Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

RESOLUCIÓN DE IGUALDADES NUMÉRICAS POR ESTUDIANTES DE TERCER GRADO

Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADA

Autora: Marta Molina González

Tutora: Dra. Encarnación Castro Martínez

Septiembre 2004

Marta Molina González
Depósito Legal: GR-670-2005
ISBN: 84-689-0260-8
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Este trabajo ha sido realizado dentro del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193), dentro de un proyecto del Plan Nacional de I + D + I con número BSO2002-03035 financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciado con fondos FEDER.

Durante la realización de este trabajo su autora ha sido becaria del Programa Nacional de Formación del Profesorado Universitario (referencia AP2002-2483), como alumna del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y bajo la dirección del Dr. Enrique Castro Martínez. Además, le ha sido concedida una beca de intercambio con la Universidad de California, Davis (UC Education Abroad Program Scholarship) desde Septiembre de 2003 a Junio de 2004.

Mi más sincero agradecimiento a…

A mi tutora, la Dra. Encarnación Castro Martínez, por su dedicación y ayuda, por poner a mi disposición su extensa experiencia y conocimiento, y por haberme facilitado el compatibilizar la realización de este trabajo con mi estancia en la Universidad de California.

A la Dra. Rebecca Ambrose por toda su ayuda, y apoyo desde el primer día que llegué a Davis, por haber compartido conmigo gran parte de su tiempo, todos sus conocimientos sobre la Didáctica de las Matemáticas y la investigación en esta área, así como el cariño de su familia. Sin ella la realización de este trabajo no habría sido posible.

A los niños y niñas que me permitieron observarlos mientras aprendían matemáticas y que compartieron con nosotros sus (valiosos) pensamientos sobre las actividades que les planteamos.

A mi familia y amigos, principalmente a mis padres Antonio y Pilar y mi hermana Irene, que siempre han creído en mí y me han apoyado. Sin su cariño en la distancia, y cada día, no habría sido posible este trabajo.

Y a Jose, por su apoyo, sus ánimos, y su constante confianza en mí, por abrirme su corazón desde el primer momento, por su sinceridad y su cariño, y por la ilusión que compartimos. A él le quiero agradecer el seguir en primera línea el desarrollo de este trabajo y todo lo que ocurre en mi vida.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo se ha desarrollado dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico (FQM 0193), durante el año académico 2003-2004, siendo su autora alumna del segundo año del programa de doctorado Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y bajo la tutela de las doctoras Encarnación Castro Martínez (Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada) y Rebecca Ambrose (Departamento de Educación, Universidad de California, Davis). Con este trabajo pretendemos dar cumplimiento a la normativa de la Universidad de Granada que indica que los/as alumnos/as en el segundo curso del programa han de presentar uno o varios trabajos de investigación, equivalente a 12 créditos, para obtener la suficiencia investigadora.

Situación personal

Durante este año académico me han sido concedidas dos becas predoctorales:

- Una beca de postgrado del Programa Nacional de Formación del Profesorado Universitario (referencia AP2002-2483), como alumna del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática y bajo la dirección del Dr. Enrique Castro Martínez. La vigencia de esta beca es hasta el 30/9/2004, prorrogable por otros dos cursos académicos.
- Una beca de intercambio con la Universidad de California, Davis (UC Education Abroad Program Scholarship) desde Septiembre de 2003 a Junio de 2004.

Debido a estas circunstancias, este trabajo de investigación ha sido desarrollado en colaboración, de una parte, por la Universidad de Granada y, de otra, por la Universidad de California, Davis.

Durante mi estancia en esta última universidad, además de realizar el trabajo que se presenta, he cursado tres cuatrimestres del programa de doctorado de los departamentos de Educación y de Matemáticas, dado que los planes de estudio de doctorado en ambas universidades son diferentes y la concesión de la beca requiere cursar un total de 12 unidades durante cada cuatrimestre. Dichos cursos han estado dirigidos al perfeccionamiento de mis conocimientos de Inglés, y a la mejora de mi formación en el área de Didáctica de la Matemática; formación iniciada el pasado año como alumna de primer año del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Los cursos específicos de Didáctica de la Matemática realizados, han sido:

- *Investigación en educación matemática*
- *Currículos de matemáticas basados en los estándares*
- *Desarrollo del currículo en matemáticas*
- *Pedagogía matemática*
- *Practicum de enseñanza de las matemáticas*
- *Psicología educativa*

La oportunidad de estudiar en otra universidad, y concretamente en una universidad estadounidense, ha sido muy enriquecedora académica y personalmente. Me ha permitido conocer y participar, entre otros muchos aspectos, en la realidad educativa universitaria y escolar de California, así como en la investigación en Educación Matemática, en un país que cuenta con grandes recursos institucionales y personales para la investigación.

Origen de este trabajo de investigación

El trabajo de investigación que aquí se recoge se inició durante la realización del curso "Investigación en educación matemática". La profesora de dicho curso, la Dra. Rebecca Ambrose, colaboró en el desarrollo de este trabajo y me facilitó la oportunidad de trabajar con una clase de alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) de un colegio de Educación Infantil de la ciudad de Sacramento, los cuales han sido los sujetos de este estudio.

Mi interés en las dificultades que encuentran los alumnos/as en la comprensión y uso del signo igual, y en el desarrollo del pensamiento algebraico en Educación Primaria, surgió al conocer los trabajos de investigación realizados por Carpenter, Franke, Levi, Fennema, y Empson. En la última década estos autores han centrado su investigación en explorar el pensamiento matemático intuitivo de niños y niñas con el objetivo de transmitir este conocimiento a profesores de Educación Elemental

(Primaria) para que promuevan un aprendizaje con comprensión de las matemáticas (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999 y 2000). Sus primeros estudios estaban centrados en la aritmética y más concretamente en la resolución de problemas aritméticos. Actualmente su interés se localiza en cómo diseñar la enseñanza de las matemáticas en Educación Elemental (Primaria) para que los/as alumnos/as generalicen y formalicen su conocimiento aritmético, desarrollando así pensamiento algebraico (Carpenter, 2000 y 2003).

Muchos otros investigadores (Kaput, 1995, 1998, 2000; Bastable y Schifter, pendiente de publicación; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Freiman, y Lee, 2004; Warren, 2004) argumentan actualmente la importancia de fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la educación escolar, con el objetivo de promover una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con comprensión, y facilitar el posterior estudio del álgebra. Los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados importantes hábitos mentales a adquirir, que, además, tienen el potencial de poder enriquecer la actividad matemática escolar y, concretamente, el aprendizaje de la aritmética.

Carpenter, Franke y Levi (2003) se centran en cuatro aspectos del pensamiento algebraico a desarrollar desde la enseñanza de la aritmética: la comprensión del signo igual, hacer explícitas las generalizaciones, la representación de generalizaciones mediante el lenguaje natural y mediante notación algebraica, y la comprensión de niveles de justificación y demostración.

Igualmente, uno de los objetivos de nuestro estudio es analizar la comprensión del signo igual. En nuestro caso trabajamos con un grupo de alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria), llevando acabo diversas intervenciones de aula dirigidas al estudio de la evolución de las concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual. Además, estudiamos la emergencia de estrategias de resolución de igualdades numéricas basadas en el establecimiento de relaciones entre los términos de ambos miembros de la igualdad.

A partir de este trabajo hemos realizado, hasta el momento, un artículo titulado "What is that Equal Sign Doing in the Middle?: Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign", el cual está pendiente de publicación en la revista Teaching Children Mathematics, y una comunicación que fue presentada en el congreso internacional PME 28 celebrado en Bergen, Noruega, del 13 al 18 de Julio de 2004, con el nombre "In the transition from arithmetic to algebra: Misconceptions of the equal sign".

Relación con el Grupo de investigación Pensamiento Numérico

Como ya se ha indicado, estoy vinculada al departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Concretamente, al grupo "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" ya que mi beca de postgrado está asociada a dicho grupo.

En los documentos que hacen referencia a los planteamientos y objetivos del grupo (Rico, 1995; Castro, 1995), se aprecia que sus componentes centran el grueso de su investigación en el estudio de los fenómenos de enseñanza/aprendizaje en los que intervienen conceptos numéricos. Aspectos como la naturaleza, las características y la evolución de los aprendizajes numéricos, las representaciones cognitivas y los significados de dichos conocimientos, los métodos y las técnicas para provocar aprendizajes óptimos sobre numeración y cálculo, y la conexión entre aritmética y álgebra, son temas prioritarios.

Todo lo anterior pone de manifiesto la pertinencia de mi trabajo en el seno de dicho grupo, ya que queda incluido entre los temas de su interés. Como hemos apuntado, nos centramos en el signo igual como representación simbólico-formal de una relación entre expresiones numéricas, la de igualdad, analizando los errores y dificultades que se manifiestan en el desarrollo de su comprensión, así como las características y la evolución del aprendizaje de este concepto en contextos aritméticos. Las expresiones numéricas en consideración, pertenecen a los números naturales e involucran principalmente las operaciones de suma y resta.

Nuestro trabajo se presenta a continuación subdividido en cinco capítulos, seguidos del listado de referencias y de los anexos.

Capítulo 1. Presentación del problema de investigación
Capítulo 2. Marco teórico
Capítulo 3. Metodología de la investigación
Capítulo 4. Resultados de la investigación
Capítulo 5. Discusión y Conclusiones

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de este capítulo es presentar el problema de investigación abordado en este trabajo y justificar su interés para el área de Didáctica de la Matemática. Primeramente, se destacan algunas ideas que son esenciales para entender nuestra visión y principales preocupaciones con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se enuncian los objetivos de la investigación y, finalmente, se justifica el interés de este trabajo para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria y para el área de Didáctica de la Matemática en general.

1.1 Reforma de la enseñanza del álgebra

"La competencia algebraica es importante en la vida adulta, en el trabajo y en la preparación para la educación secundaria.
Todos los estudiantes deberían aprender álgebra."
(NCTM Standards 2000, página 37).

La enseñanza del álgebra, tal como se lleva acabo en la realidad, es ampliamente criticada por numerosos investigadores (Mason, Davis, Love y Schoenfeld, según cita Lee, pendiente de publicación; Kaput 1995, 1998, 2000a; Booth, 1988). La crítica internacional se basa principalmente en el gran número de estudiantes que fracasan en esta área y dejan de estudiar matemáticas, la falta de conexión entre el álgebra y las demás áreas de las matemáticas, y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes.

Ya en 1980 Martin Kindt destacó tres de los grandes problemas de la enseñanza del álgebra: falta de atención a la generalización y razonamiento, un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra y la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra (Van Reeuwijk, pendiente de publicación). Estas críticas fueron el desencadenante de un proceso de reforma de la enseñanza del álgebra en Los Países Bajos en los años ochenta. Dicha reforma comenzó con el desarrollo de un nuevo currículo para los últimos años de la Enseñanza Secundaria (de 16 a 18 años), posteriormente para el resto de los cursos de la Enseñanza Secundaria (de 12 a 16 años) y, a partir de 1990, continuó con la participación en el proyecto American *Mathematics in Context* (MiC) dirigido a la enseñanza de las matemáticas a alumnos/as de 10 a 14 años. Este proyecto demostró que una enseñanza del álgebra significativa y con sentido es posible (Van Reeuwijk, pendiente de publicación). Recientemente, se han iniciado estudios sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en cursos inferiores (Van Reeuwijk, pendiente de publicación).

En la última década se han planteado diferentes propuestas para la mejora de la enseñanza del álgebra tales como un enfoque basado en la resolución de problemas, diversos enfoques tecnológicos o un gran énfasis en el fortalecimiento de las habilidades aritméticas (Freiman y Lee, 2004). En la actualidad se está investigando, y llevando acabo en colegios estadounidenses, una propuesta que imita en gran medida el proyecto llevado acabo en Los Países Bajos. Esta propuesta presenta una reforma de la enseñanza del álgebra basada en la consideración de una concepción más amplia del álgebra que es integrada en el currículo usando una pedagogía activa y exploratoria (Kaput, 1995). La reforma comienza con algunos cambios en el currículo del álgebra de los últimos cursos de Educación Secundaria, seguidos de la integración del álgebra en el currículo de la Educación Primaria y Secundaria.

La gran insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer el estudio del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñar álgebra. Dicha reforma persigue, además, modificar el currículo general de matemáticas. La propuesta para Educación Elemental y Media (Primaria y primeros dos cursos de Educación Secundaria) consiste en introducir álgebra no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas. El álgebra es introducida en el currículo desde los primeros años escolares por su gran potencial para enriquecer la actividad matemática escolar, y como guía hacia una enseñanza con comprensión de las matemáticas (Kaput, 1995, 1998, 2000a; Bastable y Schifter, pendiente de publicación; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; entre otros). Esta temprana introducción del álgebra en el currículo es lo que se conoce como "Early Algebra".

1.2 Pensamiento relacional

Antes de enunciar los objetivos de investigación de este trabajo se hace necesario definir el concepto "pensamiento relacional". Dicho término, "relational thinking", ha sido utilizado por Carpenter, Franke y Levi (2003) en estrecha conexión con la resolución de igualdades numéricas y la comprensión del signo igual. Aunque este tipo de pensamiento puede considerarse en muchos otros contextos, nos vamos a referir aquí a la definición dada por Carpenter, Franke y Levi (2003) en el contexto de igualdades numéricas. Se dice que los estudiantes emplean pensamiento relacional al resolver igualdades numéricas cuando obtienen la respuesta estableciendo relaciones o comparaciones entre los números o expresiones a ambos lados del signo igual, sin necesidad de realizar explícitamente todas las operaciones expresadas.

Por ejemplo, en la igualdad, $27 + 48 - 48 = \square$, los/as alumnos/as pueden observar que sumar y restar cuarenta y ocho no altera la cantidad inicial veintisiete, no teniendo que operar para deducir la respuesta. En la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$ puede observarse que la respuesta correcta es doce, pues se está invirtiendo el orden de los sumandos, siendo ésta una estrategia alternativa a realizar la suma $12 + 7 = 19$ y posteriormente resolver el problema $19 = 7 + \square$. Similarmente, la igualdad $8 + 4 = \square + 5$ puede resolverse usando pensamiento relacional observando que cinco es una unidad más que cuatro y, por lo tanto, la cantidad desconocida deberá ser una unidad menos que ocho.

Una diferencia a observar entre estos ejemplos radica en la comprensión necesaria del signo igual. La correcta resolución del primer ejemplo no requiere una amplia comprensión del signo igual pues todas las operaciones aparecen expresadas en el lado izquierdo de la igualdad. Sin embargo, en los otros dos casos ésta sí es necesaria, es decir, los/as alumnos/as necesitan saber que el signo igual representa una relación de igualdad entre las expresiones a ambos lados de dicho signo.

El uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas ha sido observado en algunos/as alumnos/as de Educación Elemental (Primaria) (Carpenter, Franke y Levi, 2003), pero existe poca información sobre la secuencia de actividades que conduce a su desarrollo o su uso, así como sobre la dificultad de su desarrollo. Nuestro estudio aporta información sobre ambos aspectos.

1.3 Aprendizaje con comprensión

El pensamiento relacional, está íntimamente ligado a la comprensión. Por su parte, el concepto de comprensión ha sido abordado en la literatura junto a los conceptos de conocimiento conceptual y procedimental (Hiebert y Lefevre, 1986). Según Hiebert y Lefevre (1986), el conocimiento conceptual es caracterizado como una rica red de conexiones entre piezas de información que permite un acceso flexible y un uso adecuado de la información. Por otra parte, el conocimiento procedimental se compone del conocimiento de los símbolos y la sintaxis de las matemáticas, aunque no necesariamente de su significado, y del conocimiento de las reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver tareas matemáticas. Partiendo de esta distinción se considera que la comprensión es “el estado del conocimiento que permite conectar de forma apropiada nueva información matemática con el conocimiento ya existente” (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 4).

Skemp (1987, citado por Lindquist, 1997) también se refiere a la comprensión y distingue entre comprensión relacional (saber qué hacer y por qué) y comprensión instrumental (saber qué hacer o conocer una regla y como usarla).

Por su parte Serpinska (1990), según citan Gallardo y González (pendiente de publicación), define la comprensión como un acto involucrado en un proceso de interpretación, el cual consiste en el desarrollo de una dialéctica entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de estas conjeturas.

1.3.1 Comprensión de las matemáticas

En el siglo 21, debe esperarse que todos los alumnos y alumnas comprendan y sean capaces de aplicar las matemáticas (p. 20, NCTM 2000).

Internacionalmente existe una intensa preocupación e interés por promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas debido a la general insatisfacción con el aprendizaje matemático de los/as alumnos/as y las actitudes negativas hacia las matemáticas que se observan en las aulas (Kaput, 2000a, 1998; Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Olivier, y Human, 1997; NCTM, 2000). Este no es un objetivo nuevo en la enseñanza de las matemáticas. Desde comienzos del siglo XX se han llevado acabo numerosos esfuerzos, en la investigación y en la práctica del aula, por detectar, analizar y describir ambientes de aprendizaje en los que los/as alumnos/as puedan aprender matemáticas con comprensión, así como analizar en qué consiste un aprendizaje con comprensión de las matemáticas (Carpenter y Lehrer, 1999).

Recientemente, la importancia de la comprensión en el aprendizaje, en la enseñanza y en la evaluación de las matemáticas, ha ocupado un primer plano en la reforma de la enseñanza de las matemáticas iniciada con la publicación de los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1989. Este auge del aprendizaje con comprensión va acompañado de una visión constructivista de la enseñanza de las matemáticas. De forma semejante, la versión más reciente de los Principios y Estándares de la Matemática Escolar (NCTM, 2000) recoge entre los seis principios fundamentales el denominado Aprendizaje, explicando: "Los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y de sus conocimientos previos" (p. 16, 2000).

Situándonos en esta visión de las matemáticas, adoptamos la noción de comprensión de las matemáticas dada por Carpenter y Lehrer (1999), la cual es ampliamente aceptada en la literatura actual:

> *La comprensión de las matemáticas consiste en la construcción de relaciones entre los conceptos matemáticos, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre experiencias, la articulación de lo que uno sabe y la propia interiorización del conocimiento matemático.*

Esta noción de la comprensión de las matemáticas se basa en el supuesto de que tal conocimiento se representa de forma interna siguiendo una estructura que se va creando de forma gradual al incorporarse nueva información o establecerse relaciones entre la información ya existente. En este supuesto, se dice que un concepto matemático se comprende cuando su representación mental forma parte de una red de representaciones, haciéndose mayor la comprensión conforme la solidez y número de los vínculos son mayores (Hiebert y Carpenter, 1992). Comprender las matemáticas implica "desarrollar una armoniosa y consistente red de imágenes que incorpore informaciones, relaciones, errores, hipótesis, previsiones, inferencias, inconsistencias, huecos, sentimientos, reglas y generalizaciones (O'Brien, 1989, citado por Mousley, 2004).

Según Gallardo y González (pendiente de publicación) el origen de la comprensión, del conocimiento matemático, se puede considerar asociado a las situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se involucra la persona en su interacción con el medio que le rodea, y que le obligan a elaborar respuestas adaptadas a dicha situación particular considerando la información proporcionada por la situación y las capacidades y conocimientos previamente adquiridos por el sujeto. Bajo estas consideraciones, y coincidiendo con Duffin y Simpson (1997), presentan la comprensión como:

- *Un acto:* Una respuesta puntual que conduce a una modificación cualitativa en la situación cognitiva.
- *Un proceso:* Un proceso de maduración o de elaboración de respuestas provisionales cada vez más adaptadas como resultado de sucesivas experiencias relacionadas con un mismo problema a lo largo de un período de tiempo.
- *Un estado:* Una situación cognitiva resultado de actos y procesos de comprensión previos, constituida por un conjunto de respuestas potenciales a una situación o adaptadas a determinadas experiencias.

1.3.2 Razones para promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas

Como señala Dewey (1910, citado por Lindquist, 1997) la enseñanza de las matemáticas sin comprensión va en contra de la habilidad de los/as alumnos/as para reflexionar y entender lo que hacen. Un aprendizaje con comprensión es esencial para que los alumnos y alumnas puedan aplicar sus conocimientos flexiblemente, adaptándolos a nuevas situaciones, y utilizarlos en la adquisición de nuevos conocimientos, adquiriendo así una formación adecuada para afrontar las necesidades del mundo actual, un mundo en continuo cambio (Hiebert J. y otros, 1997).

A continuación enumeramos las diez razones para el desarrollo de la comprensión en el aprendizaje destacadas por Brownell (1947, 1935 citado por

Lindquist, 1997). Brownell escribió extensamente sobre el aprendizaje con comprensión de la aritmética insistiendo en la importancia de que los/as alumnos/as sean capaces de analizar situaciones cuantitativas a partir de sus conocimientos aritméticos, y criticando la enseñanza mecánica y automatizada de la aritmética. Estas razones se refieren concretamente al aprendizaje de la aritmética pero son generalizables al aprendizaje de las demás áreas de las matemáticas.

1. Facilita la retención o recuerdo.
2. Capacita al alumno/a para recuperar rápidamente habilidades que se le han debilitado temporalmente.
3. Aumenta la probabilidad de que las ideas y habilidades aritméticas se utilicen.
4. Facilita el aprendizaje al proveer una base sólida y transferible de conocimientos.
5. Reduce la práctica necesaria para completar el aprendizaje.
6. Evita que el/la alumno/a dé respuestas matemáticas absurdas.
7. Promueve el aprendizaje mediante resolución de problemas en vez de la práctica y memorización no inteligente.
8. Provee al alumno/a de enfoques versátiles que le capacitan para sustituir procesos habituales, que no recuerda en un determinado momento, por otros procesos igualmente eficaces.
9. Hace al alumno/a independiente dándole confianza para abordar nuevas situaciones cuantitativas.
10. Presenta al alumno/a como una persona digna de respeto.

1.3.3 Prácticas que promueven un aprendizaje con comprensión de las matemáticas

La visión tradicional de las matemáticas como un cuerpo fijo y estático de conocimientos ha determinado el alcance del contenido y la pedagogía del currículo de matemáticas (Romberg y Kaput, 1999). Bajo este enfoque la actividad matemática escolar ha consistido, mayoritariamente, en el aprendizaje de una colección de técnicas, promoviéndose un aprendizaje sin comprensión de las matemáticas.

Numerosos investigadores y educadores han observado que la creación de prácticas que promuevan la comprensión de las matemáticas requiere un cambio significativo en la realidad escolar basado en una visión constructivista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Lindquist, 1997). La construcción de conocimientos se considera resultado no sólo de procesos cognitivos internos y privados sino también de las interacciones del individuo con el medio que le rodea (Arcavi, 1995, citado por Gallardo y González, pendiente de publicación).

Las matemáticas son consideradas en la actualidad como una actividad humana; simultáneamente un cuerpo de conocimientos y un modo de comprender (Romberg y Kaput, 1999). Desde esta visión de las matemáticas se persigue un aprendizaje con comprensión de las matemáticas mediante la participación activa de los/as alumnos/as en actividades y experiencias que les ayuden a profundizar y conectar sus conocimientos.

Reflexión y comunicación

Hiebert y otros (1997), destacan el papel de la reflexión y la comunicación en el desarrollo de un aprendizaje con comprensión de las matemáticas (tomando estos dos conceptos de la psicología cognitiva y la cognición social respectivamente).

La *reflexión* ocurre cuando una persona piensa conscientemente sobre sus experiencias, considerándolas y analizándolas desde varios puntos de vista. Este proceso facilita la construcción y el reconocimiento de relaciones entre ideas, hechos o procedimientos, así como la revisión de relaciones previamente establecidas.

La *comunicación* engloba hablar, escuchar, escribir, observar, demostrar,…; significa participar en interacción social e intercambiar ideas y opiniones con otras personas. La comunicación permite la confrontación de ideas, fomentando una reflexión más profunda sobre las ideas propias, para poder explicarlas más claramente y ser capaces de justificarlas.

Ambos aspectos, comunicación y reflexión, promueven el establecimiento de relaciones entre los conocimientos o ideas de una persona, favoreciendo su comprensión.

Importancia de la comunicación

Autores como Cobb, Yackel, y Wood (1992), Moreno Armella y Waldegg (1992), Huffersd-Ankles, Fuson y Gamoran Sherin (2004), coinciden en destacar la importancia de la comunicación en la construcción de significados y la adquisición del aprendizaje. Negociando explícitamente las interpretaciones de los materiales o representaciones externas en consideración en el aula, cada alumno/a va desarrollando su comprensión de los conceptos de forma gradual partiendo de sus conocimientos y experiencias previas (Cobb, Yackel, y Wood, 1992). Esta negociación dota de objetividad al significado construido haciéndolo existir más allá de la comunidad constituida por el alumnado y el profesor/a (Moreno Armella y Waldegg, 1992). Además, el intercambio de estrategias, ideas y conjeturas fomenta que los/as alumnos/as aprendan a evaluar su pensamiento matemático y el de los demás, lo que contribuye a su aprendizaje, y permite a los profesores/as conocer los conocimientos previos de los/as alumnos/as para basar en éstos futuros aprendizajes (Lampert, 1989, citado por NCTM 2000; Mack 1990, citado por NCTM 2000, Huffersd-Ankles, Fuson y Gamoran Sherin, 2004).

Representaciones y comunicación

La comunicación que tiene lugar en el aula de matemáticas es posible gracias a la consideración de representaciones externas[1] pues los objetos matemáticos son en definitiva construcciones mentales (Duval, 1996). Las representaciones son fundamentales en la comprensión de las matemáticas de muy diversas formas: posibilitan la reflexión haciendo las ideas matemáticas más concretas, dan soporte y promueven la extensión del razonamiento ayudando a los/as alumnos/as a centrarse en determinadas características de la situación matemática, y ayudan a reconocer semejanzas y diferencias entre ideas matemáticas favoreciendo la comprensión, comunicación y demostración al facilitar el razonamiento matemático (Fennel, y Rowan, 2001; Rico, 1998). Además, el tipo y nivel de comprensión de posibles ideas matemática, está condicionado por el tipo de sistemas de símbolos que se consideran para representar dichas ideas matemáticas (Kaput, 1978, citado por García Pérez, 2000).[2]

Actividades y tareas matemáticas

Otro elemento a destacar en la enseñanza de las matemáticas son las actividades mediante las cuales se produce la enseñanza y aprendizaje. Según Romberg y Kaput (1999) para que estas actividades promuevan un aprendizaje con comprensión de las matemáticas deben:

[1] Adoptamos la definición de representación (externa) dada por Castro y Castro (1997): un conjunto de notaciones físico-visuales, graficas o simbólicas, especificas para una noción matemática, que expresan los conceptos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

[2] Ver García Pérez (2000) para una discusión más extensa del papel de las representaciones, internas y externas, en la actividad matemática).

- permitir a los/as alumnos/as avanzar desde sus conocimientos previos, procediendo desde ideas informales al conocimiento formal
- fomentar la exploración de ideas o situaciones matemáticas
- conectar diferentes ideas o conceptos matemáticos
- conducir a la modelización de situaciones matemáticas, favoreciendo de esta forma una exploración más profunda y la identificación de las ideas importantes de un dominio
- hacer que los/as alumnos/as creen, se cuestionen, evalúen y justifiquen afirmaciones matemáticas
- promover el trabajo en grupo y el uso flexible de tecnologías tales como calculadoras, ordenadores o grabaciones de video
- ser relevantes (motivadoras) para los/as alumno/as.

La práctica en el aula

Finalmente, deben considerarse las normas que determinan como se espera que el alumnado y el profesor/a interactúen y respondan en diversas situaciones, las cuales condicionan la actividad matemática que tiene lugar en el aula. Estas normas definen qué se considera aprendizaje y qué matemáticas, cómo son utilizadas las actividades y las representaciones, y qué tipo de conjeturas, argumentaciones y conclusiones deben producirse en el aula (Carpenter y Lehrer, 1999). Debido a su gran influencia las normas desempeñan un papel principal en la creación de aulas que promueva el aprendizaje con comprensión de las matemáticas. Lo importante para promover un aprendizaje con comprensión es que éste sea el principal objetivo de la enseñanza, y por lo tanto, se posibilite continuamente a los/as alumnos/as el establecer conexiones, extender, articular y aplicar su conocimiento, reflexionar en sus experiencias, e interiorizar el conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999).

1.3.4 Detectar la comprensión

"U*n sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento, etc.) cuando, inmerso en una situación de desequilibrio cognitivo, centrada en dicho objeto, y deseando colaborar o buscando una estabilidad cognitiva relativa, elabora y emite a su satisfacción una respuesta adaptada"* (Gallardo y González, pendiente de publicación).

Los autores anteriormente citados se centran en los efectos observables de la comprensión, en las manifestaciones externas y en su interpretación, compartiendo las consideraciones de Duffin y Simpson (1997) que exponen: "*a menos que la comprensión se manifieste no tenemos ningún modo de inferir algo sobre el nivel de comprensión que tiene el sujeto"* (p. 169).

Cuando se trate de observar la comprensión de un individuo, será conveniente proponerle situaciones y tareas para cuya resolución se requiera del conocimiento cuya comprensión se quiera observar. No obstante, la cautela ha de ser una norma importante en estas observaciones; ya que aunque "*Comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada"* (Gallardo y González, pendiente de publicación), no siempre la recíproca se cumple o sea, la no respuesta no es sinónimo de no comprensión.

1.4 Concepciones

El término concepción es uno de los más importantes empleados en este trabajo, dado que uno de nuestros objetivos es el estudio de las concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual, como se verá más adelante. Por ello dedicamos este apartado a clarificar la acepción que de este término vamos a considerar.

Ruiz (1993) y Flores (1998) han realizado un extenso análisis de la noción de concepción en Didáctica de las Matemáticas, abordando otros términos relacionados tales como creencias, modelo, representación, "la definición de un concepto" y "la imagen de un concepto".

Ruiz (1993) distingue dos tipos de concepciones: subjetivas (o cognitivas) y epistemológicas. Las concepciones subjetivas son individuales y se refieren al conocimiento y creencias de un sujeto. En cambio las concepciones epistemológicas son sostenidas por la comunidad matemática y se refieren a tipologías de conocimientos existentes en un determinado periodo histórico, o circunscritos a los textos, programas, etc. de un nivel de enseñanza.

Ambos tipos de concepciones se clasifican a su vez en globales y locales (Ruiz, 1993), denominándose concepciones globales a aquellas que "describen holisticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto matemático" (p. 47), y concepciones locales a aquellas que se refieren a aspectos parciales de los sistemas anteriores, las cuales se manifiestan en situaciones concretas.

Por su parte, Ponte (1994) y Gil (1999) consideran las concepciones como marcos organizadores implícitos de conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva, que condicionan la forma en que se enfrenta una tarea.

Nosotros vamos a emplear el término concepción para establecer la distinción entre el objeto matemático que consideramos es único, y las variadas significaciones que le pueden asociar los/as alumnos/as (Artigue, 1984, según cita Ruiz, 1993). Como explica Vergnaud (1982, según cita Ruiz, 1993), la concepción informa del estado de los conocimientos de un alumno/a en relación a un concepto.

Considerando la comprensión como un proceso dinámico, entendemos que el/la alumno/a va construyendo diversas concepciones, es decir, va pasando por diversos estados en el proceso del aprendizaje. Dichos estados son, como explican Gallardo y González (pendiente de publicación), situaciones cognitivas resultado de experiencias previas y de la elaboración de respuestas adaptadas a dichas situaciones. Alcanzándose el estado final en el proceso de la comprensión cuando se entiende el significado establecido científicamente de dicho ente matemático. En este estado final se dice que se comprende dicho concepto. De esta forma decimos que un/a alumno/a comprende el significado del signo igual o, equivalentemente, ha construido (o desarrollado) una adecuada comprensión del signo igual, cuando reconoce el significado científico que se le asigna a este símbolo.

Como en toda investigación, en este trabajo analizamos sólo determinados aspectos locales de la concepción de los sujetos sobre el signo igual, los cuales son puestos en evidencia por las situaciones o problemas considerados en las intervenciones realizadas en el aula.

Denominaremos "concepciones erróneas" a concepciones inadecuadas, lo que en la literatura se identifica con el término "misconceptions", y que según explica Leinahrdt, Zaslavsky y Stein (1990) y cita Ruiz (1993), se refiere a ciertas características incorrectas o inapropiadas del conocimiento de los estudiantes sobre un objeto matemático específico, el cual puede o no haber sido enseñado, las cuales son repetibles y explícitas. "Pueden desarrollarse como resultado de sobre-generalizar una concepción esencialmente correcta, o pueden ser debidas a interferencias del conocimiento de la vida cotidiana" (Ruiz, 1993, p. 48).

1. 5 Objetivos del trabajo

En el diagrama 1 se visualiza la localización del problema de investigación dentro de la enseñanza de las matemáticas.

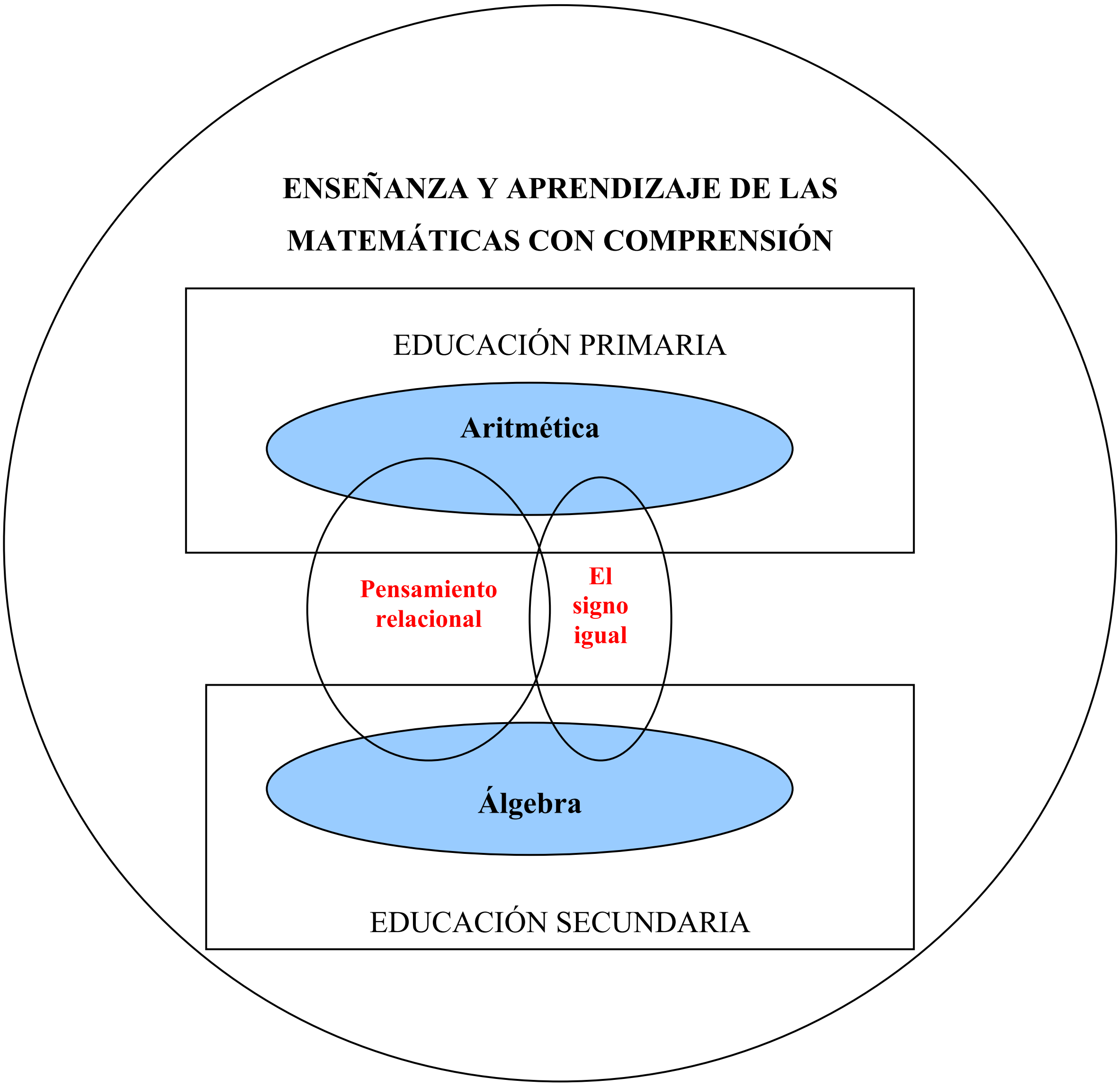


Diagrama 1

Como se indica en el diagrama 1, el problema en estudio conecta dos áreas de las matemáticas: la aritmética y el álgebra, las cuales son habitualmente abordadas en diferentes etapas educativas. Se trata aquí de enriquecer la enseñanza de la aritmética, abordando la resolución de igualdades numéricas a la vez que se intenta promover el uso de pensamiento relacional. Este enfoque permite conectar el pensamiento aritmético y el algebraico, fomentando el desarrollo del sentido numérico junto con habilidades de cálculo aritmético que contribuyen al aprendizaje de importantes ideas y hábitos de pensamiento matemáticos. En suma, favorece la comprensión tanto en los aspectos aritméticos como algebraicos involucrados. Dicha comprensión facilita el posterior estudio y aprendizaje del álgebra y de la aritmética.

A continuación presentamos los *objetivos de investigación* de este trabajo:

- Detectar diferentes concepciones del signo igual que manifiestan un grupo de alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) al considerar igualdades numéricas.
- Diseñar actividades que ayuden a los/as alumnos/as a desarrollar su comprensión del signo igual y que fomenten la emergencia y uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas.
- Analizar la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos, a partir del estudio de sus concepciones.
- Analizar la emergencia y desarrollo del pensamiento relacional durante el trabajo con igualdades numéricas.

Siendo el *objetivo general de este trabajo*: analizar el pensamiento matemático de los estudiantes, puesto de manifiesto al intentar resolver igualdades numéricas.

1.6 Justificación del interés del trabajo

El conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento matemático de los niños/as es de gran importancia para la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Diversos investigadores (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, Septiembre, 2000; Baroody y Coslick, 1998; Empson y Junk, 2004) han observado como este conocimiento puede ayudar al profesorado a cambiar significativamente su práctica educativa y sus creencias, teniendo efectos positivos en el aprendizaje de sus alumnos/as.

Conocer el modo en que piensan los/as alumnos/as, las dificultades que encuentran en el aprendizaje de un concepto matemático, los conocimientos y las concepciones de las que parten en el aprendizaje de una idea o procedimiento matemático, son aspectos de gran interés dentro del área de Didáctica de la Matemática. Estos conocimientos son especialmente necesarios para los educadores que deben de estar preparados para entender el pensamiento matemático de sus alumnos/as y tomar decisiones sobre el trabajo a llevar a cabo en el aula, en función de éste (Empson y Junk, 2004).

Con nuestro trabajo se contribuye a dicho conocimiento centrándonos en el pensamiento puesto en juego al resolver igualdades numéricas y en la comprensión del signo igual. Partiendo de estudios previos que han mostrado la existencia de importantes dificultades en la comprensión del signo igual, este trabajo analiza detalladamente las distintas concepciones que presentan los/as alumnos/as, así como su evolución. Además, se explora la emergencia y evolución del pensamiento relacional, aspecto que ha sido tratado brevemente en la literatura, y sobre el cual aportamos información que ayuda a su mejor comprensión en el ámbito de la Educación Primaria.

1.6.1 Justificación desde la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria

Centrándonos en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria, y concretamente de la aritmética, puede resaltarse particularmente la importancia y necesidad de realizar investigación en esta área. Si se persigue promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, su enseñanza en Educación Primaria ha de recibir una atención especial pues es en estos primeros años de escolarización cuando los/as alumnos/as adquieren la base de sus conocimientos matemáticos, y forman sus principales actitudes y concepciones sobre las matemáticas. En los primeros años de la Educación Primaria los estudiantes muestran entusiasmo por aprender matemáticas, por este motivo se hace especialmente necesario hacer las matemáticas interesantes y fomentar la comprensión de las principales ideas matemáticas para mantener dicho interés. "La enseñanza en estos niveles debe ser activa e intelectualmente estimulante y debe ayudar a los/as alumnos/as a entender las matemáticas" (NCTM, p. 143)

Concretamente la aritmética es el área de las matemáticas que recibe una mayor atención en esta etapa. En el Diseño Curricular Base de Educación Primaria se recoge bajo el bloque de contenido denominado "Números y operaciones: significado y estrategias" siendo esencial para el aprendizaje de los demás bloques de contenido a tratar.

Tradicionalmente, el principal interés en la enseñanza de la aritmética ha sido que los/as alumnos/as aprendan los algoritmos de cálculo básicos, y sean capaces de aprender la secuencia de pasos que llevan a una respuesta correcta. Esta enseñanza conduce, en la mayoría de los casos, a un aprendizaje de los algoritmos sin comprender su significado o precedencia, y a que se deje de pensar en la naturaleza de las operaciones y los números implicados. Teniendo en cuenta la riqueza de ideas matemáticas involucradas en estos algoritmos (Ej.: la estructura de base-diez del sistema numérico y las propiedades de las operaciones), un aprendizaje más significativo es posible.

Se hace, por lo tanto, necesaria la investigación en esta dirección para promover un aprendizaje más significativo de la aritmética. Algunas propuestas dirigidas a enriquecer la enseñanza de la aritmética se han centrado en la resolución de problemas (Ej.: Carpenter, Franke y Levi, 2003). Otras propuestas invitan a desarrollar el razonamiento de los/as alumnos/as en cualquier tipo de actividades matemáticas, tratando de fomentar el aprendizaje de importantes ideas matemáticas a la vez que se desarrollan las habilidades de cálculo (Ej.: Tierney y Monk, pendiente de publicación). En esta última línea está nuestro trabajo.

1.7 Búsqueda bibliográfica

Para la elaboración de este trabajo se ha realizado una búsqueda en los fondos bibliográficos de las bibliotecas que se indican a continuación:

- La biblioteca Shield de la Universidad de Davis, California.
- La biblioteca especializada del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- La biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.
- Las bibliotecas particulares de las Doctoras Encarnación Castro y Rebecca Ambrose.

En esta búsqueda bibliográfica se ha consultado revistas nacionales e internacionales, actas de congresos nacionales e internacionales, tesis y libros relacionados con el problema de investigación. También se han consultado numerosos documentos que aparecían referenciados por otros autores y estaban relacionados con nuestro estudio.

De interés para nuestro trabajo, hemos encontrado diversas investigaciones realizadas en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Nos referimos concretamente a las tesis doctorales de Ruiz Higueras (1993) y las de Fernández García (1997) y Ortiz Buitrago (2002). Estas últimas dentro del grupo Pensamiento Numérico. Además, hemos tenido acceso a otro trabajo de tesis, prácticamente acabado (Espinosa, pendiente de publicación) que se está realizando en el seno del grupo.

Fernández (1997) analiza a través de la resolución de problemas verbales las competencias sobre álgebra elemental de dos grupos de alumnos/as: un grupo de estudiantes de cuarto curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y otro de estudiantes universitarios que llevaban más de tres años sin recibir instrucción algebraica. Por consiguiente, el álgebra escolar constituye uno de las líneas de estudio que incide en este trabajo, siendo abordada en los capítulos relativos a la fundamentación del estudio y a la revisión de la literatura de investigación. Dichos capítulos han sido consultados en la realización de este trabajo, siendo de especial interés las referencias relativas a estudios sobre el pensamiento algebraico, la importancia del álgebra dentro de la formación matemática y las conexiones del álgebra y la aritmética.

En dicho trabajo se aborda la comprensión desde similar perspectiva a la considerada en nuestro estudio y se menciona, citando a Kieran y Filloy (1989), el significado diferente que posee el signo igual como “uno de los conceptos distintivos del paso de la aritmética al álgebra” (p. 109).

En el trabajo de Espinosa se continúa la investigación de Fernández y se amplia con un estudio sobre las creencias y concepciones de profesores en formación sobre la evaluación, cuando los/as alumnos/as resuelven problemas.

Ortiz (2002) lleva acabo un estudio evaluativo de un programa de formación de futuros profesores de secundaria sobre modelización y el uso de la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. En este estudio la atención se centra en el papel de la modelización en el aprendizaje del álgebra, y en la importancia del álgebra, y más concretamente del álgebra lineal, en la formación inicial de profesores de matemáticas. La calculadora gráfica se presenta como un potente instrumento en el aprendizaje del álgebra al permitir establecer conexiones entre el álgebra y el mundo físico y social, además de enriquecer la comprensión de los conceptos y procesos algebraicos.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los estudios de investigación consultados que se han considerado más relevantes con respecto al problema de investigación. Estos estudios nos han ayudado a situar este trabajo dentro de la literatura existente y nos han permitido profundizar en el problema de investigación, y posteriormente elaborar la metodología de investigación. Además, con el objetivo de desarrollar un adecuado marco teórico desde el cual abordar nuestro problema de investigación, recogemos aquí definiciones de aritmética y álgebra, las dos áreas de las matemáticas involucradas, y las recomendaciones curriculares del Diseño Curricular Base de la Educación Primaria de la L.O.G.S.E. relativas a aspectos de las matemáticas abordados en este trabajo.

2.1 Aritmética y álgebra

¿Qué es aritmética? En un principio se denominaba aritmética únicamente a procedimientos de cálculo que involucraran números naturales mediante operaciones elementales: adición, substracción y multiplicación, luego división y, mucho más tarde elevaciones al cuadrado y al cubo (Bouvier y George, 1984). Posteriormente con la adopción del sistema numérico decimal se amplió dicha concepción "al estudio de las relaciones de los números racionales entre si y con las operaciones" (Bouvier y George, 1984, p. 62). Concretamente Gómez (1988) la define como el estudio de los sistemas numéricos junto con sus relaciones mutuas y sus reglas.

¿Qué es álgebra? Etimológicamente la palabra álgebra viene de la árabe "al-jabr" utilizada para denominar al traslado, en una igualdad, de un término de un miembro al otro (Bouvier y George, 1984). El álgebra surgió del cálculo práctico de los números y de los problemas de aritmética, desarrollándose posteriormente en dos direcciones: la sustitución de números por letras y el paso del cálculo de las fórmulas a la

resolución de ecuaciones (Bouvier y George, 1984). En la actualidad se entiende por álgebra al estudio de conjuntos de elementos, (cuya naturaleza puede no estar especificada) y de las propiedades formales de sus leyes de composición (Bouvier y George, 1984).

Al haberse originado el álgebra a partir de la aritmética ambas áreas de las matemáticas están muy relacionadas, haciéndose en ocasiones referencia al álgebra como generalización de la aritmética (aunque muchos investigadores la consideran más que eso (Lee, pendiente de publicación)).

De forma semejante a como se ha producido históricamente, en las matemáticas escolares el álgebra es habitualmente introducida cuando los estudiantes han recibido una extensa formación aritmética, apoyándose en esta experiencia numérica para desarrollar el simbolismo y la estructura del álgebra. Sin embargo, como se destaca en los Principios y Estándares (NCTM, 2000), el álgebra está también íntimamente ligada a la Geometría y al Análisis de datos, constituyendo un componente principal y unificador del currículo de las matemáticas escolares.

2.2 Early Algebra[3]

Han sido expresadas opiniones diversas con respecto a la temprana introducción del álgebra y la edad en la que debe llevarse acabo dicha introducción (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). En la primera versión de los Estándares del NCTM (1989) se recomendaba la introducción del álgebra como generalización de la aritmética de quinto a octavo grado (quinto y sexto de Primaria y primeros dos cursos de Secundaria), siendo posteriormente en la última edición de los Estándares del NCTM (2000) cuando se recomienda que el pensamiento algebraico sea desarrollado desde los primeros años de escolarización:

"viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los profesores pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior" (p. 37).

[3] Como se ha indicado en el capítulo anterior la expresión Early algebra se refiere a la propuesta de introducir el álgebra en el currículo desde los primeros cursos de la Educación Primaria.

La actual opinión del NCTM es compartida por muchos investigadores (Kaput, Carpenter, Franke, Levi, Carraher, Schliemann, Brizuela, Blanton, entre otros) que actualmente y en los últimos años estudian los distintos aspectos del álgebra y su papel en las actividades matemáticas propias de la Educación Primaria para promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización. Varios de estos estudios se han centrado en aportar evidencias de que esta propuesta está al alcance de los/as alumnos/as de Educación Primaria. Por ejemplo, Bastable y Schifter (pendiente de publicación) presentan episodios de diversas clases de Educación Elemental (Primaria) cuyos profesores han participado en proyectos diseñados para desarrollar una práctica educativa centrada en el pensamiento matemático de los niños/as. Estos episodios muestran como "cuando la enseñanza esta fundamentada en las ideas matemáticas de los/as alumnos/as y en promover su curiosidad matemática, los/as niños/as tiende a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida" (p. 2).

Según el enfoque de la propuesta Early Algebra, los profesores de todos los niveles deben promover el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas. Kaput (2000a) usa el término "algebrafying" (algebrificando) el currículo para referirse a la integración del razonamiento algebraico a lo largo de todos los cursos. Según Kaput (1998) esta integración añade coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, eliminando una tardía, abrupta y "superficial" introducción del álgebra, y abriendo espacio curricular para las matemáticas necesarias en el siglo XXI. Además, con esta reforma se pretende favorecer el acceso de todos los/as alumnos/as a importantes conceptos e ideas matemáticas, al ser consideradas el álgebra y la enseñanza superficial de las matemáticas dos de las principales barreras que dificultan el acceso de todos los/as alumnos/as al aprendizaje de las matemáticas (Schifter et al, documento no publicado; Kaput, 2000a).

Mientras abordan otros componentes del currículo, los profesores pueden promover el pensamiento algebraico ayudando a los/as alumnos/as a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas (aunque no parezcan algebraicas a simple vista). Se pretende promover un pensamiento matemático avanzado de acuerdo con las capacidades de los/as alumnos/as de la Educación Elemental (Primaria), siendo clave la consideración de conexiones entre lo concreto, lo pictórico y el desarrollo de conceptos, así como entre la Educación Infantil, Primaria y Secundaria (Davis y Thompson, 1998). El objetivo es promover el pensamiento algebraico, no las habilidades que se utilizan en los procedimientos algebraicos.

2.3 ¿Qué es álgebra en Early Algebra?

"Aunque los/as niños/as a menudo entienden mucho más de lo que se ha pensado tradicionalmente, los adultos pueden tener dificultades conceptualizando lo que constituiría el álgebra apropiada para los primeros años escolares"

(Falkner, Levi y Carpenter, 1999, p. 232)

La propuesta de introducir álgebra a lo largo de todos los cursos hace necesaria una definición amplia de qué es álgebra o qué es o debe constituir el álgebra escolar. Numerosos investigadores (Mason, Bell, Kaput, Schoenfeld, Van Reeuwijk, Wheeler, Sfard, Lee y muchos otros) han intentado dar respuesta a esta cuestión de diversas formas. En algunos casos se denomina álgebra únicamente a aquellas actividades o procesos de pensamiento que son expresados de forma simbólica, siguiendo la idea de que el álgebra empieza cuando se eligen símbolos para representar objetos (Wheeler, 1996). En otros casos se enumeran las acciones, componentes o maneras de pensar que son consideradas algebraicas, independientemente de su presencia en otras ramas de las matemáticas o en otras ciencias e independientemente de la presencia de lenguaje simbólico (Wheeler, 1996).

Como resultado de los diversos esfuerzos por definir el álgebra, ésta ha sido referida como un lenguaje, una manera de pensar, una herramienta, una actividad, o la generalización de la aritmética (Lee, pendiente de publicación), no existiendo un consenso al respecto.

Similarmente no existe claridad sobre qué constituye álgebra en la propuesta Early Algebra. Concretamente Kaput y Blanton (2004) reconocen la imposibilidad de enumerar todos los componentes del álgebra en la propuesta Early Algebra, limitándose a enunciar cuatro que consideran principales (ver diagrama 2)[4].

[4] Este diagrama fue presentado por Kaput y Blanton en el congreso internacional PME 28 dentro de la comunicación titulada "Elementary grades students' capacity for functional thinking". Sin embargo no

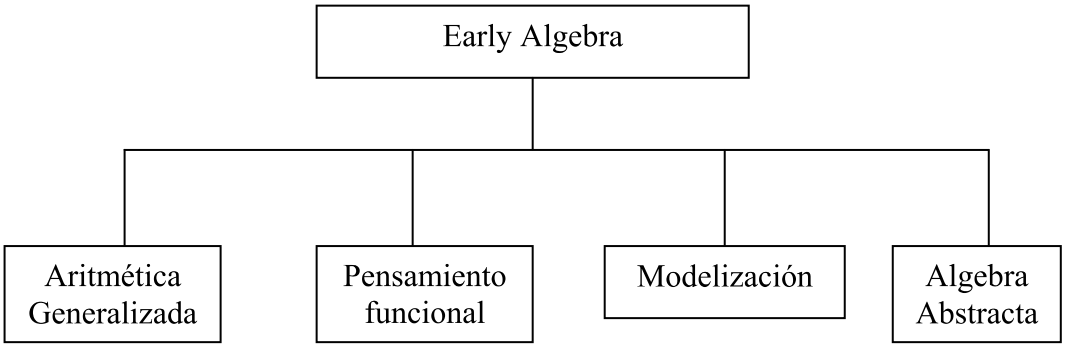


Diagrama 2

A continuación señalamos algunos de los componentes del álgebra (Kaput, 1998, 1999, 2000a) que están siendo abordados en las diversas investigaciones que se están realizando dentro de la propuesta Early Algebra y que complementan el anterior diagrama:

- Generalización de patrones y relaciones (particularmente la generalización de la aritmética y del razonamiento cualitativo).
- Estudio de funciones y relaciones.
- Estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones.
- Un conjunto de lenguajes de modelización y control de fenómenos.
- Manipulación sintácticamente guiada de (opacos) formalismos.

Estos cinco componentes aportan una concepción del álgebra muy amplia, permitiendo su análisis desde direcciones muy diferentes, para su integración en el currículo de la educación Primaria.

2.4 Early Algebra y Aritmética

Centrando su atención en la enseñanza de la aritmética y en la propuesta de una introducción más temprana del álgebra en el currículo, numerosos investigadores proponen trabajar con actividades que faciliten la transición del aritmética al álgebra[5] (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 2000a; Malara, 2003; Warren, 2004;

aparece recogido en el texto incluido en los Proceedings del congreso. Desafortunadamente, Kaput y Blanton no desarrollaron dicho diagrama.

[5] En la actualidad se están llevando acabo diversos proyectos en distintas partes del mundo, tales como el Proyecto ArAL de Italia o el Proyecto Measure Up de Hawai, con el objetivo de promover una enseñanza más significativa de la aritmética apoyada por el desarrollo del pensamiento algebraico.

Subramaniam, 2004). Argumentan que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los/as alumnos/as, por lo que recomiendan integrar ambas en el currículo tan temprano como sea posible. Desde esta consideración, el trabajo de los/as alumnos/as con expresiones numéricas se utiliza para la extracción de patrones y de relaciones funcionales. El objetivo es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, enfoque que conduce a una enseñanza de la aritmética más atractiva y promueve un aprendizaje con comprensión.

El álgebra es tradicionalmente introducida cuando se considera que los/as alumnos/as han adquirido las habilidades aritméticas necesarias, sin aprovecharse significativamente la importante conexión existente entre ambas áreas de las matemáticas. Se pretende que los/as alumnos/as adquieran el conocimiento de la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética y se asume que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto de la representación algebraica, son familiares al alumno/a por su aprendizaje de la aritmética, dándosele poca atención durante la enseñanza del álgebra (Booth, 1989). Este enfoque confía en la generación inductiva en vez del desarrollo directo de estos conceptos. En base a esta suposición la introducción de álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth, 1989). Sin embargo, diversos estudios han mostrado que muchos alumnos/as poseen una pobre comprensión del significado de las relaciones y las estructuras matemáticas (Booth, 1989; Warren, 2004; Kieran, 1989, citado por Kieran, 1992).

"...una parte principal de las dificultades de los estudiantes es precisamente la falta de comprensión de las relaciones aritméticas. La habilidad de comprender y utilizar el álgebra con el manejo de las convecciones notacionales requiere que los estudiantes adquieran primero una comprensión semántica de la aritmética" (Booth, 1989, p. 58)

2.5 La enseñanza de la Aritmética.

¿Qué es la aritmética?
La ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de los números.
(Vallejo, M. J., 1798)

En el Diseño Curricular Base de la Educación Primaria se señalan cinco bloques de contenido para la enseñanza de las matemáticas en esta etapa:

1. Números y operaciones: significado y estrategias.
2. La medida información cuantitativa sobre los objetos y el tiempo.
3. Orientación y representación en el espacio.
4. Las formas en el espacio.
5. Organizar la información: gráficos e iniciación a la estadística.

El primero de estos bloques es el que se refiere a la enseñanza de la aritmética, siendo sus contenidos esenciales para el desarrollo de los demás bloques. Estos contenidos hacen referencia al concepto de número, al conocimiento, comprensión, y uso de los números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, y a la adquisición del lenguaje matemático que posibilita la expresión numérica de objetos y situaciones cuantificables (Miras, 1994).

Algunos de los principales componentes del conocimiento de los números y las operaciones que ha de desarrollarse en esta etapa son:

- la comprensión de los sistemas de numeración, análisis del valor posicional, y la observación de regularidades en el sistema de numeración,
- la comprensión del uso de los números en diferentes contextos y de los significados atribuidos a los mismos,
- la estructura de las operaciones,
- el desarrollo de estrategias de cálculo exacto y aproximado, e invención de algoritmos utilizando la composición y descomposición de números, la asociatividad y la conmutatividad, lo cual favorece la toma de conciencia de las propiedades de las operaciones,
- el uso significativo de las operaciones y de las relaciones entre ellas,
- la invención de situaciones en las que deban elegirse las operaciones adecuadas,

(Miras, 1994; Diseño Curricular Base de la Educación Primaria; Cázares, 2000).

De forma análoga, en los Principios y Estándares del NCTM (2000) se distingue el Estándar denominado "Números y operaciones", destacándose como objetivos principales que todos los estudiantes…
- comprendan los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos,
- comprendan los significados de las operaciones y como se relacionan unas con otras,
- sean capaces de calcular con fluidez y de hacer estimaciones razonables.

El objetivo principal de este Estándar es el desarrollo del sentido numérico, entendiéndose éste como "la habilidad para descomponer números de forma natural, utilizar ciertos números como 100 o ½ como referentes, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, comprender el sistema decimal de numeración, estimar, dar sentido a los números y reconocer las magnitudes relativa y absoluta de los números" (Sowder, 1992, citado por NCTM, 2000). Según los Principios y Estándares (NCTM, 2000), "la comprensión del número y de las operaciones, el desarrollo del sentido numérico y conseguir fluidez de cálculo aritmético, constituyen el núcleo de la educación matemática en los niveles elementales" (p. 32), siendo necesarios equilibrio y conexión entre la comprensión conceptual y la competencia de cálculo para el desarrollo de esta fluidez.

La facultad de aprender y emplear las propiedades abstractas de las operaciones propiamente dichas, es decir, la comprensión de la estructura interna de las operaciones y de las relaciones entre ellas, es junto con la capacidad de relacionar dichas operaciones con situaciones del mundo real, uno de los aspectos principales de la comprensión de las operaciones aritméticas (Dickson, Brown y Gibson, 1991). La comprensión del significado de los números y de las operaciones ha de ser previa a las destrezas de cálculo, y deberá desarrollarse previa y paralelamente al aprendizaje de los algoritmos de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, siendo necesario abordar estos conceptos en diferentes contextos y reiteradamente debido a su complejidad. Las investigaciones han demostrado que el aprendizaje relativo a los números y las operaciones es un proceso complejo para los niños (NCTM, 2000).

2.5.1 El cálculo mental

Un aspecto de las matemáticas al que se el da una especial importancia durante la etapa de la Educación Primaria es el desarrollo del cálculo mental. La utilidad e importancia del cálculo mental es destacada en el Diseño Curricular Base (1991) de esta etapa:

"la mayor parte de las operaciones que se necesitan en la vida diaria se hacen mentalmente y, además, el cálculo mental contribuye de una manera especial a la adquisición de algunas capacidades propias de esta etapa. Por medio del cálculo mental se desarrollan: la concentración, la atención, el interés y la reflexión para decidir y elegir; la autoafirmación y la confianza en sí mismo, la flexibilidad en la búsqueda de soluciones; y la capacidad para relacionar, comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar."

El cálculo mental, también denominado cálculo pensado, es caracterizado porque: es de cabeza, se puede hacer rápidamente, se apoya en un conjunto limitado de hechos numéricos y requiere ciertas habilidades como conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc., para sustituir o alterar los datos iniciales y así trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular (Gómez, 1988).

Las bases del cálculo mental son el dominio de la secuencia contadora y de las combinaciones aritméticas básicas, no sólo el conocimiento de la existencia de determinadas estrategias, sino también la reflexión sobre ellas para elegir o utilizar la más adecuada en cada situación (Miras, 1994).

2. 5. 2 El pensamiento relacional en el aprendizaje de la aritmética

"Muchas de las ideas fundamentales de las matemáticas incluyen relaciones entre diferentes representaciones de números y de operaciones entre ellos"

(Carpenter, Franke, y Levi, 2003, p. 38).

El pensamiento relacional puede tener un papel de gran importancia en el aprendizaje de la aritmética favoreciendo el desarrollo del sentido numérico al permitir abordar la aritmética desde un enfoque no centrado en la obtención de la respuesta, sino en el estudio de las relaciones entre los números y entre las operaciones involucradas en una actividad. Identificar relaciones es un aspecto principal de la comprensión de las matemáticas.

En el aprendizaje de la aritmética el pensamiento relacional implica, por ejemplo,

- Modificar una secuencia de operaciones para facilitar su cálculo mediante la aplicación de propiedades aritméticas fundamentales. Por ejemplo cambiando el orden de los términos o descomponiendo alguno de los términos. En el caso de la secuencia 14 + 9 + 6 puede simplificarse su calculo reordenándola (14 + 6 + 9 = 20 + 9 = 29) o descomponiéndola de la forma 14 + 9 + 6 = 10 + 4 + 9 + 6 = 10 + 9 + 4 + 6 = 10 + 9 + 10 = 10 + 10 + 9 = 20 + 9 = 29.
- Deducir respuestas o resultados que no se saben o no se recuerdan en un determinado momento a partir de otros que se conocen. Por ejemplo, para resolver 9 + 8 los/as alumnos/as pueden calcular 10 + 8 y posteriormente restar uno o para calcular 5 x 9 puede calcularse 5 x 10 y restarle cinco.

Aunque los/as alumnos/as habitualmente no hagan explícitas o no sepan formular las propiedades de las operaciones que ponen en juego, estas propiedades están implícitas en la mayoría de los cálculos aritméticos que realizan. El uso de las propiedades es reconocido al abordar y simplificar los cálculos, siendo su uso más transparente cuando se aplica pensamiento relacional. Aunque el pensamiento relacional minimiza los cálculos que los/as alumno/as deben realizar, uno de los objetivos del pensamiento relacional es que los estudiantes piensen en las propiedades de las operaciones, en como manipular expresiones, y como esta manipulación afecta a las operaciones a realizar o a las igualdades. Este conocimiento ayuda al desarrollo de habilidades para el cálculo aritmético, y por lo tanto, el cálculo mental, y puede ser puesto en juego al abordar todo tipo de actividades aritméticas.

2. 5. 3 El papel de las igualdades numéricas en el aprendizaje de la aritmética

Partiendo del trabajo de Davis (1964), Carpenter, Franke, y Levi (2003) proponen el uso de igualdades numéricas como contexto en el cual favorecer que los niños/as empiecen a establecer relaciones entre números, operaciones y expresiones. Una vez que los/as alumnos/as empiezan a pensar en relaciones, las igualdades numéricas verdaderas y falsas y las igualdades abiertas proveen de un contexto flexible en el cual pueden representarse estas relaciones y así focalizar la atención de los/as alumnos/as en ellas. Además, estas igualdades constituyen un contexto específico en el cual los/as alumnos/as puede hablar de su comprensión con respecto a ideas matemáticas básicas, tales como las propiedades de las operaciones o de la estructura de nuestro sistema numérico de base diez, por ejemplo con las igualdades 42 = 40 + 2, 2 + 40 = 42, 42 = 30 + 12.

Cuando se involucra el pensamiento relacional las igualdades numéricas pueden emplearse para introducir propiedades de las operaciones mostrando diversos ejemplos que faciliten a los estudiantes el detectar un patrón, y ocasionen la formulación de conjeturas. Por ejemplo, Alcalá (2000) sugiere utilizar igualdades numéricas tales como 3 + 4 = 4 + 3 y 10 + 5 = 5 + 10 para ayudar a los/as alumnos a reflexionar sobre las operaciones aritméticas y sus propiedades, y que en un futuro sean capaces de expresarlas algebraicamente.

Este tipo de igualdades pueden comprobarse o verificarse operando en ambos miembros y observando que ambas expresiones dan lugar al mismo resultado. En cambio, si los estudiantes establecen relaciones entre los miembros de la igualdad, tras considerarse varias igualdades similares, las propiedades aritméticas pueden hacerse explícitas y discutirse. De este modo los/as alumnos/as son conscientes de propiedades importantes de las operaciones que les ayudan a ser más eficientes al operar, a desarrollar estrategias esenciales para la resolución y manejo de ecuaciones, y en general a aprender importantes ideas matemáticas.

Como Carpenter, Franke y Levi (2003) afirman, el involucrar a los estudiantes en este tipo de actividades es importante porque facilita el aprendizaje de la aritmética y aporta una base desde la cual suavizar la transición al álgebra.

Como se recoge en el Diseño Curricular Base de la Educación Primaria la experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas son un paso previo a la formalización y una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente todas las posibilidades que encierra dicha formalización (1991).

Es importante observar que la mayoría de estas igualdades requieren la comprensión del signo igual como indicador de una relación. Por este motivo se hace necesaria una adecuada comprensión del signo igual para poder emplear las igualdades numéricas en la enseñanza de la aritmética.

El uso de igualdades numéricas ha sido también recomendado por otros autores para que los/as alumnos/as aprendan a expresar su secuencia de pensamientos mediante igualdades o secuencias numéricas al resolver un problema. Los/as niños/as raramente escriben secuencias para resolver un problema, y cuando se les exige lo resuelven primeramente y luego intentan representar el problema con una igualdad o secuencia numérica (Briars y Larkin, 1984, citado por Kieran 1989). Además se ha observado que frecuentemente niños/as que saben resolver problemas, no pueden escribir secuencias que representen las relaciones cuantitativas involucradas en el problema en cuestión (Lindvall e Ybarra, 1978; Riley y Greeno, 1978)

2.6 Proceso versus objeto. Concepciones[6] operacional y estructural

La mayoría de los conceptos matemáticos pueden ser considerados como objetos y como procesos (Sfard, 1991). Por ejemplo, una fracción es un objeto si la consideramos como un número racional y es un proceso si la consideramos como un cociente. De forma semejante, la simetría puede considerarse como una propiedad estática de una forma geométrica o como un tipo de transformación. La habilidad de ver un concepto matemático como un objeto y a la vez un proceso es indispensable para alcanzar una comprensión profunda de las matemáticas (Sfard, 1991). Estas dos consideraciones de una misma noción matemática son complementarias.

Ver una entidad matemática como un objeto requiere ser capaz de referirse a ella como si fuera una cosa real y ser capaz de manipularla como una unidad global sin atender a los detalles. En cambio interpretar una entidad matemática como un proceso implica considerarla como algo potencial, constituido por una secuencia de acciones, en vez de una verdadera entidad (Sfard, 1991).

Las concepciones[7] de objeto y proceso son también denominadas estructural y operacional (o procedimental) respectivamente (Kieran, 1992). Esta distinción es similar a la realizada por Piaget (1970, según cita Sfard, 1991) entre los modos de pensamiento matemático figurativo y operativo, siendo el primero de estos el que corresponde a la concepción estructural y el otro a la operacional o procedimental (Sfard, 1991).

En las aulas, de forma semejante a como ha ocurrido históricamente, los conceptos matemáticos suelen ser introducidos primeramente como procesos, siendo

[6] Concepciones es utilizado aquí como sustantivo de concebir: “Formar idea, hacer concepto de algo” (Según el diccionario de la Real Academia Española online http://www.rae.es).

lenta y difícil la transición a su consideración como objetos matemáticos (Kieran, 1992). El modelo de desarrollo conceptual de Sfard (1991) describe como se produce esta evolución, distinguiendo tres etapas: interiorización, condensación y reificación. De la primera a la segunda etapa se va produciendo un cambio gradual. En la primera etapa, *interiorización,* el proceso matemático en cuestión es aplicado en objetos matemáticos (de menor nivel) ya conocidos. En la segunda etapa, *condensación*, se produce una reducción de las secuencias de acciones, que componen el proceso, en unidades más manejables. Finalmente, la tercera etapa, *reificación*, se produce cuando el proceso "ha solidificado" y pasa a ser considerado como una estructura estática, es decir un objeto matemático, identificándose las distintas representaciones de dicho objeto como una única entidad. En este momento, esta secuencia de tres etapas puede ser iniciada de nuevo realizándose ahora procesos sobre este "nuevo" objeto matemático.

Por ejemplo, en el caso de una función, en la primera etapa se aprende la idea de variable y como evaluar una función. A lo largo de la segunda etapa se va aprendiendo a manejar una función sin prestar atención a sus valores específicos. La persona es entonces capaz de investigar funciones, representarlas, combinar parejas de funciones, calcular la inversa de una función,… Finalmente en la tercera etapa se es capaz de resolver ecuaciones en las que las incógnitas son funciones, considerar propiedades de operaciones realizadas con funciones,…en definitiva, considerar las funciones como objetos manipulables.

La consideración de objetos matemáticos como tales y en general, la consideración de estructuras en matemáticas es de gran importancia para facilitar el almacenamiento, procesamiento y manipulación de los conocimientos matemáticos (Sfard, 1991). Probablemente la concepción estructural subyace a la comprensión relacional definida por Skemp, mientras que la concepción operacional conduce a la comprensión instrumental (Sfard, 1991).

Se hace necesario desarrollar la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos a la vez que se adquiere habilidad en su manejo, al no existir consenso sobre el orden en el que ambas concepciones deben ser consideradas (Sfard, 1991). "El desarrollo de una habilidad se encuentra íntimamente ligado a la comprensión de dicha habilidad" (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, y Reys, 1980).

2.7 Diferentes enfoques en la enseñanza del álgebra y de la aritmética

Centrando la atención en la aritmética y el álgebra escolar, se observan muy diferenciadas las concepciones operacional y estructural. La aritmética está tradicionalmente ligada a las operaciones, lo que favorece que predominantemente se le relacione con lo operacional (o procedimental). Por su parte el álgebra es habitualmente introducida como generalización de la aritmética, y por lo tanto desde una concepción operacional, pasando rápidamente a ser considerada únicamente desde una perspectiva estructural (Kieran, 1992).

Según Kieran (1992), la forma tradicional de introducir la aritmética y el álgebra no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los/as alumnos/as para reconocer y usar la estructura matemática, siendo esta una de las principales dificultades en la introducción al álgebra junto con el significado de las letras y el cambio de convenciones con respecto a la aritmética. El énfasis predominante de lo computacional de los primeros cursos escolares es señalado como causa de la falta de conciencia de los/as alumnos/as sobre la estructura que subyace a las operaciones matemáticas y sus propiedades (Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999). Concretamente se ha observado que los/as alumnos/as no poseen la capacidad de juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas (es decir resolver igualdades) sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas, como consecuencia de la falta de conocimiento de la estructura de la aritmética (Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999).

Una de las propuestas de Early Algebra consiste en fomentar un enfoque estructural de la aritmética y de diversos conceptos matemáticos.

El conocimiento de la estructura matemática incluye el conocimiento de conjuntos de objetos matemáticos (Ej. operaciones, números, objetos geométricos,…), relaciones entre estos objetos y propiedades de estos objetos. Concretamente durante el aprendizaje de la aritmética e introducción al álgebra el conocimiento de la estructura matemática se refiere a la comprensión de relaciones cualitativas, propiedades de estas relaciones, operaciones, propiedades de estas operaciones y relaciones entre operaciones (Morris, 1999).

2.7.1 Dos modelos para una enseñanza estructural de la aritmética

Morris (1999) presenta dos métodos de enseñanza alternativos al tradicional[7], diseñados para ayudar a los/as alumnos/as a desarrollar conocimiento de estructura. En dicho estudio se analiza el efecto a largo plazo de estos currículos, en relación al uso y reconocimiento de estructura matemática, comparando grupos de adolescentes que cursaron ambos currículos por un periodo de, al menos, dos años al considerarse que este conocimiento se desarrolla en un periodo largo de tiempo.

Modelo "estructural a computacional". El primer método pertenece a un currículo desarrollado por Davydov centrado en el pensamiento pre-aritmético (o "protocuantitativo") de los/as alumnos/as, es decir, la capacidad para adquirir nociones estructurales abstractas a partir del razonamiento sobre relaciones entre cantidades físicas. El/la niño/a preescolar razona sobre relaciones entre cantidades no cuantificadas de materiales físicos, sobre los efectos de trasformaciones en estas cantidades y sobre relaciones entre ellas, y compara dichas cantidades. Las operaciones pre-aritméticas son realizadas directamente en objetos físicos y posteriormente en representaciones mentales de cantidades físicas.

Davydov propone hacer uso de esta capacidad de razonar pre-aritméticamente con la que los/as alumnos/as llegan al colegio y, desarrollar los conceptos generales de relaciones y propiedades en un contexto no aritmético explorando atributos físicos tales como longitud, área y volumen, y requiriendo que posteriormente el currículo elemental (de la Educación Primaria) asista al alumno/a en la conexión de estas relaciones y propiedades con casos aritméticos específicos. Según Davydov este enfoque permitiría a los/as alumnos/as centrarse más eficazmente en los conceptos que subyacen en las matemáticas sin la interferencia de los números (Warren, 2004). Este modelo no presupone que los conceptos de estructura surgen del conocimiento aritmético, desviando la atención de las técnicas para el cálculo al estudio de las regularidades estructurales que gobiernan estos cálculos.

Modelo "procedimental a estructural". El otro enfoque presentado por Morris y propuesto por Kieran (1992) propone una secuencia curricular que favorece la transición de la aritmética al álgebra, presuponiendo que la estructura algebraica

[7] En el modelo tradicional se ha considerado que el conocimiento de estructura se desarrolla a partir del conocimiento aritmético.

emerge del razonamiento aritmético, como en el modelo tradicional, pero requiriendo un periodo más largo para que esta transición se lleve acabo, en la cual se van estableciendo conexiones entre referentes numéricos y símbolos algebraicos.

El sistema simbólico algebraico es considerado como una de las principales fuentes de dificultades en el reconocimiento y el uso de estructura, por este motivo se propone la introducción progresiva de interpretaciones del simbolismo algebraico más abstractas. En este modelo los estudiantes desarrollan la habilidad de usar estructuras en contextos algebraicos después de un periodo prolongado de experimentación con la interpretación procedimental del simbolismo algebraico, y mediante una adecuada secuencia de enseñanza que favorece este cambio. Las entidades algebraicas son primeramente consideradas como descripciones concisas de procedimientos aritméticos.

En este estudio, Morris observó que los estudiantes del *modelo* "*estructural a computacional"* aportaron explicaciones correctas referentes a estructuras en contextos numéricos y algebraicos más frecuentemente que los estudiantes del otro modelo. Parte de los/as alumnos/as del *modelo "procedimental a estructural"* también dieron muestras de un cambio de una concepción procedimental a otra estructural, sin embargo, la mayoría se centraron principalmente en los números y el cálculo de las operaciones. La aplicación de este modelo permitió observar que más que una larga experimentación procedimental con expresiones algebraicas, lo que puede producir un cambio más rápido hacia una concepción estructural es una instrucción que aborde explícitamente los conceptos de estructura.

Morris (1999) concluye que incluso con esfuerzos curriculares directos y duraderos por el desarrollo de las nociones de estructuras la mayoría de los/as alumnos/as requiere un largo periodo de tiempo para abstraer generalizaciones que puedan ser aplicadas de unos contextos a otros.

Recientes aplicaciones del modelo "estructural a computacional"

En la actualidad diversos investigadores tales como Warren (2004), Smith y Thompson (pendiente de publicación) apoyan una introducción de las matemáticas escolares más centrada en el razonamiento cuantitativo para desarrollar las habilidades de los/as alumnos/as de conceptuar, razonar y operar con cantidades y relaciones en contextos problemáticos, alegando que el currículo de matemáticas no ayuda a los/as alumnos/as a desarrollar sus habilidades de razonamiento sobre relaciones aditivas y multiplicativas complejas.

Concretamente Warren (2004) propone involucrar a los estudiantes en actividades de generalización a lo largo de su educación matemática, combinado el uso de modelos cuantitativos a la vez que se trabaja el desarrollo del sentido numérico. Según Warren, esta conjunción facilita el proceso de generalización, aunque se necesita explorar más extensamente las dificultades de transferencia entre estos dos modelos así como el tipo de actividades e instrucción que pueden facilitarla.

2.8 Estudios previos sobre la comprensión del signo igual y la resolución de igualdades numéricas

"La igualdad es un importante concepto algebraico que los estudiantes deben encontrar y empezar a comprender en los primeros cursos"

(NCTM *Standards,* 2000, p. 94).

El signo igual, como todo símbolo matemático, es la representación de un concepto o idea matemática. Concretamente se utiliza para representar una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escriben a ambos lados de dicho signo. Este significado es una convención que los/as alumnos/as deben llegar a conocer para poder comprender las igualdades y ecuaciones matemáticas.

Desde Educación Primaria, y en ocasiones Infantil, los estudiantes encuentran el signo igual en diversas actividades matemáticas. Sin embargo, según diversos estudios (Saenz-Ludlow y Walgamuth, 1998; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Falkner, Levi, y Carpenter, 1999), los/as alumnos/as de primer a sexto grado (primero a sexto de Primaria), e incluso de Educación Infantil, encuentran serias dificultades en dotar de significado al signo igual. Alumnos/as de Educación Secundaria y Universidad continúan teniendo dificultades para usar el signo igual correctamente, según estudios de Mevarech y Yitschak (1983, citado por Kieran, 1992) y Byers y Herscovich (1977, citado por Kieran, 1981).

Durante el aprendizaje de la aritmética los estudiantes encuentran y manejan igualdades numéricas que involucran las operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división. Estas igualdades son en su mayoría igualdades de acción, es decir igualdades que incluyen al menos un signo operacional y en las cuales las operaciones aparecen expresadas únicamente en uno de los lados de la igualdad (Ej. 13 – 7 = 6). En su mayoría las igualdades que encuentran los/as alumnos/as presentan las operaciones en el lado izquierdo del signo igual y la respuesta en el lado derecho.

Según Behr, Erlwanger y Nichols (1980) y Carpenter, Franke y Levi (2003), este uso unidireccional del signo igual ocasiona que los estudiantes adquieran concepciones erróneas sobre el significado del signo igual que tienden a persistir cuando los/as alumnos/as se hacen mayores. En un estudio con alumnos/as de seis y siete años, Behr, Erlwanger y Nichols (1980) observaron que los/as alumnos/as percibían el signo igual como un estímulo para dar una respuesta y tenían ideas definidas sobre como debían escribirse las igualdades. Los/as alumnos/as no aceptaban igualdades tales como □ = 2 + 5 afirmando que estaban al revés y las modificaban escribiendo 2 + 5 = □ ó □ + 2 = 5 en su lugar. Además rechazaban igualdades de no-acción, es decir, igualdades que no incluían ningún signo operacional (+, -, ×, ÷) (Ej. 3 = 3) o que incluían signos operacionales en ambos lados de la igualdad (Ej. 3 + 5 = 7 + 1), convirtiéndolas en igualdades de acción de forma semejante a como se indica en los siguientes ejemplos:

Ej.: 3 + 2 = 2 + 3 → 3 + 2 + 2 + 3 = 10
Ej.: 3 = 3 → 3 + 0 = 3 o 3 - 3 = 0

Estos/as alumnos/as no percibían en las igualdades la expresión de una relación de igualdad sino que las interpretaban como sentencias que indicaban una acción.

Saenz-Ludlow y Walgamuth (1998) también han documentado la confusión que experimentan los/as alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) cuando encuentran igualdades de no-acción así como la frecuente interpretación del signo igual como un comando para realizar una operación.

En un estudio llevado acabo por Carpenter, Franke y Levi (1999), treinta clases de alumnos/as de Educación Elemental (Primaria) resolvieron la igualdad 8 + 4 = □ + 5. Como puede observarse en la tabla 1 las respuestas más frecuentes fueron doce (el resultado de la suma 8 + 4) y diecisiete (el resultado de sumar todos los números que aparecen en la igualdad), detectándose, además, la persistencia de concepciones erróneas sobre el significado del signo igual en alumnos/as de todos los niveles de Educación Primaria.

Incluso en un grupo de alumnos/as que habitualmente escribían sentencias numéricas para mostrar como resolvían los problemas, la mayoría respondieron doce y diecisiete a esta igualdad.

	Porcentaje de respuestas a la igualdad 8 + 4 = □ + 5.				
Grado	**7**	**12**	**17**	**12 y 17**	**Otras**
1	0	79	7	0	14
1 y 2	6	54	20	0	20
2	6	55	10	14	15
3	10	60	20	5	5
4	7	9	44	30	11
5	7	48	45	0	0
6	0	84	14	2	0

Tabla 1: Falkner, Levi y Carpenter (1999).

Ante este tipo de igualdades abiertas[8] de no-acción como 8 + 4 = □ + 5, ha sido también observada la reacción de modificar la igualdad expresando (erróneamente) una cadena de operaciones de la forma 8 + 4 = 12 + 5 = 17 (Kieran, 1979, citado por Kieran, 1981). Este uso erróneo del signo igual en el que se expresan las operaciones en el orden en que se piensan mentalmente, es muy frecuente no sólo en niños/as sino también en adultos (Kieran, 1981; Ma, 1999; Fennel, y Rowan, 2001).

El estudio de Falkner, Levi y Carpenter (1999) presentado anteriormente forma parte de un estudio más amplio que ha sido realizado sobre cuatro aspectos del pensamiento algebraico a desarrollar desde la enseñanza de la aritmética: la comprensión del signo igual, hacer explícitas las generalizaciones, la representación de generalizaciones mediante el lenguaje natural y mediante notación algebraica, y la comprensión de niveles de justificación y demostración. Dicho estudio ha dado lugar a un libro en el cual se exponen algunos de los resultados y se dan recomendaciones a

[8] Distinguimos entre igualdades abiertas o no abiertas según contengan o no un término desconocido.

los docentes para que creen en el aula situaciones en las que se promueva dichos aspectos del pensamiento algebraico.

En este libro, Carpenter, Franke y Levi (2003) enumeran una serie de etapas hacia las cuales se puede trabajar en el desarrollo de la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as. Dichas etapas son propuestas como una guía para el educador, habiéndose observado que existe una gran variabilidad en la evolución de los/as alumnos/as en la comprensión del signo igual y que no todos los estudiantes atraviesan estas cuatro etapas.

Etapa 1: El/la alumno/a hace explicita su comprensión del signo igual, es decir, da a conocer su concepción inicial del signo igual.

Etapa 2: El/la alumno/a acepta como verdadera alguna igualdad de forma diferente a $a \pm b = c$.

Etapa 3: El/la alumno/a reconoce que el signo igual representa una relación entre dos números iguales y compara ambos miembros de la igualdad realizando las operaciones expresadas en cada miembro.

Etapa 4: El/la alumno/a es capaz de comparar las expresiones matemáticas situadas a ambos lados del signo igual sin necesidad de llevar acabo las operaciones.

Desafortunadamente no han sido publicados más datos de este estudio en relación con la comprensión del signo igual, salvo diversos diálogos o fragmentos de discusiones en el aula con alumnos/as. La comprensión del signo igual fue abordada con el objetivo de poder utilizar las igualdades numéricas como contexto en el que explorar cómo los estudiantes reflexionan sobre los procedimientos computacionales para construir generalizaciones y representaciones abstractas de estos procedimientos y estas generalizaciones.

Recientemente ha sido publicado otro estudio sobre el signo igual por Freiman y Lee (2004)[9] realizado con el objetivo de elaborar un instrumento que permita evaluar el pensamiento algebraico de los/as alumnos/as. Reconociendo la comprensión del

[9] Este trabajo ha sido publicado posteriormente a la realización de nuestro estudio por lo que sólo se ha tenido en cuenta en la discusión de los resultados.

signo igual como un componente esencial del pensamiento algebraico, este estudio se centra en detectar qué tipo de igualdades numéricas aportan una mayor información sobre el pensamiento de los/as alumnos/as y su evolución en el tiempo. Se entiende que dicho instrumento deberá incluir otros contenidos además de la comprensión del signo igual (Freiman y Lee, 2004).

En este estudio participaron treinta y cinco alumnos/as de Educación Infantil, treinta y un alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) y veintitrés alumnos/as de sexto grado (sexto de Primaria). Tras una discusión sobre diversas igualdades relacionadas con el número ocho tales como 8 = 8, 8 = 3 + 5 y 3 + 5 = 4 + 4, los/as alumnos/as resolvieron un cuestionario de dos páginas con igualdades abiertas de las formas a = a, c = a + b, a + b = c y a + b = c + d, donde a, b, c o d era desconocida y en su lugar aparecía un recuadro o un espacio en blanco. En estas expresiones se consideraron números de un sólo dígito para los/as alumnos/as de Educación Infantil, de dos dígitos para los de tercer grado (tercero de Primaria), y de hasta cinco dígitos para los/as alumnos/as de sexto grado (sexto de Primaria).

En las igualdades de la forma a + b = c el noventa y uno por ciento de las respuestas fueron correctas. Similarmente, en la igualdades de la forma a = a se obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas, siendo únicamente los/as alumnos/as de Educación Infantil los que tuvieron algunas dificultades (25 de los/as 33 alumnos/as respondieron correctamente). La mayores dificultades tuvieron lugar en las igualdades del tipo c = a + b y a + b = c + d.

En las igualdades de la forma c = a + b los errores observados fueron:

1) Reflejar un número dado en el otro lado del signo igual como en a = a + b, o b = a + b. Por ejemplo, algunos/as alumnos/as respondieron cuatro en la igualdad □ = 4 + 3 o siete en la igualdad 7 = 7 + □.
2) Insertar la suma de dos de los números dados en el lugar del término desconocido, independientemente de la posición de éste. Por ejemplo, respondiendo ocho en la igualdad 7 = □ + 1 o setenta y dos en la igualdad 67 = 5 + □.
3) Insertar la diferencia de dos de los números dados en el lugar del término desconocido. Por ejemplo, respondiendo cinco en la igualdad □ = 45 + 50.

En el caso de las igualdades de la forma $a + b = c + d$, las respuestas incorrectas encontradas fueron:

1) Insertar la suma de todos los términos. Por ejemplo, dando como respuesta nueve en la igualdad $2 + \square = 2 + 5$.
2) Insertar la suma de dos de los términos. Por ejemplo, respondiendo ochenta y ocho en la igualdad $36 + 54 = 52 + \square$. Dicha respuesta correspondió en algunos casos a completar la igualdad $a + b = c$ (siendo a, b o c desconocido) ignorando el término d, o a completar la igualdad $b = c + d$ (siendo b, c o d desconocido) ignorando el término a.
3) Insertar la diferencia de dos de los términos. Por ejemplo, respondiendo dieciséis mil en la igualdad $36000 + 54000 = 52000 + \square$.
4) Repetir uno de los términos. Por ejemplo, algunos/as alumnos/as respondieron cuatro en la igualdad $2 + 4 = \square + 5$.

Las igualdades $a + b = d + \square$ y $c = a + \square$ ocasionaron importantes dificultades en todos los niveles. En Educación Infantil y tercer grado (tercero de Primaria) ocasionaron un mayor número de dificultades las igualdades $\square = a + b$ y $a + b = \square + d$, y en el caso de los grados tercer y sexto (tercero y sexto de Primaria) la igualdad $c = \square + b$.

Como resultado de este estudio, aquellas igualdades que permitieron distinguir mayormente entre unos/as alumnos/as y otros/as son propuestas para constituir parte de un instrumento de evaluación del pensamiento algebraico de los estudiantes. En orden de importancia se sugieren las siguientes igualdades para un test apto para los diferentes niveles de la Educación infantil: $a + b = c + \square$, $a + b = \square + d$, $c = a + \square$, $\square = a + b$ y $a = \square + b$.

Un resultado adicional aportado por este estudio es la comparación de los resultados en la igualdad $8 + 4 = \square + 5$ con los obtenidos por Falkner, Levi y Carpenter (1999). En este caso un mayor número de alumnos/as resolvió esta igualdad correctamente como se observa en la tabla 2. Ambos grupos de alumnos/as eran comparables en el sentido de que no habían recibido ningún tipo de formación específica que promoviera el desarrollo del pensamiento algebraico, aunque el grupo de Freiman y Lee participaba en un programa de enriquecimiento matemático por lo que recibían clases de matemáticas de dicho programa varias horas a la semana.

Falkner, Levi y Carpenter (1999)		Freiman y Lee (2004)	
Curso[10]	**% respuestas correctas**	**Curso**[11]	**% respuestas correctas**
Grados 1 y 2	5	Infantil	3
Grados 3 y 4	9	Grado 3	77
Grados 5 y 6	2	Grado 6	86

Tabla 2: Freiman y Lee (2004).

Según diversos estudios, en cursos superiores se siguen detectando dificultades en la comprensión del signo igual. Estudiantes de Universidad estudiados por Mevarech y Yitschak (1983, citado por Kieran, 1992) mostraron una inadecuada comprensión del significado del signo igual pese a ser capaces de resolver ecuaciones sencillas de una sola variable. Similarmente Byers y Herscovich (1977, citado por Kieran 1981) observaron que alumnos/as de álgebra (de Educación Secundaria) empleaban el signo igual incorrectamente como un símbolo separador, en vez de cómo representación de una equivalencia entre las expresiones a ambos lados, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$2x + 3 = 5 + x$$
$$2x + 3 – 3 = 5 + x$$
$$2x = 5 + x – x -3$$
$$2x - x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

Considerando las numerosas dificultades que los/as alumnos/as presentan en la comprensión del signo igual puede cuestionarse si su origen radica en una inadecuada comprensión del concepto de igualdad entre cantidades. Sin embargo, estudios de investigación (Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Schliemann, Carraher, Brizuela y Jones, 1998; Schifter, Monk, Russell y Bastable, documento no publicado) han demostrado que la mayoría de los/as alumnos/as de Educación Infantil y primeros años de Primaria presentan una correcta comprensión del concepto de igualdad cuando consideran relaciones de igualdad en experiencias físicas de modelización o

[10] El grado n se corresponde con el n-ésimo curso de Educación Infantil (n = 1, 2, 3, 4, 5 y 6).

en problemas verbales. Las dificultades en la comprensión del signo igual parecen ser resultado de una limitada interpretación de dicho signo.

Un ejemplo puede observarse en la situación presentada por Schifter, Monk, Russell y Bastable (documento no publicado) de un grupo de alumnos/as de segundo grado (segundo de Primaria) razonado sobre pares de números que dan lugar a la misma suma. En este ejemplo los/as alumnos/as reconocen la igualdad de expresiones tales como 13 + 23 y 23 + 13 por ser en ambos casos la suma cuarenta y seis, pero sin embargo no consideran cierta la expresión 13 + 23 = 23 + 13 debido a la ausencia de una respuesta expresada en esta igualdad.

Incluso sin la presencia del signo igual, las secuencias de números y signos operacionales son interpretadas por alumnos/as de Educación Elemental (Primaria) como estímulos para llevar acabo una acción (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980), e incluyen el signo igual cuando encuentran este tipo de expresiones, por ejemplo modifican 3 + 5 escribiendo 3 + 5 = (Freiman y Lee, 2004).

Otros estudios (Collis, 1974, 1975; Chaiklin y Lesgold, 1984; Cauzinille-Marmeche, Mathieu y Resnick, 1984; todos ellos citados por Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999) han observado que los/as alumnos/as no son capaces de resolver igualdades sin calcular la respuesta, debido a la falta de conocimientos sobre la estructura que subyace a las operaciones aritméticas y sus propiedades.

Investigaciones realizadas durante las últimas dos décadas sugieren que la enseñanza de la aritmética está orientada a la obtención de la respuesta correcta (Schliemann, Carraher, Brizuela y Jones, 1998; Kieran, 1989). Posteriormente en la enseñanza del álgebra se produce un cambio drástico en el significado de las operaciones y de la equivalencia, ocasionando a los/as alumnos/as numerosas dificultades. Las operaciones pasan a describir relaciones entre elementos (cantidades o variables) en vez de acciones, y el signo igual requiere su interpretación más amplia. No es, hasta entonces, cuando las relaciones matemáticas son consideradas objeto de estudio.

La frecuente tendencia a interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación, y la creencia de que el signo igual debe ir seguido por la respuesta a la operación indicada en el lado izquierdo, puede pasar inadvertida durante el aprendizaje de la aritmética ocasionando posteriormente importantes dificultades en el aprendizaje del álgebra. Comprender la relación expresada por el signo igual es esencial en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones y en general en la comprensión de igualdades.

2.8.1 ¿Por qué los/as alumnos/as tienden a desarrollar concepciones erróneas sobre el significado del signo igual?

La mayoría de los estudios referidos anteriormente aluden como principal causa de la limitada comprensión del signo igual que muestran los/as alumnos/as a la reiterada consideración de igualdades únicamente de la forma $a \pm b = c$ a lo largo del aprendizaje de la aritmética (Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Saenz-Ludlow y Walgamuth, 1998). Sin embargo existen pocas investigaciones sobre por qué los/as alumnos tienden a considerar el signo igual como un símbolo operacional en vez de relacional (Sisofo, 2000). Sisofo aborda esta cuestión destacando como posibles causas el uso de la calculadora, limitaciones cognitivas o la instrucción escolar.

- *<u>El uso de la calculadora</u>*

En muchas calculadoras una tecla con el signo igual es empleada para "dar la orden" del cálculo de la respuesta. Por este motivo una posible explicación a por qué los/as alumnos/as interpretan el signo igual como un comando para hacer una operación, es que desarrollan esta noción por su uso de la calculadora. Sin embargo, diversos estudios (Weaver, 1972; Sisofo, 2000) han aportado evidencias en contra de este supuesto.

Weaver (1972, citado por Sisofo, 2000) observó que un grupo de alumnos/as tenían grandes dificultades en la resolución de igualdades de la forma $\square = a \pm b$ incluso antes de que comenzaran a usar calculadoras en el colegio.

Más recientemente Sisofo (2000) realizó un estudio con cuarenta y cinco alumnos/as de primer y segundo grado (Primero y Segundo de Primaria) de un colegio en el cual no se usan calculadoras hasta sexto grado (Sexto de Primaria). En dicho estudio Sisofo presentó a los/as alumnos/as cuatro cuestiones: la 1 y 3 de la forma $a + b = \square$ y la 2 y 4 de la forma $\square = a + b$. Además, las cuestiones 1 y 2 fueron formuladas oralmente refiriendo a un contexto específico, mientras que la 3 y la 4 fueron formuladas oralmente y por escrito, de forma puramente simbólica. Un ochenta por ciento de estos/as alumnos/as presentaron problemas únicamente al resolver la cuestión 4, observándose que su dificultad con los problemas de la forma □ = a + b era debida al uso del simbolismo y a la forma de la igualdad. Estas observaciones sugieren que el uso de la calculadora no es la causa de las dificultades en la comprensión del signo igual.

- *Limitaciones cognitivas*

Sisofo (2000) plantea como otra posible causa de la limitada compresión del signo igual de los estudiantes, una limitación cognitiva debida a la edad y al desarrollo de los/as alumnos/as. Según Collis (1974), y Kieran (1981), ambos citados por Sisofo (2000), los trece años es la edad a partir de la cual los/as alumnos/as son capaces de emplear el signo igual como un símbolo relacional y usar ecuaciones flexiblemente.

A este respecto cabe destacar un estudio de Denmark, Barco y Voran (1976, citado por Sisofo, 2000) en el que analizaron como alumnos/as de primer grado interpretaban el signo igual después de haber realizado diversas actividades con una balanza. En dicho estudio observaron que los/as alumnos/as tendían primeramente a interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación, pero habían desarrollado un concepto más relacional, concluyendo los autores que tanto la instrucción como limitaciones cognitivas determinan la concepción del signo igual de los estudiantes.

Por otra parte, Baroody y Ginsburg (1983, citado por Sisofo, 2000) implementaron un currículo que promovía una concepción relacional del signo igual y analizaron los efectos de dicha instrucción en relación a la comprensión del signo igual en un grupo de alumnos/as de primero, segundo y tercer grado (primero, segundo, y tercero de Primaria). En dicho estudio concluyeron de forma similar a Denmark, Barco y Voran (1976) que la instrucción puede promover una concepción relacional del signo igual, pero que el desarrollo cognitivo limita la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as.

En relación a estos estudios Sisofo (2000) cuestiona si las limitaciones cognitivas a las que se alude son la causa de las dificultades observadas, dudando de que el desarrollo de la concepción relacional del signo igual que promueven dichos currículos fuera suficientemente explícito o estuviera demasiado ligado al cómputo de operaciones. Sisofo (2000) propone como alternativa el currículo de Davydov el cual desarrolla explícitamente una concepción relacional del signo igual sin emplear (ni introducir) el cómputo de operaciones, sino apoyándose en el razonamiento "protocuantitativo" sobre la comparación de cantidades físicas no cuantificadas (Morris, 1999).

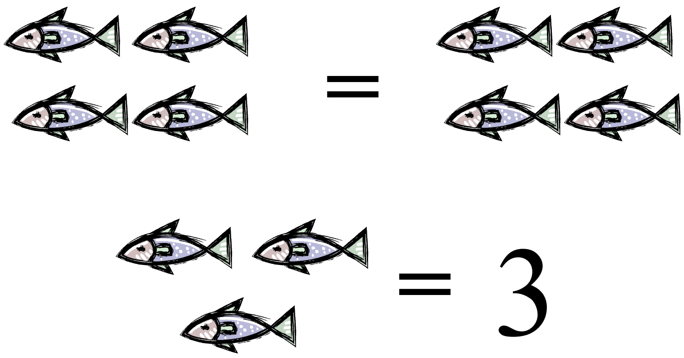
Aunque pueda existir dicha limitación cognitiva, otros estudios (Carpenter, Franke, y Levi, 2003; Carpenter y Levi, Octubre 2000) muestran que éste no es el único factor en la comprensión del signo igual, ni el más determinante, y que con una adecuada instrucción alumnos/as de incluso primer grado puede desarrollar una correcta comprensión del signo igual. Concretamente Carpenter y Levi (Octubre 2000) llevaron acabo un estudio en el que un grupo de alumnos/as de primer y segundo grado (primero y segundo de Primaria) adquirieron una correcta concepción relacional del signo igual pese a encontrar inicialmente numerosas dificultades, y siendo necesario que la maestra variara habitualmente la forma de las igualdades que presentaba a sus alumnos/as para evitar la debilitación de su comprensión del signo igual.

- <u>*La instrucción escolar*</u>

La mayoría de los estudios realizados sobre la comprensión del signo igual aluden a la instrucción escolar como principal causa de las dificultades observadas (Carpenter, Franke, y Levi, 2003; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980), concretamente a la reiterada consideración de igualdades de la forma $a \pm b = c$.

Diversas investigaciones (Denmark, Barco, y Voran, 1976; Baroody y Ginsburg, 1983; Carpenter, Franke, y Levi, 2003; Carpenter y Levi, Octubre 2000) apoyan esta afirmación mostrando que la instrucción juega un papel determinante en el desarrollo de la comprensión del signo igual, y documentado casos concretos en las que con una instrucción especifica alumnos/as de diversas edades han desarrollado una adecuada comprensión del signo igual.

Dentro de la instrucción relativa al significado del signo igual, además del uso repetitivo de igualdades de la forma $a \pm b = c$ a lo largo de la formación aritmética de los/as alumnos/as, Carpenter, Franke y Levi (2003) refieren a un uso incorrecto del signo igual que puede ocasionar a los/as alumnos/as el desarrollo de concepciones erróneas sobre dicho símbolo. Dicho uso incorrecto se refiere a la utilización del signo igual como abreviación de una relación de correspondencia o igualdad en cierto sentido entre figuras y números; uso que no corresponde al significado matemático de este símbolo. Este es el caso de los siguientes ejemplos:



Todo uso del signo igual como representación de relaciones que no correspondan a igualdades entre números debería ser evitado con el objetivo de impedir que los/as alumnos/as adquieran desde un principio concepciones erróneas sobre el significado del signo igual (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo describimos la metodología de la investigación que como Arnal, Del Rincón y Latorre (1992) exponen se refiere al conjunto de procedimientos utilizados para alcanzar los propósitos planteados en un estudio, en definitiva el plan general de trabajo. Para ello presentamos primeramente el diseño de "investigación dirigida por una conjetura" de Confrey y Lachance (2000), al cual se asemeja nuestro diseño de investigación. Posteriormente se definen los sujetos, las condiciones del estudio, y el diseño general de las intervenciones realizadas en el aula.

3.1 Investigación dirigida por una conjetura

El diseño de este trabajo es semejante al diseño de investigación dirigida por una conjetura de Confrey y Lachance (2000). Dicho diseño de investigación está especialmente orientado a la realización de estudios de investigación que se desarrollen en el aula. Como su nombre indica se basa en una conjetura, es decir, en "una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes" (pp. 234-235).

En este diseño de investigación no existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía en el proceso de investigación, existiendo, además, objetivos o preguntas de investigación a las que se pretenden dar respuesta. Investigaciones guiadas por una conjetura persiguen revisar y elaborar la conjetura mientras la investigación está en proceso y habitualmente van dirigidas a investigar nuevas estrategias de instrucción en el aula o analizar diferentes enfoques para el contenido y pedagogía de un conjunto de conceptos matemáticos. Por este motivo la conjetura debe componerse de una dimensión de contenido matemático (¿Qué debe enseñarse?) y una dimensión pedagógica (¿Cómo debe enseñarse?) (Confrey y Lachance, 2000).

Los elementos de instrucción de la intervención (el currículo, el método de enseñanza, el papel del profesor y los métodos de evaluación) son elaborados de acuerdo con la conjetura, y al ser el proceso de investigación en si mismo una experiencia de enseñanza en el aula, la investigación provee información sobre la aplicabilidad de los resultados a la práctica escolar.

Recogida de datos. En este diseño de investigación Confrey y Lachance (2000) recomiendan llevar a cabo una recogida de datos exhaustiva que permita capturar con detalle las interacciones ocurridas en el aula, siendo necesaria la realización de evaluaciones individuales para poder valorar el aprendizaje y evolución de los/as alumnos/as. Además, se requiere la recogida de información sobre el pensamiento de los investigadores y las decisiones tomadas a lo largo del proceso de investigación, para poder describir la evolución de la conjetura.

Análisis de datos. Dos tipos de análisis de datos son necesarios en este diseño de investigación: un análisis preliminar y continuo, y un análisis final. El primero de ellos se refiere al análisis de los datos después de cada intervención. Este análisis conduce a la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones, y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura de investigación. El análisis final es el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución de los/as alumnos/as a lo largo de la intervención.

Una construcción detallada del proceso de investigación en la que se justifiquen las decisiones tomadas es indispensable para que pueda llevarse acabo una adecuada valoración del trabajo de investigación realizado con este diseño y pueda garantizarse su calidad.

3.2 Diseño de la investigación y recogida de datos

La conjetura de esta investigación. La conjetura que guía este proceso de investigación es que los/as alumnos/as de educación elemental (Primaria), y concretamente de tercer grado (tercero de Primaria), encuentran numerosas dificultades en la comprensión del signo igual y como consecuencia en la resolución de igualdades numéricas, y mediante la consideración y discusión de igualdades de variadas formas pueden desarrollar una adecuada comprensión del signo igual.

Además, en este contexto pueden desarrollar su pensamiento relacional como estrategia para la resolución de igualdades numéricas.

Igualdades numéricas. Partiendo del conocimiento aportado por la revisión bibliográfica anteriormente expuesta decidimos utilizar igualdades numéricas abiertas (con un término a averiguar) e igualdades numéricas verdaderas y falsas para evaluar la comprensión del signo igual, fomentar la discusión en el aula, desafiar las concepciones erróneas de los estudiantes sobre el signo igual y promover el desarrollo de pensamiento relacional.

Se consideraron igualdades de acción y de no-acción. Como se ha explicado previamente en el apartado 2.9, en este trabajo distinguimos entre igualdades de acción o no-acción de forma similar a como lo hacen Behr, Erlwanger y Nichols (1980). Denominamos igualdades de no-acción a aquellas igualdades que no incluyen ningún signo operacional (+, - , ×, ÷) (Ej. 3 = 30), o que incluyen signos operacionales en ambos lados de la igualdad (Ej. 3 + 5 = 7 + 1). Por otra parte las igualdades de acción son aquellas que incluyen signos operacionales y éstos aparecen en tan sólo un miembro de la igualdad (Ej. 13 - 7 = 6).

En cada una de las intervenciones en el aula se emplearon una determinada colección de igualdades que fueron elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior y considerando las sugerencias dadas por Carpenter, Franke y Levi (2003). En algunos de los casos consideramos igualdades que habían sido propuestas por los/as alumnos/as en intervenciones previas.

Pensamiento relacional. En las intervenciones realizadas en el aula nos centramos primeramente en detectar las concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual y promover la comprensión de este símbolo a lo largo de las sucesivas actividades. Siendo posteriormente cuando se intenta promover el desarrollo de pensamiento relacional.

Esta secuenciación no implica que para el desarrollo de pensamiento relacional sea, o consideremos, necesaria previamente una adecuada comprensión del signo igual, pues como se ha comentado en el apartado 2.6.2 el pensamiento relacional puede ponerse en juego en una amplia diversidad de actividades aritméticas. El orden aquí considerado fue consecuencia de una elección: dar prioridad al estudio de la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as.

Organización y distribución de las sesiones. La recogida de datos en el aula tuvo lugar durante un total de cinco sesiones de variable duración (de 10 a 50 minutos), realizadas en días diferentes y durante el horario escolar. La primera sesión tuvo lugar dos meses y medio antes de la segunda. La segunda, tercera y cuarta sesión se realizaron con quince días de separación entre ellas, y dos meses después de la cuarta sesión se desarrolló la quinta sesión (Ver tabla 3 para conocer la organización y distribución de las sesiones).

Sesiones	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Día	20-11-2003	5-2-2004	19-2-2004	4-3-2004	13-5-2004
Número de alumnos/as en clase	13	15	18	18	15
Actividades realizadas en cada sesión	- prueba escrita de evaluación -entrevista a dos alumnos/as - breve discusión	- actividad escrita - discusión - actividad escrita - breve discusión	- discusión - prueba escrita de evaluación	- discusión	- prueba escrita de evaluación
Igualdades numéricas empleadas	Igualdades numéricas abiertas	Igualdades numéricas verdaderas y falsas	Igualdades numéricas abiertas y verdaderas y falsas	Igualdades numéricas verdaderas y falsas	Igualdades numéricas abiertas

Tabla 3: Organización y distribución de las sesiones

La primera de las sesiones iba dirigida a detectar las diferentes concepciones del signo igual que manifestaban inicialmente los alumnos/as al considerar igualdades numéricas, abordándose así en parte el primer objetivo de esta investigación. En las sucesivas intervenciones se siguieron analizando las concepciones que mostraban los/as alumnos/as sobre el signo igual y se abordaron los demás objetivos de investigación:

_ Diseñar actividades que ayuden a los/as alumnos/as a desarrollar su comprensión del signo igual y que fomenten la emergencia y uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas.

_ Analizar la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos, a partir del estudio de sus concepciones.

_ Analizar la emergencia y desarrollo del pensamiento relacional durante el trabajo con igualdades numéricas.

Los resultados de las sesiones previas fueron considerados para el diseño de las sucesivas intervenciones las cuales pretendían dar un paso más en el desarrollo de la comprensión del signo igual y el pensamiento relacional, realizándose un seguimiento a veces global y otras individual como recomiendan Confrey y Lachance (2000).

Actividades. Como se observa en la tabla 3 se llevaron acabo discusiones y actividades escritas. Además, se realizaron entrevistas a dos alumnos/as.

Las actividades escritas fueron siempre resultas individualmente, usándose un lápiz y los folios que las investigadoras distribuyeron, de los cuales se muestran versiones traducidas en el anexo A.

Durante las discusiones participaron mayoritariamente aquellos/as alumnos/as que levantaron la mano para hablar, aunque algunas preguntas fueron planteadas globalmente a toda la clase la cual respondió oralmente o realizando con las manos un gesto de afirmación o de negación. Dichos gestos eran utilizados habitualmente en el aula con el objetivo de evitar el exceso de ruido por contestaciones en voz alta.

El diseño de las actividades aparece detallado a continuación en el apartado 3.5 donde se describen el diseño y el análisis de los resultados de las diferentes sesiones (ver en anexo A copias de los folios del alumno/a y de la investigadora, correspondientes a cada sesión).

Investigadores. En la recogida de datos participaron la doctora Rebecca Ambrose que dirigió la participación de los/as alumnos/as en las discusiones realizadas y la autora de este trabajo. Además, un alumno de doctorado de la Universidad de California, Davis, colaboró realizando las entrevistas y las grabaciones en video. Durante los meses previos a este estudio la doctora Rebecca Ambrose había asistido semanalmente a la clase como profesora invitada y había trabajado con los/as alumnos/as en actividades matemáticas diversas (no relacionadas con la comprensión del signo igual ni el uso de pensamiento relacional), por lo que los/as alumnos/as estaban familiarizados con su presencia en el aula, y con la ocasional visita de alumnos/as de la Universidad de California, Davis.

Durante las cinco sesiones en las que se desarrolló este estudio la profesora oficial estuvo presente en el aula pero no realizó ninguna intervención.

Recogida de datos. La primera, segunda y cuarta sesión fueron grabadas en video y durante la tercera sesión una de las investigadoras tomó notas de la discusión (ver Anexo B para leer las transcripciones de las intervenciones). Además, cada día se recogieron las hojas de actividades suministradas a los/as alumnos/as con sus respuestas.

El primer día se realizaron entrevistas a dos de los/as alumnos/as sobre la resolución de la actividad de dicha sesión. Estas entrevistas tuvieron lugar en el aula en una mesa y silla situadas al fondo del aula, mientras los/as demás alumnos/as finalizaban la actividad individualmente.

La recogida de datos referente al proceso de investigación consistió en la realización de anotaciones durante los diferentes encuentros realizados entre las investigadoras. En dichas anotaciones se recogieron las decisiones tomadas sobre el diseño de las diferentes intervenciones, junto con su justificación, y la opinión y pensamiento de las investigadoras a lo largo del transcurso de la investigación.

3.3 Sujetos del estudio

Los sujetos participantes en el estudio fueron una clase de veinte alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) de un colegio público de la ciudad de Sacramento (California), dieciocho de los cuales tenemos permiso para estudiar y mostrar su trabajo. La clase era étnica y lingüísticamente diversa. Cinco de los/as alumnos/as hablaban un segundo idioma y dos de ellos/as presentaban importantes dificultades en la comprensión del Inglés (idioma hablado en el aula). La proporción de géneros era aproximadamente equivalente.

Quince alumnos/as estuvieron presentes en la primera sesión (trece de los cuales forman parte de este estudio), diecisiete en la segunda (quince de los cuales forman parte de este estudio), veinte en la tercera y en la cuarta (dieciocho de los cuales forman parte de este estudio), y dieciséis en la quinta (quince de los cuales tenemos forman parte de este estudio).

Los/as alumnos/as no habían recibido previamente instrucción específica sobre el signo igual.

Pseudónimos. En este trabajo empleamos siglas para referir a cada uno de los estudiantes. Aquellos/as alumnos/as de los cuales no tenemos autorización para incluir como sujetos de nuestro estudio aparecen denotados con Ai, siendo i un número natural. Sólo se hace referencia a estos/as alumnos/as cuando se analizan los diálogos que tuvieron lugar en el aula.

Los investigadores son siempre denotados con la sigla I, no haciéndose distinción entre ellos.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se explica y justifica el diseño de cada una de las cinco sesiones de las que constó la recogida de datos en el aula, y se presentan los resultados parciales y finales del estudio.

4.1 Sesión 1ª: Igualdades abiertas

Quince alumnos/as participaron en esta tarea, trece forman parte de este estudio.

Actividades Sesión 1ª	Igualdades empleadas	Fecha
- prueba escrita de evaluación - entrevista a dos alumnos/as - breve discusión	Igualdades numéricas abiertas	20-11-2003

DISEÑO

Prueba escrita de evaluación. Para la primera sesión se elaboró una actividad compuesta de cinco igualdades de no-acción y una igualdad de acción, todas ellas abiertas, dirigida a determinar la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as y detectar posibles indicios del uso de pensamiento relacional (ver figura 1). Los/as alumnos/as debían resolver esta actividad individualmente encontrando el número que permitía completar cada igualdad. En aquellos casos en los que no estuvieran seguros de su respuesta les sugerimos que escribieran una señal de interrogación junto a la igualdad o a respuesta en cuestión.

Cualquier tipo de dificultad extra no relacionada con el signo igual fue evitada, por este motivo sólo se incluyeron operaciones sencillas de suma y resta que no supusieran dificultad de cálculo para alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria).

*Igualdades de no-acción***.** Para comparar nuestros resultados con los obtenidos por Falkner, Levi y Carpenter (1999), la igualdad considerada en dicho estudio fue incluida ($8 + 4 = \square + 5$). Además, se incluyó otra igualdad semejante con la operación resta en vez de suma (13 – 7 = □ - 6), y otras tres igualdades de no-acción, con la operación suma, construidas variando la posición de la cantidad a averiguar y considerando las cuatro posiciones posibles. La consideración de esta variada colección de igualdades nos permitiría detectar las diferentes concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual, y la influencia de la posición del término a averiguar en la resolución de las igualdades.

Todas las igualdades de no-acción, salvo una excepción, fueron construidas de manera que la diferencia entre dos de los términos, en lados opuestos del signo igual, era de tan sólo una unidad, lo que permitía resolver las igualdades comparando ambos miembros y deduciendo que una relación inversa debía existir entre los otros dos términos (ver figura 1). Esto podía facilitar la resolución de las igualdades si los/as alumnos/as establecían relaciones entre los términos a ambos lados del signo igual.

Igualdades de La sesión 1ª	**Construcción de las igualdades**
8 + 4 = □ + 5	a + b = □ + (b + 1)
□ = 25 – 12	□ = a – b
14 + □ = 13 + 4	a + □ = (a – 1) + b
12 + 7 = 7 + □	a + b = b + □
13 – 7 = □ - 6	a – b = □ - (b – 1)
□ + 4 = 5 + 7	□ + a = (a + 1) + b

Figura 1

Igualdad de acción. La única igualdad de no-acción incluida iba dirigida a detectar posibles dificultades de los estudiantes al encontrar expresiones de la forma c = a ± b, con la respuesta a la operación en el lado izquierdo en vez de en el derecho como es habitual en la mayoría de las actividades aritméticas escolares. Aunque Behr, Erlwanger y Nichols (1980) detectaron este tipo de dificultades, esperábamos un bajo índice de respuestas incorrectas en esta igualdad pues considerábamos que los/as alumnos/as podían escribir la respuesta a la operación en el único lugar posible: el recuadro.

Entrevistas. Mientras los/as alumnos/as resolvían la actividad escrita, un alumno y una alumna fueron entrevistados brevemente sobre cómo estaban resolviendo las distintas igualdades, con el objetivo de profundizar en su comprensión del signo igual y conocer las estrategias empleadas en la resolución de las igualdades.

Discusión. Finalmente se llevó acabo una breve discusión en el aula sobre las igualdades 7 + 3 = □ y 6 + □ = 20, y posteriormente sobre dos de las igualdades consideradas en la actividad escrita 8 + 4 = □ + 5 y 14 + □ = 13 + 4, para conocer las estrategias empleadas en la resolución de las igualdades y, además, profundizar y comenzar a desafiar las concepciones de los/as alumno/as sobre el signo igual.

RESULTADOS

- Prueba escrita de evaluación (ver respuestas en la tabla B1 del anexo B)

Análisis global de las respuestas. Ningún alumno/a resolvió correctamente más de una igualdad, observándose diferentes reacciones dependiendo de la forma de las igualdades (ver tablas 4 y 5).

Igualdades de no- acción. Las igualdades 8 + 4 = □ + 5, 13 – 7 = □ – 6 y □ + 4 = 5 + 7 provocaron mayoritariamente la interpretación de que el número a la derecha del signo igual es la respuesta a la operación expresada en el lado izquierdo del signo igual, siendo las respuestas más frecuentes a estas igualdades doce, seis y uno respectivamente. La reacción de la mayoría de los/as alumnos/as era ignorar el último término de la igualdad y resolver así una igualdad de la forma a ± b = c. En estas igualdades el ochenta y cinco por ciento de las respuestas fueron resultado de esta concepción errónea del signo igual y ningún/a alumno/a respondió correctamente. Esta concepción fue también observada en la igualdad 14 + □ = 13 + 4, donde un alumno dio por respuesta menos uno y otros/as cinco respondieron uno. Aquí inferimos que esos/as cinco alumnos/as estaban pensando en 14 – 1 = 13 en vez de 14 + 1. Estos/as alumnos/as aun no habían estudiado formalmente los números negativos. En lo sucesivo denominamos a esta concepción "a ± b = c" o "estímulo para una respuesta".

Analizando detenidamente las respuestas a las distintas igualdades, se identifican algunas otras respuestas que sugieren la interpretación del signo igual como un comando para realizar una operación, son aquellas recogidas en la tabla 4 como: “suma dos términos”, “resta dos términos” y “resuelve b = c + d”. Estas respuestas corresponden en algunos casos a dar el resultado de la operación completamente expresada en uno de los miembros de la igualdad. Por ejemplo, un alumno respondió cinco en la igualdad 12 + 7 = 7 + □, lo cual da respuesta a la igualdad 12 = 7 + □, y tres en la igualdad □ + 4 = 5 + 7, respondiendo a la igualdad □ + 4 = 7. En otros casos los/as alumnos/as combinaron cualesquiera dos números de la igualdad independientemente de su posición. Por ejemplo, un alumno respondió dos en la igualdad □ + 4 = 5 + 7, posiblemente como resultado de restar siete y cinco.

Una de las respuestas dada en la igualdad 13 – 7 = □ - 6 correspondió a la repetición de uno de los términos (7).

Igualdades de no-acción de la Sesión 1ª	**Respuesta correcta**	**Suma todos los términos**	**Resuelve a + b = c**	**Resuelve B = c + d**	**Resta dos términos**	**Suma dos términos**	**No clasificable**
8 + 4 = □ + 5	0	0	13	0	0	0	0
14 + □ = 13 + 4	2	1	6 (1, -1)	2	0	0	2 (0,7)
12 + 7 = 7 + □	3	3	0	1	1 (5)	0	5 (6, 7, 3)
13 – 7 = □ - 6	0	0	11	0	0	0	2 (3,7)
□ + 4 = 5 + 7	0	0	9	0	3 (2, 3)	1 (12)	0

Tabla 4: Número de alumnos/as que dieron las distintas respuestas a las igualdades de no-acción de la actividad de la Sesión 1ª. Los números en paréntesis especifican las respuestas dadas por los/as alumnos/as en dichos casos. Se señala sombreado los casos correspondientes a la respuesta más frecuente en cada igualdad. **N = 13**

Una concepción errónea que presentó una menor ocurrencia y ha sido detectada en otros estudios (Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Freiman y Lee, 2004) es cuando los/as alumnos/as combinan todos los números de la igualdad para encontrar la solución. En cuatro ocasiones la respuesta dada fue el resultado de operar todos los números de la igualdad, concretamente en las igualdades 12 + 7 = 7 + □ y 14 +□ =13 + 4.

En estas dos igualdades se obtuvo una mayor gama de respuestas (ver tabla 4), lo cual inferimos ser resultado de la dificultad de aplicar la concepción “a ± b = c” en estas igualdades. Sólo tres alumnos/as respondieron correctamente la igualdad 12 + 7 = 7 + □, lo cual sugiere que la mayoría de los/as alumnos/as no estaban estableciendo comparaciones entre ambos miembros de la igualdad pues en esta igualdad la relación existente entre ambos miembros es más evidente. Estos tres estudiantes no mostraron indicios de estar usando pensamiento relacional en ninguna otra igualdad.

Igualdad de acción. En la igualdad □ = 25 - 12**,** tres de catorce estudiantes respondieron correctamente (ver tabla 5). Los/as alumnos/as dieron una amplia gama de respuestas, para muchas de las cuales no hemos podido desarrollar ninguna hipótesis, pudiendo ser en algún caso errores de cálculo (Ej. 17, 18). La respuesta veinticinco, que ha sido denominada por Freiman y Lee (2004) como "reflejar un número", fue dada por una alumna. Dicha respuesta puede ser resultado de la concepción del signo igual "a ± b = c", pues esta alumna presentó dicha concepción en todas las demás igualdades salvo en 12 + 7 = 7 + □.

Igualdades de acción de la Sesión 1ª	Respuesta correcta	Reflejar un número	Otras respuestas
□ = 25 – 12	3	1(25)	9 (5, 7, 17,18, 20, 35)

Tabla 5: Frecuencia de las respuestas a la igualdad de acción de la actividad del Día 1. Los números en paréntesis especifican las respuestas dadas por los/as alumnos/as en dichos casos. **N = 13**

Análisis de las concepciones de cada alumno/a. Analizando individualmente las respuestas de cada uno de los/as alumnos/as, se observa que once alumnos/as aplicaron en al menos tres de las igualdades de no-acción la concepción "a ± b = c", y además, tres de ellos/as resolvieron correctamente la igualdad □ = 25 – 12. Los/as otros/as dos alumno/as no mostraron una clara concepción del signo igual.

- entrevistas (Ver trascripción en el anexo C)

Las breves entrevistas realizadas a un alumno y una alumna confirman algunas de las conclusiones anteriormente comentadas.

Primera entrevista. Primeramente entrevistamos al alumno el cual verbalizó repetidamente una interpretación operacional del signo igual, concretamente la concepción "a ± b = c", entendiendo que el número a la derecha del signo igual era la respuesta a la operación expresada a la izquierda. Cuando intentaba resolver la igualdad 14 + □ = 13 + 4 explicó "Es difícil porque necesitas un menos… porque catorce menos uno es igual a trece”. Afirmó que se daba cuenta de que trece era una unidad menos que catorce, y entonces se le preguntó qué creía que debía poner en el recuadro para hacer verdadera dicha igualdad, a lo que respondió “Puedo poner menos uno”. En la igualdad 12 + 7 = 7 + □ respondió veintiséis explicando “doce más siete es igual a diecinueve y entonces pone igual a siete, y entonces hay un signo más de nuevo, pero si movemos este [7] aquí [a la izquierda del signo igual] va a ser doce más siete más siete”. En la igualdad □ + 4 = 5 + 7 este alumno respondió uno y explicó “conseguí una pista de la respuesta (señalando al cinco)” “porque dice más cuatro igual a cinco. Sólo cuatro más uno es cinco”. Cuando se le preguntó que pasaba con el siete explicó “Es un poco difícil para mi entender esto”.

Segunda entrevista. La alumna entrevistada respondió inicialmente doce a la igualdad 8 + 4 = □ + 5 y treinta y uno y veintiséis a las igualdades 14 + □ = 13 + 4 y 12 + 7 = 7 + □ respectivamente. Al preguntarle por el cinco en la primera igualdad explicó que se le había olvidado y cuando se le preguntó si creía que debía sumarlo a ocho y cuatro respondió afirmativamente.

- discusión (Ver trascripción en el anexo C)

Una vez los/as alumnos/as entregaron sus respuestas, comenzaron a discutirse varias igualdades. Previamente se discutieron las igualdades 7 + 3 = □ y 6 + □= 20 para que los/as alumnos comenzaran a intercambiar sus ideas, y posteriormente se consideraron dos de las igualdades de la actividad escrita: 8 + 4 = □ + 5 y 14 + □ = 13 + 4. La discusión sobre la igualdad 8 + 4 = □ + 5 sirvió para hacer explícito el pensamiento de los/as alumnos/as sobre el signo igual y desafiar sus concepciones.

Igualdad 8 + 4 = □ + 5. Primeramente todos los estudiantes estaban de acuerdo en que la respuesta era doce. Sin embargo, cuando se les indicó que un “matemático” no estaría de acuerdo con esta respuesta y se les hizo observar la presencia del cinco propusieron como respuesta diecisiete (suma de todos los términos de la igualdad). Al saber que esta respuesta no era correcta (“aun un matemático no estaría de acuerdo”) un estudiante sugirió modificar la igualdad escribiendo 5 + 8 + 4 = 17. Finalmente, cuando se les explicó que el signo igual se utiliza para indicar que las expresiones a ambos lados del signo igual son iguales, un alumno propuso la respuesta correcta, siete.

En esta discusión se refirió a la figura del matemático para presentar el significado del signo igual como una convención.

Igualdad 14* + □ *= 13 + 4. En la posterior discusión de la igualdad 14 + □ = 13 + 4 los/as alumnos/as no sugirieron inicialmente la respuesta correcta y fue necesario recordarles la interpretación correcta del signo igual. Pudimos observar que una explicación del uso del signo igual no era suficiente para que los/as alumnos/as adoptaran una concepción correcta de dicho símbolo. Un alumno verbalizó pensamiento relacional al explicar su respuesta 3: *"*Yo he mirado a este lado y… los han cambiado [...] el tres y el cuatro". Esta explicación fue la primera manifestación de uso de pensamiento relacional.

La breve discusión, junto con las entrevistas, permitió observar la confusión que experimentan los/as alumnos/as con estas igualdades y la significativa dificultad que supone para ellos/as entenderlas. En diversas ocasiones dijeron que esta actividad era muy difícil. El uso del signo igual en estas igualdades no era natural para los/as alumnos/as, los cuales no asimilaron simplemente con una explicación la relación de igualdad expresada por el signo igual. Cuando observaban la presencia de los cuatro términos, la única forma en la intentaban involucrarlos era sumando juntos todos los términos. Un alumno preguntó específicamente por qué el signo igual estaba en el medio.

Conclusiones del la Sesión 1ª. En esta sesión se observó que los/as alumnos/as tendían a interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación e intentaron aplicar dicha concepción siempre que les era posible para dar respuesta a las distintas igualdades. Si era posible entendían que el número situado tras el signo igual era la respuesta a la operación expresada en el lado izquierdo del signo igual (concepción "a ± b = c").

Cuando la forma de las igualdades causó que los/as alumnos/as intentaran involucrar todos los términos de la igualdad, recurrieron a operarlos todos juntos.

Algunas de las reacciones detectadas en la actividad escrita (Ej. dar como respuesta el resultado de la operación completamente expresada en alguno de los miembros de la igualdad) parece ser resultado de la necesidad de tener que dar una respuesta. Los/as alumnos/as mostraron una fuerte tendencia a operar y obtener una respuesta. Leían las igualdades de izquierda a derecha y cuando veían una operación procedían rápidamente a su cálculo, y completaban el recuadro con dicho resultado incluso antes de mirar al lado derecho del signo igual, pasando entonces a resolver la siguiente igualdad.

Ninguno/a de los/as alumnos/as reconoció consistentemente la necesidad de equivalencia entre ambos miembros de las igualdades. Además, el tipo de errores encontrados, los comentarios de los/as alumnos/as, y las numerosas respuestas dadas a la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$ sugieren que los/as alumnos/as no usaron pensamiento relacional para resolver las igualdades, salvo la excepción de un alumno en la discusión final.

4.2 Sesión 2ª: Igualdades verdaderas y falsas e igualdades de los estudiantes

Diecisiete alumnos/as participaron en esta tarea, quince forman parte de este estudio.

Actividades de la Sesión 2ª	Igualdades empleadas	Fecha
- actividad escrita - discusión - actividad escrita - breve discusión	Igualdades numéricas verdaderas y falsas	5-2-2004 (dos meses y medio después de la sesión 1ª)

DISEÑO

Actividad escrita. Dos meses después se llevo acabo la segunda sesión. Para este día se diseñó una actividad individual escrita en la cual los/as alumnos/as debían indicar si una serie de igualdades eran verdaderas o falsas y escribir versiones correctas para aquellas que eran falsas (ver figura 2). Al igual que en la Sesión 1ª se diseñaron igualdades de formas variadas ($a = a$, $c = a + b$, $a + b + c = d + e$ y $a + b = c + d$), en este caso con el objetivo de desafiar las concepciones erróneas de los/as alumnos/as detectadas en la Sesión 1ª, y, además, comenzar a negociar la comprensión del signo igual. Algunas de estas igualdades podían resolverse fácilmente usando pensamiento relacional en vez de realizando las operaciones. Las igualdades $3 = 3$ y $7 = 12$ fueron especialmente incluidas para desafiar la tendencia de los/as alumnos/as a interpretar el signo igual como un estímulo para dar una respuesta y ayudarles a desarrollar una concepción adecuada.

Igualdades Sesión 2ª
$3 = 3$
$7 = 12$
$10 = 4 + 6$
$2 + 2 + 2 = 3 + 3$
$34 = 34 + 12$
$99 + 4 = 4 + 9$
$37 + 14 = 38 + 13$

Figura 2

Los <u>objetivos concretos de esta actividad</u> eran:

- Analizar la estabilidad de las concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual,
- Observar si los/as alumnos/as manifestaban las mismas dificultades detectadas en la actividad de la Sesión 1ª,
- Ver si los/as alumnos/as reemplazaban los números para corregir las igualdades o adaptaban las igualdades a la forma $a \pm b = c$,
- Detectar indicios del uso de pensamiento relacional.

Además, las igualdades escritas por los/as alumnos/as como correcciones a las igualdades falsas ayudarían a detectar sus concepciones. Para clarificar en que consistía la actividad se resolvieron primeramente dos ejemplos en la pizarra: las igualdades 12 + 7 = 13 y 2 + 2 = 4.

¿Por qué igualdades verdaderas y falsas? Se consideraron igualdades verdaderas y falsas con el objetivo de desafiar la fuerte tendencia computacional de los/as alumnos/as. Como se ha comentado anteriormente, una de las dificultades observadas para ayudar a los/as alumnos/as a desarrollar su concepción del signo igual era su fuerte inclinación al cálculo, lo cual puede ser consecuencia del hecho de que la mayor parte de la aritmética elemental está orientada a encontrar la respuesta correcta (Kieran, 1989) o de la necesidad de tener que rellenar el recuadro con una respuesta. Cuando los/as alumnos/as veían una operación procedían a realizarla incluso antes de mirar al lado derecho del signo igual. El uso de igualdades verdaderas y falsas favorecería que los/as alumnos/as consideraran toda la igualdad a la vez que ayudaría a desafiar sus concepciones del signo igual.

Discusión. Una vez los/as alumnos/as resolvieron la actividad escrita y ésta fue recogida, se inició una discusión sobre las igualdades consideradas en esta actividad. El principal objetivo de esta discusión era iniciar la negociación de la comprensión del signo igual y ver si era posible comenzar a potenciar el uso o desarrollo de pensamiento relacional.

Actividad escrita. Finalmente, se les propuso a los estudiantes escribir igualdades verdaderas de las formas:

_ + _ = _ + _   _ - _ = _ - _   _ + _ = _ - _

para estimular y evaluar la comprensión del signo igual después de la discusión anterior.

Breve discusión final. Cuando cada alumno/a había escrito al menos cuatro o cinco igualdades se discutieron brevemente algunas de ellas con toda la clase, eligiéndose especialmente aquellas que pudieran favorecer el uso de pensamiento relacional en su resolución.

RESULTADOS

- actividad escrita (ver respuestas en la tabla B2 del anexo B)

Análisis de las concepciones de cada alumno/a. Analizando las respuestas a las igualdades verdaderas y falsas se observa que tres de los/as quince alumnos/as respondieron correctamente a la mayoría de las igualdades, presentando dificultades sólo en las igualdades de la forma a = a. Estos/as alumnos/as recordaban la discusión de la Sesión 1ª. Diez alumnos/as mostraron la concepción errónea del signo igual que hemos denotado como "a ± b = c", y seis de ellos/as mostraron la aceptación de igualdades de la forma "c = a ± b" resolviendo correctamente la igualdad 10 = 4 + 6. Los/as otros dos alumnos/as no mostraron una clara concepción del signo igual.

Análisis global de las respuestas. La tabla 6 muestra el número de respuestas correctas e incorrectas correspondiente a cada una de las igualdades.

Igualdades de la Sesión 2ª	**Número de alumnos/as que respondieron** Verdadero	Falso	?
3 = 3	5	9	1
7 = 12	2	10	3
10 = 4 + 6	9	5	1
2 + 2 + 2 = 3 + 3	5	9	1
34 = 34 + 12	2	11	2
99 + 4 = 4 + 9	3	8	4
37 + 14 = 38 + 13	5	6	4

Tabla 6: Número de alumnos/as que dieron las distintas respuestas a las igualdades verdaderas y falsas de la Sesión 2ª. El número de alumnos/as que respondieron correctamente a cada una de las igualdades aparece sombreado. **N =15**

Con respecto a las igualdades escritas por los/as alumnos/as para corregir las igualdades que consideraban falsas, se observa que todas fueron de la forma a ± b ±… ± c = d, salvo las escritas por dos de los/as alumnos/as que resolvieron correctamente la mayoría de las igualdades. Estos dos estudiantes mostraron su más desarrollada concepción del signo igual generando las igualdades 34 = 34 y 6 + 7 = 4 + 9.

Como se observa en la tabla 6 nueve alumnos/as consideraron falsa la igualdad 3 = 3. Estos/as alumnos/as corrigieron la igualdad para que expresara una operación escribiendo: 3 + 0 = 3, 0 + 3 = 3 y 3 + 3 = 6. En el caso de la igualdad 10 = 4 + 6 las correcciones fueron en su mayoría las igualdades 4 + 6 = 10 ó 6 + 4 = 10 mostrando una fuerte rigidez en la comprensión del signo igual de dichos/as alumnos/as.

El uso erróneo del signo igual para expresar una cadena de operaciones que ha sido observado en niños y adultos por Carpenter, Franke y Levi (1999), Kieran (1981) y Ma (1999), tuvo lugar en las correcciones de la igualdad 37 + 14 = 38 + 13 donde una alumna escribió 37 + 14 = 51 + 16 = 77, aplicando aquí la concepción del signo igual "estímulo para una respuesta"

- discusión (Ver trascripción en el anexo C)

Antes de iniciar la discusión de las igualdades se les preguntó a los/as alumnos/as por el significado del signo igual y se les recordó que "los dos lados tienen que ser lo mismo". Una alumna explicó "es como si tienes una balanza y tienes que poner la misma cantidad de ambos en cada lado para que sea igual". Estas verbalizaciones ocasionaron que los estudiantes sugirieran en la discusión respuestas diferentes a las dadas previamente por escrito. La discusión permitió seguir negociando la comprensión del signo igual mediante el intercambio de opiniones de los/as alumnos/as y las diferentes formas sugeridas para corregir las igualdades.

Por ejemplo, discutiendo la igualdad 2 + 2 + 2 = 3 + 3 una alumna dijo que era cierta y explicó "es cierta porque dos más dos más dos es igual a seis y también lo es tres más tres". Otros/as alumnos/as explicaron que creían que era falsa: "pensé que debía ser dos más tres igual a cinco" y "pensé que era falsa porque el signo igual está en el medio". Cuando se les preguntó dónde les gustaba ver el signo igual explicaron que al final.

Otras de las justificaciones aportadas durante esta discusión fueron "[7 = 12] es falsa porque no son números iguales" y "[10 = 4 + 6] es verdadera porque ambos son lo mismo". Esta discusión permitió observar como se esforzaban los/as alumnos/as por entender las distintas igualdades. Se oyeron comentarios tales como "¡ohhh!" y "¡quieren engañarte!".

En esta discusión se abordaron diversas ideas concepciones de los/as alumnos/as como el pensar que las igualdades de la forma c = a ± b son falsas por estar al revés o sus dificultades con la presencia del signo igual en mitad de la igualdad.

Las igualdades de la forma a = a causaron una especial confusión. Durante la actividad escrita sólo cinco de los/as alumnos/as aceptaron como cierta la igualdad 3 = 3, y durante la discusión los/as alumnos afirmaron inicialmente que 7 = 12 era verdadera. Tras la discusión de ambas igualdades un alumno preguntó "¿Y si fuera seis igual a doce?". Dicho alumno había razonado correctamente un minuto antes la resolución de la igualdad 2 + □ = 3 + 4, por lo que entendía que el signo igual expresa una igualdad entre las expresiones a ambos lados de dicho signo, pero tenia dificultades en entender las igualdades que no incluían operaciones.

Pensamiento relacional. Durante esta discusión un alumno explicó "34= 34 + 12 es falsa porque treinta y cuatro más doce va a ser más que treinta y cuatro". Este alumno justificó la falsedad de la igualdad sin recurrir a realizar las operaciones, comparando las cantidades 34 y 34 +12. Esta explicación muestra claramente el uso de pensamiento relacional. Desafortunadamente no tuvieron lugar más verbalizaciones de este tipo.

- actividad escrita (ver resultados en la tabla B3 del anexo B)

Con respecto a la última actividad de esta sesión, todos salvo dos de los/as alumnos/as fueron capaces de escribir igualdades verdaderas de la forma a + b = c + d, a - b = c -d ó a + b = c - d, aunque cuatro de ellos requirieron cierta orientación inicial debido a que estaban escribiendo igualdades de la forma a ± b = c. Los/as dos alumnos/as que no realizaron con éxito esta actividad mostraron falta de comprensión del signo igual. Uno de ellos sólo admitía igualdades de la forma a ± b = c. La otra alumna se había incorporado recientemente a este colegio, y además de tener grandes dificultades para comprender el idioma hablado en el aula, mostró tener falta de habilidades para realizar sumas y restas con números menores que diez y para calcular la cantidad desconocida en situaciones tales como a +□ = b, a - □ = b ó □ - a = b.

La notación empleada (_ + _ = _ + _) puede ser confusa para aquellos/as alumnos/as que interpreten la línea como una variable y asuman que el mismo número debe ser considerado en cada espacio. Esto no supuso ningún problema en este caso. Esta actividad ayudó a los/as alumnos/as a clarificar y consolidar su comprensión del signo igual. Los/as alumnos/as podían generar igualdades de mayor o menor dificultad según su elección. La mayoría escribieron varias igualdades con dos números y una operación en cada lado, no sólo resta o multiplicación sino también división y multiplicación (ver figuras 3 y 4). Muchos/as de los/as alumnos/as escribieron igualdades con expresiones iguales a ambos lados del signo igual como en 10 + 0 = 10 + 0 ó 12 + 12 = 12 + 12.

En algunos casos como en la figura 4, los/as alumnos/as multiplicaron o dividieron por uno, o en otros casos sumaron cero. Ésta era una forma fácil de generar igualdades que muestra su conocimiento de la propiedad identidad.

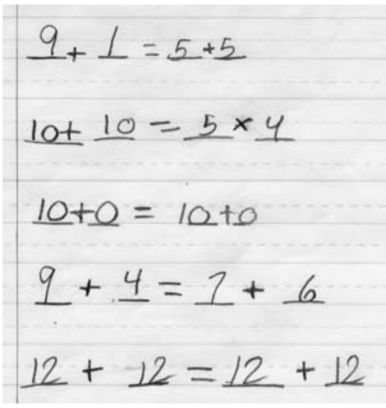


Figura 3

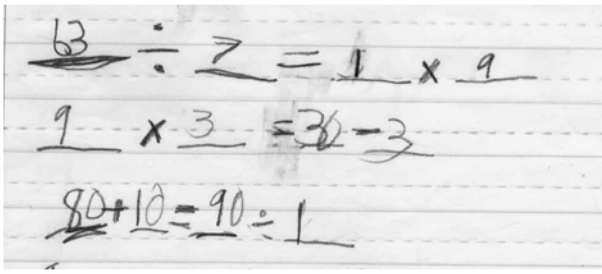


Figura 4

Una alumna generó una igualdad larga (figura 5) en la que descompuso noventa en varios sumandos. En su segunda igualdad implícitamente uso la propiedad conmutativa y asociativa, esencialmente haciendo 201 + 300 = (200 + 1) + 300 = (200 + 300) + 1 = 500 + 1. En estas dos igualdades la alumna descompuso los sumandos de ambos lados del signo igual de modos diferentes dando indicios del uso de pensamiento relacional.

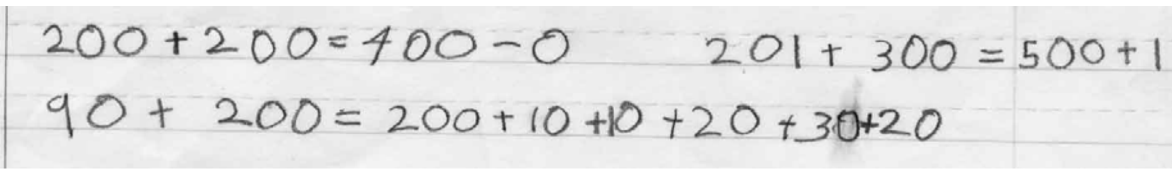


Figura 5

Otros/as alumnos/as también escribieron igualdades que sugieren el uso de pensamiento relacional. Algunas igualdades fueron de la forma a + b = (a – 1) + (b + 1) como en 51 + 51 = 50 + 52. Una alumna escribió igualdades con la operación resta de la forma a - b = (a + 1) – (b + 1) (ver figura 6). Aunque estas igualdades parecen indicar el uso de pensamiento relacional, los/as alumnos/as no lo verbalizaron cuando se les cuestionó sobre como había construido las igualdades. La discusión de las igualdades que muestra la figura 6 podría promover una mayor comprensión de las propiedades de la resta.

Un alumno mostró cierta tendencia a escribir la respuesta a la operación en la mitad de las igualdades (separando ambos lados) (ver figura 7), lo cual también se observó en las igualdades construidas por una alumna en la primera actividad escrita de esta sesión (37 + 14 = 51 = 51 = 38 + 13, 2 x 3 = 6 = 3 + 3 y 4 + 6 = 10 = 10). Este comportamiento parece indicar la necesidad de que la respuesta esté expresada en la ecuación, y puede ser un paso intermedio entre la forma más familiar a ± b = c y la menos familiar a ± b = c ± d.

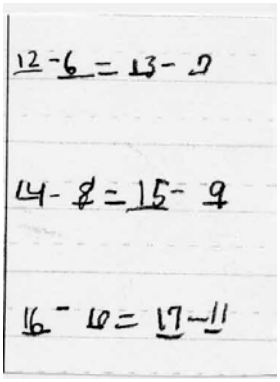


Figura 6

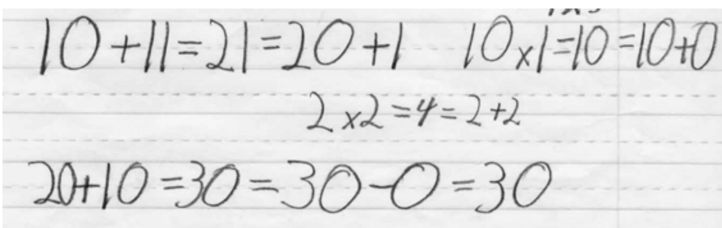


Figura 7

<u>- breve discusión final</u> (Ver trascripción en el anexo C)

Al final de la clase se discutieron algunas de estas igualdades en la pizarra. Se eligieron algunas igualdades que podían favorecer el uso de pensamiento relacional, tales como 8 + 8 = 9 + 7 y 18 – 12 = 19 – 13, sin embargo, ningún/a alumno/a justificó las igualdades refiriendo a relaciones entre los dos términos sino a cálculos concretos. Varios/as alumnos/as justificaron la veracidad de las igualdades 11 + 1 = 7 + 5, 18 – 12 = 19 – 13, 8 + 8 = 9 + 7 y 3 x 4 = 2 x 6 explicando que las operaciones en ambos lados del signo igual daban lugar al mismo resultado.

Los estudiantes que participaron en esta breve discusión mostrando una correcta comprensión del signo igual. Los resultados de la actividad previa (construcción de igualdades con cuatro términos) habían mostrado que trece de los/as quince alumnos/as sabían usar el signo igual correctamente cuando se les pedía expresamente. Este avance se había producido tras la discusión de las igualdades verdaderas y falsas y los esfuerzos individuales de los/as alumnos/as por construir igualdades verdaderas.

Conclusiones de la Sesión 2ª. En esta sesión aprendimos que las concepciones erróneas sobre el signo igual no se remedian simplemente explicando la correcta interpretación o uso del signo igual. Esto no es sorprendente debido a la repetida exposición que los/as alumnos/as tienen a igualdades de la forma $a \pm b = \square$. Sin embargo, considerábamos que el señalar sus concepciones erróneas podía ser suficiente para que los/as alumnos/as aceptaran una concepción más amplia del signo igual. Claramente no lo fue. Los/as alumnos/as necesitan oportunidades para desarrollar su propia comprensión del signo igual.

En esta sesión se llevaron acabo dos actividades que consideramos decisivas en el avance detectado en la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as. Dichas actividades son la discusión de las igualdades verdaderas y falsas y la construcción de igualdades de la forma _ ± _ = _ ± _. Tras los intentos individuales de los/as alumnos/as por entender las igualdades de la Sesión 1ª y la actividad escrita de la Sesión 2ª, la discusión permitió aclarar las dudas que los/as alumno/as estaban experimentando y negociar la comprensión del signo igual considerando igualdades de variadas formas. Finalmente la actividad de construcción de igualdades verdaderas permitió a los/as alumnos/as poner en juego e ir interiorizando una concepción más amplia del signo igual.

Además, esta última actividad mostró el potencial del uso de igualdades numéricas en la enseñanza de la aritmética. Las igualdades de los/as alumno/as aportaron importante información sobre sus conocimientos aritméticos, pudiendo haberse empleado en el aula para hacer explícitas y discutir propiedades de las operaciones y promover el desarrollo del sentido numérico de los/as alumnos/as.

Con respecto al desarrollo del pensamiento relacional no se observaron importantes avances. La explicación de un alumno mostró la emergencia de forma natural de este pensamiento, sin embargo, la mayoría de nuestras acciones estuvieron dirigidas al desarrollo de la comprensión del signo igual.

4.3 Sesión 3ª: Discusión y evaluación

Veinte alumnos/as participaron en esta tarea, dieciocho forman parte de nuestro estudio.

Actividades de la Sesión 3ª	Igualdades empleadas	Fecha
- discusión - prueba escrita de evaluación	Igualdades numéricas verdaderas y falsas	19-2-2004 (quince días después de la sesión 2ª)

DISEÑO

Esta tarea consistió en una discusión sobre varias igualdades verdaderas o falsas y una posterior actividad individual de evaluación (ver figuras 8 y 9).

Discusión. Según los resultados de la tarea anterior la mayoría de los/as alumnos/as sabía usar el signo igual correctamente cuando se les pedía explícitamente. En esta situación una discusión con toda la clase sería beneficiosa para todos los estudiantes: algunos podrían consolidar su comprensión del signo igual, y los que aún tenían dificultades podrían mejorar su comprensión del signo igual escuchando a sus compañeros/as y discutiendo sobre nuevas igualdades. Además, se consideró que debido a la mayor comprensión del signo igual mostrada por los/as alumnos/as, varios de ellos/as podían verbalizar el uso de pensamiento relacional o algunas afirmaciones generales tales como "cuando sumas dos números no importa si cambias el orden". Por este motivo se consideraron igualdades que pudieran favorecer la emergencia de pensamiento relacional en la discusión. Para ello se incluyeron algunas de las igualdades escritas por los/as alumnos/as en la Sesión 2ª pues podrían favorecer la verbalización de su pensamiento.

Sesión 3ª **Igualdades para la discusión**
20 + 20 = 20 + 20
10 x 10 =100 = 90+10
7 + 15 = 100 + 100
12 + 11 = 11 + 12
15 + 2 = 15 + 3
3 x 5 = 15 ÷ 1
6 – 6 = 1 – 1
10 – 7 = 10 – 4
51 + 51 = 50 + 52
5 + 1 = 7 – 1
3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11

Figura 8

La igualdad 3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11 fue considerada con el objetivo de discutir este uso incorrecto del signo igual para representar una cadena de operaciones, el cual había sido observado en la sesión 2ª. Además, incluimos la igualdad 10 x 10 =100 = 90 + 10 para motivar la discusión sobre la necesidad, que habían manifestado algunos/as alumnos/as, de escribir la respuesta en mitad de la igualdad.

Actividad de evaluación. Finalmente se realizó una actividad de evaluación (ver figura 9) dirigida a evaluar la comprensión de los/as alumnos/as en este momento. En esta actividad se incluyeron igualdades de todas las formas discutidas en clase (a = a, c = a ± b, a ± b = c ± d, a ± b = c + d + e). La resolución de esta variada selección de igualdades requería una correcta comprensión del signo igual. Además, se les pidió a los/as alumnos/as que generaran una igualdad verdadera con el objetivo de analizar qué uso hacían del signo igual cuando no se les daban indicaciones concretas.

Actividad de evaluación de la Sesión 3ª

1. Rellena los espacios con el número que hace cierta la igualdad

   5 + 1 = □ + 2

   4 + □ = 2 + 2 + 2

   □ + 0 = 30 – 10

2. Decide si las igualdades son verdaderas o falsas.

9 = 5 + 4	V	F
3 + 7 = 10 + 6	V	F
8 = 8	V	F

3. Escribe una igualdad que sea verdadera.

Figura 9

RESULTADOS

- discusión (Ver trascripción en el anexo C)

A diferencia de la sesión anterior, durante esta discusión la mayoría de las correcciones sugeridas por los/as alumnos/as no eran de la forma a ± b = c (Ej. 7 + 193 = 100 + 100, 10 – 7 = 7 - 4, 15 + 3 = 15 + 3). Esto mostró un importante avance en la comprensión de los/as alumnos/as pues no sólo eran capaces de evaluar las igualdades correctamente sino que, además, usaban el signo igual en su más amplia interpretación sin que se les fuera requerido expresamente.

Pensamiento relacional. Durante la discusión los/as alumnos/as verbalizaron en diversas ocasiones el uso de pensamiento relacional. En algunas de las igualdades se les preguntó específicamente si podían resolver las igualdades sin hacer cálculos (“sin hacer la aritmética”) con el objetivo de fomentar este tipo de verbalizaciones.

En la igualdad 20 + 20 = 20 + 20, explicaron “es verdadera porque son los mismos números”, y “no hace falta escribir la respuesta”. Un alumno dijo “es falsa porque el signo igual está en el medio”. Debido a este comentario se le preguntó a la clase si era correcto escribir el signo igual en el medio, a lo que contestaron afirmativamente. Este comentario nos recordó que algunos/as alumnos/as aun no habían desarrollado una comprensión adecuada del signo igual.

En la igualdad 7 + 15 = 100 + 100, todos los/as alumnos/as respondieron que era falsa, explicando: “es falsa porque siete más quince es pequeño y cien más cien es doscientos”, “es falsa porque siete más quince es igual a veintidós y cien más cien es igual a doscientos”, “siete más quince no es ni siquiera cien”. Los/as alumnos/as también dieron muestran de sus inicios en el uso de pensamiento relacional en otras igualdades: “[51 + 51 = 50 + 52] es verdadera porque si tomas uno de cincuenta y uno al otro cincuenta y uno obtienes cincuenta más cincuenta y dos”, y “[15 + 2 = 15 + 3] es falsa porque tres es más grande que dos”. Estas explicaciones reflejaron el tipo de pensamiento que se pretendía fomentar.

En la discusión de la igualdad 12 + 11 = 11 + 12 los estudiantes explicaron: “Es verdadera porque tiene los mismos números: El doce está delante y después detrás, y el once está detrás y después delante” y “Es verdadera porque han cambiado de orden los números”. Los/as alumnos/as no realizaron ningún tipo de cálculo sino que observaron la igualdad en su totalidad y compararon las expresiones a ambos lados del signo igual. Este era uno de los objetivos perseguidos con el uso de igualdades verdaderas y falsas: romper la fuerte tendencia computacional de los/as alumnos/as y forzar la consideración de todos los términos de la igualdad. Sin embargo, no exploramos más extensamente esta verbalización de la propiedad conmutativa por lo que no sabemos si los/as alumnos/as eran conscientes de que sólo es aplicable en el caso de la suma o similarmente afirmarían que 34 – 15 = 15 – 34 es una igualdad verdadera.

Con respecto a la tendencia observada en dos de los estudiantes de escribir el resultado de la operación en el medio de la igualdad (como en 16 x 2 = 32 = 30 + 2), podemos señalar que no volvió a producirse este día en ninguno de los estudiantes. Uno de los alumnos que había mostrado anteriormente esta tendencia justificó correctamente la falsedad de la igualdad 7 + 15 = 100 + 100 y la veracidad de la igualdad 3 x 5 = 15 ÷ 1, y, además, propuso la igualdad 15 + 3 = 15 + 3 como corrección a 15 + 2 = 15 + 3.

Discusión de la última igualdad. La discusión de la igualdad 3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11 fue especialmente interesante pues se intentó poner a prueba la comprensión de los/as alumnos/as. Esta discusión es mostrada a continuación[11]:

I escribe la igualdad en la pizarra y la lee.

I: ¿Qué pensáis de esta igualdad?, ¿Es verdadera o falsa?

CL: Creo que es falsa porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once

I: ¿No es eso lo que dice ahí?

I lee la igualdad de nuevo y pregunta a aquellos/as alumnos/as que levantan la mano, escuchándose las siguientes intervenciones

A2: Tres más tres más tres no es igual a once

AL: Yo creo que es verdadera

HR: Yo creo que es falsa porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once

CH: Es falsa porque el signo igual está en el medio y tres más tres más tres es nueve y nueve más dos es igual a once

HY: Es falsa. Todas las partes deberían ser nueve

MG: No estoy segura… es en parte verdad y también parece falsa

DH: Es cierta porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once

Como había distintas opiniones se explicó que "un matemático" diría que es falsa porque tres más tres más tres no es igual a nueve más dos. Se les explicó que cuando los matemáticos quieren indicar una cadena de operaciones usan flechas como en 3 + 3 + 3 →9 + 2 → 11.

[11] I denota a la investigadora y las demás siglas corresponden a alumnos/as.

A pesar de los intentos de confundir a los estudiantes, la comprensión del signo igual de algunos de ellos era suficientemente firme como para mantener su opinión sobre la falsedad de la igualdad y defenderla a lo largo de la discusión. Después de esta discusión un alumno concluyó (pidiendo confirmación): "Si tienen la misma respuesta es verdadera pero si tienen diferente respuesta es falsa".

Esta breve discusión mostró las dificultades que los/as alumnos/as encuentran en la comprensión del signo igual y especialmente con este uso incorrecto del signo igual.

- actividad escrita de evaluación (ver respuestas en la tabla B4 del anexo B)

Análisis de las concepciones de cada alumno/a. En la evaluación final doce de los/as dieciocho alumnos/as resolvieron al menos cinco de las seis igualdades correctamente, de lo cual puede concluirse que habían adquirido una adecuada comprensión del signo igual. Tres alumnos/as continuaron dando respuestas resultado de la concepción del signo igual denotada "a ± b = c" y además aceptaron igualdades de la forma c = a ± b. Otros/as tres alumnos/as no resolvieron correctamente la actividad ni mostraron ninguna clara concepción del signo igual en sus respuestas. Dos de estos/as alumnos/as no habían estado presentes en el aula en la Sesión 2ª. Como resultado de esta discusión y la discusión y actividad de la Sesión 2ª, nueve alumnos/as más parecían haber avanzado en su comprensión del signo igual.

Sorprendentemente un alumno no resolvió adecuadamente esta actividad pese a haber razonado correctamente durante la discusión previa. Este alumno respondió seis en la igualdad 5 + 1 = □ + 2 y treinta en □ + 0 = 30 – 10. Además, escribió 55 = 5 x 11 = 2 + 9 = 3 x 3 = 2 + 2 = 1 + 1, después de haber explicado correctamente minutos antes que la igualdad 3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11 era falsa porque "tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once".

Análisis global de las respuestas. En la tabla 7 se muestran los errores que tuvieron lugar en esta actividad. Como se observa en la tabla fueron las igualdades □ + 0 = 30 – 10 y 5 + 1 =□ + 2 las que presentaron un mayor número de respuestas incorrectas. Se observaron repuestas erróneas similares a las detectadas en la Sesión 1ª como la suma de dos términos o de todos los términos, siendo la más frecuente la aplicación de la concepción denotada "a ± b = c".

Igualdades	Respuestas erróneas	Frecuencia de las respuestas erróneas	Naturaleza de las respuestas erróneas
5 + 1 = □ + 2	6 3 8 5	3 1 1 1	Concepción "a ± b = c" Posible error de cálculo o suma de dos términos Suma de todos los términos Repetir uno de los términos
4 + □ = 2 + 2 + 2	10 ?	1 1	Suma de todos los términos
□ + 0 = 30 – 10	10 40 30	2 3 3	Repetir uno de los términos Suma de dos términos Concepción "a ± b = c"
9 = 5 + 4	F	0	
3 + 7 = 10 + 6	V	3	Concepción "a ± b = c"
8 = 8	F	2	

Tabla 7: Respuestas incorrectas de la prueba escrita de evaluación de la Sesión 3ª. **N = 18.**

Respuestas a la última cuestión: "Escribe una igualdad que sea verdadera". Todos aquellos/as alumnos/as que mostraron haber construido una adecuada comprensión del signo igual (resolvieron al menos cinco igualdades correctamente) escribieron igualdades verdaderas correctas con dos términos a cada lado del signo igual tales como 2 x 10,000= 10,000 + 10,000, 9 x 2 = 9 + 9 y 3 + 1 = 6 – 2. El resto de los/as alumnos/as escribieron igualdades verdaderas correctas de la forma a + b = c, salvo dos alumnos/as que escribieron (incorrectamente) las igualdades 55 = 5 x 11= 2 + 9 = 3 x 3 = 2 + 2 = 1 + 1 y 30 + 40 = 70 + 10.

Conclusiones de la Sesión 3ª. En esta sesión pudimos observar un gran avance en la comprensión del signo igual de los/as alumnos/as y una importante emergencia de pensamiento relacional. En todas las igualdades hubo explicaciones basadas en el cálculo de las operaciones a ambos lados del signo igual, pero, además, en numerosas ocasiones se verbalizaron justificaciones basadas en pensamiento relacional.

Observamos que el uso incorrecto del signo igual para expresar una cadena de operaciones causó importantes dificultades a los/as alumno/as.

4.4 Sesión 4ª: Discusión

Veinte alumnos/as participaron en esta tarea, dieciocho forman parte de nuestro estudio.

Actividades de la Sesión 4ª	Igualdades empleadas	Fecha
- discusión	Igualdades numéricas verdaderas y falsas	4-3-2004 (quince días después de la sesión 3ª)

DISEÑO

Dos semanas después llevamos acabo una discusión para fomentar el uso de pensamiento relacional. Durante la Sesión 3ª la mayoría de los/as alumnos/as mostró haber construido una adecuada comprensión del signo igual lo cual podía favorecer la emergencia de pensamiento relacional.

En esta discusión se consideraron igualdades verdaderas y falsas que se discutieron una a una en la pizarra dando previamente tiempo a los/as alumnos/as para pensar en ellas individualmente (Ver figura 10).

Discusión de la Sesión 4ª

$37 + 23 = 142$

$27 + 48 - 48 = 27$

$34 + 28 = 30 + 20 + 4 + 8$

$76 = 50 - 14$

$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 4$

$20 + 15 = 20 + 10 + 5$

$103 + 205 = 105 + 203$

$12 - 7 = 13 - 8$

Figura 10

RESULTADOS (Ver trascripción de la discusión en el anexo C)

En esta discusión más alumnos/as verbalizaron pensamiento relacional. En todas las igualdades, salvo en 34 + 28 = 30 + 20 + 4 + 8, los/as alumnos/as dieron explicaciones basadas en pensamiento relacional tales como "[27 + 48 – 48 = 27] es cierto porque hay un más cuarenta y ocho y un menos cuarenta y ocho […] y eso va a ser cero", "[103 + 205 = 105 + 203 es verdadera] porque cinco más tres son ocho y hay dos ochos haciendo juego y entonces tenemos trescientos ocho y en el otro lado trescientos ocho", "han cambiado el cinco y el tres" y "[12 – 7 = 13 – 8] es cierto porque han sumado uno al siete y han sumado uno al doce".

En todas las igualdades los estudiantes también dieron explicaciones basadas en el cálculo de las operaciones a ambos lados del signo igual, mostrando que no estaban aplicando únicamente pensamiento relacional.

Las verbalizaciones de los/as alumnos/as fueron en ocasiones confusas. Los/as alumnos/as tenían mayor dificultad en comunicar su pensamiento cuando este se refería a relaciones entre los términos que cuando se refería a operaciones concretas. En estos casos la labor de la investigadora fue esencial motivando la clarificación de las explicaciones y "traduciéndolas" al resto de la clase.

Dificultades observadas. Durante esta discusión sólo hubo dos comentarios (de un mismo alumno) que mostraron la existencia de concepciones erróneas sobre el signo igual. Un alumno dijo que 76 = 50 – 14 era falsa porque "setenta no es igual que cincuenta" y afirmó que 4 x 5 = 5 + 5 + 5 + 4 era falsa "porque cuatro veces cinco es veinte más cinco es veinticinco....". De las sesiones anteriores sabíamos que este alumno tendía a considerar el signo igual como un estímulo para dar una respuesta y durante las discusiones no parecía darse cuenta de una interpretación más amplia del signo igual. Dicha concepción es la que parece estar aplicando en estas igualdades.

¿Qué diría un matemático? Una alumna preguntó expresamente que diría un matemático con respecto una igualdad, aun después de haber sido justificada su veracidad por dos de los/as alumnos/as. Esta cuestión hizo manifiesta una necesidad que no se había observado hasta el momento y es la necesidad de una autoridad. Idealmente la solidez y coherencia del conocimiento matemático debe ser suficiente en si misma para establecer la validez o no de un razonamiento. Nuestro objetivo era que los/as alumnos/as desarrollaran su comprensión mediante la discusión en el aula. Estos/as alumnos/as están acostumbrados a que la autoridad en la clase sea la maestra y en este caso dicha autoridad había sido trasferida a la figura de un matemático pero seguía siendo necesaria para esta alumna. La introducción de la interpretación del signo igual refiriendo a la figura del matemático parecía haber creado un obstáculo, lo cual nos hace cuestionarnos sobre formas alternativas de introducir el significado del signo igual.

Conclusiones de la Sesión 4ª. En esta sesión observamos como el uso de pensamiento relacional llegó a ser frecuente en este grupo de alumnos/as, siendo en ocasiones espontáneas este tipo de explicaciones y en otras motivadas por preguntas tales como si podían resolverlo sin hacer la aritmética, o sin sumar.

4.5 Sesión 5ª: Evaluación

Dieciséis alumnos/as participaron en esta tarea, quince forman parte de nuestro estudio.

Actividades de la Sesión 5ª	Igualdades empleadas	Fecha
- prueba escrita de evaluación	Igualdades numéricas abiertas	13-5-2004 (dos meses después de la sesión 4ª)

DISEÑO

Para determinar la durabilidad de la comprensión del signo igual mostrada por los/as alumnos/as, dos meses después se realizó una prueba escrita similar a la considerada en la primera sesión pero con números ligeramente diferentes (Ver figura 11). Se incluyó una igualdad extra (238 + 49 = □ + 40 + 9) en la que se les pedía a los/as alumnos/as que explicaran como la habían resuelto. Esta igualdad podría favorecer la aplicación de pensamiento relacional ya que, al involucrar números más grandes, los cálculos eran más complejos y por eso los/as alumnos/as podían ser más reacios a operar y así percibir más fácilmente la relación existente entre cuarenta y nueve y cuarenta más nueve.

Igualdades de la Sesión 5ª

9 + 3 = □ + 4

□ = 16 – 5

8 + □ = 7 + 3

10 + 4 = 4 + □

15 - 5 = □ - 6

□+ 5 = 6 + 8

238 + 49 = □ + 40 + 9

Figura 11

RESULTADOS (ver respuestas en la tabla B5 y B6 del anexo B)

Análisis de las concepciones de cada alumno/a. Doce de los/as quince alumnos/as resolvieron correctamente al menos cinco de las siete igualdades lo cual interpretamos como que habían construido una adecuada comprensión del signo igual. Otros/as dos alumnos/as presentaron la concepción del signo igual “a ± b = c” mostrando, además, la aceptación de igualdades de la forma c = a ± b. El otro alumno no resolvió la actividad correctamente ni mostró claramente su concepción del signo igual.

Análisis global de las respuestas. Las igualdades que presentaron un mayor número de respuestas incorrectas fueron □ = 16 – 5, 15 - 5 = □ – 6 y 238 + 49 = □ + 40 + 9 con seis, siete y cinco repuestas erróneas respectivamente. En el caso de la igualdad □ = 16 – 5 la mayoría de dichas respuestas parecen ser debidas a errores de cálculo mientras que en la igualdad 15 - 5 = □ - 6 tres de ellas son resultado de la concepción denotada "a ± b = c" y otras dos son el resultado de operar juntos todos los términos de la igualdad. En total, salvo cinco respuestas erróneas que no han sido clasificadas el resto de las respuestas erróneas encontradas correspondieron a la suma o resta de dos de los términos de la igualdad, posibles errores de cálculo, o aplicación de la concepción del signo igual "a ± b = c".

Respuestas a la última igualdad. (Ver tabla B6 en anexo B) Con respecto a la última igualdad tres de los/as alumnos/as no tuvieron tiempo para realizarla. Siete de los/as quince alumnos/as resolvieron correctamente esta actividad y cuatro de ellos/as dieron explicaciones claras que mostraron pensamiento relacional: "Me di cuenta de que el número era 49 y 40 + 9 = 49 por eso sume 238", "Pensé en el cuarenta y en el nueve y pensé el cero no contaba y por eso es cuarenta y nueve y es igual", "Porque 40 + 9 = 49 entonces tú sumas 238 y entonces da la misma respuesta", y "Dividí el 49 por la mitad en 40 y 9. No sume 238 y 49".

El resto de los estudiantes que resolvieron correctamente esta igualdad aportaron explicaciones difíciles de interpretar. Por ejemplo, una alumna explicó "el modo en el que encontré la respuesta fue haciéndolo de la otra forma". Asumimos que estos/as alumnos/as resolvieron la igualdad mediante pensamiento relacional pues no restaron y no podemos imaginar otra forma en la que podían haberlo resuelto.

Conclusiones de la Sesión 5ª. En esta última sesión evaluamos la comprensión del signo igual de los alumnos/as tras las cuatro sesiones previas, observando que sólo tres de los/as quince alumnos/as no resolvieron correctamente la mayoría de las igualdades. Además, casi la mitad de los/as quince alumnos que estuvieron presentes dicho día en el aula emplearon pensamiento relacional en al menos la resolución de una de las igualdades.

4.6 Análisis final de la investigación

A continuación analizamos la evolución de los/as alumnos/as a lo largo de las cinco sesiones en las que consistió nuestra recogida de datos e intervención en el aula, con relación a dos aspectos: la comprensión del signo igual y el desarrollo o uso de pensamiento relacional.

Evolución de las concepciones de los/as alumno/as sobre el signo igual

Concepciones sobre el signo igual		**Sesión 1ª** **N = 13**	**Sesión 2ª** **N = 15**	**Sesión 3ª** **N = 18**	**Sesión 5ª** **Prueba Final** **N = 15**
Estímulo para una respuesta	a ± b = c	8	5	0	0
Expresión de una acción	a ± b = c y c = a ± b	3	6	3	2
Significado del signo igual	a ± b = c y c = a ± b y a ± b = c ± d	0	3	12	12
Sin clasificar		2	1	3	1

Tabla 8: Evolución de los/as alumnos/as a lo largo de las cinco sesiones.

La tabla 8 muestra la evolución de las concepciones de los/as alumnos/as sobre el signo igual a lo largo de las diferentes sesiones[12]. Para analizar esta evolución hemos distinguido tres etapas:

- *Estímulo para una respuesta:* concepción también denotada a ± b = c, que se refiere a la interpretación del signo igual como un comando para dar una respuesta.
- *Expresión de una acción*: cuando el estudiante sólo acepta y resuelve correctamente igualdades de las formas a ± b = c y c = a ± b, aplicando en ocasiones la interpretación del signo igual como un estímulo para dar una respuesta. En este caso el alumno/a sólo acepta el uso del signo igual en igualdades de acción.

[12] Ver tabla B7 en el anexo B para conocer los alumnos/as concretos a los que se refieren estas cifras.

- *Significado del signo igual:* cuando el/la alumno/a acepta y resuelve correctamente igualdades de todas las formas consideradas ($a \pm b = c$, $c = a \pm b$ y $a \pm b = c \pm d$), lo cual interpretamos como que el/la alumno/a comprende el significado del signo igual o equivalentemente decimos que ha construido una adecuada comprensión del signo igual.

Analizando la evolución de los/as alumnos/as de la Sesión 1ª a la Sesión 2ª se observa que en este periodo seis alumnos/as modificaron sus concepciones sobre signo igual. Una alumna retrocedió en su comprensión del signo igual: en la Sesión 1ª resolvió correctamente la igualdad $\square = 25 - 12$ y, en cambio, en la Sesión 2ª considero falsa la igualdad $10 = 4 + 6$. Los/as otros cinco alumnos/as avanzaron en la comprensión del signo igual. Tres de ellos/as mostraron haber construido una adecuada comprensión del signo igual al resolver correctamente la mayoría de las igualdades. Los otros/as dos mostraron la concepción denominada "expresión de una acción" al aceptar igualdades de la forma $c = a \pm b$.

Comparando el desarrollo de las sesiones 2ª y 3ª, nueve alumnos/as más mostraron haber construido una adecuada comprensión de signo igual, y un alumno mostró cierto avance aceptando igualdades de la forma $c = a \pm b$.

Analizando la evolución de la Sesión 3ª a la 5ª se observa que dos de los/as alumnos/as que razonaron correctamente durante las discusiones de las Sesiones 3ª y 4ª y resolvieron correctamente la prueba escrita de la Sesión 3ª, retrocedieron en su comprensión del signo igual mostrando la concepción denominada "expresión de una acción". Estos/as alumnos/as respondieron erróneamente a al menos cinco de las siete igualdades interpretando el signo igual como un estímulo para dar una respuesta. En cambio, otros/as tres alumnos/as resolvieron correctamente la mayoría de las igualdades en la Sesión 5ª habiendo mostrado en la Sesión 3ª la concepción "expresión de una acción", detectándose así un importante avance en el desarrollo de su comprensión del signo igual de la Sesión 3ª a la Sesión 5ª.

Evolución de los/as alumnos/as con respecto al uso de pensamiento relacional

Debido al tipo de recogida de datos realizada no podemos realizar una clasificación exhaustiva e individual del desarrollo de pensamiento relacional. Las evidencias que poseemos sobre el uso de pensamiento relacional corresponden a las verbalizaciones realizadas durante el desarrollo de las discusiones en el aula y a las respuestas de la última igualdad de la prueba escrita de evaluación de la Sesión 5ª (ver tabla B6 en el Anexo B). En total once de los/as dieciocho alumnos/as que participaron en este estudio dieron muestras orales o escritas de su uso de pensamiento relacional. Otros/as alumnos/as construyeron igualdades o resolvieron las actividades de forma que nos hacen sospechar que estaban empleando pensamiento relacional pero no llegaron a manifestarlo explícitamente.

CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan y discuten los principales hallazgos y conclusiones que se han alcanzado en este trabajo. Para ello se recoge la mayor parte de la información obtenida a lo largo de la consecución de los objetivos de investigación, comparándose los resultados de este estudio con las investigaciones previamente presentadas en el marco teórico.

Objetivos de investigación. El objetivo general de este trabajo era *"analizar el pensamiento matemático de los estudiantes puesto de manifiesto al intentar resolver igualdades numéricas".*

A primera vista puede pensarse que igualdades numéricas como las consideradas en este estudio pueden ser correctamente resueltas por la mayoría de los alumnos/as de tercer grado o niveles superiores (esto opinan algunos/as maestros/as según nuestra experiencia y según relatan Falkner, Levi y Carpenter (1999)). Sin embargo, diversos estudios, y entre ellos éste, confirman que esta creencia está lejos de la realidad y los estudiantes de todos los niveles presentan importantes y duraderas concepciones erróneas sobre el signo igual. Dificultades que radican en el uso del simbolismo y no en el concepto de igualdad.

Los/as alumnos/as de tercer grado (tercero de primaria) de este estudio presentaron inicialmente una fuerte tendencia a interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación, de forma semejante a como ha sido documentado en otros estudios (Saenz-Ludlow y Walgamuth, 1998; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Falkner, Karen, Levi, Linda y Carpenter, 1999 y 2003), siendo, en la mayoría de los casos, interpretado el número situado a la derecha del signo igual como la respuesta a las operaciones expresadas en el lado izquierdo de la igualdad.

Los/as alumnos/as tendieron a interpretar el signo igual como un símbolo operacional en vez de relacional, es decir, como un comando para hacer algo (generar una respuesta) y no como la representación de una relación de igualdad. La mayoría de sus respuestas fueron consecuencia de esta concepción del signo igual. No sabían inicialmente como interpretar las igualdades que no eran de la forma a ± b = c y por ello dieron respuestas resultado de combinar dos o varios de los términos de la igualdad o repetir uno de ellos.

Concepciones sobre el signo igual. El primer objetivo de este estudio era *"detectar diferentes concepciones del signo igual que manifiestan un grupo de alumnos/as de tercer grado (tercero de Primaria) al considerar igualdades numéricas".* Para ello han sido consideradas igualdades numéricas abiertas e igualdades numéricas verdaderas y falsas como es recomendado en la literatura. En este estudio hemos considerado concretamente igualdades de las formas a = a, a ± b = c, c = a ± b, a ± b = c ± d., y algunas otras con más de dos términos en uno de los miembros de la igualdad. A continuación destacamos algunas observaciones en relación a las distintas igualdades, contrastando nuestros resultados con los de los estudios presentados en el marco teórico:

- <u>Igualdades de la forma a = a</u>

Los estudios realizados sobre el signo igual aportan resultados muy diversos en relación a las dificultades que presentan los/as alumnos/as en este tipo de igualdades. Behr, Erlwanger y Nichols (1980) detectaron cierto rechazo ante estas igualdades. Sin embargo, en el estudio de Freiman y Lee (2004) este tipo de igualdad obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas, siendo únicamente los/as alumnos/as de Educación Infantil los que encontraron algunas dificultades (25 de los/as 33 alumnos/as respondieron correctamente).

En nuestro caso los/as alumnos/as encontraron importantes dificultades en este tipo de igualdades debido a que no contienen ningún signo operacional. Posteriormente, tras las diversas discusiones, estas igualdades fueron aceptadas por la mayoría de los/as alumnos/as aunque en pocas ocasiones fueron propuestas correcciones o igualdades de este tipo.

- Igualdades de la forma a ± b = c

En este estudio sólo hemos considerado igualdades de la forma a ± b = c en los ejemplos, por ser éste el tipo de igualdades que los alumnos/as encuentran más frecuentemente en las actividades matemáticas y, por lo tanto, ser habitualmente resultas sin presentarse dificultades relacionadas con el signo igual.

- Igualdades de la forma c = a ± b

Los sujetos de nuestro estudio encontraron inicialmente dificultades en este tipo de igualdades cuando c era desconocida (y en su lugar había un recuadro) y en menor medida cuando debían averiguar si la igualdad era verdadera o falsa. Cuando se consideraron igualdades verdaderas y falsas a lo largo de la negociación de la interpretación y uso del signo igual, este tipo de igualdad fue más fácilmente aceptado por los/as alumnos/as que las otras igualdades, manifestándose como un primer paso en la construcción de una adecuada comprensión del signo igual. Consideramos que esto es debido a que este tipo de igualdad es compatible con la interpretación operacional del signo igual como un comando para realizar una operación.

Estos resultados confirman las dificultades observadas en otros estudios en relación a igualdades de la forma c = a ± b, contrario a nuestras expectativas iniciales.

- Igualdades de la forma a ± b = c ± d.

En este tipo de igualdades los/as alumnos/as encontraron numerosas dificultades, dando respuestas erróneas similares a las detectadas por Freiman y Lee (2004) y Falkner, Levi y Carpenter (1999). La mayoría de los alumnos/as modificó dichas igualdades escribiendo las operaciones en el lado izquierdo de la igualdad y la respuesta en el lado derecho.

Como posible paso previo a la aceptación de igualdades de este tipo, dos alumnos/as mostraron cierta tendencia a escribir el valor de cada miembro en mitad de la igualdad dando lugar a expresiones de la forma a ± b = e = c ± d.

Este tipo de igualdades fue especialmente empleado en este estudio para negociar la interpretación del signo igual y desafiar las concepciones de los alumnos/as.

Las actividades empleadas. Nuestro segundo objetivo de investigación era "*diseñar actividades que ayuden a los/as alumnos/as a desarrollar su comprensión del signo igual y que fomenten la emergencia y uso de pensamiento relacional en la* *resolución de igualdades numéricas".* Partiendo del conocimiento aportado por la revisión bibliográfica expuesta en el capítulo 2 decidimos utilizar igualdades numéricas abiertas e igualdades numéricas verdaderas y falsas para evaluar la comprensión del signo igual, fomentar la discusión en el aula, desafiar las concepciones erróneas de los estudiantes sobre el signo igual y promover el desarrollo de pensamiento relacional.

Observando los resultados, podemos afirmar que en este caso las igualdades numéricas han probado ser un contexto eficaz en el cual ayudar a los estudiantes a verbalizar su concepción del signo igual y desarrollar su comprensión de este símbolo. Además, han ayudado a fomentar un pensamiento más flexible sobre las operaciones mediante el establecimiento de relaciones entre ambos miembros de la igualdad, aunque en este caso serian necesarias más intervenciones para involucrar a todos los estudiantes.

Fue especialmente interesante pedir a los/as alumnos/as que escribieran sus propias igualdades para conseguir más información sobre como estaban pensando y poder evaluar su comprensión más acertadamente. Además, observamos que dicha actividades les ayudó a clarificar y consolidar su comprensión del signo igual.

Se observó que los/as alumnos/as pueden en ocasiones resolver igualdades dadas (no abiertas) correctamente pero presentar dificultades en el uso del signo igual (lo cual puede detectarse pidiéndoles que construyan igualdades).

Instrumento de evaluación del pensamiento algebraico de los/as alumnos/as. Freiman y Lee (2004) han clasificado una serie de igualdades numéricas abiertas con el objetivo de construir un instrumento que permita evaluar el pensamiento algebraico de los/as alumnos/as. Según dicho estudio las igualdades numéricas que aportan una mayor información sobre el pensamiento de los/as alumnos/as y su evolución en el tiempo son, por orden, $a + b = c + \square$, $a + b = \square + d$, $c = a + \square$, $\square = a + b$ y $a = \square + b$.

En nuestro estudio sólo se utilizaron igualdades abiertas en las sesiones 1ª y 5ª. Dichas igualdades fueron de la forma: $a + b = \square + (b + 1)$, $\square = a – b$, $a + \square = (a – 1) + b$, $a + b = b + \square$, $a – b = \square - (b – 1)$ y $\square + a = (a + 1) + b$. Las igualdades que presentaron más dificultades fueron aquellas con el término desconocido en la tercera posición ($a + b = \square + (b + 1)$ y $a – b = \square - (b – 1)$), obteniéndose un mayor número de respuestas incorrectas cuando incluían la operación resta en vez de la suma

Evolución en la comprensión del signo igual. El tercer objetivo de este trabajo era *"analizar la evolución de la comprensión del signo igual de los alumnos, a partir del estudio de sus concepciones*". En este estudio hemos distinguido tres etapas en la evolución de las concepciones de los/as alumnos/as a las cuales hemos referido como

- *Estímulo para una respuesta:* concepción anteriormente denotada a ± b = c, que se refiere a la interpretación del signo igual como un comando para dar una respuesta.
- *Expresión de una acción*: cuando el estudiante sólo aceptaban y resolvía correctamente igualdades de las formas a ± b = c y c = a ± b, aplicando en ocasiones la interpretación del signo igual como un estímulo para dar una respuesta. En este caso el alumno/a sólo aceptaba el uso del signo igual en igualdades de acción.
- *Significado del signo igual:* cuando el/la alumno/a aceptaba y resolvía correctamente igualdades de todas las formas consideradas (a ± b = c, c = a ± b y a ± b = c ± d), lo cual interpretamos como que el alumno/a comprendía el significado del signo igual o equivalentemente decimos que había construido una adecuada comprensión del signo igual.

Dichas etapas se asemejan en cierto sentido a las distinguidas por Carpenter, Franke y Levi (2003), siendo más concretas las etapas seguidas en la evolución de la comprensión del signo igual por nuestro grupo de alumnos/as. Observamos que las dos primeras concepciones "estímulo para una respuesta" y "expresión de una acción" corresponden a la interpretación del signo igual como un símbolo operacional, siendo únicamente la última concepción "significado del signo igual" la que se refiere al signo igual como un símbolo relacional.

Aunque para algunos de los/as alumnos/as fue suficiente explicarles la correcta interpretación del signo igual, la mayoría requirió considerar numerosos ejemplos y discutir sobre las distintas concepciones erróneas para ir avanzando en el desarrollo de su comprensión del signo igual. Estas igualdades les resultaban difíciles de entender, no siendo natural para ellos/as el uso del signo igual "en mitad de la igualdad".

Señalamos como causas de estas dificultades la reiterada consideración a lo largo de la formación escolar de los/as alumnos/as de igualdades con las operaciones en el lado izquierdo y la respuesta en el lado derecho, junto con el énfasis en la obtención de una respuesta que domina la enseñanza de la aritmética.

Queremos destacar la necesidad de incluir igualdades de distintas formas a lo largo de las diversas actividades aritméticas con el objetivo de impedir la emergencia de concepciones erróneas, especialmente igualdades de la forma c = a ± b, a = a y con varios términos en cualquiera de los lados del signo igual. De esta forma puede, además, prevenirse el receso en la comprensión del signo igual que fue observado en dos de los/as alumnos/as.

También queremos destacar la necesidad de abordar explícitamente en la enseñanza de las matemáticas el uso (incorrecto) del signo igual en cadenas de operaciones, lo cual hemos observado, causa importantes dificultades a los/as alumno/as.

La comprensión manifestada por la mayoría de los alumnos/as fue estable, es decir, aquellos estudiantes que mostraron una adecuada comprensión del signo igual en alguna actividad siguieron resolviendo correctamente las sucesivas actividades. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente se produjo cierto retroceso en la comprensión de dos alumnos/as lo cual enfatiza la necesidad del uso habitual de igualdades de variadas formas en el aula.

Pensamiento relacional. Nuestro último objetivo de investigación era *"analizar la emergencia y desarrollo del pensamiento relacional durante el trabajo con igualdades numéricas".* El éxito alcanzado en promover el uso de pensamiento relacional fue parcial.

Conseguir que los/as alumno/as se paren y consideren la igualdad en su totalidad fue una de las principales dificultades encontradas, junto con su fuerte inclinación al cálculo. El uso de las igualdades verdaderas y falsas especialmente diseñadas para fomentar el desarrollo y uso de pensamiento relacional, y el preguntarles a los/as alumnos/as específicamente si podían resolver las igualdades "sin hacer la aritmética" ayudó a disminuir la tendencia al cálculo de los/as alumnos/as y a que prestaran más atención a las relaciones entre los términos de las igualdades.

El análisis global de la recogida de datos muestra que el grupo de alumnos/as de tercer grado estaban capacitados para desarrollar pensamiento relacional así como una correcta concepción del signo igual, sin embargo observamos que se requiere más tiempo para que todos los estudiantes desarrollen pensamiento relacional y lo apliquen en sus cálculos, siendo necesario que se promueva explícitamente en el aula. Durante las intervenciones en el aula se observó que algunos de los estudiantes no escuchaban las explicaciones que daban sus compañeros/as lo cual se manifestó como un obstáculo en el desarrollo de pensamiento relacional, pues la discusión en el aula sobre igualdades adecuadas fue el modo empleado para promover este pensamiento.

Consideramos importante que sean consideradas a lo largo del aprendizaje de la aritmética actividades que fomenten el uso de pensamiento relacional y de este modo estén menos centradas en la obtención de una respuesta.

Las estrategias empleadas por los/as alumnos/as, a parte del uso de pensamiento relacional, fueron:

- <u>en el caso de igualdades verdaderas y falsas</u>, calcular el resultado de las operaciones expresadas en ambos miembros de la igualdad y luego, comparar ambos resultados,
- <u>y en el caso de las igualdades abiertas</u>, calcular el resultado de las operaciones expresadas en el miembro de la igualdad que no contenía al término desconocido y entonces, probar distintos valores o resolver la cuestión ¿qué número necesito en este miembro para que dé el mismo resultado que el otro miembro?

Ninguna de estas estrategias involucra pensamiento relacional o algebraico.

La comunicación en el aula. Las actividades consideradas en este estudio muestran nuestra creencia en la importancia de escuchar a los/as alumnos/as y fomentar la discusión en clase de ideas o conceptos matemáticos. Como los principios y estándares para las matemáticas escolares (NCTM, 2000) y recientes tendencias defienden (Huffersd-Ankles, Fuson y Gamoran Sherin, 2004), la comunicación de ideas matemáticas es esencial para un aprendizaje con comprensión. Incluso en esta clase donde los estudiantes no están acostumbrados a participar en discusiones matemáticas, las igualdades numéricas consideradas promovieron con éxito la verbalización del pensamiento de los/as alumnos/as y el intercambio de estrategias, concepciones o dudas. Un intercambio más intenso puede alcanzarse cuando los estudiantes se acostumbren a escucharse unos a otros, aunque debe prestarse una atención especial a los/as alumnos/as que aun están aprendiendo el lenguaje hablado en el aula o presenten otro tipo de dificultades que limiten su capacidad de participar o beneficiarse de las discusiones en el aula. Huffersd-Ankles, Fuson y Gamoran Sherin (2004) han documentado que eficaces comunidades “math-talk” (comunidades en las que los estudiantes promueven su aprendizaje por medio de la participación en discusiones matemáticas significativas) pueden ser desarrolladas en aulas donde haya alumnos/as que aun estén aprendiendo el idioma.

REFERENCIAS

Alcalá Hernández, M. (2000). La construcción numérica: ¿De lo concreto a lo abstracto? (Dos consideraciones psicológicas y una sugerencia pedagógica). En Gámez Mellado, A., Macías Gil C., Suárez Alemán, C.O. (2000), Actas del IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "THALES". Matemáticas y Matemáticos para el tercer milenio: De la abstracción a la realidad, San Fernando, Cádiz.

Arcavi, A. (1995). …Y en matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos? *Substratum*, 6, 2, 77-94.

Arnal, J., Del Rincón, D., y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología.* Barcelona: Labor Universitaria.

Artigue, M. (1984). *Contribution à l' étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques.* Thése de Doctorat d' Etat. Université Paris VII.

Bastable, V., y Schifter, D. (pendiente de publicación). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. A aparecer en Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 02/01/2004.

Baroody, A. J., y Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's' mathematical power. An investigative approach to K-8 Mathematics Instruction*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., y Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal,* 84 (2), 199-212.

Behr, M, Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching,* 92, 13-15.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: “the early learning algebra: a structural perspective”. En Wagner, S., y Kieran, C. (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Booth, L. R. (1988). Children’s Difficulties in Beginning Algebra. En Coxford, A. F., y Shulte, A. P., *The ideas of Algebra K-12.* NCTM 1988 Yearbook.

Bouvier, A,. y George, M., (1984). *Diccionario de Matemáticas.* Traducción de Armiño, M., y Bordoy, V. Madrid: Akal editores.

Briars, D. J. y Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and instruction*, 1, 245-296.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomenes d’enseignement des Mathématiques.* Thése de Doctorat d’ Etat. Université de Bordeaux.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal,* 47, 256-265.

Brownell, W. A., (1935). Psychological Considerations in the Learning and Teaching of Arithmetic. En Henry, N. B., *Forty-Fifth Yearbook of the National Society for the Study of Education: Part1*. Chicago: University of Chicago.

Byers, V., y Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching,* 81, 24-27.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., y Reys, R. (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary School. *The Mathematics Teacher,* 73(5), 329-338.

Carpenter, T. P., Fennema E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (Septiembre 2000). *Cognitive Guided Instruction: A research-based Teacher Professional Development Program for elementary School Mathematics*. Research Report for the National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Madison: Universidad de Wisconsin-Madison.

Carpenter, T. P., Fennema E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (1999). *Children’s mathematics. Cognitive Guided Instruction.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., y Lehrer R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In Fennema, E. y Romberg T. A., (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., y Levi, L. (Octubre 2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Research Report for the National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Madison: Universidad de Wisconsin-Madison.

Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M., (2000), *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions.* Presentación plenaria del PME-NA XXII , Tucson, AZ.

Castro, E. (1995). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).Granada: Colección Mathema.

Cauzinille-Marmeche, E., Mathieu, J., y Resnick, L. B. (1984). Children's understanding of algebraic and arithmetic expressions. *Actas del encuentro anual de la American Educational Research Association,* New Orleans, LA.

Cázares Solórzano, J. (2000). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. Memoria de tercer ciclo. Universidad de Granada.

Chaiklin, S., y Lesgold S. (1984). *Actas del encuentro anual de la American Educational Research Association,* New Orleans, LA.

Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. *Actas del Psychology of Mathematics Education Workshop*, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning.* Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Confrey, J., y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En Kelly, A. E., y Lesh, R. A. (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Yackel, E., y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education,* Vol. 23, no.1, 2-33.

Davis, S., y Thompson D. R. (1998). To encourage "algebra for all", start an algebra network. *The Mathematics Teacher*, 92 (4), 282-286 y 365.

Davis, R. B. (1964). *Discovery in mathematics: A text for teachers.* Palo Alto, CA: Addison-Wesley.

Denmark, T., Barco, F., y Voran, J. (1976). *Final report: a teaching experiment on equality* (PMDC Technical Report No. 6). Tallahassee, Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144805).

Dewey, J. (1910). *How we think.* Boston: Heath.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Editorial Labor y el Ministerio de Educación y Ciencia.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En Pehkonene, E. (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lhati, Finland, Vol.4, 166-173.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Traducción de uso interno, realizada en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN (México), de "Registres de représentation sémiotique et functionnemente cognitif de la pensée", Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

Edwards, T. G. (2000). Some "big ideas" of algebra in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(1), 26-31.

Empson y Junk, (2004). Teachers' Knowledge of Children's Mathematics after Implementing a Student Centered Curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education,* June 2004, vol.7, no. 2,121-144.

Falkner, K. P., Levi, L., y Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics,* 6, 232-236.

Fennel, F., y Rowan, T. (2001). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching children mathematics*, Vol. 7, 5, 288-292.

Fennema, E., y Rombert, T. A. (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias de álgebra elemental a través de problemas verbales.* Universidad de Granada: Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Flores Martínez, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza.* Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En Johnsen, M., y Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 2, 415-422.

García Pérez, J. R., (2000). *Representaciones en resolución de problemas. Un estudio comparativo con estudiantes españoles y mexicanos.* Memoria de tercer ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gallardo, J., y González, J. L. (pendiente de publicación). *Diagnostico y evaluación de la compresión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis desarrollada en el departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.

Gómez Alonso, B. (1988). *Numeración y Cálculo. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial síntesis.

Hegedus, S. J., y Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: issues of representation, engagement and pedagogy. En Johnsen, M., y Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3, 129-136.

Hiebert, J., y Carpenter, T. P., (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning (a project of the NCTM),* 65-96. Macmillan, New York.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. F., Wearne, D. H., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). *Making sense. Teaching and Learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: an introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural Knowledge: The case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Huffersd-Ankles, K., Fuson, K. C., y Gamoran Sherin, M. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for research in Mathematics Education,* 35, 81-116.

Kaput, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum.* Documento del National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a new Algebra. En Fennema, E., y Rombert, T. A. (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*, Documento del National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662).

Kaput, J. (1995). *A research base supporting long term algebra reform?* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 389 539).

Kaput, J. (1978). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. En Claude Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics,* 159-195. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D. A (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning (a project of the NCTM),* 390-419. New York: Macmillan.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4, 33- 56. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, 317-326.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias,* 7 3, 229-240.

Lampert, M., (1986).Teaching Multiplication. *Journal of Mathematics Behavior.* 5, no. 3, 241-280.

Lampert, M. (1989). Arithmetic as problem solving. *Arithmetic Teacher*, 36, 34- 36.

Lee, L. (pendiente de publicación). What is algebra? A aparecer en Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 02/01/2004.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1, p. 1- 64.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Presentado en el V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth.

Lindquist, M. M. (1997). Prólogo. En Hiebert y otros, *Making sense. Teaching and Learning mathematics with understanding.* Porsmouth: Heinemann.

Lindvall, C. M., e Ybarra, C. G. (1978) *An analysis of incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences*. Presentado en el encuentro anual de American Educational Research Association. Toronto, Notario. (ERIC Document Reproduction Service No. ED155049)

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K., (1990). Learning Fractions with understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, 16 – 32.

Malara, N.A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an Early Algebra project. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of the PME and PMENA (PME27, PME-NA25)*, Vol. 1, 33-48.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and roots of algebra. En Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Mevarech, Z. R., y Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. En Hershkowitz, Weizmann Institute of Science, (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Rehobot, Israel, 313-318.

Miras Ruiz, J. (1994). El área de las matemáticas: Enfoque y características. Construcción del conocimiento matemático. Aportación del área a los objetivos generales de etapa. Análisis de objetivos, contenidos y criterios de evaluación. El área de matemáticas en relación con otras áreas. Intervención Educativa. En García Soriano, J. A., y Palomo García, (Coord.), *Contenidos Educativos Generales en Infantil y Primaria,* 457-478. Málaga: Ediciones Aljibe.

Moreno Armella, L., y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática*, Vol.4, no.2, 7- 15.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on learning problems in mathematics,* Vol. 21, no. 1, 44-72.

Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". En Johnsen, M., y Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3, 377-384.

National Council of Teacher in Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA.

National Council of Teacher in Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

O'Brien, T. (1989). Some thoughts on treasure keeping. *Kappan,* 70, 360–364.

Piaget, J. (1970).*Genetic Epistemology.* New York: W. W. Norton.

Ponte, J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En Bazzini, L. (Ed.), Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the 5th international conference on systemic cooperation between theory and practice in mathematics education. Grado. Italia.

Rico, L. (1998). Los organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (Ed.), *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* 39-59. Barcelona: HORSORI.

Rico, L. (1995). *Conocimiento Numérico y formación de profesores.* Discurso de apertura de curso de la Universidad de Granada, curso académico 1995-1996.

Riley, M. S., y Greeno, J. G. (1978). *Importance of semantic structure in the difficulty of arithmetic word problems*. Presentado en el encuentro anual de Midwestern Psychological Association, Chicago, IL.

Rombert, T. A., y Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En Fennema, E., y Rombert, T. A., *Mathematics classrooms that promote understanding,* 3-17. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ruiz Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis Epistemológico y Didáctico*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Saenz-Ludlow, A., y Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 35, 153-187.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations. Early algebraic thinking in grades K-6. En Stiff, L. V., y Curcio, F. R. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12*. NCTM Yearbook, Inc. Restori, VA.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J.,y Bastable, V. (documento no publicado). Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Arithmetic Means in the Elementary Grades?

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., y Jones, W. (1998). *Solving algebra problems before Algebra Instruction.* National Science Foundation, Arlington, VA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 446 895).

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3, 24-36.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics,* 22, 1 –36.

Sisofo, E. (2000). *Can the Instruction of the Davydov Curriculum develop American Children's Notion of the "=" symbol as a relational symbol rather than an operational "do something" symbol?* Dissertation Research Proposal. Disponible en la dirección web http://ematusov.soe.udel.edu/educ820.00s/ consultada el 19/04/2004.

Skemp, R. R. (1987). Relational understanding and instrumental understanding. En *The Psychology of Learning Mathematics,* 152-163. Hillsdale, NJ: Erlbaum. (Nueva impresion de: Mathematics Teaching, The bulletin of the Association of Teachers of Mathematics, no. 77, December 1976)

Smith, J., y Thompson, P. (pendiente de publicación). Additive quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. A aparecer en Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 20/01/2004.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. En Leinhardt, G., Putman, R., y Hattrup, R. A. (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematic Teaching,* 1-51. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Subramaniam, K., y Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. En Johnsen, M., y Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Vol. 3, 121-128.

Tierney, C., y Monk, S. (pendiente de publicación). Children's reasoning about change over time. A aparecer en Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 02/01/2004.

Vallejo, M. J., (1798). Aritmética de niños, para uso de las Escuelas del Reino.

Van Reeuwijk, M. (pendiente de publicación). A Dutch Perspective. A aparecer en Kaput, J., Carraher, D., y Blanton, M. (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 02/01/2004.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En Johnsen, M., y Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 4, 417- 424.

Warren, E. (2003). Unknowns arithmetic to algebra: two exemplars. En Cockburn, A., y Nardi E. (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* England, 362-369.

Weaver, J.F. (1972). *Some factors associated with pupils' achievement when solving selected types of simple open sentences.* Presentado en el encuentro anual de la American Educational Research Association, Chicago, IL.

Wheeler, D., (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. En Berdnarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching,* 317-325. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

RESOLUCIÓN DE IGUALDADES NUMÉRICAS POR ESTUDIANTES DE TERCER GRADO

Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional

Anexos del Trabajo

Marta Molina González

Septiembre, 2004

Anexo A: Hojas de Actividades

Actividades Sesión 1ª

PRUEBA ESCRITA DE EVALUACIÓN

Hoja para el/la alumno/a

$8 + 4 = \boxed{} + 5$

$\boxed{} = 25 - 12$

$14 + \boxed{} = 13 + 4$

$12 + 7 = 7 + \boxed{}$

$13 - 7 = \boxed{} - 6$

$\boxed{} + 4 = 5 + 7$

Actividades Sesión 2ª

ACTIVIDAD ESCRITA

Versión traducida de la hoja para los/as alumnos/as

Decide si la igualdad numérica es verdadera o falsa. Corrige la igualdad numérica si crees que es necesario.

	Señala	**Igualdad corregida**
Ejemplo 1: 12 + 7 = 13	V F	____________________
Ejemplo 2: 2 + 2 = 4	V F	____________________
1) 3 = 3	V F	____________________
2) 7 = 12	V F	____________________
3) 10 = 4 + 6	V F	____________________
4) 2 + 2 + 2 = 3 + 3	V F	____________________
5) 34 = 34 + 12	V F	____________________
6) 99 + 4 = 4 + 9	V F	____________________
7) 37 + 14 = 38 + 13	V F	____________________

Escribe algunas igualdades verdaderas o falsas.

8)	V F	____________________
9)	V F	____________________
10)	V F	____________________

Actividades Sesión 3ª

DISCUSIÓN

Versión traducida de la hoja de la investigadora para la discusión

20 + 20 = 20 + 20	V
10 x 10 =100 = 90+10	V
7 + 15 = 100 + 100	F
12 + 11 = 11 + 12	V
15 + 2 = 15 + 3	F
3 x 5 = 15 ÷ 1	V
6 – 6 = 1 – 1	V
10 – 7 = 10 – 4	F
51 + 51 = 50 + 52	V
5 + 1 = 7 – 1	V
3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11	F

Continuación Actividades Sesión 3ª

DISCUSIÓN

Hoja para los/as alumnos/as

Decide si la igualdad numérica es verdadera o falsa. Corrige la igualdad numérica si crees que es necesario.

			Igualdad corregida
1.	V	F	______________________
2.	V	F	______________________
3.	V	F	______________________
4.	V	F	______________________
5.	V	F	______________________
6.	V	F	______________________
7.	V	F	______________________
8.	V	F	______________________
9.	V	F	______________________
10.	V	F	______________________
11.	V	F	______________________

Continuación Actividades Sesión 3ª

PRUEBA ESCRITA DE EVALUACIÓN

Versión traducida de la hoja para los/as alumnos/as

1. Completa el recuadro con el número que hace la igualdad verdadera.

$$5 + 1 = \boxed{} + 2$$

$$4 + \boxed{} = 2 + 2 + 2$$

$$\boxed{} + 0 = 30 - 10$$

2. Decide si la igualdad es verdadera o falsa.

$9 = 5 + 4$	V	F
$3 + 7 = 10 + 6$	V	F
$8 = 8$	V	F

3. Escribe una igualdad verdadera.

____

Actividades Sesión 4ª

DISCUSIÓN

Versión traducida de la hoja de la investigadora para la seleccion de igualdades durante la discusión

F	37 + 23 = 142	(1)
F	76 = 50 – 14	(4)
V	27 + 48 – 48 = 27	(2)
F	38 + 500 – 500 = 43	
V	45 + 33 – 32 = 46	
V	22 + 7 – 9 = 20	
F	18 + 3 – 4 = 19	
V	34 + 28 = 30 + 20 + 4 + 8	(3)
F	75 + 23 = 70 + 50 + 20 + 3	
V	34 – 19 = 34 – 20 + 1	
F	43 – 21 = 40 – 20 – 3 -1	
V	24 + 18 = 20 + 18 + 2 + 2	
F	20 + 15 = 20 + 10 + 5	(6)
V	103 + 205 = 105 + 203	(7)
F	24 + 13 = 23 + 15	
V	12 – 7 = 13 – 8	(8)
F	7 + 5 = 8 + 6	
F	4 x 5 = 5 +5 +5 + 4	(5)
T	4 x 6 = 2 x 2 x 6	
T	9 x 7 = 10 x 7 - 7	
F	3 x 8 + 2 x 8 = 4 x 8	

Nota: Aparecen sombreadas aquellas igualdades que se discutieron en el aula. El número en paréntesis indica el orden en el que fueron consideradas.

Continuación Actividades Sesión 4ª

DISCUSIÓN

Hoja para los/as alumnos/as

Decide si la igualdad numérica es verdadera o falsa. Corrige la igualdad numérica si crees que es necesario.

			Igualdad corregida
1.	V	F	______________________
2.	V	F	______________________
3.	V	F	______________________
4.	V	F	______________________
5.	V	F	______________________
6.	V	F	______________________
7.	V	F	______________________
8.	V	F	______________________
9.	V	F	______________________
10.	V	F	______________________
11.	V	F	______________________
12.	V	F	______________________

Actividades Sesión 5ª

PRUEBA ESCRITA DE EVALUACIÓN

Hoja para el/la alumno/a

Rellena el recuadro con el número que hace la igualdad verdadera

$9 + 3 = \boxed{} + 4$

$\boxed{} = 16 - 5$

$8 + \boxed{} = 7 + 3$

$10 + 4 = 4 + \boxed{}$

$15 - 5 = \boxed{} - 6$

$\boxed{} + 5 = 6 + 8$

$238 + 49 = \boxed{} + 40 + 9$

Explica como has resuelto el último problema

Anexo B: Tablas

Tabla B1: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 1ª

Igualdades / Alumnos/as	8 + 4 = □ + 5	□ = 25-12	14 + □ = 13 + 4	12 + 7 = 7 + □	13 – 7 = □ - 6	□ + 4 = 5 + 7
AD	12	25?	0?	6	6	1
HR	12	**13**	-1	26	6	1
DH	12	7	**3**	7	6	1
YZ	12	5	7	**12**	6	1
RY	12	35?	1	5	6	3
SF	12	**13**	17	0	6	1
AL	12	18	**3**	26	6	1
JK	12	5?	1?	**12**	6	1
MG	12?	17?	17	**12**	7?	12?
JS	12	7	1	3	3	1
DQ	12	20	1?	3?	6	1
HY	12	**13**	31	26	6	3
AT	12	20	1	6?	6	2?

En negrita se señalan las respuestas correctas. **N= 13**

Tabla B2: Respuestas a la actividad escrita de la Sesión 2ª

Igualdades / Alumnos/as	3 = 3	7 = 12	10= 4 + 6	2+2+2 = 3+3	34 = 34 + 12	99 + 4 = 4 + 9	37+14= 38+13
AD	V	**F 7 + 12 = 19**	V	?	V	V	V
HR	F 0+3=3	**F 5 + 7 = 12**	V	F 2 +2 +2= 6 3 + 3 = 6	**F 21 + 13 = 34**	**F 99 + 4 = 103 4 + 9 = 13**	F 13 + 14 = 27 38 + 13 = 52
DH	F	?	F 4 + 6 = 10	F 2 + 3 = 5	V 34+12=46	?	?
YZ	F 0+3=3	**F 5 + 7 = 12**	F 4 + 6 = 10	F 2+2+2+3+3=12	**F 12+22=34**	?	?
RY	V	V	V	F 2+2+2+3+3=12	**F 12+34=46**	**F 9+4+99=113**	F 37+14+13=64
SF	F 3+3= 6	**F 7 + 12 = 19**	F 4 + 10 = 14	F 2+2+2+3+3=12	**F 34+34=68**	**F 99+4+4+9=116**	F 37+14=51+16=77
AL	F 0+3=3	**F 5 + 7 = 12**	V	F 2+2+2+3+3=12	**F**	?	?
JK	F 3 + 0=3	**F 5 + 7 = 12**	F 6 + 4 = 10	F 6+6=12	**F 34+0=34**	**F ?**	F
CL	F 3 + 0=3	**F 7 + 5= 12**	V 4 + 6=10	F 2+2+2-3=3	**F 12+34=46**	**F 99+9=108**	F ?
JR	V	**F 7 + 5= 12**	?	F 1 +2 = 3	?	V	F 31+7=38
JS	?	?	V	V	?	?	?
MH	F 0+3=3	V	F 5+7=12	V	**F**	V	V
DQ	F 0+3=3	**F 5 + 7 = 12**	V	V	**F**	**F**	V
CH	V ?	?	V	V	V 46= 34 +12	**F 6 + 7 = 4 + 9**	V
MG	V 3 + 0 =3	**F 12=12, 7 =7**	**V 4+6=10=10**	**V 2x3=6=3+3**	**F 34=34, 34+12=46**	**F 99+4=103**	**V 37+14=51=51=38+13**

En negrita se señalan las respuestas correctas. **N= 15.**

Tabla B3: Resultados de la actividad de construcción de igualdades de las formas __+__=__+__ , __-__=__-__ y __+__=__-__ en la Sesión 2ª.

Alumnos/as	Interacción de los investigadores	Ejemplos de las igualdades construidas por los alumnos/as
AD	Una investigadora estuvo trabajando con ella intentando ayudarle a construir igualdades	No escribió ninguna igualdad
HR	Se le indicó que modificara sus igualdades de la forma _ + _ = _ e incluyera dos términos en cada miembro	9 +7÷1= 16 16 x 2 = 32 = 30 + 2 41+0=41=31+ 10 = 41 2x2=4=2+2
DH	Se le ayudo sugiriéndole que mirara a ambos miembros independientemente	5 + 1 = 7 – 1 16 – 10 = 17 – 11 10 – 4 = 11 – 5 18 – 12 = 19 – 13
YZ		10 + 9 = 19 + 0 3 + 3 = 3 + 3 10 + 10 = 5 x 4 20 + 20 = 20 + 20
RY		1 + 1 = 2 – 4 10 x 8 = 1 ÷ 80 8 + 1 = 6 + 3 1000 x 2 = 3000-1000
SF	Se le dirigió a escribir igualdades de la forma _ + _ = _ + _	3 + 3 = 3 +3 1 + 2 +1 = 2 25 + 20 = 35 7+ 10= 10 + 7 10 + 11= 17 + 3
AL		5 + 10 = 4 + 11 6 – 6 = 1 -1 3 + 3 = 3 x 2 5 + 0 = 4 + 1
JK		3 + 0 = 3 ÷1 4 + 1 = 5 x 1 4 – 1 = 3 + 0 7 + 1 = 4 + 4
MG		2 + 1 = 4 – 1 10 + 2 = 13 – 1 30 = 30 90 + 200 = 200 + 10 + 10 + 20 + 30 + 20

JS		2 + 2 = 1 + 3 3 + 3 = 2 + 4 4 + 0 = 1 + 3 3 – 1 = 5 – 3
DQ		40 + 20 = 10 x 6 = 60 ÷1 = 61-1 51 + 51 = 50 + 52 9 x 4 = 6 x 6 9 x 3 = 30 – 3
JR		10 x 1 = 10 + 11 11 x 8 = 88 -10 9 + 0 = 9 2 x 10 = 20 499+ 1 = 500
CH		6 + 6 = 10 + 2 4 + 4 = 10 – 2 10 + 11 = 31 -10 9 x9 + 90 – 9
CL	Se le dirigió a escribir igualdades de la forma _ + _ = _ + _	84 + 10 = 94 80 + 30 = 110 100 + 30 = 10 + 120 1 + 2 = 5 – 2 50 + 100 = 200 – 50
MH		3 + 5 = 6 + 2 5 + 2 = 8 - 1 3 x 4 = 2 x 6 2 x 5 = 10 – 0

Tabla B4: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 3ª

Igualdades / Alumnos/as	5 + 1 = □+ 2	4 + □ = 2+ 2 + 2	□+ 0= 30 – 10	9 = 5 + 4	3 + 7 = 10 + 6	8 = 8	Igualdades verdaderas escritas por los alumnos/as
AD	8	10	40	**T**	**F**	**T**	3+3 =6
HR	6	**2**	30	**T**	**F**	**T**	55= 5 x 11= 2 + 9= 3 x 3= 2 + 2 = 1+ 1
DH	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	F	100+ 100= 200
YZ	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	9 x 9 = 9 x 9 6 + 1 = 5 + 2 10 = 10 9 = 9
RY	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	100 + 100= 2 x 100 2 x 10,000= 10,000+10,000 2 x 100,000 = 200,000 x 1
SF	**4**	**2**	40	**T**	**F**	**T**	8 + 8 = 20 – 4 los dos son igual a dieciséis
AL	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	5 + 5 = 9 + 1
JK	3	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	72 ÷ 8 = 9 x 8 10 ÷5 = 5 x 10 9 x 4 = 4 x 9 8÷ 5 = 10 x 9 14 ÷ 2 = 8 x 1
MG	**4**	**2**	**20**	**T**	**F** **3 + 7 = 10, 10 + 6 = 16**	**T**	90 + 10 = 100 ± 0

En negrita se señalan las respuestas correctas. **N= 18**

Igualdades / Alumnos/as	5 + 1 = □+ 2	4 + □= 2+ 2 + 2	□+ 0= 30 – 10	9 = 5 + 4	3 + 7 = 10 + 6	8 = 8	Igualdades verdaderas escritas por los alumnos/as
JS	6	?	30	**T**	T	**T**	9 x 4 = 36
DQ	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	9 x 2 = 9 + 9
JR	6	**2**	30	**T**	T	**T**	30+40 =70+10
CH	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	3 + 1 =6 – 2
CL	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	100-100 = 0-0
MH	**4**	**2**	**20**	**T**	**F**	**T**	3+3 = 6 + 0 6 = 6
HY	**4**	**2**	40 40 + 0 = 40 pero – 10 es igual a 30	**T**	**F**	**T**	9 – 2 = 10 – 3 = 7
AT	5	**2**	10	**T**	**F**	F	9 + 2 = 11
UR	**4**	**2**	10	**T**	T	**T**	

En negrita se señalan las respuestas correctas. **N= 18.**

Tabla B5: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 5ª

Igualdades / Alumnos/as	9 + 3 = □ + 4	□ = 16 – 5	8 +□ = 7 + 3	10 + 4 = 4 + □	15 – 5 = □ - 6	□+ 5 = 6 + 8	238 + 49 = □ + 40 + 9
HR	**8**	**11**	**2**	**10**	**16**	**9**	**238**
YZ	**8**	9	**2**	**10**	**16**	**9**	100
RY	**8**	**11**	**2**	**10**	4	**9**	**238**
SF	**8**	**11**	**2**	**10**	**16**	**9**	**238**
AL	**8**	12	**2**	**10**	**16**	**9**	
JK	**8**	**11**	**2**	**10**	9	**9**	**238**
CL	12	15	-1	8	10	1	287
JR	5	11	1	5	1	2	4
CH	**8**	9	**2**	**10**	**16**	**9**	**238**
MG	**8**		**2**	**10**	**16**	**9**	
JS	**8**	**11**	**2**	**10**	4	**9**	49
MH	12	9	**2**	6	10	**9**	277
DQ	**8**	**11**	**2**	**10**	**16**	**9**	**238**
HY	**8**	**11**	**2**	**10**	**16**	**9**	
AT	**8**	**11**	**2**	**10**	10	**9**	**238**

En negrita se señalan las respuestas correctas. **N= 15.**

Tabla B6: Respuestas a la última cuestión de la prueba escrita de la Sesión 5ª:
238 + 49 = □ + 40 + 9

Alumnos/as	Respuesta	Explicación
HR	**238**	Me di cuenta de que el número era 49 y 40 + 9 = 49 por eso sume 238
YZ	100	Lo resolví mediante cada lado tiene que ser igual
RY	**238**	Sumando el número que no esta al lado del recuadro
SF	**238**	Pensé en el cuarenta y en el nueve y pensé el cero no contaba y por eso es cuarenta y nueve y es igual
AL	NO TUVO TIEMPO PARA HACERLO	
JK	**238**	El modo en que encontré mi respuesta a los números es haciéndolo de la otra forma
CL	287	
JR	4	Yo siempre pienso en mi cabeza
CH	**238**	Porque 40 + 9 = 49 entonces tú sumas 238 y entonces da la misma respuesta
MG	NO TUVO TIEMPO PARA HACERLO	
JS	49	Hice la ecuación y así es como obtuve la respuesta
MH	277	Lo conté y empecé sumando, por eso se como resolverlo
DQ	**238**	Resolviendo el primer problema
HY	INTENTO RESOLVERLO POR ENSAYO Y ERROR PERO NO TUVO TIEMPO PARA DAR UNA RESPUESTA FINAL	
AT	**238**	Dividí el 49 por la mitad en 40 y 9. No sume 238 y 49.

Tabla B7: Evolución de los alumnos/as a lo largo de las cinco sesiones

Concepciones del signo igual		**Sesión 1ª N = 13**	**Sesión 2ª N = 15**	**Sesión 3ª N = 18**	**Sesión 5ª Prueba Final N = 15**
Estímulo para una respuesta	a ± b = c	8 AD, DH, YZ, RY AL, JK, JS, DQ, AT	5 DH, YZ, SF, JK, JR	0	0
Expresión de una acción	a ± b = c y c = a ± b	3 HR, SF, HY	6 HR, AD RY, AL, CL, JS	3 JS, HR JR	2 CL, MH
Significado del signo igual	a ± b = c y c = a ± b y a ± b = c ± d	0	3 MG, CH[1] DQ	12 DH, YZ, RY, AL, JK, SF, MG, HY, CH, CL, DQ, MH	12 YZ, RY AL, JK SF, MG HY, CH DQ, JS AT, HR
Sin clasificar		2 MG	1 MH	3 AD, UI AT	1 JR

Se señalan sombreados aquellos/as alumnos/as que no habían asistido a la sesión anterior, y se subrayan los alumnos/as que modificaron dicho día su concepción con respecto a la sesión anterior.

[1] CH estuvo presente en el aula durante la Sesión 1ª aunque no entregó la prueba de evaluación escrita por lo que no tenemos información sobre su concepción inicial sobre el signo igual.

En esta tabla hemos distinguido tres etapas en la evolución de las concepciones de los/as alumnos/as:

- *Estímulo para una respuesta:* concepción anteriormente denotada a ± b = c, que se refiere a la interpretación del signo igual como un comando para dar una respuesta.

- *Expresión de una acción*: cuando el estudiante sólo aceptaban y resolvía correctamente igualdades de las formas a ± b = c y c = a ± b, aplicando en ocasiones la interpretación del signo igual como un estímulo para dar una respuesta. En este caso el alumno/a sólo aceptaba el uso del signo igual en igualdades de acción.
- *Significado del signo igual:* cuando el/la alumno/a aceptaba y resolvía correctamente igualdades de todas las formas consideradas (a ± b = c, c = a ± b y a ± b = c ± d), lo cual interpretamos como que el alumno/a comprendía el significado del signo igual o equivalentemente decimos que había construido una adecuada comprensión del signo igual.

Anexo C: Transcripciones

C1: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 1ª

Día: 20-11-2003
Número de alumnos en clase: 13

(I escribe dos *igualdades numéricas abiertas en la pizarra: 7 + 3 = □ y 6 +□ = 20)*

I: ¿Cómo llamaríais a lo que tenemos escrito en la pizarra? ¿AT?
AT: Un problema
I: Un problema. ¿CH?
CH: Una pregunta.
I: Una pregunta. ¿AL?
AL: Una sentencia[13] numérica.
I: Una sentencia numérica. ¿DH?
DH: …..Lo olvidé.
I: ¿Se te olvido? De acuerdo. ¿A1?
A1: Una sentencia numérica.
I: Una sentencia numérica. ¿HR?
HR: Una sentencia numérica.
I: Una sentencia numérica. De acuerdo, mucha gente piensa que es una sentencia numérica. ¿Y tú MG?
MG: Un problema matemático.
I: Un problema matemático. Sí, es parecido a todo eso. ¡De acuerdo!
Lo primero que vamos a hacer es…vais a trabajar en unas ecuaciones. Y lo que vais a encontrar en este folio son unos recuadros, y vuestro trabajo es rellenar los recuadros. Así que poned vuestro nombre en el folio y sacad un lápiz para rellenar los recuadros. Y, no estoy interesada en lo que piensa vuestro compañero, estoy interesada en lo que vosotros pensáis. Así que no miréis al folio del compañero, mirad a vuestro folio, ¿de acuerdo? No sé si habéis visto un ejercicio como este antes. Puede que no estéis seguros de alguna de vuestras respuestas. Si no estáis seguros, rellenad el recuadro con el número y escribid una señal de interrogación en lo alto, ¿de acuerdo? ¿Se entiende? ¿Sí?
Así que, SF ¿qué vas a hacer si no estás segura de tu respuesta?
SF: Lo olvidé.
I: ¡Se te olvido! ¿Quién se acuerda? ¿JS?
JS: Escribir una señal de interrogación.
I: Así que si no estáis seguros, rellenad el recuadro y escribid un signo de interrogación. Necesitáis sacad vuestros lápices. Cuando los tengáis podéis empezar a trabajar. En estos ejercicios no os vamos a poner nota.

Una vez los alumno/as acabaron la actividad y recogimos los folios, se discutió sobre la resolución de las dos igualdades numéricas abiertas que estaban escritas en la pizarra: 7 + 3 = □ y 6 + □ = 20. La primera igualdad no ocasionó ninguna dificultad. Todos los alumnos/as estaban de acuerdo en que la respuesta correcta era 10. (No se tiene trascripción de esta breve discusión debido a que se estaban

[13] En el diálogo original los alumnos/as emplearon el término "sentence" el cual traducimos aquí como "sentencia" pero también puede traducirse como "frase".

realizando y grabando en este momento las entrevistas a dos alumnos/as). La discusión prosiguió como se recoge a continuación, resolviendo la igualdad 6 +□ = 20:

I: YZ, ¿tú qué piensas?
YZ: Catorce
I: ¿Cómo lo has hecho?
YZ: Lo he contado
I: Entonces, tú has dicho, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte. *(Contando a su vez un dedo por cada número)* ¿Es eso lo que has hecho?
YZ: Sí
I: Muy bien, ¿alguien lo ha hecho otra forma? ¿HR?
HR: Yo pensé para mí mismo que si seis más cuatro son diez, si pongo un uno delante del cuatro, va a ser catorce y entonces es igual a veinte.
I: Entonces, tú dices seis más cuatro son diez y diez más lo hacen veinte. Bien pensado. ¿AL?
AL: Yo le resté seis a veinte.
I: ¡Ah! le has restado seis a veinte. Muy bien. AT, ¿tú qué has hecho?
AT: Yo.... he contado hacia atrás.
I: ¿Cómo has contado hacia atrás? ¿Dónde has empezado?
AT: En veinte
I: Veinte, entonces tú has dicho veinte..... mmmm vamos a contar hacia atrás con AT diecinueve….
La clase: Dieciocho, diecisiete, dieciséis, quince, catorce
I: ¿Es eso lo que has hecho? Muy bien, entonces había muchas formas de resolverlo. Vamos a hablar ahora de una (igualdad) que estaba en el folio

(I escribe la igualdad 8 + 4 = □ + 5 en la pizarra)

I: Creo que todo el mundo ha puesto la misma respuesta. Toda la clase puso esto *(I escribe 12 en el recuadro, quedando 8 + 4 = 12 + 5)* ¿Puede alguien decirme por qué habéis puesto eso? ¿RY?
RY: Porque ocho más cuatro es doce
I: Vale, ¿estamos todos de acuerdo en que ocho más cuatro son doce?
La clase: *(gesto de asentimiento)*
I: Sí. Pero tengo que deciros que un matemático diría que este no es el número correcto para el recuadro… este no es el número correcto para el recuadro… ¿Cuál podría ser? ¿CH? ¿Qué es lo que está mal?
CH: El cinco al final.
I: ¡Ah! ¿Qué pasa con ese cinco al final? No podemos simplemente ignorar ese cinco, ¿verdad? ¿CH?
CH: Yo creo que es diecisiete
I: ¿Tú piensas que es diecisiete? *(I escribe la igualdad 8 + 4 = 17 + 5 en la pizarra)* ¿Por qué va a ser diecisiete?
CH: Porque doce más cinco es diecisiete
I: ¡Ah!, Tú pusiste el cinco con ocho y el cuatro y te da diecisiete. Eso puede que tenga sentido pero un matemático diría que… ¡aún no le gusta! CH tiene otra idea
CH: Se me ha olvidado
I: Vale, luego volveremos a hablar contigo. ¿RY?

RY: Sí pones el cinco delante del ocho....
I: ¡Ahora diecisiete sería correcto! *(I escribe en la pizarra 5 + 8 + 4 = 17)* Sí, estoy de acuerdo contigo. Ahora un matemático estaría feliz. Un matemático diría que sí, que eso es verdad. Pero digamos que queremos averiguar que tenemos que poner en el recuadro sin mover los números de lugar y recordad una cosa sobre el signo igual: todo en esta parte tiene que ser igual a todo en esta otra parte. ¿Es diecisiete más cinco igual a ocho más cuatro? *(Señalando la igualdad 8 + 4 = 17 + 5)* ¿Es doce más cinco igual a doce? *(Señalando la igualdad 8 + 4 = 12 + 5)* ¡No! Entonces ¿Qué pensáis? Oigo a alguien diciendo la respuesta. ¿DQ?
DQ: Siete
I: ¿Por qué siete? *(I escribe la igualdad 8 + 4 = 7 + 5)*
DQ: Porque siete más cinco son doce
I: ¡Ah! Ahora el matemático está feliz. Ahora los dos lados del signo igual son lo mismo. El signo igual tiene que tener lo mismo en ambos lados. Así que es un poco diferente a lo que estáis acostumbrados, porque vosotros estáis acostumbrados a problemas que son como éste (*7 + 3 = □)* ¿Verdad? No estáis acostumbrados a problemas que son como éste (8 +4 = 7+ 5) Muy bien, ¿otra idea CH?
CH: ¿Por qué está el signo igual en el medio?
I: Sí, tú no estas acostumbrado a ver esto, pero los matemáticos usan este signo siempre que ambos lados son lo mismo. CH estaba preguntándose por qué el signo igual está en el medio, él no está acostumbrado a ver el signo igual aquí. Vamos a hablar sobre otro problema más que está en vuestra hoja. Ahora que sabéis eso, ¿qué pensáis de este problema?

(I escribe la igualdad 14 + □= 13 + 4 en la pizarra)

I: ¿Qué creéis que debería ir en el recuadro? Levantad la mano y no lo digáis en alto. ¿Qué deberíamos poner en el recuadro? Debería ver vuestra mente pensando. ¿DH?
DH: ...
I: ¿Qué te están diciendo? AT no hables, DH tiene sus propios pensamientos. Déjale contarnos lo que piensa y luego nos lo cuentas tú. ¿Tienes alguna idea DH?
DH: Treinta
I: Y ¿cómo te ha salido treinta? *(I escribe treinta en el recuadro de la igualdad)*
La clase: Ji ji ji
I: Hey hey hey ¡no! Todo el mundo tiene buenas ideas y ¿sabéis que? Incluso si es un error, todos podemos aprender del error, así que nosotros nunca hacemos eso. Así que DH a ti te ha dado treinta, ¿cómo te ha dado treinta? ¿Has sumado todos los números?
DH: Sí
I: Vale; y eso puede que tenga ahora algún sentido pero los matemáticos siempre quieren que este lado sea igual a este otro lado; tienen que equilibrarse. Así que veamos que piensa alguien más sobre esto. Recordad los dos lados tienen que ser lo mismo. ¿RY?
RY: Tres
I: ¿Cómo te ha dado tres? *(I escribe en la pizarra la igualdad 14 + 3 = 13 + 4)*
RY: Yo he mirado a este lado y… los han cambiado.
I: ¿Los han cambiado? ¿Puedes decir un poco más?
RY: Los han cambiado porque intentan engañarte
I: Ji ji Han tratado de engañarte. ¿Y qué es lo que han cambiado?
RY: El tres y el cuatro

I: Entonces el cuatro se ha movido a esta parte y el tres se ha movido a esta otra parte. Entonces tú has visto que estos dos necesitan hacer juego. Vale, ¿alguien ha obtenido el número tres de otra forma? ¿MG?
MG: Yo he sumado cuatro y tres y he dicho trece.... se me ha olvidado cómo lo hice
I: ¿Se te ha olvidado? ¿CH? ¿Tienes otra idea?
CH: He sumado el trece y el catorce y me ha dado diecisiete.
I: Entonces este lado es diecisiete
CH: Y el otro lado lo he hecho diecisiete
I: ¿Y cómo has hecho el otro lado diecisiete? ¿Cómo has resuelto catorce más algo igual a diecisiete?
CH: Lo he contado
I: Lo has contado. Muy bien. ¿AT?
AT: Lo he adivinado
I: ¡Ese es un buen acierto! ¿A1?
A1: Yo he probado con cero
I: Tú has probado con cero, y ¿qué has probado después?
A1: Nada
I: ¿Funcionó el cero?
A1: Primero probé con un cuatro y después con el cero
I: Entonces tú empezaste con cuatro y después con el cero... ¿Y luego probaste tres?
A1: No
I: Entonces ¿qué probaste después?
A1: Nada
I: ¿Te rendiste?
A1: Sí
I: Eso de probar, adivinar y comprobar es otra buena forma.

C2: TRASCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS DE LA SESIÓN 1ª

Día: 20-11-2003

Primera entrevista (al alumno HR)

HR: Esto es difícil
I: ¿Es difícil? Vale ¿Puedes decirme como has obtenido este número? (12 en la igualdad 8 + 4 = □ + 5)
HR: Porque ocho más cuatro son doce
I: Y ¿qué pasa con este cinco del final?
HR: Eso es igual a algo más también
I: Vale. ¿Qué me dices de ésta? (14 + □= 13 + 4)
HR: Esa es difícil porque necesitas un menos
I: Vale ¿Para qué necesitas un menos?
HR: Necesitas un menos uno para que sea igual a trece
I: Vale, entonces tú ves que éste (13) es uno menos que éste (14)
HR: *(gesto de asentimiento)*
I: Entonces, ¿qué podemos poner en el recuadro para que sea verdad?
HR: Puedo poner menos uno
I: Vale, HR, ¿cómo has conseguido esa respuesta veintiséis? (En la igualdad 12 + 7 = 7 + □)
HR: Porque doce más siete es diecinueve y entonces hay un igual a siete y entonces hay un más otra vez, pero si movemos éste (7) aquí va a ser doce más siete más siete
I: Vale,... vale. ¿Cómo has resuelto el último (□ + 4 = 5 + 7)? ¿Por qué has puesto un uno ahí?
HR: Porque he conseguido una pista de la respuesta. Porque es cuatro igual a cinco, sólo cuatro más uno es igual a cinco
I: Vale, y ¿qué pasa con ese más siete?
HR: Es un poco difícil para mi entender esto
I: Buen trabajo

Segunda entrevista (a la alumna AL)

I: Explícame como has resuelto las ecuaciones**.** Empieza
AL: Los he sumado (en la igualdad 8 + 4 = □ + 5 señalando al 8 y el 4) y he restado estos (en la igualdad □ = 25 – 12) y he sumado todos estos (14 + □= 13 + 4 señalando todos los números de la igualdad)
I: Vale
AL: Y estos también (en la igualdad 12 + 7 = 7 + □ refiriendo a todos los números de la igualdad)
I: Así que en la primera tú has sumado estos dos (8 y 4) para conseguir ése (12). ¿Qué pasa con éste (5)?
AL: Se me olvidó
I: ¿Crees que deberías haberlo sumado a esos dos también? (8 y 4)
AL: *(gesto de asentimiento)*
I: ¿Crees eso? ¿Quieres cambiarlo o quieres dejarlo? No, no lo borres, táchalo y escribe la nueva respuesta.
(AL cambia la respuesta 12 a 17)
I: Muy bien, buen trabajo. Gracias por ayudarme.

C3: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 2ª

Día: 5-2-2004
Número de alumnos en clase: 15

(Mientras I explica a los alumnos/as en que consiste la actividad va repartiendo los folios con las igualdades verdaderas y falsas.)

I: Necesitáis sacar un trozo de….un lápiz y escribid vuestro nombre en este papel y la fecha. ¿No está HL aquí hoy? Muy bien, debéis estar escribiendo vuestro nombre en los folios…
(Dirigiéndose a un alumno) simplemente pon tú nombre en el papel y ahora lo explicaré porque es un poco diferente
CH, ¿has escrito tú nombre en el papel? ¿Y tú DH? ¿MH estás listo? RY ¿Estás ya listo? Leamos las instrucciones juntos.
I y la clase: Decide si la igualdad numérica es verdadera o falsa, corrige la igualdad si es necesario
I: Así que vamos a hablar sobre el primer ejemplo

(I escribe el primer ejemplo en la pizarra: 12 + 7 = 13)

I: Levantad la mano si pensáis que es verdadera;… levantad la mano si pensáis que es falsa. Muy bien entonces si pensáis que es falsa tenéis que hacerle un círculo a la F. Hacedle un círculo a la F porque es falsa y ahora necesitamos corregirla. ¿Cómo podemos corregirla para que sea verdadera? ¿DH?
DH: Doce más siete igual a diecinueve
I: Vale, esa es una forma de corregirla. ¿Hay alguna otra forma en que podamos corregirla? ¿JR?
JR: Siete más doce
I: Siete más doce igual a… ¿qué?
JR: Diecinueve
I: Diecinueve, muy bien, eso es cambiando los números de orden. ¿Hay alguna otra forma de corregirla? ¿SF?
SF: Diecinueve menos doce igual a siete
I: Bueno, eso es realmente cambiar mucho esto, nosotros no queremos cambiarlo demasiado. ¿RY?
RY: Doce más uno igual a trece
I: Vale, esa es otra forma. ¿Alguna otra forma? ¿MH?
MH: Tres más doce igual a quince
I: Tres más doce es igual a quince, pero eso es cambiarlo mucho. No queremos cambiarlo demasiado, es mejor si sólo cambiamos un número. ¿A1?
A1: Se me olvidó
I: ¿Se te ha olvidado? Vale ¿DQ?
DQ: Uno más doce igual a trece
I: Vale, podemos ponerlo de esta forma. ¿Alguna otra idea de cómo podemos cambiarlo? ¿Nadie quiere decir nada ya? Podemos cambiar este número de aquí (12), ¿cómo cambiaríamos este número para hacerla verdadera? ¿HR?
HR: Seis más siete
I: Seis más siete. Esto no es igual a doce, es igual a…
La clase: Trece

I: Vale, ¿es esa verdadera? ¿DH?
DH: ¿Sí?
I: Entonces ¿ésta es verdadera?
DH: No
I: ¿Seis más siete igual a trece?
DH: Sí
I: ¿Sí? ¿Tienes alguna otra idea?
DH: *(gesto de negación)*
I: ¿No? Vale. Bueno, vamos a hacer el siguiente ejemplo. ¿Tienen sentido estas igualdades corregidas? Sólo tenéis que escribir una, no tenéis que escribir muchas. Sólo tenéis que escribir una igualdad corregida. Así que elegid una de las igualdades corregidas y escribidlas en la línea. Vale, vamos a intentar la siguiente.

(I escribe el segundo ejemplo en la pizarra: 2 + 2 = 4)

I: ¿Qué pensáis? ¿Es verdadera o falsa?
La clase: Verdadera
I: Y cuando es verdadera no tenéis que corregirla, así que no tenéis que poner nada en la línea. ¿Vale? Las siguientes quiero que las hagáis vosotros solos, mantened los ojos en vuestro folio. Estamos interesados en cómo pensáis vosotros, no en cómo piensa vuestro vecino. ¿CL tienes alguna pregunta?
CL: ¿Si es verdadera podemos poner eso (2 + 2 = 4) en la línea?
I: Vale, si quieres ponerlo puedes hacerlo. DQ ¿tienes alguna pregunta?
DQ: No
I: ¿A1?
A1: ¿Por qué esa es diferente de tres igual a tres?
I: Eso es lo que tienes que hacer ahora, tienes que decidir si es verdadera o falsa. Hacedlo y empezad a pensar sobre eso, y cuando todos hayáis acabado tendremos una discusión.

(Una vez los alumnos han resuelto la actividad individualmente se retoma la discusión)

I: ¿Recordáis que la última vez hicimos una hoja como ésta?
La clase: Sí
I: ¿Cómo eran los problemas de esa hoja?... ¿Recordáis que estaban relacionados con el signo igual? ¿CH? ¿CH recuerdas lo que era?
CH: Nosotros hicimos algo que tenía que ver con verdadero y falso
I: Vale ¿Recuerdas cómo eran esos problemas?
CH: ¿Eran lo mismo?
I: Era algo como esto *(I escribe en la pizarra 2 + □ = 3 + 4)* ¿recordáis esto?
La clase: Sí
I: ¿Qué iría en este recuadro? ¿JK?
JK: Uno
I: Bueno, dos más uno es tres pero ¿qué es lo que este signo igual te está diciendo? ¿Recordáis? ¿CH?
CH: Si pones un cinco ahí, es igual, los dos números, dos más cinco es siete y tres más cuatro es siete
I: ¡Correcto! Porque los dos lados tienen que ser lo mismo. ¿Recordáis? El signo igual quieres decir que los dos lados tienen que ser lo mismo. ¿MG?

MG: Es como si tienes una balanza y tienes que poner la misma cantidad de ambos en cada lado para que sea igual.
I: ¡Correcto! Así que si eso es lo que quiere decir, ¿qué pensáis sobre ésta?

(Escribe la siguiente igualdad en la pizarra: 3 =3)

I: ¿Verdadera o falsa? ¿YZ?
YZ: Verdadera
I: ¿Por qué es verdadera?
YZ: Porque son lo mismo
I: Porque son lo mismo. Tres es igual a tres. Muchos de vosotros pensasteis que ésta era falsa, cuando pensasteis que era falsa ¿cómo la corregisteis? ¿SF?
SF: Yo he puesto tres más tres
I: Has puesto tres más tres igual a…
SF: Seis
I: Y eso es cierto, tres más tres es igual a seis, ¿JK?
JK: Tres más cero es igual a tres
I: Creo que mucha gente puso eso. Levantad la mano si habéis puesto eso para corregirla. Sí, muchos de vosotros pusisteis eso para corregirla. ¿Y qué pensáis sobre ésta?

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra 7 = 12)

I: ¿Verdadera o falsa?
La clase: Verdadera
I: Siete igual a doce
La clase: Verdadera
I: ¿SF?
SF: Falsa
I: ¿Por qué es falsa?
SF: Porque no son el mismo número
I: No son el mismo número ¿verdad? No es igual el uno al otro.
CL: Tienes que sumarlos
I: ¿Cómo podemos corregirla? ¿CL?
CL: Siete más cinco.
I: Muy bien, esa es una forma de corregirla. Siete más cinco igual a….
La clase: Doce
I: ¿Cuál es otra forma de corregirla? ¿MG?
MG: Yo he escrito dos formas…
I: Vale
Ma: Siete igual a siete y doce igual a doce
I: ¡Muy bien! ¿Son todas estas verdaderas ahora? ¿CH? ¿Tienes alguna pregunta?
CH: ¿Y si fuera seis igual a doce?
I: Bueno, ¿es esto verdad?
La clase: No
I: No, ¡Es falsa! Entonces ¿cómo la corregiríais para demostrar que dos veces seis es igual a doce? ¿Qué ecuación podremos escribir para corregirla? ¿JR?
JR: Seis más seis igual a doce
I: ¿Hay alguna otra? ¿AL?
AL: Doce menos seis igual a seis

I: Vale y ¿qué os parece si la escribimos de esta forma (6 = 12 – 6)? ¿Es ésta verdadera?
(Gesto de afirmación de parte de la clase)
I: ¿DQ? ¿Eso es un sí? Vale, hagamos la siguiente.

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra: 10 = 4 + 6)

I: ¿Verdadero o falso? Levantad la mano si queréis decir algo sobre ésta. ¿YZ?
YZ: Verdadera
I: ¿Por qué es verdadera?
YZ: Porque los dos son lo mismo
I: Los dos son lo mismo. Este es diez y este es diez, ¿verdad? Alguno de vosotros pensasteis que era falsa, ¿por qué pensasteis que era falsa? ¿DH?
DH: Porque estaba al revés.
I: Porque está al revés, ¿está bien que esté al revés?
La clase: *(gesto de asentimiento)*
I: Vosotros no estáis acostumbrados a verlo de esta forma, ¿verdad? Pero está bien. Es también verdad
MH: ¡Hay que pensar!
I: Ahora vamos a ver una que ha confundido a mucha gente.

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra 2 + 2 + 2 = 3 + 3)

CH: Esa es verdadera.
I: CH piensa que ésta es verdadera, ¿MG tú que piensas?
MG: Creo que es verdadera porque dos más dos más dos es igual a seis y también lo es tres más tres
I: ¿Cuánta gente está de acuerdo con MG? Muy bien, alguno de vosotros pensasteis que era falsa. Cuando pensasteis que era falsa, ¿por qué lo pensasteis? ¿SF?
SF: Porque tiene el signo igual entre el dos y el tres.
I: Entonces no te ha gustado tener el signo igual aquí, ¿donde te gusta ver el signo igual?
SF: Al final
I: ¿Al final? ¿Aquí? (Al final de toda la igualdad)
La clase: No
I: ¿Entonces cómo la corregiste?
SF: Yo he escrito dos más dos más dos igual a seis y tres más tres igual a seis
I: Muy bien, y esas son verdaderas, y por eso lo era ésta en primer lugar. ¿DH?
DH: Yo creía que era falsa porque pensé que debía ser dos más tres
I: ¿Tú pensaste que esto era dos más tres aquí?
DH: Y puse cinco
I: ¿Y pusiste dos más tres igual a cinco?
DH: Sí
I: Vale, ¿Qué pensáis sobre ésta?

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra 34 = 34 + 12)

I: ¿Qué pensáis? ¿JK?
JK: Falsa
I: ¿Por qué es falsa? ¿Puede ayudar alguien a JK? ¿Por qué es falsa? ¿MH?

MH: Porque doce más treinta y cuatro no es igual a treinta y cuatro
I: Doce más treinta y cuatro no es igual a treinta y cuatro. ¿Cómo lo sabes?
MH: Doce más treinta y cuatro no es igual a treinta y cuatro….es falsa porque va a ser más que treinta y cuatro
I: ¿Alguna otra forma de corregirlo? ¿CH?
CH: Cuarenta y seis igual a treinta y cuatro más doce
I: Muy bien
I: ¿Alguna otra forma de corregirlo? ¿AL?
AL: Cambiar el doce por un cero
I: Cambiar el doce por un cero. Bien, ¿alguna otra idea? ¿JR?
JR: Cero más treinta y cuatro
I: Sí, podemos cambiarlo de orden y todavía sería verdadera. ¿RY?
RY: Quitar el signo más y el doce
I: Entonces sería sólo…
RY: Treinta y cuatro igual a treinta y cuatro
I: ¿Es ésta verdad?
La clase: Sí
I: ¿YZ?
YZ: Treinta y cuatro veces uno igual a treinta y cuatro
I: Treinta y cuatro veces uno igual a treinta y cuatro. ¡Bien pensado!
I: ¿DQ?
DQ: Treinta y cuatro dividido entre uno igual a treinta y cuatro
I: ¡Ups!, ¡he escrito algo falso y no os habéis dado cuenta! ¿Esto es verdadero o falso?
La clase: Falso
I: ¿Falso? Lo he escrito mal. DQ ha dicho treinta y cuatro dividido por…
DQ: Uno
I: Igual a treinta y cuatro. Haremos una más.

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra 99 + 4 = 4 + 9)

I: Muchos de vosotros pusisteis una interrogación en esta igualdad. ¿Quién tiene una idea de cómo es esta igualdad? ¿SF?
SF: Ciento dieciséis
I: ¿Dónde?
SF: Al final
I: Entonces ¿qué debería decir toda la frase?
SF: Noventa y nueve más cuatro más cuatro más nueve igual a ciento dieciséis
I: Muy bien, entonces tú has movido todo a este otro lado del signo igual. Entonces tú has pensado que ésta era falsa. ¿Alguien más ha pensado que era falsa?
La clase: *(gesto de asentimiento)*
I: ¿De qué otra forma podemos corregirla? ¿MG?
MG: Podemos… noventa y nueve más cuatro igual a ciento seis
I: ¿Es esto verdad? ¿Noventa y nueve más cuatro igual a ciento seis?
MG: Sí, lo he sumado en un papel
I: Vamos a pensar en esto por un momento. Noventa y nueve y cuatro más. Cien, ciento uno, ciento dos, ciento tres
MG: Ciento tres, y eso definitivamente no es igual que cuatro más nueve
I: Y eso por lo que ésta es falsa
MG: Sí

I: Vale. ¿Alguna otra idea de cómo corregirla? YZ, ¿tienes alguna idea? ¿No? Vale. ¿Quién puede decirme lo que significa este símbolo de aquí? (=) ¿JK?
JK: Igual a
I: ¿Igual a? ¿Eso qué quiere decir?
JK: La misma cantidad
I: La misma cantidad. Hay la misma cantidad en este lado que en este otro. Vosotros estáis tan acostumbrados a algo que es como esto (_+_ = _) cuando nosotros lo cambiamos os confundís, porque no habéis visto muchos ejemplos que sean diferentes a eso. Pero está bien tener algo que sea como esto (_+_ = _+_) ¿verdad? ¿Está bien tener una ecuación que se obtenga rellenando estos huecos? ¿Quién puede decirme una en la que rellenemos estos huecos, con números diferentes? ¿A2?
A2: Ochenta más veinte…
I: Ochenta más veinte igual a…
A2: Cien
I: Bueno, yo quiero algo más algo
A2: ¡Ah! Noventa más diez
I: Noventa más diez. ¿Es esto verdad?
La clase: *(gesto de asentimiento)*
I: Sí, es verdad. Muy bien. Quiero que saquéis una hoja de papel, preparad vuestros lápices y esto es lo que vais a hacer. Vais a hacer algunos ejemplos y pueden ser como esto (_+_ = _+_) o pueden ser como esto (_-_ = _-_) o incluso pueden ser más originales (_+_ = _-_). ¿Vale? Así que a ver lo que podéis inventar. Escribid vuestro nombre al principio del folio y escribid algunos ejemplos en los que rellenéis estos huecos.

(Una vez los alumnos/as han terminado de hacer los ejemplos se continúa la clase como sigue. En la pizarra I ha escrito varias de las igualdades que han construido los/as alumnos/as: 90 + 200 = 200 + 10 + 10 + 20 + 30 + 20, 11 + 1 = 7 + 5, 18 – 12 = 19 – 13, 8 + 8 = 9 + 7 y 3 x 4 = 2 x 6).

I: ¿Hay alguna forma de hacer esto sin tener que sumar todo? *(refiriéndose a la igualdad 90 + 200 = 200 + 10 + 10 + 20 + 30 + 20)* ¿DQ?
DQ: Multiplicando
I: ¿Multiplicando? ¿Qué multiplicarías?… Podemos hacer un poco de multiplicación por aquí, podemos hacer diez veces dos y veinte veces dos por esa otra parte. Esa era una ecuación original. Levantad la mano si estáis de acuerdo con que ésta es verdadera. *(Señalando a la igualdad 11 + 1 = 7 + 5)* ¿Es verdadera o falsa?
RY: Falsa
I: ¿Por qué es falsa?
RY: Porque siete más cinco son doce mmmm… ¡es verdadera!
I: Se acaba de convencer él sólo de que es verdadera. ¿Y qué pensáis sobre ésta con restas? (18 – 12 = 19 – 13) Ésta es de DH, ella estaba usando restas. ¿Verdadero o falso? ¿AL tú qué piensas?
AL: mmmmm
I: DH, ¿qué piensas?
DH: Verdadera
I: ¿Por qué?
DH: Dieciocho más doce igual a seis
I: Dieciocho menos doce igual a seis, y diecinueve menos trece igual a….
DH: Seis

I: A3 seis también, los dos son igual a seis ¿A3 qué piensas de ésta? (8 + 8 = 9 + 7)
A3: Verdadera
I: Ésta es verdadera. ¿Por qué?
A3: Porque ocho más ocho son dieciséis y nueve más siete son dieciséis
I: Muy bien, los dos son dieciséis, ¿y qué pensáis sobre esta última? (3 x 4 = 2 x 6) ¿MH?
MH: Verdadera
I: ¿Por qué?
MH: Porque tres veces cuatro es doce y dos veces seis es doce
I: Muy bien. ¡Muchas gracias! Habéis trabajado mucho hoy

C4: ANOTACIONES SESIÓN 3ª

Día: 2-19-2004
Número de alumnos en clase: 18

La investigadora (I) lee las instrucciones de la actividad con los alumnos/as y les explica lo que tienen que hacer. I escribe cada igualdad en la pizarra y la lee. Entonces pregunta de forma general a toda la clase o a aquellos alumnos/as con la mano levantada si la igualdad es verdadera o falsa, pidiéndoles, además, que justifiquen su respuesta. En aquellas igualdades que son falsas o algún alumno/a ha dicho que lo son, la investigadora les pregunta como la corregirían. (Tras cada igualdad recogemos los comentarios que realizaron los alumnos/as).

Nota: SF se ausenta del aula mientras transcurre la discusión de las igualdades 1 a la 4. JS abandona el aula tras la discusión de la quinta igualdad.

1. 20 + 20 = 20 + 20

DH: Es verdadera
AL: Es verdadera porque veinte más veinte es igual a cuarenta y veinte más veinte es igual a cuarenta
A1: Es verdadera porque son los mismos números
A2: No hace falta escribir la respuesta
MH: Creía que era falsa porque el signo igual está en el medio
I: ¿Está bien escribir el signo igual en el medio?
La clase: Sí

2. 10 x 10 =100 = 90+10

DH: Es verdadera porque diez veces diez es igual a cien y noventa más diez es igual a cien
HR: Es verdadera porque si sumas ambos obtienes cien
I: ¿Hace falta escribir el cien en el medio?
(Varios alumnos/as responden que no están seguros)
I: ¿Y esta igualdad (10 x 10 = 90 + 10)? ¿Es verdadera?
La clase: Sí

3. 7 + 15 = 100 + 100

(Muchos alumnos/as han rodeado la F pero se muestran inicialmente reacios a explicar como corregir la igualdad)

MH: Es falsa porque siete más quince es pequeño y cien más cien es igual a doscientos **HS:** Es falsa porque siete más quince es igual a veintidós y cien más cien es igual a doscientos
I: ¿Cómo sabía MH que seria más pequeño?
AL: Siete más quince no es ni siquiera cien
I: ¿Cómo podemos corregir esta igualdad para que sea verdadera?
MG: Podemos escribir siete más quince iguales a treinta y dos… *(Inmediatamente se corrige a si misma)* siete más quince igual a veintidós

CH: Podemos escribir siete más ciento noventa y tres igual a cien más cien
RY: Dos veces cien igual a cien más cien

4. 12 + 11 = 11 + 12

La clase: Es verdadera
A3: Es verdadera porque tiene los mismos números: el doce está delante y después detrás, y el once está detrás y después delante
I: ¿No has tenido que sumar nada?
A3: No
MH: Es verdadera porque han cambiado de orden los números

5. 15 + 2 = 15 + 3

HY: Es falsa porque no son iguales
I: ¿Hay alguna forma de averiguarlo sin tener que sumar?
AL: Es falsa porque tres es más grande que dos
I: ¿Cómo podemos corregirla?
MG: Podemos escribir quince más dos igual a diecisiete
A4: Dos veces nueve igual a quince más tres
HR: Quince más tres igual a quince más tres
DQ: Diecisiete más uno igual a quince más tres

6. 3 x 5 = 15 ÷ 1

AT: Es verdadera porque tres veces cinco es igual a quince y quince dividido entre uno, es igual a quince
HR: Es verdadera porque tres veces cinco es igual a quince y quince dividido entre uno es igual a quince

7. 6 – 6 = 1 – 1

JR: Es falsa porque seis menos seis es igual a cero
I: ¿Crees que debería haber un cero después del signo igual?
JR: Sí
SF: Es verdadera porque seis menos seis es igual a cero y uno menos uno es igual a cero
I: A veces esto es un poco confuso

8. 10 – 7 = 10 – 4

MH: Ésta es fácil
S5: Es falsa porque diez menos siete es igual a tres y diez menos cuatro es igual a seis
I: ¿Hay alguna forma de averiguarlo sin hacer la aritmética?
(La pregunta queda sin respuesta)
I: ¿Cómo podemos corregir esta igualdad?
SF: Podemos escribir diez menos cuatro igual a diez menos cuatro
DQ: Diez menos siete igual a dos más uno
RY: Podemos escribir diez menos siete igual a siete menos cuatro

9. 51 + 51 = 50 + 52

YZ: Es verdadera porque cincuenta y uno más cincuenta y uno es igual a cincuenta y dos
I: ¿Es cierto? Cincuenta más cincuenta es igual a cien y uno más uno es igual a dos, así que es ciento dos. ¿Es cincuenta y dos más cincuenta igual a cincuenta?
YZ y otros alumnos: Sí
I: ¿Alguien lo hizo sin hacer la aritmética?
A6: Es verdadera porque si tomas el uno de un cincuenta y uno al otro cincuenta y uno entonces obtienes cincuenta más cincuenta y dos

10. 5 + 1 = 7 – 1

HY: Es verdadera porque cinco más uno es igual a seis y siete menos uno es igual a seis
(I no pregunta a más alumnos/as)

11. 3 + 3 + 3 = 9 + 2 = 11

I: ¿Qué pensáis de esta igualdad? ¿Es verdadera o falsa?
CL: Creo que es falsa porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once
I: ¿No es eso lo que dice ahí?

(I lee la igualdad de nuevo y pregunta a aquellos alumnos/as que levantan la mano, escuchándose las siguientes intervenciones)

A2: Tres más tres más tres no es igual a once
AL: Yo creo que es verdadera.
HR: Yo creo que es falsa porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once
CH: Es falsa porque el signo igual está en el medio y tres más tres más tres es nueve y nueve más dos es igual a once
HY: Es falsa. Todas las partes deberían ser nueve.
MG: No estoy segura… es en parte verdad y también parece falsa.
DH: Es cierta porque tres más tres más tres es igual a nueve y nueve más dos es igual a once
I: Un matemático diría que es falsa. Los matemáticos usan flechas de esta forma cuando quieren expresar una cadena de operaciones *(escribiendo: 3+3 +3 →9 + 2 → 11)*

Los alumnos/as intercambian unas últimas ideas:

MH: 5 +5 = 10 y 5 +5 = 6 +5 es falsa porque no suman lo mismo.
I: ¿Qué escribirías en la igualdad 5 +5 = 6 +□ para que sea verdadera?
MH: Cuatro
HY: Si tienen la misma respuesta es verdadero pero si tienen distinta respuesta es falso. *(Pidiendo confirmación)*

C5: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 4ª

Día: 3-4-2004
Número de alumnos en clase: 18

I: Ahora vamos a hacer unas pocas de esas ecuaciones. ¿Os acordáis que estuvimos haciendo algo sobre el signo igual? Marta ha preparado algunos problemas para nosotros.
Así que vamos a repartiros unas hojas….

(Se reparten los folios con las igualdades verdaderas y falsas)

I: MH ya está preparado, ha escrito su nombre y la fecha en el folio. AL también está preparada. ¿Estáis preparados para decidir si unas igualdades son verdaderas o falsas? ¿Recordáis como la hicimos la última vez? Vais a hacerle un círculo a verdadero o falso si la igualdad es verdadera o falsa. Ahora viene la primera igualdad.
MH: Verdadera.
I: MH está anticipando que es verdadera. Vais a poner un círculo a verdadero o falso y no vais a decir en alto la respuesta, ¿vale MH?

(I escribe la primera igualdad en la pizarra: 37 + 23 = 142*)*

I: Hacedle un círculo a verdadero o falso y si pensáis que es falsa corregidla.

(Una breve pausa)

I: ¿A1 qué piensas?
A1: Falso
I: ¿Por qué?
A1: Porque.....es igual a…tiene que ser pequeño
I: ¿Cómo sabes que tiene que ser pequeño?
A1: Porque lo aprendí en segundo grado
I: Porque lo aprendiste en segundo grado. ¿MH?
MH: No son iguales
I: ¿Por qué no?
MH: Porque treinta y siete más veintitrés no es igual a ciento cuarenta y dos
I: Estos no son lo mismo. Y A1 dice que son demasiado pequeños para que sumen ciento cuarenta y dos. ¿Estáis de acuerdo con esa idea? ¿A2?
A2: …Debería corregirse después del igual
I: Entonces, ¿cómo te gustaría corregidla?
A2: Treinta y siete más veintitrés es igual a sesenta
I: ¿Esta igualdad es verdadera? La ha corregido.
CH: Treinta y siete más ciento cinco igual a ciento cuarenta y dos
I: Bien pensado, ¿RY?
RY: Cien más cuarenta y dos es igual a ciento cuarenta y dos.
I: Muy bien, muchas buenas ideas. ¿Sabéis que? No vamos a escuchar todas vuestras ideas ahora pero las veremos después en vuestra hoja. Veamos el siguiente problema.

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra: 27 + 48 – 48 = 27)

I: Veamos que pensáis de ésta. Hacedle un círculo a lo que penséis. Veintisiete más cuarenta y ocho menos cuarenta y ocho igual a veintisiete
MH: Verdadero
I: No lo digáis. Hacedle un círculo simplemente para que cada uno lo piense por si mismo.

(Una breve pausa)

I: CL, te he oído decir algo; ¿qué piensas?
CL: Verdadera
I: ¿Piensas que es verdadera? ¿Por qué piensas eso?
CL: Porque veintisiete más cuarenta y ocho menos ese cuarenta y ocho es igual veintisiete
I: ¿Cómo? Porque yo creo que tú no has hecho ninguna suma ni resta, ¿verdad?
CL: No
I: ¿Y cómo lo sabes sin hacer ninguna suma ni resta? Muchos niños estaban sumando y restando.
CL: Porque hay un más cuarenta y ocho y un menos cuarenta y ocho
I: ¿Qué va a ser eso? Ese más cuarenta y ocho y ese menos cuarenta y ocho
CL: Cero
I: ¿Quién está de acuerdo con CL? Él dice que si sumas cuarenta y ocho y restas cuarenta y ocho da cero; esta parte va a ser como sumar cero.
La clase: *(Gesto de afirmación)*
I: Alguna gente está de acuerdo
¿Hay más ideas acerca de esta igualdad? ¿SF?
SF: Porque veintisiete más cuarenta y ocho es igual a setenta y seis y si es igual a cuarenta y ocho..... no y si le restas cuarenta y ocho y.....
I: Entonces ¿tú me estás diciendo que esta parte de aquí es igual a?.....
SF: Setenta y seis
I: ¿Y que pasa cuando a setenta y seis le restas cuarenta y ocho? Ah ¿sabes qué? Vamos a comprobar esto un segundo.
SF: Es treinta y tres
I: Sí pero vamos a comprobar primero esto. SF, cuando sumaste veintisiete y cuarenta y ocho... ¿Cuánto es siete más ocho?
SF: Dieciséis
I: Eso es ocho más ocho. ¿Cuánto es siete y ocho?
SF: Quince
I: Quince. Entonces cuando tú haces setenta y cinco menos cuarenta y ocho. Creo que te va a salir veintisiete. ¿Lo entendiste SF de la manera que CL lo explicó? Él dijo no tengo ni que hacer esas sumas; sumar cuarenta y ocho y quitar cuarenta y ocho no va a cambiar el número. Vale, vamos a hacer otra. ¿Alguien tiene alguna pregunta? ¿DH?
DH: ¿Qué diría un matemático?
I: ¿Qué diría un matemático? Un matemático diría que es verdadera. Un matemático estaría de acuerdo con CL. Si sumas cuarenta y ocho y restas cuarenta y ocho es veintisiete. Muy bien, veamos que pensáis sobre la siguiente.

(I escribe la siguiente igualdad en al pizarra 34 + 28 = 30 + 20 + 4 + 8)

CH: Esa tiene truco.... esto es difícil

(Una breve pausa)

I: Muy bien, AT va a explicar lo que piensa. ¿Que piensas AT?
AT: Es verdadera.
I: ¿Por qué piensas que es verdadera?
AT: Porque treinta y cuatro más veintiocho es igual a treinta más veinte sumándole cuatro y ocho
I: Muy bien, ¿quién está de acuerdo con AT que es verdadera? ¿Alguien tiene una forma diferente de explicarlo? ¿Por qué es verdad? ¿AL?
AL: Los dos son igual a sesenta y dos
I: Los dos son igual a sesenta y dos, muy bien. ¿HR?
HR: Porque es verdad
I: Ja ja, muy bien. ¿A2?
A2: Porque todos juntos son igual a lo mismo.
I: Todos juntos son igual a lo mismo. ¿Has tenido que hacer sumas para averiguarlo?
A2: He hecho algunas sumas.
I: Has hecho algunas sumas. ¿Alguien ha averiguado ésta simplemente mirándola? ¿JK? ¿Tú lo hiciste?
JK: No
I: ¿CH? ¿Lo averiguaste tú simplemente mirándola o....?
CH: Hice algunas sumas
I: ¿AL? ¿Lo has averiguado simplemente mirándola?
AL: Sí
I: ¿Cómo lo has averiguado?
AL: Treinta más veinte son cincuenta y cuatro más ocho son doce
I: Bien hecho. Muy bien, vamos a intentar ahora otra. Estamos en el número cuatro ¿verdad?
La clase: Sí

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra: 76 = 50 - 14)

I: ¿Verdadera o falsa? Haced un círculo en vuestra hoja y levantad la mano cuando estéis listos.

(Una breve pausa)

I: ¿Sólo esta mesa de delante está preparada? ¿Y el resto? ¿Estáis pensando?
Muy bien, JR, ¿qué piensas?
JR: Yo creo que es falsa
I: ¿Cómo sabes que es falsa?
JR: Porque setenta no es igual que cincuenta
I: ¿Por qué setenta no es igual que cincuenta? ¿Puedes decir algo más sobre eso?.... Yo estoy de acuerdo, setenta no es igual que cincuenta. ¿Cómo te dice esto que la igualdad es falsa?
JR: mmm…
I: Es difícil explicarlo con palabras, ¿verdad? ¿Quieres ayuda de alguien?
JR: Sí
I: Muy bien, ¿de quien quieres ayuda?
JR: De DQ

I: ¿Puedes explicarlo con palabras DQ?
DQ: Es falsa.
I: ¿Por qué es falsa? ¿Piensas que es falsa? ¿Puedes explicarlo con palabras?.... ¿Sí o no? ¿Se te ha olvidado?..... Muy bien. CL, ¿tú que piensas?
CL: Falsa, porque cincuenta menos catorce es igual a treinta y seis.
I: ¡OH!, Entonces esto es treinta y seis y eso no es lo mismo que setenta y seis. ¿Alguien tiene otra forma de pensar en esto? ¿AT?
AT: Verdadera.
I: ¿Tú piensas que es verdadera? ¿Por qué?
AT: Porque cincuenta más catorce es setenta y seis
I: ¿Es igual? Pero hay un menos. Yo creo que estás tomándonos el pelo. ¿Estás tomándonos el pelo o realmente piensas que es verdadera? Porque esto dice menos catorce. Veamos lo que piensa SF.
SF: Yo creo que es falsa porque cincuenta no es más grande que setenta y seis y si le restamos más, no puede ser mayor.
I: Muy bien. ¿RY?
RY: Yo creo que es falso porque cincuenta menos catorce es igual a cuarenta y seis.
I: Muy bien. Yo creo que otra persona pensó que era treinta y seis. ¿Crees que es treinta y seis o cuarenta y seis?
RY: Cuarenta y seis
I: Eso sería cincuenta menos cuatro, que es cuarenta y seis; menos diez más, es treinta y seis. Entonces esto es treinta y seis.
MG: Creo que es falsa porque cincuenta es menos que setenta y seis y si tú restas un número pequeño de cincuenta, va a ser más pequeño que setenta y seis, de todas las maneras es falso.
I: Muy bien, entonces como cincuenta ya es más pequeño que setenta y seis, esto tiene que ser más pequeño. Muy bien ¿MH?
MH: Es falsa porque a cincuenta si le quitas catorce, no es igual que setenta y seis.
I: Muy bien, vamos a hacer uno que tiene multiplicación. ¿Verdadero o falso?

(I escribe la igualdad 4 x 5 = 5 + 5 + 5 + 4)

(Una breve pausa)

I: ¿Quién tiene algo que decir acerca de esta igualdad? YZ, ¿tú que piensas?
YZ: Es falsa.
I: ¿Por qué es falsa?
YZ: Porque cuatro por cinco es veinticinco más cinco más cinco más cuatro es diecinueve
I: Porque este lado es veinte y este otro diecinueve. ¡Bien hecho!, ¿Alguna otra forma de pensar sobre ésta? ¿HR?
HR: Si el cuatro fuera un cinco sería veinte pero como es uno menos es diecinueve.
I: Muy bien, ¿alguien hizo esto sin hacer ninguna aritmética? ¿JR?
JR: Creo que es un poco falsa porque cuatro por cinco es veinte más cinco es veinticinco.... Se me ha olvidado.
I: Tienes razón, es falsa. ¿JK?
JK: Debería ser cuatro por cinco igual a cinco más cinco más cinco más cinco
I: Entonces éste debería haber sido un cinco. Tienes razón. Porque… ¿qué quiere decir esto?
La clase: Veinte

I: Pero además de la respuesta, qué quiere decir cuatro por cinco. ¿DQ?
DQ: Veinte
I: Esa es la respuesta, pero ¿qué es lo que te está diciendo? ¿AL?
AL: Cinco más cinco más cinco más cinco... cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro
I: Puede ser sumar cuatro veces cinco o podemos sumar... ¿MG?
MG: Un uno después del cuatro
I: Entonces ¿cómo es la frase de suma que va con esto?
MG: Sería cuatro cincos o cinco cuatros
I: Muy bien, cuatro cincos, vale

(I escribe en la pizarra la siguiente igualdad: 20 + 15 = 20 + 10 + 5)

(Una breve pausa)

I: HY, ¿qué piensas?
HY: Verdadera
I: ¿Por qué piensas que es verdadera?
HY: Porque veinte más quince no es igual a veinte
I: Eso es verdad veinte más quince no es igual sólo a veinte, pero tú me has dicho que todo esto es verdadero.... y tienes razón es verdadera. ¿Puedes decirnos porque?
HY: Es verdad porque veinte más quince.... Se me ha olvidado.
I: Se te ha olvidado, muy bien. ¿JK?
JK: Es verdadera porque veinte más quince es treinta y cinco y veinte más diez es treinta y más cinco, treinta y cinco
I: Muy bien. Entonces este lado es treinta y cinco y este otro es treinta y cinco. ¿AL? ¿Lo has averiguado tú de otra forma?
AL: Porque diez más cinco es quince
I: De acuerdo, entonces no tuviste que hacer todas estas sumas y miraste a este lado y dijiste que este quince es igual que diez más cinco y las otras partes son iguales
AL: Sí
I: ¡Oye! ¡Eso está muy bien pensado! ¿No? Ella no tuvo que hacer toda la aritmética. ¿Alguien más lo ha hecho de la misma forma que AL? SF, ¿tienes otra idea?
SF: Tal vez veinte más quince igual.....
I: Treinta y cinco. Creo que eso es justo lo que JK acaba de decir. Este lado es treinta y cinco y este otro lado es treinta y cinco.
SF: Veinte y veinte son lo mismo y diez más cinco son quince y esos son lo mismo también.
I: Eso es, estas partes son iguales. ¿HR?
HR: Es verdadera porque veinte más quince es treinta y cinco y veinte más diez es treinta y cinco es treinta y cinco.
I: Veamos si averiguáis la siguiente. Tenemos tiempo para dos más.

(I escribe la siguiente igualdad en la pizarra 103 + 205 = 105 + 203)

(Una breve pausa)

I: MH es tu turno para decirnos lo que piensas
MH: Es verdadera porque ciento tres más doscientos cinco es igual a ocho y ciento cinco más doscientos tres es ocho y los dos ochos hacen juego

I: Muy bien, entonces piensas que son iguales y me estas diciendo algo de un ocho; ¿de donde viene ese ocho?
CL: Las unidades
MH: Las unidades, el cinco y el tres
I: Entonces tú sólo miraste a esta parte y dijiste tres más cinco van a ser lo mismo que este otro cinco más tres
MH: Sí
I: ¿Alguien lo ha hecho de la misma manera que MH? *(Gestos de asentimiento de la clase)* Muy bien, SF, tú estás llena de ideas hoy.
SF: Yo he visto el cinco y el tres porque cinco más tres son ocho y hay dos ochos haciendo juego y entonces tenemos trescientos ocho y en el otro lado trescientos ocho.
I: Entonces no has tenido que hacer esas sumas, sólo has mirado a las unidades. ¿MG?
MG: Yo he hecho algunas sumas. Ciento tres más doscientos cinco es trescientos ocho y también me dio trescientos ocho en el otro lado. Entonces tienen que ser iguales.
I: ¿AT?
AT: Es falso porque ciento tres más doscientos cinco y ciento cinco más doscientos tres no es lo mismo.
I: Bueno, entonces tienes que enseñarme cual es la respuesta a esto antes de que yo esté de acuerdo contigo
RY: Han cambiado de orden el cinco y el tres
I: Han cambiado el cinco y el tres, ¡exacto! Voy a daros algunas más. Creo que tenemos tiempo para dos más. ¿Cuánto espacio tenéis?
CH: ¡Yo quiero tres más!

(I escribe la igualdad en la pizarra: 12 – 7 = 13 – 8)

I: Vamos a esperar un minuto más para que todo el mundo tenga tiempo de pensar la respuesta.

(Una breve pausa)

I: HY, ¿qué piensas?
HY: Es verdadera porque doce menos siete es cinco y trece menos ocho es cinco
I: Muy bien, cada lado es igual a cinco. Eso es cierto. ¿AL? ¿Lo has hecho tú sin calcular el resultado? ¿Cómo lo has pensado?
AL: Porque hay doce menos siete y en el otro lado es trece menos ocho y.... han sumado uno al siete y han sumado uno al doce.
I: ¡Eh!, ¿Es eso cierto que han cambiado sólo un poco? ¿Sumando uno a este y otro a este y el resultado es el mismo? Eso es bastante ingenioso ¿no? ¿MH?
MH: Yo he restado el siete al doce y da cinco y trece menos ocho es cinco
I: Tienes razón pero ¿sabes que? HY ya nos ha dicho eso. Hace falta que os escuchéis unos a otros para que no repitamos las ideas una y otra vez. ¿Sabéis que? Ya es tiempo de que preparéis, así que ya está.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN **5**

Situación personal *5*

Origen de este trabajo de investigación *6*

Relación con el Grupo de investigación Pensamiento Numérico *8*

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN **1**

1.1 REFORMA DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA 1

1.2 PENSAMIENTO RELACIONAL 3

1.3 APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN 4

1.3.1 Comprensión de las matemáticas *4*

1.3.3 Prácticas que promueven un aprendizaje con comprensión de las matemáticas *7*

1.3.4 Detectar la comprensión *10*

1.4 CONCEPCIONES 11

1. 5 OBJETIVOS DEL TRABAJO 13

1.6 JUSTIFICACIÓN DEL INTERÉS DEL TRABAJO 14

1.7 BÚSQUEDA BIBLIOGRÁFICA 16

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO **19**

2.1 ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA 19

2.2 EARLY ALGEBRA 20

2.3 ¿QUÉ ES ÁLGEBRA EN EARLY ALGEBRA? 22

2.4 EARLY ALGEBRA Y ARITMÉTICA 23

2.5 LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA. 25

2.5.1 El cálculo mental *27*

2. 5. 2 El pensamiento relacional en el aprendizaje de la aritmética *27*

2. 5. 3 El papel de las igualdades numéricas en el aprendizaje de la aritmética *28*

2.6 PROCESO VERSUS OBJETO. CONCEPCIONES OPERACIONAL Y ESTRUCTURAL 30

2.7 DIFERENTES ENFOQUES EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA Y DE LA ARITMÉTICA 32

2.7.1 Dos modelos para una enseñanza estructural de la aritmética *33*

2.8 ESTUDIOS PREVIOS SOBRE LA COMPRENSIÓN DEL SIGNO IGUAL Y LA RESOLUCIÓN DE IGUALDADES NUMÉRICAS 35

2.8.1 ¿Por qué los/as alumnos/as tienden a desarrollar concepciones erróneas sobre el significado del signo igual? *43*

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN **47**

3.1 INVESTIGACIÓN DIRIGIDA POR UNA CONJETURA 47

3.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN Y RECOGIDA DE DATOS 48

3.3 SUJETOS DEL ESTUDIO 52

CAPÍTULO 4: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN 55

4.1 SESIÓN 1ª: IGUALDADES ABIERTAS 55
4.2 SESIÓN 2ª: IGUALDADES VERDADERAS Y FALSAS E IGUALDADES DE LOS ESTUDIANTES 63
4.3 SESIÓN 3ª: DISCUSIÓN Y EVALUACIÓN 71
4.4 SESIÓN 4ª: DISCUSIÓN 77
4.5 SESIÓN 5ª: EVALUACIÓN 79
4.6 ANÁLISIS FINAL DE LA INVESTIGACIÓN 81

CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES 85

REFERENCIAS 93

ANEXOS DEL TRABAJO 103

ANEXO A: HOJAS DE ACTIVIDADES 104
Actividades Sesión 1ª 104
Actividades Sesión 2ª 105
Actividades Sesión 3ª 106
Actividades Sesión 4ª 109
Actividades Sesión 5ª 111
ANEXO B: TABLAS 113
Tabla B1: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 1ª 113
Tabla B2: Respuestas a la actividad escrita de la Sesión 2ª 118
Tabla B3: Resultados de la actividad de construcción de igualdades de las formas
__+__=__+__ , __-__=__-__ y __+__=__-__ en la Sesión 2 119
Tabla B4: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 3ª 117
Tabla B5: Respuestas a la prueba escrita de evaluación de la Sesión 5ª 123
Tabla B6: Respuestas a la última cuestión de la prueba escrita de la Sesión 5ª: 120
Tabla B7: Evolución de los alumnos/as a lo largo de las cinco sesiones 121
ANEXO C: TRANSCRIPCIONES 123
C1: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 1ª 123
C2: Trascripción de las entrevistas de la Sesión 1ª 127
C3: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 2ª 128
C4: ANOTACIONES SESIÓN 3ª 135
C5: TRASCRIPCIÓN SESIÓN 4ª 138