módulo y la orientación.



Se trata de un movimiento parabólico en el que el CDG en la salida se encuentra más alto que en la llegada.

Conociendo V_x del problema anterior, podemos calcular el tiempo que transcurre desde que la bola sale de la mano del pelotari hasta que contacta con el frontis.

$$V_x = \frac{x}{t_t} \Longrightarrow t_t = \frac{x}{V_x} = \frac{6{,}066 \text{ m}}{8 \text{ m/s} \cdot \cos 33{,}51} = \frac{6{,}066 \text{ m}}{6{,}67 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{t_t = 0{,}90 \text{ s}}$$

El tiempo de bajada será el tiempo total menos el tiempo de subida:

$$t_{subida} = \frac{-V_{iy}}{g} = \frac{-4{,}40 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} = \boxed{0{,}44 \text{ s}}$$

La aceleración de la gravedad en la subida es negativa porque frena el movimiento.

$$t_{bajada} = (0{,}90 - 0{,}44) \text{ s} = \boxed{0{,}46 \text{ s}}$$

A partir de aquí podemos calcular la V_{fy} de bajada:

$$g = \frac{V_{fy} - \cancelto{0}{V_{iy}}}{t_b} \Longrightarrow V_{fy} = g \cdot t_b$$

$$V_{fy} = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}46\text{s} = \boxed{4{,}5 \text{ m/s}}$$

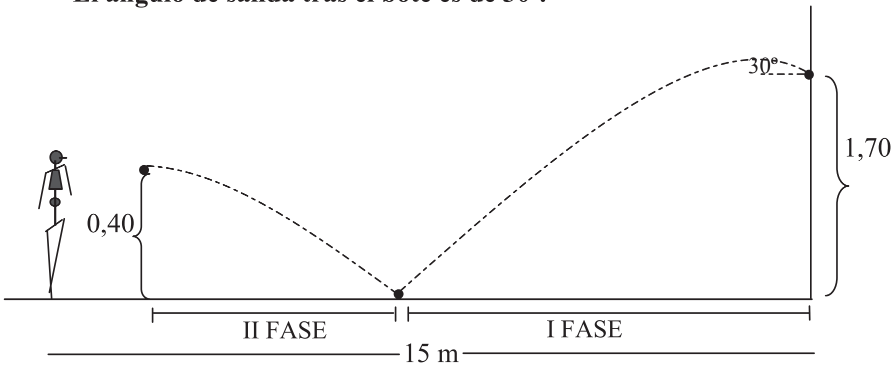
Conociendo V_{fy} y V_x podemos calcular la V_f por el teorema de Pitágoras:

$$V_f = \sqrt{V_{fy}^2 + V_x^2}$$

$$V_f = \sqrt{(4{,}5 \text{ m/s})^2 + (6{,}67 \text{ m/s})^2} \qquad \boxed{\mathbf{Vf = 8{,}04 \text{ m/s}}}$$

14. En otro partido de pelota, determinar a qué velocidad debe desplazarse el jugador azul para llegar a golpear la bola en el lugar en que ésta se encuentre a una altura de 0,40 m del suelo dentro de la fase descendente de la trayectoria descrita tras el bote. Otros datos:

- **El sujeto azul se encuentra a una distancia del frontis de 15 m.**
- **La bola sale de la pared desde una altura de 1,70 m del suelo.**
- **El ángulo de salida es de 30º con la horizontal.**
- **El módulo de la velocidad inicial es de 3,68 m/s.**
- **En el bote el contacto de la bola con el suelo dura 0,39 s y se produce una deceleración de 2 m/s^2.**
- **El ángulo de salida tras el bote es de 30º.**



$V_i = 3{,}68$ m/s

Se trata de un movimiento parabólico en el que el CDG en la salida se encuentra más alto que en la llegada (I Fase) y en la II Fase el CDG en la salida está más bajo que en la llegada.

Primero calculamos el tiempo de subida de la I Fase:

$$g = \frac{\cancelto{0}{V_{fy}} - V_{iy}}{t_{sI}} \Longrightarrow t_{sI} = \frac{-V_{iy}}{g}$$

$$t_{sI} = \frac{-\text{sen } 30º \cdot 3{,}68 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{t_{sI} = 0{,}18 \text{ s}}$$

Para calcular el tiempo de bajada de la I Fase, primero tengo que conocer la altura máxima (h_{max}) alcanzada en la subida.

$h_{max} = V_{iy} \cdot t_{sI} + ½ g \cdot t^2_{sI}$

$h_{max} = \text{sen } 30º \cdot 3{,}68 \text{ m/s} \cdot 0{,}18 \text{ s} + ½ (-9{,}8 \text{ m/s}) \cdot (0{,}18 \text{ s})^2$

$h_{max} = 0{,}18$ m a los que hay que sumarle la altura de partida, luego 1,88 m.

Una vez conocido el espacio en altura a recorrer por la bola en la bajada de la I Fase, el tiempo de bajada:

$$h_{bajadaI} = ½g·t^2_{bI} \Longrightarrow t^2_{bI} = \frac{2h_{bI}}{g}$$

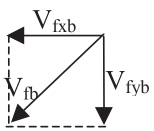
$$t_{bI} = \sqrt{\frac{2 ·1{,}88 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 0{,}61\text{s} \qquad \boxed{t_{bI} = 0{,}61 \text{ s}}$$

A partir de aquí podemos conocer la velocidad final de bajada de la I Fase:

$$g = \frac{V_{fby} - \cancelto{0}{V_{iby}}}{t_{bI}} \Longrightarrow V_{fby} = g·t_{bI}$$

$$V_{fby} = 9{,}8 \text{ m/s}^2 · 0{,}61 \text{ s} = 5{,}97 \text{ m/s} \qquad \boxed{V_{fby} = 5{,}97 \text{ m/s}}$$

Por lo tanto la V_f resultante cuando contacta con el suelo será:



$$V_{fb} = \sqrt{V_{fxb}^2 + V_{fyb}^2} = \sqrt{(\cos 30 · 3{,}68 \text{ m/s})^2 + 5{,}97^2 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{V_{fb} = 6{,}79 \text{ m/s}}$$

Pero en el bote se produce una desaceleración por lo que la V_i de la II Fase cambia.

Durante el bote:

$$a = \frac{V_{fbote} - V_{ibote}}{t_b} \Longrightarrow V_{fbote} = a·t_{bote} + V_{ibote}$$

$$V_{fbote} = -2 \text{ m/s}^2 · 0{,}39 \text{ s} + 6{,}79 \text{ m/s} = 6{,}01 \text{ m/s} \qquad \boxed{V_{fbote} = 6{,}01 \text{ m/s} = V_{iII}}$$

Esta V final del bote es la inicial de la II Fase.

Vamos a calcular ahora el tiempo de subida tras el bote:

$$g = \frac{\cancelto{0}{V_{fysII}} - V_{iysII}}{t_{sII}} \Longrightarrow t_{sII} = \frac{- V_{iysII}}{g}$$

$$t_{sII} = \frac{-\text{sen } 30 · 6{,}01 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{t_{sII} = 0{,}30 \text{ s}}$$

La altura máxima alcanzada en la subida es de:

$$h_{sII} = V_{iysII}·t_{sII} + ½g·t^2_{sII}$$

$h_{sII} = 3\ m/s \cdot 0{,}30\ s + ½\ (-9{,}8\ m/s^2) \cdot 0{,}30^2\ s^2$

$\boxed{h_{sII} = 0{,}45\ m}$

El tiempo de bajada de la II Fase:

$h_{bII} = ½ g \cdot t^2_{bII} \Longrightarrow t_{bII} = \sqrt{\dfrac{h_{bII} \cdot 2}{g}}$

$t_{bII} = \sqrt{\dfrac{0{,}05\ m \cdot 2}{9{,}8\ m/s^2}} = 0{,}1\ s$

$\boxed{t_{bII} = 0{,}1\ s}$

Para saber el espacio total recorrido por la bola en el eje x tenemos que saber el tiempo total de la jugada.

$t_{total} = t_{sI} + t_{bI} + t_{sII} + t_{bII}$

$t_{total} = (0{,}18 + 0{,}61 + 0{,}30 + 0{,}1)\ s$

$\boxed{t_{total} = 1{,}19\ s}$

donde:

$V_x = \dfrac{x}{t_t} \Longrightarrow x = V_x \cdot t_t$

Pero la V_x varía de la I Fase a la II, por lo que:

$X_{total} = X_{IFase} + X_{IIFase}$

$X_{IFase} = V_{xIFase} \cdot t_{tI}$

$X_{IFase} = \cos 30 \cdot 3{,}68\ m/s \cdot (0{,}18 + 0{,}61)\ s$

$\boxed{X_{IFase} = 2{,}51\ m}$

$X_{IIFase} = V_{xIIFase} \cdot t_{tII}$

$X_{IIFase} = \cos 30 \cdot 6{,}01\ m/s\ (0{,}30 + 0{,}1)\ s$

$\boxed{X_{IIFase} = 2{,}08\ m}$

$X_{total} = X_{IFase} + X_{IIFase}$

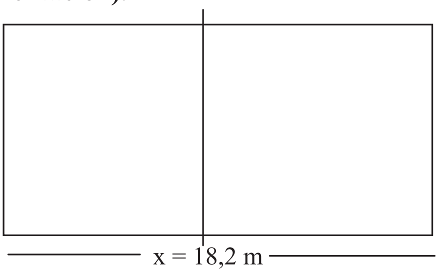
$X_{total} = 2{,}51\ m + 2{,}08\ m = 4{,}59\ m$

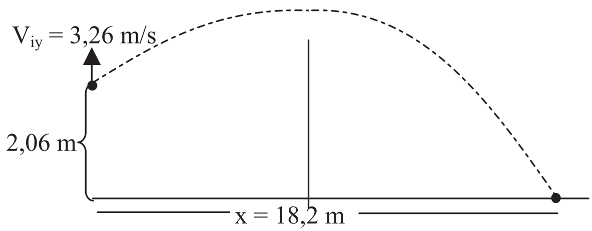
Luego el pelotari se tiene que adelantar 15 m – 4,59 m= $\boxed{10{,}41\ m}$

$V_x = \dfrac{e}{t} = \dfrac{10{,}41\ m}{1{,}19\ s}$ $\boxed{\mathbf{V = 8{,}74\ m/s}}$

15. Una jugadora de voleibol se encuentra en la posición de saque e intenta lanzar el balón de tal forma que bote junto a la línea de fondo del campo contrario que se encuentra a 18,2 m del punto de saque. La altura del balón en el momento del despegue es de 2,06 m y la velocidad inicial vertical es de 3,26 m/s. Calcular:

- **El tiempo de vuelo del balón.**
- **Cuál debe ser la velocidad horizontal para que el balón bote junto a la línea de fondo.**
- **La velocidad inicial resultante (módulo y orientación).**
- **Cuántos metros ha recorrido en la horizontal hasta el momento de alcanzar la altura máxima.**
- **Sabiendo que la red se encuentra horizontalmente a 9,2 m del punto de saque y a una altura del suelo de 2,24 m, ¿conseguirá el balón sobrepasar la red?**
- **¿Con qué velocidad resultante contacta el balón con el suelo? (módulo y orientación).**





Para calcular el tiempo de vuelo tengo que conocer el tiempo de subida más el tiempo de bajada.

Tiempo de subida:

Cuando alcanza la altura máxima la velocidad en el eje vertical es nula, por lo tanto podemos calcular el tiempo con la siguiente fórmula:

$$g = \frac{V_{fys} - V_{iys}}{t_s} \Longrightarrow t_s = \frac{\cancelto{0}{V_{fys}} - V_{iys}}{g}$$

$$t_s = \frac{-3{,}26 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{t_{subida} = 0{,}33 \text{ s}}$$

Para calcular el tiempo de bajada tengo que conocer el espacio recorrido verticalmente que será lo que recorra en la subida más los 2,06 m de altura de la que parte.

En la subida recorre:

$h_{max} = V_{iys} \cdot t_s + ½ g \cdot t^2_s$

$h_{max} = 3{,}26 \text{ m/s} \cdot 0{,}33 \text{ s} + ½ (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot (0{,}33 \text{ s})^2$

$h_{max} = 1{,}07 \text{ m} - 0{,}53 \text{ m}$

$$\boxed{h_{max} = 0{,}54 \text{ m}}$$

Luego en la bajada recorre:

$h_{bajada} = 0{,}54 \text{ m} + 2{,}06 \text{ m} = 2{,}60 \text{ m}$

Por lo que el tiempo de bajada será:

$h_{bajada} = \cancelto{0}{V_{iyb}} \cdot t_b + ½ g \cdot t^2_b$

$h_{bajada} = ½ g \cdot t^2_b$

$2{,}60 = ½ \; 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2_b$

$$t_b = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}60 \cancel{\text{m}}}{9{,}8 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} \qquad \boxed{t_b = 0{,}73 \text{ s}}$$

Y el tiempo de vuelo total será:

$t_{total} = t_{subida} + t_{bajada}$

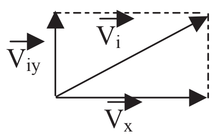
$t_{total} = 0{,}33 \text{ s} + 0{,}73 \text{ s}$ $\quad \boxed{\mathbf{t_t = 1{,}06 \text{ s}}}$

Donde la velocidad horizontal (V_x) será:

$$V_x = \frac{X}{t_{total}} = \frac{18{,}2 \text{ m}}{1{,}06 \text{ s}} = \boxed{\mathbf{17{,}16 \text{ m/s}}}$$

al tratarse de un movimiento uniforme en la horizontal.

Una vez conocidas las velocidades iniciales (horizontal y vertical) podemos calcular la velocidad inicial resultante:



Por el teorema de Pitágoras calculamos el módulo:

$$V_i = \sqrt{V_{iy}^2 + V_x^2} = \sqrt{(2{,}06 \text{ m/s})^2 + (17{,}16 \text{ m/s})^2}$$

$$V_i = \sqrt{4{,}24 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 294{,}46 \text{ m}^2/\text{s}^2} \qquad \boxed{\mathbf{V_i = 17{,}28 \text{ m/s}}}$$

Orientación:

$$\text{sen } \alpha = \frac{V_{iy}}{V_i} = \frac{2{,}06 \text{ m/s}}{17{,}28 \text{ m/s}} \qquad \boxed{\text{sen } \alpha = 0{,}11 \Longrightarrow \alpha = 6{,}84}$$

Los metros recorridos en la horizontal hasta alcanzar la altura máxima se calcula teniendo en cuenta el tiempo de subida.

$$V_x = \frac{X_{subida}}{t_{subida}} \Longrightarrow X_{subida} = V_x \cdot t_{subida}$$

$$X_{subida} = 17{,}16 \text{ m/s} \cdot 0{,}33 \text{ s} \qquad \boxed{\mathbf{X_{subida} = 5{,}66 \text{ m}}}$$

Sabiendo que la red se encuentra horizontalmente a 9,2 m y una altura de 2,24 m, el balón pasará por ese punto en la bajada. Para saber si sobrepasará la red o no, tengo que conocer el tiempo de vuelo invertido hasta ese punto:

$$V_x = \frac{X}{t} \Longrightarrow t_{9,2} = \frac{9{,}2 \cancel{\text{m}}}{17{,}16 \cancel{\text{m}}/\text{s}} = \underline{0{,}53 \text{ s}}$$

De ese tiempo, 0,33 s son de subida y 0,20 s de bajada. Tomando estos últimos los empleamos para calcular el espacio recorrido en la vertical en dicho momento.

$$h = V_{iyb} \cdot t_b + \tfrac{1}{2} g \cdot t_b^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}20 \text{ s})^2 \qquad \boxed{h = 0{,}19 \text{ m}}$$

Por lo tanto, cuando el balón llega a la red se encuentra a una altura del suelo de:

$$h_{red} = h_{bajada} - h_{9,2x}$$

$$h_{red} = (2{,}60 - 0{,}19) \text{ m} = \boxed{\mathbf{2{,}41 \text{ m}}}$$

Por lo tanto sí sobrepasa la red que se encuentra a una altura de 2,24 m.

Para calcular la velocidad resultante con que contacta en el suelo, necesito conocer la velocidad final de bajada, para lo que:

$$g = \frac{V_{fyb} - \cancelto{0}{V_{iyb}}}{t_b} \Longrightarrow V_{fyb} = g \cdot t_b$$

$V_{fyb} = 9{,}8\ m/\cancel{s^2} \cdot 0{,}73\ \cancel{s}$ $\boxed{\mathbf{V_{fyb} = 7{,}15\ m/s}}$

Como va hacia abajo vamos a considerar la velocidad final de bajada negativa, por lo que la velocidad final:

Módulo:

$$V_f = \sqrt{V_{fyb}^2 + V_x^2}$$

$$V_f = \sqrt{(-\ 7{,}15\ m/s)^2 + (17{,}16\ m/s)^2} = \sqrt{51{,}12\ m^2/s^2 + 294{,}46\ m^2/s^2}$$

$\boxed{\mathbf{V_f = 18{,}58\ m/s}}$

Orientación:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{V_{fy}}{V_f} = \frac{-\ 7{,}15\ m/s}{18{,}58\ m/s} = -0{,}38$$

α = arcosen -0,38 = $\boxed{\mathbf{-\ 22{,}63 = \alpha}}$

16. En una carrera de maratón de 42 km el sujeto "A" comienza a un ritmo fuerte que mantiene más o menos constante a una velocidad de 11,25 km/h durante la primera hora y media, a partir de ahí cambia a otra velocidad que mantiene durante el resto de la prueba igual a 8,5 km/h. El sujeto "B" mantiene un ritmo constante durante los 42 km igual a 9,5 km/h. ¿Quién ganará la prueba? En caso de que sea "B", ¿en qué punto de la prueba alcanza a "A"?

Para saber quien gana la prueba tenemos que calcular el tiempo invertido por cada atleta para recorrer los 42 km.

En el caso de "A" la carrera se divide en dos fases, ambas con movimientos uniformes, por lo que:

$$V = \frac{e}{t}$$

En la primera fase invierte un tiempo de 1 h 30 minutos a una velocidad constante de 11,25 km/h. Si calculamos el espacio recorrido en esta primera fase, podremos calcular el tiempo invertido en la segunda fase:

$e = v{\cdot}t = 11{,}25\ \text{km}/\cancel{\text{h}} \cdot 1{,}5\ \cancel{\text{h}} = \underline{16{,}87\ \text{km}}$

Por lo que en la segunda fase tiene que recorrer:

$42\ \text{km} - 16{,}87\ \text{km} = \underline{25{,}13\ \text{km}}$

Lo hace a una velocidad constante de 8,5km/h por lo que el tiempo invertido será:

$$t = \frac{e}{V} = \frac{25{,}13\ \cancel{\text{km}}}{8{,}5\ \cancel{\text{km}}/\text{h}} = \underline{2{,}95\ \text{h}}$$

Por lo que el tiempo total invertido por el atleta "A" será:

$t_{totalA} = t_{IFase} + t_{IIFase}$

$t_{totalA} = 1{,}5\ \text{h} + 2{,}95\ \text{h}$

$\boxed{\mathbf{t_{totalA} = 4{,}45\ h}}$

"B" recorre los 42 km a una velocidad constante de 9,5 km/h por lo que el t_{total} invertido es:

$$t_{totalB} = \frac{e}{V_B} = \frac{42\ \cancel{\text{km}}}{9{,}5\ \cancel{\text{km}}/\text{h}} = 4{,}42\ \text{h}$$

$\boxed{\mathbf{t_{totalB} = 4{,}42\ h}}$

Por lo que la prueba la gana "B"

En el momento en que "B" alcanza a "A", ambos llevan invertido el mismo tiempo y coincidirá con la segunda fase de "A", luego el tiempo invertido en ese momento será:

$t_{alcance} = t_{\text{"A"}IFase} + t_{\text{"A"}IIFase}$ hasta alcance $= t_{\text{"B"}}$ hasta alcance

$$t_{\text{alcance}} = 1{,}5\ \text{h} + t_{\text{"A"IIFase a}} = t_{\text{"B"a}}$$

$$t_{\text{alcance}} = 1{,}5\ \text{h} + \frac{e_{\text{"A"IIFase a}}}{8{,}5\ \text{km/h}} = \frac{e_{\text{"B"a}}}{9{,}5\ \text{km/h}}$$

$$t = \frac{e}{V}$$

El espacio recorrido por “B” hasta el alcance ($e_{\text{"B"a}}$) es igual al recorrido por “A” en la I Fase (16,87 km) más el recorrido por “A” en la II Fase hasta el alcance ($e_{\text{"A"IIFase a}}$).

$$e_{\text{"B"a}} = 16{,}87\ \text{km} + e_{\text{"A"IIFase a}}$$

Luego:

$$1{,}5\ \text{h} + \frac{e_{\text{"A"IIFase a}}}{8{,}5\ \text{km/h}} = \frac{16{,}87\ \text{km} + e_{\text{"A"IIFase a}}}{9{,}5\ \text{km/h}}$$

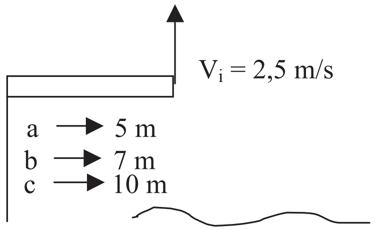
$$14{,}25\ \text{km} + 1{,}11\ e_{\text{"A"IIFase a}} = 16{,}87\ \text{km} + e_{\text{"A"IIFase a}}$$

$$0{,}11\ e_{\text{"A"IIFase a}} = 2{,}62\ \text{km}$$

$$e_{\text{"A"IIFase a}} = 23{,}81\ \text{km} \Longrightarrow e_{\text{"B"a}} = (23{,}81 + 16{,}87)\ \text{km} = \boxed{\mathbf{40{,}68\ km}}$$

17. Un saltador de trampolín salta verticalmente hacia arriba con una velocidad de 2,5 m/s. Calcular la altura máxima alcanzada por el saltador y la velocidad al tocar el agua en las siguientes situaciones:

- **El trampolín se encuentra a 5 m de altura.**
- **El trampolín se encuentra a 7 m de altura.**
- **El trampolín se encuentra a 10 m de altura.**



La altura máxima alcanzada desde el trampolín es la misma en los tres casos. Para calcularla primero tenemos que conocer el tiempo empleado en la subida.

Se trata de un movimiento uniformemente desacelerado, por lo que:

$$g = \frac{\cancelto{0}{V_f} - V_i}{t} \Longrightarrow t = \frac{-V_i}{g} \Longrightarrow t = \frac{-2{,}5\ \cancel{m}/\cancel{s}}{-9{,}8\ \cancel{m}/s^{\cancel{2}}} = \underline{0{,}25\ s}$$

Por lo que la altura máxima alcanzada es:

$h_{max} = V_i \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$h_{max} = 2{,}5\ m/s \cdot 0{,}25\ s + \frac{1}{2}\,(-9{,}8\ m/s^2) \cdot (0{,}25\ s)^2$

$h_{max} = 0{,}625\ m - 0{,}30\ m$ $\boxed{\mathbf{h_{max} = 0{,}32\ m}}$

Para calcular la velocidad al tocar el agua en las tres situaciones primero tenemos que conocer el tiempo que tarda en recorrer las distintas distancias de bajada.

Si el trampolín se encuentra a 5 m de altura, la distancia recorrida en la bajada es de 5,32 m y el tiempo de descenso:

$h = \cancelto{0}{V_i} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$5{,}32\ m = \frac{1}{2}\,(9{,}8\ m/s^2) \cdot t^2$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}32\ \cancel{m}}{9{,}8\ \cancel{m}/s^2}} \qquad \boxed{\mathbf{t = 1{,}04\ s}}$$

y la velocidad final:

$$g = \frac{V_f - \cancelto{0}{V_i}}{t}$$

$$9{,}8\ m/s^2 = \frac{V_f}{1{,}04\ s} \Longrightarrow V_f = 9{,}8\ m/\cancel{s^2} \cdot 1{,}04\ \cancel{s}$$

$$\boxed{\mathbf{V_f = 10{,}21\ m/s}}$$

Si el trampolín se encuentra a 7 m de altura, la distancia recorrida en la bajada es de 7,32 m y el tiempo de descenso:

$7{,}32\ m = ½\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot t^2$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}32\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = \underline{1{,}22\ s}$$

y la velocidad final:

$$g = \frac{V_f}{t} \Longrightarrow V_f = 9{,}8\ m/\cancel{s^2} \cdot 1{,}22\ \cancel{s} \quad \boxed{\mathbf{V_f = 11{,}97\ m/s}}$$

Si el trampolín se encuentra a 10m:

$$10{,}32\ m = ½\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10{,}32\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = \underline{1{,}45\ s}$$

y la velocidad final:

$$V_f = 9{,}8\ m/\cancel{s^2} \cdot 1{,}45\ \cancel{s} \quad \boxed{\mathbf{V_f = 14{,}22\ m/s}}$$

18. Si el saltador del problema anterior quiere realizar dos mortales y medio hacia adelante antes de caer al agua, ¿cuál será la velocidad angular media mínima a la que debe realizar cada mortal para que le dé tiempo de completar el ejercicio antes de sumergirse?

La velocidad angular es igual a:

$\omega = \sigma/t$

En dos mortales y medio se recorren 900º, pasándolo a radianes:

1 rad = 57,3º

x rad = 900º   x rad = 900º/57,3º   x rad = 15,70 rad

Y el tiempo de que dispone es el tiempo total del salto, desde que despega hasta que alcanza el agua:

$t_{total} = t_{subida} + t_{bajada}$

Si el trampolín está a <u>5 m</u> :

t_{total} = 0,25 s + 1,04 s = 1,29 s

y la ω

ω = 15,70 rad/1,29 s = **12,17 rad/s**

Si el trampolín está a <u>7 m</u>:

t_{total} = 0,25 s + 1,22 s = 1,47 s

y la ω

ω = 15,70 rad/1,47 s = **10,68 rad/s**

Si el trampolín está a <u>10 m</u>:

t_{total} = 0,25 s + 1,45 s = 1,70 s

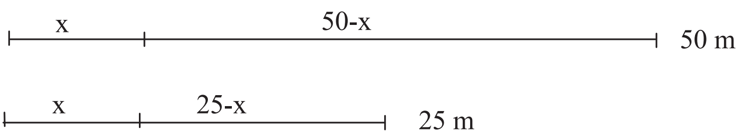
y la ω

ω = 15,70 rad/1,70 s = **9,23 rad/s**

19. Un nadador recorre una piscina de 50 m en 25 s y una de 25 m en 14 s. Si el nadador se desplaza, en ambas pruebas, con una aceleración constante hasta una velocidad máxima que mantiene durante el resto de la prueba y considerando que el período de aceleración es el mismo para ambas pruebas, ¿cuánto tiempo dedica a la aceleración? ¿Cuál es la velocidad máxima?

En ambos casos existen 2 fases:

La primera uniformemente acelerada y la segunda constante o uniforme:



"x" es el espacio recorrido en la I fase.

En ambos casos conocemos el tiempo total y la distancia total.

Partiendo de las siguientes ecuaciones:

Movimiento uniformemente acelerado:

$$V_m = \frac{\cancelto{0}{V_i} + V_f}{2} = \frac{x}{t} \Longrightarrow t = \frac{2x}{V_f}$$

Movimiento uniforme:

$$V = \frac{e}{t} \Longrightarrow t = \frac{e}{V}$$

Podemos plantear las siguientes ecuaciones:

En la piscina de 50 m $\Longrightarrow$ $t_{total} = t_{IFase} + t_{IIFase}$

$$t_{total} = \frac{2x}{V_f} + \frac{50\text{-}x}{V_f}$$

$$\left.\begin{array}{l} 25\ s = \dfrac{2x}{V_f} + \dfrac{50\text{-}x}{V_f} \\[2ex] 14\ s = \dfrac{2x}{V_f} + \dfrac{25\text{-}x}{V_f} \end{array}\right\}$$

En la piscina de 25 m $\Longrightarrow$ $14\ s = \dfrac{2x}{V_f} + \dfrac{25\text{-}x}{V_f}$

Creándose un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Despejando, nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 50\ m - x = 25\ s \cdot V_f \\ 2x + 25\ m - x = 14\ s \cdot V_f \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 25\ s \cdot V_f - 50\ m \\ x = 14 s \cdot V_f - 25\ m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 25\ s \cdot V_f - 50 = 14\ s \cdot V_f - 25 \\ 11\ s \cdot V_f = 25 \qquad V_f = 25\ m/11\ s = \boxed{\mathbf{2{,}27\ m/s}} \end{array}$$

El espacio de aceleración es igual a:

$x = 25\ s \cdot V_f - 50\ m$

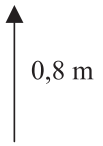
$x = 25\ \cancel{s} \cdot 2{,}27\ m/\cancel{s} - 50\ m$

$\boxed{\mathbf{x = 6{,}75\ m}}$

Siendo el tiempo de aceleración:

$$t = \frac{2x}{V_f} = \frac{2 \cdot 6{,}75\ m}{2{,}27\ m/s} = \boxed{\mathbf{5{,}94\ s}}$$ tiempo de aceleración

20. Un jugador de voleibol que va a realizar un bloqueo salta verticalmente 0,8 m. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima?



Se trata de un movimiento uniformemente desacelerado, donde:

$h_{max} = V_i \cdot t + ½\, g \cdot t^2$ y

$$g = \frac{\cancelto{0}{V_f} - V_i}{t} \Longrightarrow V_i = -g \cdot t$$

Luego:

$h_{max} = -g \cdot t^2 + ½\, g \cdot t^2$

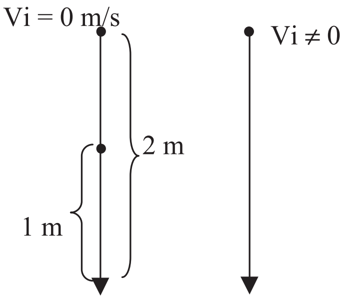
$h_{max} = -\, ½\, g \cdot t^2$

$0{,}8 \text{ m} = -\, ½\, (-9{,}8 \text{ m/s}^2)\, t^2$

$$t = \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 2\, \cancel{m}}{9{,}8\, \cancel{m}/s^2}}$$

$$\boxed{\mathbf{t = 0{,}40\ s}}$$

21. Un jugador de baloncesto deja caer libremente un balón desde una altura de 2 metros. Cuando el balón se encuentra a mitad de camino, un segundo balón es lanzado en sentido descendente desde la misma altura anterior. Los dos balones contactan con el suelo simultáneamente. ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo balón.



Para poder calcular la velocidad inicial con que es lanzado el segundo balón, primero debemos conocer el tiempo que tarda en llegar al suelo que, como dice el enunciado, es el mismo que tarda el primer balón en recorrer el último metro. Por ello, nos centraremos en el primer balón, que describe un movimiento de caída libre donde la velocidad inicial (V_i) es igual a cero.

$$h = \cancelto{0}{V_i} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Así que, desde que se deja caer hasta que recorre 1 metro, pasa un tiempo de:

$$t_{1m} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cancel{m}}{9,8 \cancel{m}/s^2}} = 0,45 \text{ s}$$

y desde que se deja caer hasta que recorre los 2 metros, pasa un tiempo de:

$$t_{2m} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cancel{m}}{9,8 \cancel{m}/s^2}} = 0,63 \text{ s}$$

Por lo tanto, el último metro lo recorre en un tiempo de:

$t_{1\text{-}2m} = t_{2m} - t_{1m}$

$t_{1\text{-}2m} = 0,63 \text{ s} - 0,45 \text{ s}$

$$\boxed{\mathbf{t_{1\text{-}2m} = 0,18 \text{ s}}}$$

Con lo que ya conocemos el tiempo que tarda el balón segundo en recorrer los 2 m: 0,18 s.

A partir de aquí calculamos la velocidad inicial de lanzamiento:

$h = V_i \cdot t + ½g \cdot t^2$

$2\ m = V_i \cdot 0{,}18\ s + ½\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (0{,}18\ s)^2$

$$V_i = \frac{2\ m - 0{,}15\ m}{0{,}18\ s}$$

$\boxed{\mathbf{V_i = 10{,}27\ m/s}}$

22. Una gimnasta realiza un ejercicio en las paralelas, para finalizar el ejercicio quiere realizar 2 mortales hacia adelante y cada mortal le cuesta 0,63 s. Sabiendo que:

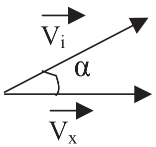
- **el CDG en el despegue se encuentra a una altura de 2 m,**
- **el alcance recorrido durante el vuelo es de 45 cm y**
- **la velocidad inicial de despegue es de 3,02 m/s**

calcular el ángulo de salida, la altura máxima alcanzada y el alcance recorrido al finalizar el primer mortal y la altura en ese momento.

Si cada mortal le cuesta 0,63 s el tiempo mínimo de vuelo es de 1,26 s. A partir de este dato, y como conocemos el alcance recorrido en el eje x, podemos conocer la componente horizontal de la velocidad inicial:

$$V_x = \frac{e}{t} = \frac{0{,}45\ \text{m}}{1{,}26\ \text{s}} = 0{,}35\ \text{m/s}$$

Conociendo la velocidad inicial y V_x podemos calcular el ángulo de despegue:



$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V_i} = \frac{0{,}35\ \text{m/s}}{3{,}02\ \text{m/s}} = 0{,}11$$

arccos 0,11 = 83,34º

y la componente vertical será:

$V_{iys} = V_i \cdot \text{sen}\ \alpha$

$V_{iys} = 3{,}02\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 83{,}34 = 2{,}99\ \text{m/s}$

Para calcular la altura máxima alcanzada debemos conocer el tiempo invertido en la subida:

$$g = \frac{\cancelto{0}{V_{fys}} - V_{iys}}{t_s} \Longrightarrow t_s = \frac{-V_{iys}}{g} = \frac{-2{,}99\ \cancel{\text{m/s}}}{-9{,}8\ \cancel{\text{m/s}^2}} = 0{,}30\ \text{s}$$

y la altura máxima alcanzada:

$h = V_{iys} \cdot t_s + \frac{1}{2}\, g \cdot t_s^2$

$h = 2{,}99\ \text{m}/\cancel{\text{s}} \cdot 0{,}30\ \cancel{\text{s}} + \frac{1}{2}\,(-9{,}8\ \text{m}/\cancel{\text{s}^2}) \cdot (0{,}30\ \cancel{\text{s}})^2$

$h = 0{,}89\ \text{m} - 0{,}44\ \text{m} = 0{,}45\ \text{m}$ tomando como referencia el punto de despegue.

Si tomamos como referencia el suelo:

$h_{max} = (0{,}45 + 2)\text{m} = 2{,}45\ \text{m}$

El espacio recorrido en las “x” tras el primer mortal se calculará teniendo en cuenta que el tiempo invertido en cada mortal es de 0,63 s:

$$V_x = \frac{e}{t} \Longrightarrow e = V_x \cdot t = 0{,}35\ \text{m/s} \cdot 0{,}63\ \text{s} = \boxed{\mathbf{0{,}22\ m}}$$

La altura, tras finalizar el primer mortal, se halla teniendo en cuenta que, si el tiempo invertido en este gesto técnico corresponde a los primeros 0,63 s, de los cuales los primeros 0,30 s son de fase ascendente, cuando finaliza el mortal se encuentra en fase descendente habiendo invertido los primeros 0,33 s de bajada, por lo que:

$$h = \cancelto{0}{V_{1yb}} \cdot t_b + \tfrac{1}{2}\, g \cdot t_b^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, g \cdot t_b^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}33\ \text{s})^2$$

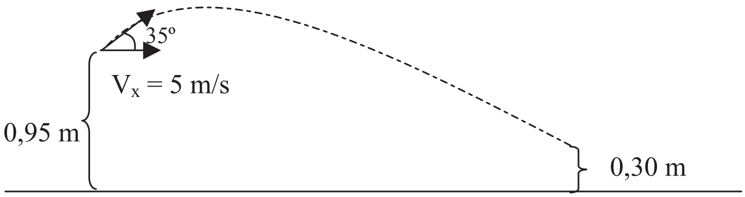
$\boxed{\mathbf{h = 0{,}53\ m}}$ ha descendido desde el punto más alto, por lo que se encuentra a una altura del suelo de:

$$h = 2{,}45\ \text{m} - 0{,}53\ \text{m} = \boxed{\mathbf{1{,}92\ m}}$$

23. Un saltador de longitud realiza un salto. Sabiendo que:

- **El CDG se encuentra en la batida a una altura de 0,95 m y en el despegue a 0,30 m,**
- **La velocidad horizontal de batida es de 5 m/s y**
- **El ángulo de vuelo es de 35º,**

calcular la velocidad vertical que alcanza, la velocidad inicial resultante, el tiempo de vuelo, la altura máxima y el alcance.



La velocidad vertical se calcula con la razón trigonométrica siguiente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{V_{iy}}{V_x}$$

$$\text{tg } 35 = \frac{V_{iy}}{5\text{m/s}} \Longrightarrow V_{iy} = \text{tg } 35 \cdot 5 \text{ m/s} = \boxed{\mathbf{3{,}5 \text{ m/s}}}$$

La velocidad inicial resultante será:

$$V_i = \sqrt{V_{iy}^2 + V_x^2} = \sqrt{(3{,}5 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} = \boxed{\mathbf{6{,}10 \text{ m/s}}}$$

El tiempo de vuelo será igual al tiempo de subida más el tiempo de bajada.

En la subida el tiempo invertido es aquel empleado en alcanzar la altura máxima, donde la $V_{fys} = 0$

$$g = \frac{V_{fys} - V_{iys}}{t_s} \Longrightarrow t_s = \frac{-V_{iys}}{g} = \frac{-3{,}5 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} = \boxed{\mathbf{0{,}35 \text{ s}}}$$

Como no conocemos la velocidad final de bajada en las "y", para calcular el tiempo de bajada necesitamos conocer la altura recorrida, partiendo de la altura máxima que es:

$h_{max} = V_{iys} \cdot t_s + ½ g \cdot t_s^2$

$h_{max} = 3{,}5 \text{ m/s} \cdot 0{,}35 \text{ s} + ½ (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot (0{,}35 \text{ s})^2$

$h_{max} = 1{,}22 \text{ m} - 0{,}60 \text{ m}$

$\boxed{\mathbf{h_{max} = 0{,}62 \text{ m}}}$ partiendo de la altura a la que se encontraba el CDG en la salida.

Partiendo desde el suelo: $h_{max} = 0{,}62 \text{ m} + 0{,}95 \text{ m}$ $\boxed{\mathbf{h_{max} = 1{,}57 \text{ m}}}$

Pero en la bajada cae a 30 cm de altura del suelo luego la altura recorrida es 1,27 m y el tiempo de bajada será:

$$h_b = \cancelto{0}{V_{iyb}} \cdot t_b + \frac{1}{2} g \cdot t_b^2$$

$$h_b = \frac{1}{2} g \cdot t_b^2$$

$$t_b = \sqrt{\frac{h_b \cdot 2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}27 \cancel{\text{m}}}{9{,}8 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} = 0{,}50 \text{ s}$$

y el tiempo total de vuelo:

$t_{total} = t_s + t_b = 0{,}35 \text{ s} + 0{,}50 \text{ s} = \underline{0{,}85 \text{ s}}$

El alcance recorrido será:

$$V_x = \frac{e}{t_{total}} \Longrightarrow e = V_x \cdot t_{total} \Longrightarrow e = 5 \text{ m/s} \cdot 0{,}85 \text{ s}$$

$\boxed{\mathbf{e = 4{,}25 \text{ m}}}$

24. En una partida de dardos un participante en el gesto técnico realiza una menos flexión de codo cubriendo un recorrido de 0,3 radianes, empleando un tiempo de 0,04 s. Calcular la aceleración angular y la velocidad angular final del gesto técnico además de la velocidad lineal con la que sale el dardo despedido de la mano del sujeto. La distancia entre el codo y agarre del dardo es de 46 cm.

Para calcular la velocidad angular final empleamos la fórmula de la velocidad angular media:

$\omega = \sigma/t = (\omega_f + \omega_i) / 2$

$$\frac{0{,}3 \text{ rad}}{0{,}04 \text{ s}} = \frac{\omega_f + \omega_i}{2}$$

$$\omega_f = \frac{2 \cdot 0{,}3 \text{ rad}}{0{,}04 \text{ rad}} = \boxed{\textbf{15 rad/s}}$$

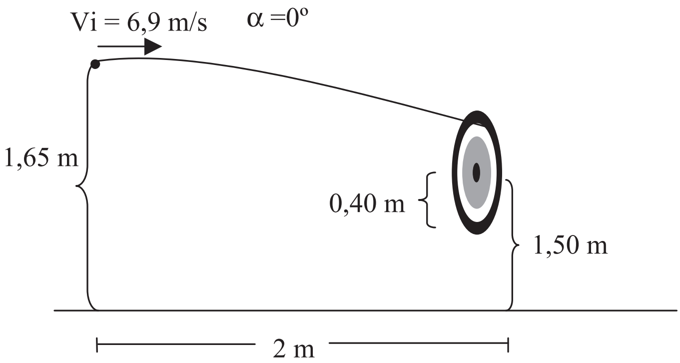
La aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{15 \text{ rad/s}}{0{,}04 \text{ s}} = \boxed{\textbf{375 rad/s}^2}$$

La velocidad lineal del dardo será:

$$V = \omega \cdot r = 15 \text{ rad/s} \cdot 0{,}46 \text{ m} = \boxed{\textbf{6,9 m/s}}$$

25. Continuando el problema anterior y teniendo en cuenta que el sujeto realiza el lanzamiento desde una distancia de 2 m de la diana y que el ángulo de salida del dardo es de 0º, ¿alcanzará el dardo a la diana? En caso de obtener respuesta positiva, calcular el punto de contacto tomando como referencia el centro de ésta. La diana tiene un diámetro de 80 cm y el centro se encuentra a una altura del suelo de 1,50 m mientras que el dardo es despedido desde una altura de 1,65 m.



Si el tiempo que tarda en recorrer los 2 m en la horizontal es menor que el que tarda en descender desde 1,65 m hasta 1,10 m (borde inferior de la diana) el dardo alcanzará la diana:

En el eje x:

$$V_x = \frac{e}{t} = t = \frac{e}{V_x} = \frac{2\ \cancel{m}}{6{,}9\ \cancel{m}/s} = \boxed{0{,}28\ s}$$

En el eje y:

$$h = \cancel{V_i}^{\,0} \cdot t + ½\, g \cdot t^2$$

$$h = ½\, g \cdot t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{2 \cdot h/g} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}55\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = \boxed{0{,}33\ s}$$

Luego **sí** contacta el dardo en la diana.

El lugar coincidirá con la altura alcanzada en el momento que cubra los 0,28 s que tarda en recorrer los 2 m en las "x":

$$h = ½\, g \cdot t^2$$

$$h = ½\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (0{,}28\ s)^2 \quad \boxed{h = 0{,}38\ m}$$

Ha descendido desde la altura de partida (1,65 m), luego el dardo contacta a una altura del suelo de 1,26 m y 24 cm por debajo del centro de la diana.

Estática y Dinámica

RESUMEN TEÓRICO

La estática y la dinámica estudian las fuerzas como agentes del reposo o del movimiento de los cuerpos.

LOS MÉTODOS MÁS EMPLEADOS EN EL ANÁLISIS DINÁMICO SON:

- **Dinamógrafo:** Registra y mide la fuerza muscular empleada durante el gesto deportivo.
- **Plataformas de fuerza:** Permiten registrar las fuerzas verticales y horizontales del gesto deportivo de forma tridimensional.

ESTÁTICA

- **Estática:** se encarga de estudiar las fuerzas que intervienen en los cuerpos que se encuentran en situación de equilibrio.
- **Fuerza:** toda causa capaz de variar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo desde el punto de vista de la **traslación**. En algunas ocasiones producen deformaciones, pero en la estática nos centramos en la capacidad de la fuerza para causar el desequilibrio de los cuerpos. Es una magnitud vectorial (tiene módulo, dirección y sentido) es proporcional a la masa y a la aceleración que comunica al cuerpo y se mide en Newton (N).

$$\boxed{\mathbf{F = m \cdot a \qquad N = kg \cdot m/s^2}}$$

- **Fuerza Resultante:** es la suma vectorial de todas las fuerzas actuantes sobre un cuerpo.

$$\boxed{\mathbf{\sum F = F_1 + F_2 + F_3 + _{...} + F_n}}$$

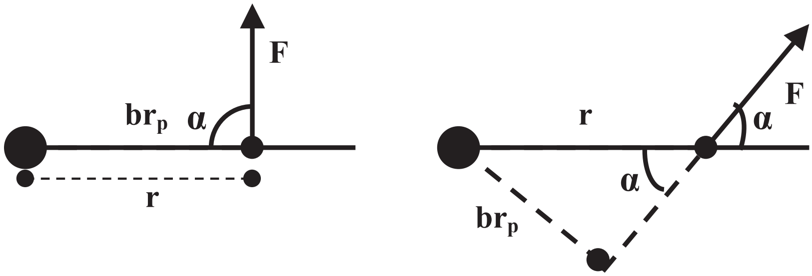
- **Momento de Fuerza:** es la causa capaz de variar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo desde el punto de vista de la **rotación**. Es una magnitud vectorial dependiente de la fuerza y de su brazo de palanca o brazo de momento y se mide en Newton por metro (N·m).

$$\boxed{\mathbf{M = F \cdot br_p}}$$

- **Momento de Fuerza Resultante:** es la suma vectorial de todos los momentos de fuerza actuantes sobre un cuerpo.

$$\boxed{\mathbf{\sum M = M_1 + M_2 + M_3 + _{...} + M_n}}$$

- **Brazo de Palanca o Brazo de Potencia:** aquella distancia del eje de giro a la fuerza, perpendicular a la dirección de ésta.
- **Radio:** distancia del eje de giro al punto de aplicación de la fuerza. **No siempre coincide con el brazo de palanca o potencia.**



$$\boxed{M = F \cdot br_p = F \cdot r \cdot \text{sen}\ \alpha}$$

Todos los movimientos articulares del cuerpo humano se deben a los momentos de fuerza generados por las fuerzas musculares generando una rotación de los segmentos alrededor de un eje articular.

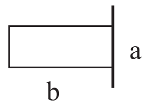
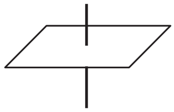
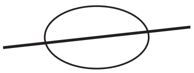
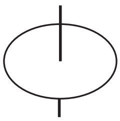
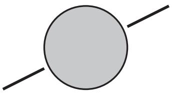
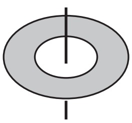
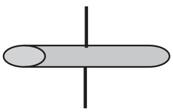
- **Equilibrio en cuanto a la traslación:** se dice que existe equilibrio en los movimientos de traslación cuando el sumatorio o fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero. En este caso el cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme de traslación.

$$\boxed{\sum F = 0 \longrightarrow \quad \textbf{Equilibrio en movimientos de traslación}}$$

- **Equilibrio en cuanto a la rotación:** se dice que existe equilibrio en los movimientos de rotación cuando el sumatorio o momento de fuerza resultante de todos los momentos de fuerza que actúan sobre un cuerpo es cero. En este caso el cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme de rotación o angular.

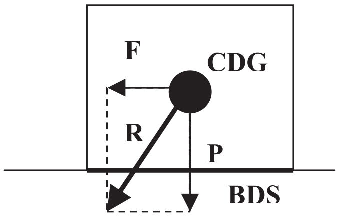
$$\boxed{\sum M = 0 \longrightarrow \quad \textbf{Equilibrio en movimientos de rotación}}$$

- **Inercia (1ª Ley de Newton):** todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme de traslación a menos que sobre él actúe una fuerza externa.
- **Momento de Inercia (I):** todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme de rotación a menos que sobre él actúe un momento de fuerza externo.

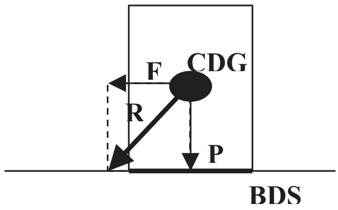
MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS CUERPOS (Martínez, 1991: 37)			
Dibujo	**Cuerpo**	**Eje de giro**	**Momento de inercia**
	Rectángulo	Lado a	$1/3 \cdot m \cdot b^2$
	Rectángulo	Perpendicular por el centro	$1/12 \cdot m \cdot (a^2 + b^2)$
	Cilindro macizo	Eje del cilindro	$½\ m \cdot r^2$
	Disco	Diámetro	$¼\ m \cdot r^2$
	Disco	Perpendicular al centro	$½\ m \cdot r^2$
	Esfera maciza	Diámetro	$2/5\ m \cdot r^2$
	Corona circular	Perpendicular al centro	$½\ m(R^2+r^2)$
	Varilla	Perpendicular por el punto medio	$1/12\ m \cdot L^2$

- **Centro de gravedad (CDG):** es el punto de aplicación de la fuerza resultante de los pesos de sus diferentes partes o segmentos. La localización de este punto varía en el cuerpo humano al estar formado por segmentos móviles.
- **Base de sustentación (BDS):** es el área que une los puntos distales de apoyo del cuerpo.

Si a un cuerpo que está en reposo (de traslación y rotación) se le aplica una fuerza externa cuya dirección pasa por el CDG, el momento de la fuerza es nulo por lo que no se produce una variación en el movimiento de rotación o angular. Pero sí puede modificar el estado de traslación, si la fuerza resultante entre la fuerza externa y el peso, cae fuera de la base de sustentación (dibujo B).



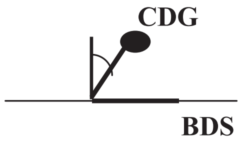
A



B

Sin embargo, si a ese mismo cuerpo se le aplica una fuerza externa cuya dirección no pasa por el CDG, existe momento de la fuerza lo que produce una variación en el movimiento de rotación o angular.

- **Ángulo de caída:** el ángulo formado entre una recta perpendicular a cualquier punto del perímetro de la BDS y otra que une este mismo punto con el CDG. Cuanto mayor sea este ángulo más difícil será perder el equilibrio.



- **Centro de Gravedad de un sistema:** es el centro de gravedad de un conjunto de cuerpos y se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathbf{CDG_{Sistema} \cdot Peso_{Sistema} = CDG_A \cdot Peso_A + CDG_B \cdot Peso_B}}$$

Donde:

$$\boxed{\mathbf{Peso_{Sistema} = Peso_A + Peso_B}}$$

Por lo que:

$$\boxed{\mathbf{CDG_{Sistema} = (CDG_A \cdot Peso_A + CDG_B \cdot Peso_B) / (Peso_A + Peso_B)}}$$

- **Dinámica:** se encarga de estudiar las fuerzas como causantes del movimiento.
- **Impulso mecánico:** cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza externa durante un período de tiempo se dice que recibe un impulso. Es magnitud vectorial y se mide en Newton por segundo (N · s).

$$\boxed{\mathbf{I = F \cdot t}}$$

- **Cantidad de movimiento:** es la variación de velocidad lineal sufrida por un cuerpo de masa 'm'. También es magnitud vectorial y se mide en Newton por segundo (N·s o kg m/s).

$$\boxed{p = m \cdot (V_f - V_i)}$$

El impulso ejercido por una fuerza aplicada durante un tiempo produce una cantidad de movimiento que es igual al impulso producido.

$$\boxed{I = p} \qquad \boxed{Ft = m \cdot (V_f - V_i)}$$

- **Impulso angular:** cuando sobre un cuerpo actúa un momento de fuerza externa durante un período de tiempo se dice que recibe un impulso. Es magnitud vectorial que se mide en Julios (J).

$$\boxed{L = M \cdot t}$$

- **Momento angular o momento de la cantidad de movimiento:** es la variación de velocidad angular sufrida por un cuerpo con un momento de inercia I. También es magnitud vectorial que nos indica el sentido de giro y se mide en Julios (J).

$$\boxed{J = I \cdot (\omega_f - \omega_i)}$$

El impulso angular ejercido por un momento de fuerza aplicado durante un tiempo produce un momento angular igual al impulso angular producido.

$$\boxed{L = J} \qquad \boxed{Mt = I \cdot (\omega_f - \omega_i)}$$

- **Dinámica de los choques:** cuando dos cuerpos chocan se produce un intercambio de la cantidad de movimiento. En el momento del choque la cantidad de movimiento del sistema es igual a la suma de las cantidades de movimiento que tenían los cuerpos antes del choque.

$$\boxed{p_{sistema} = p_A + p_B} \quad \boxed{m_{sistema} \cdot (V_f - V_i)_{sistema} = m_A \cdot (V_f - V_i)_A + m_B \cdot (V_f - V_i)_B}$$

- **Fuerzas de rozamiento:** es una fuerza que actúa oponiéndose al deslizamiento de un cuerpo sobre otro. Su módulo es directamente proporcional a la normal (fuerza que ejerce la superficie sobre el cuerpo, siempre perpendicular a la superficie), de la naturaleza del cuerpo y de la superficie de contacto (coeficiente de rozamiento μ). Su dirección siempre es paralela a la superficie y sentido opuesto al movimiento.

$$\boxed{F_r = \mu \cdot N}$$

El valor del coeficiente de rozamiento (μ) oscila entre 0 y 1.

Existen tres tipos de fuerza de rozamiento:

- Fuerza de rozamiento estático: es una fuerza que se opone a que el cuerpo comience a deslizarse.

$$\boxed{\mathbf{F_{r\,e} = \mu_e \cdot N}}$$

- Fuerza de rozamiento cinético: es una fuerza que se opone a que el cuerpo continúe deslizándose.

$$\boxed{\mathbf{F_{r\,c} = \mu_c \cdot N}}$$

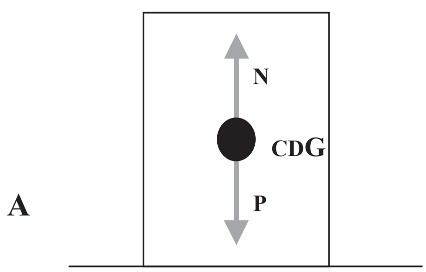
La diferencia entre la fuerza de rozamiento estático y cinético se encuentra en los coeficientes de rozamiento (μ) donde el coeficiente de rozamiento estático (μ_e) siempre va a ser mayor que el coeficiente de rozamiento cinético (μ_c).

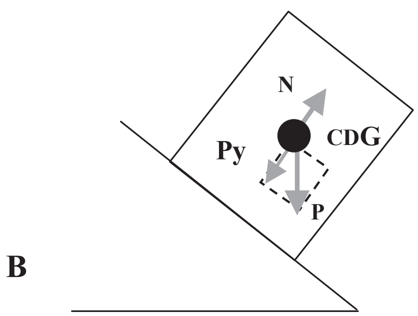
$$\boxed{\mu_e > \mu_c}$$

- Fuerza de rozamiento rotatorio: cuando existe un cuerpo que gira y una superficie sobre la que gira pueden darse dos circunstancias:
    - Que el cuerpo gire sin deslizarse, por lo tanto actúa la fuerza de rozamiento estática.
    - Que el cuerpo gire deslizándose por lo tanto actúa la fuerza de rozamiento cinética.

En los movimientos angulares o de rotación, las fuerzas de rozamiento presentan sentido opuesto al del giro del cuerpo, pero igual al del desplazamiento lineal de éste.

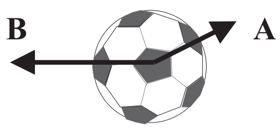
- **Fuerza Normal:** es una fuerza que ejerce la superficie sobre el cuerpo, siempre perpendicular a la superficie. Su intensidad depende de la presión ejercida por el cuerpo sobre la superficie, su módulo es igual a las componentes perpendiculares a la superficie de todas las fuerzas ejercidas por el cuerpo.





PROBLEMAS

26. Determinar la fuerza que aplica un árbitro de baloncesto a un balón de 300 grs en un saque neutral si éste asciende verticalmente con una aceleración de 1,5 m/s^2.
27. Un deportista, desde tendido supino, sostiene totalmente horizontal una pesa de 900 N y 1 m de longitud, pero su entrenador aplica una oposición de 100 N a 16 cm del extremo derecho de la pesa. Calcular las fuerzas ejercidas por cada una de las extremidades superiores del deportista para mantener la pesa en equilibrio, sabiendo que el agarre derecho se encuentra a 5 cm del extremo y el izquierdo a 10 cm de su extremo.
28. Dos futbolistas golpean a la vez el balón tal y como muestra el gráfico. Calcula la fuerza resultante (modulo y orientación). La fuerza "B" (300 N) es totalmente horizontal y forma con "A" (225 N) un ángulo de 150º.



29. Calcular la fuerza ejercida por el bíceps braquial, cuya inserción se encuentra a 6 cm del codo, para que el sistema formado por el antebrazo y la mano se encuentre en equilibrio ante flexiones de codo de 20º. El sistema tiene una masa de 3 kg y su CDM se sitúa a 15 cm del codo.
30. Calcular la fuerza ejercida por el bíceps braquial, cuya inserción se encuentra a 6 cm del codo, para que el sistema formado por el antebrazo, la mano y la mancuerna que sostiene en la mano se encuentre en equilibrio ante una flexión de codo de 20º. El conjunto de antebrazo y mano tiene una masa de 3 kg y su CDM se sitúa a 15 cm del codo. La mancuerna es de 5 kg y se sitúa a 50 cm del codo.
31. Calcula el centro de gravedad del sistema formado por un jugador de béisbol y su bate, partiendo de los siguientes datos:
    - peso del sujeto = 780 N
    - peso del bate = 20 N
    - centro de gravedad del sujeto en el punto (5´5, 7) del sistema de referencia
    - centro de gravedad del bate en el punto (8, 10) del sistema de referencia.
32. El centro de gravedad de un sujeto de 64 kg se encuentra a una altura de 1,10 m y totalmente centrada su proyección en la base de sustentación, formada por un rectángulo de 40 cm de fondo y 70 de ancho:
    - Si le aplicamos una fuerza externa a la altura del CDG, dirección horizontal y sentido anteroposterior, ¿cuál debe ser el módulo mínimo de la fuerza para que pierda la situación de equilibrio lineal?

- Si le aplicamos una fuerza externa a la altura del CDG, dirección horizontal y sentido transversa, ¿cuál debe ser el módulo mínimo de la fuerza para que pierda la situación de equilibrio lineal?

33. Una jugadora de curling lanza sobre la pista una piedra con una velocidad de 5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre la piedra y el suelo es de 0,15 calcula el tiempo que tarda en detenerse por completo.
34. Dibujar las fuerzas que actúan sobre un esquiador que sube una pendiente ayudado por un telesquí.
35. Un montañero se cae por una pendiente de 14º con una velocidad inicial de 18,75 m/s. Calcular el espacio recorrido por deslizamiento antes de pararse y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie, sabiendo que tarda 5 s en detenerse por completo. ¿Cuánto espacio recorrería si la pendiente fuera de 18º?
36. En una partida de minigolf una bola de 20 gr entra en un túnel lleno de porquería con una velocidad de 3,5 m/s y se detiene tras introducirse 1,5 cm. Calcular la fuerza que ejerce la porquería sobre la bola y el tiempo que tarda en detenerse.
37. Un profesor de Educación Física quiere retirar un quitamiedos de 600 N colocado en el centro del polideportivo. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el quitamiedos y el pavimento es de 0,7 determinar para cuál de las siguientes posibilidades la fuerza que se debe aplicar es menor:
    - Fuerza de empuje con un ángulo de 0º
    - Fuerza de empuje con un ángulo de 20º
    - Fuerza de empuje con un ángulo de 30º
    - Fuerza de arrastre con un ángulo de 0º
    - Fuerza de arrastre con un ángulo de 20º
    - Fuerza de empuje con un ángulo de 30º
38. Dos patinadores sobre hielo se encuentran juntos y en reposo cuando se empujan separándose 6,3 m al cabo de 4 s. Despreciando la fuerza de rozamiento y sabiendo que la masa de uno de los patinadores es de 40 kg y su velocidad es el doble de la del otro patinador, calcula las velocidades y las masas de ambos patinadores.
39. Calcular el centro de masas del miembro superior izquierdo de un sujeto con los datos siguientes:
    - el hombro se sitúa en el punto (3, 6) del sistema de referencia,
    - el codo se sitúa en el punto (6, 3) del sistema de referencia,
    - la muñeca se sitúa en el punto (9, 5) del sistema de referencia,
    - el punto distal de la mano se sitúa en el punto (10, 5´5) del sistema de referencia,
    - el centro de masas del brazo se sitúa en el 51,3% de su longitud,
    - el centro de masas del antebrazo se sitúa en el 39% de su longitud,
    - el centro de masas de la mano se sitúa en el 82% de su longitud,

40. ¿Qué velocidad mínima debe llevar un esquiador de masa 50 kg al comienzo de una pendiente de 36º hacia arriba, para poder recorrer toda su extensión (5 m) deslizándose sin imprimir fuerza, si la fuerza de rozamiento entre los esquíes y la nieve es de 2,83 N?

41. Un esquiador de snowboard tras dejarse caer deslizándose por una pendiente de 42º y 6,49 m de longitud, se desliza 1m en un plano horizontal, para pasar a una pendiente de subida de 47º. Calcular la altura máxima que alcanza en esta pendiente, sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico es de 0,2.

42. Un jugador de hockey hierba golpea la bola (inicialmente en reposo y con una masa de 200 gr) con una fuerza de 327 N, saliendo despedida con una velocidad de 10m/s. Halla el tiempo que el stick estuvo en contacto con la bola.

43. Un trineo de masa 452 kg se encuentra en una pendiente de 27º, el coeficiente de rozamiento es de 0,1. Calcular la fuerza horizontal que debemos aplicar al trineo para que se deslice a velocidad constante.

44. Un gimnasta de 69 kg está suspendido sobre la barra fija siendo su longitud total, desde las manos hasta las puntas de los pies, de 2 m; el CDG se encuentra a 0,75 m de las manos. El gimnasta realiza giros de 360º alrededor de la barra. Calcular la tensión del gimnasta al pasar por el punto más bajo y más alto, sabiendo que en ambas posiciones la velocidad lineal es de 5 m/s.

45. Un atleta de 65 kg se desplaza a una velocidad constante de 16 m/s mientras que el aire le ofrece una fuerza constante y opuesta al movimiento durante 5 s comunicándole una velocidad en sentido contrario de 2,5 m/s. Calcular el impulso y la fuerza aplicada por el aire.

46. Dos alumnos de educación física, cada uno con un balón, se intercambian los balones mediante pases horizontales. En un intercambio debido a una descoordinación de los estudiantes los balones chocan frontalmente. Si las velocidades que llevan en el momento del choque son de 0,5 m/s para el balón “A” y -0,9 m/s para el balón “B” y la velocidad del balón “B” después del choque es de 0,5 m/s, calcula la velocidad final de “A” sabiendo que la masa de cada uno de ellos es de 300 gr.

47. En una prueba de Boosley individual el deportista de 65 kg va corriendo a una velocidad de 9 km/h y da alcance al vehículo de 200 kg que marcha a una velocidad de 4,5 km/h montándose en él. Calcular la velocidad alcanzada por el sistema formado por el conjunto del deportista y el vehículo en el instante que el deportista se monta en él.

48. Un acróbata de 65 kg, subido en una esfera maciza de 12 kg y 50 cm de radio, pretende ascender por una pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s. ¿Qué impulso angular inicial debe aplicar el acróbata sobre la esfera para que comience a moverse? ¿Cuál será la fuerza ejercida por el acróbata durante la subida? Resolver el ejercicio despreciando la fuerza de rozamiento.

49. El mismo acróbata, esta vez subido sobre un cilindro macizo de 12 kg y 50 cm de radio, pretende ascender por la misma pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s (despreciando la fuerza de rozamiento). ¿Qué

impulso angular inicial debe aplicar el acróbata sobre el cilindro para que comience a moverse? ¿Cuál será la fuerza ejercida por el acróbata?

50. Un niño con una masa de 37 kg se encuentra en tendido prono sobre el suelo y quiere reptar hacia adelante ayudándose de las manos. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático es de 0,7 calcular la fuerza que debe ejercer el niño para comenzar a moverse.

Estática y Dinámica

Problemas Resueltos

26. Determinar la fuerza que aplica un árbitro de baloncesto a un balón de 300 grs en un saque neutral si éste asciende verticalmente con una aceleración de 1,5 m/s^2.

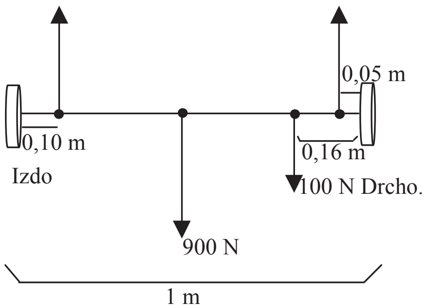
La fuerza aplicada sobre un objeto es directamente proporcional a la aceleración que le transmite:

$F = m \cdot a$

$F = 0{,}300\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2$

$\boxed{\mathbf{F = 0{,}45\ N}}$

27. Un deportista desde tendido supino, sostiene totalmente horizontal una pesa de 900 N y 1 m de longitud, pero su entrenador aplica una oposición de 100 N a 16 cm del extremo derecho de la pesa. Calcular las fuerzas ejercidas por cada una de las extremidades superiores del deportista para mantener la pesa en equilibrio, sabiendo que el agarre derecho se encuentra a 5 cm del extremo y el izquierdo a 10 cm de su extremo.



Para que se mantenga en equilibrio el sumatorio de los momentos tiene que ser igual a cero: $M_I + M_P + M_E + M_D = 0$

Considerando como eje de giro el extremo derecho de la pesa: $M = F \cdot brp$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = F_I \cdot 0{,}90\ m - 900\ N \cdot 0{,}50\ m - 100\ N \cdot 0{,}16\ m + F_D \cdot 0{,}05\ m \\ \text{Considerando como eje de giro el extremo izquierdo de la pesa:} \\ 0 = F_I \cdot 0{,}10\ m - 900\ N \cdot 0{,}50\ m - 100\ N \cdot 0{,}84\ m + F_D \cdot 0{,}95\ m \end{array}\right\}$$

Despejando F_D en esta ecuación y sustituyendo en la otra:

$$F_D = \frac{-\ F_I \cdot 0{,}10\ m + (900 \cdot 0{,}50 + 100 \cdot 0{,}84)Nm}{0{,}95\ m}$$

$F_D = (-0{,}10F_I + 562{,}10)N$

$F_I \cdot 0{,}90\ m - 450\ Nm - 16\ Nm + (-0{,}10F_I + 562{,}10)N \cdot 0{,}05\ m = 0$

$F_I \cdot 0{,}90\ m - 466\ Nm - 0{,}005\ m \cdot F_I + 28{,}10\ Nm = 0$

$0{,}895F_I\ m = 437{,}9\ Nm$

$$F_I = \frac{437{,}9\ N\cancel{m}}{0{,}895\ \cancel{m}} = \boxed{\mathbf{489{,}27\ N}}$$

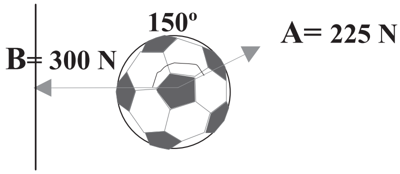
Sustituyendo F_D por su igualdad:

$F_D = -0{,}10F_I + 562{,}10$ N

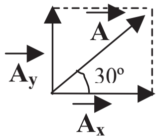
$F_D = -0{,}10 \cdot 489{,}27$ N $+ 562{,}10$ N

$\boxed{\mathbf{F_D = 513{,}17\ N}}$

28. Dos futbolistas golpean a la vez el balón tal y como muestra el gráfico. Calcula la fuerza resultante (modulo y orientación). La fuerza "B" (300 N) es totalmente horizontal y forma con "A" (225 N) un ángulo de 150º.



La fuerza ejercida por el futbolista "A" forma un ángulo de 30º con la horizontal y se puede descomponer en dos componentes: una horizontal y otra vertical:



$$\text{sen } 30º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathbf{A_y}}{\mathbf{A}}$$

$A \cdot \text{sen}30º = A_y$

$225\ N \cdot \text{sen}30º = A_y$

112,5 N = A_y

$$\cos 30º = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathbf{A_x}}{\mathbf{A}}$$

$A \cdot \cos 30º = A_x$

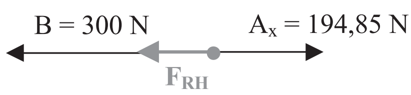
$225\ N \cdot \cos 30º = A_x$

194,85 N = A_x

A partir de aquí sumamos todas las fuerzas horizontales por un lado y todas las verticales por otro.

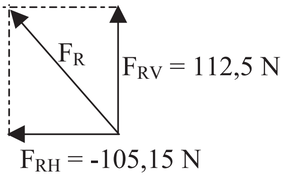
Las fuerzas horizontales que actúan en este sistema son: la fuerza ejercida por el futbolista B (300 N) y la componente horizontal del futbolista A (194,85 N). Así pues, la fuerza resultante horizontal será:

$F_{RH} = -300\ N + 194,85\ N = -105,15\ N$



Lo que va a la izquierda se considera negativo y lo que va a la derecha es positivo.

La fuerza vertical que actúa en este sistema es únicamente la componente vertical del futbolista A (112,5).



El módulo de la fuerza resultante se calcula por el teorema de Pitágoras:

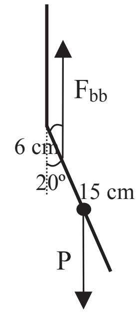
$$F_R = \sqrt{F_{RH}^2 + F_{RV}^2} = \sqrt{(-105{,}15)^2 + (112{,}5)^2} = \boxed{\mathbf{153{,}98\ N}}$$

Y la orientación se calcula con cualquier razón trigonométrica, por ejemplo la de la tangente:

$$\text{tag } \alpha = \frac{F_{RV}}{F_{RH}} = \frac{112{,}5 \text{ N}}{-105{,}15 \text{ N}} = -1{,}07$$

$$\text{Arctg } (-1{,}07) = \boxed{\mathbf{133{,}06^{o}}}$$

29. Calcular la fuerza ejercida por el bíceps braquial, cuya inserción se encuentra a 6 cm del codo, para que el sistema formado por el antebrazo y la mano se encuentre en equilibrio ante flexiones de codo de 20º. El sistema tiene una masa de 3 kg y su CDG se sitúa a 15 cm del codo.



Recordando que para que un sistema se encuentre en equilibrio angular el sumatorio de los momentos de fuerza tiene que ser igual a cero:

$\sum M = 0$ y el momento de una fuerza es igual:

$M = F \cdot brp = F \cdot r \cdot sen\ \alpha$

Conociendo la masa del sistema formado por antebrazo y mano, podemos calcular el peso:

$P = m \cdot g = 3\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = \underline{29{,}4\ N}$

$\sum M = M_{bb} + M_p$

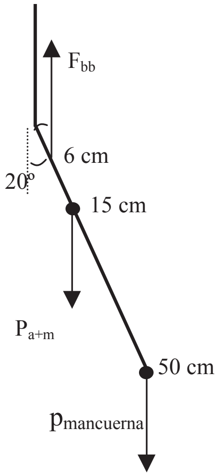
$\sum M = F_{bb} \cdot r_{bb} \cdot sen\,\alpha + P \cdot r_p \cdot sen\alpha$

$0 = F_{bb} \cdot 0{,}06\ m \cdot sen\ 20 - 29{,}4\ N \cdot 0{,}15\ m \cdot sen\ 20$

$$F_{bb} = \frac{29{,}4\ N \cdot 0{,}15\ \cancel{m} \cdot \cancel{sen\ 20}}{0{,}06\ \cancel{m} \cdot \cancel{sen\ 20}}$$

$\boxed{\mathbf{F_{bb} = 73{,}5\ N}}$

30. Calcular la fuerza ejercida por el bíceps braquial, cuya inserción se encuentra a 6 cm del codo, para que el sistema formado por el antebrazo, la mano y la mancuerna que sostiene en la mano se encuentre en equilibrio ante una flexión de codo de 20º. El conjunto de antebrazo y mano tiene una masa de 3 kg y su CDM se sitúa a 15 cm del codo. La mancuerna es de 5 kg y se sitúa a 50 cm del codo.



El peso del antebrazo y mano es de:

$P = m \cdot g = 3\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = \underline{29{,}4\ N}$

El peso de la mancuerna:

$P = m \cdot g = 5\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = \underline{49\ N}$

$\sum M = 0 = M_{bb} + M_{pa+m} + M_{pm}$

$\sum M = F_{bb} \cdot r_{bb} \cdot sen\,\alpha + P_{a+m} \cdot r_{a+m} \cdot sen\alpha + P_m \cdot r_m \cdot sen\alpha$

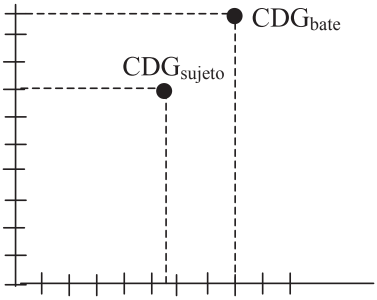
$$0 = F_{bb} \cdot 0{,}06\ m \cdot sen\ 20 - 29{,}4\ N \cdot 0{,}15\ m \cdot sen\ 20 – 49\ N \cdot 0{,}50\ m \cdot sen\ 20$$

$$F_{bb} = \frac{29{,}4\ N \cdot 0{,}15\ m \cdot sen\ 20 + 49\ N \cdot 0{,}50\ m \cdot sen\ 20}{0{,}06\ m \cdot sen\ 20}$$

F_{bb} = 481,83 N

31. Calcula el centro de gravedad del sistema formado por un jugador de béisbol y su bate, partiendo de los siguientes datos:

- **peso del sujeto = 780 N**
- **peso del bate = 20 N**
- **centro de gravedad del sujeto en el punto (5´5, 7) del sistema de referencia**
- **centro de gravedad del bate en el punto (8, 10) del sistema de referencia.**



El momento angular del sistema es igual a la suma de los momentos angulares del sujeto y del bate:

$M_{sistema} = M_{sujeto} + M_{bate}$

$P_{sistema} \cdot CDG_{sistema} = P_{sujeto} \cdot CDG_{sujeto} + P_{bate} \cdot CDG_{bate}$

El CDG se calcula en el eje de las “x” y en el de las “y”.

El peso del sistema es la suma del peso del sujeto más el peso del bate:

$P_{sistema} = P_{sujeto} + P_{bate}$

$P_{sistema} = 780 \text{ N} + 20 \text{ N}$

$\boxed{P_{sistema} = 800 \text{ N}}$

Para las “x”

$P_{sistema} \cdot CDG_x = P_{sujeto} \cdot CDG_{s''x''} + P_{bate} \cdot CDG_{b''x''}$

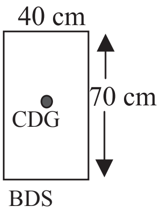
$$CDG_x = \frac{780 \text{ N} \cdot 5{,}5 + 20 \text{ N} \cdot 8}{800 \text{ N}} = \boxed{\mathbf{5{,}56}}$$

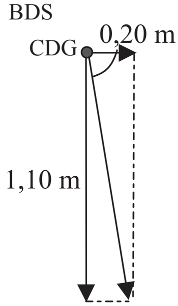
Para las “y”

$$CDG_y = \frac{780 \text{ N} \cdot 7 + 20 \text{ N} \cdot 10}{800 \text{ N}} = \boxed{\mathbf{7{,}07}}$$

32. El centro de gravedad de un sujeto de 64 kg se encuentra a una altura de 1,10 m y totalmente centrada su proyección en la base de sustentación, formada por un rectángulo de 40 cm de fondo y 70 de ancho:

- **Si le aplicamos una fuerza externa a la altura del CDG, dirección horizontal y sentido anteroposterior, ¿cuál debe ser el módulo mínimo de la fuerza para que pierda la situación de equilibrio de traslación?**
- **Si le aplicamos una fuerza externa a la altura del CDG, dirección horizontal y sentido transversal, ¿cuál debe ser el módulo mínimo de la fuerza para que pierda la situación de equilibrio traslación?**



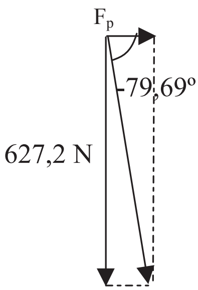


Para mantener el equilibrio lineal es necesario que la fuerza resultante entre la fuerza perturbadora y el peso caiga dentro de la base de sustentación, por lo tanto, en el primer caso, la orientación de esta Fuerza resultante debe tener un ángulo con la horizontal mayor que el que tiene la resultante de las distancias del CDG con la BDS: antero-posterior y en altura, que es de:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{-1{,}10 \text{ m}}{0{,}20 \text{ m}}$$

$\text{tg}\,\alpha = -5{,}5$

arcotg -5,5 = -79,69º



Para que la resultante entre el peso y la fuerza perturbadora tenga una orientación de –79,69º la fuerza perturbadora tiene que tener un módulo de:

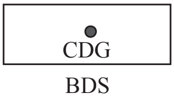
$P = mg = 64 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 627 \text{ N}$

$$\text{cateto contiguo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{tg}(-79{,}69º)} \Longrightarrow \text{Fp} = \frac{\text{p}}{\text{tg}(-79{,}69º)}$$

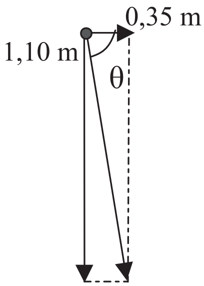
$$\mathbf{Fp = \frac{-627{,}2}{-5{,}5} = 114{,}03 \text{ N}}$$

Cualquier Fuerza perturbadora superior a 114,03 N producirá la pérdida de equilibrio lineal en el primer caso.

Segundo caso:



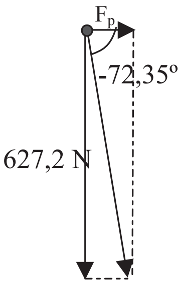
$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{-1{,}10\ \text{m}}{0{,}35\ \text{m}}$$



$$\boxed{\mathrm{tg}\ \theta = -3{,}14}$$

$$\boxed{\mathrm{arcotg}\ (-3{,}14) = -72{,}35^{\text{o}}}$$

Para que la resultante entre el Peso y la Fuerza perturbadora tenga una orientación de –72,35º la fuerza perturbadora debe tener un módulo de:



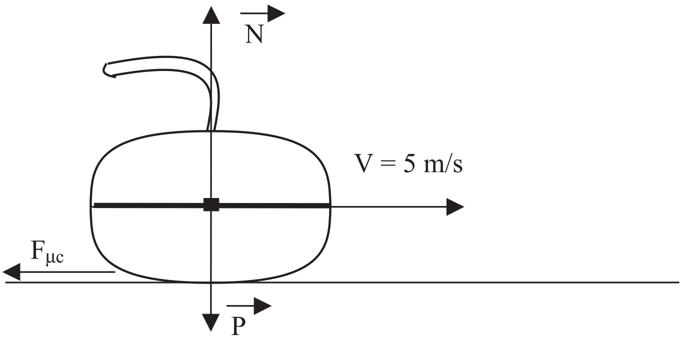
$$\text{cateto contiguo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\mathrm{tg}\ (-72{,}35)}$$

$$F_p = \frac{p}{\mathrm{tg}(-79{,}69^{\text{o}})} = \frac{-627{,}2\ \text{N}}{-3{,}14}$$

Fp= 199,74 N

Cualquier Fuerza perturbadora superior a 199,74 N producirá la pérdida de equilibrio lineal en el segundo caso.

33. Una jugadora de curling lanza sobre la pista una piedra con una velocidad de 5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre la piedra y el suelo es de 0,15 calcula el tiempo que tarda en detenerse por completo.



La fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la aceleración que le trasmite, luego:

$F\mu = \mu \cdot N = m \cdot a$

La fuerza normal en este caso tiene el mismo módulo que el peso pero sentido opuesto:

$\mu \cancel{m} \cdot (-g) = \cancel{m} a$

$0,15 \cdot (-9,8 \text{ m/s}^2) = a$

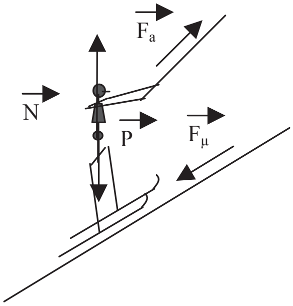
$\boxed{a = -1,47 \text{ m/s}^2}$

Sabiendo que:

$a = \dfrac{V_f - V_i}{t}$ y que la piedra se detiene del todo ($V_f = 0$)

$a = \dfrac{-V_i}{t} \Longrightarrow t = \dfrac{V_i}{a} = \dfrac{-5 \text{ m/s}}{-1,47 \text{ m/s}^2}$ $\boxed{\textbf{t = 3,40 s}}$

34. Dibujar las fuerzas que actúan sobre un esquiador que sube una pendiente ayudado por un telesquí.



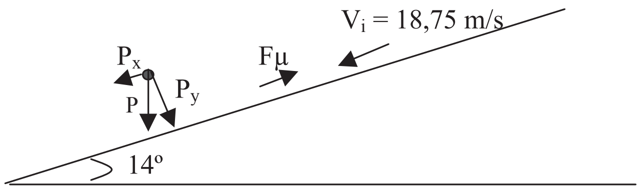
Fuerza de arrastre ($\overrightarrow{F_a}$)

Peso ($\overrightarrow{P}$)

Fuerza de rozamiento ($\overrightarrow{F_\mu}$)

Fuerza Normal ($\overrightarrow{N}$)

35. Un montañero se cae por una pendiente de 14º con una velocidad inicial de 18,75 m/s. Calcular el espacio recorrido por deslizamiento antes de pararse y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie, sabiendo que tarda 5 s en detenerse por completo. ¿Cuánto espacio recorrería si la pendiente fuera de 18º?



$\sum F = m \cdot a = F\mu + P_x$

$ma = \mu N + P_x$; siendo $N = P_y$

$\cancel{m}a = -\mu \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \cos 14 + \cancel{m} \cdot g \cdot \text{sen } 14$

$a = -\mu \cdot g \cdot \cos 14 + g \cdot \text{sen } 14$

$a = -\mu \cdot 9{,}8 \cdot \cos 14 + 9{,}8 \cdot \text{sen } 14$

$a = \dfrac{V_f - V_i}{t}$ si el sujeto se para, la velocidad final es cero, luego:

$a = \dfrac{-V_i}{t} = -\mu \cdot 9{,}8 \cos 14 + 9{,}8 \text{ sen } 14$

$\dfrac{-18{,}75 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = -\mu \cdot 9{,}8 \cdot \cos 14 + 9{,}8 \cdot \text{sen } 14$

$\dfrac{-3{,}75 \text{ m} - 2{,}37}{9{,}50} = -\mu$

$\boxed{\mu = 0{,}64}$

$\dfrac{\cancelto{0}{V_f} + V_i}{2} = \dfrac{e}{t}$

$e = \dfrac{V_i \cdot t}{2} = \dfrac{18{,}75 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s}}{2}$

$\boxed{e = 46{,}87 \text{ m}}$

Si la pendiente fuera de 18º:

$a = -\mu \cdot 9{,}8 \cdot \cos 18 + 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 18$

$a = -0{,}64 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 18 + 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 18$

$a = -5{,}96 + 3{,}03$

$$\boxed{\mathbf{a = -2{,}93\ m/s^2}}$$

$$a = \frac{-V_i}{t}$$

$$t = \frac{-V_i}{a} = \frac{-18{,}75\ m/s}{-2{,}93\ m/s^2}$$

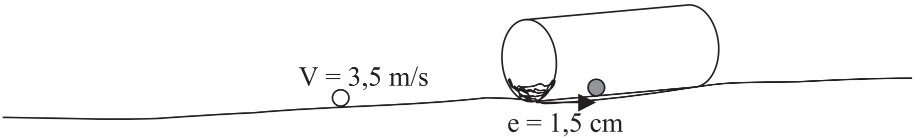
$$\boxed{\mathbf{t = 6{,}39\ s}}$$

$$\frac{\cancelto{0}{V_f} + V_i}{2} = \frac{e}{t}$$

$$e = \frac{V_i \cdot t}{2} = \frac{18{,}75\ m/s \cdot 6{,}39\ s}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{e = 59{,}99\ m}}$$

36. En una partida de minigolf una bola de 20 gr entra en un túnel lleno de porquería con una velocidad de 3,5 m/s y se detiene tras introducirse 1,5 cm. Calcular la fuerza que ejerce la porquería sobre la bola y el tiempo que tarda en detenerse.



El impulso (I) ejercido sobre un objeto es igual a la cantidad de movimiento (p).

$I = p$

$F \cdot t = m \cdot \Delta V$

$F \cdot t = m\,(\cancelto{0}{V_f} - V_i)$

$F \cdot t = 20\ gr \cdot (-3{,}5\ m/s)$

$F \cdot t = 0{,}02\ kg \cdot (-3{,}5\ m/s)$

$F \cdot t = -\,0{,}07\ kg\ m/s$

La velocidad media en un movimiento uniformemente decelerado es:

$$Vm = \frac{V_i + \cancelto{0}{V_f}}{2} = \frac{e}{t} \Longrightarrow t = \frac{2e}{V_i} = \frac{2 \cdot 0{,}015\ m}{3{,}5\ m/s}$$

$\boxed{\mathbf{t = 0{,}008\ s}}$

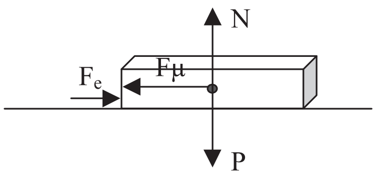
$F \cdot 0{,}008\ s = -\,0{,}07\ kg\ m/s$

$$F = \frac{-0{,}07\ kg\ m/s}{0{,}008\ s} = 8{,}75\ kg\ m/s$$

$\boxed{\mathbf{F = 8{,}75\ N}}$

37. Un profesor de Educación Física quiere retirar un quitamiedos de 600 N colocado en el centro del polideportivo. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el quitamiedos y el pavimento es de 0,7 determinar para cuál de las siguientes posibilidades la fuerza que se debe aplicar es menor:

- **Fuerza de empuje con un ángulo de (0º)**
- **Fuerza de empuje con un ángulo de (-20º)**
- **Fuerza de empuje con un ángulo de (-30º)**
- **Fuerza de arrastre con un ángulo de (0º)**
- **Fuerza de arrastre con un ángulo de (20º)**
- **Fuerza de arrastre con un ángulo de (30º)**

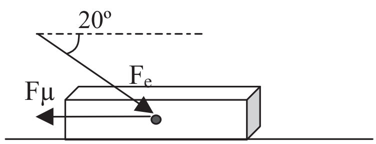


$\sum F = 0 = F\mu + F_e$

$0 = -\mu \cdot N + F_e$

$F_e = \mu \cdot P$

$F_e = 0{,}7 \cdot 600$ Nw = **420 Nw**



$\sum F = 0 = F\mu + F_{ex}$

$0 = -\mu \cdot N + F_{ex}$

$0 = -\mu \cdot N + F_e \cdot \cos 20$

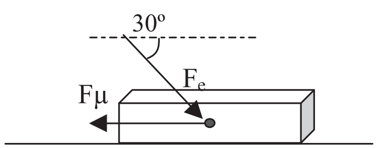
$0 = -\mu \cdot (p + F_{ey}) + F_e \cdot \cos 20$

$0 = -\mu \cdot (p + F_e \cdot \text{sen } 20) + F_e \cdot \cos 20$

$0 = -(420 + 0{,}23\ F_e) + 0{,}93\ F_e$

$0{,}70 \cdot F_e = 420$

$F_e = \dfrac{420}{0{,}70} =$ **600 Nw**



$0 = -\mu \cdot (p + F_e \text{ sen } 30) + F_e \cdot \cos 30$

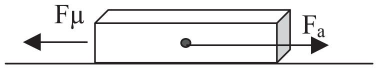
$0 = -0{,}7\ (600 + 0{,}5F_e) + 0{,}86\ F_e$

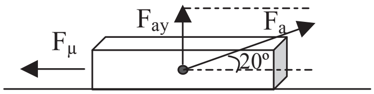
$0{,}51 \cdot F_e = 420$

$F_e = \dfrac{420}{0{,}51} =$ **823,52 Nw**

$0 = -\mu \cdot N + F_a$

$F_a = +0{,}7 \cdot 600 =$ **420 Nw**





$0 = -\mu \cdot N + F_{ax}$

La Normal es el Peso menos F_{ay}

$0 = -\mu \cdot (P - F_{ay}) + F_{ax}$

$0 = -\mu \cdot (P - F_a \cdot \text{sen } 20) + F_a \cdot \cos 20$

$0 = -0{,}7 \cdot (600 - F_a \cdot \text{sen } 20) + F_a \cdot \cos 20$

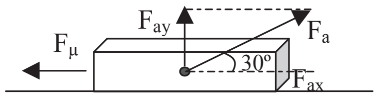
$0 = -420 + 0{,}24F_a + 0{,}94F_a$

$F_a = \dfrac{420}{1{,}18} =$ **356 Nw**

$0 = -\mu \cdot (P - F_a \cdot \text{sen } 30) + F_a \cdot \cos 30$

$0 = -0{,}7 \cdot (600 - 0{,}5 \cdot F_a) + 0{,}86 \cdot F_a$

$420 = 0{,}35 \cdot F_a + 0{,}86 \cdot F_a$



$F_a = \dfrac{420}{1{,}21} =$ **347,10 Nw**

38. Dos patinadores sobre hielo se encuentran juntos y en reposo cuando se empujan separándose 6,3 m al cabo de 4 s. Despreciando la fuerza de rozamiento y sabiendo que la masa de uno de los patinadores es de 40 kg y su velocidad es el doble de la del otro patinador, calcula las velocidades y las masas de ambos patinadores.

El principio de la cantidad de movimiento nos dice que:

$P_{antes} = P_{después}$

Como se encontraban en reposo, la cantidad de movimiento es igual a cero, por lo que:

$0 = P_{después}$

$0 = m_1 \cdot V_1 - m_2 \cdot V_2$

$0 = 40 \text{ kg} \cdot 2 \cdot V_2 - m_2 \cdot V_2$

$$m_2 = \frac{40 \text{ kg} \cdot 2 \cdot \cancel{V_2}}{\cancel{V_2}}$$

$\boxed{\mathbf{m_2 = 80 \text{ kg}}}$

Si se separan 6,3 m en 4 s y la velocidad de "1" es el doble de la de "2", el espacio recorrido por "1" es el doble del de "2":

$6{,}3 = e_1 + e_2$

$6{,}3 = 2e_2 + e_2$

$6{,}3 = 3e_2$

$$e_2 = \frac{6{,}3}{3} \qquad \boxed{\mathbf{e_2 = 2{,}1 \text{ m}}} \qquad \boxed{\mathbf{e_1 = 4{,}2 \text{ m}}}$$

Luego las velocidades son:

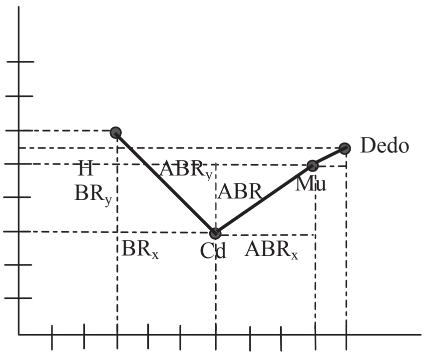
$$V_1 = \frac{e_1}{t} = \frac{4{,}2}{4} = \boxed{\mathbf{1{,}05 \text{ m/s}}}$$

$$V_2 = \frac{e_2}{t} = \frac{2{,}1}{4} = \boxed{\mathbf{0{,}52 \text{ m/s}}}$$

39. Calcular el centro de masas del miembro superior izquierdo de un sujeto con los datos siguientes:

- **el hombro se sitúa en el punto (3, 6) del sistema de referencia,**
- **el codo se sitúa en el punto (6, 3) del sistema de referencia,**
- **la muñeca se sitúa en el punto (9, 5) del sistema de referencia,**
- **el punto distal de la mano se sitúa en el punto (10, 5´5) del sistema de referencia,**
- **el centro de masas del brazo se sitúa en el 51,3% de su longitud,**
- **el centro de masas del antebrazo se sitúa en el 39% de su longitud,**
- **el centro de masas de la mano se sitúa en el 82% de su longitud.**

	Masas	Peso
– Brazo	2 kg	19,6 N
– Antebrazo	1,5 kg	14,7 N
– Mano	0,5 kg	4,9 N



Longitud:

Brazo → x = 3, y = 3

Antebrazo → x = 3, y = 2

Mano → x = 1, y = 0,5

Una vez conocida la longitud en el eje x e y de los distintos segmentos, calculamos donde se localiza el CDM de cada uno:

Brazo
- x $\Longrightarrow$ 3 · 51% = 1,54
- y $\Longrightarrow$ 3 · 51% = 1,54

Antebrazo
- x $\Longrightarrow$ 3·39% = 1,17
- y $\Longrightarrow$ 2·39% = 0,78

$$\text{Mano} \begin{cases} x \Longrightarrow 1 \cdot 82\% = 0{,}82 \\ y \Longrightarrow 0{,}5 \cdot 82\% = 0{,}41 \end{cases}$$

Sabemos que el momento angular de un sistema es igual a la suma de los momentos angulares de cada segmento:

$M_{sistema} = M_{brazo} + M_{antebrazo} + M_{mano}$

$P_{sistema} \cdot CDG_s = P_{brazo} \cdot CDG_{brazo} + P_{antebrazo} \cdot CDG_{antebrazo} + P_{mano} \cdot CDG_{mano}$

En las "x":

$39{,}2\ N \cdot CDGs_x = 19{,}6\ N \cdot 1{,}54 + 14{,}7\ N \cdot 1{,}17 + 4{,}9\ N \cdot 0{,}82$

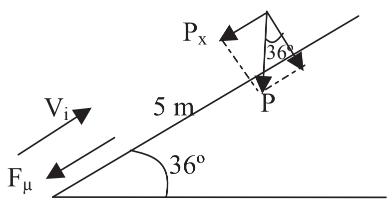
$$CDGs_x = \frac{30{,}18 + 17{,}20 + 4{,}01}{39{,}2} = \frac{51{,}40}{39{,}2} = \boxed{\mathbf{1{,}31}}$$

En las "y":

$39{,}2\ N \cdot CDGs_y = 19{,}6\ N \cdot 1{,}54 + 14{,}7\ N \cdot 0{,}78 + 4{,}9\ N \cdot 0{,}41$

$$CDGs_y = \frac{30{,}18 + 11{,}46 + 2}{39{,}2} = \frac{43{,}64}{39{,}2} = \boxed{\mathbf{1{,}11}}$$

40. ¿Qué velocidad mínima debe llevar un esquiador de masa 50 kg al comienzo de una pendiente de 36º hacia arriba, para poder recorrer toda su extensión (5 m) deslizándose sin imprimir fuerza, si la fuerza de rozamiento entre los esquíes y la nieve es de 2,83 N?



El sumatorio de las fuerzas que influyen en el desplazamiento tiene que ser proporcional a la desaceleración necesaria para que el esquiador cubra los 5 m con una velocidad final igual a cero.

$$F_\mu + P_x = m \cdot a$$

$$F_\mu + P \cdot \text{sen } 36º = 50 \text{ kg} \cdot a$$

$$\frac{2{,}83 \text{ N} + 50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 36º}{50 \text{ kg}} = a$$

$$\frac{2{,}83 \text{ N} + 288 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = 5{,}81 \text{ m/s}^2$$

Pero sentido contrario al desplazamiento.

Como se trata de un movimiento uniformemente desacelerado:

$$e = V_i \cdot t + \tfrac{1}{2}\, a \cdot t^2$$

y :

$$a = \frac{-V_i}{t} \Longrightarrow t = \frac{-V_i}{a}$$

Sustituyendo el tiempo en la ecuación del espacio nos queda:

$$e = V_i \cdot \frac{-V_i}{a} + \tfrac{1}{2}\, \cancel{a} \cdot \frac{-V_i^2}{a^{\cancel{2}}}$$

$$e = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{V_i^2}{a}$$

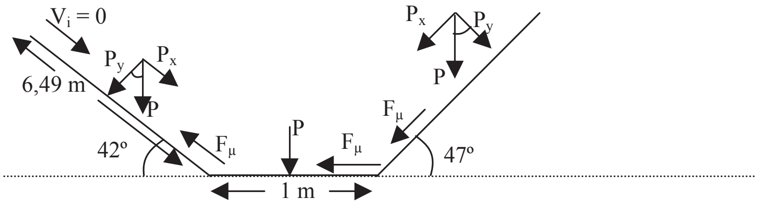
$$V_i^2 = -2\, h \cdot a$$

$$V_i^2 = -2 \cdot 5 \text{ m} \cdot (-5{,}81 \text{ m/s}^2)$$

$$V_i = \sqrt{-2 \cdot 5 \text{ m} \cdot (-5{,}81 \text{ m/s}^2)}$$

$$\boxed{\mathbf{V_i = 7{,}63 \text{ m/s}}}$$

41. Un esquiador de snowboard tras dejarse caer deslizándose por una pendiente de 42º y 6,49 m de longitud, se desliza 1 m en un plano horizontal, para pasar a una pendiente de subida de 47º. Calcular la altura máxima que alcanza en esta pendiente, sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico es de 0,2.



El sumatorio de las Fuerzas que influyen en el desplazamiento es distinto de cero y proporcional a la aceleración que transmiten al sujeto:

En la bajada:

$\Sigma F = -F_\mu + P_x = m \cdot a$

$-\ \mu N + P \cdot \text{sen } 42 = m \cdot a$

$-\ \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 42 + m \cdot g \cdot \text{sen } 42 = m \cdot a$

$-\ \mu \cdot g \cdot \cos 42 + g \cdot \text{sen } 42 = a$

$-\ 0{,}2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 0{,}74 + 9{,}8\ m/s^2 \cdot 0{,}67 = a$

$-\ 1{,}45\ m/s^2 + 6{,}56\ m/s^2 = a$

$$\boxed{\mathbf{a = 5{,}11\ m/s^2}}$$

Tras los 6,49 m la velocidad alcanzada será:

$e = V_i \cdot t + ½a \cdot t^2$

$6{,}49\ m = ½ \cdot 5{,}11\ m/s^2 \cdot t^2$

$$t^2 = \frac{2 \cdot 6{,}49\ m}{5{,}11\ m/s^2}$$

$$\boxed{\mathbf{t = 1{,}59\ s}}$$

$$a = \frac{V_f - V_i}{t} \Longrightarrow V_f = a \cdot t + \cancelto{0}{V_i}$$

$$V_f = 5{,}11\ m/\cancel{s^2} \cdot 1{,}59\ \cancel{s}$$

$$\boxed{\mathbf{V_f = 8{,}12\ m/s}}$$

Durante el deslizamiento horizontal sólo influye la fuerza de rozamiento:

$\Sigma F = F_{\mu} = m \cdot a$

$- \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$

$-0{,}2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 = a$

$\boxed{\mathbf{a = -1{,}96\ m/s^2}}$

Se produce una desaceleración.

El tiempo invertido en recorrer ese metro fue:

$e = V_i \cdot t + ½ a\, t^2$

$1\ m = 8{,}12\ m/s \cdot t + ½\ (-1{,}96\ m/s^2) \cdot t^2$

$$t = \frac{-8{,}12\ m/s \pm \sqrt{(8{,}12\ m/s)^2 - 4(-0{,}98\ m/s^2) \cdot (-1\ m)}}{-1{,}96\ m/s^2}$$

$$t = \frac{-8{,}12\ m/s \pm \sqrt{65{,}93\ m^2/s^2 - 3{,}92\ m^2/s^2}}{-1{,}96\ m/s^2}$$

$$t = \frac{-8{,}12\ m/s \pm 7{,}87\ m/s}{-1{,}96\ m/s^2} \begin{cases} \nearrow 8{,}15\ s \\ \searrow \boxed{\mathbf{0{,}12\ s}} \end{cases}$$

El resultado de 8,15 s es muy alto, más que el que tarda en cubrir la bajada de 6,49 m por lo que se descarta.

La velocidad final de ese deslizamiento es:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t} \Longrightarrow V_f = a \cdot t + V_i$$

$V_f = -1{,}96\ m/s^2 \cdot 0{,}12\ s + 8{,}12\ m/s$

$V_f = (-0{,}23 + 8{,}12)\ m/s$

$\boxed{\mathbf{V_f = 7{,}88\ m/s}}$

En la subida:

$\Sigma F = -F_{\mu} - P_x = m \cdot a$

$- \mu \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \cos 47 - \cancel{m} \cdot g \cdot \text{sen } 47 = \cancel{m} \cdot a$

$- \mu \cdot g \cdot \cos 47 - g \cdot \text{sen } 47 = a$

$- 0{,}2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 47 - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 47 = a$

$- 1{,}33 \text{ m/s}^2 - 7{,}16 \text{ m/s}^2 = a$

$\boxed{\mathbf{a = -8{,}49 \text{ m/s}^2}}$

Para calcular la altura máxima alcanzada en la subida, debemos conocer el tiempo invertido:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

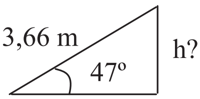
$$t = \frac{V_f - V_i}{a} = \frac{0 - 7{,}88 \text{ m/s}}{-8{,}49 \text{ m/s}^2} = \underline{0{,}92 \text{ s}}$$

$e = V_i \cdot t + ½ at^2$

$e = 7{,}88 \text{ m/s} \cdot 0{,}92 \text{ s} + ½ (-8{,}49 \text{ m/s}^2) \cdot (0{,}92 \text{ s})^2$

$e = 7{,}25 \text{ m} - 3{,}59 \text{ m}$

$\boxed{\mathbf{e = 3{,}66 \text{ m}}}$



recorre en la pendiente, en altura

$h = 3{,}66 \text{ m} \cdot \text{sen } 47 = \boxed{\mathbf{2{,}67 \text{ m}}}$

42. Un jugador de hockey hierba golpea la bola (inicialmente en reposo y con una masa de 200 gr) con una fuerza de 327 N, saliendo despedida con una velocidad de 10 m/s. Halla el tiempo que el stick estuvo en contacto con la bola.

El impulso es igual a la cantidad de movimiento:

$I = P$

$F \cdot t = m \cdot \Delta V$

$327\ N \cdot t = 0{,}2\ kg \cdot (10\ m/s - 0\ m/s)$

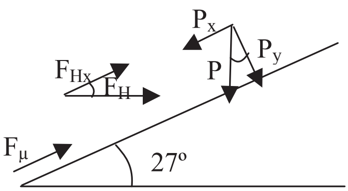
$$t = \frac{0{,}2\ kg \cdot 10\ m/s}{327\ N}$$

$\boxed{\mathbf{t = 0{,}006\ s}}$

43. Un trineo de masa 452 kg se encuentra en una pendiente de 27º, el coeficiente de rozamiento es de 0,1. Calcular la fuerza horizontal que debemos aplicar al trineo para que se deslice a velocidad constante.

Si se desliza a velocidad constante, la aceleración es nula y por lo tanto el sumatorio de todas las fuerzas es igual a cero:

$$\Sigma\ F = 0 = F_\mu + P_x + F_{Hx} = \cancelto{0}{m} \cdot a$$



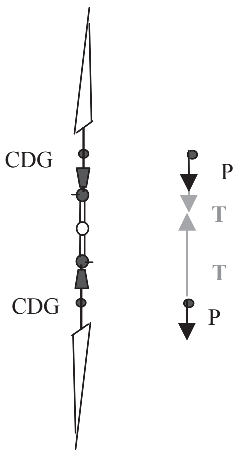
$$0 = -\ \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 27 + m \cdot g \cdot \text{sen } 27 + F_H \cdot \cos 27$$

$$0 = -0{,}1 \cdot 452 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}89 + 452 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}45 + 0{,}89F_H$$

$$F_H = \frac{+394{,}23 \text{ N} - 1993{,}32 \text{ N}}{0{,}89} = \boxed{\mathbf{-1796{,}73 \text{ N}}}$$

Negativa porque tiene sentido opuesto a las fuerzas F_μ y P_x que las hemos considerado positivas.

44. Un gimnasta de 69 kg está suspendido sobre la barra fija siendo su longitud total, desde las manos hasta las puntas de los pies, de 2 m; el CDG se encuentra a 0,75 m de las manos. El gimnasta realiza giros de 360º alrededor de la barra. Calcular la tensión del gimnasta al pasar por el punto más bajo y más alto, sabiendo que en ambas posiciones la velocidad lineal es de 5 m/s.



Al pasar por el punto más bajo, la fuerza centrípeta es:

$F_{Cp} = T - P$

$$m \cdot \frac{V^2}{r} = T - m \cdot g$$

$$T = \frac{m \cdot V^2}{r} + m \cdot g$$

$$T = \frac{69\ kg \cdot (5\ m/s)^2}{0,75\ m} + 69\ kg \cdot 9,8\ m/s^2$$

$$T = \frac{1725\ kg \cdot m^2/s^2}{0,75\ m} + 676,2\ kg \cdot m/s^2$$

$$T = (2300 + 676,2)\ N$$

$$\boxed{\mathbf{T = 2976,2\ N}}$$

Al pasar por el punto más alto la fuerza centrípeta es:

$F_{Cp} = T + P$

$$m \frac{V^2}{r} = T + m \cdot g$$

$$T = \frac{m \cdot V^2}{r} - m \cdot g$$

$$T = \frac{69\ kg \cdot 25\ m^2/s^2}{0,75\ m} - 69\ kg \cdot 9,8\ m/s^2$$

$$T = \frac{1725\ kg \cdot m^2/s^2}{0,75\ m} - 676,2\ kg \cdot m/s^2$$

$$T = (2300 - 676,2)\ N \quad \boxed{\mathbf{T = 1623,8\ N}}$$

45. Un atleta de 65 kg se desplaza a una velocidad constante de 16 m/s mientras que el aire le ofrece una fuerza constante y opuesta al movimiento durante 5 s comunicándole una velocidad en sentido contrario de 2,5 m/s. Calcula el impulso y la fuerza aplicada por el aire.

El impulso ejercido por una fuerza constante sobre un objeto durante un tiempo es igual a la cantidad de movimiento que le transmite:

$I = P$

$I = m \cdot \Delta V$

$I = 65\ kg \cdot (-2{,}5\ m/s)$

$\boxed{I = -162{,}5\ kg \cdot m/s}$

Y la fuerza será:

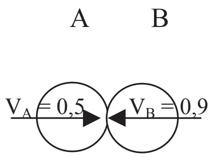
$I = F \cdot t \Longrightarrow F = \dfrac{I}{t} = \dfrac{-162{,}5\ kg \cdot m/s}{5\ s} = -32{,}5\ kg \cdot m/s^2$

$\boxed{F = -32{,}5\ N}$

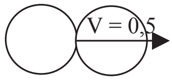
46. Dos alumnos de educación física, cada uno con un balón, se intercambian los balones mediante pases horizontales. En un intercambio debido a una descoordinación de los estudiantes los balones chocan frontalmente. Si las velocidades que llevan en el momento del choque son de 0,5 m/s para el balón "A" y -0,9 m/s para el balón "B" y la velocidad del balón "B" después del choque es de 0,5 m/s, calcula la velocidad final de "A" sabiendo que la masa de cada uno de ellos es de 300 gr.

El principio de la cantidad de movimiento nos dice que:

$P_{antes} = P_{después}$



En el choque



Después del coche

$m_A \cdot V_{AA} – m_B \cdot V_{BA} = m_A \cdot V_{AD} – m_B \cdot V_{BD}$

$\cancel{0,3}\ kg \cdot 0,5\ m/s – \cancel{0,3}\ kg \cdot (0,9\ m/s) = \cancel{0,3}\ kg \cdot V_{AD} + \cancel{0,3}\ kg \cdot 0,5\ m/s$

$-0,4\ m/s = V_{AD} + 0,5\ m/s$

$\boxed{\mathbf{V_{AD} = -0,9\ m/s}}$

47. En una prueba de Boosley individual el deportista de 65 kg va corriendo a una velocidad de 9 km/h y da alcance al vehículo de 200 kg que marcha a una velocidad de 4,5 km/h montándose en él. Calcular la velocidad alcanzada por el sistema formado por el conjunto del deportista y el vehículo en el instante que el deportista se monta en él.

El principio de la cantidad de movimiento nos dice que:

$P_{antes} = P_{después}$

$m_d \cdot V_d + m_v \cdot V_v = (m_d + V_v) \cdot V_{sistema}$

$$V_{sistema} = \frac{m_d \cdot V_d + m_v \cdot V_v}{m_d + V_v \cdot}$$

$$V_{sistema} = \frac{65\text{ kg} \cdot 9\text{ km/h} + 200\text{ kg} \cdot 4{,}5\text{ km/h}}{(65 + 200)\text{kg}}$$

$$V_{sistema} = \frac{585\text{ kg} \cdot \text{km/h} + 900\text{ kg} \cdot \text{km/h}}{265\text{ kg}}$$

$$V_{sistema} = 5{,}60\text{ km/h} = 5{,}60 \cdot \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}$$

$$\boxed{\mathbf{V_{sistema} = 1{,}55\text{ m/s}}}$$

48. Un acróbata de 65 kg, subido en una esfera maciza de 12 kg y 50 cm de radio, pretende ascender por una pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s. ¿Qué impulso angular inicial debe aplicar el acróbata sobre la esfera para que comience a moverse? ¿Cuál será la fuerza ejercida por el acróbata durante la subida? Resolver el ejercicio despreciando la fuerza de rozamiento.

El impulso angular es igual a la cantidad de movimiento angular:

$M \cdot t = I(\Delta\omega)$

El momento de inercia para una esfera maciza es:

$I = 2/5\ mR^2$

Así que

$L = 2/5 \cdot 12\ kg \cdot (0{,}50\ m)^2 \cdot (\omega_f - \omega_i)$

La velocidad angular inicial es cero pero la final no la conocemos, aunque podemos calcularla a partir de la velocidad lineal que se pretende conseguir:

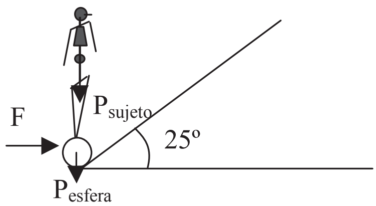
$$\omega = \frac{V}{R}$$

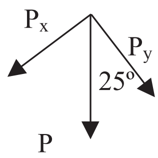
Luego

$$L = 1{,}2\ kg\ \ m^2 \cdot \frac{0{,}03\ m/s}{0{,}5\ m}$$

$$\boxed{L = 0{,}072\ Kg\ m^2/s}$$

La fuerza ejercida por el acróbata:





Para que se mueva a velocidad constante, el sumatorio de todas las fuerzas que actúan sobre el desplazamiento de la esfera tiene que ser igual a cero.

$\Sigma F = P_{esfera} \cdot sen\ 25 + P_{sujeto} \cdot sen\ 25 + F \cdot cos\ 25$

$0 = 12 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}42 + 65 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}42 + F \cdot 0{,}90$

$$F = \frac{-49,39 - 267,54}{0,9} = \boxed{\mathbf{-352\ N}}$$

Negativa porque tiene sentido opuesto a las fuerzas $P_{x\ acróbata}$ y $P_{x\ esfera}$ que las hemos considerado positivas.

49. El mismo acróbata, esta vez subido sobre un cilindro macizo de 12 kg y 50 cm de radio, pretende ascender por la misma pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s (despreciando la fuerza de rozamiento). ¿Qué impulso angular inicial debe aplicar el acróbata sobre el cilindro para que comience a moverse? ¿Cuál será la fuerza ejercida por el acróbata?

El impulso angular es igual a la cantidad de movimiento angular:

$M \cdot t = I(\Delta\omega)$

El momento de inercia para un cilindro macizo es:

$I = ½ \, mR^2$

Así que

$L = ½ \cdot 12 \text{ kg} \cdot (0{,}50 \text{ m})^2 \cdot (\omega_f - \omega_i)$

La velocidad angular final es la misma del ejercicio anterior:

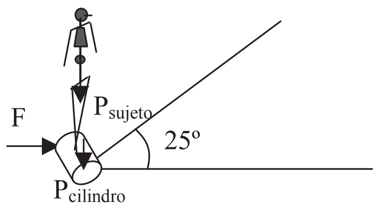
$$\omega_f = \frac{V}{R}$$

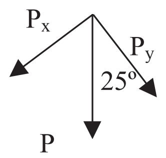
Luego

$$L = 1{,}5 \text{ kg m}^2 \cdot \frac{0{,}03 \text{ m/s}}{0{,}5 \text{ m}}$$

$L = 0{,}09 \text{ Kg m}^2/\text{s}$

La fuerza ejercida por el acróbata es igual que la del ejercicio anterior:





Para que se mueva a velocidad constante, el sumatorio de todas las fuerzas que actúan sobre el desplazamiento del cilindro tiene que ser igual a cero.

$\Sigma F = P_{cilindro} \cdot \text{sen } 25 + P_{sujeto} \cdot \text{sen } 25 + F \cdot \cos 25$

$0 = 12 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}42 + 65 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}42 + F \cdot 0{,}90$

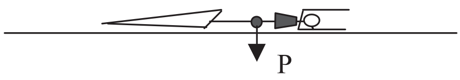
$$F = \frac{-49{,}39 - 267{,}54}{0{,}9} = \boxed{-352 \text{ N}}$$

Negativa porque tiene sentido opuesto a las fuerzas $P_{x\ acróbata}$ y $P_{x\ cilindro}$ que las hemos considerado positivas.

50. Un niño con una masa de 37 kg se encuentra en tendido prono sobre el suelo y quiere reptar hacia adelante ayudándose de las manos. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático es de 0,7 calcular la fuerza que debe ejercer el niño para comenzar a moverse.

Para comenzar a moverse la fuerza ejercida por el niño debe anular a la fuerza de rozamiento:

$F_{\mu} = F_{niño}$



$\mu \cdot N = F_{niño}$

$\mu \cdot P = F_{niño}$

$0{,}7 \cdot 37\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = F_{niño}$

$\boxed{\mathbf{F_{niño} = 253{,}82\ N}}$

Trabajo y Energía

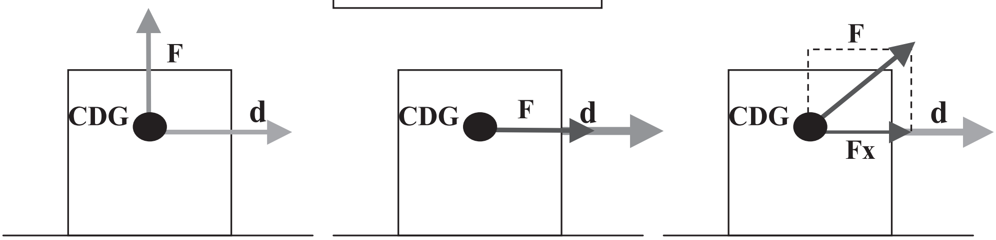
RESUMEN TEÓRICO

- **Trabajo:** es el producto entre el desplazamiento recorrido por un cuerpo y la fuerza influyente en dicho desplazamiento. Es una magnitud escalar, sólo tiene módulo y se mide en Julios (J).

$$\boxed{W = F\,d}$$

Por lo tanto, una fuerza produce trabajo siempre que tenga la misma dirección que el desplazamiento. Por lo que su ecuación será:

$$\boxed{W = F \cos\alpha\, d}$$



Esta fuerza no produce trabajo	Esta fuerza sí produce trabajo	La componente x de la fuerza produce trabajo

- **Potencia:** es el trabajo realizado en función del tiempo que se tarda en hacer. Es una magnitud escalar y se mide en vatios (W), siendo esta medida la relación de Julios/s.

$$\boxed{P = W/t}$$

- **Energía:** es la capacidad de producir trabajo. Existen numerosas formas de energía: eléctrica, química, solar, etc.
- **Energía Mecánica:** su capacidad de producir trabajo depende de su posición y movimiento. Es la suma de las energías cinética y potencial.

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

- **Energía Cinética:** La capacidad de un cuerpo de producir trabajo depende de su movimiento, a mayor velocidad mayor trabajo realizado.

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}\, m\, V^2}$$

- **Energía Potencial:** La capacidad de un cuerpo de producir trabajo depende de su posición en altura respecto del suelo. Cuanto mayor sea la altura mayor será la capacidad de producir trabajo.

$$\boxed{\mathbf{E_p = m\ g\ h}}$$

- **Conservación de la Energía Mecánica:** si sobre el sistema no actúan fuerzas externas, la energía mecánica se mantiene constante, por lo que si la energía cinética aumenta, la potencial disminuye y a la inversa.

  No obstante la actuación de fuerzas externas, como la fuerza de rozamiento, varían la energía mecánica, en este caso disminuyéndola ya que se opone al movimiento.

  El trabajo desarrollado por las fuerzas externas es igual a la variación de su energía mecánica.

$$\boxed{\mathbf{W = E_m}}$$

- **Energía de los choques:** cuando dos cuerpos chocan se produce un intercambio de la energía. Dependiendo de la conservación de la energía cinética podemos hablar de choques elásticos y choques inelásticos:
  - <u>Choques elásticos</u>: cuando se conserva la energía cinética.
  - <u>Choques inelásticos</u>: cuando la energía cinética no se conserva. Si los cuerpos permanecen unidos tras la colisión hablamos de choques perfectamente inelásticos.
- **Trabajo de rotación:** es el producto del momento de fuerza exterior por el desplazamiento angular.

$$\boxed{\mathbf{W_r = M\ \sigma}}$$

- **Potencia de rotación:** es el producto del momento de fuerza exterior por la velocidad angular.

$$\boxed{\mathbf{P_r = M\ \omega}}$$

- **Energía cinética de rotación:** La capacidad de un cuerpo de producir trabajo de rotación depende de su momento de inercia y de su velocidad angular.

$$\boxed{\mathbf{E_{cr} = ½\ I\ \omega^2}}$$

  El trabajo de rotación realizado por los momentos de fuerza exteriores es igual a la variación de su energía cinética de rotación.

$$\boxed{\mathbf{W_r = \Delta E_{cr}}}$$

Si un cuerpo combina movimiento de rotación y traslación su energía cinética total es la suma de su energía cinética de traslación más su energía cinética de rotación.

$$\boxed{E_{ctotal} = \tfrac{1}{2}\, m\, V^2 + \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2}$$

PROBLEMAS

51. Calcular el trabajo y la potencia realizados por un deportista al elevar 86 cm verticalmente una pesa de 10 kg a velocidad constante si tarda 0,27 s. ¿Cuál será el trabajo realizado si mantiene la pesa elevada durante 2 minutos?
52. Un ciclista de masa 90 kg se desplaza por una superficie totalmente horizontal a una velocidad constante de 8,30 m/s; cuando un espectador le empuja sobre su espalda pasa a una velocidad de 8,75 m/s. Calcular el trabajo realizado por la fuerza del espectador.
53. Un motorista circula por una superficie totalmente horizontal a una velocidad de 150 km/h, ¿Qué trabajo deben realizar los frenos para adquirir una velocidad final de 90 km/h, sabiendo que la masa del sistema formado por el motorista y la moto es de 389 kg?
54. Dos niños en contacto pero sin agarrarse, tal y como muestra la figura, se dejan caer por un tobogán simultáneamente. Sus coeficientes de rozamiento con el tobogán son 0,3 para "A" y 0,55 para "B", la pendiente del tobogán es de 60º y la altura desde la que parten es de 2 m. Calcular las energías cinéticas de ambos niños al llegar al suelo. La masa de A es 40 kg y la de B 20 kg.
55. Un atleta lanza un disco de 50 cm de diámetro y una masa de 2 Kg haciéndolo girar sobre su eje vertical a 10 rad/s. Calcula la energía cinética de rotación inicial.
56. Un aro de 20 cm de radio interior, 1 cm de radio exterior y una masa de 0,5 kg gira a una velocidad de 62 rad/s en torno a su eje de simetría. Calcular la fuerza de rozamiento necesaria para que el aro se detenga totalmente al cabo de 5 s, sabiendo que se aplica tangencialmente en el interior del aro (R=20 cm). Calcular también el trabajo realizado por esta fuerza.
57. Un jugador de fútbol golpea verticalmente hacia arriba el balón de 250 gr con una energía de 150 J. Calcular la altura que alcanza el balón, la energía cinética y potencial que posee cuando la velocidad es 1/3 de la inicial. Despreciar el rozamiento del aire.
58. Calcular el trabajo realizado por un escalador de 76 kg que sube verticalmente una altura de 750 m. Si tarda una hora, ¿qué potencia desarrolla?
59. ¿Qué trabajo debe realizar un telesquí para subir a un esquiador de 64 kg por una pendiente de 45º de inclinación y una altura de 500 m?
60. Un atleta lanza un peso de 5 kg con una velocidad de 40 m/s y un ángulo de 45º. Calcula la altura máxima alcanzada, la energía mecánica en el punto más alto, la altura alcanzada al cabo de 0,5 segundos y las energías cinética y potencial en ese momento.
61. Un jugador de tenis antes de realizar un saque bota la bola de 100 gr que sale de la mano del tenista con una velocidad de 8 m/s y desde una altura de 1,15 m. Halla el tiempo que tarda en llegar al suelo, la velocidad final y el incremento experimentado por la energía cinética.

62. Siguiendo con el caso del problema anterior, si la bola rebota hasta una altura de 0,90 m, ¿cuál ha sido la pérdida de energía mecánica?

63. Un jugador de bolos lanza una bola de 5 kg y 15 cm de radio sobre la pista, la cual se desplaza rodando con una velocidad lineal de 2 m/s. Calcular su momento de inercia, su energía cinética lineal y su energía cinética de rotación.

64. Un acróbata subido en una esfera maciza (12 kg), pretende ascender por una pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s (despreciando la fuerza de rozamiento). ¿Qué trabajo debe realizar el acróbata? ¿Cuál será la potencia desarrollada?

65. El mismo acróbata, una vez alcanzado el alto de la pendiente, pretende bajar a la misma velocidad constante. Calcular el trabajo y potencia realizados por el acróbata en esta ocasión.

66. En un partido de curling, una piedra “A” choca con otra “B” en reposo. En el momento del choque la piedra “A” lleva una velocidad de 1,5 m/s, tras la colisión la piedra “A” sale despedida con un ángulo de 25º y la piedra “B” con un ángulo de 65º, la masa de las piedras es de 3 kg. Calcular la energía cinética antes y después del choque de cada una de las piedras considerando que se trata de un choque elástico.

67. Si en un partido de petanca se produce un choque perfectamente inelástico entre una bola (masa 500 gr y velocidad inicial 3 m/s) y el boliche (masa 100 gr y velocidad inicial 0), calcular la velocidad final de ambas después del choque. Demostrar que las energías cinéticas antes y después son diferentes.

68. Calcular las velocidades finales de la bola y el boliche en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

69. En un partido de rugby el jugador “A” (masa 80 kg y velocidad inicial –7 m/s) hace un placaje al jugador “B” (masa 90 kg y velocidad inicial 19 m/s). Calcular la velocidad final de ambos después del choque, teniendo en cuenta que ambos sujetos quedan unidos después del choque. ¿Cuáles son las energías cinéticas antes y después del choque?

70. Calcular las velocidades finales de ambos jugadores en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

71. En una pista de hielo, un patinador “A” de 70 kg se choca con otro “B” de 55 kg que se encontraba parado. Como consecuencia, ambos pegados, se deslizan 64 cm antes de pararse. Si el coeficiente de rozamiento es de 0,2, ¿cuál es la velocidad inicial del patinador “A”?, ¿y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento?

72. Calcular las velocidades finales de ambos patinadores en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

73. Una gimnasta deja caer un aro (150 gr de masa y un radio interior de 25 cm y 1 cm de radio de masa) rodando por un plano inclinado de 25º y altura 21,75 m. Calcular la velocidad de su centro de masas al llegar al suelo.

74. Una gimnasta lanza una pica de 225 gr y 1,10 m de largo totalmente vertical con una velocidad inicial de 6,4 m/s. Considerando que la pica gira sobre su centro de masas y alrededor del eje transversal a velocidad angular constante e igual a 10 rad/s, calcula la energía cinética total en el instante que despega de la mano de la gimnasta.
75. La misma gimnasta ahora lanza la misma pica con una velocidad inicial de 6,4m/s y un ángulo de despegue de 75º. Considerando que la pica gira sobre su centro de masas a velocidad angular constante e igual a 10 rad/s, calcula la energía cinética total en el instante que despega de la mano de la gimnasta.

Trabajo y Energía

Problemas Resueltos

51. Calcular el trabajo y la potencia realizados por un deportista al elevar 86 cm verticalmente una pesa de 10 kg a velocidad constante si tarda 0,27 s. ¿Cuál será el trabajo realizado si mantiene la pesa elevada durante 2 minutos?

El trabajo realizado por una fuerza es el producto entre aquella fuerza que tenga igual dirección que el desplazamiento y el desplazamiento experimentado por la pesa de 10 kg de masa.

Esta fuerza debe igualar al peso de la pesa para que el desplazamiento sea constante:

$W = F \cdot d = P \cdot d = m \cdot g \cdot d$

$W = F \cdot d = 10\ \text{kg} \cdot g \cdot d$

$W = 10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}86\ \text{m}$

$W = 84{,}28\ \text{M} \cdot \text{m}$ $\boxed{\mathbf{W = 84{,}28\ J}}$

Potencia:

La potencia es el trabajo aplicado por la unidad de tiempo.

$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{84{,}28\ \text{J}}{0{,}27\ \text{s}}$ $\boxed{\mathbf{P = 312{,}14\ vatios}}$

Durante los dos minutos en que mantiene la pesa en alto no se produce trabajo puesto que no existe desplazamiento.

52. Un ciclista de masa 90 kg se desplaza por una superficie totalmente horizontal a una velocidad constante de 8,30 m/s; cuando un espectador le empuja sobre su espalda pasa a una velocidad de 8,75 m/s. Calcular el trabajo realizado por la fuerza del espectador.

El trabajo realizado por el espectador produce una variación en la energía cinética del ciclista de igual magnitud que el trabajo:

$W = E_{Cfinal} - E_{Cinicial}$

$W = ½ \, m \cdot V_f^2 - ½ \, m \cdot V_i^2$

$W = ½ \, 90 \text{ kg} \cdot (8{,}75 \text{ m/s})^2 - ½ \, 90 \text{ kg} \cdot (8{,}30 \text{ m/s})^2$

$W = 3445{,}3 \text{ J} - 3100{,}05 \text{ J}$

W = 345,25 J

53. Un motorista circula por una superficie totalmente horizontal a una velocidad de 150 km/h, ¿Qué trabajo deben realizar los frenos para adquirir una velocidad final de 90 km/h, sabiendo que la masa del sistema formado por el motorista y la moto es de 389 kg?

El trabajo realizado por los frenos debe ser igual a la variación de la energía cinética producida:

$W = E_{C\ final} - E_{C\ inicial}$

$W = ½\ m \cdot V_f^2 - ½\ m \cdot V_i^2$

$W = ½\ 389\ kg \cdot (90\ km/h)^2 - ½\ 389\ kg \cdot (150\ km/h)^2$

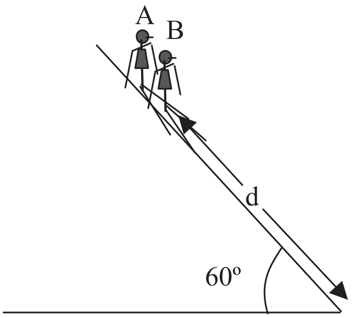
$$W = = ½\ 389\ kg \cdot \left(90 \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s}\right)^2 - ½\ 389\ kg \cdot \left(150 \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s}\right)^2$$

$W = 121562{,}5\ J - 337673{,}61\ J$

$\boxed{\mathbf{W = -216111{,}11\ J}}$

El signo negativo del trabajo nos indica que se realiza en sentido contrario al desplazamiento.

54. Dos niños en contacto pero sin agarrarse, tal y como muestra la figura, se dejan caer por un tobogán simultáneamente. Sus coeficientes de rozamiento con el tobogán son 0,3 para "A" y 0,55 para "B", la pendiente del tobogán es de 60º y la altura desde la que parten es de 2 m. Calcular las energías cinéticas de ambos niños al llegar al suelo. La masa de A es 40 kg y la de B 20 kg.



En lo más alto del tobogán los 2 sujetos poseen energía potencial, pero la energía cinética es nula, ya que no hay velocidad inicial. A medida que van bajando la energía potencial se transforma en energía cinética y trabajo de rozamiento.

Además el sujeto A ejerce una fuerza sobre B comunicándole energía y A pierde dicha energía. Por ello:

$$\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow E_{piA} = E_{cfA} + W_{\mu A} + W_{AsobreB} \\ B \longrightarrow E_{piB} = E_{cfB} + W_{\mu B} - W_{AsobreB} \end{array}\right\}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow m_A \cdot g \cdot h = ½\, m_A \cdot V_f^2 + F_{\mu A} \cdot d + W_{AsobreB} \\ B \longrightarrow m_B \cdot g \cdot h = ½\, m_B \cdot V_f^2 + F_{\mu B} \cdot d - W_{AsobreB} \end{array}\right\}$$

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow 40 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m} = ½\, 40 \text{ kg} \cdot V_f^2 + \mu_a \cdot N_a \cdot d + W_{AsobreB} \\ B \longrightarrow 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m} = ½\, 20 \text{ kg} \cdot V_f^2 + \mu_b \cdot N_b \cdot d - W_{AsobreB} \end{array}\right\}$$

$$784 \text{ Julios} = 20 \text{ kg} \cdot V_f^2 + 0{,}3 \cdot 40 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 60 \cdot \frac{2 \text{ m}}{\text{sen } 60} + W_{AsobreB}$$

$$392 \text{ Julios} = 10 \text{ kg} \cdot V_f^2 + 125{,}35 \text{ Julios} - W_{AsobreB}$$

Como la velocidad con la que llegan al suelo es la misma para los dos niños nos queda un sistema con 2 incógnitas:

V_f y $W_{AsobreB}$

Despejando $W_{AsobreB}$ en la primera ecuación:

$W_{AsobreB}$ = 784 Julios – 20 kg · V_f^2 - 136,74 Julios

Y sustituyendo en la segunda ecuación, nos queda:

392 Julios = 10 kg · V_f^2 + 125,35 Julios – 784 Julios + 20 kg · V_f^2 + 136,74 Julios

Despejamos ahora para calcular la V_f :

30 kg · V_f^2 = 392 J - 125,35 J +784 J - 136,74 J

30 kg · V_f^2 = 913,91 J

$$V_f^2 = \frac{913{,}91\ J}{30\ kg} \quad \Longrightarrow \quad V_f = \sqrt{\frac{913{,}91\ J}{30\ kg}} = \underline{5{,}52\ m/s}$$

Una vez que conocemos la velocidad final de ambos niños, sustituimos en la fórmula de la energía cinética:

$E_c = ½\ m \cdot v^2$

En el caso de A:

$E_c = ½\ 40\ kg \cdot (5{,}52\ m/s)^2$

$$\boxed{\mathbf{E_c = 609{,}40\ J}}$$

En el caso de B:

$E_c = ½\ 20\ kg \cdot (5{,}52\ m/s)^2$

$$\boxed{\mathbf{E_c = 304{,}70\ J}}$$

55. Un atleta lanza un disco de 50 cm de diámetro y una masa de 2 Kg haciéndolo girar sobre su eje vertical a 10 rad/s. Calcula la energía cinética de rotación inicial.

La energía cinética de rotación es igual a:

$E_{cr} = ½\ I \cdot \omega^2$

El momento de inercia de un disco es $I = ½\ MR^2$

Luego la energía cinética de rotación para el disco vendrá dada por la siguiente expresión:

$E_{cr} = ½ \cdot ½ \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega^2$

$E_{cr} = ¼ \cdot 2\ \text{kg} \cdot (0{,}25\ \text{m})^2 \cdot (10\ \text{rad/s})^2$

$\boxed{\mathbf{E_{cr} = 3{,}12\ Julios}}$

56. Un aro de 20 cm de radio interior, 1cm de radio exterior y una masa de 0,5 kg gira a una velocidad de 62 rad/s en torno a su eje de simetría. Calcular la fuerza de rozamiento necesaria para que el aro se detenga totalmente al cabo de 5 s, sabiendo que se aplica tangencialmente en el interior del aro (R=20 cm). Calcular también el trabajo realizado por esta fuerza.

La energía cinética de rotación es igual a:

$E_{cr} = ½\ I \cdot \omega^2$

Y el momento de inercia de un aro es como el de la corona circular:

$I = ½\ m \cdot (R^2 + r^2)$

Por lo tanto, la E_{cr} inicial será

$E_{cri} = ½\ ½\ m \cdot (R^2 + r^2) \cdot \omega^2$

$E_{cri} = ¼ \cdot 0{,}5\ kg \cdot ((0{,}20\ m)^2 + (0{,}01\ m)^2) \cdot (62\ rad/s)^2$

$E_{cri} = ¼ \cdot 0{,}5\ kg \cdot 0{,}04\ m^2 \cdot 3844\ rad^2/s^2$

$E_{cri} = \underline{19{,}22\ Julios}$

Sabiendo que en el momento que se detiene la velocidad es nula y por lo tanto también es nula la energía cinética de rotación, la fuerza de rozamiento debe producir un trabajo igual a la energía cinética de rotación inicial, pero de sentido contrario:

$\boxed{W_\mu = -E_{cri} = -19{,}22\ Julios}$

Para calcular el módulo de la fuerza de rozamiento debemos conocer el desplazamiento angular, para ello empleamos la siguiente fórmula de los movimientos uniformemente acelerados.

$$\frac{\theta}{t} = \frac{\omega_f + \omega_i}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{(\omega_f + \omega_i) \cdot t}{2}$$

$$\theta = \frac{(0 + 62\ rad/s) \cdot 5\ s}{2}$$

$$\theta = \frac{310}{2} = 155\ rad$$

Su equivalente en movimiento lineal es:

$e = \theta \cdot R = 155\ rad \cdot 0{,}20\ cm = 31\ cm$

Conociendo el trabajo de la fuerza de rozamiento y el desplazamiento y sabiendo además que la dirección de la fuerza de rozamiento es la misma que la del desplazamiento, pero de sentido contrario, podemos calcular el valor de la fuerza:

$W = F_\mu \cdot d$

$$W = F_{\mu} \cdot 31\ m \Longrightarrow F_{\mu} = \frac{19{,}22\ J}{31\ m}$$

$$\boxed{\mathbf{F_{\mu} = 0{,}62\ N}}$$

57. Un jugador de fútbol golpea verticalmente hacia arriba el balón de 250 gr con una energía de 150 J. Calcular la altura que alcanza el balón, la energía cinética y potencial que posee cuando la velocidad es 1/3 de la inicial. Despreciar el rozamiento del aire.

En el momento de despegue la energía es únicamente cinética, luego:

$Ec_{inicial} = 150 \text{ J}$

En el momento que alcance la altura máxima, la energía es únicamente potencial.

$E_{Phmáx} = 150 \text{ J}$

Aplicando su fórmula y despejando, encontramos la altura alcanzada.

$Ep = m \cdot g \cdot h$

$150 \text{ J} = 0{,}25 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot h$

$$h = \frac{150 \text{ J}}{0{,}25 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{\mathbf{h = 61{,}22\ m}}$$

Para poder calcular las Ec y Ep en el momento que la velocidad es 1/3 de la velocidad inicial, primero debemos hallar la velocidad inicial:

$Ec_{inicial} = 150 \text{ J}$

$Ec = ½\, m \cdot V_i^2$

$150 \text{ J} = ½\; 0{,}25 \text{ kg} \cdot V_i^2$

$$V_i^2 = \frac{2 \cdot 150 \text{ J}}{0{,}25 \text{ kg}} \Longrightarrow \boxed{V_i = 34{,}64 \text{ m/s}}$$

Por lo tanto:

$$1/3\ V_i = \frac{34{,}64 \text{ m/s}}{3} \Longrightarrow \boxed{1/3\ V_i = 11{,}54 \text{ m/s}}$$

En este momento, la energía cinética será:

$$Ec = ½\, m \cdot V^2 = ½\; 0{,}25 \text{ kg} \cdot (11{,}54 \text{ m/s})^2 \Longrightarrow \boxed{\mathbf{Ec = 16{,}64\ J}}$$

Y la energía potencial, según la ley de conservación de la energía será:

$E_{total} = Ec + Ep$

$150 \text{ J} = 16{,}64 \text{ J} + Ep$

$$Ep = 150 \text{ J} - 16{,}64 \text{ J} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{Ep = 133{,}36\ J}}$$

58. Calcular el trabajo realizado por un escalador de 76 kg que sube verticalmente una altura de 750 m. Si tarda una hora, ¿qué potencia desarrolla?

El trabajo

$W = F \cdot d$

$W = m \cdot a \cdot d$

$W = 76\ kg \cdot 9{,}8\ m/s \cdot 750\ m$

$$\boxed{\mathbf{W = 558600\ J}}$$

La potencia:

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{558600\ J}{3600\ s} \qquad \boxed{\mathbf{P = 155{,}16\ vatios}}$$

59. ¿Qué trabajo debe realizar un telesquí para subir a un esquiador de 64 kg por una pendiente de 45º de inclinación y una altura de 500 m?

El trabajo que debe realizar debe ser igual a la energía mecánica, que en la altura máxima es en su totalidad energía potencial:

$W = Ep$

$W = m \cdot g \cdot h$

$W = 64\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 500\ \text{m}$

W = 313600 Julios

Luego el trabajo a realizar es independiente del ángulo de la pendiente.

60. Un atleta lanza un peso de 5 kg con una velocidad de 40 m/s y un ángulo de 45º. Calcula la altura máxima alcanzada, la energía mecánica en el punto más alto, la altura alcanzada al cabo de 0,5 segundos y las energías cinética y potencial en ese momento.

Se trata de un movimiento parabólico. Para calcular la altura máxima, en primer lugar necesitamos conocer la componente vertical de la velocidad inicial:

$V_{iy} = V_i \cdot \text{sen } 45$

$V_{iy} = 28{,}28 \text{ m/s}$

La altura máxima se calcula con la siguiente fórmula:

$h = V_{iy} \cdot t_s + ½\, g \cdot t_s^2$

Pero desconocemos la altura (h) y el tiempo de subida (t_s). Por lo que calculamos primero el tiempo de subida.

$$g = \frac{V_{fy} - V_{iy}}{t_s} \Longrightarrow t_s = \frac{V_{fy} - V_{iy}}{g}$$

$$t_s = \frac{-V_{iy}}{g} = \frac{-28{,}28 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} = 2{,}88 \text{ s}$$

La gravedad es negativa porque decelera el movimiento.

La altura máxima:

$h = 28{,}28 \text{ m/s} \cdot 2{,}88 \text{ s} - ½\, 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (2{,}88 \text{ s})^2$

$h = 81{,}44 - 40{,}64$ $\boxed{\mathbf{h = 40{,}80 \text{ m}}}$

La energía mecánica en el punto más alto:

$E_m = E_{cinética} + E_{potencial}$

$E_m = ½\, m \cdot V^2 + m \cdot g \cdot h$

En el eje horizontal existe energía cinética, puesto que hay velocidad, sin embargo en el eje vertical sólo hay energía potencial.

$E_m = ½\, m \cdot V_x^2 + m \cdot g \cdot h$

$E_m = ½\, 5 \text{ kg} \cdot (V_i \cos 45)^2 + 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 40{,}80 \text{ m}$

$E_m = ½\, 5 \text{ kg} \cdot (40 \text{ m/s} \cos 45)^2 + 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 40{,}80 \text{ m}$

$E_m = 2000 + 1999{,}2$ $\boxed{\mathbf{E_m = 3999{,}2 \text{ Julios}}}$

Al cabo de 0,5 s la altura alcanzada será:

$h = 28{,}28 \text{ m/s} \cdot 0{,}5 \text{ s} - ½\, 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}5 \text{ s})^2$

$h = 14{,}14 – 1{,}22$ $\boxed{\mathbf{h = 12{,}92 \text{ m}}}$

La energía mecánica se conserva:

E_m = 3999,2 Julios = $E_c + E_p$

3999,2 J = ½ $m \cdot V^2 + m \cdot g \cdot h$

La energía potencial será:

$E_p = m \cdot g \cdot h$ = 5 kg · 9,8 m/s^2 · 12,92 m

E_p = 633 Julios

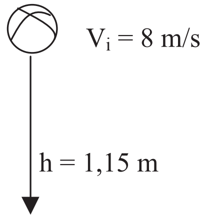
Así que la energía cinética será:

$E_c = E_m - E_p$

E_c = 3999,2 J – 633 J

E_c = 3366,2 J

61. Un jugador de tenis antes de realizar un saque bota la bola de 100 gr que sale de la mano del tenista con una velocidad de 8 m/s y desde una altura de 1,15 m. Halla el tiempo que tarda en llegar al suelo, la velocidad final y el incremento experimentado por la energía cinética.



Se trata de un movimiento uniformemente acelerado por lo que el tiempo lo calculamos a partir de la siguiente fórmula:

$h = V_i \cdot t + ½\, g \cdot t^2$

$1{,}15 = 8\, t + ½\, 9{,}8 \cdot t^2$

$4{,}9t^2 + 8\, t – 1{,}15 = 0$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-1{,}15)}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$$t = \frac{-8 \pm 9{,}20}{9{,}8}$$

t = 0,12 s

La velocidad final se calculará a partir de la fórmula de la gravedad:

$$g = \frac{V_f - V_i}{t} \Longrightarrow V_f = g \cdot t + V_i$$

$V_f = (9{,}8 \cdot 0{,}12 + 8)$ m/s

$V_f = 9{,}17$ m/s

El incremento de la energía cinética:

$\Delta Ec = Ec_f - Ec_i$

$\Delta Ec = ½\, m \cdot V_f^2 – ½\, m \cdot V_i^2$

$\Delta Ec = ½ \cdot 0{,}1\ kg \cdot [(9{,}17\ m/s)^2 – (8\ m/s)^2]$

$\Delta Ec = 0{,}05\ kg \cdot (84\text{-}64)\ m^2/s^2$

ΔEc = 1 Julio

62. Siguiendo con el caso del problema anterior, si la bola rebota hasta una altura de 0,90 m, ¿cuál ha sido la pérdida de energía mecánica?

La energía mecánica a esta altura máxima será únicamente potencial ya que si no hay velocidad en ese punto, no hay energía cinética:

$Em = Ep = m \cdot g \cdot h$

$Ep = 0{,}1\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 0{,}90\ m$

$\boxed{Ep = 0{,}88\ Julios}$

En el momento anterior, cuando alcanza el suelo, la $E_{mecánica}$ era únicamente cinética ya que no existe energía potencial porque la altura es nula. Su módulo en dicho momento era:

$Em = Ec = ½\ m \cdot V^2$

$Ec = ½ \cdot 0{,}1 \cdot (9{,}17\ m/s)^2$

$\boxed{Ec = 4{,}2\ Julios}$

Por lo tanto, la pérdida de energía mecánica es de:

$\Delta Em = Em_{\ 0,90} - Em_0$

$\Delta Em = 0{,}88\ J - 4{,}2\ J$

$\boxed{\mathbf{\Delta Em = -3{,}32\ J}}$

63. Un jugador de bolos lanza una bola de 5 kg y 15 cm de radio sobre la pista, la cual se desplaza rodando con una velocidad lineal de 2 m/s. Calcular su momento de inercia, su energía cinética lineal y su energía cinética de rotación.

La bola es una esfera maciza luego su momento de inercia es:

$I = 2/5 \cdot m \cdot R^2$

$I = 2/5 \cdot 5\ kg \cdot (0{,}15\ m)^2$

$\boxed{\mathbf{I = 0{,}045\ kg \cdot m^2}}$

Su energía cinética lineal:

$Ec = ½\ m \cdot V^2$

$Ec = ½\ 5\ kg \cdot (2\ m/s)^2$

$\boxed{\mathbf{Ec = 10\ Julios}}$

La energía cinética de rotación:

$Ecr = ½\ I \cdot \omega^2$

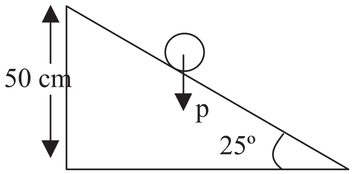
La ω es proporcional a la velocidad lineal e inversamente proporcional al radio:

$$Ecr = ½\ I \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$Ecr = ½ \cdot 0{,}045\ kg \cdot m^2 \cdot \frac{4\ m^2/s^2}{0{,}02\ m^2}$$

$\boxed{\mathbf{Ecr = 4{,}5\ Julios}}$

64. Un acróbata subido en una esfera maciza (12 kg), pretende ascender por una pendiente de 25º y una altura de 50 cm con una velocidad constante de 3 cm/s (despreciando la fuerza de rozamiento). ¿Qué trabajo debe realizar el acróbata? ¿Cuál será la potencia desarrollada?



El trabajo a realizar debe ser igual a la energía potencial alcanzada en el punto más alto:

$W = E = m \cdot g \cdot h$

$W = 12\ \text{kg} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50$ **W = 58,8 Julios**

La potencia es:

$P = \dfrac{W}{t}$ pero no conocemos el tiempo que le cuesta recorrer toda la pendiente, aunque sí se puede calcular.

Al tratarse de un movimiento uniforme:

$V = \dfrac{e}{t}$ donde el $e = \dfrac{0{,}50\ \text{m}}{\text{sen } 25º} = 1{,}19\ \text{m}$

Despejando:

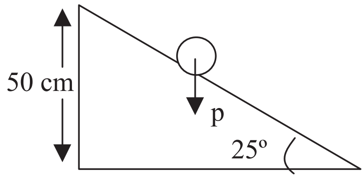
$$t = \frac{e}{V} = \frac{1{,}19\ \text{m}}{0{,}03\ \text{m/s}} = 39{,}66\ \text{s}$$

Y por lo tanto la potencia es:

$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{58{,}8\ \text{J}}{39{,}66\ \text{J}}$ **P = 1,48 vatios**

65. El mismo acróbata, una vez alcanzado el alto de la pendiente, pretende bajar a la misma velocidad constante. Calcular el trabajo y potencia realizados por el acróbata en esta ocasión.

Este problema se desarrolla exactamente igual que el anterior y por lo tanto:



El trabajo a realizar debe ser igual a la energía potencial alcanzada en el punto más alto:

$W = E = m \cdot g \cdot h$

$W = 12 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50$ **W = 58,8 Julios**

La potencia es:

$P = \dfrac{W}{t}$ pero no conocemos el tiempo que le cuesta recorrer toda la pendiente, aunque sí se puede calcular.

Al tratarse de un movimiento uniforme:

$V = \dfrac{e}{t}$ donde el $e = \dfrac{0{,}50 \text{ m}}{\text{sen } 25^{\circ}} = 1{,}19\text{m}$

Despejando:

$$t = \frac{e}{V} = \frac{1{,}19 \text{ m}}{0{,}03 \text{ m/s}} = 39{,}66 \text{ s}$$

Y por lo tanto la potencia es:

$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{58{,}8 \text{ J}}{39{,}66 \text{ J}}$ **P = 1,48 vatios**

66. En un partido de curling, una piedra "A" choca con otra "B" en reposo. En el momento del choque la piedra "A" lleva una velocidad de 1,5 m/s, tras la colisión la piedra "A" sale despedida con un ángulo de 25º y la piedra "B" con un ángulo de 65º, la masa de las piedras es de 3 kg. Calcular la energía cinética antes y después del choque de cada una de las piedras considerando que se trata de un choque elástico.

Al tratarse de un choque elástico se conserva la cantidad de movimiento, luego:

$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

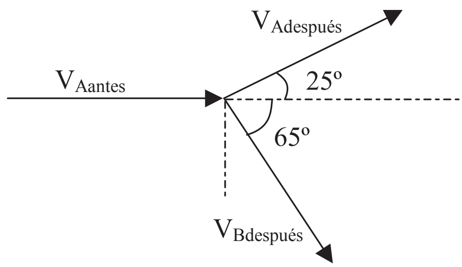
Antes del choque sólo tiene movimiento la piedra "A", luego:

$\vec{p}_{antes} = m_A \vec{V}_{Adespués}$

Después del choque, las dos piedras se mueven, luego:

$\vec{p}_{después} = \vec{p}_{Adespués} + \vec{p}_{Bdespués}$

Las velocidades después del choque no las conocemos, pero sabemos sus orientaciones.



Como la cantidad de movimiento antes del choque es igual a la de después del choque:

$p_{antes} = p_{después}$

$m_A \cdot V_{Aantes} = m_A \cdot V_{Adespués} + m_B \cdot V_{Bdespués}$

Como las masas de ambas bolas son iguales, podemos simplificar:

$V_{Aantes} = V_{Adespués} + V_{Bdespués}$

Las velocidades las podemos descomponer en componentes perpendiculares entre ellas, de tal forma que trabajaremos, por un lado, las componentes "x" y, por otro, las componetes "y".

V_{Aantes} según el dibujo, sólo tiene componentes "x", luego:

$V_{AXantes} = 1{,}5$ m/s

$V_{AYantes} = 0$ m/s

V_A después del choque se descompone en:

$V_{AXdespués} = V_{Adespués} \cdot \cos 25$

$V_{AYdespués} = V_{Adespués} \cdot \text{sen } 25$

Del mismo modo, V_B después del choque se descompone en:

$V_{BXdespués} = V_{Bdespués} \cdot \cos (-65)$

$V_{BYdespués} = V_{Bdespués} \cdot \text{sen } (-65)$

A partir de aquí:

$$\left.\begin{array}{l} V_{AXantes} = V_{AXdespués} + V_{BXdespués} \\ V_{AYantes} = V_{AYdespués} + V_{BYdespués} \end{array}\right\}$$

Sustituyendo:

$1{,}5 \text{ m/s} = V_{Adespués} \cdot \cos 25 + V_{Bdespués} \cdot \cos (-65)$

$0 \text{ m/s} = V_{Adespués} \cdot \text{sen } 25 + V_{Bdespués} \cdot \text{sen } (-65)$

Tenemos un sistema con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}5 \text{ m/s} = 0{,}9 \cdot V_{Adespués} + 0{,}42 \cdot V_{Bdespués} \\ 0 \text{ m/s} = 0{,}42 \cdot V_{Adespués} - 0{,}9 \cdot V_{Bdespués} \end{array}\right\}$$

Despejando en la segunda ecuación nos queda:

$$V_{Adespués} = \frac{0{,}9}{0{,}42} \cdot V_{Bdespués}$$

$V_{Adespués} = 2{,}14 \cdot V_{Bdespués}$

Sustituyendo en la primera ecuación

$1{,}5 \text{ m/s} = 0{,}9 \cdot 2{,}14 \cdot V_{Bdespués} + 0{,}42 \cdot V_{Bdespués}$

$1{,}5 \text{ m/s} = 2{,}34 \cdot V_{Bdespués}$

$$V_{Bdespués} = \frac{1{,}5 \text{ m/s}}{2{,}34} = 0{,}64 \text{m/s}$$

Y $V_{Adespués}$ será:

$V_{Adespués} = 2{,}14 \cdot V_{Bdespués}$

$V_{Adespués} = 2{,}14 \cdot 0{,}64 \text{ m/s}$

$$\mathbf{V_{Adespués} = 1{,}36 \text{ m/s}}$$

Una vez conocidas todas las velocidades calculamos las energías cinéticas.

La energía cinética antes del choque:

$E_{C\ antes} = ½\ m_A \cdot V^2_{Aantes} = ½ \cdot 3\ kg \cdot (1{,}5\ m/s)^2$

$\mathbf{E_{C\ antes} = 3{,}37\ Julios}$

Recordemos que la piedra B está quieta (V = 0) por lo tanto carece de energía cinética antes del choque.

Después del choque, ambas piedras se mueven, luego ambas tienen energía cinética:

$E_{C\ después} = E_{CA\ después} + E_{CB\ después}$

$E_{C\ después} = ½\ m_A \cdot V^2_{Adespués} + ½\ m_B \cdot V^2_{Bdespués}$

$E_{C\ después} = ½\ 3\ kg \cdot (1{,}36\ m/s)^2 + ½\ 3\ kg \cdot (0{,}64\ m/s)^2$

$E_{C\ después} = 2{,}77\ Julios + 0{,}60\ Julios$

$\mathbf{E_{C\ después} = 3{,}37\ Julios}$

Luego se comprueba la conservación de la energía cinética, donde:

$\mathbf{E_{CA\ después} = 2{,}77\ Julios}$

$\mathbf{E_{CB\ después} = 0{,}60\ Julios}$

67. Si en un partido de petanca se produce un choque perfectamente inelástico entre una bola (masa 500 gr y velocidad inicial 3 m/s) y el boliche (masa 100 gr y velocidad inicial 0), calcular la velocidad final de ambas después del choque. Demostrar que las energías cinéticas antes y después son diferentes.

Al ser un choque perfectamente inelástico, tras el choque bola y boliche permanecen unidas.

La cantidad del movimiento se conserva, luego:

$p_{antes} = p_{despues}$

$m_{bola} \cdot V_{bola} = (m_{bola} + m_{boliche}) \cdot V_{después}$

El boliche no interviene en la cantidad de movimiento anterior al choque puesto que no se mueve.

Sustituyendo:

$0{,}5 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} = (0{,}5 \text{ kg} + 0{,}1 \text{ kg}) \cdot V_{después}$

$$V_{después} = \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}}{0{,}6 \text{ kg}}$$

$V_{después} = 2{,}5$ m/s

La energía cinética antes del choque será la energía cinética de la bola:

$E_{C\ antes} = ½\ m_{bola} \cdot V^2_{bola}$

$E_{C\ antes} = ½\ 0{,}5 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m/s})^2$

$E_{C\ antes} = 2{,}25$ Julios

Sin embargo la Energía cinética después del choque:

$E_{C\ después} = ½\ m_{bola+boliche} \cdot V^2_{después}$

$E_{C\ después} = ½\ 0{,}6 \text{ kg} \cdot (2{,}5 \text{ m/s})^2$

$E_{C\ después} = 1{,}875$ Julios

Se observa una pérdida de energía debida a los trabajos ejercidos por la bola sobre el boliche y por el boliche sobre la bola.

68. Calcular las velocidades finales de la bola y el boliche en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

Si el choque es elástico, tras la colisión, la bola y el boliche se desplazan independientes el uno del otro. Aún así, la cantidad de movimiento se conserva, luego:

$p_{antes} = p_{después}$

Antes sólo existe cantidad de movimiento en la bola, ya que el boliche está en reposo (V = 0). Por lo que:

$p_{antes} = m_{bola} \cdot V_{bola\ antes\ del\ choque}$

$p_{antes} = 0{,}5\ kg \cdot 3\ m/s$

$\boxed{p_{antes} = 1{,}5\ kg\ m/s}$

Después del choque:

$p_{después} = m_{bola} \cdot V_{bola\ después} + m_{boliche} \cdot V_{boliche\ después}$

Recordando que:

$p_{antes} = p_{después}$

$1{,}5\ kg\ m/s = 0{,}5\ kg \cdot V_{bola\ después} + 0{,}1\ kg \cdot V_{boliche\ después}$

Tenemos una ecuación con 2 incógnitas.

Al tratarse de un choque elástico, se conserva la energía cinética, por lo que:

$E_{C\ antes\ del\ choque} = E_{C\ después\ del\ choque}$

La $E_{C\ antes\ del\ choque}$ viene dada exclusivamente por la bola:

$E_{C\ antes} = ½\ m_{bola} \cdot V^2_{bola\ antes\ del\ choque}$

$E_{C\ antes} = ½\ 0{,}5\ kg \cdot (3\ m/s)^2$

$\boxed{E_{C\ antes} = 2{,}25\ Julios}$

La $E_{C\ después\ del\ choque}$ es la suma de las energías cinéticas de la bola y el boliche tras el choque:

$E_{C\ después} = E_{C\ bola\ después} + E_{C\ boliche\ después}$

$E_{C\ después} = ½\ m_{bola\ después} \cdot V^2_{bola\ después} + ½ \cdot m_{boliche} \cdot V^2_{boliche\ después}$

Por lo tanto:

$2{,}25\ Julios = ½ \cdot 0{,}5\ kg \cdot V^2_{bola\ después} + ½ \cdot 0{,}1\ kg \cdot V^2_{boliche\ después}$

Despejando en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento siguiente:

$$1{,}5 \text{ kg m/s} = 0{,}5 \text{ kg} \cdot V_{\text{bola después}} + 0{,}1 \text{ kg} \cdot V_{\text{boliche después}}$$

$$V_{\text{bola después}} = \frac{1{,}5 \cancel{\text{kg}} \text{ m/s} - 0{,}1 \cancel{\text{kg}}\, V_{\text{boliche después}}}{0{,}5 \cancel{\text{kg}}}$$

Sustituyendo en la fórmula de la conservación de la energía cinética:

$$2{,}25 \text{ Julios } = ½ \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot \left[\frac{1{,}5 \text{ m/s} - 0{,}1\, V_{\text{boliche después}}}{0{,}5}\right]^2 + ½ \cdot 0{,}1 \text{ kg} \cdot V^2_{\text{boliche después}}$$

$$2{,}25 \text{ J} = \cdot 0{,}25 \text{ kg} \cdot \frac{2{,}25 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 0{,}01\, V^2_{\text{bolic. desp.}} - 0{,}3\, V_{\text{bolic. desp.}}}{0{,}25} + 0{,}05 \text{ kg} \cdot V^2_{\text{bolic desp}}$$

$$2{,}25 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2 - 2{,}25 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = (0{,}06\, V^2_{\text{boliche después}} - 0{,}3\, V_{\text{boliche después}})\text{Kg}$$

$$0 = 0{,}06\, V^2_{\text{boliche después}} - 0{,}3\, V_{\text{boliche después}}$$

$$0 = V_{\text{boliche después}} \cdot (0{,}06\, V_{\text{boliche después}} - 0{,}3)$$

$$\to V_{\text{boliche después}} = 0$$

$$\to 0{,}06 \cdot V_{\text{boliche después}} - 0{,}3 = 0$$

$$\boxed{\mathbf{V_{\text{boliche. después}} = 5 \text{ m/s}}}$$

La opción $V_{\text{boliche después}} = 0$ se descarta porque sabemos que tras el choque éste se mueve.

A partir de aquí calculamos la velocidad de la bola después del choque, volviendo a la siguiente igualdad:

$$V_{\text{bola después}} = \frac{1{,}5 \text{ m/s} - 0{,}1 \cdot V_{\text{boliche después}}}{0{,}5}$$

$$V_{\text{bola después}} = \frac{1{,}5 \text{ m/s} - 0{,}1 \cdot 5 \text{ m/s}}{0{,}5}$$

$$\boxed{\mathbf{V_{\text{bola después}} = 2 \text{ m/s}}}$$

69. En un partido de rugby el jugador "A" (masa 80 kg y velocidad inicial –7 m/s) hace un placaje al jugador "B" (masa 90 kg y velocidad inicial 19 m/s). Calcular la velocidad final de ambos después del choque, teniendo en cuenta que ambos sujetos quedan unidos después del choque. ¿Cuáles son las energías cinéticas antes y después del choque?

La cantidad de movimiento se conserva, luego:

$p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{después del choque}}$

$p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{antes A}} + p_{\text{antes B}}$

$p_{\text{antes}} = m_A \cdot V_{iA} + m_B \cdot V_{iB}$

$p_{\text{antes}} = 80\ \text{kg} \cdot (-7\ \text{m/s}) + 90\ \text{kg} \cdot 19\ \text{m/s}$

$p_{\text{antes}} = (-560 + 1710)\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$

$$\boxed{\mathbf{p_{antes} = 1150\ Kg \cdot m/s}}$$

Después del choque:

$P_{\text{después}} = (m_A + m_B) \cdot V_{\text{después}}$

$P_{\text{después}} = 170\ \text{kg} \cdot V_{\text{después}}$

Por lo tanto:

$1150\ \text{kg m/s} = 170\ \text{kg} \cdot V_{\text{después}}$

$$V_{\text{después}} = \frac{1150\ \text{kg m/s}}{170\ \text{kg}} \qquad \boxed{\mathbf{V_{después} = 6{,}76\ m/s}}$$

La energía cinética antes del choque:

$E_{C\ \text{antes}} = E_{C\ \text{antesA}} + E_{C\ \text{antesB}}$

$E_{C\ \text{antes}} = ½ \cdot m_A \cdot V^2_{iA} + ½ \cdot m_B \cdot V^2_{iB}$

$E_{C\ \text{antes}} = ½ \cdot 80\ \text{kg} \cdot (-7\ \text{m/s})^2 + ½ \cdot 90\ \text{kg} \cdot (19\ \text{m/s})^2$

$E_{C\ \text{antes}} = 1960\ \text{Julios} + 16245\ \text{Julios}$

$$\boxed{\mathbf{E_{C\ antes} = 18205\ Julios}}$$

La energía cinética después del choque:

$E_{C\ \text{después}} = ½ \cdot (m_A + m_B) \cdot V^2_f$

$E_{C\ \text{después}} = ½ \cdot 170\ \text{kg} \cdot (6{,}76\ \text{m/s})^2$

$$\boxed{\mathbf{E_{C\ después} = 3884{,}29\ Julios}}$$

70. Calcular las velocidades finales de ambos jugadores en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

Si el choque es elástico se conserva la energía cinética y tras el choque no permanecen unidos. Por lo que la conservación de cantidad de movimiento viene determinada por la siguiente fórmula:

$p_{antes} = p_{después}$

$m_A \cdot V_{iA} + m_B \cdot V_{iB} = m_A \cdot V_{fA} + m_B \cdot V_{fB}$

$80\ kg \cdot (-7\ m/s) + 90\ kg \cdot 19\ m/s = 80\ kg \cdot V_{fA} + 90\ kg \cdot V_{fB}$

$1150\ Kg\ m/s = 80\ kg \cdot V_{fA} + 90\ kg \cdot V_{fB}$

Tenemos una ecuación con 2 incógnitas. Según la conservación de la energía cinética:

$E_{Cantes} = E_{Cdespués}$

$½\ m_A \cdot V^2_{iA} + ½\ m_B \cdot V^2_{iB} = ½\ m_A \cdot V^2_{fA} + ½\ m_B \cdot V^2_{fB}$

$½\ 80\ kg \cdot (-7\ m/s)^2 + ½\ 90\ kg \cdot (19\ m/s)^2 = ½\ 80\ kg \cdot V^2_{fA} + ½\ 90\ kg \cdot V^2_{fB}$

$18205\ Julios = 40\ kg \cdot V^2_{fA} + 45\ kg \cdot V^2_{fB}$

Despejando en la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$V_{fA} = \frac{1150\ kg\ m/s - 90\ kg \cdot V_{fB}}{80\ kg}$$

Y sustituyendo en la ecuación de conservación de la energía cinética:

$$18205\ Julios = 40 \cdot \frac{(1150\ m/s - 90V_{fB})^2}{80^2} + 45\ kg \cdot V^2_{fB}$$

$$18205\ Julios = 40 \cdot \frac{1322500 + 8100V^2_{fB} - 207000V_{fB}}{6400} + 45\ kg \cdot V^2_{fB}$$

$18205\ J = 8265,62 + 50,62\ V^2_{fB} - 1293,75\ V_{fB} + 45\ kgV^2_{fB}$

$18205 - 8265,62 = 95,62V^2_{fB} - 121293,75\ V_{fB}$

$0 = 95,62V^2_{fB} - 1293,75\ V_{fB} - 9939,38$

$$V_{fB} = \frac{1293,75 \pm \sqrt{1293,75^2 + 4 \cdot 9939,38 \cdot 95,62}}{2 \cdot 95,62}$$

$$V_{fB} = \frac{1293{,}75 \pm \sqrt{1673789{,}06 + 3801614{,}06}}{191{,}24}$$

$$V_{fB} = \frac{1293{,}75 \pm 2339{,}95}{191{,}24} \quad \begin{matrix} \nearrow \boxed{19} \\ \searrow \boxed{-5{,}47} \end{matrix}$$

$$\boxed{\mathbf{V_{fB} = 19}}$$

El valor de V_{fB} es 19, ya que el jugador “A” con menor masa que B y menor módulo de velocidad, frenará algo a “B” pero no le cambiará su sentido de desplazamiento.

A partir de aquí podemos calcular V_{fA} volviendo a la siguiente ecuación:

$$V_{fA} = \frac{1150 \text{ kg m/s} - 90 \text{ kg}\cdot V_{fB}}{80 \text{ kg}} = \frac{1150 \cancel{\text{kg}} \text{ m/s} - 90 \cancel{\text{kg}} \cdot 19 \text{m/s}}{80 \cancel{\text{kg}}}$$

$$\boxed{\mathbf{V_{fA} = -7\ m/s}}$$

71. En una pista de hielo, un patinador "A" de 70 kg se choca con otro "B" de 55 kg que se encontraba parado. Como consecuencia, ambos pegados, se deslizan 64 cm antes de pararse. Si el coeficiente de rozamiento es de 0,2, ¿cuál es la velocidad inicial del patinador "A"?, ¿y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento?

Sabemos que:

$F\mu = \mu \cdot N = m \cdot a$

$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$

sustituyendo después del choque:

$\mu \cdot (m_A + m_B) \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$

$0{,}2 \cdot (70+55)\text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = (70+55)\ \text{kg} \cdot a$

$\boxed{1{,}96\ \text{m/s}^2 = a}$

Es la aceleración que transmite la fuerza de rozamiento al sistema formado por "A" + "B". En realidad desaceleración, ya que frena el movimiento.

Si este sistema se para a los 0,64 m conocemos la velocidad final de ese desplazamiento que es cero. Pero, ¿cuál será la inicial (V_{id}) que coincide con la final del choque V_{fch}?

$V_{id} = V_{fch} = \sqrt{2ae}$

$V_{id} = V_{fch} = \sqrt{2 \cdot 1{,}96\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}64\ \text{m}}$

$V_{id} = V_{fch} = 1{,}58\ \text{m/s}$

Además sabemos que en todo choque se da una conservación de la cantidad de movimiento, por lo que:

$p_{antes} = p_{después}$

En la cantidad de movimiento de antes sólo interviene el patinador "A" porque "B" está parado.

$p_{antes} = m_A \cdot V_A$

$p_{antes} = 70\ \text{kg} \cdot V_A$

La cantidad de movimiento después del choque es:

$p_{después} = (m_A + m_B)V_{fc}$

$p_{después} = (70\ \text{kg} + 55\ \text{kg}) \cdot 1{,}58\ \text{m/s}$

$p_{después} = 197{,}5$ kg m/s

Volviendo a la igualdad de cantidad de movimiento,

$p_{antes} = p_{después}$

70 kg · V_A = 197,5 kg m/s

$$V_A = \frac{197{,}5 \text{ kg m/s}}{70 \text{ kg}}$$

V_A = 2,82 m/s

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$W = F \cdot d = m \cdot a \cdot d = 125 \text{ kg} \cdot 1{,}96 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}64 \text{ m}$

W = 156 Julios

Que coincide con la Energía cinética del sistema justo después del choque.

72. Calcular las velocidades finales de ambos patinadores en el caso de que se produzca un choque elástico entre ellos.

Si el choque es elástico además de conservarse la cantidad de movimiento se conserva también la energía cinética.

Además al ser elástico no continúan juntos. Luego,

$p_{antes} = p_{después}$

$m_A \cdot V_{iA} = m_A \cdot V_{fA} + m_B \cdot V_{fB}$

$E_{Cantes} = E_{Cdespués}$

$\frac{1}{2} m_A \cdot V^2_{iA} = \frac{1}{2} m_A \cdot V^2_{fA} + \frac{1}{2} m_B \cdot V^2_{fB}$

Por lo tanto tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas (V_{fA} y V_{fB})

$$\left.\begin{array}{l} 70\text{ kg} \cdot 2{,}82\text{ m/s} = 70\text{ kg} \cdot V_{fA} + 55\text{ kg} \cdot V_{fB} \\ \frac{1}{2}\, 70\text{ kg} \cdot (2{,}82\text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}\, 70\text{ kg} \cdot V^2_{fA} + \frac{1}{2}\, 55\text{ kg} \cdot V^2_{fB} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 197{,}4 = 70\text{ kg} \cdot V_{fA} + 55\text{ kg} \cdot V_{fB} \\ 278{,}33 = 35 \cdot V^2_{fA} + 27{,}5 \cdot V^2_{fB} \end{array}\right\}$$

$$V_{fA} = \frac{197{,}4 - 55\, V_{fB}}{70}$$

$$278{,}33 = 35 \cdot \left[\frac{197{,}4 - 55\, V_{fB}}{70}\right]^2 + 27{,}5\, V^2_{fB}$$

$$278{,}33 = 35 \cdot \frac{38966{,}76 + 3025V^2_{fB} - 21714V_{fB}}{4900} + 27{,}5V^2_{fB}$$

$278{,}33 = 278{,}33 + 21{,}60\, V^2_{fB} - 155{,}1V_{fB} + 27{,}5V^2_{fB}$

$0 = 49{,}1V^2_{fB} - 155{,}1V_{fB}$

$0 = V_{fB} \cdot (49{,}1V_{fB} - 155{,}1)$ → $V_{fB} = 0$; → $49{,}1V_{fB} – 155{,}1 = 0$

$$V_{fB} = \frac{155{,}1}{49{,}1} = 3{,}15$$

$\boxed{\mathbf{V_{fB} = 3{,}15\ m/s}}$

El caso de $V_{fB} = 0$ lo descartamos porque después del choque ambos patinadores se ponen en movimiento.

Para calcular V_{fA} volvemos a la siguiente fórmula:

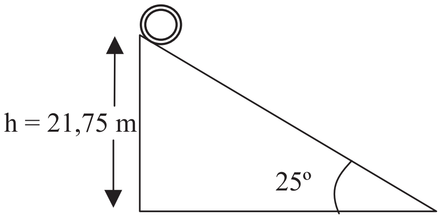
$$V_{fA} = \frac{197,4 - 55V_{fB}}{70}$$

$$V_{fA} = \frac{197,4 - 55 \cdot 3,15}{70}$$

$$V_{fA} = \frac{197,4 - 173,25}{70}$$

$$\boxed{\mathbf{V_{fA} = 0,34\ m/s}}$$

73. Una gimnasta deja caer un aro (150 gr de masa y un radio interior de 25 cm y 1cm de radio de masa) rodando por un plano inclinado de 25º y altura 21,75 m. Calcular la velocidad de su centro de masas al llegar al suelo.



Como el cuerpo rueda, es decir, se traslada al mismo tiempo que gira alrededor de su eje, la energía cinética es la suma de la energía cinética de traslación más la energía cinética de rotación.

$E_{Crod} = E_C + E_{Cr}$

$E_{Crod} = ½\ m \cdot V^2 + ½\ I \cdot \omega^2$

El momento de inercia de un aro es como el de una corona circular.

$I = ½\ M(R^2 + r^2)$

Sabemos que en el momento que la gimnasta deja caer el aro la energía cinética es nula porque las velocidades lineal y angular son nulas. Por lo tanto, en este momento la energía mecánica es igual a la energía potencial:

$Em_{hmax} = Ep_{max}$

La energía potencial de este punto tendrá un valor de:

$Ep_{max} = m \cdot g \cdot h$

$Ep_{max} = 0{,}15\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 21{,}75\ m$

$\boxed{Ep_{max} = 31{,}97\ \text{Julios}}$

Sin embargo, cuando llega al suelo, no existe energía potencial, por lo que toda la energía mecánica es energía cinética.

$Em_{h0} = Ec_{h0} = Ep_{hmax}$

$Ec_{h0} = ½\ m \cdot V^2 + ½\ I \cdot \omega^2 = 31{,}97\ J$

$½\ 0{,}15\ kgV^2 + ½ \cdot ½ \cdot 0{,}15\ kg\ (0{,}25^2 + 0{,}01^2) \cdot \omega^2 = 31{,}97\ J$

$0{,}075V^2 + 0{,}037 \cdot (0{,}06 + 0{,}0001) \cdot \omega^2 = 31{,}97\ J$

$0{,}075V^2 + 0{,}0022 \cdot \omega^2 = 31{,}97\ J$

Sabemos que $\omega = V/r$ luego,

$0{,}075V^2 + 0{,}0022V^2 / 0{,}06 = 31{,}97$ J

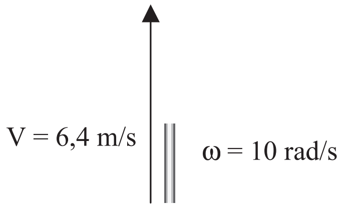
$0{,}075V^2 + 0{,}03V^2 = 31{,}97$ J

$0{,}11V^2 = 31{,}97$ J

$V = \sqrt{31{,}97/0{,}11}$

V = 17,04 m/s

74. Una gimnasta lanza una pica de 225 gr y 1,10 m de largo totalmente vertical con una velocidad inicial de 6,4 m/s. Considerando que la pica gira sobre su centro de masas y alrededor del eje transversal a velocidad angular constante e igual a 10 rad/s, calcula la energía cinética total en el instante que despega de la mano de la gimnasta.



Como la pica se traslada a la vez que gira, la energía cinética es la suma de la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotación.

$E_{Crod} = E_C + E_{Cr}$

$E_{Crod} = ½\ m \cdot V^2 + ½\ I \cdot \omega^2$

El momento de inercia de la pica, al girar sobre el eje transversal será:

$I = 1/12\ ML^2$

Por lo tanto, la energía cinética en el momento que despega de la mano de la gimnasta será:

$E_{Crod} = ½\ m \cdot V^2 + ½\ I \cdot \omega^2$

$E_{Crod} = ½\ 0{,}225\ kg \cdot (6{,}4\ m/s)^2 + {}^1/_2 \cdot {}^1/_{12} \cdot 0{,}225\ kg \cdot (1{,}10\ m)^2 \cdot (10\ rad/s)^2$

$E_{Crod} = 4{,}6\ J + 0{,}103\ J$

$\boxed{\mathbf{E_{Crod} = 4{,}70\ J}}$

75. La misma gimnasta ahora lanza la misma pica con una velocidad inicial de 6,4 m/s y un ángulo de despegue de 75º. Considerando que la pica gira sobre su centro de masas a velocidad angular constante e igual a 10 rad/s, calcula la energía cinética total en el instante que despega de la mano de la gimnasta.

La energía cinética total al despegar de la mano será igual que en el ejercicio anterior ya que las velocidades lineal y angular siguen teniendo el mismo módulo.

El hecho de que ahora la pica despegue con un cierto ángulo no influye en la energía cinética de despegue.

BIBLIOGRAFÍA

AGUADO, X. (1993). *Eficacia y técnica deportiva*. Barcelona: INDE.

ARTEAGA ORTIZ, R. y VICTORIA DÍAZ, J. (2001). *Problemas de biomecánica para estudiantes de Educación Física.* Las Palmas de Gran Canaria: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

BAHÜMER, G. (1989) *Biomecánica deportiva. Fundamentos para el estudio y la práctica*. Barcelona: Martínez Roca.

CANDEL, A., SATOCA, J., SOLER, J. B. y TENT, J. J. (1994). *Selectividad Física Pruebas de 1993.* Madrid: Grupo Anaya.

CROMERA, A. (1988). *Física para las ciencias de la vida.* Barcelona: Reverté.

FUCCI, S. (1985). *Biomecánica del aparato locomotor aplicada al acondicionamiento muscular*. Barcelona: Doyma.

GUTIÉRREZ DÁVILA, M. (1998). *Biomecánica deportiva.* Madrid: Síntesis.

MACNEILL, A. (1982). *Biomecánica*. Barcelona: Omega.

MARTÍNEZ LORENZO, A. (1989a). *Fase II Física y Química 2º bachillerato*. Madrid: Bruño.

MARTÍNEZ LORENZO, A. (1989b). *Fase II Física y Química 2º bachillerato*. Madrid: Bruño.

MARTÍNEZ LORENZO, A. (1991). *Fase III Física y Química 3º bachillerato*. Madrid: Bruño.

MARTÍNEZ LORENZO, A., HERNÁNDEZ NEIRA, J. L. y GISBERT BRIANSÓ, M. (1993). *Física COU*. Madrid: Bruño.

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA