

# HEMEROLOGÍA

## La ciencia de los Calendarios

Wenceslao Segura González



HEMEROLOGÍA  
La Ciencia de los  
Calendarios

*Wenceslao Segura González*

Editorial Acento 2000 S.L.  
Tarifa-España, 2006

© Wenceslao Segura González  
wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

*ISBN:* 84-934263-1-8

*Depósito Legal:*

*Edita:* Acento 2000 SL  
Bailén, 10  
11380 Tarifa  
España  
Tfno. 956 68 44 50

*Impresión:* Grafisur-Tarifa

*This research has made use of NASA's Astrophysics Data System*

## Prefacio

*Es acertado afirmar que un grupo humano adquiere la categoría de civilizado cuando se dota de un calendario, lo que le permite ubicar en el pasado los hechos históricos, algo esencial para lograr una identidad como comunidad. Además, un calendario sirve para programar acontecimientos futuros, en especial las festividades religiosas. De ahí su enorme importancia y el esfuerzo que desde siempre se ha puesto para construir calendarios adecuados para fines civiles y religiosos.*

*Al buscar fenómenos periódicos sobre los que basar un calendario, se encontró que la naturaleza daba tres magníficos periodos: la rotación de la Tierra sobre su eje que da lugar al día, la lunación –o tiempo entre dos Lunas nuevas– que origina el mes, y por último el año, relacionado con la rotación de la Tierra alrededor del Sol. Es lógico, por tanto, que la Hemerología o ciencia de los calendarios sea un disciplina astronómica.*

*La Hemerología puede entenderse como el estudio de la medida cronológica del tiempo, que es diferente a la cronometría, que en esencia trata de medir con la mayor precisión el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos, normalmente pequeño. Al contrario, la cronología pretende colocar un suceso en una escala temporal, que exige además de una escala un origen temporal.*

*La diferencia entre cronología y cronometría es más profunda, pues utilizan escalas de tiempo diferentes. El tiempo universal, derivado de la rotación aparente del Sol, es en esencia la escala usada para construir los calendarios. Por contra, el tiempo atómico o uniforme es el utilizado en la cronometría.*

*Como los movimientos astronómicos son conocidos en función del tiempo uniforme, se encuentra que uno de los problemas principales de la Hemerología consiste en relacionar el tiempo universal y el atómico, algo que sólo se puede hacer aproximadamente, al no poder preverse con entera seguridad la irregular rotación de la Tierra sobre su eje.*

*Como demuestran las páginas de este libro, la Hemerología es una verdadera ciencia. Tiene un carácter multidisciplinar, y está relacionada con materias tan dispares como: astronomía, cronología, geofísica, física, historia, teología, fisiología, matemáticas, etc. Muchos asuntos relacionados con la Hemerología no son bien comprendidos, por lo que hay que entenderla como una ciencia viva, que se irá conociendo mejor en el futuro.*

*Este libro es una obra técnica pero se ha puesto el mayor empeño para que sea inteligible. Cuando no afecta a los resultados finales, hemos sacrificado el rigor en aras de la claridad.*

*Tres partes se distinguen en este libro. La primera trata de la metrología del tiempo. Se dedica un capítulo a cada una de las tres escalas de tiempo que han servido para definir el segundo: el tiempo rotacional, el de las efemérides y el atómico. Estas escalas tienen utilidad en Hemerología, siendo especialmente importante la relación entre el tiempo universal y el tiempo uniforme –ya sea éste atómico o de las efemérides–.*

*La segunda parte del libro es eminentemente astronómica y estudia los movimientos del Sol y la Luna, que juntos a la Tierra dan los periodos precisos para construir los calendarios. Merece especial consideración el concepto de año estacional que ha permanecido ignorado y es básico en Hemerología. Lo definimos como el tiempo promedio entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo punto estacional. En el texto damos algoritmos y fórmulas para calcular su duración.*

*Hemos acometido la difícil investigación del calendario empírico lunar y presentamos un algoritmo cuyas previsiones satisfacen los resultados de la observación.*

*La tercera y última parte del libro se dedica enteramente a los calendarios prácticos. Son doce los que se estudian, elegidos por su mayor uso o por su interés hemerológico.*

*Para interrelacionar dos calendarios hemos diseñado un método basado en el día juliano. Dada una fecha se halla el día juliano asociado y viceversa. Con este procedimiento se comparan fechas entre calendarios diferentes, sean computacionales o astronómicos.*

*Se dedica un capítulo al calendario ritual cristiano del tipo lunisolar. Aunque sólo sirve para fijar la fecha de la Pascua de Resurrección, condiciona la vida civil de la sociedad occidental.*

*Aunque ninguna organización internacional lo ha decidido, el calendario gregoriano tiene la consideración de internacional. Este protagonismo nos ha aconsejado dedicar el último capítulo a los intentos, que se vienen registrando desde mitad del siglo XIX, para mejorar el calendario gregoriano.*

*Han sido numerosas las instituciones científicas y administrativas que nos han facilitado información. Mencionar la excelente biblioteca histórica del Real Observatorio de la Armada con sede en San Fernando, donde hemos encontrado información muy valiosa. Agradecemos el buen servicio que nos ha prestado la red de bibliotecas del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. La biblioteca de las Naciones Unidas Dag Hammarskjöld nos dio extensa documentación sobre la reforma del calendario en la Sociedad de Naciones. Nuestro agradecimiento se extiende especialmente a la NASA, cuya base de datos sobre artículos astronómicos y físicos hemos consultado en numerosísimas ocasiones. Terminamos este apartado de agradecimientos reconociendo el servicio que nos ha dado la Biblioteca Pública Mercedes Gaibrois, facilitándonos multitud de préstamos interbibliotecarios.*

*Tarifa, mayo de 2006*

# Contenido

## 1. MEDIDA ASTRONÓMICA DEL TIEMPO

Movimientos de precesión y nutación. . . . .	1
Tiempo sidéreo. . . . .	3
Tiempo solar. . . . .	4
Tiempo civil. . . . .	6
El Sol medio y el promedio del Sol verdadero. . . . .	7
El tiempo solar en función del tiempo sidéreo. . . . .	8
Relación entre la unidad de tiempo sidéreo y el tiempo medio. . . . .	9
Medida del tiempo universal. . . . .	9
La actual forma de medir el tiempo universal. . . . .	10
La conferencia de Washington de 1884 y el cambio de origen de tiempo astronómico. . . . .	12

## 2. EL FRENADO SECULAR DE LA TIERRA

Antecedentes históricos. . . . .	16
Aceleraciones aparentes del Sol y la Luna. . . . .	18
Aceleraciones seculares en los cuerpos celestes. . . . .	20
Alargamiento del día. . . . .	22
Tiempo acumulado entre las escalas uniforme y universal. . . . .	23
Velocidad angular de revolución. . . . .	23
Resultados de la observación. . . . .	26
Momento angular del sistema Tierra-Luna-Sol. . . . .	30
Momentos mecánicos que actúan sobre la Tierra. . . . .	31
Variación de los movimientos medios del Sol y la Luna. . . . .	31
Cálculo de las aceleraciones seculares del Sol y la Luna a partir de la teoría de marea. . . . .	32
La posible variación de la constante de gravitación universal. . . . .	35
Resumen. . . . .	38
El tiempo de las efemérides. . . . .	39

## 3. EL TIEMPO ATÓMICO

Relojes atómicos. . . . .	42
El segundo atómico. . . . .	45
Sistemas no rotante y rotante. . . . .	46
El tiempo terrestre. . . . .	49
Relación entre los tiempos coordenados baricéntrico y geocéntrico. . . . .	50
Sincronización de relojes. . . . .	52
Sincronización por traslado de relojes. . . . .	53
Sincronización por el procedimiento de una vía. . . . .	54
Sincronización por el procedimiento de doble vía. . . . .	55

Tiempo atómico internacional. . . . .	56
Tiempo universal coordinado. . . . .	60
<b>4. EL CALENDARIO SOLAR</b>	
La órbita de la Tierra. . . . .	63
Año trópico. . . . .	65
Años sidéreo y anomalístico. . . . .	67
Años estacionales. . . . .	68
Duración variable de las estaciones. . . . .	73
Conversión de TT a UT. . . . .	77
Movilidad de los puntos estacionales. . . . .	78
Error acumulado de un calendario. . . . .	81
Intercalación de los bisiestos. . . . .	85
Otras reglas de intercalación de bisiestos. . . . .	89
Movilidad calendarista de las estaciones. . . . .	90
Meridiano del calendario solar. . . . .	93
<b>5. EL CALENDARIO LUNAR</b>	
El movimiento de la Luna. . . . .	95
Meses lunares. . . . .	97
La variable duración de la lunación verdadera. . . . .	98
La lunación en función del tiempo universal. . . . .	104
Teoría general de los calendarios lunares computacionales. . . . .	104
Error en los calendarios lunares computacionales. . . . .	106
La observación del primer creciente lunar. . . . .	107
Teoría de las fases lunares. . . . .	109
El límite de Danjon. . . . .	111
Parámetros para el estudio del primer creciente lunar. . . . .	113
Criterios empíricos. . . . .	114
Línea de cambio de fecha lunar. . . . .	119
Fotometría. . . . .	120
Luminancia del cielo crepuscular. . . . .	124
Contraste umbral. . . . .	126
La iluminación de la Luna. . . . .	127
Criterios físicos de visibilidad lunar. . . . .	129
El calendario musulmán. . . . .	133
<b>6. CALENDARIOS</b>	
Introducción. . . . .	137
El calendario juliano. . . . .	141
El calendario gregoriano. . . . .	144
El calendario aritmético musulmán. . . . .	147
El calendario judío. . . . .	148
El calendario chino. . . . .	153
El calendario persa. . . . .	156
El calendario nacional indio. . . . .	158

El calendario juliano revisado. . . . .	159
El calendario republicano francés. . . . .	160

## **7. CONVERSIÓN DE FECHAS**

El calendario auxiliar. . . . .	163
Día juliano de una fecha. . . . .	166
Cálculo de la fecha en un calendario conocido su día juliano. . . . .	168
Calendario juliano auxiliar. . . . .	169
Características de diversos calendarios basados en la intercalación de días. . . . .	170
El calendario persa. . . . .	171
El calendario gregoriano. . . . .	173
El calendario juliano revisado. . . . .	178
El calendario nacional indio. . . . .	178
El calendario judío. . . . .	180
Día de la semana de una fecha. . . . .	184
El calendario republicano francés. . . . .	185
El calendario astronómico persa. . . . .	186
El calendario chino. . . . .	187
Resumen de los algoritmos. . . . .	188

## **8. EL CALENDARIO LUNISOLAR ECLESIAÍSTICO**

Las Pascuas judía y cristiana. . . . .	198
Breve historia del calendario eclesiástico. . . . .	201
Calendarios lunisulares astronómicos griegos. . . . .	208
Teoría general del calendario lunisolar eclesiástico. . . . .	209
Descripción del calendario lunisolar juliano. . . . .	212
Términos computistas. . . . .	215
Determinación de la Pascua juliana. . . . .	220
Error en el calendario lunisolar juliano. . . . .	221
La reforma gregoriana del calendario lunisolar. . . . .	222
Determinación de la Pascua gregoriana. . . . .	228
Pascuas gregorianas y astronómicas. . . . .	230

## **9. REFORMA DEL CALENDARIO GREGORIANO**

Defectos del calendario gregoriano. . . . .	231
Los primeros proyectos de reforma. . . . .	233
Las Cámaras de Comercio y la reforma del calendario. . . . .	235
La Unión Astronómica Internacional. . . . .	236
El calendario perpetuo de doce meses. . . . .	237
El calendario de trece meses. . . . .	238
Otros proyectos. . . . .	239
El calendario en la Sociedad de Naciones. . . . .	241
La conferencia internacional de reforma del calendario y el plan chileno. . . . .	244
El calendario en las Naciones Unidas. . . . .	245



La reforma calendarista en la Unión Soviética. . . . .	246
Medidas recientes. . . . .	249

## **APÉNDICES**

A. Funciones matemáticas	
Función entero. . . . .	251
Función módulo. . . . .	251
Función redondeo. . . . .	252
Función máximo y mínimo. . . . .	252
Función delta. . . . .	252
Función anti-delta. . . . .	252
Función salto. . . . .	252
Funciones lógicas. . . . .	253
Fracciones continuas. . . . .	254
B. Teorema de congruencia lineal	
Enunciado. . . . .	254
Demostración del teorema. . . . .	255
Relación entre los coeficientes de congruencia lineal. . . . .	256
Ejemplo. . . . .	257
Corolarios. . . . .	258
C. Fecha juliana	
El periodo juliano. . . . .	258
El día juliano. . . . .	259
D. Épocas besselina y juliana	
El año ficticio de Bessel. . . . .	259
La época besseliana. . . . .	260
La época juliana. . . . .	260
E. Notación de fechas y tiempo	
Representación de fechas. . . . .	261
Representación de semanas. . . . .	261

## Medida astronómica del tiempo

### Movimientos de precesión y nutación

Se define la eclíptica verdadera como el plano donde se encuentran el centro del Sol, el baricentro del sistema Tierra-Luna y su vector velocidad respecto al Sol. Se define el ecuador verdadero como el plano normal al eje instantáneo de rotación. Con iguales nombres se conocen a los círculos máximos resultantes de los cortes de dichos planos con la esfera celeste.

Estos planos se mueven por las perturbaciones que sobre la Tierra ejercen el Sol, la Luna y los planetas. El ecuador verdadero se ve afectado por el movimiento de precesión, que consiste en un movimiento real del eje de rotación de la Tierra, que describe un movimiento cónico de centro en la Tierra y que tiene un periodo de rotación de aproximadamente 26,000 años. A consecuencia del movimiento de precesión, el polo celeste norte sufre un movimiento de rotación, de tal forma que con el paso del tiempo se encuentra situado en puntos diferentes de la esfera celeste. La precesión es el fruto de la acción combinada del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra, de aquí el nombre de precesión lunisolar con que se le conoce.

El ecuador celeste (y los polos celestes) se ve también afectado por la nutación. Mientras que el polo celeste realiza la rotación por la precesión, describe simultáneamente un pequeño movimiento elíptico (elipse de nutación), cuyos semiejes toman los valores de  $9''.21$  y  $6''.86$  y tiene un periodo aproximado de 18.6 años (muy cercano al tiempo que tardan los nodos lunares en dar una vuelta completa en torno a la órbita de la Luna). De resultados de ambos movimientos (precesión y nutación) el polo celeste va describiendo una órbita ondulada, compuesta de un movimiento secular y otro periódico. Al primero se le llama precesión y al segundo nutación. La diferencia entre ambos es puramente convencional. Se reserva el término precesión a las variaciones seculares o de muy largo periodo y el de nutación para los términos de corto periodo.

El plano de la eclíptica se ve influenciado por las perturbaciones de los planetas. Debemos distinguir dos tipos de perturbaciones. Una de ellas es una variación secular de la eclíptica y la otra es una variación de corto periodo producida principalmente por la acción de Venus y Júpiter. Ésta es una perturbación similar a lo que es la nutación para el ecuador. A la variación secular se le llama precesión planetaria, que resulta ser de valor mucho menor que la precesión lunisolar.

Llamamos eclíptica media a la eclíptica que sólo es influida por las perturbaciones seculares, por lo que hacemos abstracción de las perturbaciones periódicas. Se llama

equinoccio verdadero al nodo ascendente de la eclíptica media y el ecuador verdadero.

Por efecto de la precesión, el equinoccio verdadero adquiere un movimiento del mismo sentido que el movimiento diurno de la esfera celeste; es decir, hacia el oeste, lo que significa un movimiento contrario al movimiento propio del Sol, la Luna y los planetas, que se dirigen hacia el este, o sea, en sentido contrario al movimiento diurno de los cielos.

Se le llama precesión lunisolar al ángulo que se desplaza el equinoccio por la eclíptica suponiéndola invariable. El valor de este término es

$$\psi = 50''.3878 + 0''.0049T$$

que representa el ángulo que se desplaza el equinoccio en un año por efecto de la perturbaciones del Sol y la Luna, estando  $T$  expresado en siglos julianos contados a partir del año 2000. <sup>1</sup> Al ángulo que se desplaza el equinoccio sobre el ecuador celeste, suponiendo que éste no varía, se le llama precesión planetaria y tiene un valor dado por

$$\lambda' = 0''.1055 - 0''.0189T$$

que representa, al igual que antes, el ángulo descrito por año, en este caso por efecto de la acción perturbadora de los planetas. El desplazamiento de la eclíptica y del ecuador por causa de la precesión planetaria y lunisolar, ocasiona que el ángulo formado por ambos planos u oblicuidad de la eclíptica, varíe según la ley

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21''.45 - 46''.81T.$$

A la acción combinada de la precesión lunisolar y planetaria se le llama precesión general y es una medida del desplazamiento del equinoccio. Al punto de corte de las dos eclípticas (la antigua, de equinoccio  $\gamma_1$  y la nueva, de equinoccio  $\gamma_2$ ), le denominaremos  $N$ . Se define la precesión general en longitud a la diferencia  $\gamma_2 N - \gamma_1 N$ , que tiene por valor

$$p = 50''.290\ 966 + 0''.022\ 2226T \quad (1.1)$$

que al igual que en los casos anteriores es un ángulo descrito anualmente. El movimiento del equinoccio en ascensión recta viene dado por la expresión

$$m = 3^\circ.07496 + 0^\circ.00186T \quad (2.1)$$

que representa lo que se desplaza el equinoccio anualmente a través del ecuador.

Hay que indicar que el Sol se encuentra siempre en el plano de la eclíptica verdadera, aún así tiene una cierta latitud eclíptica. Esto es debido a dos circunstancias. Una de ellas es la elección de la Tierra como centro de la esfera celeste y no el baricentro del sistema Tierra-Luna que está por definición en el plano de la eclíptica verdadera. Para ello hay que trasladar el plano de la eclíptica hasta el centro de la Tierra; a resultas de ello, el Sol quedará fuera del ese plano, adquiriendo su latitud cierto valor. Por esta circunstancia, la latitud solar puede alcanzar un valor máximo de  $0''.6$ . Por otra parte, la latitud siempre se evalúa respecto a la eclíptica media, pero el Sol se encuentra en la eclíptica verdadera, por ello está desplazado respecto a la eclíptica media, contribuyendo esta circunstancia a la latitud solar en un valor máximo de  $0''.6$ ; de ellos  $0''.4$

---

1. Lieske J.H., Lederle T., Fricke W., and Morando, B., "Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants", *Astronomy and Astrophysics* **58** (1977) 1- 16.

debidos a Venus y  $0''.2$  a Júpiter.<sup>2</sup>

### Tiempo sidéreo

Disponemos de dos métodos para medir el tiempo de forma precisa. Un primer procedimiento consiste en tomar un movimiento periódico, siendo la medida del tiempo el número de periodos (y eventualmente fracciones) que se han contado. En este método hay que suponer que el periodo tiene una duración constante, lo que sólo se puede comprobar de forma aproximada comparándolo con otros fenómenos periódicos.

El otro procedimiento a seguir es utilizando unas efemérides. O sea, una ecuación obtenida por la teoría, que nos da el valor de una cierta variable característica del fenómeno en función del tiempo:  $\theta = \theta(t)$ . Los parámetros de esa función deben ser determinados usando las observaciones, y para ello será necesario hacer uso de una escala de tiempo, que bien puede ser una basada en un fenómeno periódico como el descrito anteriormente. Debemos advertir que la anterior función no tiene que ser lineal, lo necesario es que sea conocida.

Las escalas de tiempo basadas en la rotación de la Tierra son un ejemplo de las que utilizan un movimiento periódico. Hay que distinguir dos tipos de estos tiempos rotacionales: el tiempo sidéreo y el tiempo solar. El primero de ellos utiliza el equinoccio como referencia y el segundo toma al Sol.

Se llama tiempo sidéreo verdadero o aparente al ángulo horario del equinoccio verdadero. Nótese que en la medida de este tiempo interviene no sólo la rotación de la Tierra, sino la aceleración secular del equinoccio, así como la nutación. A lo que hay que añadir el movimiento del meridiano respecto a la superficie terrestre, consecuencia del movimiento del eje de rotación respecto a la propia Tierra. Por todo lo anterior, el tiempo sidéreo verdadero no es uniforme, aunque así lo fuese la rotación de la Tierra.

Se define el tiempo sidéreo medio como el ángulo horario del equinoccio medio, o sea, el equinoccio verdadero desprovisto del movimiento de nutación. El tiempo sidéreo medio está afectado por la aceleración secular del equinoccio y por el movimiento del meridiano, por lo tanto tampoco es una escala de tiempo uniforme.

Hay que advertir que los tiempos sidéreos dependen del lugar de observación, hablamos por tanto de tiempos locales. Para unificar se elige un meridiano de referencia y se calcula el tiempo sidéreo respecto a este meridiano, que desde el año 1884, es el que pasa por el antiguo observatorio de Greenwich.

El día sidéreo medio es el tiempo entre dos pasos consecutivos del equinoccio medio por el meridiano superior; es decir, que son las 0 horas cuando el equinoccio medio está pasando por el meridiano. Por definición, un día sidéreo está compuesto de 24 horas sidéreas, unidades temporales que son diferentes a las horas solares. Un día sidéreo es algo más pequeño que la rotación de la Tierra. En efecto, en un día sidéreo el equinoccio avanza por el ecuador la cantidad dada por (2.1) dividida por la duración del año sidéreo

$$\frac{m}{366.25} = 0^s.0084 + 5^s.08 \cdot 10^{-6} T$$

---

2. Danjon André, *Astronomie Générale*, Librairie Scientifique et Technique, París, 1986, pp. 80-82.

esta cantidad es la que excede la duración de la rotación de la Tierra (tal como se mediría respecto a un equinoccio fijo) al día sidéreo medio. Por tanto, no es lo mismo el día sidéreo que la duración de la rotación de la Tierra, aunque son muy cercanos entre sí.

A la diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y el medio se le llama ecuación de los equinoccios

$$T_v - T_m = EE$$

que puede tomar un valor máximo de 1.179 segundos.

La ecuación del movimiento del equinoccio medio se puede desarrollar en potencias del tiempo  $t$  de la dinámica

$$T_m = T_0 + T_1 t + T_2 t^2 + \dots \quad (3.1)$$

los puntos suspensivos indican que los términos de orden superior al segundo son muy pequeños y despreciables.

### Tiempo solar

Se define el tiempo solar verdadero como el ángulo horario del centro del Sol

$$H_v = T_v - \alpha_s,$$

la ascensión recta del Sol se puede expresar en función del tiempo

$$\alpha_s = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + S(P)$$

los tres primeros sumandos se refieren a la variación secular de la ascensión recta y el último sumando agrupa a todos los términos periódicos.<sup>3</sup> Nótese que el Sol tiene una aceleración secular respecto al equinoccio, resultado de la aceleración sidereal del equinoccio y de una aceleración propia del Sol.

El tiempo solar verdadero se puede poner como

$$H_v = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)t + (T_2 - A_2)t^2 + EE - S(P)$$

que no es un tiempo uniforme: se ve influenciado por la aceleración secular del Sol y del equinoccio, por la nutación y por los términos periódicos del movimiento real del Sol. Además, el Sol al describir una órbita inclinada respecto al ecuador ocasiona igualmente irregularidades en la escala de tiempo solar verdadero.

A partir de la anterior expresión podemos obtener una escala de tiempo uniforme suponiendo uniformidad en la rotación terrestre. Un primer intento podría ser definir el tiempo uniforme como el tiempo solar verdadero desprovisto de todos sus términos periódicos

$$\bar{H}_v = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)t + (T_2 - A_2)t^2$$

pero tampoco sería uniforme, por el término de segundo orden. Vamos a definir el tiempo solar medio como el tiempo solar verdadero desprovisto de todos sus términos no uniformes

$$H_m = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)t \quad (4.1)$$

que es por definición uniforme. La diferencia entre el tiempo solar medio y el tiempo

---

3. Martín Lorón M., "Medida del tiempo" en *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*, Madrid, 1957, pp. 313-389.

solar verdadero se llama ecuación del tiempo

$$H_m - H_v = E,$$

de aquí se desprende un primer método para averiguar el tiempo solar medio: se determina el tiempo solar verdadero a partir de la observación del Sol, al que se le suma la ecuación del tiempo, que es conocida por la teoría.

De las ecuaciones (3.1) y (4.1) se obtiene

$$T_m - H_m = A_0 + A_1 t + T_2 t^2$$

el segundo miembro se puede entender como la ascensión recta  $\alpha_m$  de un Sol que describe el ecuador y que recibe el nombre de Sol medio. Obsérvese que este Sol se mueve con movimiento uniforme respecto al meridiano (movimiento que viene dado por  $H_m$ ), pero se encuentra acelerado respecto al equinoccio, ya que el término de segundo orden en la ascensión recta del Sol medio es exclusivamente debido a la aceleración del equinoccio y no a la aceleración secular propia del Sol. Como el Sol medio describe un movimiento uniforme respecto al meridiano, es un astro adecuado para definir una escala de tiempo uniforme.

Tenemos que señalar que la ascensión recta del Sol medio es diferente de la ascensión recta media del Sol. Una y otra se diferencian en un término secular de segundo orden. En efecto

$$\begin{aligned}\alpha_m &= A_0 + A_1 t + T_2 t^2 \\ \bar{\alpha}_s &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2\end{aligned}$$

la diferencia entre la ascensión recta media del Sol verdadero  $\bar{\alpha}_s$  y la ascensión recta del Sol medio es

$$\bar{\alpha}_s - \alpha_m = (A_2 - T_2) t^2.$$

Para hallar la ascensión recta del Sol medio, partimos de la expresión de la longitud geométrica media del Sol respecto al equinoccio medio de la fecha que hasta la segunda potencia del tiempo es

$$L_m = A'_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

que define un Sol llamado ficticio que recorre la eclíptica. Debe notarse que la ascensión recta del Sol medio es un valor aparente, por lo que se ve afectada por la aberración. Por otra parte, el sumando de segundo orden en la ascensión recta  $T_2$  es la aceleración secular del equinoccio, mientras que en la expresión de la longitud media del Sol aparece el término  $A_2$ , que es la suma de las aceleraciones propia del Sol y del equinoccio. Volvemos a insistir que en la ascensión recta del Sol medio no debe aparecer la aceleración secular del Sol, ya que en este caso el movimiento del Sol medio respecto al meridiano no sería uniforme.

El ángulo descrito a través del ecuador por el equinoccio medio por siglo juliano viene dado por (2.1)

$$m = 307^{\circ}.496 + 0^{\circ}.186 T$$

y el ángulo descrito en  $T$  siglos julianos será la integral de la anterior expresión

$$307^{\circ}.496 T + 0^{\circ}.0929 T^2,$$

el término de segundo orden es la aceleración del equinoccio, así que su coeficiente nos

da el parámetro  $T_2$ .

La longitud geométrica media del Sol referida al equinoccio medio de la fecha como fue obtenida por Newcomb <sup>4</sup> a final del siglo XIX es

$$L_m = A'_0 + A_1 T + A_2 T^2 = 279^\circ 41' 48''.04 + 129\ 602\ 768''.13 T + 1''.089 T^2 \quad (5.1)$$

La ascensión recta del Sol medio se identifica con la anterior longitud media, siempre y cuando tomemos valores aparentes y no geométricos, y que en el último sumando sólo tengamos en cuenta la aceleración secular del equinoccio. Cuando se formuló el tiempo solar medio se tomó como constante de aberración 20.501 segundos de arco (actualmente el valor adoptado es 20.49552), entonces

$$A'_0 = A_0 + 20''.501,$$

por tanto la ascensión recta del Sol medio es

$$\alpha_m = 18^h 38^m 45^s.836 + 8\ 640\ 184^s.542 T + 0^s.0929 T^2. \quad (6.1)$$

Este Sol medio sigue cercanamente al promedio del Sol verdadero, existiendo una pequeña diferencia entre ambos, debido a que el primero está desprovisto de aceleración secular, algo que no ocurre con el Sol verdadero.

### Tiempo civil

El tiempo civil es por definición el tiempo solar medio aumentado en doce horas, por lo que se comienza a contar desde medianoche, como es habitual en asuntos civiles y no a mediodía que es donde empieza a contar el tiempo solar medio.

El tiempo universal es por definición el tiempo civil local en el meridiano de Greenwich, o sea el tiempo solar medio de Greenwich aumentado en doce horas

$$UT = H_m + 12^h = T_m - \alpha_m + 12^h \quad (7.1)$$

donde  $T_m$  es el tiempo sidéreo medio en el meridiano de Greenwich y  $UT$  es el tiempo universal. A las 0 horas de tiempo universal, el tiempo sidéreo medio de Greenwich viene dado por la ecuación

$$T_m = 6^h 38^m 45^s.836 + 8\ 640\ 184^s.542 T + 0^s.0929 T^2 \quad (8.1)$$

donde  $T$  se mide en siglos julianos contados desde las 12 horas de UT del día 0 de enero de 1900.

Existen, por tanto, dos métodos para obtener el tiempo solar medio. Uno de ellos es mediante la ecuación del tiempo, tal como ya se ha indicado. El otro consiste en determinar el tiempo sidéreo medio a partir de la observación, luego se calcula el tiempo universal haciendo uso de la ascensión recta del Sol medio, o sea de la ecuación (7.1). Una forma cómoda de hacer esta operación es tabular la ecuación (7.1), lo que facilita el cálculo del tiempo universal por interpolación. <sup>5</sup>

Al anterior tiempo universal se le denomina UT1, reservándose el término UT0 para

4. Newcomb S., *Astronomical Papers Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, Vol. VI, part I: *Tables of the Sun*, Washington, U.S. Govt. Printing Office, 1895.

5. Ferrer Carbó J., *La medida del tiempo*, Real Academia de Ciencias y Artes, 1968 y Loodts J., *Le probleme de la diffusion de l'heure et des echelles de temps*, Institut Geographique militaire, 1973.

el tiempo solar tal como es medido directamente por un observatorio. La diferencia entre ambos es que el UT1 está referido al polo terrestre medio, mientras que el UT0 lo está al polo instantáneo, que está sometido a un movimiento de rotación conocido como oscilación de Chandler.

La unidad de tiempo de la escala de tiempo universal es el segundo, definido como la 86,400 parte de un día solar medio. Esta fue la unidad internacional de tiempo hasta su sustitución por el segundo de las efemérides. Una escala de tiempo necesita no sólo una unidad de tiempo, sino también un origen o época. En el año 1958, la Unión Astronómica Internacional IAU definió como época del tiempo universal las 12 horas del día 0 de enero del año 1900 (o sea, el 31 de diciembre de 1899),<sup>6</sup> medido respecto al catálogo estelar FK4.

### El Sol medio y el promedio del Sol verdadero

La escala de tiempo universal es una escala de tiempo rotacional. Para su establecimiento se idea un objeto, denominado Sol medio, que tiene un movimiento uniforme respecto al meridiano, pero que está acelerado respecto al equinoccio, por tener este punto un movimiento acelerado. Si suponemos que el movimiento de rotación de la Tierra es uniforme, así también lo será el tiempo universal. Debemos de tener presente que la falta de uniformidad de la rotación terrestre no es un problema en sí mismo. Si conociéramos con detalle estas irregularidades, podrían ser contempladas en la definición del tiempo universal y podríamos obtener una escala de tiempo uniforme. El problema reside en que no conocemos la teoría de las alteraciones en la rotación de la Tierra; es más, algunas de estas irregularidades son impredecibles, por lo que no podemos desarrollar una teoría precisa de ellas. Esta es la razón por la que la rotación de la Tierra no nos vale para definir una escala de tiempo uniforme.

La definición de tiempo universal se hace de tal forma que se acerque lo más posible al promedio del movimiento real del Sol. Sin embargo, esto no se consigue plenamente. Esto quiere decir que en promedio el Sol verdadero no coincide con el Sol medio, existiendo una diferencia entre ellos que va aumentando con el tiempo. En efecto, la diferencia entre el ángulo horario promedio del Sol verdadero  $\bar{H}_v$  y el ángulo horario del Sol medio  $H_m$  es

$$\bar{H}_v - H_m = (T_2 - A_2)T^2 = 0^s.0203T^2 \quad (9.1)$$

queriendo indicar con ello, que el Sol verdadero pasa en promedio antes por el meridiano que el Sol medio, por lo que un reloj ajustado al Sol verdadero adelantará respecto a otro que vaya sincronizado con el Sol medio. Lo que adelanta por siglo el Sol verdadero respecto al medio es la derivada de (9.1)

$$0.0406T \text{ segundos/siglo} = 0.000\ 00111T \text{ segundos/día}$$

lo que quiere decir que, transcurrido un siglo, un día de tiempo solar verdadero supera al tiempo medio en 0.000 00111 segundos. O sea, que al transcurrir un siglo, el día solar verdadero excederá al medio en esa cantidad. Este valor va en aumento, de tal forma que al transcurrir  $T$  siglos desde el año 1900, el día medio se reducirá respecto al día verda-

---

6. O lo que es lo mismo la época juliana J1900.0. Sobre las épocas julianas y besselinas ver el apéndice D.



dero en  $0.000\ 00111\ T$ . Puede verse que aún dentro de muchos siglos, la concordancia entre el Sol verdadero promedio y el Sol medio seguirá siendo mínima, por lo que se cumple el deseo de que el Sol medio tenga tanto un movimiento sidéreo uniforme, como que se asemeje lo más posible al promedio del Sol verdadero.

### El tiempo solar en función del tiempo sidéreo medio

En el año 1984 se modificó el sistema de referencia astronómico, lo que obligó a modificar la expresión que relaciona el tiempo universal con el tiempo sidéreo. Se buscaba que la nueva expresión se refiriese al equinoccio definido por el nuevo catálogo estelar FK5, pero a su vez manteniendo la continuidad en la escala de tiempo universal, consiguiendo que el Sol medio tuviese un movimiento sidéreo uniforme.<sup>7</sup>

Tomemos la época 0 horas de UT del 1 de enero de 1984, fecha en que se introdujo el catálogo FK5. La corrección que hay que aplicarle al equinoccio que se desprende del catálogo FK4 cuando se utiliza el FK5 viene dada por

$$E = 0^s.06390 + 0^s.08500\ T' \quad (10.1)$$

$T'$  se cuenta desde el inicio del año 1984 y mantiene una relación con  $T$  (que comienza a contarse desde inicio del año 2000), dada por

$$T = T' + \frac{2\ 445\ 700.5 - 2\ 415\ 020}{36\ 525}.$$

Al expresar (6.1) con el nuevo origen queda

$$\alpha_m = 18^h\ 39^m\ 22^s.64 + 8\ 640\ 184^s.698\ 069\ T' - 0^s.0929\ T'^2.$$

Ahora podemos aplicar la corrección del equinoccio (10.1) y modificar el término de segundo orden actualizándolo con la nueva expresión de la aceleración del equinoccio

$$\alpha_m = 18^h\ 39^m\ 22^s.7039 + 8\ 640\ 184^s.783\ 069\ T' + 0^s.093\ 107\ T'^2 - 6^s.2 \cdot 10^{-6}\ T'^3$$

por último es necesario elegir como nueva época el comienzo del año 2000 (las 12 horas de UT del día 1 de enero de 2000, o sea la época juliana J2000.0), encontrando la expresión

$$\alpha_m = 18^h\ 41^m\ 50^s.55 + 8\ 640\ 184^s.812\ 866\ T + 0^s.093\ 104\ T^2 - 6^s.2 \cdot 10^{-6}\ T^3.$$

Para conseguir la continuidad de la escala de UT, el punto de referencia (el equinoccio definido a final del siglo XIX y respecto al cual se definió originariamente el Sol medio) debe permanecer en el mismo punto sidéreo. Por lo tanto, la misma corrección (10.1) fue hecha a las ascensiones rectas de las estrellas fundamentales.

Por todo lo visto, el tiempo universal se calcula mediante la fórmula

$$T_m(0^h\ UT) = 6^h\ 41^m\ 50^s.55 + 8\ 640\ 184^s.812\ 866\ T + 0^s.093\ 104\ T^2 - 6^s.2 \cdot 10^{-6}\ T^3 \quad (11.1)$$

que relaciona el tiempo sidéreo medio en Greenwich a las 0 horas de UT con el tiempo universal.

---

7. Aoki and *al.*, "The new definition of Universal Time", *Astronomy and Astrophysics* **105** (1982) 359-361.

### Relación entre la unidad de tiempo sidéreo y el tiempo medio

El día sidéreo medio es el tiempo entre dos pasos consecutivos del equinoccio medio por el meridiano. Se compone de 24 horas sidéreas, a su vez subdivididas en 3,600 segundos sidéreos. El día solar medio se define como el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol medio por el meridiano, se divide en 24 horas y cada una de ellas se divide a su vez en 3,600 segundos solares medios. El segundo solar medio es constante (si se supone que la Tierra gira uniformemente), mientras que el día sidéreo y por tanto el segundo sidéreo, van variando con el tiempo a consecuencia de la aceleración secular del equinoccio.

El tiempo sidéreo medio a las 0 horas de tiempo universal viene dado por la expresión (11.1). Lo que se incrementa el tiempo sidéreo medido a las 0 horas de UT en un intervalo  $\Delta T$  igual a un día solar medio será

$$\Delta T_m = \frac{dT_m}{dT} \Delta T = \left( 8\,640\,184^s \cdot 812\,866 + 0^s \cdot 186\,208 T - 1^s \cdot 86 \cdot 10^{-5} T^2 \right) \frac{1}{36\,525} \approx \\ \approx 236^s \cdot 555\,368 + 5^s \cdot 098 \cdot 10^{-6} T,$$

o sea, en un día solar medio el intervalo de tiempo sidéreo habrá aumentado en

$$\Delta T_m = 24^h + 236^s \cdot 555\,368 + 5^s \cdot 098 \cdot 10^{-6} T,$$

despreciando la variación secular, que es del orden de millonésimas de segundos por siglo, podemos llegar a la conclusión de que un día solar medio corresponde a 86,636.555 368 segundos sidéreos, que se corresponden con 86,400 segundos solares.

Entonces, si  $I_m$  representa un intervalo de tiempo en unidades de tiempo solar y  $I_s$  el mismo intervalo en unidades de tiempo sidéreo, se cumple

$$I_m = \frac{86\,400}{86\,636.555\,368} = 0.997\,269\,566 I_s, \quad (12.1)$$

y viceversa

$$I_s = 1.002\,737\,909 I_m \quad (13.1)$$

que son las expresiones que nos relaciona los segundos solares y sidéreos.

### Medida del tiempo universal

La medida por observación meridiana del tiempo universal se basó en la determinación del paso de estrellas fundamentales por el meridiano del lugar, para de esta forma determinar el tiempo sidéreo verdadero. La ecuación de los equinoccios es conocida por la teoría, por lo que a partir de ella podemos determinar el tiempo sidéreo medio local. Este valor es necesario corregirlo por la longitud para obtener el tiempo sidéreo medio de Greenwich

$$T_m(\text{Gr}) = T_m \pm \lambda$$

siendo  $\lambda$  la longitud geográfica del lugar, debiéndose tomar el signo positivo para las posiciones en el oeste y el negativo para lugares ubicados al este del meridiano de referencia.

Recurrimos posteriormente a (11.1) y obtenemos para las 0 horas de UT0 el tiempo sidéreo en Greenwich. Con este dato podemos obtener el intervalo de tiempo sidéreo

que ha transcurrido desde las 0 horas de UT0 hasta el momento de observación

$$I_s = T_m(\text{Gr}) - T_m(0^h, \text{Gr})$$

que siempre tiene que ser un cantidad positiva. A continuación se convierte el anterior intervalo de tiempo sidéreo en tiempo universal, haciendo para ello uso de la (12.1). Queda por último determinar el UT1 que resulta de hacer la corrección debida al movimiento del polo. La fórmula a aplicar es

$$UT1 = UT0 + \frac{1}{15}(x \sin \lambda - y \sin \lambda) \tan \phi$$

donde  $x$ ,  $y$  son las coordenadas rectangulares del polo instantáneo en segundos de arco;  $\lambda$  y  $\phi$  representan la longitud y latitud geográfica referidas al polo medio. Los valores  $x$  e  $y$  son suministrados por el IERS (Servicio Internacional de Rotación de la Tierra).

Actualmente la determinación del tiempo universal se realiza mediante las técnicas de interferometría de muy larga base VLBI, capaces de hacer medidas con una exactitud del orden del miliarcosegundo. Antes de la aplicación del VLBI y otras técnicas astrométricas, la medida del tiempo universal se efectuó por el anteojo cenital fotográfico y el astrolabio impersonal de Danjon.

### La actual forma de medir el tiempo universal

Las nuevas técnicas de astrometría, que logran una exactitud menor que la milésima de segundo de arco, aconsejó la modificación del sistema tradicional de referencia celeste, basado en el equinoccio y ecuador móvil.<sup>8</sup> Se abogó por un sistema de referencia definido respecto a objetos extragalácticos, tales como quasars y núcleos activos de galaxias. De esta forma se manifestó en 1991 la IAU para construir el sistema celeste de referencia.

El nuevo sistema, denominado Sistema de Referencia Celeste Internacional ICRS, abandona definitivamente el equinoccio móvil como referencia y en su lugar se usan las posiciones de unas seiscientas radiofuentes, que tienen las posiciones celestes que les asignó el catálogo FK5.<sup>9</sup> El nuevo polo celeste es consistente con el implícito en el sistema FK5 y es denominado polo celeste de las efemérides CEP<sup>10</sup> y se diferencia del polo instantáneo de rotación en que no tiene movimientos diarios o cuasidiurnos debidos a la nutación.

En este nuevo esquema, el concepto de tiempo universal debe ser modificado. Se debe eliminar su relación con el equinoccio y asociarlo con el ángulo de rotación de la Tierra ERA que es un parámetro directamente medible.<sup>11</sup> La nueva definición puede,

8. Guinot B., "Basic problems in the kinematics of the rotation of the Earth", *Time and the Earth's Rotation*, D. Reidel Publishing, 1979, pp. 7-18.

9. Arias E. F., Charlot P., Feissel M., Lestrade J.F., "The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service", *Astronomy and Astrophysics* **303** (1995) 604-608.

10. Seidelmann P.K., "1980 IAU theory of nutation. The final report of the IAU working group on nutation", *Celestial Mechanics* **27** (1982) 79.

11. Capitaine N., "The Earth's rotation: definition of the pole and of the angle of sidereal rotation", *Astrophysics and Space Science* **177** (1991) 427-441.

conceptualmente, derivarse del concepto de origen no rotante NRO,<sup>12</sup> o de un concepto análogo denominado Origen de las Efemérides Celestes CEO<sup>13</sup> Este punto es tal que, a medida que el polo celeste se está moviendo por efecto de la precesión y nutación, permanece sin rotación instantánea respecto al eje polar. El ERA, o ángulo estelar, viene definido como el ángulo comprendido entre el NRO y el primer meridiano asociado con el sistema de referencia terrestre, tomando el signo positivo hacia el oeste.

Sin embargo, la relación entre el UT1 y el ERA se puede lograr sin hacer referencia explícita al NRO o concepto equivalente.<sup>14</sup> Como antes hemos expuesto, el tiempo sidéreo medio contiene, no solamente la rotación de la Tierra, sino también el movimiento de precesión en ascensión recta. Si al tiempo sidéreo se le sustrae la precesión acumulada, obtendremos el ángulo sidereal girado por la Tierra. El valor del ERA a las 0 horas de UT1 será por tanto

$$\theta(0^h UT1) = T_m(0^h UT1) - \int m(T) dT$$

donde  $\theta$  representa el ERA y  $m(T)$  es la variación de la precesión en ascensión recta por siglo juliano, que es cien veces la correspondiente precesión por año dada por (2.1).<sup>15</sup> Utilizando (8.1) y (2.1) encontramos

$$\theta(0^h UT1) = 6^h 41^m 50^s .54841 + 8 639 877^s .317 119 T$$

donde  $T$  viene expresado en siglo julianos contados desde J2000.0. El ángulo de rotación de la Tierra en cualquier otro momento será

$$\theta = UT1 + 6^h 41^m 50^s .54841 + 8 639 877^s .317 119 T$$

el primer sumando lo podemos poner como

$$UT1(\text{en horas}) = 876 600^h \frac{UT1(\text{en horas})}{876 600^h} = 876 600^h \frac{UT1(\text{en horas})}{36 525^d}$$

por lo tanto el ángulo de rotación de la Tierra para un instante cualquiera será

$$\theta = 18^h 41^m 50^s .54841 + (876 600^h + 8 639 877^s .317 119) T \quad (14.1)$$

donde  $T$  son los siglos julianos transcurridos. Al primer sumando le hemos añadido 12 horas, para que la medida del ERA esté en consonancia con el origen del comienzo del día civil a medianoche; o sea, que la cuenta del ángulo se hace desde el meridiano

12. Capitaine N., Guinot E., Souchay J., "A no-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use", *Celestial Mechanics* **39** (1986) 283-307.

13. Capitaine N., Guinot B., McCarthy D.D., "Definition of the Celestial Ephemeris Origin and of UT1 in the International Celestial Reference Frame", *Astronomy and Astrophysics* **355** (2000) 398-405. El ángulo de rotación de la Tierra que se deriva del CEO es ligeramente diferente del que se deriva del polo instantáneo de rotación, que es el que verdaderamente da la rotación sidereal de la Tierra. No obstante, las diferencias entre ellos son mínimas y lejos de la exactitud actual de las observaciones.

14. Aoki S., Kinoshita H. "Note on the relation between the equinox and Guinot's no-rotating origin", *Celestial Mechanics* **29** (1983) 335-360.

15. Capitaine N., Gontier A. M. "Accurate procedure for deriving UT1 at a submilliarcsecond accuracy from Greenwich Sideral Time o from the stellar angle", *Astronomy and Astrophysics* **275** (1993) 645-650.

inferior. Hay que advertir que la unidad que aparece en la (14.1) es el segundo de tiempo universal. La fórmula (14.1) es la que nos da la actual definición del tiempo universal.

Derivando (14.1) se obtiene la velocidad angular de la Tierra

$$\omega = \frac{d\theta}{dT} = 36\,624.998\,5801 \text{ rev/siglo} = 15''.041\,067\,178\,66910 \text{ s}^{-1}.$$

Se define el periodo de rotación de la Tierra por

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1\,296\,000}{\omega} = 86\,164.098\,903\,69732$$

medido en segundos de tiempo universal.

### **La conferencia de Washington de 1884 y el cambio de origen del tiempo astronómico**

El problema de la determinación exacta del tiempo estuvo unido desde un principio a la determinación de la longitud en el mar, por eso los primeros observatorios astronómicos eran dependientes de las armadas, tal como ocurrió en España, donde se creó en 1753 el Observatorio de Marina, que en 1798 pasó a San Fernando, por lo que los barcos españoles utilizaban como referencia el meridiano de esa ciudad.<sup>16</sup> A ese meridiano se ajustaban los cronómetros marinos y los mapas hidrográficos españoles, no así los mapas terrestres que se referían al meridiano de Madrid.

Cada país utilizaba su propio meridiano origen, por lo que tenían sus particulares mapas y tiempos nacionales. Desde la antigüedad se había elegido el meridiano de las Islas Canarias, así lo había hecho Marino de Tiro (siglo II a.C.), y también lo adoptó Claudio Ptolomeo en su obra geográfica. En 1573 Felipe II publicó unas ordenanzas por las que se fijó el meridiano que pasa por Toledo como el de referencia en el imperio español. En 1634 el cardenal Richelieu reunió una conferencia de matemáticos y astrónomos que propusieron como meridiano inicial el que pasa por la costa occidental de la Isla de Hierro en la Canarias. Ante la dificultad de posicionar exactamente este meridiano, el geógrafo francés Guillaume Delisle propuso en el siglo XVIII el meridiano localizado a 20 grados al oeste del observatorio de París. También fueron propuestos el meridiano de Jerusalén, el del estrecho de Bering o el que pasa por la pirámide de Gizeh. Algunos pensaban que la corrección del calendario por el Papa Gregorio XIII establecía –de forma indirecta– que el primer meridiano era el de Roma.<sup>17</sup>

La Asociación Geodésica Internacional en su octava reunión celebrada en Roma en el mes de octubre de 1883, abordó el problema y aprobó la ponencia presentada por su comisión permanente –de la que era presidente el militar y geodesta español Carlos Ibáñez de Ibero–, que expresaba la necesidad de que el meridiano origen pasara por un

---

16. Con anterioridad fueron fundados los observatorios de París en 1678 y el de Greenwich en 1675. Uno de los principales problemas que inicialmente abordaron los observatorios astronómicos, fue preparar tablas fiables para ser utilizadas en el método de la distancia lunar, que servía para determinar la longitud geográfica antes del perfeccionamiento de los cronómetros marinos.

17. Howse Derek, *Greenwich time and the longitude*, Oxford University Press, 1977, pp. 117-144.

observatorio de primer orden, como eran los de París, Berlín, Greenwich o Washington.

Por sugerencia de Sandford Fleming, el Congreso de los Estados Unidos aprobó una ley que autorizaba al presidente del país para convocar una conferencia internacional, “a fin de determinar y recomendar la adopción de un meridiano inicial único para el cálculo de las longitudes, y la fijación e introducción de una hora universal”. Y así fue, el 1 de octubre de 1884, se reunió en Washington el Congreso Internacional para el establecimiento del primer meridiano y de una hora universal o cosmopolita. Se constituyó con 41 delegados de 25 países, entre ellos tres representantes de España: Juan Valera, enviado extraordinario y ministro plenipotenciario, Emilio Ruiz del Árbol, agregado naval de la legación de España en Washington y el teniente de navío Juan Pastorín y Vacher, como representante de la Marina.<sup>18</sup>

Desde un primer momento las reuniones mostraron la oposición de Francia a que Greenwich fuera tomada como primer meridiano internacional. Greenwich fue apoyado por la mayoría de los países y –en particular– por España, reflejando de esta manera que el 70% de los navegantes ya utilizaban ese meridiano y que el 75% de las cartas hidrográficas se referían a Greenwich.

En cuanto al tiempo, la resolución de la conferencia afirmaba que el “día universal será el día solar medio. Empezará para todo el mundo a partir de la medianoche media del primer meridiano, coincidente con el inicio del día y de las fechas civiles en dicho meridiano, y deberá ser contado de 0 a 24 horas”. Esta resolución no fue apoyada por la representación española que defendió como meridiano para el cómputo del tiempo el que pasa por Roma y su antimeridiano como la línea de cambio de fechas, porque consideraba que así había sido establecido en la reforma gregoriana del calendario.

España y Francia expresaron en el Congreso Internacional de Washington sus deseos de que Inglaterra y Estados Unidos se adhirieran al sistema métrico decimal, petición que fue rechazada por los representantes anglosajones. Sin embargo, la séptima de las resoluciones comprometía a las naciones a aplicar “el sistema decimal a la división de los ángulos y del tiempo, en los casos en que la extensión presente ventajas reales”. Compromiso que no se ha cumplido, ya que permanecemos en la actualidad con el sistema sexagesimal que tuvo su origen en la antigua Babilonia.

La adopción por los países de las recomendaciones del Congreso de Washington tardó en llegar. Por ejemplo, el 15 de marzo de 1891, Francia instituyó –como su hora legal– el tiempo local de París, en contra de lo acordado y hubo que esperar hasta el 9 de marzo de 1911 para que adoptara la hora universal.<sup>19</sup> Estados Unidos, país anfitrión de la conferencia y que apoyó con entusiasmo sus resoluciones, no legisló sobre la implantación del tiempo universal hasta el 19 de marzo de 1918. En España, la ley de 26 de julio de 1900 en su artículo primero dice: “El servicio de ferrocarriles, correos, telégrafos, teléfonos y líneas de vapores de la Península e islas Baleares, así como los ministerios, tribunales y oficinas públicas, se regularán con arreglo al tiempo solar medio de

---

18. Pastorín y Vacher Juan, *Memoria sobre el Congreso Internacional de Washington*, Madrid, 1885.

19. La orden de 9 de marzo de 1911 aprobó que desde la noche del día 10 al 11 “el tiempo legal en Francia y Argelia fuera el tiempo medio de París retardado en 9 minutos y 21 segundos”, con lo que se eludía nombrar al observatorio de Greenwich, que era al que, efectivamente, se refería el tiempo.

Greenwich, llamado vulgarmente, tiempo de Europa occidental.” La misma ley declara que la cuenta de las horas legales será de 0 a 24.

Aunque para usos civiles ya se utilizaba en España el tiempo de Greenwich, los navegantes se servían del meridiano de San Fernando, hasta que en 1907 se ordenó, por real decreto del 4 de abril, que las cartas hidrográficas se refiriesen al meridiano de Greenwich; finalmente en 1909 se estableció que los cronómetros marinos llevaran el tiempo medio de ese observatorio.

La sexta de las resoluciones de la conferencia de Washington encomendaba que el origen de los días astronómicos y marinos empezaran a medianoche, como se había aprobado para el día civil. Esta reforma tardó algún tiempo en realizarse. No fue hasta el 1 de enero de 1925 en que el día astronómico se alineó con el día civil, comenzando, al igual que éste, a medianoche y no a mediodía como era usual desde los tiempos de Hiparco. Pero esta reforma no resultó tan simple como en un principio pudiera creerse.<sup>20</sup>

En 1917 varias organizaciones británicas se reunieron para estudiar el cambio en el comienzo del día astronómico y que así quedara contemplado en las tablas para uso de los navegantes, como poco antes había hecho la armada francesa. En 1918 un comité de la Royal Astronomical Society estudió los cambios necesarios y pidió opinión a diversos observatorios. Tal fue el caso del Observatorio de Marina de San Fernando, que defendió el uso tradicional, oponiéndose al cambio. Finalmente los británicos decidieron hacer la modificación al comienzo del año 1925, aunque sin tocar el cómputo de los días julianos, que hasta la fecha actual comienza su cuenta a mediodía.

El principal problema vino de la denominación. El nombre de Tiempo Medio de Greenwich GMT continuó en uso en el almanaque náutico de británicos y americanos, lo que originó problemas que fueron objeto de preocupación por la IAU por más de cincuenta años. En 1928 la Unión Astronómica Internacional introdujo el nombre de tiempo universal y desaconsejó el uso de GMT. Pero no fue hasta el año 1960 que la designación Tiempo Medio de Greenwich dejó de tener uso oficial en Astronomía.

El nombre GMT continuó usándose en Gran Bretaña, entendido ahora como el tiempo legal, es decir como el Tiempo Universal Coordinado UTC. En 1997 la Cámara de los Lores aprobó un proyecto de ley para el cambio de denominación, evitando de esa forma errores que podrían originarse al estar indefinido el término GMT. El trámite parlamentario llevó el proyecto de ley a la Cámara de los Comunes, donde su tramitación quedó paralizada, continuándose con la confusa utilización de Tiempo Medio de Greenwich.

La llegada de la primera Guerra Mundial, con la necesidad de aumentar el rendimiento de las industrias de guerra, movió al gobierno alemán a adoptar por primera vez la hora de verano en el año 1916. En el mismo año, Gran Bretaña hizo un adelanto único de una hora en sus relojes. En España también se adoptó la hora de verano, siendo la primera vez que se hizo el 15 de abril de 1918, aplicándose al principio de forma irregular. Desde el año 1940 nuestro tiempo oficial se encuentra aumentado en una hora sobre el que nos correspondería por el huso horario en que nos encontramos, ya que en ese año no se restableció la hora de invierno. En verano se incrementa en una hora más, por lo

---

20. Sadler D. H., “Mean Solar Time on the Meridian of Greenwich”, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **19** (1978) 290-309.

que el tiempo de verano en España está adelantado en dos horas respecto al tiempo del primer huso horario, que es donde se encuentra nuestro país (a excepción de Canarias y la mayor parte de Galicia, cuyas longitudes son superiores a los 7°.5). Resulta curioso que durante la guerra civil española (1936-1939) el gobierno republicano siguiera estableciendo la hora de verano –aunque de forma muy irregular–, pero no lo hizo así el gobierno nacionalista, por lo que se daba la circunstancia de que las ciudades que caían en poder de los nacionales durante el verano tenían que disminuir una hora sus relojes.

La hora de verano no se aplicó en España desde 1950 a 1974, año en que la crisis del petróleo aconsejó al gobierno su implantación. Hasta el año 1978, el momento de hacer el adelanto de una hora en verano era a las 23 horas, mientras que se recuperaba la hora de invierno a las 24 horas del día señalado. A partir de 1979, el adelanto se hacía a las 2 de la madrugada y se restablecía a las 3 de la madrugada. Hasta el año 1995 la normativa legal establecía que la hora de verano en España comenzara el último domingo de marzo y finalizara el último domingo de septiembre. En 1996 se modificó la legislación anterior y, desde entonces, el restablecimiento de la hora de invierno coincide con el último domingo de octubre, de acuerdo con lo legislado por la Unión Europea.<sup>21</sup>

---

21. Benito Quintana Luis, *De la hora solar a la hora legal*, Madrid, 1987.



# El frenado secular de la Tierra

### Antecedentes históricos

Hay que remontarse al año 1693 para encontrar el comienzo de una de las historias de mayor interés en la Astronomía. En ese año, Edmond Halley encontró que eran incompatibles los registros de antiguos eclipses con las tablas lunares y solares de su época. Halley especuló con la posibilidad de que existiera una aceleración secular de la Luna.<sup>1</sup>

La primera determinación experimental de esa aceleración lunar fue realizada por Richard Dunthorne en 1749. Haciendo uso de antiguos eclipses lunares y solares, encontró una “aceleración” de 10 segundos de arco por siglo cuadrado.<sup>2</sup> Los astrónomos trataron de encontrar una explicación a esta aceleración. En 1787, Pierre-Simon Laplace anunció que la disminución secular en la excentricidad de la Tierra produce una “aceleración” de  $11''.1$  en la longitud de la Luna.

A mitad del siglo diecinueve se renovó el interés por el asunto, favorecido por unas más perfectas tablas lunares, que permitieron comparaciones más precisas entre la teoría y la observación. En el año 1853, John Couch Adams mejoró los cálculos de Laplace y obtuvo una “aceleración” de la Luna de  $5''.8$  por efecto de la variación de la excentricidad de la Tierra (un valor ligeramente menor que el actualmente aceptado de  $6''.05$ ). Por entonces los valores deducidos de antiguas observaciones eran algo dispares, encontrándose entre los 7 y 12.5 segundos por siglo cuadrado. A mitad del siglo XIX, William Ferrel y Charles-Eugene Delaunay, independientemente uno del otro, mostraron a partir de la dinámica, cómo las mareas ejercen una acción de frenado sobre la rotación de la Tierra, acompañada de una variación de la velocidad orbital de la Luna.

---

1. Una narración histórica puede leerse en: Fohteringham J. K., “The determination of the accelerations and fluctuations in the motions of the sun and moon”, *The Observatory* **55** (1932) 305-316; Stephenson F. R., “Historical eclipses and Earth’s rotation”, *Astronomy and Geophysics* **44** (2003) 2.22-2.27 y también Stephenson F. R., *Historical eclipses and earth’s rotation*, Cambridge University Press, 1997, pp. 1-32.

2. El valor dado por Dunthorne se refiere al coeficiente del tiempo al cuadrado en la expresión de la longitud media de la Luna. Es decir, al doble de la aceleración angular aparente de la Luna. La costumbre de llamar aceleración al coeficiente del tiempo al cuadrado sigue usándose, lo que da lugar a no pocas confusiones. En lo que sigue llamaremos aceleración secular, a la aceleración propiamente dicha, es decir al doble del coeficiente del tiempo al cuadrado. En el caso de poner la palabra aceleración entre comillas nos estaremos refiriendo a la mitad de la aceleración verdadera.

En 1905, Philip Cowell investigó antiguos eclipses y concluyó que debía de existir una aceleración en el movimiento en longitud del Sol. Una aceleración que no era más que aparente, reflejo del frenado en la rotación de la Tierra. También mostró que esto iba acompañado de un frenado real del movimiento lunar, como lo exige la conservación del momento angular del sistema Tierra-Luna. Desde entonces, han sido muy numerosas las investigaciones encaminadas a obtener las aceleraciones seculares del Sol y la Luna, habiéndose obtenido resultados muy dispares, dada la poca precisión de las observaciones antiguas y la diversidad de métodos empleados para hacer los análisis. Una dificultad que se mezcló con los anteriores cálculos fueron las fluctuaciones. En un principio fueron torpemente entendidas, considerándose como términos empíricos en la longitud media lunar. En 1915, Hermann Glauert consideró estas fluctuaciones como un efecto aparente de las fluctuaciones en la rotación terrestre, al encontrar alteraciones similares en el movimiento de Venus. No obstante, los estudios realizados por aquellos años sobre comparaciones de las fluctuaciones en diversos astros no fueron concluyentes.

Las investigaciones se redoblaron. Entre ellas destacar las realizadas por John K. Fotheringham que analizó antiguas observaciones, principalmente efectuadas en Europa y las desarrolladas por Willhelm de Sitter que obtuvo valores de las “aceleraciones” seculares aparentes del Sol y la Luna que fueron mantenidas por años:  $5''.24$  para la Luna y  $1''.80$  para el Sol. En el año 1939 vio la luz el trabajo de Harold Spencer Jones que demostraba, sin lugar a dudas, el carácter aparente de las aceleraciones y de las fluctuaciones, al ser detectadas en los movimientos de los planetas internos en proporción a sus movimientos medios. Tomando el valor de la aceleración lunar de de Sitter, obtenido de antiguas observaciones, Spencer Jones derivó un valor de la “aceleración” secular aparente del Sol de  $1.23$  arcos segundos por siglo cuadrado.

Aunque ya en 1754 Immanuel Kant había sugerido que las mareas lunar y solar eran responsables del frenado de la Tierra y que poco después, en 1771, Lalande incluso cuantificó el frenado de la Tierra en una pérdida anual de 2 ó 3 segundos, no fue hasta 1920 en que Harold Jeffreys<sup>3</sup> desarrolló una teoría aceptable del efecto de las mareas sobre la rotación de la Tierra.

En 1937 se demostró la existencia de una variación estacional de la rotación de la Tierra, detectada por la aparente irregularidad que experimentaban los relojes astronómicos de alta precisión instalados en diversos observatorios. Este cambio estacional es atribuido, casi por completo, a un intercambio de momento angular entre la atmósfera y la Tierra sólida.<sup>4</sup> Este tipo de variación se une al frenado secular y a las fluctuaciones originadas por fenómenos geofísicos no suficientemente claros.

---

3. Jeffreys H. *The Earth. Its origin history and physical constitution*, Cambridge University Press, 1976, pp. 316-363.

4. Hay que añadir que existen variaciones en la rotación de la Tierra de más alta frecuencia que un día, atribuidas todas ellas a la circulación atmosférica. Se tiene el convencimiento de que todas las variaciones aleatorias de periodos entre unos pocos años y un día, son debidas a la circulación atmosférica. Es interesante señalar que el momento mecánico puesto en juego por los vientos es cientos de veces mayor que los que ocasionan las mareas, Merriam J. B., “Atmospheric excitation of the earth's rotation rate” en McCarthy D. D. y Carter W. E. (editors) *Variations in Earth Rotation*, International Union of Geodesy and Geophysics, 1990, pp. 119-126.

Multitud de investigaciones han continuado tratando el arduo problema de las alteraciones en la rotación terrestre, y a pesar de los avances registrados sigue siendo una cuestión abierta, tanto en el entendimiento de las causas que lo producen, como en su cuantificación y posible variación con el tiempo.

### Aceleraciones aparentes del Sol y la Luna

El frenado de la rotación de la Tierra induce un alejamiento de la Luna, como respuesta del sistema para conservar el momento angular. El alejamiento de la Luna significa que su movimiento propio en torno a la Tierra disminuye. Observado desde la Tierra, esta deceleración lunar se añade a la ficticia aceleración de la Luna, consecuencia del frenado de la Tierra. Es decir, para la Luna tenemos dos términos; uno de ellos es una deceleración real de nuestro satélite y el otro es una aceleración ficticia, reflejo del frenado terrestre. El resultado de ambas es una aceleración positiva, lo que nos dice que el movimiento aparente de la Luna, tal como es visto desde la Tierra, es acelerado.

Debemos advertir que el término ficticio aparece siempre y cuando se hagan las medidas en la escala de tiempo universal. Ese término no aparece cuando las medidas son efectuadas en tiempo uniforme, ya que la aceleración ficticia no es más que la expresión de la ralentización de la escala de tiempo universal respecto al tiempo uniforme.

Si la Tierra girara con una velocidad angular uniforme, recorrería en un tiempo uniforme  $T$  el ángulo

$$\alpha_0 = \beta_0 + \omega_0 T,$$

no obstante, existe un frenado de la Tierra que suponemos constante. Entonces, en el intervalo de tiempo  $T$ , el ángulo verdaderamente girado por la Tierra será

$$\alpha = \beta_0 + \omega_0 T + \frac{1}{2} \dot{\omega} T^2,$$

siendo el origen de  $T$  el momento en que la velocidad angular de la Tierra tomó el valor  $\omega_0$  y  $\dot{\omega}$  es la aceleración de frenado (negativa) de la Tierra. El ángulo que “atrás” la Tierra en un periodo de  $T$  años será

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{2} \dot{\omega} T^2,$$

el ángulo descrito por la Tierra  $\alpha$  no llega a completar el ángulo que hubiera recorrido si hubiese seguido un movimiento uniforme  $\alpha_0$ ; el ángulo que le faltaría por recorrer es el dado por la anterior expresión. Esto nos viene a decir que la escala de tiempo basado en la rotación de la Tierra atrasa respecto al tiempo uniforme. Para pasar de unidades de ángulo a unidades de tiempo, dividimos entre la velocidad angular de la Tierra

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} T^2 \Rightarrow t_U - t_E = \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} T^2$$

donde  $t_U$  representa el tiempo medido en la escala de tiempo universal y  $t_E$  es el tiempo uniforme. Nótese que la velocidad angular de rotación de la Tierra es prácticamente constante por la pequeñez de la aceleración de frenado, de ahí que en las expresiones anteriores no hayamos distinguido la velocidad angular en un momento u otro.

La Luna tiene un movimiento propio dado por la velocidad angular  $n$ . El ángulo

descrito por la Luna en un intervalo de tiempo uniforme  $t_E$  es

$$\varphi = nt_E = nt_U - \frac{1}{2}n\frac{\dot{\omega}}{\omega}T^2,$$

el segundo sumando no es más que la aceleración de frenado que registra la Luna cuando se mide su movimiento con el tiempo rotacional. Por tanto, la aceleración ficticia de la Luna, por efecto del frenado terrestre es

$$-n\frac{\dot{\omega}}{\omega},$$

aceleración que es positiva, lo que corresponde a un movimiento acelerado. La aceleración real del movimiento de la Luna es  $\dot{n}$ , por lo tanto la aceleración aparente total de la Luna tal como es observada desde la Tierra es

$$v = \dot{n} - \frac{n}{\omega}\dot{\omega}. \quad (1.2)$$

Se suele representar la variación del movimiento medio propio de la Luna por  $\dot{n}$  y la aceleración ficticia por  $s$ . Para el caso del movimiento aparente del Sol, encontramos una fórmula análoga a (1.2)

$$v' = \dot{n}' - \frac{n'}{\omega}\dot{\omega} \quad (2.2)$$

donde  $n'$  es el movimiento medio del Sol. Cualquier otro planeta tendrá una aceleración secular dada por una expresión similar

$$v'' = \dot{n}'' - \frac{n''}{\omega}\dot{\omega},$$

donde  $n''$  es el movimiento medio del planeta en cuestión. Como las variaciones de los movimientos medios propios del Sol y de los planetas son extremadamente pequeñas, podemos poner con muy buena aproximación

$$v' = -\frac{n'}{\omega}\dot{\omega}; \quad v'' = -\frac{n''}{\omega}\dot{\omega}$$

nótese que en todos los casos, la aceleración es positiva y proporcional al movimiento propio del planeta.

De la expresión (2.2) obtenemos

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{v'}{n'}$$

donde hemos despreciado el valor de la variación del movimiento medio del Sol.

Sustituyendo el anterior resultado en (1.2) queda

$$v - \frac{n}{n'}v' = \dot{n} \Rightarrow v - 13.37v' = \dot{n} \quad (3.2)$$

que es la fórmula que nos relaciona las aceleraciones seculares del Sol y la Luna. Nótese que las variaciones de los momentos de inercia de la Tierra y la posible variación de la constante de gravitación universal, no afectan al anterior resultado. Otra relación de

interés que se deriva de las anteriores fórmulas es

$$v' = sn'/n. \quad (4.2)$$

### Aceleraciones seculares en los cuerpos celestes

El frenado secular de la Tierra tiene varias causas. La más importante son las mareas lunares y solares. Otro factor son las mareas atmosféricas, producidas por un calentamiento irregular de la masa de aire. Otra causa que parece contribuir a la alteración de la velocidad de rotación de la Tierra, es la variación de sus momentos de inercia, causado por diversos procesos geofísicos. Habría que añadir otras posibles causas, tales como la hipotética variación de la constante de gravitación universal, el acoplamiento magnético entre el núcleo terrestre y el manto,<sup>5</sup> la transferencia de momento angular entre la Tierra sólida y la atmósfera y el océano, cambios en el nivel del mar, procesos tectónicos que cambian el momento angular y quizás otras causas hoy desconocidas.

Las variaciones de la rotación terrestre se pueden dividir en tres términos. Uno de ellos es la variación secular, caracterizada por una aceleración de frenado constante (o en todo caso, de muy largo periodo).<sup>6</sup> El segundo término son las fluctuaciones: alteraciones aleatorias de la rotación terrestre.<sup>7</sup> Nótese que la variación de los momentos de inercia pueden provocar tanto variaciones seculares como fluctuaciones. El último de los tres términos son las alteraciones periódicas de carácter estacional.<sup>8</sup>

Al frenarse la Tierra, ya sea por efecto de las mareas o por otra causa, se observa una aceleración aparente en los cuerpos celestes cuando se mide el tiempo en la escala de tiempo rotacional. Ya hemos visto que estas aceleraciones ficticias son proporcionales a los movimientos medios de los cuerpos celestes. También las fluctuaciones producen aceleraciones aparentes de los cuerpos celestes, de igual manera a como lo hace el frenado secular.

La aceleración secular de la rotación de la Tierra se descompone en los siguientes términos

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{total secular}} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{mareas lunares}} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{mareas solares}} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{cambios en momento de inercia}} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{otras causas}}.$$

5. Una transferencia de momento angular entre el núcleo y el manto terrestre, no modificaría el momento angular total de la Tierra; no obstante, alteraría la velocidad angular de la superficie terrestre, dando la apariencia de un frenado en la rotación del planeta.

6. Al analizar datos astronómicos se ha detectado una posible variación de las aceleraciones seculares del Sol y la Luna. Véase Stephenson F. R., Said S. S., "No-tidal changes in the Earth's rate of rotation as deduced from medieval eclipse observations", *Astronomy and Astrophysics* **215** (1989) 181-189.

7. Las fluctuaciones tienen una variación muy suave, lo cual permite que se puedan predecir con un intervalo de 2 ó 3 años. En su espectro aparecen componentes con diversas frecuencias, la más importante tiene un periodo de 18.6 años y está asociada con las mareas. El resto de las fluctuaciones son producidas por el acoplamiento entre el núcleo y el manto terrestre, mediante un mecanismo no claramente entendido.

8. Estas alteraciones son también previsibles, el 90% de ellas puede ser computada a partir de una fórmula convencional.

Entonces la parte de la aceleración secular ficticia de la Luna es

$$s = -\frac{n}{\omega} \left( \dot{\omega}_{\text{lunar}} + \dot{\omega}_{\text{solar}} + \dot{\omega}_{\text{m. inercia}} + \dot{\omega}_{\text{otras}} \right).$$

El problema de las observaciones queda dificultado por la existencia de las fluctuaciones. Para separarlas del frenado secular, debemos tener presente que  $\dot{n}$  es una aceleración real y que la otra parte de la aceleración secular de la Luna, la denominada  $s$ , es solamente aparente y que se refleja en todos los demás cuerpos celestes.

La corrección que hay que hacerle a la longitud eclíptica de la Luna para que se ajuste a los datos observados, puede ser puesta como

$$\delta L = a + bT + \frac{1}{2}(\dot{n} + s)T^2 + B(T)$$

$B(T)$  expresa las fluctuaciones o variaciones irregulares de la rotación de la Tierra, que originan variaciones ficticias en la longitud de la Luna. Como es habitual,  $T$  se mide en siglos julianos contados desde una determinada época.

El término que debe sumarse a la longitud computada del Sol para que nos de la longitud observada cuando se hacen las mediciones en tiempo universal, viene dada por

$$\delta L' = a' + b'T + \frac{1}{2} \frac{n'}{n} s T^2 + \frac{n'}{n} B(T),$$

donde se ha hecho uso de (4.2). Una fórmula similar será aplicable a los demás planetas

$$\delta L'' = a'' + b''T + \frac{1}{2} \frac{n''}{n} s T^2 + \frac{n''}{n} B(T),$$

esta corrección es apreciable para los planetas internos, pero es muy pequeña para los demás planetas, dado el pequeño valor de sus movimientos propios.

Spencer Jones partió en su estudio <sup>9</sup> de la aceleración lunar encontrada por de Sitter, que la usó en la corrección a la longitud tabulada de la Luna <sup>10</sup>

$$\delta L = 4''.65 + 12''.96T + 5''.22T^2 + B \quad (5.2)$$

y encontró a partir de observaciones modernas una corrección a la longitud del Sol dada por la teoría de Newcomb de

$$\delta L' = 1''.00 + 2''.97 + 1''.23T^2 + 0''.0747B \quad (6.2)$$

de donde resulta una aceleración secular aparente del Sol de 2.46 segundos de arco por siglo cuadrado. Esto significa que los términos de la aceleración secular de la Luna son

$$v = 2 \cdot 5.22 = 10.44; \quad \dot{n} = v - 13.37v' = -22.45; \quad s = v - \dot{n} = 32.89$$

todos ellos medidos en segundos de arco por siglo cuadrado. Las aceleraciones encontradas en Mercurio y Venus estaban en completo acuerdo con la teoría

9. Spencer Jones H., "The rotation of the Earth, and the secular accelerations of the sun, moon and planets", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **99** (1939) 541-558.

10. Se trata de una corrección efectuada por Brown a la teoría lunar, Danjon A., *Astronomie Générale*, Librairie Scientifique et Technique, 1986, pp. 269-296.

$$v_{\text{Mercurio}} = \frac{n_{\text{Mercurio}}}{n} s = \frac{1}{3.22} 32.89 \approx 10'' .20 \text{ siglo}^{-2}$$

$$n_{\text{Venus}} = \frac{n_{\text{Venus}}}{n} s = \frac{1}{8.23} 32.89 \approx 4'' \text{ siglo}^{-2}$$

lo que muestra el carácter ficticio de esas aceleraciones, originadas en el frenado de la rotación de la Tierra.

Como queda dicho, Spencer Jones partió del valor de la aceleración secular de la Luna encontrada por de Sitter a partir del análisis de observaciones antiguas. Si se quiere usar un valor más actualizado de esa aceleración, los resultados anteriores deben ser corregidos. Supongamos que hacemos uso de una nueva aceleración dada por

$$\bar{v} = v + \Delta v = \dot{n} + s + \Delta v = \dot{n} + \bar{s}$$

que puede ser entendido como que permanece inalterable el valor de la aceleración propia de la Luna y varía exclusivamente la aceleración ficticia. Entonces, en las anteriores fórmulas tendremos que hacer la transformación

$$s \rightarrow \bar{s} = s + \Delta v,$$

por ejemplo, la aceleración secular del Sol se verá transformada según

$$\frac{1}{2} \frac{n'}{n} s T^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{n'}{n} (s + \Delta v) T^2 \Rightarrow v' \rightarrow v' + \frac{n'}{n} \Delta v$$

y fórmulas equivalentes para los demás planetas. Nótese que como  $n/n'$  es 0.075, una pequeña variación de la aceleración secular de la Luna, apenas afectará a la aceleración secular del Sol.

### Alargamiento del día

Se denomina alargamiento del día (que representamos por  $A_D$ ) al tiempo que la duración del día solar medio excede las 24 horas de tiempo uniforme. El día solar medio siempre tiene 24 horas de tiempo universal, pero tiene una duración que va variando cuando se mide en tiempo uniforme.<sup>11</sup> Un día solar medio tiene 24 horas de tiempo universal

$$UT_2 - UT_1 = 24,$$

existiendo entre los momentos 1 y 2 un intervalo de un día solar medio. En este mismo periodo, el tiempo uniforme aumenta en 24 horas más una cierta cantidad, que es el  $A_D$

$$TT_2 - TT_1 = 24 + A_D$$

donde  $TT$  significa la escala de tiempo uniforme. Combinando las dos últimas expresiones se encuentra

$$A_D = (TT_2 - UT_2) - (TT_1 - UT_1) = \Delta T_2 - \Delta T_1$$

donde hemos definido

$$\Delta T = TT - UT$$

que suponemos expresado en segundos. Como los momentos 1 y 2 se diferencian en un día, tendremos muy aproximadamente

---

11. De momento no vamos a distinguir entre los distintos tipos de tiempo uniforme que existen, más adelante lo identificaremos con el tiempo terrestre.

$$A_D = \Delta T \left( T + \frac{1}{36\,525} \right) - \Delta T(T) \approx \frac{1}{36\,525} \frac{d\Delta T}{dT}$$

cantidad que es función del tiempo  $T$  (en siglos julianos contados a partir de una época determinada). No importa si los siglos julianos están medidos en la escala uniforme o universal.

El alargamiento del día  $A_D$  se puede poner en función de varias unidades

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36\,525} \frac{d\Delta T}{dT} \text{ segundos por día} \\ & \frac{1}{3600} \frac{1}{36\,525} \frac{d\Delta T}{dT} \text{ horas por día} \\ & \frac{1}{86\,400} \frac{1}{36\,525} \frac{d\Delta T}{dT} \text{ días por días.} \end{aligned}$$

### Tiempo acumulado entre las escalas uniforme y universal

Hemos visto que la diferencia entre las escalas de tiempo uniforme y de tiempo universal aumenta en  $A_D$  segundos cada día. El exceso acumulado al cabo de un determinado intervalo de tiempo, se obtiene por

$$L_{AC} = \int_{T_1}^{T_2} A_D dt$$

$L_{AC}$  representa el tiempo acumulado entre las escalas TT y UT desde el momento  $T_1$  al  $T_2$  y  $t$  es medido en días si  $A_D$  viene en segundos por día. Al desarrollar la integral anterior queda

$$L_{AC} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\Delta T}{dT} = \Delta T(T_2) - \Delta T(T_1)$$

que viene expresado en segundos. En el integrando hemos cambiado la variable  $t$  por la variable  $T$  (que representa siglos julianos), es decir hemos hecho el cambio

$$t = 36\,525 T.$$

### Velocidad angular de revolución

Las escalas de tiempo uniforme y de tiempo universal no marchan al mismo ritmo. Hubo un tiempo en el pasado en que la escala UT marchaba a mayor ritmo que la escala de tiempo uniforme TT, al contrario de lo que actualmente ocurre. Corresponde este periodo a la zona de la pendiente negativa de la gráfica  $\Delta T - T$ , ya que esa circunstancia significa que el tiempo universal se va acercando al tiempo uniforme. A partir de una determinada fecha, la pendiente adquiere valor positivo, lo que indica que TT crece a mayor ritmo que la escala UT. Entre las dos situaciones existe un momento en que las marchas de ambas escalas son iguales. En ese momento, 24 horas de UT son iguales a 24 horas de TT. Este punto es el mínimo de la función  $\Delta T$



$$\left[ \frac{d\Delta T(T)}{dT} \right]_{T_0} = 0. \quad (7.2)$$

Debemos advertir que una cosa es que las marchas de las escalas UT y TT sean iguales y otra cosa que el valor medido por las dos escalas sea el mismo, ambas situaciones corresponden a momentos diferentes.

Definimos

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{86\,400}$$

expresado en radianes por segundo; entonces podemos poner

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400 + A_D} = \frac{\omega_0}{1 + A_D/86\,400} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{A_D}{86\,400} \right) \quad (8.2)$$

donde hemos hecho uso de la pequeñez del alargamiento del día. Tomando valores numéricos

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - 3.16881 \cdot 10^{-10} \frac{d\Delta T}{dT} \right),$$

nótese que  $\Delta T$  viene en segundos y  $T$  en siglos julianos. Si se expresa  $\Delta T$  y  $T$  en días, entonces

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{d\Delta T}{dT} \right).$$

Derivando (8.2)

$$\dot{\omega} = -\frac{2\pi}{86\,400} \frac{1}{36\,525^2} \frac{1}{86\,400^2} \frac{d^2\Delta T}{dT^2} = -7.30228 \cdot 10^{-24} \frac{d^2\Delta T}{dT^2} \quad (9.2)$$

expresado en radianes por segundo cuadrado si  $\Delta T$  está en segundos y  $T$  en siglos julianos. Es útil dar la variación de la velocidad angular de la Tierra en función de la variación del alargamiento del día

$$\dot{\omega} = -2.667 \cdot 10^{-22} \dot{A}_D$$

donde se ha puesto el coeficiente para que la aceleración angular venga en radianes por segundo cuadrado y la variación del alargamiento del día venga en milisegundos por día y siglo juliano.<sup>12</sup> Otras formas de expresar el frenado terrestre son mediante las siguientes expresiones

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -1.157\,338 \cdot 10^{-8} \dot{A}_D$$

---

12. Newton definió un nuevo parámetro  $y = 10^9 \dot{\omega}/\omega$ , expresado en la inversa de siglo juliano. Entonces la variación del alargamiento del día será  $\dot{A}_D = -y/11.39$ , expresado en milisegundos por día y siglo juliano, Newton R. R., *The Moon's Acceleration and Its Physical Origins*, The Johns Hopkins University Press, 1984, volumen 2, pp. 8-15.

$$\begin{aligned} v' &= -n' \frac{\dot{\omega}}{\omega} = 1.49988 \dot{A}_D \Rightarrow \dot{A}_D = 0.6667 v' \\ \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= -\frac{v'}{n'} = -7.716 \cdot 10^{-11} v' \end{aligned} \quad (10.2)$$

donde  $n'$  viene en segundos de arco por siglo,  $\dot{A}_D$  está expresado como es habitual en milisegundos por día y siglo juliano,  $\dot{\omega}/\omega$  tiene la unidad de la inversa de siglo juliano y  $v'$  es segundos de aros por siglo cuadrado.

Se supone que en tiempos históricos no se han modificado las circunstancias geológicas de la Tierra,<sup>13</sup> de tal forma que las causas que producen el frenado secular en la rotación de la Tierra, principalmente las mareas lunar y solar, no se han visto modificadas.<sup>14</sup> Esto significa que la aceleración de frenado de la Tierra debe haber permanecido constante. Si este es el caso, por (9.2) se encuentra que

$$\frac{d^2 \Delta T}{dT^2} = \text{cte} \Rightarrow \Delta T = a + bT + cT^2$$

donde  $\Delta T$  se expresa en segundos y  $T$  en siglos a partir de una fecha dada. A partir de la anterior relación podemos encontrar el momento en que la marcha de la escala de tiempo uniforme era la misma que la del tiempo universal; haciendo uso de (7.2) se encuentra

$$T_0 = -\frac{b}{2c}.$$

Podemos expresar la variación fraccional de la rotación de la Tierra en función del parámetro  $c$ . Partiendo de la primera de las ecuaciones (10.2) y de la definición del alargamiento del día, se encuentra

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -1.157 \ 338 \cdot 10^{-10} \frac{1000}{36525} 2c = -6.337 \cdot 10^{-10} c$$

donde  $c$  viene dado en segundos por siglo cuadrado y la deceleración fraccional de la Tierra en la inversa de siglo juliano. Otras magnitudes que se derivan del parámetro  $c$  son

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{b + 2cT}{36525} \text{ s/día}; \quad \dot{A}_D = 5.4757 \cdot 10^{-5} c \text{ s/día} \times \text{siglo} \\ v' &= 0.08213 c \text{ "/siglo}^2; \quad v = \dot{n} + 1.0980 c \text{ "/siglo}. \end{aligned}$$

Se denomina longitud del día o LOD, que representamos  $L_D$ , la duración del día expresado en tiempo uniforme. Como la Tierra se está frenando entonces

$$L_D = 86 \ 400 + A_D,$$

13. Parece ser que la única causa que varía sensiblemente con el tiempo es el acoplamiento magnético entre el núcleo y el manto terrestre, Smith P. J., "The intensity of the ancient geomagnetic field: a review and analysis", *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **12** (1967) 321-362.

14. Lambeck K., *The Earth's Variable Rotation*, Cambridge University Press, 1980, pp. 336-339.

haciendo uso de (8.2) obtenemos

$$L_D = 86\,400 \frac{\omega_0}{\omega}$$

notemos que  $L_D$  va en aumento ya que  $\omega$  disminuye.<sup>15</sup>

### Resultados de la observación

Se ha procedido de múltiples formas para obtener las aceleraciones aparentes del Sol y la Luna que resultan del frenado de la rotación de la Tierra. Los métodos empleados se pueden agrupar de dos bloques, ya sea utilizando datos históricos o bien modernos (o sea, los recopilados desde la invención del telescopio).<sup>16</sup>

Los distintos procedimientos utilizados se agrupan de la siguiente forma:

\*Observaciones antiguas:

- Eclipses solares (especialmente totales) y lunares.<sup>17</sup>
- Magnitudes de eclipses lunares.<sup>18</sup>
- Ocultaciones de estrellas y planetas por la Luna.<sup>19</sup>
- Equinoccios y solsticios.<sup>20</sup>
- Teorías astronómicas antiguas.<sup>21</sup>

\*Observaciones modernas:

- Observaciones meridianas (o extrameridianas) del Sol, la Luna y los planetas.<sup>22</sup>
- Perturbaciones de satélites cercanos.<sup>23</sup>
- Ocultaciones estelares.<sup>24</sup>

15. Audion C. y Guinot B., *The Measurement of Time. Time, Frequency and the Atomic Clock*, Cambridge University Press, 2001, pp. 264-274.

16. Morrison L. V., "The secular accelerations of the moon's orbital motion and the earth's rotation", *The Moon* **5** (1972) 253-264.

17. Fotheringham J. K., Litt D., "A solution of ancient eclipses of the sun", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **81** (1920) 104-126 y Stephenson F. R., Lieske J. H., "Changes in the Earth's rate of rotation between A.D. 1672 and 1806 as deduced from solar timings", *Astronomy and Astrophysics* **200** (1988) 218-224.

18. Murray C. A., "The secular acceleration of the moon, and the lunar tidal couple", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **117** (1957) 478-482.

19. Hilton J. L., Seidelmann P. K., "An examination of the change in the earth's rotation rate from ancient chinese observations of lunar occultations of the planets", *Astronomical Journal* **104** (1992) 2250-2252.

20. Fotheringham J. K., Litt D., "The secular acceleration of the Sun as determined from Hipparchus equinox observations; with a Note on Ptolemy's False Equinox", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **78** (1918) 406-423.

21. Goldstein S. J., "Deceleration of the earth's rotation from old solar tables", *Celestial Mechanics* **27** (1982) 53-63. Véase también Goldstein S. J., "On the slow changes in the earth's rotation", *Astronomical Journal* **90** (1985) 1900-1905.

22. Brouwer D., "A study of the changes in the rate of rotation of the earth", *Astronomical Journal* **57** (1952) 126-145.

23. Cheng M. K., Eanes C. K., Shum B. E., Schtz B. E., Tapley B. D., "Temporal variations in low degree zonal harmonics from Starlette orbit analysis", *Geophysical Research Letters* **16** (1989) 393-396.

24. Van Flandern T. C., "Is the gravitational constant changing?", *Astronomical Journal* **248**

- Tránsitos de Mercurio por el Sol.<sup>25</sup>
- Medidas por láser.<sup>26</sup>
- Cálculo de la disipación de energía por las mareas.<sup>27</sup>
- Cálculo de los momentos mecánicos de las mareas.<sup>28</sup>
- \*Combinación de medidas modernas y antiguas.<sup>29</sup>

Las primeras investigaciones fueron hechas a principios del siglo XX y se centraron en el análisis de antiguos eclipses solares. Pero por este medio no se puede determinar simultáneamente  $\nu$  y  $\nu'$ , sino sólo se puede encontrar una relación lineal entre ambas. Si se conocen dos eclipses cercanos entre sí, se puede formar un sistema de dos ecuaciones y resolver las aceleraciones seculares del Sol y de la Luna. Como esto último no es el caso que se suele dar, hay que suponer que la aceleración de frenado es constante y así tratar simultáneamente todas las ecuaciones que relacionan  $n$  con  $n'$  y que se obtienen de los diversos eclipses examinados.

No obstante, esta no es la forma en que se procede actualmente. Por diversos caminos se ha medido la variación del movimiento propio de la Luna, actualmente los valores hallados convergen en  $-26$  segundos de arco por siglo cuadrado. Con esta dato, pueden examinarse los antiguos eclipses y de ellos se desprende una sólo incógnita, la cual puede ser el  $\Delta T$ , que permite obtener la aceleración secular del Sol y de aquí la correspondiente aceleración secular de la Luna.

Especialmente fiables son las medidas de  $\dot{n}$  encontradas por enlace mediante láser lunar LLR, que actualmente confirma el valor de  $-26''$  por siglo cuadrado. El análisis de las perturbaciones que ocasionan en los satélites artificiales la deformación de la Tierra por las mareas, también apuntan al mismo valor. De especial significación fue el estudio que Morrison y Ward hicieron de 2,400 tránsitos de Mercurio por el disco solar. De este estudio pudieron determinar el correcto  $\Delta T$ , que compararon con el  $\Delta T$  obtenido a partir del movimiento lunar, utilizando para ello la aceleración dada por de Sitter. Ambos conjuntos de valores no concuerdan, indicación de que la supuesta aceleración de la Luna no era la correcta. De la comparación entre ambos valores de  $\Delta T$ , pudieron encontrar la correcta aceleración lunar, que resultó ser  $-26'' \pm 2''$  por siglo cuadrado.

---

(1981) 813-816.

25. Morrison L. V. y Ward C. G., "An analysis of the transits of Mercury: 1677-1973", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **173** (1975) 183-206.

26. Newhall X. X., Williams J. G., Dickey J.O., en Brosche P. y Sundermann J., *Earth's rotation from eons to days*, Springer-Verlag, 1990, p.51.

27. Lambeck K., *The earth's variable rotation*, Cambridge University Press, 1980, p. 330, encuentra un valor de la potencia disipada de 4.42 billones de vatios, de donde se deduce la variación del movimiento medio lunar, averiguando antes el momento mecánico ejercido por la Luna. El resultado que se obtiene es de, aproximadamente,  $-29$  segundos de arco por siglo cuadrado.

28. Curott D. R., "Earth deceleration from ancient solar eclipses", *Astronomical Journal* **71** (1966) 264-269. Este sistema es el que se ha generalizado. Como hoy es bien conocida la variación del movimiento propio de la Luna, se utiliza este dato para el análisis de observaciones antiguas, de tal forma que sólo es necesario tener en cuenta como incógnita, la aceleración secular del Sol o la que posee la Luna.

29. Stephenson F. R., *Historical eclipses and earth's rotation*, Cambridge University Press, 1997, pp. 61-82.

Aunque la información histórica de los diferentes eclipses puede ser muy variada, en esencia se trata de hacer el siguiente cálculo. Se parte de la fecha de un eclipse total de Sol, así como de las coordenadas geográficas del lugar de observación. Con la teoría del movimiento solar y lunar (en la que se supone que la aceleración propia de la Luna debida a las mareas es  $-26$  segundos por siglo cuadrado), se determina la longitud geográfica del lugar (de igual latitud que el lugar original de observación) en que debería haber sido observado el eclipse en el caso de que la Tierra no se estuviera frenando. Esto es así porque el argumento temporal de las teorías dinámicas de los cuerpos celestes es la escala de tiempo uniforme, tal como el tiempo de las efemérides que veremos más adelante.

La diferencia entre el tiempo uniforme y el tiempo universal será equivalente a la diferencia de las longitudes (la obtenida de la teoría menos la del lugar de observación del eclipse histórico), o sea

$$\Delta T = 240(\phi - \phi')$$

donde el 240 es el factor necesario para convertir los grados en segundos de tiempo.  $\phi$  y  $\phi'$  son las longitudes donde debería haberse observado el eclipse en el caso de movimiento terrestre uniforme y del lugar donde efectivamente se observó. Nótese que  $\Delta T$  es positivo, lo que indica que el eclipse debería de haberse observado hacia el oeste del lugar donde fue visto. En realidad, el método descrito sólo nos permite obtener el intervalo en el cual se debe encontrar  $\Delta T$ , dado que hay que tener presente el ancho de la sombra proyectada por la Luna sobre la Tierra.

En lo que sigue nos vamos a referir al completo análisis realizado por Stephenson, que investigó más de trescientas observaciones antiguas. De sus conclusiones se desprende que existe un frenado secular constante de la rotación de la Tierra, al menos en un periodo comprendido entre el año  $-500$  y la actualidad, que viene expresado por la ecuación

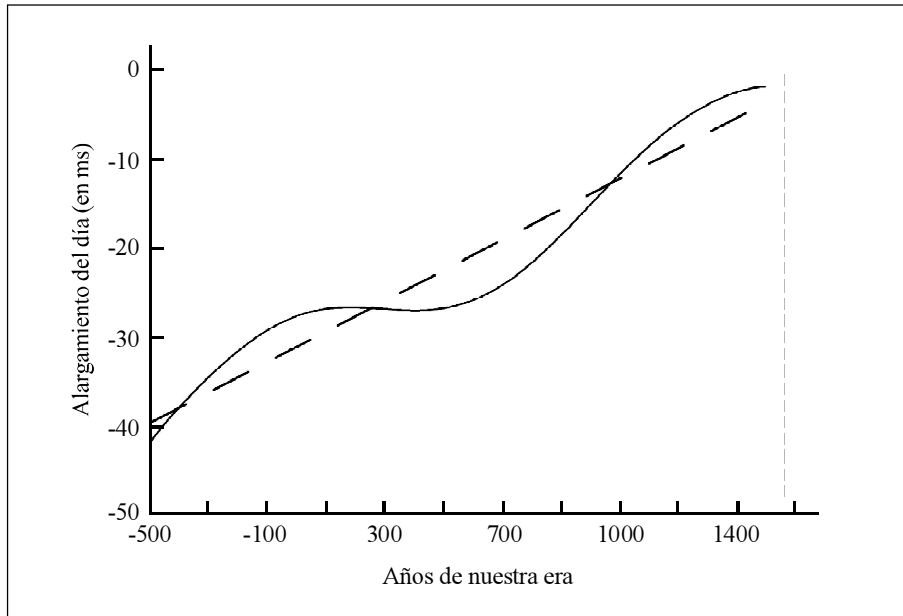
$$\Delta T = 31t^2 - 20 \text{ segundos}^{30} \quad (11.2)$$

$t$  son los siglos transcurridos desde el año 1820, que corresponde a la época media de las observaciones de Newcomb, o dicho de otra forma, al momento en que la escala de tiempo de las efemérides (ver más adelante) marchaba al mismo ritmo que la escala de tiempo universal. Los 20 segundos están colocados para hacer coincidentes los resultados de antiguos registros con los de modernas observaciones.<sup>31</sup> Las investigaciones de Stephenson (gráfica 1.2) fueron más allá, pudo detectar superpuesta a la variación secular constante, una componente periódica de unos 1,500 años de periodo.<sup>32</sup> Su

30. Este resultado ha sido parcialmente revisado por el mismo autor en colaboración con Morrison, al hacer el análisis de 449 registros obtenidos en el periodo  $-700$  al 1600. Encontrando que el coeficiente  $c$  de  $T^2$  tiene un valor de 33 segundos por siglo cuadrado, lo que significa una variación del alargamiento del día de 1,8 milisegundos por siglo cuadrado. Morrison L. V., Stephenson F. R., "Ancient eclipse and the earth's rotation", *Highlights of Astronomy* **12** (2002) 338-341.

31. Se han ideado varias fórmulas empíricas de  $\Delta T$  para observaciones moderna, Schmaadel L. D., Zech C., "Empirical transformations from U.T. to E.T. for the period 1800-1980", *Astronomische Nachrichten* **309** (1988) 219-221.

32. Esta componente tiene una amplitud máxima del LOD de 2 milisegundos.



Gráfica 1.2.- Variación del alargamiento del día en tiempos históricos. La línea recta a trazos discontinuos es la regresión lineal promedio, que representa una variación del alargamiento del día de 1.7 ms/siglo.

amplitud es del mismo orden que el apreciado en las fluctuaciones, lo que lleva a pensar que deben tener un mismo origen geofísico, tal como el acoplamiento magnético entre el manto y el núcleo terrestre. Las fechas en que se hizo nula la componente periódica fueron aproximadamente los años: -400, 300, 1100 y 1800.

La ecuación (11.2) se puede poner de la forma

$$\Delta T = 80.44 + 111.6 T + 31 T^2 \quad (12.2)$$

donde  $T$  son siglos julianos contados a partir de la época J2000.0. Aplicando la fórmula (7.2) se encuentra que en el año 1820  $\Delta T$  fue mínimo, indicando con ello que en esa fecha la duración del día alcanzó los 86,400 segundos de tiempo uniforme. Las aceleraciones seculares del Sol y de la Luna según se desprende de la anterior ecuación son

$$v = 8''.04 \text{ siglo}^{-2}; \quad v' = 2''.546 \text{ siglo}^{-2}$$

mientras que el alargamiento del día es

$$A_D = 3.05544 \cdot 10^{-3} + 1.6975 \cdot 10^{-3} T \text{ segundos/día}$$

así que la variación del alargamiento del día es

$$\dot{A}_D = 1.6975 \text{ ms/día} \cdot \text{siglo} \approx 1.7 \text{ ms/día} \cdot \text{siglo}$$

En nuestra investigación posterior tomaremos la ecuación (12.2) como la que mejor se ajusta a la realidad durante un periodo de algunos miles de años, e igualmente tomaremos los parámetros que de ella se derivan. Esta ecuación la mantendremos conjuntamente con el valor de -26 segundos por siglo cuadrado para  $\ddot{n}$ .

### Momento angular del sistema Tierra-Luna-Sol

El momento angular total del sistema formado por la Tierra, el Sol y la Luna se descompone en los siguientes sumandos

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 ,$$

$L_1$  es el momento angular orbital del sistema Tierra-Luna respecto al centro de masas común.

$L_2$  es el momento angular orbital del sistema Tierra-Luna en torno al Sol, medido respecto al centro de masas común.

$L_3$ ,  $L_4$  y  $L_5$  son los momentos angulares de rotación respecto a sus ejes de la Tierra, la Luna y el Sol, referidos a sus centros de masas.

En los cálculos que haremos a continuación vamos a suponer que las órbitas son circulares y que todas se encuentran en el mismo plano, así como que los ejes de rotación de los astros son perpendiculares a ese plano. Los resultados obtenidos por cálculos más precisos divergen sólo ligeramente de la teoría que vamos a desarrollar, pero nuestro planteamiento nos permite un análisis más simplificado, percibiéndose por completo los fundamentos físicos.<sup>33</sup>

El momento angular orbital respecto al centro de masas del sistema Tierra-Luna es dado por

$$L_1 = Mr_{cT}^2 n + mr_{cL}^2 n$$

siendo  $M$  la masa de la Tierra y  $m$  la masa de la Luna. El subíndice  $c$  indica que las posiciones están calculadas respecto al centro de masas del sistema Tierra-Luna. La velocidad angular  $n$  es la misma para los dos astros. Replanteando la anterior fórmula con respecto a la distancia  $r$  que une los centros de la Tierra y la Luna, queda

$$L_1 = \mu r^2 n \quad (13.2)$$

siendo  $\mu$  la masa reducida. Por una argumentación similar se encuentra

$$L_2 = \mu' r'^2 n' \quad (14.2)$$

donde  $\mu'$  es la masa reducida del sistema Tierra-Sol-Luna

$$\mu' = \frac{(M + m)m'}{M + m + m'}$$

siendo  $m'$  la masa del Sol. El momento angular total será

$$L = \mu r^2 n + \mu' r'^2 n' + I\omega + I'\omega' + I''\omega'' ,$$

los tres últimos sumandos son los momentos angulares de rotación de la Tierra, la Luna y el Sol respectivamente.

---

33. Un estudio tomando en cuenta el carácter elíptico de las órbitas solar y lunar y sus inclinaciones respecto al ecuador, puede verse en: Bursa M., "Secular deceleration of the moon and of the earth's rotation and variation in the zonal geopotential harmonic", *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **38** (1987) 309-313 y en Bursa M., "The tidal evolution of the earth-moon system", *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **38** (1987) 321-325.

### Momentos mecánicos que actúan sobre la Tierra

El sistema formado por la Tierra, el Sol y la Luna se puede considerar aislado, por tanto su momento angular total se tiene que conservar

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} + \frac{dL_3}{dt} + \frac{dL_4}{dt} + \frac{dL_5}{dt} = 0 .$$

La pleamar se alcanza un poco después de que haya pasado la Luna por el meridiano. Este atraso trae como consecuencia un momento mecánico producido por la Luna sobre la Tierra, que tiende a frenarla. Una situación similar se da con el Sol. Si  $N$  y  $N'$  representan los momentos mecánicos causantes de la modificación del momento angular orbital del sistema Tierra-Luna y del momento angular del sistema Tierra-Sol-Luna a causa de las mareas, entonces por la ecuación fundamental de la dinámica de rotación se tendrá

$$N = \frac{dL_1}{dt}; \quad N' = \frac{dL_2}{dt} . \quad (15.2)$$

Podemos considerar, con muy buena aproximación, que la variación de los momentos angulares de rotación del Sol y la Luna son despreciables frente a los anteriores términos. En efecto, la variación del momento angular de rotación viene dado ya sea por una variación del momento de inercia o por la variación de su velocidad angular de rotación. Esta última es producida, principalmente, por el efecto de las mareas. En la Luna estas mareas no existen, mientras que en el Sol las ocasionadas por la Tierra y la Luna son extremadamente pequeñas, tanto por la lejanía de estos astros del Sol como por sus pequeñas masas relativas.

También vamos a suponer que las variaciones de los momentos de inercia del Sol y la Luna son despreciables. Con estas suposiciones se obtiene, a partir de la conservación del momento angular

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = -N - N' . \quad (16.2)$$

Debemos notar que los momentos mecánicos anteriores son positivos y siempre contribuyan a frenar a la Tierra.

### Variación de los movimientos medios del Sol y la Luna

Combinando la primera de las ecuaciones (15.2) con la (13.2) se obtiene una expresión para el momento mecánica ejercido por la Luna

$$N = \frac{d}{dt}(\mu r^2 n)$$

al derivarla se encuentra

$$N = 2\mu r^2 \left( \frac{\dot{r}}{r} n + \frac{\dot{n}}{2} \right) \quad (17.2)$$

Vamos a continuación a relacionar la distancia de la Tierra a la Luna y el movimiento medio lunar. Para ello hacemos uso de la tercera ley de Kepler, ya que estamos suponiendo movimiento kepleriano



$$n^2 = \frac{k}{\mu a^3} = \frac{GMm}{\frac{Mm}{M+m} a^3} = \frac{G(M+m)}{a^3}$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita lunar. Para simplificar vamos a suponer que la órbita es circular

$$n^2 r^3 = G(M+m), \quad (18.2)$$

al derivar la anterior expresión queda

$$2 \frac{\dot{n}}{n} + 3 \frac{\dot{r}}{r} = 0,$$

para el Sol encontramos otra expresión similar. Volviendo a la expresión (17.2) se encuentra

$$\dot{n} = -\frac{3N}{\mu r^2}. \quad (19.2)$$

Debemos indicar que la variación del momento de inercia de la Tierra puede producir variación de la velocidad de rotación de la Tierra, pero no produce modificación en el movimiento propio de la Luna.<sup>34</sup> Nótese también que el momento mecánico ejercido por la Luna sobre la Tierra  $N$  es positivo, lo que significa un frenado del movimiento medio de la Luna.

Como hemos dicho, la misma fórmula es válida para el Sol, pero en éste caso la variación del movimiento propio es extremadamente pequeña. El momento mecánico  $N'$  es del mismo orden de magnitud que  $N$ , pero la masa reducida  $\mu'$  y la distancia de la Tierra al Sol, son mucho más grandes que los correspondientes valores para el sistema Tierra-Luna, por tanto en una primera aproximación obtenemos, al dividir (19.2) por su correspondiente del Sol

$$\frac{\dot{n}'}{\dot{n}} \approx \frac{mr^2}{Mr'^2} \approx 10^{-7}$$

lo que significa un valor aproximado para la variación del movimiento medio solar de

$$\dot{n}' \approx 10^{-6} \text{ siglo}^{-2}$$

lo que es totalmente inapreciable por la observación.

### **Cálculo de las aceleraciones seculares del Sol y la Luna a partir de la teoría de marea**

La teoría de mareas que venimos desarrollando nos permite evaluar las aceleraciones seculares del Sol y de la Luna. De la ecuación (16.2) se desprende que

---

34. Igualmente ocurre con la transferencia de momento angular entre la atmósfera y la Tierra sólida, o la que se produce entre el manto y el núcleo terrestre. En estos casos el momento angular total del planeta permanece inalterable, por tanto no cede momento angular a la Luna.

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\dot{I}}{I} - \frac{N}{I\omega} - \frac{N'}{I\omega} - \frac{N_T}{I\omega},$$

donde el primer sumando del segundo miembro, nos da la variación fraccional de la velocidad angular de la Tierra ocasionada por la eventual variación del momento de inercia,<sup>35</sup> los dos siguientes términos son las causadas a las mareas lunar y solar, y el último sumando es el momento mecánico producido sobre la marea atmosférica de origen térmico. Se trata de una marea semidiurna producida por el calentamiento irregular del Sol, que tiene una fase de variación contraria a las mareas oceánicas; o sea, que se produce unas dos horas antes que el paso del Sol por el meridiano o el antimeridiano.<sup>36</sup> Esta circunstancia hace que sea acelerador el momento mecánico que ejerce el Sol sobre la marea atmosférica. La Luna también ejerce un par mecánico sobre la marea atmosférica, que apenas alcanza el 5% del solar y es de frenado. Al aplicar en (1.2) tanto la anterior expresión como la (19.2), se encuentra

$$v = \frac{1}{\mu r^2} [(\kappa - 3)N + \kappa(N' + N_T)] + n \frac{\dot{I}}{I} \quad (20.2)$$

donde hemos definido

$$\kappa = \frac{\mu r^2 n}{I\omega}$$

que es el cociente entre el momento angular orbital del sistema Tierra-Luna y el momento angular rotacional de la Tierra. Si al cociente entre el momento mecánico del Sol y el de la Luna lo representamos por  $e$ , la ecuación (20.2) toma la forma

$$v = \left[ 1 - \frac{\kappa(1+e)}{3} \right] \dot{n} + \frac{nN_T}{I\omega} + n \frac{\dot{I}}{I}. \quad (21.2)$$

Para la aceleración secular aparente del Sol encontramos una fórmula que se deduce de igual manera que la anterior

$$v' = -\frac{\kappa(1+e)n'}{3n} \dot{n} + \frac{n'N_T}{I\omega} + n' \frac{\dot{I}}{I}.$$

Estamos ahora en condiciones de hacer una valoración numérica de nuestra teoría y compararla con los resultados de la observación.<sup>37</sup> Para ello vamos a partir de una

35. Lyttleton corrigió la teoría de Jeffreys [Jeffreys H., *The Earth. Its origin history and physical constitution*, Cambridge University Press, 1976 y Jeffreys H., "Tidal Friction", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **16** (1975) 145-151], al tener en cuenta que la ecuación fundamental de la dinámica de rotación debe contemplar la eventual variación con el tiempo del momento de inercia, Lyttleton R. A., "Tidal-friction theory of the Earth-moon system", *The Moon and the Planets* **22** (1980) 12-23 y Lyttleton R. A., "On the apparent secular accelerations of the moon and the sun", *The Moon and the Planets* **22** (1980) 99-102.

36. Gibrat sugiere que la energía disipada por las mareas proviene de la energía térmica del Sol y no de la energía cinética de la Tierra, lo que convertiría a la Tierra rotante en una máquina térmica, Gibrat R. *La energía de las mareas*, Labor, 1973, pp. 70-76.

37. Bursa plantea el problema al revés. Parte de la aceleración secular del Sol y de la variación del movimiento propio de la Luna y calcula la aceleración angular de rotación de la Tierra, separando

variación del movimiento propio de la Luna de  $-26$  segundos por siglo cuadrado y de un valor de  $-3.2 \cdot 10^{15} \text{ Nm}$  para el momento mecánico asociado a las mareas térmicas;<sup>38</sup> nótese que este valor es negativo, lo que significa que produce una aceleración en vez de un frenado. Para  $e$  tomaremos como valores extremos  $1/4.7$  y  $1/3.8$ , según el modelo de mareas que se adopte, ya sean lineales o no, el primero es característico de los océanos y el segundo de los mares estrechos.<sup>39,40</sup> Con estos datos se obtiene que las aceleraciones solar y lunar debido exclusivamente a las mareas (y no a la variación del momento de inercia) tienen los valores

$$v'_{\text{mareas}} = \begin{cases} 3.11 & \text{no lineal} \\ 2.98 & \text{lineal} \end{cases}$$

en unidades de segundos de arco por siglo cuadrado. Los anteriores resultados corresponden a una variación del alargamiento del día de

$$\dot{A}_D = \begin{cases} 2.08 & \text{no-lineal} \\ 1.99 & \text{lineal} \end{cases}$$

expresado en milisegundos por día y siglo juliano. Para obtener un único valor estimativo, podemos suponer que dos tercios del efecto retardador de las mareas se da en los mares estrechos y el resto en los mares abiertos. De aquí resulta un alargamiento del día de  $2.05$  milisegundos por día y siglo juliano. Por análisis de las perturbaciones de las órbitas de satélites cercanos a la Tierra, se encuentra una relación empírica entre la aceleración de frenado de la Tierra por efecto de las mareas lunisulares y  $\dot{n}$ <sup>41</sup> dada por

$$\dot{\omega}_{\text{mareas}} = -(1228 \pm 45) \text{ arcosegundos/siglo}^2 \Rightarrow \dot{A}_D = (2.24 \pm 0.08) \text{ ms/día} \cdot \text{siglo}$$

que coincide aceptablemente bien con nuestros resultados teóricos, si se tiene presente las simplificaciones y estimaciones que hemos considerado.

El resultado de  $2.05$  milisegundos por siglo está lejos del valor obtenido por la observación de antiguos eclipses, que se encuentra en torno de los  $1.7$  milisegundos por siglo. De aquí tenemos que concluir que existen otros factores que afectan, de

los efectos del Sol, la Luna y el producido por el cambio del momento de inercia, Bursa M., "The estimate of the deceleration in the earth's rotation due the sun", *Earth, Moon, and Planets* **56** (1992) 57-60. El mismo autor plantea la determinación de la relación entre los momentos mecánicos de la Luna y el Sol desde otro punto de vista. Calcula los momentos mecánicos ejercidos por los dos astros sobre el abultamiento de marea y luego impone la condición de que tanto el número de Love como el ángulo de retraso de las mareas solar y lunar sea iguales, obteniendo la relación  $N/N' = 4.8$ , Bursa M., "Secular deceleration of the moon and of the earth's rotation and variation in the zonal geopotential harmonic", *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **38** (1987) 309-313.

38. Volland, H., *Earth's rotation from eons to days*, editado por P. Brosche and J. Sundermann, Springer-Verlag, 1990, pp. 127-140.

39. Jeffreys H. *The earth. Its origin history and physical constitution*, ob. cit. pp. 318-319.

40. Jeffreys H., "The chief cause of the Lunar Secular Acceleration", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **80** (1920) 309-317, hemos corregido el cálculo numérico que aparece en éste y el anterior trabajo para la determinación del cociente entre  $N$  y  $N'$ .

41. Christodoulidis D. C., Smith D. E., Williamson R. G., Klosko S. M., "Observed tidal braking in the earth/moon/sun system", *Journal of Geophysical Research* **93** (1988) 6216-6236.

forma importante, al frenado de la rotación de la Tierra.

Un factor que puede acelerar la rotación de la Tierra en el orden requerido, es la disminución de su momento de inercia.<sup>42</sup> Vamos a estimar a que ritmo tiene que disminuir el momento de inercia para que la teoría sea compatible con los resultados de la observación. La ecuación (21.2) se puede poner como

$$v'_o = v'_M + n' \frac{\dot{I}}{I}$$

el subíndice significa *O* observación y *M* mareas. Aplicando los valores numéricos se encuentra

$$\dot{I} = -3.95 \cdot 10^{29} \text{ kg m}^2 \text{ siglo}^{-1}$$

valor que tiene que tomar la variación del momento de inercia para que el cálculo satisfaga los resultados de la observación.<sup>43,44</sup> Suponiendo la Tierra como un elipsoide de revolución de densidad uniforme, la anterior variación del momento de inercia correspondería a una reducción del radio ecuatorial terrestre de unos 13.0 milímetros por siglo. Para satisfacer el valor observado del coeficiente  $J_2$  del momento cuadrupolar gravitatorio es necesario que el radio polar aumente a un ritmo de 31.8 milímetros por siglo,<sup>45</sup> suponiendo las mismas hipótesis simplificadoras.

### La posible variación de la constante de gravitación universal

En 1937, Dirac planteó una curiosa sugerencia sobre la relación entre las constantes adimensionales de la naturaleza, de donde se deduce la variación de la constante de

42. Lyttleton R.A., "Relation of a contracting Earth to the apparent accelerations of the sun and moon", *The Moon* **16** (1976) 41-58, explica la variación del momento de inercia por la hipótesis de Ramsey del cambio de fase del núcleo terrestre, Ramsey W. H. "The planets and the white dwarfs", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **108** (1948) 406.

43. Bursa M., "Secular tidal and notidal variations in the Earth's rotation" en Mcarthy D. D., Carter W. E., *Variations in Earth Rotation*, American Geophysical Union, 1990, pp. 43-45. Para obtener la variación del momento de inercia de la Tierra, Bursa supone que la suma de las variaciones de los tres momentos de inercia es cero. Por este procedimiento obtiene una variación del momento de inercia de  $-4.53 \cdot 10^{29} \text{ kg m}^2 \text{ siglo}^{-1}$ . El dato numérico que toma es la variación del coeficiente  $J_2$  del momento cuadrupolar gravitatorio de la Tierra obtenido al hacer el seguimiento por láser del satélite LAGEOS, la observación da el valor  $\dot{J}_2 = -(2.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-9} \text{ siglo}^{-1}$ . El análisis de la precesión de los nodos de la órbita del satélite Starlette, da una variación de  $J_2$  de  $-(2.5 \pm 0.3) \cdot 10^{-9} \text{ siglo}^{-1}$ , Cheng M. K., Eanes R. J., Shum C. K., Schutz B. E., Tapley B. D., "Temporal variations in low degree zonal harmonics from Starlette orbit analysis", *Geophysical Research Letters* **16** (1989) 393-396.

44. Bursa M., "A note on tidal deceleration of the moon", *Earth, Moon, and Planets* **30** (1984) 189-192, utilizando unos valores de partida diferentes a los nuestros, obtiene un resultado ligeramente distinto,  $-3.2 \cdot 10^{29} \text{ kg m}^2 \text{ siglo}^{-1}$ . Bursa utiliza como hipótesis complementaria que el ángulo de retraso y el número de Love causados por la fricción de mareas, es el mismo para las mareas solar y lunar.

45. El momento principal a lo largo del eje de rotación de la Tierra (suponiéndola un elipsoide de densidad uniforme) es igual  $2/5Ma^2$ , donde  $a$  es el radio ecuatorial. Una disminución de  $a$  significa una disminución de  $I$ , aunque eso conlleve un aumento de los otros dos momentos principales de inercia.

gravitación universal.<sup>46</sup>

Podemos considerar tres grupos de relaciones entre constantes naturales. El primer grupo está formado por aquellas que tienen un valor cercano a la unidad, tal como la constante de estructura fina o la relación de masas del neutrón y el electrón. Un segundo grupo lo forman las que relacionan constantes de las partículas elementales con la constante de gravitación, tal como el cociente entre las fuerzas eléctricas entre un protón y un electrón y su fuerza de atracción gravitatoria. Estas constantes tienen un valor cercano a  $10^{40}$ . El tercer grupo son las que relacionan la constante de Hubble y las magnitudes de las partículas elementales, tales como la relación entre la longitud de Hubble (velocidad de la luz dividido entre la constante de Hubble) y el radio clásico del electrón. Este conjunto de constantes también tienen valores cercanos a  $10^{40}$ .

Dirac afirmó que la curiosa relación de tamaños de los dos últimos grupos de constantes no era algo accidental, sino que obedecía a una razón más profunda. Planteó la hipótesis de los grandes números, por la cual la relación entre los dos grupos de constantes adimensionales, envuelven coeficientes cercanos a la unidad que se mantienen inalterables con el tiempo. Esta afirmación nos lleva a la variación de la constante de gravitación con el tiempo, habida cuenta que la expansión del universo modifica el valor de la constante de Hubble. Aunque Dirac lanzó la hipótesis de que  $G$  varía como la inversa del tiempo, otras propuestas diferentes han sido posteriormente planteadas.

Una variación de la constante de gravitación universal afectaría a las órbitas de la Tierra y del Sol. Además, una modificación de  $G$  produciría una modificación del equilibrio hidrostático de la Tierra, ya que la presión variaría, produciéndose o una expansión de la Tierra o una contracción, según ocurra que  $G$  disminuya o aumente. En todo caso, una ligera variación de  $G$  con el tiempo podría ser detectada en el movimiento lunar. Para resolver este problema se han realizado numerosos estudios, tanto teóricos como de análisis de medidas astronómicas, pero los resultados no son conclusivos.

Si existiera una variación con el tiempo de  $G$ , se obtendrían resultados diferentes ya sea midiendo la variación del movimiento propio de la Luna utilizando el tiempo atómico  $\dot{n}_A$ , o el tiempo de las efemérides  $\dot{n}_E$ .<sup>47</sup> En efecto, si se utiliza el tiempo atómico se apreciaría la variación de  $G$ , algo que no ocurriría con el tiempo de las efemérides, ya que la variación de  $G$  estaría incluida en esa escala de tiempo.

Derivando la tercera ley de Kepler (18.2) nos queda<sup>48</sup>

$$2 \frac{\dot{n}}{n} + 3 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{G}}{G}$$

que al incluirla en (17.2) nos conduce a

46. Harrison E. R., *Cosmology*, Cambridge University Press, 1989, pp. 329-345 y Weinstein D. H., Keeney J., "Palaeontology and the dynamic history of the sun-earth-moon system", en *Growth Rhythms and the History of the Earth's Rotation*, editado por G. D. Rosenberg y S. K. Runcorn, John Wiley, 1975, pp. 377-383.

47. Se trata del tiempo uniforme implícito en la dinámica o tiempo newtoniano. Ver más adelante en este mismo capítulo.

48. Vinti J. P., "Classical solution of the two-body problem if the gravitational constant diminishes inversely with the age of the universe", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **169** (1974) 417-427, demuestra de forma rigurosa la relación entre  $\dot{n}$  y  $\dot{G}$ , para el caso en que la constante de gravitación varíe según la ley  $G = A(k + t)^{-1}$ , tal como exige la teoría de Dirac.

$$\dot{n} = \dot{n}_A = -\frac{3N}{\mu r^2} + \frac{2\dot{G}}{G}n \quad (22.2)$$

o bien

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\dot{n}}{n} \right)_{\text{atómico}} - \left( \frac{\dot{n}}{n} \right)_{\text{efemérides}} \right] = \frac{\dot{G}}{G}$$

Las primeras determinaciones de  $\dot{n}$  utilizando el tiempo atómico, dieron valores mucho mayores que los obtenidos a partir del tiempo de las efemérides, lo que parecía demostrar una disminución de  $G$  con el tiempo.<sup>49</sup> El análisis de los datos de las ocultaciones estelares por la Luna obtenidos durante un mayor intervalo de tiempo, corrigieron los primeros valores, encontrándose aceleraciones comprendidas entre  $-20$  y  $-23$  segundos de arco por siglo cuadrado. Lo que representa una mínima diferencia con los mejores valores de  $\dot{n}$  medidos con el tiempo de las efemérides, por lo que este camino no nos permite, de momento, ser conclusivos sobre la eventual variación de  $G$ .

Vamos a enfocar el problema desde otra perspectiva. Calculemos cuánto tiene que variar la constante  $G$  para que los efectos producidos sean capaces de explicar la diferencia entre la observación y la teoría de las mareas. Usamos la ecuación (22.2) para obtener la aceleración secular de la Luna, de forma similar a como se procedió para obtener (20.2)

$$v = \frac{1}{\mu r^2} [(\kappa - 3)N + \kappa N' + \kappa N_T] + \frac{\dot{G}n}{G}(2 - \alpha)$$

donde hemos supuesto que la variación del momento de inercia de la Tierra está relacionado con la variación de  $G$  mediante la expresión

$$\frac{\dot{I}}{I} = -\alpha \frac{\dot{G}}{G}$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente a determinar por la teoría del equilibrio hidrostático de la Tierra, que siguiendo a Lyttleton y a Fitch le daremos el valor 0.1724.<sup>50</sup> Para el Sol encontramos una ecuación similar

$$v' = \frac{1}{\mu r^2} [\kappa(N + N') + \kappa N_T] \frac{n'}{n} + \frac{\dot{G}n'}{G}(2 - \alpha),$$

tras un largo cálculo, podemos relacionar la variación de  $G$  con  $\dot{n}$  y  $n'$

$$\frac{\dot{G}}{G} = \frac{\frac{\kappa}{3} \frac{n'}{n} \frac{\dot{n}^2}{v'} (1+e) + \dot{n} - \frac{\kappa N_T}{\mu r^2} \frac{n'}{n} \frac{\dot{n}}{v'}}{n' \frac{\dot{n}}{v'} \left[ 2 - \alpha + \frac{2\kappa}{3} (1+e) \right] + 2n}$$

49. Van Flandern T. C., "A determination of the rate of change of  $G$ ", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **170** (1975) 333-342, dio un valor de  $\dot{n}_A = (-65'' + 18'')/\text{siglo}^2$ .

50. Lyttleton R. A., Fitch J. P., "Effect of changing  $G$  on the momento of inertia of the earth", *Astrophysical Journal* **221** (1978) 412-413.

Si se toma como valor más aceptable para la variación del alargamiento del día, 1.7 milisegundos por día y siglo, y  $-26$  segundos de arco por siglo cuadrado para la variación del movimiento medio lunar, se obtiene

$$e = 1/4.7 \left\{ \begin{array}{l} \dot{G}/G = -1.35 \cdot 10^{-11} \text{ año}^{-1} \\ \dot{I} = 2.26 \cdot 10^{28} \text{ kg m}^2 \text{ siglo}^{-1} \end{array} \right.$$

$$e = 1/3.8 \left\{ \begin{array}{l} \dot{G}/G = -1.67 \cdot 10^{-11} \text{ año}^{-1} \\ \dot{I} = 2.81 \cdot 10^{28} \text{ kg m}^2 \text{ siglo}^{-1} \end{array} \right.$$

valores que son del mismo orden de magnitud que los obtenidos por otros autores y por procedimientos diferentes.<sup>51,52</sup> Estos cálculos dejan abierta la posibilidad de una variación de  $G$  con el tiempo.

### Resumen

En el estado actual de la investigación podemos afirmar que la Tierra mantiene un frenado secular aproximadamente constante, al menos en periodos históricos. La principal causa de esa ralentización son las mareas lunares, solares y las de origen térmico atmosférico. Las mareas no logran explicar por completo la disminución de la velocidad angular de la Tierra. Los valores de la observación son más pequeños que los deducidos de la teoría de marea, de aquí se concluye que deben de existir otras causas que afectan a la deceleración de la Tierra.

Para explicar esta diferencia hemos computado dos posibilidades. Una de ellas es la disminución secular del momento de inercia de la Tierra por alguna causa de origen geofísico. La otra consiste en suponer una variación de la constante de gravitación universal, lo que explicaría los valores observados, ya que esa variación traería aparejada un aumento del momento de inercia de la Tierra. Esta última hipótesis podría ser complementaria con fenómenos geofísicos.

Actualmente se cree que existe una variación de los momentos de inercia a consecuencia de un "rebote" de la Tierra tras el último periodo glacial. Al disminuir la presión ejercida por los hielos, se produciría un nuevo equilibrio hidrostático, que se manifestaría por un aumento del radio polar y una disminución del ecuatorial. O sea, a una tendencia del geoide terrestre hacia la forma esférica.

Parece bien asentado que la variación del movimiento propio de la Luna es muy cercano a  $-26$  segundos de arco por siglo cuadrado. El análisis de antiguos eclipses solares parecen mostrar que la variación del alargamiento del día es muy cercano a 1.7 milisegundos por siglo. Detectándose un alargamiento uniforme, sobre el que está impuesta una variación periódica de unos mil quinientos años de periodo, que quizás tenga un origen diferente a la variación secular de la rotación terrestre. Para los cálculos en futuras secciones conservaremos los valores numéricos dados anteriormente, entendiendo que son los más fiables que hoy podemos tener.

51. Faulkner D. J., "Dirac's large numbers hypothesis and the acceleration of the moon's mean longitude", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **176** (1976) 621-624.

52. Lyttleton R. A., Fitch J. P., "On the accelerations of the moon and sun, the constant of gravitation, and the origin of mountains", *The Moon and the Planets* **18** (1978) 223-240.

### El tiempo de las efemérides

Queda demostrado que el tiempo universal derivado de la rotación de la Tierra no es un tiempo uniforme. Esto en sí no es un problema para la medida del tiempo. Ya hemos dicho que cualquier movimiento del que conozcamos sus efemérides, es adecuado para ser usado como un buen reloj, aunque no obedezca a una ley uniforme. Pero en el caso de la rotación de la Tierra no conocemos con precisión sus efemérides. No solamente es inseguro el valor de la aceleración secular de la Tierra, sino que las fluctuaciones y, en menor medida, la variaciones estacionales, no pueden ser predichas con antelación.

Este problema fue resuelto por los años cincuenta del siglo pasado, cuando se optó por definir una nueva escala estrictamente uniforme. Siguiendo una sugerencia de Clemence de 1948, la Unión Astronómica Internacional favoreció una escala de tiempo dinámico,<sup>53</sup> basada en la longitud media del Sol según venía dada por la teoría de Newcomb

$$L_m = 279^\circ 41' 48''.04 + 129\ 602\ 768''.13T + 1''.089T^2. \quad (23.2)$$

Esta teoría ajustó sus constantes a los datos obtenidos durante el siglo diecinueve e inicialmente se entendió que su argumento era el tiempo universal. Se estableció que la nueva escala de tiempo (llamada de las efemérides por Dick Brouwer) sería aquella que hiciera cumplir exactamente las efemérides de Newcomb. De esta forma la ecuación (23.2) se convirtió en una fórmula convencional.

En 1960 la Conferencia General de Pesas y Medidas definió la unidad de la nueva escala (el segundo de las efemérides) como la  $1/31\ 556\ 925.97474$  parte del año trópico en la época inicial de la escala.<sup>54</sup> Dos años antes, la IAU definió la época de las efemérides, como el momento “cerca del comienzo del año del calendario 1900, cuando la longitud geométrica media del Sol era  $279^\circ 41' 48''.04$ , en cuyo instante la medida del tiempo de la efemérides era 1900 enero 0<sup>d</sup> 12<sup>h</sup> de tiempo de las efemérides precisamente”. Obsérvese que los dos primeros coeficientes de la expresión (23.2) nos dan, el primero la época y el segundo la unidad de la escala del tiempo de las efemérides.

En principio, la medida del tiempo de las efemérides exige la determinación de la longitud del Sol, a partir de ella y usando (23.2) se obtiene el tiempo de las efemérides. No obstante, el movimiento del Sol es excesivamente lento, además las medidas precisas de su posición son difíciles de hacer. Por estas circunstancias se eligió la Luna como objeto intermediario para medir el tiempo de las efemérides, dado su rápido movimiento y las ventajas que ofrece a la observación.

De los resultados de las investigaciones de Spencer Jones ya señaladas, se obtiene la diferencia entre el tiempo de las efemérides y el tiempo universal (concretamente el UT1). Para ello hay que tener en cuenta que el Sol ficticio de Newcomb tarda en recorrer un segundo de arco

53. Clemence G. M., “On the system of astronomical constants”, *Astronomical Journal* **53** (1948) 169-179, Clemence G. M., “Time and its measurement II”, *Astronomical Society of the Pacific Leaflets* **6** (1952) 267-274 y Clemence G. M. “Ephemeris time”, *The Rotation of the Earth and Atomic Time Standards. IAU Symposium no.11, Moscú, 1958, 1959*, 33-35.

54. En el capítulo 4 definiremos con precisión el concepto de año trópico. En el año 1952 la IAU recomendó el uso del tiempo de las efemérides cuando se tuviese dificultades con la variabilidad del tiempo solar medio, *Transactions of the International Astronomical Union*, vol. 8, 1956, p. 66.



$$\frac{31\,556\,925^{\circ}.9747}{1\,296\,000} = 24^{\circ}.349\,480 \approx 24^{\circ}.349$$

segundos de tiempo.<sup>55</sup> El tiempo que tardaría el Sol en describir la diferencia de longitudes dada por (6.2) es

$$\Delta T = ET - UT1 = 24^{\circ}.349 + 72^{\circ}.318T + 29^{\circ}.950T^2 + 1.82144B \quad (24.2)$$

que lo entendemos como la diferencia entre el tiempo de las efemérides y el tiempo universal.<sup>56</sup> La medida del tiempo de las efemérides se realiza corrigiendo el tiempo universal por la anterior fórmula. Ésta no es completamente conocida, a consecuencia de la variabilidad de la fluctuación. Aquí es donde interviene las observaciones lunares. Por mediación de la Luna se obtiene el valor de  $B$ , con lo que ya conoceremos  $\Delta T$ , es decir la corrección al tiempo universal para hallar el tiempo de las efemérides.

Las medidas para la determinación del tiempo de las efemérides se realizaron usando la teoría lunar de Brown, la cual debe ser corregida por (5.2), que contempla la aceleración secular de la Luna

$$L_{obs} = L_{Brown} + 4'' .65 + 12'' .96 T + 5'' .22 T^2 + B - \text{término empírico}$$

el último sumando elimina un término empírico que fue añadido erróneamente a la teoría por Brown. La anterior expresión nos permite averiguar la fluctuación, que es el dato necesario para determinar  $\Delta T$  por mediación de la ecuación (24.2). Nótese que el argumento  $T$  de la anterior expresión viene dado en tiempo universal. Si le restáramos el ángulo que describe la Luna en un intervalo de tiempo  $\Delta T$  quedaría expresado en tiempo de las efemérides

$$L_{obs} = L_{Brown} - 8'' .72 - 26'' .75 T - 11'' .22 T^2 - \text{término empírico}$$

fórmula que nos da directamente el tiempo de las efemérides tras conocer mediante la observación la longitud de la Luna, donde ahora  $T$  es el tiempo de las efemérides.

No deja de ser curiosa la definición del segundo de las efemérides, que se basa en el año trópico del año 1900; es decir, un intervalo de tiempo no accesible directamente a la observación y que ocurrió en un año muy anterior a la introducción del concepto de segundo de las efemérides. Pero esto no es más que un engaño aparente. En realidad, tanto la definición del segundo como de la época, no es más que una forma de dar los dos primeros coeficientes de la expresión (23.2).

Desde un principio se advirtieron los inconvenientes que conllevaba la nueva escala de tiempo. Entre ellos destacar el carácter no relativista de la definición; la dificultad de su medida, que exigía varios años de laboriosas observaciones, o que una modificación de las constantes astronómicas causaría una modificación de la escala de tiempo de las efemérides. A este respecto señalar que la realización del tiempo de las efemérides lleva implícita un valor de 11.22 segundos de arco para la variación del movimiento medio de la Luna, cantidad sometida a observación y por tanto susceptible de modifica-

55. En realidad el año trópico varía con el tiempo, así que su duración no será siempre la cantidad que hemos usado, que coincide con el año trópico de 1900. Pero la variación es tan lenta, que a la aproximación necesitada, puede considerarse constante durante varios miles de años.

56. Los coeficientes de la expresión (24.2) fueron los establecidos por la IAU y son ligeramente diferentes de los que se derivan de la investigación de Spencer Jones.

ción.<sup>57</sup> Habría que añadir que el parámetro del tiempo al cuadrado de la longitud media del Sol en la teoría de Newcomb también es un coeficiente sujeto a cambio, tal como el que tendría lugar si se hace una modificación de la precesión del equinoccio.

Los inconvenientes señalados y la puesta en marcha de los relojes atómicos, fueron los responsables de la corta vida del tiempo de las efemérides, ya que en el año 1967 el segundo atómico quedó convertido en la nueva unidad de tiempo.

---

57. A partir del año 1960 se enmendó la teoría de Brown en varias ocasiones, las diferentes versiones de la teoría lunar fueron denominadas  $j = 0$ ,  $j = 1$  y  $j = 2$ . El tiempo de las efemérides calculado por estas teorías pasaron a denominarse con el correspondiente número, ET0, ET1 y ET2.

## El tiempo atómico

### Relojes atómicos

En el año 1879, lord Kelvin advirtió de que las propiedades atómicas podrían utilizarse para medir el tiempo. Kelvin notó que las frecuencias de emisión características de los átomos no son afectadas por los factores que tanto perturban a los relojes mecánicos. Pero hubo que esperar hasta el año 1945 para que Isidor Rabi expusiera una sugerencia más concreta para usar los átomos de cesio para medir el tiempo.<sup>1</sup> Diez años después, Louis Essen y John Parry construyeron el primer reloj de haz de cesio en el Laboratorio Nacional de Física NPL del Reino Unido.<sup>2</sup> La era del tiempo atómico había comenzado.

El reloj de cesio ha adquirido un reconocido prestigio dada su alta estabilidad,<sup>3</sup> y en sus distintas versiones es el más usado en las secciones de hora de los distintos laboratorios, razón por lo que vamos a centrarnos principalmente en su descripción.

El fundamento del reloj atómico de cesio se basa en las propiedades atómicas de ese elemento, que a continuación vamos a exponer brevemente. Al momento angular electrónico del átomo de cesio sólo contribuye un único electrón, el de la última capa o

---

1. El cesio posee notables propiedades que le hacen adecuado para su uso en un reloj atómico. Tiene un isótopo estable, el de número másico 133; es bastante pesado, por lo que es reducida su velocidad térmica; hierve a sólo 28 grados centígrados; puede ser fácilmente ionizado; la frecuencia de emisión entre sus niveles hiperfinos es muy alta; la energía para llevar el electrón a su primer nivel excitado es significativamente alta y los niveles de energía entre los que debe darse la transición tiene una dependencia pequeña del campo magnético. Todas estas cualidades son aprovechadas en los relojes atómicos.

2. En 1949 la Oficina Nacional de Normalización de los Estados Unidos puso a punto un reloj de amoníaco que usaba las vibraciones moleculares. Pero no llegó a superar en exactitud a los relojes de cuarzo que ya se usaban por entonces.

3. Hay que distinguir entre exactitud y estabilidad. La exactitud de frecuencia de un reloj es una medida de lo bien que puede reproducir el segundo atómico. Se calcula dividiendo el error de la medida del reloj por el tiempo transcurrido. Esta magnitud es llamada desviación de la frecuencia normalizada y se puede poner como

$$y(t) = \frac{\nu(t)}{\nu_0} - 1$$

$\nu$  es la frecuencia del reloj y  $\nu_0$  es su frecuencia nominal. La estabilidad de frecuencia de un reloj nos indica el cambio en frecuencia en un periodo determinado. Se mide a partir de la variancia Allan (ver más adelante). También se puede hablar de exactitud en el tiempo, entendido como lo bien que un reloj está de acuerdo con otro reloj (o escala) tomado como referencia.

electrón de valencia, ya que las capas internas al estar completas tienen un momento angular nulo. En su estado fundamental, el átomo de cesio tiene un momento angular orbital que viene dado por el número cuántico  $L = 0$ , siendo  $L = 1$  para su primer estado excitado. Al tener en cuenta el momento angular de spin del electrón de valencia, resulta que el momento angular total de los electrones del átomo de cesio tiene el número cuántico  $J = 1/2$ . Esta situación viene descrita en notación espectroscópica como  $^2S_{1/2}$ , que viene a significar que el momento angular orbital es  $L = 0$  (de ahí la letra S), el  $1/2$  es el momento angular electrónico total y 2 es la degeneración asociada a ese nivel (correspondiente a las dos posibles orientaciones del spin electrónico). Al primer nivel excitado, aquel que tiene  $L = 1$ , le corresponden dos posibles opciones, representadas por  $^2P_{1/2}$  y  $^2P_{3/2}$ , que forman la estructura fina.

El núcleo atómico tiene un momento angular, llamado spin nuclear por razones históricas. Para el nucleido cesio-133, el spin nuclear es un número semientero, como corresponde a un núcleo par-impar y viene representado por el número cuántico  $I = 7/2$ . Tenemos ahora un electrón con momento angular  $1/2$  y el núcleo con momento angular  $7/2$ , la combinación de ambos momentos nos da dos posibilidades, en una de ellas el momento angular total viene dado por el número cuántico  $F = 4$  y en el otro por  $F = 3$ , que representan los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio.

En presencia de campo magnético, los niveles hiperfinos se subdividen en subniveles, en una cantidad dada por  $2F + 1$ . Es decir, el nivel  $F = 4$  se divide en 9 subniveles y el  $F = 3$  en 7. Cada uno de ellos tendrá una energía potencial diferente en presencia del campo magnético, es el denominado efecto Zeeman. Estos subniveles vienen caracterizados por el número cuántico  $m_F$ , que toma valores enteros comprendidos entre  $F$  y  $-F$ , pasando por el cero. Los dos subniveles elegidos para el funcionamiento del reloj atómico de cesio son los caracterizados por  $F = 4, m_F = 0$  y  $F = 3, m_F = 0$ .

En un reloj atómico los átomos deben tener la mínima perturbación posible, de aquí que se encuentren en un estado muy rarificado, para ello hay que someter el recipiente a una muy baja presión. La primera operación que tiene que hacer el reloj consiste en vaporizar los átomos de cesio, para lo cual basta calentar una pequeña cantidad de cesio (apenas unos gramos) a una temperatura de unos cien grados centígrados. La estructura del horno donde se realiza esta operación, permite seleccionar átomos con velocidades próximas entre sí, gracias a un enrejado que encauza el haz de átomos de cesio, que salen del horno con una velocidad de naturaleza térmica de unos 200 m/s.<sup>4</sup>

Inicialmente, la inmensa mayoría de los átomos de cesio se encontrarán en el estado fundamental, pero dado que las energías de los dos niveles hiperfinos son muy parecidas entre sí, las poblaciones de átomos en esos dos niveles serán muy similares. Es por ello que la siguiente operación que tiene que hacer un reloj atómico, es seleccionar uno de esos dos estados. Esta operación se realiza por el método de deflexión magnética o por bombeo óptico.

Cuando los átomos entran en un campo magnético, los distintos subniveles hiperfinos

---

4. El funcionamiento de los relojes atómicos viene descrito en: Jones T., *Splitting the second*, Institute of Physics Publishing, 2000; Audion C., Guinot B. *The measurement of time. Time, frequency and the atomic clock*, Cambridge University Press, 2001 y Major F. G., *The quantum beat. The physical principles of atomic clocks*, Springer-Verlag, 1998.

adquieren energías diferentes. Hay subniveles que aumentan su energía con el incremento del campo magnético y otros que hacen lo contrario, según viene establecido por la fórmula de Breit-Rabi. En concreto, el subnivel  $F' = 4, m_F = 0$  aumenta su energía y el  $F' = 3, m_F = 0$  la disminuye a medida que aumenta el campo magnético. Si el campo magnético no es homogéneo, se producirán fuerzas sobre los átomos: aquellos átomos que aumentan su energía con el campo magnético irán hacia la zona donde decrece el campo y viceversa. En particular, los átomos que se encuentren en el subnivel  $F' = 4, m_F = 0$  irán hacia la zona de disminución del campo magnético y los átomos que se hallen en  $F' = 3, m_F = 0$  en sentido contrario. Este es el fundamento de la selección de estados cuánticos por un campo magnético fuertemente inhomogéneo. Este campo magnético divide el haz original de cesio en otros dos, correspondientes a cada uno de los dos niveles hiperfinos. Uno de ellos se despreja y el otro (normalmente el  $F' = 3$ ) se dirige hacia la cavidad donde será expuesto a la radiación de microondas. El ángulo de deflexión que sufre el haz es del orden de un grado para los relojes comerciales.<sup>5</sup>

A la zona de exposición de las microondas llegarán siete subniveles hiperfinos, los correspondientes a los siete valores que puede tomar el número cuántico  $m_F$ . En ausencia de un campo magnético, la frecuencia de emisión entre estos subniveles será la misma. Pero aún un mínimo campo de 50 pT es suficiente para producir una diferencia de 1 Hz en la correspondiente frecuencia de emisión. Para evitar esas mínimas perturbaciones, lo que se hace es crear un campo uniforme (denominado campo-C) de unos 6 mT, que logra separar los distintos subniveles por efecto Zeeman. Entonces se tendrán siete subniveles hiperfinos con energías diferentes.

Los átomos de cesio pasan a una zona denominada cavidad de Ramsey o de resonancia. Es una pieza en forma de U que emite por sus dos extremos radiación de microondas de la exacta frecuencia para pasar del subnivel  $F' = 3, m_F = 0$  al  $F' = 4, m_F = 0$  mientras que los átomos están sometidos al campo-C. La radiación de microondas es perpendicular a la dirección de propagación de los átomos de cesio (al igual que ocurre con el campo-C), consiguiendo así disminuir la distorsión producida por el efecto Doppler. Al pasar por la cavidad de resonancia, parte de los átomos que inicialmente estaban en el nivel  $F' = 3$  pasarán al  $F' = 4$ . Cuánto más átomos hagan esa transición, más cerca estará la frecuencia de las microondas de la correspondiente a la transición atómica.

El flujo de átomos de cesio tras salir de la cavidad de resonancia, pasa a un nuevo campo inhomogéneo, que cumple una función similar al primero; es decir, separar los átomos de cesio en dos haces. Uno, los formados por los átomos que no han hecho la

---

5. El otro sistema de selección de estado cuántico es el de bombeo óptico y todo apunta a que esta técnica se generalizará en un próximo futuro. Luz coherente láser incide sobre los átomos de cesio, que se encuentran en alguno de los dos niveles fundamentales hiperfinos. La frecuencia del láser es tal que logra la transición desde el nivel  $F = 3$  al  $^2P_{3/2}$ . Por emisión espontánea los electrones que han sido colocados en  $^2P_{3/2}$  emiten un fotón y caen en uno de los dos niveles hiperfinos del estado fundamental. Existe la misma probabilidad de ir al  $F = 4$  que al  $F = 3$ . Con esta operación se reduce la población de electrones en  $F = 3$  y aumenta la de  $F = 4$ . Después de repetir esta emisión láser algunas veces, quedará despoblado el nivel  $F = 3$  y todos los electrones quedarán en  $F = 4$ , con lo que se habrá logrado la deseada selección de un estado cuántico.

transición y que por lo tanto se encuentran en  $F = 3$  y otro, aquellos que han efectuado la transición cuántica, por lo que se encuentran en  $F = 4$ . El siguiente paso consiste en medir la eficacia de la radiación de microondas. Los átomos que han hecho la transición son enviados a un hilo metálico con una temperatura de unos mil grados, tras lo cual quedan ionizados. Este flujo de iones  $\text{Cs}^+$  es filtrado a través de un espectrómetro de masas, con lo que se eliminan otros iones no deseados. Finalmente los iones de cesio alcanzan un dínodo donde causan la emisión de electrones, que tras pasar por un multiplicador producen la corriente eléctrica de salida.

La corriente de salida es la que controla la frecuencia de las microondas. Cuánto mayor sea esa corriente más eficiente es la radiación de microondas y más cercana estará de la resonancia con la transición cuántica de los átomos de cesio. La frecuencia de las microondas es controlada por un reloj de cuarzo y es la frecuencia de este reloj la que debe ser corregida para que se alcance la resonancia cuántica.<sup>6</sup> En definitiva, el reloj atómico actúa como un regulador muy preciso de un reloj de cuarzo.

Existen dos tipos de relojes atómicos, los denominados primarios y los secundarios. Los primeros son dispositivos de diseños especiales que tienen por único objeto medir lo más precisamente posible la duración del segundo. Los otros son relojes comerciales que dan el tiempo y que sirven para establecer las escalas de tiempo nacionales y la escala internacional, como más adelante veremos.

Los avances en el diseño de nuevas técnicas en la medida atómica del tiempo son incesantes. A la fecha de redactar este informe, podemos afirmar que una nueva revolución se avecina, con la puesta en funcionamiento de nuevos relojes de cesio, tales como las fuentes que hacen uso del bombeo óptico. Un ejemplo de este tipo es el construido en el Observatorio Astronómico de París, que logra una exactitud mejor que un segundo en diez millones de años.

### El segundo atómico

Poco duró el segundo de las efemérides como unidad de tiempo del sistema internacional de unidades. En el año 1967, comprobada ya las excelencias de los relojes atómicos, la Conferencia General de Pesas y Medidas definió el segundo internacional en función de la transición cuántica entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133. Antes de hacer la definición, hubo que realizar el delicado trabajo de obtener la relación entre el segundo dado por el tiempo de las efemérides y la frecuencia de las oscilaciones del reloj atómico. Dos equipos hicieron el trabajo. Uno de ellos, instalado en el Observatorio Naval de los Estados Unidos y bajo las órdenes de Markowitz, midió con la máxima precisión el tiempo de las efemérides en función del tiempo universal. El otro equipo, en el NPL de Gran Bretaña, comparó el tiempo atómico dado por su reloj con el tiempo universal. De esa forma pudo encontrarse que la dura-

---

6. La frecuencia medida se compone de dos términos: el de la transición entre los niveles  $F = 4$  y  $F = 3$  en ausencia de campo magnético y el del desplazamiento de frecuencia causado por la existencia del campo-C. Este campo magnético es medido por el propio reloj una o varias veces cada minuto, utilizando para ello una transición cuántica distinta de la que controla el reloj. Naturalmente, el reloj tiene que estar lo mejor apantallado posible, para aislarlo de los campos magnéticos, en particular del producido por la Tierra, que es una diez veces mayor que el campo-C.

ción del segundo de las efemérides correspondía a 9 192 631 770 ciclos de la frecuencia del cesio, con una inseguridad de 20 ciclos. En este sentido, la primera resolución de la decimotercera Conferencia General de Pesas y Medidas estableció que “el segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133”. Años más tarde, en 1997, el mismo organismo afinó un poco más, al declarar que “la definición se refiere al átomo de cesio en reposo a la temperatura de 0 K”.

### Sistemas no rotante y rotante

Para poder definir las distintas escalas de tiempo tenemos que considerar tres sistemas de referencia. Uno de ellos es el sistema de referencia celeste internacional ICRS con centro en el baricentro de masas del sistema solar. Otro es un sistema geocéntrico, con origen en el centro de masas de la Tierra y con ejes paralelos al ICRS. Por último, está el sistema de referencia rotante, que está anclado en la Tierra, girando con ella y que coincide con el sistema de referencia terrestre internacional ITRS, realizado a partir de una lista de coordenadas y velocidades de aproximadamente 200 lugares dispersos alrededor de la Tierra.<sup>7</sup>

Como el campo gravitatorio es débil y con fuerte simetría central, podemos suponer con muy buena aproximación que el elemento de línea del continuo espacio-temporal respecto a los dos sistemas de referencia no rotantes viene dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.3)$$

donde  $U$  es el potencial gravitatorio newtoniano tomado con signo positivo y suponiendo que se anula en el infinito.<sup>8</sup> Hay que tener presente que las coordenadas espacio-temporales no representan ni distancias, ni intervalos de tiempo medidos por un reloj. La variable  $t$  que aparece en el elemento de línea es la coordenada temporal, que se encuentra relacionada con el tiempo medido por un reloj mediante una expresión dependiente del tensor métrico espacio-temporal. La coordenada temporal  $t$  no es más que una etiqueta que caracteriza, junto a las coordenadas espaciales, un suceso en el espacio-tiempo y no es un tiempo en el sentido de que no es medido por ningún reloj.<sup>9</sup>

Como tenemos que considerar dos sistemas de referencia no-rotantes, uno de ellos fijo en el baricentro del sistema solar y el otro con origen en el centro de masas de la Tierra, tenemos que considerar dos coordenadas temporales. La asociada al primer

7. Brumberg V. A., Kopejkin S. M., “Relativistic time scales in the solar system”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **48** (1990) 23-44.

8. El anterior elemento de línea es una aproximación de la forma isotrópica de la métrica de Schwarzschild cuando se toman sólo los primeros coeficientes, Weinberg S., *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, 1972, p.181. Para la aproximación que necesitamos en este capítulo se podría considerar el coeficiente del elemento de línea espacial igual a la unidad.

9. Ha existido bastante confusión sobre las escalas de tiempo, lo que ha obligado a la IAU a legislar en varias ocasiones al respecto, véase Guinot B., Seidelmann P.K., “Time scales: their history, definition and interpretation”, *Astronomy and Astrophysics* **194** (1988) 304-308 y Guinot B., “Is the international atomic time TAI a coordinate time or a proper time?”, *Celestial Mechanics* **38** (1986) 155-161.

sistema se le llama tiempo coordinado baricéntrico TCB y la coordenada del segundo sistema es el tiempo coordinado geocéntrico TCG. Tengamos presente que al someter las coordenadas espacio-temporales anteriores a cambios de coordenadas, se derivarían otras escalas temporales. O sea, las escalas de tiempo coordinado no son únicas. Las escalas TCB y TCG son las que se desprenden de la métrica (1.3).

Antes de seguir adelante, sería conveniente distinguir entre los diversos tipos de tiempo que vamos a usar. Ya hemos señalado el significado del tiempo coordinado. Además, haremos uso del tiempo propio y del tiempo local. El tiempo propio se define como el medido por un reloj que se encuentra en “caída libre”, es decir, que está sometido exclusivamente a la gravedad y por cuyo efecto se mueve. El tiempo local es el tiempo marcado por un reloj que tiene un movimiento cualquiera, no necesariamente de caída libre. En general, el tiempo local y el tiempo propio son diferentes. Pero en el caso particular en que el reloj sea copuntual con el fenómeno cuya duración se quiere medir, entonces el tiempo local coincidirá con la duración de tiempo propio de ese fenómeno. Por ejemplo, un reloj en reposo sobre la superficie de la Tierra mide un tiempo local, como lo hace cualquier reloj. Pero si el fenómeno cuya duración mide se produce en la misma posición en que se encuentra el reloj, medirá el tiempo propio que dura ese fenómeno.<sup>10</sup>

Consideremos un reloj que se encuentre en movimiento respecto al sistema no rotante ligado a la Tierra. El tiempo marcado por el reloj es el tiempo propio de los fenómenos que se producen en su entorno. Este tiempo propio se encuentra relacionado con el tiempo coordinado geocéntrico. Si  $\tau$  y  $t$  representan el tiempo propio y el TCG, entonces se puede poner en primera aproximación

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{c^2} \left[ U(t) + \frac{1}{2} v(t)^2 \right]$$

donde  $v$  es la velocidad “coordinada” del reloj respecto al sistema de coordenadas no-rotante.  $U$  es el potencial gravitatorio de la Tierra más el potencial de marea causado por la Luna, el Sol y los restantes astros del sistema solar.<sup>11</sup> Integrando se obtiene

$$\tau(t) - \tau(t_0) = t - t_0 - \int_{t_0}^t h(t) dt. \quad (2.3)$$

10. Winkler G. M. R., Van Flander T. C., “Ephemeris time, relativity, and problem of uniform time in astronomy”, *Astronomical Journal* **82** (1977) 84-92.

11. El centro de la Tierra está en caída libre en el campo gravitatorio del sistema solar, por tanto es el origen de un sistema de referencia inercial. Esto ocurre porque la suma de todos los potenciales gravitatorios que actúan sobre el centro terrestre se equilibran con el potencial centrífugo, tal como lo exige el principio de equivalencia. En un punto de la superficie terrestre no ocurrirá lo mismo, el potencial gravitatorio de todos los astros del sistema solar en ese punto no se equilibrará con el potencial centrífugo causado por el movimiento de la Tierra en torno al Sol; la diferencia entre la suma de todos los potenciales gravitatorios de los cuerpos exteriores y el potencial centrífugo del movimiento de la Tierra en torno al Sol, es el denominado potencial de marea, llamado así porque es el responsable de las mareas terrestres.



Vamos ahora a calcular el elemento de línea en el sistema de referencia rotante. Para ello hacemos una rotación de las coordenadas espaciales que definen el plano en que se encuentra el ecuador terrestre (en nuestro caso los ejes  $x$  e  $y$ ). Tras despreciar términos de orden  $c^{-4}$  resulta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U_T}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{2}{c} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} c dt - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.3)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra,  $U_T$  es el potencial gravitatorio más el potencial centrífugo terrestre, o sea

$$U_T = U + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \phi}{2}$$

siendo  $r$  la “distancia coordenada” del punto de coordenadas  $x, y, z$ ; mientras  $\phi$  es la colatitud de ese punto.<sup>12</sup>

El segundo sumando del segundo miembro de (3.3) se puede poner como

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \omega r \sin \phi dr \cos \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre el vector  $d\mathbf{r}$  y el plano  $x$ - $y$ , ya que en ese plano se apoya siempre el producto vectorial de la velocidad angular y el vector de posición. El área sobre el plano ecuatorial  $x$ - $y$  barrido por el vector  $d\mathbf{r}$  es igual a

$$\frac{1}{2} r \sin \phi \cos \alpha dr$$

este área es la de un triángulo en el plano del ecuador que tiene un vértice en el centro de masas de la Tierra y los otros dos vértices son las proyecciones de los dos puntos ocupados por el cuerpo que se está moviendo respecto al sistema rotante. Representando ese área infinitesimal por  $dA_E$  tenemos

$$\frac{2}{c} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\omega}{c} dA_E$$

que es el denominado término de Sagnac. El elemento de línea asociado con el sistema de referencia rotando con la Tierra queda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U_T}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{4\omega}{c^2} \frac{dA_E}{dt} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.3)$$

Con el mismo grado de aproximación se encuentra

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - h(t); \quad h(t) = \frac{1}{c^2} \left( U_T + 2\omega \frac{dA_E}{dt} + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (5.3)$$

nótese que en esta métrica,  $t$  sigue representando al TCG, ya que sólo hemos hecho una transformación de las coordenadas espaciales pero no del tiempo.  $\tau$  es el tiempo propio, o bien el tiempo medido por un reloj que se encuentra permanentemente en el mismo lugar donde se produce el fenómeno que se está midiendo.

---

12. Ashby N., *An earth-based coordinate clock network*, National Bureau of Standards, 1975.

### El tiempo terrestre

Identificamos el tiempo terrestre TT como el tiempo local de un reloj en reposo en la **superficie del geode terrestre**.<sup>13</sup> Por lo dicho anteriormente, el TT no tiene que ser un tiempo propio, más bien hay que interpretarlo como un nuevo tiempo coordenado, que coincide con las indicaciones de los relojes que se encuentran sobre el geode. Haciendo uso de la métrica (4.3) se obtiene hasta el orden  $c^{-4}$

$$dt_T = \left( 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \phi}{2} \right) dt_{CG} = \left( 1 - \frac{U_g}{c^2} \right) dt_{CG} = (1 - L_G) dt_{CG}$$

donde hemos representado el tiempo terrestre por  $t_T$  y el tiempo coordenado geocéntrico por  $t_{CG}$ . De la anterior expresión se deriva

$$t_{CG} - t_T = L_G t_{CG} \quad (6.3)$$

$U_g$  representa el potencial gravitatorio (incluido el de marea) más el centrífugo originado por la rotación de la Tierra en torno a su eje. Los dos principales términos incluidos en  $U_g$  son el potencial gravitatorio de la Tierra (de un orden de  $7 \cdot 10^{-10}$ ) y el potencial centrífugo ( $1 \cdot 10^{-12}$ ), mientras que los potenciales de marea debido a las masas externas es del orden  $10^{-17}$ , que es del mismo valor que otros términos (mareas sólidas de la Tierra y mareas oceánicas).<sup>14</sup> Nótese que los términos de mareas son variables, dependiendo de la posición de las masas externas, principalmente el Sol y la Luna.<sup>15</sup>

Para resolver esta variabilidad y la inseguridad en el conocimiento del potencial terrestre, la IAU adoptó un valor constante para  $L_G$ , al que se le dio la mejor estimación de  $U_g/c^2$  en el año 2000 (conocido con una incertidumbre de  $10^{-17}$ ), que no será cambiado en un futuro, aunque se obtengan mejores valores. De tal forma que  $L_G$  se convierte en una definición con un valor

$$L_G = 6.969\ 290\ 134 \cdot 10^{-10}$$

Este concepto del TT establece implícitamente una nueva definición del geode,<sup>16</sup> que ahora se entiende como la superficie donde la suma de los potenciales de la Tierra, el centrífugo y el de marea es constante. Como el potencial de marea en un mismo punto de la Tierra varía con el tiempo, significa que la superficie del geode así definido también varía con el tiempo. Un reloj sobre la superficie terrestre no marca TT, sino su

13. La escala TT tiene su origen en el intento de darle continuidad al tiempo de las efemérides, pero usando para su determinación la escala de tiempo atómico. En un principio fue definido con el nombre de tiempo dinámico terrestre TDT, dejando claro su carácter "dinámico", es decir que se obtenía del movimiento de los cuerpos celestes. En este sentido la IAU definió el TDT en 1976 como una escala de tiempo para las efemérides geocéntricas aparentes, Huang T.Y, Zhu, J., Xu, B.X., Zhang H., "The concepts of International Atomic Time (TAI) and Terrestrial Dynamic Time (TDT)", *Astronomy and Astrophysics* **220** (1989) 329-334. En el año 2000, la IAU redefinió el TT como una escala de tiempo que difiere del TCG por una variación constante.

14. Los cuerpos externos a la Tierra le afectan de una doble manera. Tienen una influencia directa y una indirecta, ya que el potencial de marea produce una deformación de la Tierra alterando su propio campo gravitatorio.

15. Wolf P., Petit G., "Relativistic theory for clock syntonization and the realization of geocentric coordinate times", *Astronomy and Astrophysics* **304** (1995) 653-661.

16. Klioner S. A., "The problem of clock synchronization: a relativistic approach", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **53** (1992) 81-109.

tiempo local, a partir del cual se puede obtener el TT mediante la adecuada transformación relativista.

Démonos cuenta que el tiempo terrestre se puede interpretar como un tiempo coordenado, tanto en el sistema de referencia rotante como en el no rotante. En efecto, ante la transformación

$$dt_T^2 = \left(1 - \frac{2U_g}{c^2}\right) dt_{CG}^2 \Rightarrow dt_{CG}^2 = \left(1 + \frac{2U_g}{c^2}\right) dt_T^2 + O(c^{-4})$$

la métrica (1.3) se transforma en el caso de cuerpo sobre la superficie del geoide en

$$ds^2 \approx dt_T^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

que es otro elemento de línea para el sistema de referencia no rotante.

### Relación entre los tiempos coordenados baricéntrico y geocéntrico

Estamos utilizando dos tiempos coordenados: el baricéntrico, que está asociado al sistema de referencia con origen en el baricentro del sistema solar y el geocéntrico, que es la escala temporal del sistema con origen en el centro de masas de la Tierra. Vamos a obtener la relación que existe entre ambas escalas.

Con muy buena aproximación podemos considerar que el centro de masas de la Tierra está en caída libre; por tanto, un reloj colocado en el geocentro medirá tiempo propio.<sup>17</sup> La relación entre este tiempo propio y el tiempo coordenado baricéntrico  $t_{CB}$  se puede obtener de la métrica (1.3). Ahora bien, el tiempo propio medido por un reloj en el geocentro coincide prácticamente con el tiempo coordenado geocéntrico  $t_{CG}$ , así que tendremos la relación

$$dt_{CG} = \sqrt{1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} dt_{CB} + O(c^{-4}) \quad (7.3)$$

donde  $U$  es el potencial en el centro de masas de la Tierra y  $v$  su velocidad coordenada.

Podemos resolver la anterior expresión suponiendo que la Tierra describe un movimiento elíptico que obedece a las leyes de Kepler. Como finalmente veremos, esta aproximación nos da valores muy cercanos a los que se obtienen al hacer una integración sobre todos los astros del sistema solar.

De la conservación de la energía mecánica de la Tierra orbitando en torno al Sol se deriva

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{Gm}{c^2 a}$$

donde  $m$  es la masa del Sol, único astro cuyo potencial vamos a considerar,  $r$  es la

---

17. Esto no es completamente cierto, ya que en el centro de masas de la Tierra el potencial gravitatorio terrestre no es nulo, debido a la deformación que sufre el planeta por los potenciales de marea. Por otra parte, la trayectoria del geocentro se aparta de una geodésica a consecuencia de la interacción de los potenciales de marea sobre los momentos multipolares de la Tierra. No obstante, estas desviaciones son muy pequeñas y pueden ser despreciadas en la aproximación que estamos haciendo.

distancia a la Tierra y  $a$  es el semieje mayor de la órbita terrestre. Entonces, en la aproximación considerada, la ecuación (7.3) queda

$$\frac{dt_{CB}}{dt_{CG}} = 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{Gm}{2c^2 a}$$

la órbita terrestre describe una elipse de ecuación

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

donde  $e$  es la excentricidad y  $\theta$  es la anomalía verdadera. Combinando las dos últimas ecuaciones se encuentra

$$\frac{dt_{CB}}{dt_{CG}} = 1 + \frac{2Gm}{c^2 a} \frac{3/4 + e^2/4}{1-e^2} + \frac{2Gm}{c^2 a} \frac{e\cos\theta}{1-e^2} = 1 + L'_C + \frac{2Gme}{c^2 a(1-e^2)} \cos\theta$$

los dos primeros sumandos corresponden a una cantidad constante y el último representa una variación periódica. Para integrar el último sumando es conveniente hacer un cambio de variable para introducir la anomalía excéntrica  $\psi$  y posteriormente utilizar la ecuación de Kepler,<sup>18</sup> tras lo cual resulta

$$t_{CB} - t_{CG} = L_C t_{CG} + \frac{2Gme}{c^2 a n} \sin\psi$$

donde  $n$  representa el movimiento medio de la Tierra y

$$L_C = \frac{3Gm}{2c^2 a} = 1.481 \cdot 10^{-8}$$

por último hay que expresar el término periódico en función de la anomalía media de la Tierra.<sup>19</sup> Para ello volvemos a hacer uso de la ecuación de Kepler, que al ser integrada nos da un desarrollo en serie cuyos primeros términos son

$$\psi = M + e \sin M + \dots \Rightarrow \sin\psi = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \dots$$

siendo  $M$  la anomalía media de la Tierra. Finalmente encontramos

$$t_{CB} - t_{CG} = L_C t_{CG} + \frac{2Gme}{c^2 a n} \sin M + \frac{Gme^2}{c^2 a n} \sin 2M + \dots \quad (8.3)$$

la anomalía media se calcula a partir de

$$M = 357^\circ.529 + 35\,999^\circ.050 T,$$

donde  $T$  se cuenta en siglos julianos transcurridos desde J2000.0.

La IAU sigue aceptando el tiempo dinámico baricéntrico, una escala de tiempo coordinado ligada al sistema de referencia con origen en el baricentro del sistema solar y que sólo se diferencia del tiempo terrestre en términos periódicos. Sumando las

18. Goldstein H., *Mecánica clásica*, Reverté, 1988, pp. 122-128.

19. Una integración numérica teniendo en cuenta todos los astros del sistema solar, da un valor  $L_C = 1.480\,826\,8457 \cdot 10^{-8} \pm 1.0 \cdot 10^{-17}$ , Fukushima T., "Time ephemeris", *Astronomy and Astrophysics* **294** (1995) 895-906.

ecuaciones (6.3) y (8.3) se encuentra la relación entre el tiempo coordinado baricéntrico y el tiempo terrestre<sup>20</sup>

$$t_{CB} - t_T = (L_C + L_B) t_{CG} + P(t) = 1.550\,519\,748 \cdot 10^8 t + P(t)$$

siendo  $P(t)$  los términos periódicos y  $t$  representa cualquiera de las escalas temporales que estamos considerando. De lo anterior se deduce que la diferencia entre el tiempo dinámico baricéntrico y el tiempo terrestre son los términos periódicos,<sup>21</sup> o sea

$$t_{DB} - t_T = \frac{2Gme}{c^2 an} \sin M + \frac{Gme^2}{c^2 an} \sin 2M + \dots = 0^s.001658 \sin M + 0^s.000014 \sin 2M.$$

Todo lo visto anteriormente se refiere al aspecto conceptual de las cuatro escalas de tiempo, ahora es necesario proceder a su realización. El método en uso consiste en definir una realización del tiempo terrestre y luego extenderla a las otras escalas de tiempo. La realización del tiempo terrestre es el tiempo atómico internacional TAI.

### Sincronización de relojes

La formación del TAI se hace con los datos suministrados por unos doscientos cincuenta relojes repartidos por todo el mundo.<sup>22</sup> Para ello es necesario comparar estos relojes entre sí. A continuación vamos a exponer de forma abreviada los distintos mecanismos de comparación de relojes separados unos de otros.

En el marco de la relatividad especial, los relojes en reposo colocados en lugares diferentes pueden ser sincronizados por el método de Einstein. Una señal luminosa sale del reloj A en el momento en que marca el tiempo  $t_0$ . Esta señal llega al reloj B e inmediatamente es devuelta al reloj A, que mide el tiempo  $t_1$  en el momento de llegar la señal. Para que los relojes A y B estén sincronizados es necesario que el tiempo marcado por el reloj B en el momento en que detecta la señal luminosa sea

$$t_0 + \frac{1}{2}(t_1 - t_0) = \frac{1}{2}(t_1 + t_0).$$

En la relatividad general ya no existe una identidad entre la coordenada temporal y el tiempo medido por un reloj. Por tanto es necesario redefinir el concepto de simultaneidad. Por convenio se usa la simultaneidad coordinada, según la cual dos sucesos son

20. Un cálculo que da nuestros mismos resultados pero haciendo uso de la aproximación relativista puede verse en Green R. M., *Spherical astronomy*, Cambridge University Press, 1985, pp.151-156. Véase también Aoki S., "Note on variability of the time standard due to the relativistic effect", *Astronomical Journal* **69** (1964) 221-223.

21. Una relación entre el TDB y el TT, válida para unos pocos miles de años en torno a J2000.0, se obtiene mediante la teoría analítica VSOP87 del movimiento planetario y la teoría lunar ELP2000, Fairhead L., Bretagnon P., "An analytical formula for the time transformation TB-TT", *Astronomy and Astrophysics* **229** (1990) 240-247. Una expresión analítica entre TDB y TT utilizando la teoría kepleriana es dada en Moyer T. D., "Transformation from proper time on earth to coordinate time in solar system baricentric space-time frame of reference", *Celestial Mechanics* **23** (1981) 33-56 y 57-68.

22. En julio del año 2005 participaron en el TAI 301 relojes, a 61 de ellos le fue asignado un peso cero, es decir, no contribuyeron al TAI. Estos relojes estaban repartidos en 49 instituciones científicas del mundo. Destacar los 76 relojes del Observatorio Naval de los Estados Unidos USNO. España contribuyó con 6 relojes del Real Instituto y Observatorio de Marina ROA.

simultáneos si tienen asociados el mismo valor de la coordenada temporal. Hay que anotar que esta simultaneidad es dependiente del sistema de referencia elegido y que, en general, no podemos hacer uso de la sincronización de Einstein.<sup>23</sup>

La simultaneidad coordinada nos permite sincronizar relojes por el siguiente procedimiento práctico. Mediante una adecuada fórmula, que depende de la geometría del espacio-tiempo, podemos obtener el tiempo coordinado  $t_A$  de la salida de una señal electromagnética del reloj A que en ese momento mide un tiempo local  $\tau_A$ . La señal viaja a otro reloj B, tardando un intervalo de tiempo coordinado  $\Delta t$ , que debe ser calculado a partir de la teoría. La señal llegará al reloj B en el momento coordinado  $t_A + \Delta t$ . A partir de este valor se encuentra el tiempo local  $\tau_B$  que debe marcar el reloj B para estar en sincronía con el reloj A. Nótese que hay que considerar dos problemas, uno de ellos es el cálculo de  $\Delta t$ , que depende de la posición y movimiento de los relojes; el otro es encontrar la relación entre los tiempos propios y coordinados. Al primero se le llama sincronización y al segundo sintonización.<sup>24</sup>

### Sincronización por traslado de relojes

Un método usado hace algunos años fue la sincronización de dos relojes distantes entre sí mediante el traslado de un tercer reloj entre ellos.<sup>25</sup> Consiste en tomar un reloj M, previamente sincronizado con un reloj A en su inmediata cercanía, y luego transportarlo hasta otro reloj distante B y hacer la sincronización entre M y B, el resultado es la sincronización entre los relojes A y B. Por (2.3) tendremos para los relojes A y M

$$\tau_M(2) - \tau_M(1) = \Delta t - \int_{C(M)} h(t) dt; \quad \tau_A(2) - \tau_A(1) = \Delta t - \int_{C(A)} h(t) dt$$

donde 1 es el momento de sincronización entre M y A, mientras que 2 corresponde a la de M con B. Las dos integrales dependen del camino seguido por los relojes. Combinando las ecuaciones anteriores e introduciendo en los dos miembros  $\tau_B(2)$  queda

$$\tau_B(2) - \tau_A(1) = [\tau_B(2) - \tau_M(2)] - [\tau_A(1) - \tau_M(1)] - \int_{C(M)} h(t) dt + \int_{C(A)} h(t) dt,$$

los dos primeros sumandos del segundo miembro nos da las diferencias entre los relojes que se comparan en los momentos 1 y 2. Las dos integrales finales se pueden calcular teniendo en cuenta (5.5). Como el reloj A permanece en reposo

$$\int_{C(A)} h(t) dt = \frac{1}{c^2} \int_{C(A)} \left( U_T + 2\omega \frac{dA_E}{dt} + \frac{1}{2} v^2 \right) dt = \int_{C(A)} \frac{U_T}{c^2} dt \approx \frac{Gm}{c^2 r} \tau + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \phi}{2c^2} \tau$$

donde hemos tomado  $r$  como el radio de la Tierra (suponiendo que el reloj A se encuentra sobre la superficie terrestre),  $m$  su masa y  $\tau$  es el intervalo de tiempo propio medido

23. En el caso especial de que la métrica sea ortogonal ( $g_{0\alpha} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) es posible sincronizar relojes por el método de Einstein. La métrica ortogonal no es impuesta por el espacio-tiempo, sino por el sistema de referencia que arbitrariamente se haya elegido, Landau L. D., Lifshitz E. M., *Teoría clásica de los campos*, Reverté, 1978, pp. 326-331.

24. A la operación de poner dos relojes al mismo tiempo también se le llama sincronización, mientras que se llama sintonización a poner dos osciladores a la misma frecuencia.

25. Petit G., Wolf P., "Relativistic theory for time comparasions: a review", *Metrologia* 42 (2005) S138-S144.

por el reloj A entre los sucesos 1 y 2. Si B se mueve sobre la superficie de la Tierra

$$\int_{C(M)} h(t) dt \approx \frac{Gm}{c^2 r} \tau + \frac{2\omega}{c^2} A_E + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \tau + \frac{\omega^2 r^2}{2c^2} \int_{C(M)} \sin^2 \phi dt,$$

en una sincronización a nivel del nanosegundo y para un movimiento a través de un paralelo terrestre, resulta la siguiente fórmula para la sincronización de relojes por transporte

$$\tau_R(2) - \tau_A(1) \approx [\tau_R(2) - \tau_M(2)] - [\tau_A(1) - \tau_M(1)] - \frac{2\omega}{c^2} A_E - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \tau,$$

donde los dos últimos sumandos representa la corrección relativista, que en este caso es sólo de origen cinemático y no gravitatorio, al menos en la aproximación considerada. Para tener una idea del valor de la corrección relativista, vamos a suponer que el reloj M se mueve hacia el este entre dos puntos del ecuador situados 80 grados entre ellos y que lleve una velocidad de 400 m/s. Bajo estas mismas circunstancias, el viaje tendrá una duración de unas 6 horas. El término de Sagnac vale en este caso 46 ns, mientras que el término debido al movimiento es 19 ns. Como el movimiento es hacia el este,  $A_E$  es positivo, entonces habrá que sumar los dos términos, resultando una corrección relativista de 65 ns.

### Sincronización por el procedimiento de una vía

En este método enviamos desde un reloj A una señal radioeléctrica a otro reloj B. Se averigua el intervalo de tiempo coordinado que tarda la señal de ir de uno a otro reloj y como se conoce el momento de tiempo propio que marca cada reloj, podemos proceder a la sincronización de los dos relojes. Volvemos a hacer uso de la relación (2.3)

$$\begin{aligned} \tau_B(2) &= \tau_B(1) + \Delta t - \int_{C(A)} h(t) dt \\ \tau_B(1) - \tau_A(1) &= \tau_B(2) - \tau_A(1) - \Delta t + \int_{C(A)} h(t) dt. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Es necesario calcular tanto  $\Delta t$  como la integral, para lo cual vamos a hacer uso del sistema de referencia rotante.

Para una señal electromagnética se cumple que  $ds^2 = 0$ , al imponer esta condición en el elemento de línea del sistema rotante (4.3), se obtiene una ecuación de segundo grado en el tiempo coordinado

$$\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{4\omega}{c} dA_E c dt - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) d\sigma^2 = 0$$

donde hemos despreciado el potencial centrífugo y hemos introducido el elemento de distancia coordinada  $d\sigma^2$ . Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene a un aceptable nivel de aproximación

$$c dt \approx d\sigma + \frac{2U}{c^2} d\sigma + \frac{2\omega}{c} dA_E \Rightarrow \Delta t \approx \frac{d}{c} + \int_c \frac{2U}{c^3} d\sigma + \frac{2\omega}{c^2} A_E,$$

la integral de la última expresión (llamado término de Shapiro) tiene un valor del orden de los 200 ps para una transferencia de la señal de la superficie de la Tierra a un satélite

geostacionario. Como en la expresión final aparecerá una diferencia entre intervalos de tiempo coordinado, que tendrán un orden similar, podemos eliminar el efecto de la integral y quedarnos con la expresión

$$\Delta t \approx \frac{d}{c} + \frac{2\omega}{c^2} A_E \quad (10.3)$$

para la duración del viaje de la señal electromagnética, medida en tiempo coordinado, siendo  $d$  la distancia recorrida por la señal luminosa. El primer término representa el valor clásico y el segundo el término de Sagnac.

La integral que aparece en (9.3) se calcula a través de la trayectoria seguida por el reloj A, que suponemos se encuentra en reposo sobre la superficie de la Tierra

$$\int_{C(A)} h(t) dt = \frac{1}{c^2} \int_{C(A)} U_T dt \approx \frac{Gm}{c^2 r} \Delta t \approx \frac{Gm}{c^2 r} \frac{d}{c} \quad (11.3)$$

con lo cual ya podemos aplicar la fórmula (9.3) y proceder a la sincronización de los relojes A y B mediante el envío de una señal electromagnética desde A a B.

Si la distancia entre los relojes es muy grande, es necesario que tenga que intervenir un tercer reloj C, que quizás se encuentre a bordo de un satélite artificial. La misma señal emitida por C es recibida en los relojes A y B. Sea 1 el momento de la salida de la señal de C, siendo 2 y 3 la llegada de la señal a B y A respectivamente. Podemos aplicar la fórmula encontrada para cada uno de los trayectos seguidos por la señal y al combinarlas entre sí se obtiene

$$\tau_A(1) - \tau_B(1) = \tau_A(3) - \tau_B(2) - \Delta t_B + \Delta t_A + \int_{C(A)} h(t) dt - \int_{C(B)} h(t) dt$$

como las integrales no exceden los 100 ps se pueden despreciar y quedarnos sólo con los cuatro primeros términos. Los intervalos de tiempos coordinadas que tarda la señal en hacer el viaje de C a B y de C a A, son determinados por (10.3), y como los tiempos propios de llegada de la señal a A y B son conocidos, tenemos todo lo necesario para sincronizar los relojes A y B. Nótese que en este método no aparece el tiempo marcado por el reloj C. Este método es el utilizado en la sincronización por intermedio de los satélites GPS, que actualmente está siendo ampliamente usado.

### Sincronización por el procedimiento de doble vía

En este método se envía una señal radioeléctrica desde A a B y casi simultáneamente se envía otra señal desde B a A, realizándose el proceso por intermedio de un satélite geoestacionario.<sup>26</sup> Ahora debemos distinguir cuatro momentos, cuyos tiempos coordinados representaremos de la siguiente forma:  $t_{EA}$ , momento de la emisión de la señal del reloj A;  $t_{RB}$ , recepción de la señal en el reloj B;  $t_{EB}$ , emisión de la señal desde B y  $t_{RA}$ , llegada de la señal a A.

El tiempo coordinado promedio entre las emisiones de las dos señales es

---

26. Es necesario tener en cuenta el tiempo de retraso entre la recepción y emisión de la señal por el satélite. Se puede despreciar la curvatura que sufre el rayo por la refracción atmosférica, que se encuentra en torno a algunos picosegundos. La curvatura del rayo causada por la gravedad terrestre también es despreciable por encontrarse en el orden de algunos picosegundos.



$$t_m = \frac{1}{2}(t_{EA} + t_{EB})$$

como las dos emisiones son casi simultáneas, podemos considerar proporcionales las diferencias de tiempo propio y tiempo coordinado, entonces

$$\tau_B(t_m) - \tau_A(t_m) = \frac{1}{2}[\tau_B(t_{EA}) + \tau_B(t_{EB}) - \tau_A(t_{EA}) - \tau_A(t_{EB})]$$

que se puede transformar en

$$\begin{aligned} \tau_B(t_m) - \tau_A(t_m) &= \frac{1}{2}[\tau_B(t_{EB}) + \tau_B(t_{RB})] - \frac{1}{2}[\tau_A(t_{EA}) - \tau_A(t_{RA})] + \\ &+ \frac{1}{2}[\tau_B(t_{EA}) - \tau_B(t_{RB})] + \frac{1}{2}[\tau_A(t_{RA}) - \tau_A(t_{EB})] \end{aligned}$$

Al aplicar (9.3) queda

$$\begin{aligned} \tau_A(t_{EB}) - \tau_B(t_{EB}) &= \tau_A(t_{RA}) - \tau_B(t_{EB}) - (\Delta t)_{BA} + \int_{C(A)} h(t) dt \\ \tau_B(t_{EA}) - \tau_A(t_{EA}) &= \tau_B(t_{RB}) - \tau_A(t_{EA}) - (\Delta t)_{BA} + \int_{C(B)} h(t) dt \end{aligned}$$

que al introducirlas en la expresión anterior nos da definitivamente

$$\begin{aligned} \tau_B(t_m) - \tau_A(t_m) &= \frac{1}{2}[\tau_B(t_{EB}) + \tau_B(t_{RB})] - \frac{1}{2}[\tau_A(t_{EA}) - \tau_A(t_{RA})] - \\ &- \frac{1}{2}[(\Delta t)_{AB} - (\Delta t)_{BA}] + \frac{1}{2} \int_{C(B)} h(t) dt - \frac{1}{2} \int_{C(A)} h(t) dt \end{aligned}$$

tanto  $\Delta t$  como las integrales son calculadas por (10.3) y (11.3). La anterior fórmula nos permite sincronizar los dos relojes A y B, o lo que es lo mismo averiguar el tiempo propio de cada reloj en el mismo momento de tiempo coordinado. Hay que tener en cuenta que este método nos evita la necesidad de tener un preciso conocimiento de las coordenadas espaciales de los relojes, de la trayectoria de la señal electromagnética y de los retrasos por la propagación en la atmósfera. Este método se le designa por su acrónimo en inglés TWSTFT (Two-Way Satellite Time and Frequency Transfer) y se usa para comparar relojes colocados en la superficie terrestre por mediación de señales retransmitidas por satélites geostacionarios.<sup>27</sup>

### Tiempo atómico internacional

El tiempo atómico internacional es la realización de la escala de tiempo terrestre, por tanto es una escala de tiempo coordinado definida en el sistema geocéntrico. Se forma

---

27. Un sistema similar al TWSTFT es el LASSO (Laser Synchronization from Stationary Orbit). Consiste en que dos estaciones colocadas en la Tierra emiten pulsos de laser en los momentos  $t_0$  y  $t_0 + \Delta t$  respectivamente, dirigidos hacia un satélite geostacionario, que posteriormente les reemite a las estaciones terrestres, midiendo el reloj del satélite el tiempo transcurrido entre recepción y emisión de la señal. El sistema LASSO se puede entender como un doble proceso de doble vía. En un futuro inmediato se espera poner en funcionamiento otros sistemas, como es el T2L2 (Time Transfer by Laser Link), que también usa la tecnología láser, evitando la propagación de señales

por la participación de relojes repartidos en unos cincuenta laboratorios de todo el mundo.<sup>28</sup> El TAI es un tiempo no materializado en ningún reloj, de ahí que se le denomine escala de “papel”. Para la formación del TAI se requieren dos pasos. El primero es la obtención de la escala atómica libre EAL realizada a partir de la comparación de los relojes que participan en el proceso. La segunda etapa consiste en la comparación del EAL con los relojes primarios, que dan la duración del segundo del SI con una gran exactitud. Realizada las pertinentes correcciones se obtiene el TAI.

El tiempo atómico internacional puede ser entendido como el tiempo dado por un reloj “virtual” formado por un oscilador (que son los relojes primarios) y un contador que está formado por el resto de relojes comerciales que intervienen. De esta forma se aprovecha la gran estabilidad de los relojes de cesio convencionales y la alta exactitud que logran alcanzar los patrones primarios. Si bien la estabilidad del TAI en cortos periodos es dado por los relojes comerciales, la estabilidad para largos periodos de tiempo es impuesta por los relojes primarios.

Cada centro horario cuenta con un reloj “master” que da el UTC de ese establecimiento<sup>29</sup>. Siguiendo las instrucciones del BIPM, que dirige el proceso, se hacen comparaciones entre los UTC de diversos laboratorios, bien usando el sistema de una vía o GPS, o el sistema de doble vía por intermediación de un satélite geoestacionario. El BIPM recoge esta información cada cinco días, concretamente aquellos cuyo día juliano modificado termina en 4 ó en 9 (ver Apéndice C). A su vez, también le son enviadas las comparaciones que hace cada laboratorio entre su reloj “master” y el resto de sus relojes. A partir de estos datos, el BIPM hace mensualmente una media ponderada de las medidas de cada reloj.<sup>30</sup> El resultado de este cálculo es el EAL.<sup>31</sup> Para evitar que un único reloj pueda tener un peso excesivo, se limita su contribución al EAL estableciendo un tope máximo a su peso.<sup>32</sup> El algoritmo utilizado, denominado Algos, debe optimizar

---

de microondas y optando por longitudes de onda óptica, cuya propagación en la atmósfera es mejor conocida.

28. Luck J. M., “Comparison and coordination of times scales”, *Astronomical Society of Australia* 3 (1979) 357-363. En el año 1971 la Conferencia General de Pesas y Medidas estableció que “el tiempo atómico internacional (TAI) es la coordenada temporal de referencia establecida por la Oficina Internacional de la Hora (BIH) sobre la base de la lectura de relojes atómicos operando en varios establecimientos de acuerdo con la definición del segundo, la unidad del Sistema Internacional de Unidades”. En el año 1980 el Comité Consultivo para la Definición del Segundo (CCDS) declaró que la “escala TAI es una escala de tiempo coordinado definida en un sistema de referencia geocéntrico con el segundo SI como realizado sobre el geoide rotante, como unidad de tiempo”.

29. El UTC es el tiempo universal coordinado, que se diferencia del TAI en un número entero de segundos (ver más adelante).

30. Bureau International de l’Heure, *Annual Report for 1974, 1975*, pp. A7-A13. El UTC es un tiempo propio, cuya marcha depende del lugar donde esté ubicado el reloj. Es por ello necesario hacer la corrección por altura, para referir todos los relojes a nivel del geoide.

31. En principio debe conocerse la medida de cada reloj en función de una escala de tiempo pero esta escala será conocida cuando sepamos las medidas horarias. Para evitar este círculo vicioso se puede utilizar el UTC generado por cualquier laboratorio, su diferencia con el UTC generado por el BIPM es despreciable en este caso.

32. El peso de cada reloj es inversamente proporcional a su variancia Allan, calculada con los datos disponibles del mes anterior, esta magnitud mide la estabilidad de cada reloj. De tal forma que a más estabilidad más peso del reloj. La variancia Allan se define por la expresión

la estabilidad, por lo que evita los saltos de frecuencia que podrían producirse cuando se desconecta un reloj o se une uno nuevo al conjunto. Para conseguir este objetivo se le añade a la media ponderada de las medidas de los distintos relojes, un polinomio de primer grado

$$EAL(t) = \{t_j\}(t) + A + B(t - t_0) \quad (12.3)$$

el primer sumando significa la media ponderada de las medidas horarias. Los coeficientes  $A$  y  $B$  son tales que se modifican cuando el conjunto de relojes ha sido alterado. De tal forma que no haya saltos ni en la escala ni en la frecuencia, o sea si  $t_m$  es el momento de cambio de las condiciones del conjunto de relojes, debe cumplirse

$$EAL_+(t_m) = EAL_-(t_m); \quad \frac{dEAL_+(t_m)}{dt} = \frac{dEAL_-(t_m)}{dt}$$

donde el signo  $+$  significa que las medidas han sido hechas antes del cambio del conjunto de relojes y  $-$  que han sido hechas posteriormente. Las fórmulas anteriores nos permite conocer los nuevos coeficientes  $A$  y  $B$  que tienen que utilizarse para su uso en (12.3) para obtener la nueva escala EAL. Además, para evitar comportamientos anómalos de un reloj, el BIPM compara regularmente su frecuencia media con el EAL, si comprueba que la variación es excesiva, desconecta el reloj, es decir le asigna un peso cero.

El conjunto de relojes de cesio convencionales y máseres de hidrógeno que forman el EAL, consiguen la deseada estabilidad pero su unidad de tiempo puede diferir del segundo del Sistema Internacional de Unidades. Para evitar esta contingencia, se compara el EAL con los patrones primarios. Con estas medidas se procede a la corrección del EAL para dar el TAI, a esta operación se le denomina pilotado o *steering*.<sup>33</sup> En esencia consiste en determinar la función  $P(t)$

$$TAI(t) = EAL(t) + P(t)$$

la variable  $t$  es el UTC, dado que la función  $P$  es extremadamente pequeña. Se evita hacer una corrección única, ya que esto produciría un inaceptable salto de frecuencia del TAI.<sup>34</sup> El BIPM publica sus resultados dando la diferencia entre el UTC y el UTC( $k$ ) que es el UTC dado por el centro horario  $k$  a las cero horas de las fechas cuyos días julianos modificados terminen en 4 ó en 9. Se da la circunstancia de que no es posible conocer el TAI en tiempo real, ya que su publicación se retrasa en un mes. No obstante, es posible hacer una extrapolación a partir de las diferencias  $UTC - UTC(k)$ . El BIPM también da la diferencia entre el UTC y la escala de los relojes del GPS (o del GLONASS),

---


$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{i=M-1} (y_{i+1} - y_i)^2$$

siendo  $y_i$  la desviación de la frecuencia normalizada relativa al EAL,  $M$  es el número de valores de la serie y  $\tau$  es el intervalo de tiempo transcurrido entre medidas.

33. Orte Lledó A., "El Tiempo Atómico Internacional. Su estabilidad y su exactitud", *Boletín Informativo*, Servicio Geográfico del Ejército, **41** (1978). Hasta el 1 de enero de 1977 el TAI era idénticamente igual al EAL, a partir de entonces se viene realizando al operación de pilotado.

34. Cuando se puso en operación este sistema hubo que hacer una corrección única de  $10^{-12}$  segundos el 1 de enero 1977

lo que nos da otro medio para conocer el UTC en tiempo real.<sup>35</sup>

El origen del TAI se tomó haciéndolo coincidir con el UT1 del día 1 de enero de 1958 a las 0 horas. Como en ese momento la diferencia entre el tiempo universal y el tiempo de las efemérides era 32.184 segundos, se optó por establecer la igualdad

$$TT(TAI) = TAI + 32^s.184$$

con lo que se consiguió que la escala TT fuera continuación del tiempo de las efemérides.<sup>36</sup> A partir del tiempo terrestre se define la función

$$\Delta T = ET - UT = TT - UT,$$

siendo válida la primera igualdad para la época anterior a la introducción del tiempo atómico.

La IAU decidió en 1991 que la escala de TCG tuviera su origen de tal forma que en la fecha 1 de enero de 1977 a las 0h TAI se cumpliera

$$TCG = TAI + 32^s.184$$

o puesto en función del tiempo terrestre

$$TCG = TT - 6.969\,290\,134 \cdot 10^{-10} (JD - 2\,443\,144.5) \cdot 86\,400$$

donde  $JD$  representan el día juliano. Por tanto, las escalas TCG y TT coinciden en la fecha del 1 de enero de 1977 a las 0h TAI; desde entonces la diferencia entre las dos escalas se incrementa en 60 microsegundos cada día. Téngase presente que la unidad de todas las escalas es el segundo internacional definido en la superficie del geoide.

La variación secular entre el TCG y el TCB viene dada por

$$TCB - TCG = 1.480\,826\,846 \cdot 10^{-8} (JD - 2\,443\,144.5) \cdot 86\,400$$

lo que significa que cada día ambas escalas se separan en 1.3 milisegundos aproximadamente.<sup>37</sup> Por último la relación entre las escalas TCB y TDB es

$$TCB - TDB = 1.550\,519\,768 \cdot 10^{-8} (JD - 2\,443\,144.5) \cdot 86\,400$$

coincidiendo ambas escalas el 1 de enero de 1977. Cada día las dos escalas se diferencian en algo más de 1.3 milisegundos.<sup>38</sup>

En la época J2000.0 la relación entre las distintas escalas de tiempo era

35. La información facilitada por el BIPM se halla en la página web [www.bipm.fr](http://www.bipm.fr).

36.  $TT(TAI)$  es una posible realización del tiempo terrestre. Como el TAI sufre alteraciones de frecuencia debido a inseguridades de los relojes primarios, a imperfecciones en el pilotado y a fluctuaciones estacionales, no se puede, en rigor, identificar el TT y el TAI. A lo anterior hay que añadir las dudas que surgen al identificar una escala de tiempo basado en la gravedad con otra referida a fenómenos cuánticos. Para resolver este problema el BIPM da periódicamente otra realización del tiempo terrestre, representado por  $TT(PIBM)$ , Guinot B., "Atomic time scales for pulsar studies and other demanding applications", *Astronomy and Astrophysics* **192** (1988) 370-373.

37. Téngase presente que la diferencia entre el TCB y el TCG depende de la posición del observador. En nuestro análisis hemos supuesto que la medida se hace desde el centro de la Tierra. En cualquier otro caso hay que tener en cuenta, además del anterior término secular y los términos periódicos, el sumando  $\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) / c^2$ , siendo  $\mathbf{v}_E$  y  $\mathbf{x}_E$  la velocidad y posición baricéntrica del centro de la Tierra y  $\mathbf{x}$  la posición baricéntrica del observador.

38. Seidlemann P. K., Fukushima T., "Why new time scales", *Astronomy and Astrophysics* **265** (1992) 833-838.

$$TT = TDB - 0^s.000\ 0994$$

$$TCB = TDB + 11^s.25362$$

$$TCG = TDB + 0^s.505\ 7339$$

$$TT = TAI + 32^s.184$$

$$\Delta AT = TAI - UTC = 32^s \text{ (} 33^s \text{ a partir de 2006)}$$

Como el TAI es una escala que podemos materializar nos sirve, como hemos comprobado, para realizar las restantes escalas de tiempo.

Cuando se introdujo el tiempo atómico fue necesario modificar la escala ET, originándose el tiempo de las efemérides revisado  $ET_R$ . Esta escala es medida desde el mismo instante en que tuvo su origen el TAI, teniendo en ese momento el valor de 32.184 segundos. La unidad de la nueva escala del tiempo de las efemérides es el actual segundo del sistema internacional de unidades. De esta forma el tiempo terrestre es continuo con el tiempo de las efemérides incluso antes de la introducción del tiempo atómico.

### Tiempo universal coordinado

La aparición del TAI exigió una modificación en la diseminación del tiempo. Por entonces existían dos tipos de usuarios: aquellos que necesitaban conocer el tiempo universal, como los astrónomos y los navegantes; y aquellos otros que necesitaban una escala uniforme, tal como los físicos. La escala UTC fue un intento para satisfacer a ambos tipos de usuarios.<sup>39</sup>

Desde 1961 a 1970 el UTC estuvo operando con ajustes de frecuencia, así como saltos de tiempo para mantenerlo lo más cercano posible con el tiempo universal. Esta situación era muy insatisfactoria, por las múltiples correcciones que era necesario realizar. Por ello una nueva definición del UTC vino en uso que, salvo cambios menores, ha permanecido hasta la fecha actual.

En 1970 se definió la actual escala UTC, que entró en vigor el 1 de enero de 1972.<sup>40</sup> Se abandonó los ajustes de frecuencia y se estableció que la diferencia entre el TAI y el UTC fuera siempre un número entero de segundos. Para aplicar la nueva definición, se tomó inicialmente una diferencia de 10 segundos entre el TAI y el UTC, aproximadamente el tiempo que se había desviado el UT1 del TAI desde la inserción de éste en el año 1958 hasta el 1972.<sup>41</sup>

---

39. El nombre tiempo universal coordinado fue dado por la IAU en 1967. Un curioso problema surgió con su acrónimo. Dos opciones competían entre sí: el derivado del nombre inglés, CUT, y el proveniente del francés, TUC. Finalmente, en una sabia decisión, se adoptó unas siglas intermedias entre ambas.

40. Según la definición de la Unión Internacional de Telecomunicación ITU, el UTC es la escala de tiempo mantenida por el BIPM, con asistencia del IERS, que “corresponde exactamente en variación con el TAI pero difiere de él por un número entero de segundos. La escala UTC es ajustada por la inserción o eliminación de segundos (positivos o negativos segundos intercalares) para asegurar un aproximado acuerdo con el UT1”.

41. Al comenzar el año 1972  $\Delta T = TT - UT1$  era de 42.23 segundos. Como el tiempo terrestre

Ocasionalmente, la escala UTC recibe un segundo intercalar <sup>42</sup> (que puede ser un incremento o una disminución, aunque hasta la fecha siempre han sido segundos positivos o de aumento), esto ocurre cuando la diferencia entre el UTC y el UT1 alcanza los 0.9 segundos. <sup>43</sup> Los segundos intercalares son un reflejo del frenado de la rotación de la Tierra, o dicho de otra forma, de que la escala UT atrasa respecto al tiempo atómico.

Los segundos intercalares deben ser colocados preferentemente a final de los meses de junio o diciembre, o bien a final de marzo o septiembre. El segundo intercalar comienza a las 23<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> 60<sup>s</sup> y finaliza a las 0<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> 0<sup>s</sup> del día siguiente. <sup>44</sup> Las fechas en que las intercalaciones tienen lugar son anunciadas por el IERS con ocho semanas de antelación. Por acuerdo internacional, la escala UTC es la base para el establecimiento del tiempo civil en cada uno de los países, añadiéndole o restándole horas enteras, según acuerdo de los correspondientes gobiernos nacionales.

Como el TAI es conocido con un cierto retraso, los laboratorios nacionales construyen su propio UTC para su inmediata diseminación, ya sea eligiendo un reloj concreto para producirlo o bien haciendo un promedio entre varios de sus relojes. El BIPM exige que la diferencia entre el UTC que él publica y el UTC de cada laboratorio particular, se encuentre en el interior de un microsegundo y preferiblemente sea inferior a 100 ns. <sup>45</sup>

El uso generalizado del sistema de posicionamiento global para determinar las coordenadas geográficas ha traído consigo que ya no sea imprescindible diseminar el tiempo universal. Por esto, la comunidad científica internacional se plantea la modificación de la escala de tiempo universal coordinado. Es de opinión generalizada que los segundos intercalares son cada vez más inconvenientes y aumenta el deseo de contar con una escala continua, al menos durante un largo periodo de tiempo.

Además de las dificultades que origina la adaptación de los equipos cuando se produce un segundo intercalar, otros problemas aquejan a la escala UTC. Por ejemplo,

---

excede al TAI en 32.184 segundos, entonces en esa fecha la diferencia entera entre el TAI y el UT1 era de 10 segundos aproximadamente.

42. La idea del segundo intercalar, similar a la del día bisiesto, fue propuesta por Winkler y Essen, independientemente el uno del otro, en una reunión del BIPM en 1968. Hasta el año 2006 se han intercalado 23 segundos intercalares, haciendo que la diferencia entre el TAI y el UTC sea de 33 segundos exactamente. El último segundo intercalar fue colocado al final del año 2005, de tal forma que partir de las 0 horas del 1 de enero del 2006 la diferencia entre el TAI y el UTC es de 33 segundos. La historia del segundo intercalar puede verse en: Nelson R. A. y otros, "The leap second: its history and posible future", *Metrologia* **38** (2001) 509-529, Arias E. F., Guinot B., Quinn T. J., "Rotation of the Earth and Time scales", *ITU-R Special rapporteur Group Colloquium on the UTC Time Scale*, Torino, 2003 y Guinot B., Arias E. F., "Atomic time-keeping from 1955 to the present", *Metrologia* **42** (2005) S20-S30.

43. Se define el DUT1 como la diferencia entre el UTC y el UT1, que no puede superar en valor absoluto los 0.9 segundos.

44. Con esta notación no existe ambigüedad. Pero no ocurre lo mismo cuando se data mediante el día juliano expresado con decimales.

45. Por real decreto de 29 de octubre de 1976 la escala nacional de tiempo en España es dada por el Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando y recibe el nombre de UTC(ROA), que sirve de base para el establecimiento de la hora legal española, para ello se le añade una o dos horas, según esté vigente o no el horario de verano. Por real decreto del 23 de octubre de 1992, el ROA es "el depositario del patrón nacional de tiempo y laboratorio asociado al Centro Español de Metrología".

el archivo de datos que nos da la diferencia TAI–UTC se va haciendo cada vez más grande, a la vez que tiene que ser frecuentemente adaptado, lo que aumenta la posibilidad de errores accidentales.<sup>46</sup> O acecha el peligro de que surjan nuevas escalas de tiempo que eviten los segundos intercalares, aumentando con ello la confusión. De hecho esto ya ha ocurrido, cuando se decidió que el tiempo emitido por la constelación de satélites del GPS se mantuviera con una diferencia fija de 19 segundos respecto al TAI.<sup>47</sup>

Se han realizado diversas propuestas para modificar la escala que sirve de base al tiempo civil. Entre las más destacables se encuentra la que toma al TAI como la escala de tiempo mundial, sobre la que sería basado el tiempo civil. Para realizar esta idea sería necesario proceder a un salto de un número entero de segundos, para pasar del actual UTC al TAI.

Otra sugerente idea sería mantener el TAI tal como está actualmente, pero en el futuro ya no serían añadidos más segundos intercalares al UTC, de tal forma que la diferencia entre el UTC y el TAI permanecería estable, al menos durante grandes periodos de tiempo. Horas intercalares serían añadidas cuando fuese necesario.<sup>48</sup> Una modificación de esta idea sería la de intercalar minutos u otro periodo de tiempo.

La dificultad para adoptar una nueva definición del UTC es perceptible cuando se tiene en consideración las varias organizaciones internacionales que se verían implicadas: la CGPM, la IAU, la ITU, el IERS, el Comité Consultivo para el Tiempo y la Frecuencia (CCTF, antes CCDS) o la Unión Internacional Geodésica y Geofísica IUGG, a lo que habría que añadir todos los gobiernos nacionales, que se verían obligados a cambiar la legislación relativa a sus escalas nacionales de tiempo. Por ello es necesario dejar bastantes años para que se den todos los pasos necesarios para poner en funcionamiento la nueva escala de tiempo. Al momento de preparar este informe, se piensa que para la segunda década del siglo pueda estar implementado el nuevo sistema.

---

46. Dado el carácter acelerado del frenado terrestre, cada vez serán más frecuentes los segundos intercalares, lo que aumentaría las dificultades inherentes al sistema actualmente en uso.

47. En cuanto a los relojes del sistema de posicionamiento global que pusieron en órbita los soviéticos y denominado GLONASS, mantiene la escala UTC (concretamente la hora oficial de Moscú, UTC+13 horas), o sea que tiene en cuenta los segundos intercalares.

48. Otra idea sería dejar las cosas tal como están, o bien hacer la intercalación de segundos en fechas fijas periódicas; dado el carácter parabólico del ritmo de inserción se podrían hacer intercalaciones periódicas pero en un intervalo de tiempo que iría aumentando con el tiempo. Se podría adoptar un ajuste de frecuencia, lo mismo que se hacía con la vieja escala UTC; e incluso modificar la definición del segundo para que se acerque lo más posible al segundo generado por la rotación de la Tierra, algo que tropezaría con el frenado no uniforme de la rotación de la Tierra.

## El calendario solar

### La órbita de la Tierra

Supondremos que el movimiento de la Tierra en torno al Sol sigue una elipse cuyos parámetros orbitales (excentricidad y longitud del perihelio) varían secularmente con el tiempo, a consecuencia de las perturbaciones de los demás astros del sistema solar.<sup>1</sup> En nuestra teoría simplificada, la longitud eclíptica de la Tierra variará sólo a consecuencia de su posición en la órbita, según lo expresa la ecuación de Kepler.

En lo que sigue vamos a examinar el movimiento aparente del Sol respecto a la Tierra. Consideremos un Sol promedio cuya longitud viene dada por la longitud geométrica media del Sol verdadero respecto al equinoccio medio de la fecha. El valor de esta longitud media en la teoría VSOP82<sup>2</sup> es

$$L_m = 280^\circ.466\ 448\ 514 + 36\ 000^\circ.769\ 8231T + \\ + 0^\circ.000\ 303\ 678\ T^2 + 0^\circ.000\ 000\ 0212T^3 \quad (1.4)$$

la longitud media del perigeo varía según la expresión

$$\omega_m = 282^\circ.937\ 348 + 1^\circ.719\ 5269T + 0^\circ.000\ 459\ 62T^2 + 0^\circ.000\ 000\ 499T^3$$

y la excentricidad media de la órbita tiene la variación secular

$$e = 0.016\ 708\ 62 - 0.000\ 042\ 037T - 0.000\ 000\ 1236T^2 + 0.000\ 000\ 000\ 04T^3.$$

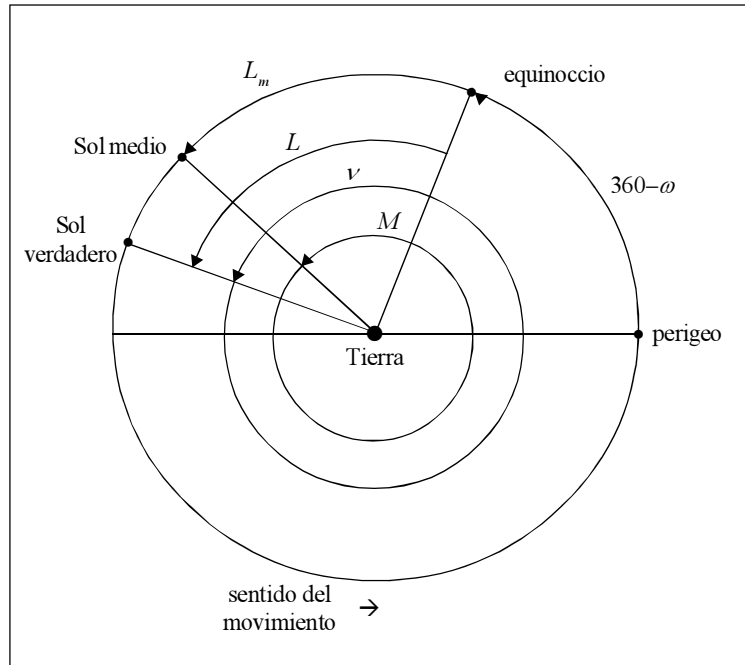
En las anteriores y siguientes fórmulas,  $T$  viene dado en siglos julianos contados a partir de J2000.0 en la escala de tiempo terrestre.

Se le llama anomalía media al ángulo sustentado en la eclíptica desde el perigeo

1. Se trata de los elementos orbitales medios, distintos de los elementos osculadores. Éstos últimos tienen términos periódicos. Quiere esto decir que los parámetros que vamos a tomar no describen la órbita real de la Tierra sino una órbita promedio. Una introducción a la teoría de las perturbaciones planetarias se encuentra en el libro clásico de Moulton F. R., *An introduction to celestial mechanics*, Dover, 1970, pp. 321-433.

2. Los coeficientes han sido tomados de Bretagnon P., "Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82", *Astronomy and Astrophysics* **114** (1982) 278-288. La teoría VSOP (acrónimo de Variaciones Seculares de las Órbitas Planetarias) ha sido replanteada en la versión VSOP87, que permite evaluar las efemérides solar y planetaria mediante coordenadas rectangulares y esféricas, Bretagnon P., Francon G., "Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions", *Astronomy and Astrophysics* **202** (1988) 309-315. Una versión reducida de la teoría VSOP se encuentra en Bretagnon P., Simon J.L., *Planetary programs tables from -4000 to +2800*, Willmann-Bell, 1986. Una versión más detallada se halla en Meeus J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, 1991, pp. 197-204 y pp. 381-422.





Dibujo 1.4.- Descripción del movimiento aparente del Sol.

medio hasta la posición del Sol medio y medido en el sentido del movimiento solar. En este contexto, llamaremos Sol medio aquel que viene definido por la longitud  $L_m$ .<sup>3</sup> En el dibujo 1.4 comprobamos que la anomalía media  $M$  viene dada por

$$M = 360^\circ + L_m - \omega_m = 357^\circ.529\ 101 + 35\ 999^\circ.050\ 296T - 0^\circ.000\ 1559T^2 \quad (2.4)$$

donde sólo hemos retenido hasta la segunda potencia de  $T$ , por ser más que suficiente para los cálculos posteriores. El dibujo 1.4 también nos muestra que, en la época actual, el perigeo se va acercando al equinoccio (ya que  $360 - \omega_m$  va disminuyendo). Téngase presente que el Sol medio en algunas ocasiones adelanta al Sol verdadero y en otras ocurre lo contrario.

La anomalía verdadera o ángulo que va del perigeo medio al Sol verdadero en el sentido del movimiento solar, cumple la relación

$$v = L + 360 - \omega_m$$

siendo  $L$  la longitud del Sol verdadero. Esto quiere decir que para determinar  $L$  es necesario previamente determinar la anomalía verdadera. El problema se resuelve calculando primeramente la anomalía excéntrica  $E$  por la ecuación de Kepler

$$E - e \sin E = M,$$

donde los ángulos vienen expresados en radianes. Finalmente la anomalía verdadera se relaciona con la excéntrica mediante

---

3. Este Sol medio es ligeramente diferente al definido en el capítulo 1. Pero las diferencias entre ambos no son significativas en los razonamientos de este capítulo.

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

y ya estaríamos en condiciones para calcular la longitud verdadera del Sol.<sup>4</sup> No obstante, es más cómodo para el cálculo resolver la ecuación de Kepler mediante un desarrollo en series de potencias de la excentricidad, habida cuenta de la pequeñez de este término en el caso considerado. Hasta la tercera potencia se encuentra

$$L = L_m + (2e - e^3/4) \sin M + 5/4 e^2 \sin 2M + 13/12 e^3 \sin 3M + \dots \quad (3.4)$$

a los anteriores términos periódicos se le denomina la ecuación del centro.<sup>5</sup> La magnitud  $L$  mide la longitud eclíptica geométrica (no afectada de aberración) del centro del Sol respecto al equinoccio medio (o sea no tenemos en cuenta la nutación). Esto es más que suficiente para nuestros propósitos, que consisten en el estudio promedio del Sol, sin tener en cuenta las alteraciones de carácter periódico.

### Año trópico

En la antigüedad el año trópico fue entendido como el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo punto estacional. La imprecisión de las medidas no permitió advertir ninguna variación de ese año estacional con el tiempo, ni diferencias según qué punto estacional se usara como referencia. La más precisa determinación del año trópico efectuada en la antigüedad la hizo Hiparco, que vivió en el siglo II a.C.<sup>6</sup> Determinó los momentos en que se produjeron algunos equinoccios y solsticios, luego los comparó con otras observaciones antiguas, con lo que pudo determinar con bastante exactitud la duración del año. Se desconoce el procedimiento práctico usado por Hiparco para hacer sus observaciones, pero sí se sabe que el error que cometió en la determinación de los momentos en que comenzaban las estaciones alcanzaba el cuarto de día. Aún así, promediando entre un amplio intervalo de años pudo obtener el valor de  $365^d 5^h 55^m 12^s$ , el mismo que halló Ptolomeo varios siglos después.<sup>7</sup>

Cuando se desarrolló la mecánica celeste se pudo expresar la longitud media del Sol en función del tiempo. A partir de aquí se encontró otro procedimiento para el cálculo del año trópico. Consiste en determinar el tiempo que tiene que transcurrir para que la

4. Las deducciones de las anteriores fórmulas se encuentran en Goldstein H., *Mecánica Clásica*, Reverté, 1988, pp. 122-128.

5. Smart W.M., *Textbook on spherical astronomy*, Cambridge University Press, 1990, pp. 118-120.

6. Para mejorar los calendarios lunisolares los antiguos astrónomos griegos tuvieron que estimar la duración del año, obteniéndose diversos valores, todos ellos muy aceptables, Samuel A. E., *Greek and roman chronology. Calendars and years in classical antiquity*, Verlag C. H. Beck, 1972, pp. 35-55.

7. Otro método para determinar el año trópico (en el sentido dado anteriormente), fue mediante la precesión. Se partió del año sidéreo, que era bien conocido ya que se podía medir fácilmente y se le restaba el tiempo que el Sol tardaba en recorrer el ángulo descrito por la precesión en un año, el resultado era el año trópico, Proverbio E., "Copernicus and the determination of the length of the tropical year" en *Gregorian reform of the calendar. Proceedings of the Vatican conference to commemorate its 400 th anniversary 1582-982*, editado por Coyne, Hoskin y Pedersen, Specola Vaticana, 1983, pp.129-133.

longitud media del Sol referida al equinoccio medio de la fecha aumente en 360 grados.

8

Ha pasado inadvertido que las dos definiciones del año trópico dadas anteriormente son diferentes. Al año tal como fue medido en la antigüedad (entre puntos estacionales consecutivos) le llamaremos año estacional y será estudiado en el próximo apartado. El año como se desprende de la longitud media del Sol es el que debe recibir el nombre de año trópico.<sup>9</sup>

Supongamos que la longitud geométrica media del Sol verdadero respecto al equinoccio medio de la fecha venga dada por la expresión

$$L_m(T) = A + BT + CT^2 + DT^3$$

donde hemos retenido hasta el término de tercer orden, dado el pequeño valor de los términos asociados a potencias superiores. El tiempo que tiene que transcurrir a partir del momento  $T$  para que la longitud aumente en 360 grados es el año trópico  $a_T$

$$L_m(T) + 360 = A + B(T + a_T) + C(T + a_T)^2 + D(T + a_T)^3$$

donde  $a_T$  viene medido en siglos julianos de tiempo terrestre. Combinando las dos últimas ecuaciones se obtiene una ecuación algebraica, que nos permite determinar la duración del año trópico que comienza en el instante dado por  $T$ .

Para eludir el engorro de resolver la anterior ecuación de tercer grado, se puede abordar el problema de otra forma. Como la aceleración del Sol medio varía muy lentamente, podemos suponer, sin error apreciable, que el movimiento medio es el mismo durante todo el año y por tanto, supondremos que durante ese tiempo el Sol lleva un movimiento uniforme. El movimiento medio del Sol es

$$n = \frac{3600}{36525} \frac{dL_m}{dT} = a + bT + cT^2$$

que lo hemos expresado en segundos de arco por día de 24 horas de tiempo terrestre, siempre y cuando la longitud venga expresada en grados. El año trópico será el tiempo que tarda el Sol en recorrer una circunferencia completa con el anterior movimiento medio,<sup>10</sup> o sea

$$a_T = \frac{1\,296\,000}{n} = \frac{1\,296\,000}{a + bT + cT^2} \approx \frac{1\,296\,000}{a} \left[ 1 - \frac{b}{a}T + \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right) T^2 \right].$$

8. Vives T. J., *Astronomía de posición*, Alhambra, 1971, pp. 303-310.

9. La confusión permanece en nuestros días. Valga como ejemplo la siguiente definición de año trópico, que de forma muy parecida es repetida en la mayoría de los manuales de astronomía: “El año trópico es definido como el intervalo medio entre equinoccios vernales; corresponde al ciclo de las estaciones”, Doggett L. E., “Calendars” en *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, University Science Books, 1992, p. 576. Entre la escasa bibliografía que trata de forma clara la diferencia entre los dos tipos de años señalar: Meeus J., Savoie D., “The history of the tropical year”, *Journal of the British Astronomical Association* **102** (1992) 40-42; Heydari-Malaeri M., “A concise review of the iranian calendar”, *arXiv:astro-ph/0409620* v2, 1-octubre-2004 y Meeus J., *More Mathematical Astronomy Morsels*, William-Bell, 2002, pp. 357-366.

10. Borkowski K. M., “The tropical year and solar calendar”, *Journal of the Royal Society of Canada* **85** (1991) 121-130.

Si se utiliza la longitud como viene dada en la teoría VSOP, obtenemos un movimiento medio dado por

$$n = 3548''.330\ 495\ 91 + 5''.986\ 2604 \cdot 10^{-5} T + 6''.269 \cdot 10^{-9} T^2$$

expresado en segundos de arco por día; de aquí se obtiene la duración del año trópico

$$a_T = 365^{\text{d}}.242\ 189\ 67 - 0^{\text{d}}.000\ 006\ 1619 T - 6^{\text{d}}.4514 \cdot 10^{-10} T^2$$

que viene en días de la escala TT. A partir de la teoría NGT (Nueva Teoría General) de Laskar se obtiene una duración del año trópico dada por

$$a_T = 365^{\text{d}}.242\ 189\ 67 - 0^{\text{d}}.000\ 006\ 1536 T - 7^{\text{d}}.285 \cdot 10^{-10} T^2$$

que para efectos prácticos coincide plenamente con la obtenida mediante la teoría VSOP.<sup>11</sup>

Debemos tener presente que las dos últimas expresiones del año trópico no hay que entenderlas como una función continua con respecto a la variable  $T$ . Las anteriores expresiones nos dan la duración del año trópico que comienza en la fecha dada por  $T$ . El año trópico sólo volverá a cambiar cuando se inicie el nuevo año trópico.<sup>12</sup> Las ecuaciones anteriores son, por tanto, funciones “escalonadas” de la variable  $T$ , ya que elegido un valor de esa variable, los restantes valores se tienen que espaciar entre sí en un año trópico. Hay también que anotar que la variación que sufre el año trópico de año en año, es causada por los términos mayores que el primer orden en la longitud media del Sol. Para precisar aún más, vamos a definir el año trópico cronológico, que lo entenderemos como el año trópico que comienza con el año civil. Llamaremos año trópico instantáneo al año trópico que tiene su comienzo en cualquier otro momento del año.

### Años sidéreo y anomalístico

Aunque tengan escasa importancia en hemerología, vamos a considerar a continuación los años sidéreo y anomalístico. El año sidéreo es el tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud media del Sol aumente en 360 grados respecto a un equinoccio fijo. Si con  $p$  representamos el movimiento medio anual del equinoccio a consecuencia de la precesión (que tiene sentido contrario al movimiento del Sol), entonces el año sidéreo será igual al año trópico más el tiempo que el Sol medio tarda en recorrer el arco  $p$ , suponiendo que la velocidad del Sol permanece constante e igual a  $n$

$$a_s = a_T + \frac{p}{n}$$

De la teoría VSOP y del valor de la precesión dada por (1.1) se encuentra para el año sidéreo el valor

$$a_s = 365^{\text{d}}.256\ 362\ 805 + 1^{\text{d}}.006\ 935 \cdot 10^{-7} T,$$

11. Laskar J., “Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory”, *Astronomy and Astrophysics* **157** (1986) 59-70. Los resultados de esta teoría son válidos para los años que van del -5000 al 5000.

12. Esto quiere decir que para evaluar los errores acumulados (ver más adelante), no podremos integrar el año trópico en función del tiempo, como más de un autor ha hecho equivocadamente.

que representa un valor mayor que el año trópico (algo más de veinte minutos) y prácticamente constante en el tiempo (un aumento de algunas milésimas de segundos cada siglo).

El año anomalístico es el tiempo que tarda el Sol medio en aumentar 360 grados respecto al perigeo medio. El movimiento medio del Sol respecto al perigeo se obtiene a partir de la anomalía media (2.4)

$$n_a = \frac{dM}{dT} = 3548'' .161\ 0148 - 3'' .073\ 183 \cdot 10^{-5} T,$$

si durante el periodo de un año suponemos constante este movimiento medio, el año anomalístico será el tiempo que tarda el Sol en recorrer una circunferencia completa con la velocidad  $n_a$

$$a_a = \frac{1\ 296\ 000}{n_a} = 365^d .259\ 635\ 793 + 3^d .163\ 64 \cdot 10^{-6} T$$

como en los demás casos, está expresado en días de 24 horas de la escala TT.

### Años estacionales

Como antes hemos dicho, el año estacional es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero por un mismo punto estacional.<sup>13</sup> Para ser más precisos, llamaremos a la anterior definición año estacional verdadero; que puede ser de cuatro clases según se elija como referencia el equinoccio de primavera, el solsticio de verano, el equinoccio de otoño o el solsticio de invierno, que para abreviar llamaremos años verdaderos de primavera, verano, otoño e invierno. La duración de estos años es variable, ya que además de los términos seculares hay que considerar los términos periódicos del movimiento solar. Por ejemplo, en el periodo comprendido entre el año 2000 y el 3000, las máximas diferencias entre dos años estacionales del mismo tipo es de 28 minutos, cantidad que es debida casi exclusivamente a las oscilaciones de carácter periódico.<sup>14</sup>

Lo que ahora nos interesa no son los años estacionales verdaderos, sino los promedios. Este año promedio, que llamaremos simplemente año estacional, es definido como el tiempo que tarda el Sol medio, corregido por la ecuación del centro, en dos pasos consecutivos por un mismo punto estacional y suponiendo que los parámetros orbitales tienen una variación secular, es decir que la longitud del Sol viene dada por la ecuación (3.4).<sup>15</sup> Si con  $T_0$  representamos el momento en que acontece el equinoccio de primave-

13. Entendemos que los puntos estacionales (equinoccios y solsticios) son los instantes en que la longitud geocéntrica aparente (afectada de aberración y nutación) es un múltiplo de 90 grados.

14. Para obtener este valor numérico hemos utilizado el procedimiento simplificado basado en la teoría VSOP que aparece en Meeus J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, 1986, pp. 165-170, que da un error de sólo algunos segundos. Una relación de las fechas en que comienzan las estaciones desde el año 0 hasta el 3000 haciendo uso de la completa teoría VSOP87 se encuentra en Meeus J., *Astronomical tables of the Sun, Moon and the planets*, Willmann-Bell, 1995, pp. 101-175.

15. Esta definición del año estacional nos ha sido sugerida por Kort S. J., "Astronomical appreciation of the gregorian calendar", *Ricerche astronomiche* 6 (1949) 109-116.

ra, tendremos

$$L(T_0) = 0$$

entonces el año de primavera  $a_p$  vendrá dado por la ecuación

$$L(T_0 + a_p) = 360.$$

Como se ve por la última ecuación, el año de primavera depende del tiempo. Ecuaciones similares se aplican para los demás años, con tal de poner en la longitud solar en el momento  $T_0$  el valor 90 grados (para el año de verano), 180 (para el año de otoño) y 270 (para el año de invierno). La duración de los años estacionales varía con el paso del tiempo, también es diferente la duración de cada uno de los cuatro años estacionales.<sup>16,17</sup>

Por este procedimiento se obtiene que para el periodo comprendido entre los años -3000 y 10000 la duración del año de primavera viene dado por el siguiente polinomio

$$a_p = 365^d.242\ 374\ 08 + 1^d.037 \cdot 10^{-5} T - 1^d.344 \cdot 10^{-7} T^2 - 2^d.373 \cdot 10^{-9} T^3 + 1^d.732 \cdot 10^{-11} T^4 .$$

En la tabla 1.4 aparecen las diferencias entre cada uno de los años estacionales y el año trópico de la fecha. A veces el año trópico es de mayor duración y otras veces ocurre lo contrario. Lo notable es que la suma de las diferencias para los cuatro años estacionales es aproximadamente cero (última columna). Lo que nos viene a decir que, con muy buena aproximación, el año trópico es la media aritmética de la duración de los cuatro años estacionales.

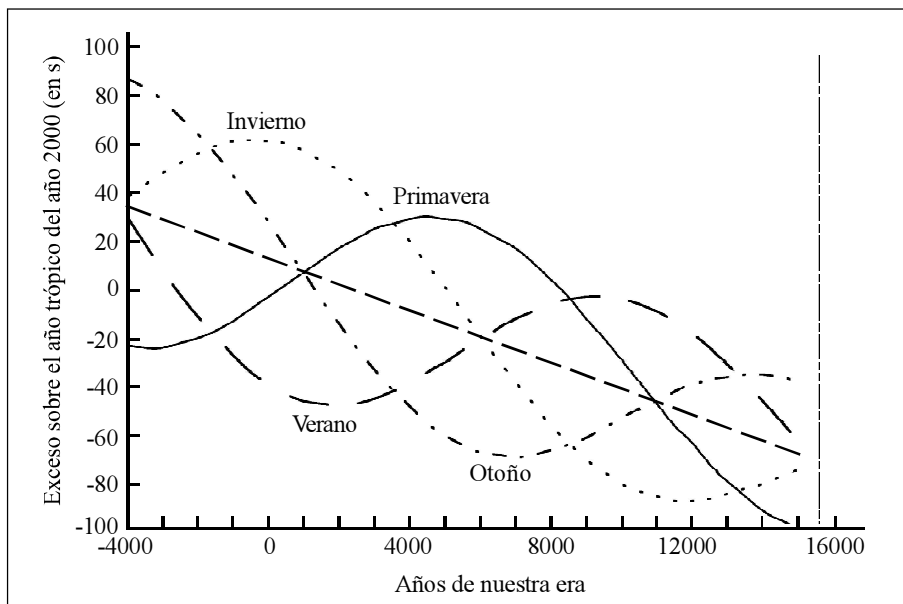
Este resultado se ve de forma más general en la gráfica 2.4. En el eje horizontal se encuentran representados los años de nuestra era y en el eje vertical lo que excede cada

Años de nuestra era	Año de primavera	Año de verano	Año de otoño	Año de invierno	Suma de diferencias
-1000	-29.8	-44.0	30.2	43.6	0.0
0	-14.9	-50.5	16.0	49.5	-0.02
1000	0.9	-52.1	0.4	50.8	-0.01
2000	15.9	-48.7	-14.9	47.6	0.01
3000	28.9	-40.6	-28.4	40.1	0

Tabla 1.4. Exceso en segundos de la duración de los años estacionales respecto al año trópico de la fecha En la última columna están las sumas de las diferencias.

16. Los resultados coinciden con las duraciones que se obtienen mediante las fórmulas que aparecen en Meeus J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, 1986, p.166; las diferencias entre ambos resultados no superan, en el periodo considerado, las 7 décimas de segundo. Las fórmulas de Meeus representan los valores promedios de las fechas del comienzo de las cuatro estaciones según se desprende de la teoría VSOP, que en esencia coincide con la definición que hemos dado de año estacional.

17. La escala temporal en que vienen dados nuestros resultados es el tiempo uniforme de la mecánica o tiempo de las efemérides, que es equivalente al tiempo terrestre. Así que podemos comparar estos resultados con el año trópico, que también viene expresado en la misma escala de tiempo.



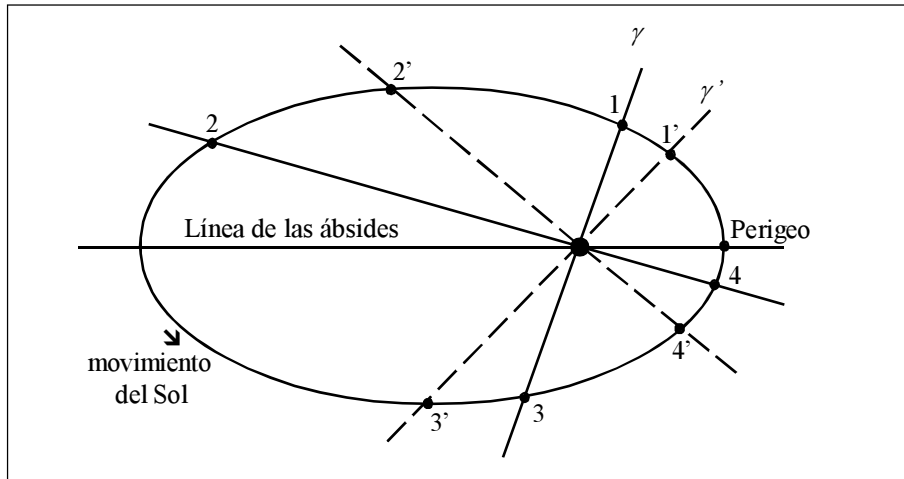
Gráfica 1.4. Exceso en segundos de la duración de los años estacionales respecto al año trópico del año 2000. La línea recta representa el año trópico de la fecha.

uno de los años al año trópico del año 2000.<sup>18</sup> La línea recta descendente es la duración del año trópico, que como ya hemos visto disminuye con el tiempo de forma muy cercana a la lineal. Las otras cuatro curvas representan los cuatro años estacionales. Se observa que estos años van variando con el tiempo; el año de verano se encuentra en oposición al de invierno y el de primavera al de otoño. Se comprueba que la variación periódica está en torno al año trópico, que resulta ser muy aproximadamente, el promedio de los cuatro años estacionales. Nótese que las diferencias máximas entre cada uno de los años estacionales y el año trópico, van disminuyendo con el tiempo, lo mismo que le ocurre al periodo de variación, por razones que veremos más adelante.

Para explicar este comportamiento de los años estacionales, vamos a fijarnos en el dibujo 2.4. La elipse es la trayectoria seguida por el movimiento aparente del Sol. La línea de las ápsides (que es la línea horizontal) está girando, de tal forma que el perigeo se va acercando al equinoccio de primavera  $\gamma$ .

Pero en vez de representar el movimiento del perigeo respecto al equinoccio, vamos a hacerlo al revés, vamos a suponer fija la línea de las ápsides y suponer que es el equinoccio de primavera el que se acerca al perigeo. De tal forma que 1 representa la posición inicial del equinoccio respecto al perigeo y 1' es la posición del equinoccio al cabo de un año. Lo mismo se puede decir para los otros puntos estacionales, que

18. Intencionadamente hemos puesto un intervalo de tiempo excesivamente grande. La teoría que estamos utilizando sólo tiene validez para unos pocos miles de años en torno al momento actual, pero no para épocas tan alejadas. La razón de presentar así el dibujo es para que se observe más claramente las distintas variaciones que experimentan los años estacionales.



Dibujo 2.4. Movilidad de los puntos estacionales respecto al perigeo.

vienen representados por los números 2, 3 y 4. El ángulo girado por cada uno de los cuatro puntos estacionales en un año, son iguales entre sí, es decir

$$\widehat{11'} = \widehat{22'} = \widehat{33'} = \widehat{44'},$$

sin embargo, el tiempo que tarda el Sol en recorrer cada uno de esos ángulos no es el mismo, ya que se encuentran en diferentes puntos de la órbita; de aquí se comprueba que los años estacionales tienen en general duraciones diferentes. Por ejemplo, la velocidad angular del Sol en la cercanía del equinoccio de primavera viene dada en primera aproximación por

$$n_p = \frac{dL}{dT} \approx \frac{dL_m}{dT} + 2e \left( \frac{dM}{dT} \right)_p \cos M_p \approx n (1 + 2e \cos M_p)$$

donde  $n$  es el movimiento medio y  $M_p$  es la anomalía media del Sol en el equinoccio de primavera.<sup>19</sup> Fórmulas similares se pueden encontrar para las otras tres situaciones. Estas velocidades angulares serán diferentes, por ser diferentes la anomalía media del Sol en cada uno de los cuatro puntos estacionales. El año de primavera se podrá expresar aproximadamente como

$$a_p = a_a - \frac{\alpha}{n_p} \tag{4.4}$$

siendo  $a_a$  el año anomalístico o tiempo que tarda el Sol de partir de 1 y volver al mismo punto, o sea en recorrer 360 grados respecto al perigeo,<sup>20</sup> y  $\alpha$  es el ángulo que recorre el perigeo en un año, es decir el ángulo comprendido entre 1 y 1'

19. Para deducir la fórmula anterior hay que tener presente que la variación con el tiempo de la longitud del perigeo es despreciable frente al movimiento medio, de tal forma que el movimiento anomalístico se puede identificar, aproximadamente, con el movimiento medio.

20. Hay que tener presente que la duración del año anomalístico no depende del punto elegido como inicio, ni cambia si en vez de usar la longitud media se le corrige con la ecuación del centro.



$$\alpha = \frac{d\omega_m}{dT} a_T$$

expresado el año trópico en siglos julianos. A partir de (4.4) se llega a

$$a_p \approx \left( a_a - \frac{\alpha}{n} \right) - \frac{2e\alpha}{n} \cos M_p = a_T - \frac{2e\alpha}{n} \cos M_p$$

y fórmulas equivalentes para los otros tres años estacionales. En la anterior expresión se comprueba que la máxima diferencia entre el año trópico y un año estacional ocurre cuando el referido punto estacional se encuentra en el perigeo o en el apogeo ( $M_p$  valdría 0 ó 180). La máxima diferencia que se podría alcanzar estaría en torno a

$$86400 \cdot \frac{2e\alpha}{n} \approx 50^s,$$

entonces la máxima diferencia entre los dos años estacionales extremos será aproximadamente el doble de la anterior cantidad.<sup>21</sup>

Podemos tratar el asunto de las duraciones de los años estacionales de la siguiente forma aproximada. Calculemos el ángulo que describe la longitud del Sol cuando partiendo del equinoccio de primavera transcurre un año trópico

$$\Delta L_p = L(T_p + a_T) - L(T_p) \approx \left( \frac{dL}{dT} \right)_p a_T$$

siendo  $T_p$  el momento en que el Sol se encuentra en promedio en el equinoccio de primavera. Usando la fórmula (3.4) y tomando hasta el segundo orden en el desarrollo en serie, hallamos

$$\Delta L_p \approx 2e\alpha \cos M_p + \frac{5}{2} e^2 \alpha \cos 2M_p + 2\beta \sin M_p + \frac{5}{2} e\beta \sin 2M_p$$

el incremento de la longitud media del Sol es nulo, ya que al cabo de un año trópico toma el mismo valor (por definición del año trópico). El parámetro  $\beta$  es lo que aumenta la excentricidad en un año

$$\beta = \frac{de}{dT} a_T$$

expresado  $a_T$  en siglos julianos.

Vamos a suponer que  $\alpha$  venga en grados, la misma unidad en que vendrá el incremento de la longitud. Como este ángulo es muy pequeño, no cometeremos error apreciable si suponemos que el Sol lo describe con una velocidad angular  $n$  que podemos

La razón hay que buscarla en que la ecuación del centro es una serie trigonométrica con  $M$  de argumento, pero en un año anomalístico,  $M$  aumenta en 360, dejando inalterable las funciones trigonométricas. Por tanto sólo interviene en el cálculo la longitud media del Sol.

21. Esta cantidad sería la que se obtendría si un equinoccio (o un solsticio) se encontrara en el perigeo o en el apogeo. Esta no es lo que ocurre actualmente, de aquí que las diferencias entre los años estacionales y el año trópico en las fechas actuales, no alcancen los 50 segundos. Nótese también que los parámetros  $e$ ,  $\alpha$  y  $n$  varían con el tiempo. Así para el año -4000 el valor máximo de esa diferencia es de 59 segundos y para el año 4000 descenderá a unos 48 segundos.

tomar constante y de valor

$$\frac{1}{n} \approx \frac{365.25 \cdot 86400}{360} = 87\ 660$$

en segundos por grado; por tanto el tiempo que tardaría en recorrer  $\Delta L_p$  es

$$\Delta \tau_p \approx 87\ 660 \Delta L_p$$

en segundos. Este tiempo será el que excede el año trópico al año de primavera.<sup>22</sup> La duración del año de primavera será aproximadamente

$$\begin{aligned} \alpha_p \approx & 365^{\text{d}}.242\ 189\ 67 - 0^{\text{d}}.000\ 006\ 1619T + \\ & + 1^{\text{d}}.014\ 583 \left( 2e\alpha \cos M_p + \frac{5}{2}e^2\alpha \cos 2M_p + 2\beta \sin M_p + \frac{5}{2}e\beta \sin 2M_p \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

y fórmulas semejantes para los otros tres puntos estacionales. Nótese que la suma de las duraciones de los cuatro años estacionales dados por la fórmula anterior, es cuatro veces el año trópico.<sup>23</sup> De la anterior fórmula observamos que hay dos razones para que los cuatro años estacionales sean diferentes entre sí y diferentes al año trópico. Una de ellas, y la más importante, es la rotación de la línea de las ápsides y la otra es la variación de la excentricidad. Nótese también que si la órbita fuese circular (excentricidad cero), los años estacionales serían iguales al año trópico.

La circunstancia de que el valor de la velocidad con que gira el perigeo respecto al equinoccio sea pequeña, es la responsable de que la media de los años estacionales sea aproximadamente igual al año trópico. Esta relación no se cumpliría si  $\alpha$  tuviera un valor apreciable. La amplitud de la oscilación de los años estacionales disminuye con el tiempo, la razón de este comportamiento hay que buscarla en la disminución de la excentricidad. En cuanto a la disminución del periodo de la oscilación, la razón estriba en el aumento con el tiempo de  $\alpha$ .

### Duración variable de las estaciones

Desde la antigüedad se sabe que son diferentes las duraciones de cada una de las cuatro estaciones. Lo que aquí nos interesa es conocer como varía la duración de cada una de las estaciones con el tiempo, un resultado que está relacionado con la variación de la duración de los años estacionales. En una primera aproximación podemos simplificar la ecuación (3.4)

$$L_m = L - 2e \sin(L - \omega_m) - \frac{5}{4}e^2 \sin[2(L - \omega_m)],$$

22. Esta fórmula nos sirve para comprobar la conclusión que hemos encontrado numéricamente, a saber, que el año trópico es la media de los cuatro años estacionales. Al hacer la evaluación numérica se encuentra

$$(\Delta \tau_p + \Delta \tau_v + \Delta \tau_o + \Delta \tau_i) / 4 \approx 0^{\text{s}}.8,$$

un resultado aceptable en vista de las aproximaciones que estamos haciendo.

23. Para la deducción hay que indicar que las diferencias entre la anomalías medias de puntos estacionales consecutivos se diferencian en 90 grados, de tal forma que la suma de las funciones trigonométricas correspondientes a cada estación que aparecen en (5.4) será cero.

como  $L$  es cercano a  $L_m$  no cometemos un error considerable si sustituimos, en los argumentos de los senos,  $L$  por  $L_m$

$$L_m = L - 2e \sin(L - \omega_m) - \frac{5}{4} e^2 \sin[2(L - \omega_m)], \quad (6.4)$$

la longitud  $L$  es nula en el equinoccio de primavera, <sup>24</sup> por tanto la longitud media cuando el Sol está en el equinoccio de primavera es

$$L_m^p = 2e \sin \omega_m + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\omega_m \quad (7.4)$$

y las fórmulas <sup>25</sup> para los otros puntos estacionales serán

$$L_m^v = \frac{\pi}{2} - 2e \cos \omega_m - \frac{5}{4} e^2 \sin 2\omega_m$$

$$L_m^o = \pi - 2e \sin \omega_m + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\omega_m$$

$$L_m^i = \frac{3\pi}{4} + 2e \cos \omega - \frac{5}{4} e^2 \sin \omega_m .$$

Despreciando la lenta variación secular del movimiento medio del Sol, podemos suponer en primera aproximación que el movimiento del Sol es uniforme, entonces la longitud del Sol aumentará la cantidad

$$L_m^2 - L_m^1 = n(t_2 - t_1)$$

donde  $n$  es el movimiento del Sol respecto al equinoccio. Podemos aplicar la anterior expresión para determinar el intervalo de tiempo entre el equinoccio de primavera y el solsticio de verano; es decir, la duración en promedio de la primavera

$$I_p = \frac{1}{n} (L_m^v - L_m^p) = \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{2} - 2e (\sin \omega_m + \cos \omega_m) - \frac{5}{2} e^2 \sin 2\omega_m \right] \quad (8.4)$$

y fórmulas parecidas para las otras tres estaciones

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{2} - 2e (\sin \omega_m - \cos \omega_m) + \frac{5}{2} e^2 \sin 2\omega_m \right] \\ I_o &= \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{2} + 2e (\sin \omega_m + \cos \omega_m) - \frac{5}{2} e^2 \sin 2\omega_m \right] \\ I_i &= \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{2} + 2e (\sin \omega_m - \cos \omega_m) + \frac{5}{2} e^2 \sin 2\omega_m \right]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

24. Smart W. M., *Textbook on spherical astronomy*, Cambridge University Press, 1990, pp. 150-154.

25. En un cálculo numérico se puede proceder a una iteración. La longitud media que hemos primeramente encontrado por (7.4) la podemos volver a sustituir en la ecuación (6.4) y obtener un valor más preciso de la longitud media, teniendo presente que la primera  $L$  en (6.4) seguirá conservando el valor 0. Esta operación la podemos repetir tantas veces como fuese necesario.

Nótese que las duraciones de las estaciones cambian con el tiempo, principalmente por la variación de la longitud del perihelio y en menor medida por la variación de la excentricidad. Para el cálculo numérico hemos tomado para la inversa del movimiento medio del Sol

$$\frac{1}{n} = \frac{365.242\ 189\ 67 - 6.1619 \cdot 10^{-6} T}{2\pi} = 58.130\ 0999 - 9.806\ 97 \cdot 10^{-7} T \text{ día/rad.}$$

Con nuestra teoría simplificada hemos preparado la tabla 2.4 que da la duración en días de las estaciones en diversos años, donde se espera un error de algunas centésimas de día, dada las simplificaciones efectuadas.<sup>26</sup>

Años	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
-4000	93.55	89.18	89.05	93.46
-3000	94.07	89.92	88.61	92.65
-2000	94.32	90.76	88.40	91.77
-1000	94.29	91.63	88.43	90.89
0	94.00	92.45	88.70	90.09
1000	93.47	93.15	89.18	89.44
2000	92.77	93.65	89.84	88.99
3000	91.97	93.92	90.60	88.75
4000	91.17	93.93	91.40	88.74
5000	90.43	93.70	92.16	88.96
6000	89.82	93.25	92.80	89.37

Tabla 2.4.- Duración promedio en días de las estaciones en varias épocas.

De las fórmulas (8.4) y (9.4) se obtiene

$$I_p + I_v + I_o + I_i = \frac{2\pi}{n} = a_T$$

relación que se cumple con muy buena aproximación;<sup>27</sup> también tenemos aproximadamente

$$I_p + I_o \approx I_v + I_i$$

que se cumple con un error máximo de unas cuatro horas y que en las fechas actuales está en torno a la hora y media.

26. Los datos numéricos los hemos obtenido haciendo uso de la iteración descrita en el pie de página 25. Si hubiésemos utilizado las fórmulas simplificadas, habríamos obtenido resultados prácticamente iguales.

27. Este resultado no se ve claramente con los datos de la tabla, por estar redondeados a sólo dos cifras decimales. Si se toman todas las cifras decimales se encuentra que entre la suma de las cuatro estaciones y el año trópico existe una diferencia máxima de dos segundos. Obtenemos, por tanto, otra posible definición del año trópico, que es muy aproximadamente igual a la suma de la duración promedio de las cuatro estaciones.

Nos interesa por último saber en qué momento se alcanzan las máximas y mínimas duraciones de las estaciones. Por ejemplo, para hallar los máximos y mínimos de la primavera hacemos

$$\frac{dl_p}{d\omega_m} = \frac{1}{n} [-2e(\cos \omega_m - \sin \omega_m) - 5e^2 \cos 2\omega_m] = 0,$$

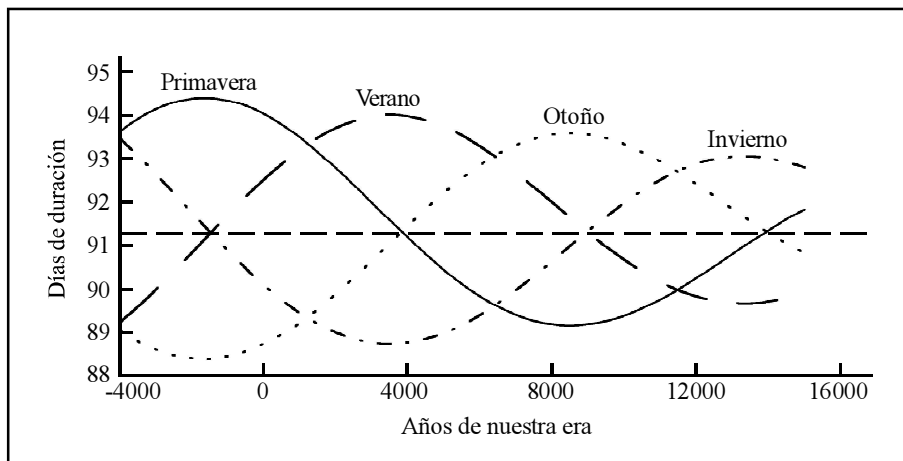
y fórmulas parecidas para las otras estaciones, todas ellas aproximadas. El cálculo numérico directo da los resultados de la tabla 3.4 para el periodo comprendido entre los años -4000 y 14000

	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
Año del máximo	-1591	3549	8523	13311
Duración del máximo	94 <sup>d</sup> .34	93 <sup>d</sup> .96	93 <sup>d</sup> .54	93 <sup>d</sup> .01
Año del mínimo	8523	13290	-1637	3526
Duración del mínimo	89 <sup>d</sup> .14	89 <sup>d</sup> .65	88 <sup>d</sup> .37	88 <sup>d</sup> .72

Tabla 3.4.- Duración extrema de las estaciones.

En la gráfica 2.4 se ve más claramente cómo varían las estaciones. La línea horizontal es la duración de la estación promedio, que es igual a la cuarta parte del año trópico, que a la escala de la gráfica no se percibe su variación con el tiempo. Nótese que la primavera, en cuanto a su duración, se contrapone al otoño, mientras que el verano es opuesto al invierno. Véase por último que la suma de la duración de la primavera y el otoño es prácticamente igual a la suma del invierno y el verano.

Digamos por último que la duración de las estaciones depende del punto donde se encuentre su comienzo en relación con el perigeo. Por ejemplo, cuando el equinoccio de primavera se encuentra a 45 grados del perigeo (es decir, la longitud del perigeo es 45 grados), la duración del año de primavera es mínima, ya que el Sol se mueve en la zona del perigeo con mayor velocidad. Al contrario, cuando el Sol tiene que describir los 90



Gráfica 2.4.- Variación de la duración de las estaciones.

grados correspondientes a la estación de primavera en torno al apogeo (que corresponde a una longitud del perigeo de 225 grados), el año de primavera tomará el máximo valor posible, ya que por esa zona el movimiento solar es más lento. El mismo razonamiento es extensible a los demás años.

### Conversión de TT a UT

Como hemos indicado, la escala en que se miden los distintos años que hemos manejado es la del tiempo terrestre. Sin embargo, en los calendarios la unidad básica de tiempo es el día solar medio, compuesto de 24 horas de tiempo universal. En realidad la escala civil del tiempo es el UTC, pero como esta escala sólo se aparta 0.9 segundos como máximo del tiempo universal, podemos considerar, sin error apreciable, que el calendario utiliza como unidad básica el UT.

El cambio previsto en el tiempo civil (capítulo 3, página 62) puede afectar a este razonamiento. Puede ocurrir que el segundo intercalar sea sustituido por otro intervalo de tiempo más grande, ya sea un minuto o una hora. Pero en cualquier caso, llegará el momento en que será necesario hacer una intercalación, para conseguir que el tiempo civil vaya acompasado con el movimiento medio del Sol. De tal forma que, obviando el futuro sistema de intercalación, vamos a suponer que la escala temporal de los calendarios es el UT.

Vamos a suponer que la diferencia entre el tiempo terrestre y el tiempo universal cumple la relación empírica de Stephenson (12.2). Si representamos con  $d$  el día de 24 horas de UT y con  $D$  un intervalo de 24 horas de TT, tendremos por definición del alargamiento del día

$$d = D + A_D$$

donde  $A_D$  es el tiempo que un día solar medio excede a 24 horas de TT. Expresado en días por día,  $A_D$  toma el valor

$$A_D = \frac{1}{86\,400} \frac{1}{36\,525} \frac{d(\Delta T)}{dT} = u + wT,$$

en nuestro caso los coeficientes  $u$  y  $w$  valen

$$u = 3.5364 \cdot 10^{-8}; \quad w = 1.9647 \cdot 10^{-8}.$$

La duración del año trópico viene dado en la unidad  $D$  por

$$a_T = a + bT + cT^2$$

como la unidad  $D$  está relacionado con  $d$  mediante

$$D = d - u - wT$$

entonces el año trópico en la unidad  $d$  o lo que es lo mismo en días solares medios será

$$a_T = (a - au) + (b - bu - aw)T + (c - cu - bw)T^2$$

donde hemos despreciado el término de tercer orden por ser extremadamente pequeño. Para el año trópico que se desprende de la teoría VSOP se encuentra que su duración en tiempo universal es

$$a_T = 365^d .242\,176\,754 - 0^d .000\,013338T - 6^d .4502 \cdot 10^{-10} T^2 \quad (10.4)$$

lo que significa una disminución de 1.15 segundos cada siglo, en vez de los 0.53 segun-

dos de reducción que experimenta el año trópico cuando se expresa en TT. Al utilizar esta expresión debe tenerse presente que es aproximada, por serlo la fórmula de Stephenson. Haciendo un cálculo similar para la expresión que nos da el año del equinoccio de primavera se obtiene

$$a_p = 365^d \cdot 242\,3611 + 3^d \cdot 19 \cdot 10^{-6} T - 1^d \cdot 344 \cdot 10^{-7} T^2$$

válida para el periodo comprendido entre los años -3000 y 10000.

### Movilidad de los puntos estacionales

Un calendario solar sigue, aunque sea aproximadamente, el curso del Sol. Esto se traduce diciendo que en un calendario solar las estaciones acontecen en torno a las mismas fechas del calendario, siendo inevitable una cierta movilidad de un año a otro.

Debemos de distinguir dos tipos de movilidad de los puntos estacionales en relación al calendario. Una de ellas es la producida por la regla de intercalación de los bisiestos. Como forzosamente éstos deben colocarse a saltos (algunos años sí y otros no), surge una dispersión de las fechas en que comienzan las estaciones (es decir, no caen todos los años en los mismos días). La otra movilidad es causada porque la duración del año del calendario no puede coincidir simultáneamente con los cuatro años estacionales. A la primera le llamaremos movilidad calendarista y a la segunda movilidad media de las estaciones.

Para proceder al estudio de la movilidad media, vamos a definir una magnitud que nos dé la diferencia acumulada entre dos años  $a_x$  y  $a_y$  desde el momento  $T_0$  al  $T$

$$\Delta_y^x = \sum_{T_0}^T (a_x - a_y)$$

esta magnitud tiene las propiedades

$$\Delta_y^x = \Delta_x^y$$

$$\Delta_y^x = \Delta_z^x + \Delta_z^y .$$

Si sumamos las diferencias acumuladas entre cada uno de los cuatro años estacionales y el año trópico, obtenemos

$$\Delta_p^T + \Delta_v^T + \Delta_i^T + \Delta_o^T = 0$$

donde hemos hecho uso de la propiedad

$$a_p + a_v + a_o + a_i \approx 4a_T .$$

Consideremos un calendario que tenga en promedio un año de duración  $a_c$ . Se llama error de ese calendario con respecto al año trópico a la diferencia acumulada entre esos dos años

$$E_c - \Delta_T^c - \sum_{T_0}^T (a_c - a_T),$$

para efectuar el anterior sumatorio es necesario que los dos años estén expresados en las mismas unidades, ya sean días solares medios o días de 24 horas de TT.<sup>28</sup> Fácilmente se comprueba que

---

28. El resultado es prácticamente el mismo ya se utilice una unidad u otra. Sólo se cometería un

$$E_c = \frac{1}{4} (\Delta_p^c + \Delta_v^c + \Delta_o^c + \Delta_i^c) \quad (11.4)$$

donde de nuevo ha sido necesario suponer que el año trópico es igual a la media aritmética de los cuatro años estacionales. Aplicando la fórmula anterior a un calendario que siga fielmente el año de primavera<sup>29</sup> tendremos

$$E_p = \Delta_i^p = \frac{1}{4} (\Delta_v^p + \Delta_o^p + \Delta_i^p) \quad (12.4)$$

$E_p$  también se entiende como la dispersión que sufre el equinoccio de primavera en un calendario que se ajustase al año trópico, o sea los días que en promedio se ha desplazado el equinoccio de primavera en dicho calendario respecto a donde se encontraba en una época inicial de referencia. La cantidad  $\Delta_v^p$  representa el desplazamiento promedio que el solsticio de verano ha tenido respecto al equinoccio de primavera desde la época inicial, o bien

$$\Delta_v^p = I_{p0} - I_p \quad (13.4)$$

siendo  $I_p$  la duración de la primavera en el momento considerado y  $I_{p0}$  la duración de la misma estación en la época inicial que se toma arbitrariamente de referencia. Lo mismo se puede decir para las acumulaciones de las restantes puntos estacionales

$$\begin{aligned} \Delta_o^p &= I_{p0} + I_{v0} - I_p - I_v \\ \Delta_i^p &= I_{p0} + I_{v0} + I_{o0} - I_p - I_v - I_o \end{aligned} \quad (14.4)$$

que representan lo que se desplazan el equinoccio de otoño y el solsticio de invierno respecto al equinoccio de primavera desde la época inicial. Haciendo uso de la tabla 2.4, podemos obtener, como ejemplo, la gráfica 3.4, que nos da la dispersión que registra el equinoccio de otoño respecto al equinoccio de primavera. O dicho de otra manera, la movilidad que experimentaría el equinoccio de otoño en un calendario que tuviera un año de duración promedio idéntica al año de primavera. Se ha tomado como época de referencia el año 2000, lo que quiere decir que los días que aparecen en la ordenada son el desplazamiento que ha tenido el equinoccio de otoño respecto al día en que ocurrió en promedio en el año 2000.

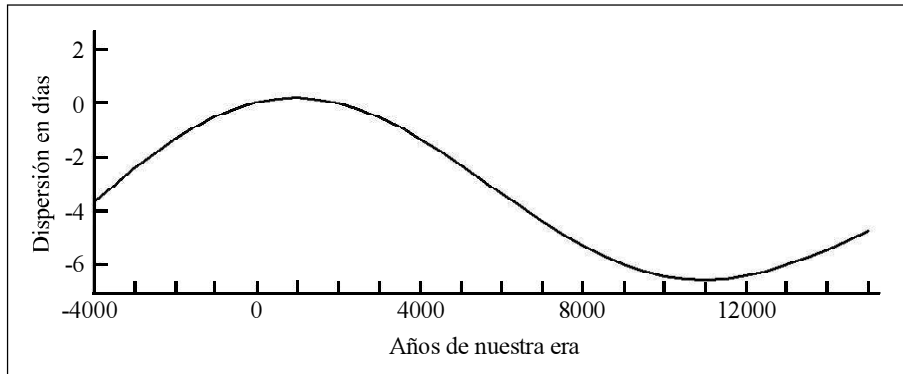
Se ve que en el año 1000 existe un máximo y en el año 11000 acontece un mínimo. La separación entre ambos puntos es de algo más de seis días y medio. La periodicidad de la oscilación que se aprecia en la figura es de unos 20,000 años, el tiempo que tarda el perigeo en dar una vuelta en torno a la órbita. Las otras estaciones están sometidas también a una movilidad, salvo el equinoccio de primavera, que permanecerá siempre en la misma fecha en promedio, dado que hemos tomado un año del calendario para que se cumpla esa condición.

---

error al evaluar cada uno de los años en unidades diferentes.

29. Como el año de primavera (al igual que los restantes años estacionales y el año trópico) varía con el tiempo, también tendría que variar la regla de intercalación de los bisiestos, lo cual complicaría dicho calendario. No obstante, en los razonamientos que siguen obviaremos esta dificultad, ya que no afecta en nada a las conclusiones finales. En el calendario que estamos considerando, la primavera siempre vendría en la misma fecha, si nos abstraemos de la movilidad ocasionada por la intercalación de los bisiestos.





Gráfica 3.4.- Días de desplazamiento del equinoccio de otoño respecto al día en que ocurrió el otoño en el año 2000.

Aplicando las ecuaciones (8.4), (9.4), (13.4) y (14.4) en la (12.4) se obtiene una expresión aproximada para la movilidad del equinoccio de primavera respecto al año trópico

$$\Delta_T^p = \frac{2}{n}(e \sin \omega_m - e_0 \sin \omega_{m0}) + \frac{5}{4n}(e^2 \sin 2\omega_m - e_0^2 \sin 2\omega_{m0}) \quad (15.4)$$

La movilidad del solsticio de verano respecto al año trópico es

$$\Delta_T^v = -\frac{2}{n}(e \cos \omega_m - e_0 \cos \omega_{m0}) - \frac{5}{4n}(e^2 \sin 2\omega_m - e_0^2 \sin 2\omega_{m0})$$

y para las otras dos estaciones

$$\Delta_T^o = -\frac{2}{n}(e \sin \omega_m - e_0 \sin \omega_{m0}) + \frac{5}{4n}(e^2 \sin 2\omega_m - e_0^2 \sin 2\omega_{m0})$$

$$\Delta_T^i = \frac{2}{n}(e \cos \omega_m - e_0 \cos \omega_{m0}) - \frac{5}{4n}(e^2 \sin 2\omega_m - e_0^2 \sin 2\omega_{m0}).$$

De las fórmulas anteriores se desprende que en un calendario que siguiera el año trópico las cuatro estaciones estarían sometidas a una movilidad. Cada una de las cuatro estaciones se desplazaría un máximo de dos días ( $\sim 2e/n$ ) respecto a la posición ocupada en el año de referencia, a veces anticipándose a esa fecha y en otras ocasiones retrasándose. Por lo tanto, la dispersión media de las estaciones en un calendario cuyo año promedio fuese igual al año trópico, sería de 4 días como máximo; sensiblemente inferior a los siete días que como máximo puede oscilar una estación en un calendario que siguiera algún año estacional.<sup>30</sup>

30. Por ejemplo, la dispersión de la gráfica del equinoccio de otoño respecto al equinoccio de primavera tendría un valor dado por

$$\Delta_o^p = \frac{4}{n}(e \sin \omega_m - e_0 \sin \omega_{m0})$$

que significa una dispersión máxima de algo más de siete días. Sin embargo, no llegaría a seis días

Los momentos en que la dispersión de las estaciones es máxima o mínima es independiente de la época  $T_0$  de referencia, aunque no ocurre lo mismo con el valor de esa dispersión. Por ejemplo, para hallar los momentos en que es máxima y mínima la dispersión del equinoccio de primavera en un calendario ajustado al año trópico, derivamos la expresión (15.4) y la igualamos a cero, encontrándose que los máximos se producen cuando la longitud media del perigeo es aproximadamente 90 grados y el mínimo cuando es 270. Para el equinoccio de otoño es a la inversa. Mientras que para el solsticio de verano el máximo se producirá cuando la longitud del perigeo sea 180 grados y el mínimo cuando sea 0 grados. Para el solsticio de invierno tendremos los mismo valores pero invertidos.

### Error acumulado de un calendario

La dispersión del equinoccio de primavera en un calendario que tenga un año de duración media  $a_c$  vendrá dada por

$$\Delta_p^c = \Delta_T^c + \Delta_p^T = E_c - \frac{2}{n}(e \sin \omega_m - e_0 \sin \omega_{m0}) - \frac{5}{4n}(e^2 \sin 2\omega_m - e_0^2 \sin 2\omega_{m0}) \quad (16.4)$$

y fórmulas parecidas para los restantes puntos estacionales. Démonos cuenta que es diferente el desplazamiento del equinoccio de primavera por el calendario  $\Delta_p^c$  que el error acumulado con respecto al año trópico  $E_c$ . En la bibliografía es muy corriente leer la afirmación de que un error acumulado de un día, significa que el equinoccio de primavera se ha desplazado un día desde la fecha de referencia. Como se comprueba con la fórmula anterior, esto no es cierto a consecuencia de los dos últimos sumandos, que pueden tener una duración de varios días.

Se puede calcular aproximadamente  $\Delta_p^c$  mediante la siguiente integración

$$\begin{aligned} \Delta_p^c &= \sum_{T_0}^T (a_c - a_p) \approx 100 \left[ \int_{T_0}^T a_c dT - \int_{T_0}^T a_p dT \right] = 100 \left[ (T - T_0) a_c - \int_{T_0}^T a_p dT \right] = \\ &= 100 \left[ (a_c - 365.24217675)(T - T_0) - \frac{1}{2} 3.19 \cdot 10^{-6} (T - T_0)^2 - \frac{1}{3} 1.344 \cdot 10^{-7} (T - T_0)^3 \right] \end{aligned}$$

o bien mediante

$$\begin{aligned} \Delta_p^c &= \Delta_T^c + \Delta_p^T = E_c + \sum_{T_0}^T (a_T - a_p) \approx E_c + 100 \int_{T_0}^T (a_T - a_p) dT = \\ &= E_c - 1.844 \cdot 10^{-2} T - 8.245 \cdot 10^{-4} T^2 + 4.459 \cdot 10^{-6} T^3 \end{aligned}$$

ambas fórmulas son válidas para el periodo comprendido entre los años -3000 y 10000. En rigor no podemos convertir las sumas en integrales, pero los errores encontrados para algunos miles de años son del orden de algún minuto, cantidad normalmente despreciable.

Para determinar el error acumulado  $E_c$  del calendario, es necesario previamente

---

para la dispersión de los solsticios de verano y de invierno.

expresar  $a_c$  en días de TT o bien poner  $a_T$  en la escala UT. Hagamos esto último y expresemos el año trópico en función del año  $Y$  contado a partir el año 2000

$$a_T = a - bY$$

donde hemos despreciado el término de segundo orden. Según (10.4) los coeficientes  $a$  y  $b$  son

$$a = 365.242\ 176\ 75; \quad b = 1.3338 \cdot 10^{-7}$$

que tienen las unidades de días solares medios. El error acumulado desde el año  $Y_0$  hasta el año  $Y$  es por definición

$$E_c = \sum_{Y_0}^Y [a_c - a_T(Y)].$$

Debemos de tener presente, que si  $A$  es el número de años del ciclo del calendario en estudio, la diferencia entre  $Y$  e  $Y_0$  debe ser un número natural  $N$  de ciclos <sup>31</sup>

$$Y = Y_0 + NA$$

entonces

$$\begin{aligned} E_c &= (Y - Y_0)(a_c - a) + \sum_{Y_0}^Y bY = AN(a_c - a) + \frac{1}{2}b(Y + Y_0)(1 + Y - Y_0) = \\ &= AN(a_c - a) + \frac{1}{2}b(2Y_0 + AN)(1 + AN) \end{aligned}$$

que podemos expresarlo en función del número  $N$  de ciclos transcurridos

$$E_c(Y_0, Y) = pN + qN^2 + r$$

los coeficientes  $p$ ,  $q$  y  $r$  se calculan mediante

$$\begin{aligned} p &= A(a_c - a) + bAY_0 + \frac{1}{2}bA \\ q &= \frac{1}{2}bA^2 \\ r &= bY_0. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Por ejemplo, el calendario gregoriano tiene un año de duración 365.2425 días de tiempo solar medio; el número de años en el ciclo es 400, entonces en función de  $N$  el error acumulado desde, por ejemplo, el comienzo del primer ciclo en el año 1600 hasta el año  $Y$ , será

---

31. Seguimos el razonamiento dado en Warzée J., “Règle grégorienne ou cycle de 500 ans?”, *Communications de l’Observatoire Royal de Belgique* **218** (1963) 1-11. Véase también Warzée J., “Projet de réforme du calendrier basé sur un cycle de 500 ans”, *Communications de l’Observatoire Royal de Belgique* **206** (1962) 1-23. Un razonamiento también correcto para hallar el error acumulado por un calendario respecto al año trópico se encuentra en Borkowski K. M., “The tropical year and solar calendar”, *The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **85** (1991) 121-130, que coincide con nuestros resultados, aunque esté planteado de forma aparentemente distinta.

$N$	Intervalo	$E_c$ (días)
1	1600-2000	0.1186
2	2000-2400	0.2586
3	2400-2800	0.4200
4	2800-3200	0.6027
5	3200-3600	0.8067
6	3600-4000	1.0321
7	4000-4400	1.2788
8	4400-4800	1.5469
9	4800-5200	1.8363
10	5200-5600	2.1470

Tabla 3.4.- Error acumulado en el calendario gregoriano desde el año 1600.

$$E_c(-400, Y) = 0.108\ 005\ 876N + 0.010\ 6704 N^2 - 5.335 \cdot 10^{-5}$$

a partir de esta fórmula se deduce la tabla 3.4

Comprobamos que al concluir el sexto ciclo, en el año 4000, la acumulación entre el año gregoriano y el trópico habrá alcanzado un día. El segundo día acumulado se alcanzará al finalizar el décimo ciclo, en el año 5600. Que el error acumulado  $E_c$  alcance un día significa que la media de las dispersiones de las cuatro estaciones respecto a las posiciones que en promedio ocupaban en el año 1600 (año que hemos tomado arbitrariamente de referencia), toma el valor 1. Así para el año 4000 los desplazamientos que registrarán en promedio los cuatro puntos estacionales, tal como se obtiene de la ecuación (16.4) y de las correspondientes a las otras estaciones, son los de la tabla 4.4.

Primavera	Verano	Otoño	Invierno
0 <sup>d</sup> .345	2 <sup>d</sup> .171	1 <sup>d</sup> .751	-0 <sup>d</sup> .135

Tabla 4.4.- Dispersión de las estaciones en el año 4000 con respecto a las posiciones ocupadas en el año 1600.

Por el año 1600 la primavera comenzaba en promedio a las 17<sup>h</sup> 17<sup>m</sup> de UT del día 20 de marzo. En el año 4000 la primavera comenzará en promedio el mismo día pero a las 9<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> también de tiempo universal, una diferencia de 0.345 días.<sup>32</sup> Volvemos a repetir que los cálculos son aproximados, como lo es la teoría que estamos desarrollando, esperándose un error de algunos minutos. Nótese que un valor positivo de la dispersión indica que el punto estacional se anticipará con relación a la fecha en que se producía en el año

---

32. Hay que tener presente que las teorías astronómicas nos dan las fechas en que comienzan las estaciones en la escala de tiempo terrestre, pero para ver su movilidad en el interior de un calendario es necesario convertirlo en tiempo universal. Esto se consigue restándole, al valor en TT, el correspondiente  $\Delta T$  de la época. Nótese que al cabo de algunos miles de años  $\Delta T$  puede tomar un valor de varias horas.

de referencia.

Los anteriores resultados se refieren a la fecha expresada en tiempo universal. Si quisiéramos dar la fecha en tiempo terrestre, tendríamos que considerar la diferencia acumulada entre las dos escalas de tiempo desde el año 1600 al 4000, para lo que tenemos que aplicar

$$L_{AC} = \Delta T(T_2) - \Delta T(T_1) = -136.4T + 31T^2$$

donde hemos utilizado la fórmula empírica de Stephenson y ahora  $T$  son los siglos transcurridos desde el año 1600.<sup>33</sup> En nuestro ejemplo se encuentra que  $L_{AC}$  alcanza en el año 4000 el valor de 0.169 días. Por tanto, si la escala de tiempo empleada fuese la de tiempo terrestre, la dispersión de las estaciones se calcularía restándole 0.169 días a los valores de la tabla anterior.

Se da la circunstancia que durante los próximos miles de años, la duración del año de primavera será muy próxima a la del año gregoriano. De resultados de ello, el desplazamiento que registrará el equinoccio de primavera en el calendario gregoriano será muy pequeño.<sup>34</sup> En la tabla 6.4 hemos calculado el desplazamiento del equinoccio de primavera en el calendario gregoriano,<sup>35</sup> tomando como partida el año 1600. La última columna de la tabla 6.4 representa la fecha del mes de marzo en que tiene lugar el equinoccio de primavera según la escala UT. Los cálculos han sido hechos con nuestra teoría simplificada y en esta ocasión hemos tenido en cuenta la aberración.<sup>36</sup>

Ciclos	Año inicio del ciclo	Desplazamiento	Fecha equinoccio (UT)
0	1600	0	20 <sup>d</sup> .73
1	2000	1 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup>	20 <sup>d</sup> .67
3	2800	3 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	20 <sup>d</sup> .57
5	3600	6 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup>	20 <sup>d</sup> .47
7	4400	9 <sup>h</sup> 07 <sup>m</sup>	20 <sup>d</sup> .35
9	5200	12 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	20 <sup>d</sup> .20
11	6000	18 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup>	19 <sup>d</sup> .96
13	6800	1 <sup>d</sup> 2 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup>	19 <sup>d</sup> .61
15	7600	1 <sup>d</sup> 8 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup>	19 <sup>d</sup> .36

Tabla 6.4.- Desplazamiento del equinoccio de primavera en función del número de ciclos.

33. Hay que ser cauteloso en el manejo de  $\Delta T$ , véase al respecto Meeus J., "The effect of Delta T on astronomical calculations", *Journal of the British Astronomical Association* **108** (1998) 154-156.

34. Esto es lo que se pretendió con la reforma gregoriana del calendario. Como la Pascua de Resurrección está ligada a la fecha del equinoccio de primavera, estando ésta fijada al calendario, lo mismo ocurrirá con la Pascua, evitándose el desplazamiento que había sufrido esta fiesta en el antiguo calendario.

35. Para obtener la tabla se ha hecho uso de la teoría VSOP pero sin considerar los términos periódicos, posteriormente se le resta al resultado el valor de  $\Delta T$  de la fecha.

36. Kluepfel C., "How accurate is the gregorian calendar?", *Sky and Telescope* **64** (1982) 417-418

Al finalizar el decimotercer ciclo en el año 6800, el equinoccio de primavera se habrá desplazado un día con respecto al momento en que se produjo en el año 1600; en ese año el error acumulado entre el año gregoriano y el trópico habrá superado los tres días.

Hay que dilucidar cuál es el año astronómico al que debe ajustarse el calendario. Ya hemos visto que si se elige uno de los cuatro años estacionales, quedará fijo uno de los puntos estaciones respecto al calendario, pero los restantes se moverán por el calendario, alcanzando una dispersión máxima de siete días. En cambio, si se toma como referencia el año trópico, las cuatro estaciones tendrán comienzos que variarán con el tiempo, pero la máxima dispersión sólo será de cuatro días.

El año trópico es el único que tiene la propiedad de que el error acumulado toma siempre el valor cero, lo que significa que si bien los puntos estacionales se desplazan, la media geométrica de estos desplazamientos es nula. Entendemos que esta es la propiedad más satisfactoria para un calendario. Pero no hay que olvidar que este asunto es más bien convencional, de tal forma que se puede elegir el año de primavera como lo hace el calendario astronómico iraní, el año de invierno que es la referencia astronómica del calendario lunisolar chino o el equinoccio de otoño para el calendario republicano francés.

La fórmula (17.4) nos permite idear reglas de intercalación, es decir establecer el número  $B$  de días bisiestos que deben existir en un ciclo de  $A$  años. Vamos a exigir que al cabo de  $N$  ciclos, el error acumulado sea nulo, que es la situación que consideramos como la más ventajosa. Entonces teniendo presente que un ciclo de  $A$  años donde  $B$  sean bisiestos tiene un año promedio dado por

$$a_c = \frac{365A + B}{A} \Rightarrow B = Aa_c - 365A \quad (18.4)$$

encontramos, haciendo uso de (17.4), el número de bisiestos que debe tener el ciclo si queremos que al finalizar  $N$  ciclos el error acumulado sea lo más cercano a cero

$$B = \text{cint} \left\{ \left[ a - 365 - \frac{1}{2}b(1 + NA) - bY_0 \left( 1 + \frac{1}{NA} \right) \right] A \right\}$$

donde cint es la función redondeo. La anterior fórmula se obtiene igualando a cero el error acumulado  $E_c$ , despejando  $a_c$  y sustituyéndolo en (18.4).<sup>37</sup> Por ejemplo, para 20 ciclos de 400 años, se encuentra que el número de embolismos por ciclo debe ser 97, el mismo número que establece el calendario gregoriano.

### Intercalación de los bisiestos

En hemerología tenemos que distinguir tres tipos de calendarios. Están los computacionales, que son aquellos que obedecen a reglas preestablecidas más o menos complejas; tal es el caso del calendario gregoriano o el calendario judío. La siguiente clase de calendarios lo representan los astronómicos, que necesitan de la teoría

y Dogget L. E., Kaplan G. H., "Calendar Accuracy", *Sky and Telescope* 65 (1983) 205-206.

37. Peck P. A., "The accumulation of calendar year/tropical-year differences: a comparison of accumulation-reduction algorithms", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 84 (1990)14-27, en este trabajo no se tiene en cuenta el frenado secular de la Tierra y por tanto, compara el año civil medido en UT con el año astronómico medido en TT.

astronómica para su construcción; como ocurre con el calendario chino o el desaparecido calendario republicano francés. Y por último, están los calendarios observacionales, que son los que necesitan de la observación de algún fenómeno astronómico para su regulación, un ejemplo de este tipo es el calendario musulmán.

En este apartado sólo nos vamos a referir a los calendarios computacionales solares. Están compuestos de dos tipos de años: los normales y los abundantes. A esta clasificación se le llama género. Los años abundantes se distinguen de los normales en que se les agrega el embolismo, o sea, uno o varios días que consiguen que en promedio el año del calendario se acerque lo más posible al año astronómico.

Sea  $a_a$  la duración del año de referencia o año astronómico al que debe de ajustarse lo mejor posible el calendario solar. Con  $A$  vamos a representar los años que contiene un ciclo;  $B$  es el número de embolismos que se colocan en un ciclo;  $D$  el número de días que tienen los embolismos, por ejemplo, uno para el calendario juliano y siete días para los calendarios de intercalación de semanas.<sup>38</sup> Y  $a_n$  son días que tienen los años normales; por ejemplo, 365 en el calendario gregoriano. Con estas definiciones, la duración promedio del año del calendario obedecerá a la fórmula

$$a_c = \frac{Aa_n + DB}{A}.$$

Llamamos desviación del calendario respecto al año de referencia a la magnitud

$$\Delta = |a_a - a_c|,$$

resulta más interesante el parámetro  $J$

$$J = \frac{1}{\Delta}$$

que nos da los años que tienen que transcurrir para que la desviación del calendario alcance un día respecto al año de referencia, siempre y cuando  $a_a$  permanezca constante.  $J$  nos da una indicación de lo que se ajusta un calendario a la astronomía.

Para saber cuántos embolismos hay que colocar en un ciclo de  $A$  años, se calculan cuántos periodos de  $D$  días hay en el exceso acumulado entre el año de referencia y el año normal,<sup>39</sup> como el resultado será un número decimal se toma el valor redondeado

$$B = \text{cint} \left[ \frac{(a_a - a_n)A}{D} \right]$$

38. Estos calendarios tienen años normales de 364 días y ocasionalmente se intercala una semana de más, haciendo que los años abundantes tengan 371 días. Tanto en los años normales como en los abundantes existe un número entero de semanas, lo que les hace perpetuos, de aquí el interés que en su momento despertaron este tipo de calendarios; véase por ejemplo Kohler M. H., *The equitable calendar rational solution*, Sisters of St. Dominic, 1987; García Serrano I., *La Reforma del Calendario* 1962 y Suran J., "The calendar of the future. A world calendar with leap week", *Vistas in Astronomy* 41 (1998) 493-506. Las técnicas expuestas en el texto son completamente generales, por ejemplo se podrían aplicar para diseñar un calendario válido en el planeta Marte, Aitken R. G., "Calendar reform from an astronomer's viewpoint", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 46 (1952) 89-92.

39. La duración del año de referencia tiene que ser mayor que la duración de los años normales.

Al aplicar la anterior fórmula a un ciclo de 400 años (los que tiene el calendario gregoriano) se obtiene que debe contener 97 bisiestos, que son los que deben venir cada cuatro años menos los tres bisiestos que la regla gregoriana quita en 400 años. Si se toma un ciclo de 900 años, como el que tiene el calendario juliano revisado, se obtienen 218 bisiestos; o sea, los bisiestos normales dados por la regla juliana menos siete (los que se quitan por la regla de Milankovitch, ver capítulo 6).

Otro sistema que se puede usar para averiguar el número de intercalaciones que hay que hacer, consiste en descomponer la parte decimal de la duración del año trópico en fracciones continuas

$$0.242\ 176\ 754 = \{4, 7, 1, 2, 1, 4, 1, 15, \dots\}$$

de aquí se obtienen las siguientes aproximaciones fraccionarias

$$\frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{23}{95}; \frac{100}{413}; \frac{162}{671}; \frac{2\ 817}{11\ 632}; \dots$$

La primera fracción representa un ciclo de cuatro años donde uno de ellos es bisiesto. La segunda fracción corresponde a un calendario que tiene un ciclo de 29 años de los cuales 7 son bisiestos, y así sucesivamente.

Debemos distinguir entre calendarios computacionales regulares y aquellos que no lo son. Entendemos que los primeros son los que intercalan lo más uniformemente posible los embolismos, algo que no ocurre con los no regulares. El calendario juliano es regular, en cuanto a la intercalación de los bisiestos se refiere; sin embargo, el calendario gregoriano no lo es.

Vamos a referirnos a los calendarios regulares. Si el cociente  $A/B$  fuera un número entero, entonces serían abundantes los años que fuesen múltiplos de ese cociente. Si  $A/B$  no fuera entero, entonces deberían ser embolísmicos los años cuyo orden exceda o sea igual a un número entero de veces el cociente  $A/B$ . Si representamos por  $Y_k$  los años que son intercalares, donde  $k$  representa el número de orden del año intercalar, entonces la anterior regla se podrá poner como

$$k \frac{A}{B} + 1 < Y_k \leq k \frac{A}{B} \Rightarrow (Y_k B) \bmod A < B$$

o bien

$$Y_k = \text{int}\left(\frac{kA}{B} + 1\right) - \text{int}\left[\frac{B}{kA} \text{int}\left(\frac{kA}{B}\right)\right]$$

donde el último sumando toma el valor unidad sólo en el caso en que el cociente entre  $B$  y  $kA$  sea entero.<sup>40</sup>

Sea  $E$  el número de años embolísmicos transcurridos en el ciclo hasta el final del año  $Y$ . Por la regla establecida se cumple

$$Y \geq \frac{EA}{B} \Rightarrow E = \text{int}\left(\frac{YB}{A}\right).$$

---

40. Si se aplica este sistema de intercalación regular a un calendario de ciclos de 400 años de los cuales 97 fuesen bisiestos, se obtienen 11 subciclos de 33 años (compuestos a su vez por 7 intercalaciones cada 4 años y 1 intercalación cada 5 años) y 1 subciclo de 37 años (compuestos



Las fórmulas anteriores son válidas para el orden “natural” de colocación de los embolismos. Pero puede ocurrir que este orden se encuentre desplazado. Representamos por  $\alpha$  el número de años embolísmicos transcurridos desde el comienzo natural del ciclo, hasta el comienzo del ciclo desplazado; mientras que  $\beta$  será el número de años que han transcurrido entre dichos años. La fórmula que estamos buscando para saber qué años serán embolísmicos, es la misma que la encontrada antes, con tal de que hagamos el siguiente cambio de variables

$$Y \rightarrow Y - \beta; \quad k \rightarrow k + \alpha,$$

por lo tanto, la ecuación que nos da los años que son embolísmicos será

$$Y_k = \text{int} \left[ \frac{(k + \alpha)A}{B} + 1 \right] - \text{int} \left\{ \frac{B}{(k + \alpha)A} \text{int} \left[ \frac{(k + \alpha)A}{B} \right] \right\} - \beta \quad (19.4)$$

o lo que es lo mismo

$$[(Y_k + \beta)B] \bmod A < B. \quad (20.4)$$

Nótese que  $\alpha$  está relacionada con  $\beta$  mediante la fórmula

$$\alpha = \text{int} \left( \frac{\beta B}{A} \right).$$

Obtengamos por último el número de años embolísmicos transcurridos hasta final de año  $Y$  para el caso general en que el comienzo del ciclo no coincida con su inicio natural. Sea  $Y'$  los años transcurridos en el ciclo natural, entonces

$$E = \text{int} \left( \frac{Y'B}{A} \right),$$

el número de embolismos desde el final del año  $\beta$  hasta el final del año  $Y'$  será

Años del ciclo	Nº de años abundantes	Duración del año normal	Duración del embolismo	Años que son abundantes ( $\beta = 0$ )	$J$ (en años)
29	7	365	1	5, 9, 3, 17, 21, 25, 29	1 254
33	8	365	1	5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33	4 042
70	17	365	1	5,9,13,17,21,25,29,33,38,42,46,50,54,58,62,66,70	1 470
45	8	364	7	6, 12, 17, 23	441
62	11	364	7	6, 12, 17, 23, 29, 34, 40, 46, 51, 57, 62	4 144
40	7	360	30	6, 12, 18, 23, 29, 35, 40	128

Tabla 7.4.- Posibles calendarios solares.

por 8 intercalaciones de 4 años y 1 cada 5 años).

$$E = E(Y') - E(\beta) = E(Y + \beta) - \alpha = \text{int} \left[ \frac{(Y + \beta)B}{A} \right] - \alpha = \text{int} \left[ \frac{(Y + \beta)B}{A} + \frac{A\alpha}{A} \right]. \quad (21.4)$$

Ya estamos en condiciones de generar posibles calendarios solares computacionales regulares. Podemos utilizar como datos de partida: el número de años del ciclo, la duración del año normal y el número de días que conforman el embolismo; con ellos obtenemos el número de años abundantes y su intercalación en el ciclo, supuesto conocido el valor del desplazamiento  $\beta$ . Valga como ejemplo los calendarios que aparecen en la tabla 7.4, que los hemos generado utilizando como año de referencia el año trópico cronológico del año 2000 (365.242 176 754 días).

### Otras reglas de intercalación de bisiestos

Con el propósito de hacer el año del calendario más cercano al año trópico, se han planteado numerosas reglas de intercalación que pretenden mejorar la regla gregoriana. Pero no siempre ocurre así, ya que al no tener en cuenta el frenado secular de la rotación de la Tierra, a veces ocurre que la nueva regla es menos exacta que la gregoriana a la que pretenden suplantar.

A continuación exponemos algunas de las reglas de intercalación que han sido propuestas:

-Regla de los 5000 años. Fue propuesta por el astrónomo polaco Chomicz y consiste en que los únicos años centenarios que serían bisiestos son los que al dividirlos por 9 diesen de resto 0 ó 5. Los años centenarios que serían bisiestos son los que ocupen las posiciones: 0, 500, 900, 1400, 1800, 2300, 2700, 3200, 3600, 4100 y 4500 de cada ciclo de 5000 años. Esto quiere decir que de los 50 años centenarios de cada siglo, 11 serían bisiestos y 39 no lo serían, aunque éstos cumplan la regla juliana. La duración promedio del año de este calendario sería

$$365 - \frac{9}{5000} = 365^{\text{d}}.2422$$

lo que significa una diferencia de 2 segundos con el año trópico del año 2000.

-Regla de los 4000 años. Completa la regla gregoriana, de tal forma que se elimina un bisiesto cada 4000 años. Esta eliminación bien podría ser en los años múltiplos de 4000, que según la regla gregoriana deberían de ser bisiesto. Esta regla fue propuesta en un intento infructuoso de corregir el entonces vigente calendario republicano francés. Fue apoyada por John Hershel y más recientemente por Moreau. La duración promedio del año del calendario que se adapte a esta regla es

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} - \frac{1}{4000} = 365^{\text{d}}.24225,$$

o sea, que la diferencia con el año trópico que en el año 2000 fue de 6.3 segundos.

-Regla de los 3600 años. Se respeta la regla gregoriana, pero se elimina un año bisiesto cada 3600 años, concretamente en aquellos años múltiplos de 3600. Esta regla fue propuesta por Joseph Lalande.

-Regla de los 3200 años. En este caso el ciclo del calendario tiene 3200 años y se complementa la regla gregoriana con la eliminación de un bisiesto cada 3200 años. Esta

regla ha sido propuesta por Eduard Heis.

-Regla de los 2 000 años. Al igual que los casos anteriores, excepto que se elimina un bisiesto cada 2 000 años.

-Regla de los 500 años. Se tiene un ciclo de 500 años en el que se eliminan cuatro de los años que deberían de ser bisiestos por la regla juliana. Los años seculares que permanecen bisiestos son los que terminan en 100 ó 600.

-Regla de los 128 años. Es un ciclo propuesto por Mädler en 1863 dentro de un proyecto de reforma del calendario de la Iglesia Ortodoxa. Está basado en un ciclo de 128 años, de los cuales 31 serían bisiestos.

En la tabla 8.4 se resumen las duraciones y errores cometidos por los anteriores calendarios, tomando como punto de referencia el año 2000. Para una oportuna comparación hemos puesto en la última columna el error acumulado en promedio durante 100 años

Son interesantes los calendarios de 2000 y 500 años. En los dos la duración promedio del calendario en el año 2000 es menor que la del año trópico, pero al transcurrir el tiempo, se invierte la situación, de tal forma que se compensan los errores por exceso con los errores de defecto. A estos calendarios se les llama compensadores.

Años del ciclo	Duración promedio del año	Error en el ciclo desde el año 2000	Error acumulado en 100 años
5000	365.2422	1 <sup>d</sup> .78	51 <sup>m</sup> .8
4000	365.24225	1 <sup>d</sup> .36	49 <sup>m</sup> .0
3600	365.24222	1 <sup>d</sup> .03	41 <sup>m</sup> .1
3200	365.24219	0 <sup>d</sup> .72	32 <sup>m</sup> .3
2000	365.242	-0 <sup>d</sup> .09	6 <sup>m</sup> .2
500	365.242	-0 <sup>d</sup> .07	20 <sup>m</sup> .6
128	365.24219	0 <sup>d</sup> .002	3 <sup>m</sup> .6

Tabla 8.4.- Errores acumulados para varios calendarios.

Antes de la reforma gregoriana del calendario fueron hechas otras propuestas, entre ellas destacar la de John Dee (que elimina un bisiesto cada 33 años); la propuesta por Nicolás de Cusa que pedía la eliminación de un bisiesto cada 150 años; Roger Bacon propuso quitar un bisiesto cada 125 años; mientras que Juanelo Turriano ideó un ciclo de 268 años, en los que 65 serían bisiestos.

### Movilidad calendarista de las estaciones

Las fechas de los solsticios y equinoccios en un calendario no siempre se dan en las mismas fechas. Se entiende por dispersión al tiempo que media entre las posiciones extremas del comienzo de una determinada estación. Esta es una medida de la bondad de un calendario solar: cuánto menor sea la dispersión mejor se ajusta el calendario al movimiento del Sol.

Vamos a estudiar la dispersión de un punto estacional con relación a la posición en que se encontraba al inicio del ciclo de  $A$  años de duración. La dispersión de las estaciones

se debe a tres causas: a la diferencia entre el año estacional y el año del calendario (lo que hemos llamado movilidad media de las estaciones); a las perturbaciones que separan el movimiento del Sol verdadero del Sol medio y a la irregular colocación de los bisiestos (que llamamos movilidad calendarista de las estaciones).

La dispersión de un punto estacional  $x$  en el año  $Y$  del ciclo a causa de la intercalación de los embolismos, son los días que exceden  $Y$  años del calendario a  $Y$  veces el año estacional, a lo que hay que restar la dispersión causada por la movilidad media de la estación  $\Delta_x^c$ . Si suponemos que el embolismo está compuesto de  $D$  días, la dispersión será

$$\delta_{xY} = \sum_1^Y (a_n - a_x) + ED - \Delta_x^c = \sum_1^Y (a_n - a_c) + ED = (a_n - a_c)Y + ED, \quad (22.4)$$

$a_x$  es el año de referencia asociado al año de la estación  $x$ ; el año  $Y$  se empieza a contar desde el principio del ciclo. Nótese que al final de cada ciclo la desviación vuelve a tomar el valor cero, esto no quiere decir que la estación  $x$  vuelva a comenzar en la misma fecha del calendario en que lo hacía a principio del ciclo, ya que ese punto estacional está sometido a la movilidad astronómica que ahora no estamos considerando.

La desviación alcanzará un valor máximo a lo largo del ciclo. En la tabla 9.4 hemos puesto los resultados para algunos calendarios regulares.

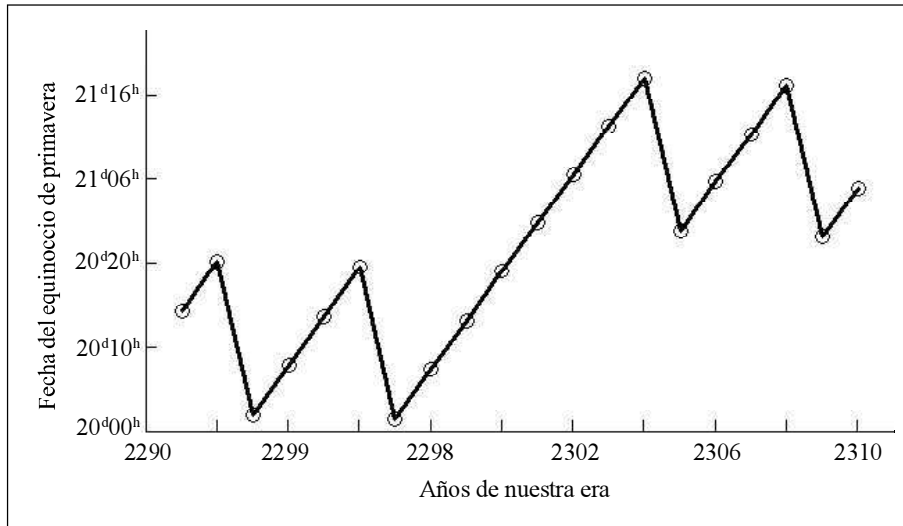
Años del ciclo	Embolismos		Dispersión máxima en un ciclo
	Número	Duración	
4	1	1	0 <sup>d</sup> .75
29	7	1	0 <sup>d</sup> .9655
33	8	1	0 <sup>d</sup> .9697
70	17	1	0 <sup>d</sup> .9857
45	8	7	6 <sup>d</sup> .8444
62	11	7	6 <sup>d</sup> .8875
40	7	30	29 <sup>d</sup> .25

Tabla 9.4.- Dispersión máxima para varios calendarios.

La tabla 9.4 considera calendarios que tienen una regla de intercalación regular. Nótese que las desviaciones calendaristas serán las mismas para cualquier punto estacional, aunque no ocurrirá lo mismo con la desviación causada por la movilidad de las estaciones producida por la desigual duración del año del calendario y del año estacional.

Para calendarios irregulares también es válida la fórmula (22.4) excepto que ahora  $E$  no viene dada por la ecuación (21.4). Tomemos como ejemplo el calendario gregoriano, que sigue la regla juliana de intercalar un bisiesto cada cuatro años, excepto en los años centenarios no divisibles entre cuatro, que seguirán siendo años normales. Esto quiere decir que cada 400 años se quitan 3 bisiestos, o sea, habrá 97 bisiestos en total, no intercalados regularmente. En la gráfica 4.4 aparece los momentos del equinoccio de primavera para los años comprendidos entre el 2290 y el 2310.

Se aprecia que después de un año normal la primavera llega un poco más tarde, algo



Gráfica 4.4.- Variabilidad en la fecha del equinoccio de primavera.

menos de 6 horas, pero cuando se produce el año bisiesto se gana parte de esa pérdida ya que la primavera acontece aproximadamente 18 horas antes. Nótese que el año 2300 no es bisiesto debido a la regla gregoriana, esto quiere decir que a partir de esa fecha la primavera vendrá un día más tarde, corrigiéndose de esta forma la excesiva duración del año gregoriano respecto al trópico.

Apliquemos la fórmula (22.4) para conocer la dispersión del equinoccio de primavera (o de cualquier otro punto estacional) en el calendario gregoriano entre un año y el que viene cuatro años después

$$\delta = (365 - 365.2425) \cdot 4 + 1 = 0^d.03 = 43^m.2,$$

lo que significa que el nuevo equinoccio vendrá 43.2 minutos antes que cuatro años antes. Es decir, que en cada año normal el equinoccio llega, no 6 horas después, sino

$$6^h - 43^m.2/4 = 5^h 49^m.2.$$

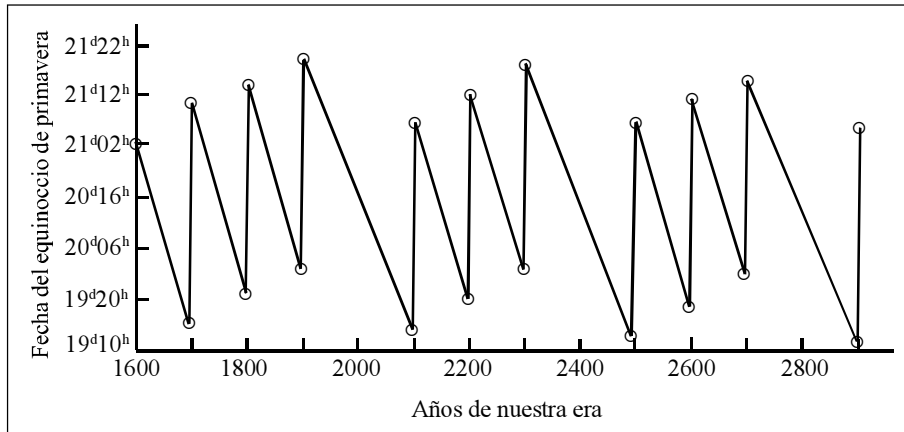
La primavera del año bisiesto llega

$$1^d 18^h - 43^m.2/4 = 1^d 17^d 49^m 12^s$$

antes que la del año anterior. Esta diferencia respecto a las 6 horas es la que obliga a hacer la corrección gregoriana.

En la gráfica 5.4 se observan las posiciones extremas del equinoccio de primavera en el calendario gregoriano. Los años en que más tarde llega la primavera son los que vienen tres años después del año centenario no bisiesto: 1703, 1903, 2103, ... Mientras que los años en que más pronto llega la primavera son los bisiestos que están inmediatamente antes del año centenario en que se omite el bisiesto: 1696, 1796, 1896, ...

Tanto los máximos como los mínimos relativos acontecen cada vez más tarde, pero tras colocar los bisiestos de los años centenarios (en el 2000, 2400, 2800, ...) la situación se vuelve a reponer. Nótese también cómo los máximos en los grupos de cuatrocientos años (1903, 2303, 2703, ...) cada vez llegan un poco más pronto, lo que nos muestra que



Gráfica 5.4.- Equinoccio de marzo en los cuatros años antes (abajo) y tres después (arriba) de los años centenarios no bisiestos del calendario gregoriano.

el año gregoriano es algo mayor que el año trópico. Encontramos que el año en que más tarde llega la primavera en el calendario gregoriano es en el 1903.

Calculemos ahora la desviación máxima entre los equinoccios de primavera; por ejemplo, entre los años 1903 y el 2096. Nótese que si eligiéramos otros dos años extremos entre los cuales se encuentre un año centenario no bisiesto (por ejemplo el 2303 y el 2496), obtendríamos el mismo resultado. Al aplicar la fórmula (22.4) se encuentra

$$\delta = (365 - 365.2425) \cdot (2096 - 1903) - 49 = 2^d 4^h 44^m 24^s,$$

donde 49 es el número de bisiestos transcurridos entre ambas fechas. Concluimos que la máxima dispersión calendarista de las estaciones en el calendario gregoriano se encuentra en torno a los dos días y cinco horas.<sup>41</sup>

### Meridiano del calendario solar

Cuando un calendario se aplica a nivel mundial es necesario ligarlo a un meridiano de cambio de fechas. En efecto, siempre debe de existir un meridiano que tenga la propiedad de ser el primero que empieza con el día uno del año nuevo. En el caso de un calendario computacional, como es el gregoriano, el meridiano de cambio de fechas es arbitrario, ya que este calendario no es más que una cuenta de días, sin ninguna relación a fenómenos astronómicos. Pero cuando se trata de un calendario astronómico o bien observacional, debe de existir otro meridiano singular: aquel respecto al cual se hace el cálculo o la observación astronómica.

Puede ser que este meridiano de referencia y el de cambio de fechas sean distintos. Esto es, por ejemplo, lo que ocurre con el calendario astronómico iraní, que toma como

41. Por ejemplo, los equinoccios de primavera de los años 1903 y 2096 distan entre sí 2 días 5<sup>h</sup> 9<sup>m</sup> 5<sup>s</sup>. La diferencia respecto al resultado del texto se debe principalmente a que durante el periodo considerado, el equinoccio de primavera se ha desplazado respecto a su posición media del calendario, a consecuencia de lo que hemos llamado movilidad media de estaciones, expresada por el término  $\Delta_p^c$ .

meridiano de cambio de fechas el antimeridiano de Greenwich y como meridiano de referencia para establecer cuándo comienza el nuevo año, el que pasa por Teherán. Así el día de año nuevo es el día civil en que el equinoccio de primavera viene a mediodía o posterior según la hora local de Teherán.

Puede ocurrir que los dos meridianos asociados a un calendario astronómico sean idénticos y además variables de año en año.<sup>42</sup> Esto ocurriría si, por ejemplo, se eligiese como día de inicio del año en cualquier posición geográfica, aquel en que el Sol estuviese en el equinoccio de primavera a las 0 horas o posterior según tiempo local. En este caso el meridiano de cambio de fechas sería aquel en que fuera las 0 horas local cuando se produce el equinoccio de primavera. Aproximadamente, cada año este meridiano se desplaza 90 grados al oeste. En este caso también se daría la circunstancia de que la duración de los años sería variable, de tal forma que aproximadamente en la cuarta parte de la Tierra tendría una duración de 366 días y 365 días en el resto. En este tipo de calendarios el día bisiesto sería impuesto por el cálculo astronómico, aunque siempre debería de estar colocado en el último día del año.

En el caso del calendario gregoriano se puede hablar, en cierta manera, de un meridiano asociado. Esto es así por la relación que tiene el calendario gregoriano con la Pascua de Resurrección. Esta fiesta debe celebrarse después del equinoccio de primavera, que según criterio eclesiástico siempre cae en el 21 de marzo. La elección de una fecha concreta para un acontecimiento astronómico nos permite hablar del meridiano gregoriano.

En efecto, podemos suponer que el calendario gregoriano está diseñado para ser exacto en aquellas zonas de la Tierra donde la primavera caiga en promedio el día 21 de marzo. En tiempos de la reforma del calendario, la primavera acontecía en promedio el día 20.98 de marzo en UT, donde hemos usado el criterio eclesiástico de comenzar el día a las 18 horas. Entonces todos los puntos situados al este del meridiano 7.2 grados, tendrían la propiedad deseada de que la primavera sea en promedio el día 21 de marzo. Nótese que este meridiano extremo se está moviendo, ya que la primavera acontece cada vez más pronto.<sup>43</sup>

---

42. Ilyas M., "A shifting date line: an interesting feature of the solar calendar", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **80** (1986) 134-141.

43. Dobrzycki J., "Astronomical aspects of the calendar reform", en *Gregorian Reform of the Calendar*, editado por Coyne, Hoskin, Pederson, Specola Vaticana, 1983, pp. 118-125, supone, con poca base, que el meridiano gregoriano es el que se encuentra a 19° 21' al este, por ser el utilizado por Clavius (uno de los miembros más distinguidos de la comisión que reformó el calendario) para verificar el nuevo calendario. Con más propiedad se puede hablar del meridiano del calendario lunisolar asociado al calendario solar gregoriano. También podríamos decir que la zona de la Tierra que está en sintonía con el calendario gregoriano sería aquella en que el equinoccio de primavera sucede el día 21 de marzo. Naturalmente esta zona es variable de año en año, e incluso existen años en que no existe.

## El calendario lunar

### El movimiento de la Luna

La Luna describe en torno a la Tierra una órbita elíptica, fuertemente perturbada, principalmente por la acción del Sol. El semieje mayor de la elipse no es alterado por las perturbaciones y tiene un valor de 384,399.07 kilómetros. La órbita lunar en cada instante es asimilable a una elipse de una excentricidad media de 0.054 900 489. No obstante, la perturbación solar hace que la excentricidad de la órbita tome como valores extremos 0.045 y 0.065, lo que motiva que la distancia entre la Tierra y la Luna varíe sustancialmente en torno al valor promedio dado por el semieje mayor.<sup>1</sup>

El plano orbital de la Luna se encuentra inclinado respecto a la eclíptica un ángulo medio de  $5^{\circ} 8' 43''$ , pero sufre variaciones periódicas. La más importante de ellas posee una semi-amplitud de  $9'$  y un periodo de unos 173 días.<sup>2</sup> El sentido del movimiento lunar respecto al fondo estrellado es similar al del Sol y al del resto de los planetas, es decir tiene el sentido directo: se mueve del oeste hacia el este.

La línea de las ápsides de la órbita lunar sufre un giro en el sentido directo, con un periodo aproximado de 8.85 años. La línea de los nodos también está sometida a un rápido movimiento, de sentido inverso, con un periodo de 18.61 años.

Para la descripción del movimiento lunar usaremos la teoría denominada Efemérides Lunares Parisinas ELP de Chapront-Touzé y Chapront.<sup>3</sup> Los elementos orbitales promedios de la Luna vienen dados en forma polinómica en función del tiempo, expresado como es habitual, en siglos julianos contados desde la época J2000.0. La longitud media de la Luna hasta el segundo orden del tiempo viene dada por

$$L'_m = 218^{\circ}.316\ 654\ 36 + 481\ 267^{\circ}.881\ 342\ 40T - 0^{\circ}.001\ 3268T^2.$$

La anomalía media o ángulo contado desde el perigeo hasta la Luna media en el sentido

1. Meeus J., "Extreme perigees and apogees of the Moon", *Sky and Telescope* **62** (1981) 110-111; para el periodo comprendido entre 1750 y 2125, este autor da como valores extremos de la distancia Tierra-Luna 356,375 y 406,720 kilómetros respectivamente, lo que representa una sensible variación del tamaño aparente de la Luna, aunque en la Luna llena esa variación de tamaño sólo representa una variación de 0.24 magnitudes.

2. Duración que representa la mitad del año de los eclipses, tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el nodo ascendente de la órbita lunar.

3. Chapront-Touzé M., Chapront J., *Lunar Tables and Programs from 4000 BC to AD 8000*, Willmann-Bell, 1991 y Chapront-Touzé M., Chapront J., "ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times", *Astronomy and Astrophysics* **190** (1988) 342-352. Una simplificación de esta teoría, más que suficiente para nuestros propósitos calendaristas, se encuentra en Meeus J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, 1991, pp.307-340.





como única perturbación la evección, que aunque tenga un corto periodo de 31.8 días, tiene una considerable semiamplitud de  $1^{\circ}16'$ . La evección es el resultado de la perturbación del Sol, que modifica la excentricidad de la órbita lunar. Cuando la línea de las ápsides de la Luna se encuentra alineada con el Sol, la órbita queda más excéntrica. Al contrario, cuando la línea de las ápsides es perpendicular a la dirección del Sol entonces la excentricidad alcanza su mínimo valor.

Por todo lo dicho la longitud eclíptica de la Luna se puede representar aproximadamente por la expresión

$$L' = L'_m + 2e' \sin M' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' + 2e'\gamma \sin(2D_m - M') \quad (1.5)$$

donde el último sumando es la evección. <sup>4</sup> La constante  $\gamma$  toma el valor 0.2025. La elongación verdadera o ángulo entre la longitud de la Luna y del Sol, toma el valor aproximado

$$D = D_m + 2e' \sin M' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' + 2e'\gamma \sin(2D_m - M') - 2e \sin M$$

donde el último sumando corresponde a la ecuación del centro del Sol. El instante de la Luna nueva corresponde a un valor nulo de la elongación, mientras que la elongación de la Luna llena corresponde al ángulo 180.

### Meses lunares

Se pueden definir diversos tipos de meses. El de más utilidad calendarista es el mes sinódico o lunación. Tenemos que distinguir entre la lunación verdadera y la media; la primera es el tiempo transcurrido entre dos conjunciones consecutivas del Sol y la Luna, mientras que la lunación media se define como el tiempo que tiene que transcurrir para que la elongación media de la Luna aumente en 360 grados. El movimiento medio sinódico de la Luna es

$$n'_{sm} = \frac{dD_m}{dT} = 445\ 267^{\circ}.111\ 5168 - 0^{\circ}.00326T,$$

como este movimiento es prácticamente constante, se puede tomar con muy buena aproximación que el mes sinódico medio es

$$\begin{aligned} m_s &\approx \frac{360}{n'_{sm}} = \frac{360}{12.190\ 74912 - 8.925\ 394 \cdot 10^{-8} T} = \\ &= 29^d.530588847 + 2^d.1621 \cdot 10^{-7} T \end{aligned} \quad (2.5)$$

expresado en tiempo terrestre. La anterior expresión nos indica que la lunación aumenta cada siglo juliano en 0.01868 segundos.

Se llama mes anomalístico medio al tiempo que la anomalía media de la Luna tarda en aumentar 360 grados. El movimiento medio anomalístico es

---

4. En realidad el ángulo que hemos denominado longitud de la Luna está medido en el plano de la órbita lunar, es necesario hacer la reducción a la eclíptica, pero dado la pequeña inclinación de la órbita lunar y la aproximación de nuestra teoría no tendremos en cuenta esta corrección.

$$n'_{am} = \frac{dM'}{dT} = 13^{\circ}.064\ 993 + 4^{\circ}.926 \cdot 10^{-7} T \text{ } ^{\circ}/\text{día}$$

de donde se obtiene que el mes anomalístico medio es

$$m_a = \frac{360}{n'_m} = 27^{\text{d}}.554\ 550 - 1^{\text{d}}.039 \cdot 10^{-6} T.$$

El mes trópico es el tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud orbital media de la Luna aumente en 360 grados. El movimiento medio trópico es

$$n_{Tm} = \frac{dL'_m}{dT} = 13.176\ 396 - 7.265 \cdot 10^{-8} T.$$

entonces el mes trópico medio en días será

$$m_T = 27.321\ 582 + 1.506 \cdot 10^{-7} T.$$

El mes sidereal medio es el tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud media de la Luna referida a un equinoccio fijo aumente en 360 grados. El equinoccio se desplaza en sentido contrario al movimiento lunar, por tanto el equinoccio va al encuentro de la Luna. Esto quiere decir que el mes sidereal es mayor que el mes trópico, la diferencia entre ambos es el tiempo que tarda la Luna en recorrer el arco que se ha desplazado el equinoccio en un mes trópico

$$m_{si} = m_T + \frac{pm_T}{n_{Tm}}$$

donde  $p$  es la precesión en longitud que en grados por día es

$$p = 3^{\circ}.825 \cdot 10^{-5} + 1^{\circ}.69 \cdot 10^{-8} T,$$

a primer orden en la potencia del tiempo el mes sidereal es

$$m_{si} = 27^{\text{d}}.321\ 662 + 1^{\text{d}}.857 \cdot 10^{-7} T$$

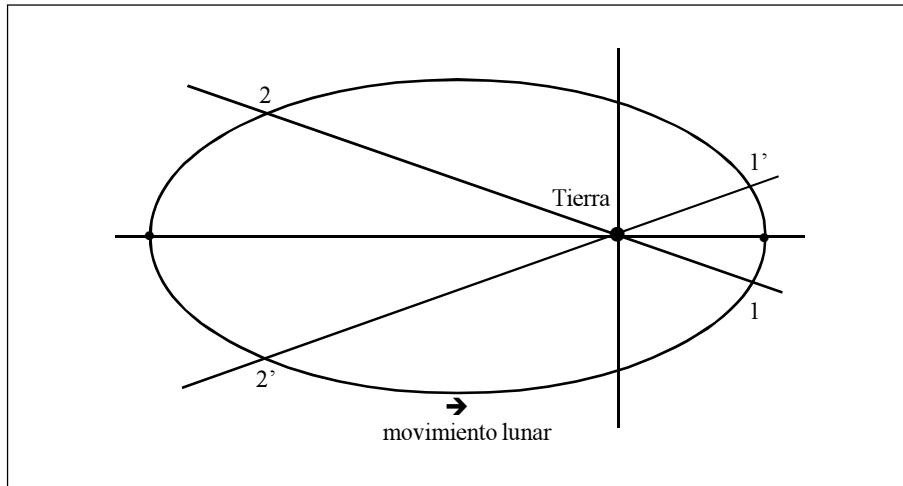
que al igual que los anteriores meses viene dada en unidades de la escala de tiempo terrestre.<sup>5</sup>

### La variable duración de la lunación verdadera

El intervalo de tiempo entre dos conjunciones consecutivas del Sol y la Luna es variable, puesto que depende de la posición que ocupa la Luna en su órbita al comienzo de la lunación, así como de la posición relativa de las líneas de las ápsides del Sol y la Luna. Hagamos referencia al dibujo 2.5, que representa la órbita de la Luna. Supongamos que en el punto 1 ha tenido lugar una conjunción del Sol y la Luna, que da comienzo a un periodo sinódico o lunación. Mientras que la Luna describe su trayectoria a través de la elipse, el Sol también se desplaza de tal forma que de nuevo se reúnen los dos astros

---

5. Se puede hacer una numeración consecutiva de las lunaciones. Esto se hace con el número de lunación islámica, que inicia la cuenta con la Hégira. También se puede caracterizar el día contándolo desde esa misma fecha, Ilyas M., "Hijrah Day Number, Islamic Day Number and Islamic Lunation Number: New parameters for exacting the islamic calendar", *Journal of the British Astronomical Association* **101** (1991) 275.



Dibujo 2.5. Movimiento de la Luna alrededor de la Tierra respecto al Sol.

en el punto 1'.

La lunación será el tiempo que la Luna tarda en recorrer el arco

$$\widehat{11+11'}$$

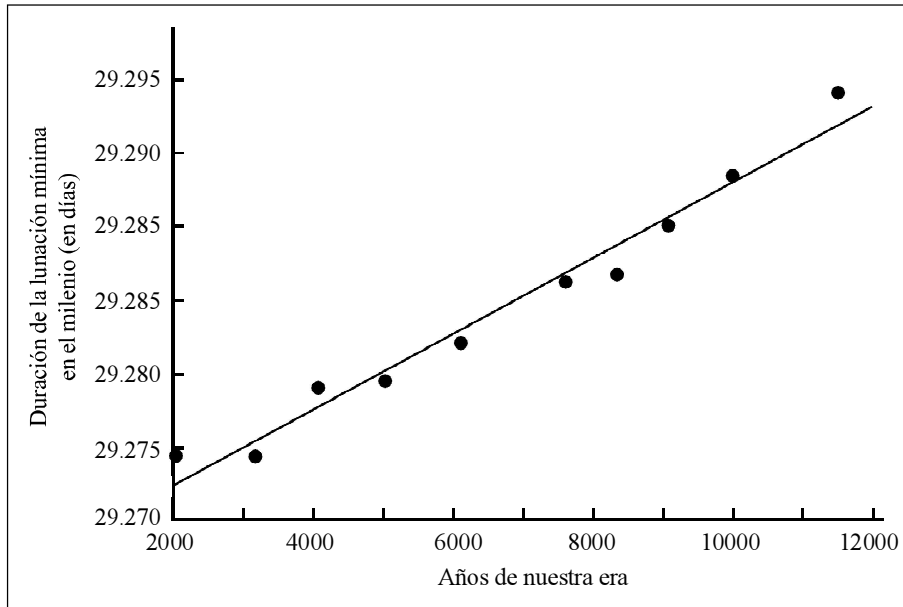
el primer sumando lo recorre la Luna en un tiempo dado por el mes anomalístico y no depende de la posición del punto 1. El segundo arco se encuentra en las cercanías del perigeo, por tanto será recorrido en un breve tiempo. En la situación del dibujo 2.5, la lunación será más corta que la promedio. La situación inversa se da cuando la Luna se encuentra en conjunción en el punto 2. Al igual que antes, la lunación será el mes anomalístico más el tiempo que la Luna tarda en recorrer el arco  $22'$ , pero como este arco se encuentra cerca del apogeo, será recorrido en un tiempo más largo. Entonces esta situación nos da una lunación más larga que la duración promedio.

La posición del Sol también interviene. Supongamos que la conjunción tiene lugar en el punto 1. Si el Sol se encuentra en su apogeo entonces irá más lento y el arco  $11'$  que recorre en una lunación, será más corto y por tanto recorrido más rápidamente por la Luna. Tendremos entonces las lunaciones más cortas posibles. Al contrario, cuando la conjunción se produce en el punto 2 y el Sol se encuentra en el perigeo, entonces el arco  $22'$  será más grande y la Luna tardará aún más tiempo en recorrerlo, esta situación corresponde a las lunaciones más largas.<sup>6</sup>

La diferencia entre las lunaciones de mayor y menor duración supera las 13 horas. Durante el tercer milenio la lunación de mayor duración será la que finalizará en enero del año 2151, que alcanzará  $29^d 19^h 54^m$  y la de mínima duración será la lunación de julio del año 2053 con  $29^d 6^h 35^m$ , una diferencia de  $13^h 19^m$ .<sup>7</sup>

6. Stephenson F. R., Baolin L., "On the length of the synodic month", *The Observatory* **111** (1991) 21-22.

7. Meeus J., "Les durées extrêmes de la lunaison", *L'Astronomie* **102** (1988) 288-289, calcula las lunaciones de mayor y menor duración entre los años 1900 y 2100, la lunación de enero de 1974 excede en un minuto a la longitud de la lunación de máxima duración citada en el texto Stephenson



Gráfica 1.5. Variación de la mínima duración de la lunación en un milenio. La línea recta es la regresión lineal.

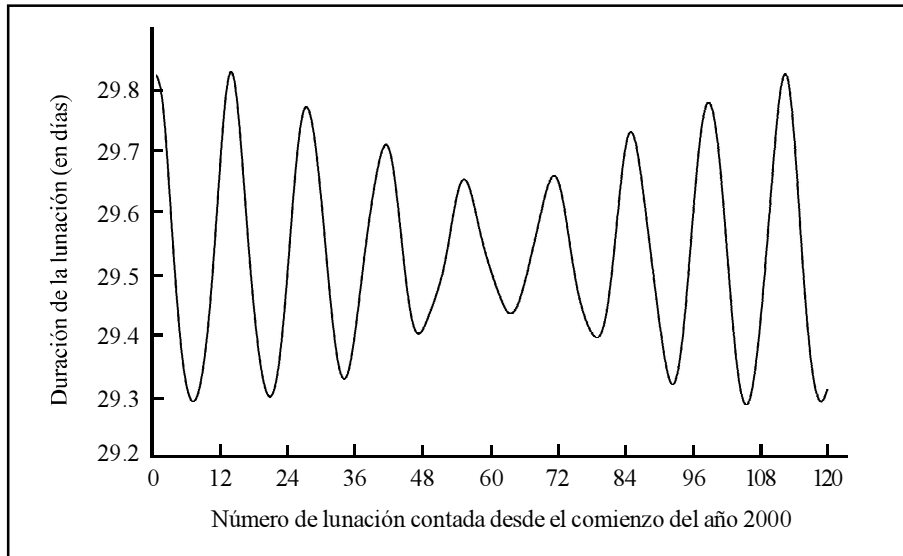
Se observa que las lunaciones extremas se van amortiguando con el paso del tiempo a causa de la variación secular de la excentricidad de la Tierra. La gráfica 1.5 nos muestra cómo van aumentando las lunaciones mínimas desde el año 2000 al 12000. La evolución opuesta se da en las lunaciones de mayor duración, que con el paso del tiempo se van acortando.

Como queda dicho, la duración de las lunaciones depende de las posiciones de la Luna y del Sol respecto a sus perigeos al comienzo de la lunación. Como ambos movimientos son periódicos, la variación de las lunaciones será doblemente periódico. Lo expuesto se aprecia en la gráfica 2.5, donde se representan los valores de las lunaciones verdaderas para los nueve años después del año 2000, donde se perciben los dos ciclos a los que hemos hecho referencia.<sup>8</sup>

Vamos a determinar la duración del primer periodo o periodo corto de la lunación. Como ese periodo sólo es producto del movimiento lunar, vamos a desinteresarnos del movimiento anómalo del Sol y vamos a considerar que la posición de este astro viene dada exclusivamente por su movimiento medio. Si  $a$  representa lo que excede a 360 grados el incremento de anomalía verdadera de la Luna durante una lunación, entonces la anomalía verdadera que debe tener en la conjunción para que la lunación tenga el

y Baolin hacen un análisis entre el año 1000 a.C. y el 4000, encontrando que la lunación más larga fue de  $29^d 20^h 6^m$  (en el año 400 a.C.) y la más corta fue de  $29^d 6^h 26^m$  (en el año 302 a.C.)

8. Jawad Ala' a H., "How long is a Lunar Month?", *Sky and Telescope*, noviembre (1993) 76-77. Una gráfica similar a la mostrada se obtendría si se toman las Lunas llenas en vez de las nuevas, e incluso si se toma cualquiera otra edad de la Luna.



Gráfica 2.5. Variación de la duración de las lunaciones.

mínimo valor posible es

$$v' = 360 - \frac{\alpha}{2}$$

lo que garantiza que la Luna recorrerá más distancia cerca del perigeo, donde su velocidad será mayor, resultando una lunación de menor duración. Las anomalías medias correspondientes a las dos conjunciones consecutivas que limitan la lunación de menor duración, se encontrarán desplazadas casi simétricamente de la anomalía verdadera en los momentos de esas dos conjunciones. Si  $\alpha$ , es lo que excede la anomalía media a 360 grados en una lunación ( $\alpha_L \approx 13.065 \cdot 29.3 - 360 \approx 22^\circ.8$ ), entonces la anomalía media en la conjunción que inicia la lunación de menor duración será

$$M' = 360 - \frac{\alpha_L}{2} \approx 348^\circ.6 .$$

haciendo uso de (1.5) y teniendo en cuenta la relación entre anomalía verdadera y la longitud eclíptica se tiene aproximadamente

$$v = M' + 2e' \sin M' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' + 2e' \gamma \sin (2D_m - M')$$

encontrándose que la anomalía verdadera en la conjunción con la que se comienza la lunación más corta es aproximadamente  $347^\circ.5$ . No obstante, la Luna sólo muy ocasionalmente tendrá el valor de esa anomalía cuando se encuentre en conjunción, pero sí se dará con frecuencia que en el momento de la conjunción con el Sol, la anomalía verdadera sea cercana a ese valor, encontrándose entonces mínimos relativos de la lunación.

Un cálculo similar se puede realizar para las lunaciones de máxima duración. Se encuentra que la anomalía media en el momento de la conjunción que da inicio a esa lunación máxima debe ser  $165^\circ.1$  aproximadamente y la anomalía verdadera deberá tener

el valor  $166^{\circ}.3$ .

Como queda dicho, los anteriores valores son los que deben tener las anomalías en las condiciones más favorables. Pero otros mínimos se pueden alcanzar; concretamente cuando la anomalía media de la Luna al comienzo de la lunación se encuentra entre los valores

$$360 - \alpha_L \text{ y } 360$$

y por tanto la anomalía verdadera entre  $337^{\circ}.2$  y  $360$  grados, en estos casos encontramos mínimos de la lunación ligeramente de más larga duración que la menor de ellas.

La anomalía verdadera de la Luna se encuentra relacionada con la longitud eclíptica verdadera por

$$v' = L' - \Pi_m .$$

Las longitudes verdaderas del Sol y la Luna en la conjunción serán iguales entre sí y a su vez idénticas a la longitud media del Sol, por ser éste el único término que estamos tomando en el movimiento solar, entonces

$$v' = L_m - \Pi_m .$$

Supongamos que la anomalía verdadera de la Luna sea tal que haga la lunación mínima, entonces el tiempo que tiene que transcurrir para que de nuevo la Luna tenga esa misma anomalía verdadera es

$$\tau_1 = \frac{360}{\dot{L}_m - \dot{\Pi}_m}$$

que es el periodo promedio de variación de las lunaciones. Para la época J2000.0 toma el valor de  $411.78$  días, con una muy ligera variación con el tiempo.

El anterior periodo  $\tau_1$  es muy cercano a 14 lunaciones, pero no las llega a completar. Como el periodo de las lunaciones debe empezar y finalizar con dos conjunciones, en promedio se producirá un ciclo compuesto por 18 periodos de 14 lunaciones, seguidos por un único periodo de 13 lunaciones, consiguiéndose que en promedio el ciclo de las lunaciones se acerque lo más posible a los  $411.78$  días.<sup>9</sup> Debemos, por tanto, distinguir otro periodo en las lunaciones, de una duración promedio de 21.4 años, compuesto, tal como hemos visto, de 265 lunaciones. Los mismos resultados se obtienen si hiciéramos los cálculos con las lunaciones de mayor duración.

Analicemos a continuación el segundo periodo de la lunación, que encuentra su origen en el movimiento del Sol. Ahora omitiremos el movimiento anómalo de la Luna y sólo consideraremos su movimiento medio y el movimiento de su línea de las ápsides. Las anomalías verdaderas del Sol y la Luna son

$$v = L - \omega_m ; \quad v' = L'_m - \Pi_m ,$$

en la conjunción las longitudes eclípticas del Sol y la Luna coincidirán, entonces

$$v - v' = \Pi_m - \omega_m .$$

Supongamos que la conjunción se produce cuando el Sol se encuentre cerca de su

---

9. Las anteriores conclusiones no son más que un promedio, ya que cuando se tienen en cuenta los movimientos verdaderos del Sol y la Luna, los resultados se apartan de la media. Se llegan a producir ciclos de 15, 16 e incluso 17 meses de duración.

apogeo, entonces tendremos lunaciones de mínima duración.<sup>10</sup> El tiempo que tiene que transcurrir en promedio para que el Sol y la Luna vuelvan a estar en la misma situación favorable será

$$\tau_2 = \frac{360}{\dot{\Gamma}_m - \dot{\omega}_m}$$

que en la época actual toma un valor de 3232,86 días ó 8.85 años en promedio.

Otro asunto a considerar en relación con la diversa longitud de las lunaciones, es el referente a las máximas y mínimas duraciones que pueden tener varias lunaciones consecutivas. Para el periodo comprendido entre los años 2000 y 3000 se encuentra los resultados de la tabla 1.5.

Lunaciones consecutivas	Máximas duraciones	Mínimas duraciones
2	59 <sup>d</sup> .65	58 <sup>d</sup> .56
3	89 <sup>d</sup> .45	87 <sup>d</sup> .87
4	119 <sup>d</sup> .22	117 <sup>d</sup> .22
12	355 <sup>d</sup> .46	353 <sup>d</sup> .72

Tabla 1.5. Duraciones máximas y mínimas consecutivas.

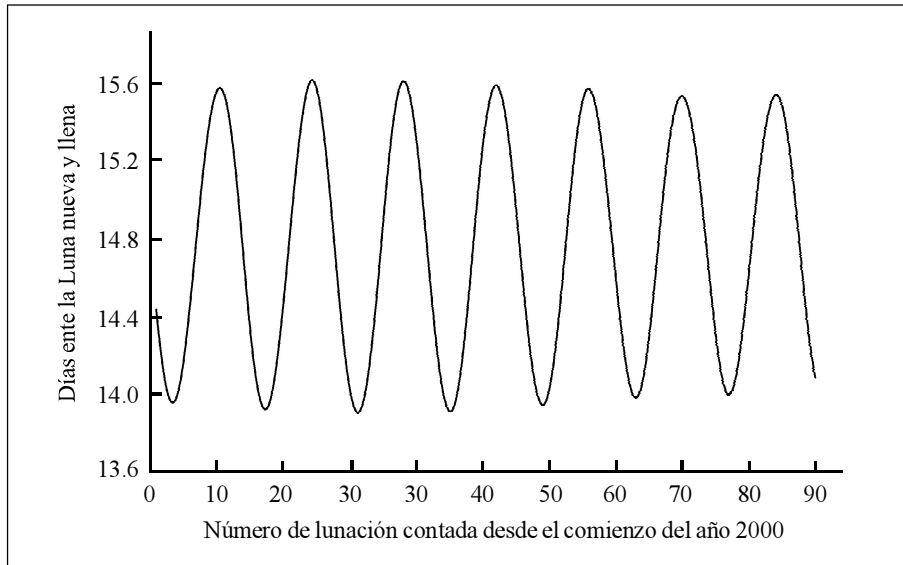
De lo anterior se desprende que en un calendario cuyos meses sigan la Luna nueva, como es el caso del calendario chino, es posible que existan tres meses consecutivos de 30 días. E incluso en condiciones muy favorables pueden existir cuatro lunaciones consecutivas de 30 días cada una. Sin embargo, sólo son posibles tres lunaciones consecutivas de 29 días.<sup>11</sup> En cuanto a la duración del año lunar, es posible que tenga 353, 354, 355 ó 356 días, siempre y cuando se establezca como criterio que el primer día del mes sea aquel en que comienza la Luna nueva astronómica.

Otro asunto que nos interesa en vista a su aplicación a los calendarios, son los días que median entre la Luna nueva y la Luna llena. Este intervalo tiene una variabilidad de día y medio y depende de las posiciones ocupadas por el Sol y la Luna al comienzo de la lunación. Para los nueve años siguientes al año 2000, los días que median de la Luna nueva a la llena vienen dados por la gráfica 3.5. donde se aprecia un periodo promedio de 412 días, de igual duración que el primer periodo de variación de las lunaciones ya considerado.

10. Por un razonamiento análogo al hecho para la Luna, se encuentra que la anomalía media del Sol al comienzo de la lunación de menor duración debe ser, en promedio, 165°.5 y 345°.5 la anomalía media en los momentos de mayores lunaciones.

11. Si la Luna nueva viene al comienzo del día (que será el 1 del mes en los calendarios considerados) es posible que, por ejemplo, los 119.22 días encajen en 120 días ó 4 meses de 30 días cada uno. Si la Luna nueva se produce a final del día es posible que, por ejemplo, los 87.87 días quepan en sólo 87 días ó 3 meses de 29 días.





Gráfica 3.5. Variación de los días que median entre la Luna nueva y la llena.

### La lunación en función del tiempo universal

La duración del mes sinódico dada por (2.5) viene expresada en la escala de tiempo terrestre. Pero la escala temporal de los calendarios es el tiempo universal. Tenemos por tanto que expresar la duración del mes sinódico en la escala de UT. Usamos un procedimiento similar al aplicado para determinar la duración en tiempo universal del año trópico. Partimos de

$$D = d - u - wT$$

siendo  $m$  y  $n$  los coeficientes derivados de la fórmula de Stephenson (12.2),  $D$  y  $d$  es el tiempo expresado en tiempo universal y en tiempo terrestre respectivamente. Si el periodo sinódico medio lunar lo ponemos de la forma

$$m_s = p + qT$$

queda al pasarlo a UT

$$m_s = (p - pu) - (pw + qu - q)T = p' - q'T,$$

al tomar los valores numéricos queda

$$m_s = 29^d.530\ 58781 - 3^d.6398 \cdot 10^{-7} T \quad (3.5)$$

lo que significa que en cada siglo la lunación media astronómica medida en UT disminuye en 0.031 segundos.

### Teoría general de los calendarios lunares computacionales

Un calendario lunar computacional tiene un ciclo compuesto de  $A$  años lunares. Los años normales tienen una duración de 354 días (6 meses de 30 días y otros 6 de 29) y los abundantes 355, teniendo ambos doce meses. El número de años abundantes que tiene el ciclo se obtiene de la fórmula

$$B = \text{cint}[(12 \cdot 29.53059 - 354)A] = \text{cint}(0.3708A).$$

El número de meses de 29 días serán 6 por cada año menos los  $B$  meses donde se han colocado un día de más, pasando por ello de 29 a 30. En cuanto a los meses de 30 días serán 6 por cada año más los  $E$  meses abundantes

$$m_{29} = 6A - B; \quad m_{30} = 6A + B.$$

La lunación promedio de este calendario será

$$l_m = \frac{354A + B}{12A}.$$

En la tabla 2.5 aparecen algunos calendarios lunares computacionales, con ciclos de una duración menor de 100 años.

Años del ciclo	Años abundantes	Número de meses	Diferencia
30	11	360	2.79
49	18	588	-2.11
68	25	816	-4.27
79	29	948	-0.25
87	32	1 044	-5.49
98	36	1 176	-2.11

Tabla 2.5. Características de algunos calendarios lunares.

La cuarta columna es la diferencia entre la duración de la lunación astronómica y la lunación promedio del calendario expresada en segundos. El ciclo de 30 años lunares es el que sigue el calendario computacional musulmán, que tiene una óptima precisión astronómica. Es de destacar el ciclo de 79 años, que es una combinación de un ciclo de 49 años con otro de 30 y cuya lunación media sólo se diferencia 0.25 segundos de la lunación media astronómica.<sup>12</sup>

Aproximadamente, cada tres años hay que intercalar un día de más. Es conveniente que la intercalación sea efectuada lo más regular posible. En este caso son válidas las fórmulas desarrolladas en el capítulo 4. Los años que serán abundantes tendrán que cumplir (19.4).

Entendemos que el ciclo natural es aquel que comienza con una Luna nueva que ocurre en el primer día del año. El coeficiente  $\beta$  son los años que han transcurrido desde el comienzo natural del ciclo y el comienzo del ciclo en uso, mientras que  $\alpha$  son los años embolismicos que han transcurrido en el mismo intervalo. Al aplicar la anterior fórmula al ciclo de 30 años, se encuentra que serán abundantes los años 3, 6, 9, 11, 14, 7, 20, 22, 25, 28 y 30, siempre y cuando se utilice el ciclo no desplazado, en otro caso el orden de los años abundantes será diferente.

---

12. Naturalmente sería posible idear calendarios con una intercalación de varios días y que tuvieran años normales de otra duración.

En los calendarios lunares que estamos considerando, los años abundantes distan entre sí 2 ó 3 años. Llamamos  $u$  al número de veces que el intervalo es 3 años y  $v$  al número de veces en que se produce el intervalo de 2 años. Entonces deberá cumplirse

$$3u + 2v = A; \quad u + v = E$$

al resolver queda

$$u = A - 2E; \quad v = 3E - A.$$

### Error en los calendarios lunares computacionales

Nos interesa ahora conocer el error que se va acumulando en un calendario lunar a consecuencia de que su lunación no coincide exactamente con la lunación astronómica. Para hacer este cálculo vamos a suponer que el año  $Y_0$  es el origen del calendario. Los siglos julianos transcurridos desde ese año (que representaremos por  $T''$ ) en función de los siglos contados desde el año 2000 será

$$T'' = T + \frac{2000 - Y_0}{100} = T + 20 - 0.01Y_0$$

entonces la lunación promedio de la fórmula (3.5) será

$$m_s = p' - q'T = [p' + (20 - 0.01Y_0)q'] - q'T''.$$

Vamos ahora a expresar el tiempo en siglos lunares en vez de en siglos julianos. Un siglo lunar está compuesto por cien años lunares, cada uno de ellos con una duración promedio de  $12L_m$ . Si  $T'$  son los siglos lunares transcurridos desde el año origen del calendario  $Y_0$

$$T'' = \frac{1200L_0}{36525}, \quad T' = \frac{12L_m}{36525} Y_L,$$

donde  $Y_L$  son los años lunares transcurridos desde el origen. Entonces la expresión del periodo sinódico lunar será

$$m_s = [p' + (20 - 0.01Y_0)q'] - \frac{12L_m}{36525} q'Y = a - bY.$$

El error promedio acumulado a lo largo del año lunar  $Y$  será

$$E(Y) = 12(l_m - m_s),$$

donde hemos supuesto que la lunación promedio astronómica permanece constante a lo largo del año. El error acumulado en un ciclo lunar de  $A$  años que comienza en el año  $Y$  contado a partir del origen del calendario, es

$$E(Y, A) = 12 \sum_y^{Y+A} (l_m - m_s) = 12 \sum_y^{Y+A} (l_m - a + bY)$$

al desarrollar queda

$$E(Y, A) = 12A(l_m - a) + 6b(2Y + A)(1 + A).$$

Si en vez de un ciclo lunar queremos determinar el error acumulado en  $N$  ciclos lunares que comienzan en el año  $Y$ , debemos de aplicar la fórmula

$$E(Y, N) = 12NA(l_m - a) + 6b(2Y + NA)(1 + NA). \quad (4.5)$$

### La observación del primer creciente lunar

Se conoce por Luna nueva el momento en que coinciden las longitudes eclípticas geocéntricas aparentes de los centros del Sol y de la Luna. Salvo que los centros de la Luna, Sol y Tierra estén alineados, existe una elongación geocéntrica no nula entre el Sol y la Luna en el momento de la conjunción. Esto significa que en ese instante una parte extremadamente pequeña de la superficie lunar estará iluminada.<sup>13</sup>

En el momento de la Luna nueva, nuestro satélite se puede distanciar como máximo 5°.15 del Sol, que corresponde a su máxima latitud eclíptica. Estando la Luna tan cerca del Sol, el resplandor del cielo impide ver a una Luna tan escasamente iluminada. Para observar por primera vez la Luna tras haber sido nueva, es necesario que se haya distanciado del Sol y, además, que el brillo del cielo sea suficientemente bajo. Esta situación sólo se da hacia el oeste poco después de la puesta del Sol. A la Luna que se observa por primera vez después de la conjunción se le llama el primer creciente lunar.

La importancia de la determinación del día en que es observado el primer creciente lunar, deriva de lo establecido en el Corán. Textualmente se afirma: “El número de los meses es de doce ante Dios, tal es en el libro de Dios, desde el día en que creó los cielos y la Tierra [...] Transportar a otro tiempo los meses sagrados es un exceso de infidelidad, es hacer lícito lo que no lo es, y viceversa. Los infieles están en el extravío” (9:36 y 9:37); y en otro versículo se dice: “Ellos te interrogarán acerca de las Lunas nuevas. Diles: son las épocas fijadas para la utilidad de todos los hombres y para señalar la peregrinación a la Meca” (2:185). Según la ortodoxia musulmana, estos textos significan que debe seguirse un calendario compuesto por doce meses lunares, prohibiéndose expresamente la intercalación de un decimotercer mes, que convertiría el calendario en lunisolar. Se asocia al profeta Mahoma una más precisa definición del comienzo y fin de los meses lunares: “Comenzar el ayuno con la visión de la nueva Luna y concluirlo con la visión de la nueva Luna. Si el cielo está nublado, completar el mes con 30 días.” La *sharia* o ley islámica establece unas normas para regular este calendario estrictamente observacional. Entre ellas se encuentra que la longitud de los meses sólo puede ser de 29 ó 30 días; que la longitud del año debe ser 354 ó 355 días; que puede haber un máximo de cuatro meses consecutivos de 30 días y tres de 29; cada nuevo mes debe comenzar con la observación del primer creciente sobre el horizonte occidental después de la puesta del Sol; en el día 29 se debe intentar la observación de la Luna, si no puede ser vista por causa de las nubes el mes se extenderá a 30 días; los testigos que observen el creciente lunar deben ser fiables, adultos, veraces, sanos y con buena visión y la observación visual no puede estar en conflicto con las leyes de la naturaleza.<sup>14</sup>

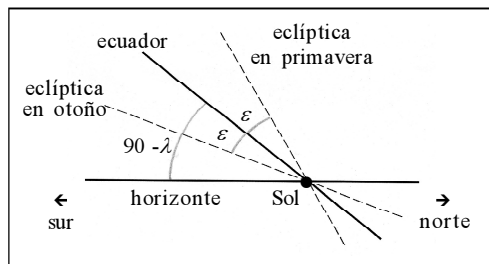
Prever en qué día será visible el primer creciente lunar, o sea, saber cuándo va a comenzar el nuevo mes musulmán tiene una importancia doble. Sirve de guía para evitar

13. En rigor siempre la superficie lunar refleja alguna luz hacia la Tierra. Como el Sol tiene un semidiámetro no nulo y un tamaño real mayor que la Luna, una minúscula parte de los limbos lunares estará iluminada aún en el caso en que los centros del Sol, Luna y Tierra estén alineados. Es decir, el Sol ilumina en todo momento una superficie lunar mayor que media esfera. En este caso, la zona luminosa del hemisferio lunar opuesto al Sol, es iluminada por sólo parte del disco solar, o sea, es la pequeña franja lunar en que está amaneciendo o anocheciendo. Este razonamiento es ajustado para el caso ideal de una superficie lunar lisa.

14. Ilyas M., “Lunar crescent visibility criterion and islamic calendar”, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **35** (1994) 425-461.

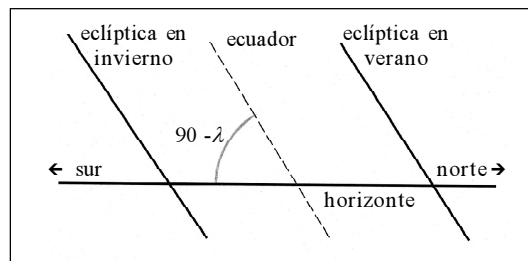
posibles errores en la observación. Además, puede ser el punto de partida para una eventual reforma del calendario islámico, que lo transforme de observacional a computacional.

El análisis del problema se debe iniciar con las características que toma el cielo en el momento del ocaso. Cuando el Sol se pone, la eclíptica tiene una inclinación con el horizonte que depende de la época del año y de la latitud geográfica. Las posiciones de la eclíptica en los equinoccios, para observaciones hechas en el hemisferio norte, vienen dadas en el dibujo 3.5



Dibujo 3.5. La posición de la eclíptica en los equinoccios.

y para los solsticios la situación es la del dibujo 4.5.



Dibujo 4.5. La posición de la eclíptica en los solsticios.

El norte está hacia la derecha y el sur hacia la izquierda,  $\varepsilon$  es la inclinación de la eclíptica respecto al ecuador celeste y  $\phi$  es la latitud geográfica del lugar de observación. Del dibujo se desprende que el azimut del Sol en el momento del ocaso depende tanto de la posición geográfica como de la época del año. Las posiciones extremas del ocaso solar se alcanzan en los solsticios y sus valores se obtienen por la expresión

$$\sin Z_s = \frac{\sin \delta - \sin \phi \sin h}{\cos \phi \cos h}$$

$Z_s$  es el azimut del Sol,  $h$  su depresión que suponemos es  $50^\circ$  (correspondientes a la refracción y al semidiámetro) y  $\delta$  es la declinación del Sol que en los momentos de los solsticios toma los valores  $\pm \varepsilon$ .

La Luna también se pone en posiciones diferentes a lo largo del año. La posición

más al norte en que puede ponerse para latitudes moderadas, se encuentra entre 5 y 8 grados del punto de la puesta de Sol en el solsticio de invierno; e iguales valores para la posición más al sur en que se puede poner la Luna, acontecimiento que debe ocurrir en el solsticio de verano.<sup>15</sup>

Es interesante conocer, aunque sea aproximadamente, la posición en que se encuentra la Luna en el momento de la puesta del Sol. Esto facilita la observación del primer creciente lunar. Si la Luna tiene latitud eclíptica negativa, siempre será vista hacia el sur de donde se pone el Sol, siempre y cuando sean observaciones hechas en el hemisferio norte. Para lugares situados a más de 50 grados norte aproximadamente, la Luna siempre se verá hacia el sur, independientemente de su latitud eclíptica. En verano o invierno, la Luna se podría ver hacia el norte de donde se pone el Sol si es observada desde una latitud geográfica menor de unos 30 grados. En el otoño, salvo en lugares muy cercanos al ecuador, siempre se verá la Luna hacia el sur. La primavera es la época en que es más frecuente ver la Luna hacia el norte de donde se pone el Sol, esto puede ocurrir ocasionalmente si la observación se hace desde un lugar de una latitud geográfica menor de unos 50 grados.<sup>16</sup>

La primavera es la época más favorable para ver la Luna con menor edad. Si a esta circunstancia se le añade que la Luna se encuentra en el perigeo, el primer creciente será visto más pronto. En efecto, por primavera la Luna puede ser vista inmediatamente encima del Sol, y en esta posición, a igual elongación, el brillo del cielo es menor y por tanto es más favorable la observación. Si la Luna se encuentra en el perigeo se moverá con más rapidez, alejándose con mayor velocidad del Sol; además, cuando la Luna está en el perigeo tiene un tamaño aparente mayor y por tanto mayor luminosidad.

Una forma práctica de referir la posición del creciente lunar es usar las horas del reloj. Imaginemos que la Luna es la esfera de un reloj. La posición del creciente viene dada por las "horas" que marcan sus cuernos. Así podemos decir que el creciente va de 2 a 8, que quiere decir que la línea que une la Luna con el Sol forma 30 grados con el horizonte, encontrándose al sur de donde se ha puesto el Sol. Otro ejemplo sería un creciente que va de 4 a 10, lo que significa que la línea de unión forma 60 grados y la Luna se encuentra al norte del Sol.

### Teoría de las fases lunares

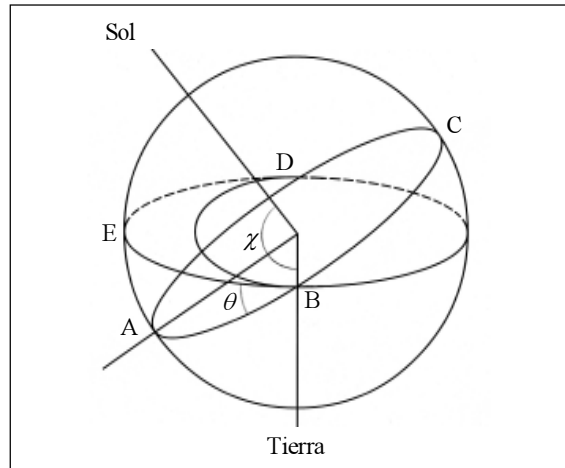
No cometemos ningún error apreciable si suponemos que la Luna es completamente esférica. En el dibujo 5.5 la circunferencia ABCD divide a la Luna en dos semiesferas, una de ellas iluminada.  $\chi$  es el ángulo entre el Sol y la Tierra tal como es observado desde la Luna,  $\theta$  es el ángulo de fase o elongación observada desde la Tierra. Desde nuestro planeta se verá iluminada la porción BED formada por un semicírculo (o terminador externo) y una semielipse (o terminador interno).

Es de interés conocer el ancho del creciente. Para ello tengamos en cuenta que en el dibujo 6.5  $R$  representa el radio lunar y  $\nu$  el ángulo que nos da la posición del creciente

---

15. En el momento del ocaso del Sol el azimut del primer creciente puede alcanzar valores considerables y aún así no ser visible.

16. Los anteriores valores son aproximados y para obtenerlos se ha supuesto que la mínima elongación entre el primer creciente y el Sol es de unos 10 grados. Ver más adelante el límite de Danjon.



Dibujo 5.5. Teoría de las fases lunares.

cuyo ancho queremos averiguar.

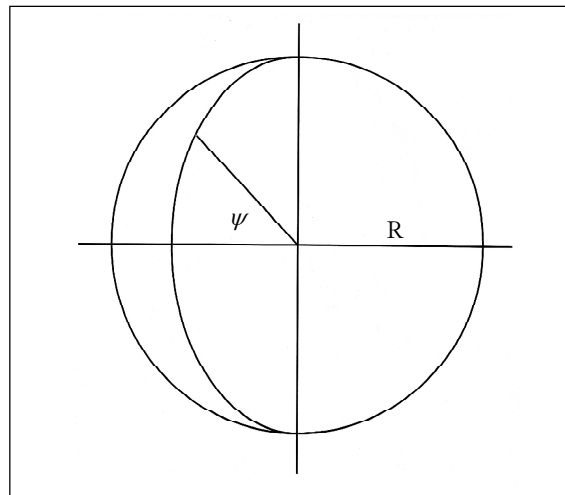
El terminador interno es una elipse que respecto a los ejes del dibujo tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{R^2 \cos^2 \theta} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

como

$$\tan \psi = \frac{x}{y}; \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{\tan^2 \psi + \sec^2 \theta}},$$

entonces el ancho del creciente será



Dibujo 6.5. Teoría de las fases lunares.

$$\omega(\theta, \psi) = R - \frac{x}{\cos \psi} = R \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \theta + \cos^2 \psi}} \right), \quad (5.5)$$

y el máximo ancho del creciente para una elongación dada es

$$\omega(\theta) = R(1 - \cos \theta).$$

Sea  $A$  el área iluminada de la Luna, que será igual a la diferencia entre el área de un semicírculo y el de una simielipse

$$A = \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi R (R \cos \theta) = \frac{1}{2} \pi R^2 (1 - \cos \theta).$$

La fase se define como la relación entre el área iluminada y el área total

$$k = \frac{A}{\pi R^2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \chi).$$

Nótese cómo la fase al principio crece lentamente en función de la elongación, para aumentar con más rapidez posteriormente. Por ejemplo, en el primer día aumenta el área iluminada en un 1%, pero en el quinto día lo hace en un 8%.

Hay que tener presente que las fórmulas obtenidas en este epígrafe son válidas si se desprecia el tamaño aparente del Sol. El error cometido con esta suposición es imperceptible.<sup>17</sup>

### El límite de Danjon

En el curso de una investigación sobre fotometría lunar, André Danjon observó en el año 1931 un joven creciente, notando que tenía entre sus cuernos una extensión menor de 180 grados medidos desde el centro de la Luna, en contra de lo requerido por la teoría de las fases lunares que exige 180 grados. Una investigación más amplia demostró que este era un fenómeno habitual, no limitado a la observación visual, ya que con igual extensión es observado en las placas fotográficas. A menor distancia angular entre el Sol y la Luna es más acusado el acortamiento del limbo, observándose crecientes sensiblemente menores que noventa grados.<sup>18</sup>

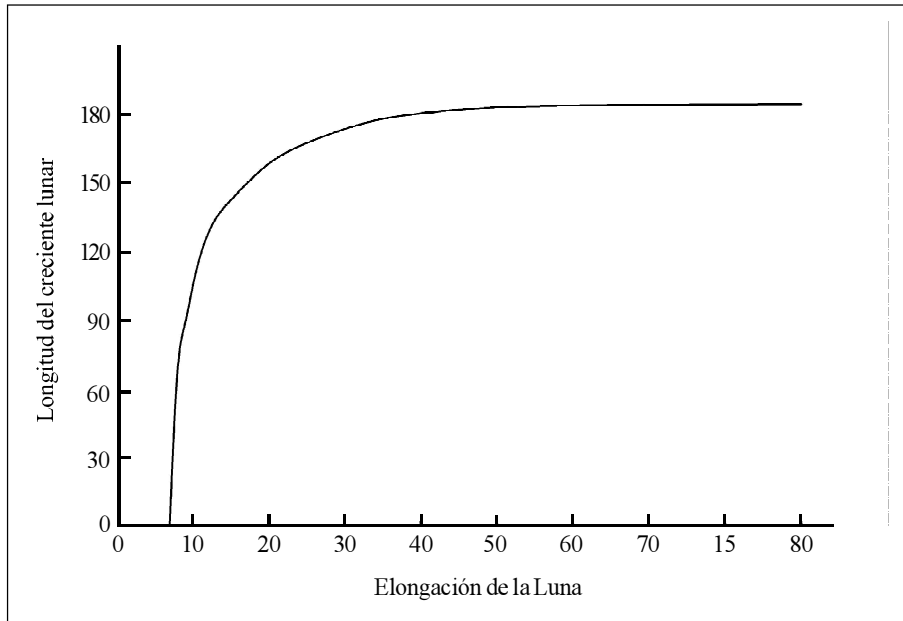
De la información reunida, Danjon ajustó los datos a la curva de la gráfica 4.5.<sup>19</sup> Extrapolando llegó a la conclusión de que cuando la elongación alcanza 7 grados la Luna deja de ser visible. Como la máxima distancia angular del Sol y la Luna en el momento de la conjunción es sólo 5.15 grados, Danjon concluyó que en cada lunación existe un intervalo de tiempo en que la Luna es invisible.

17. McNally D., "The length of the lunar crescent", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **24** (1983) 417-429.

18. Danjon A., "Jeunes et vieilles lunes", *Bulletin de la Société Astronomique de France* **46** (1932) 57-66, Danjon A., "Le croissant lunaire", *Bulletin de la Société Astronomique de France* **50** (1936) 57-65 y Ashbrook J., "More about the visibility of the lunar crescent", *Sky and Telescope* **43** (1972) 95-96. El acortamiento del limbo lunar ya fue reseñado con anterioridad, Hopkins B. J., "Abnormal appearance of the lunar crescent", *The Observatory* **6** (1883) 247-248.

19. La elongación está corregida por el paralaje lunar. Los extremos de los cuernos de la Luna son observados con discontinuidad, como una sucesión de granos luminosos sobre un fondo oscuro. Las observaciones de Danjon toman como extremo del creciente el último de estos granos.





Gráfica 4.5. Acortamiento de los cuernos lunares.

Otros autores han dado valores diferentes del límite de Danjon. Ilyas apoyándose en la dispersión de valores obtenidos por Danjon y el distinto peso que debe asociarse a cada observación, postuló que el límite angular entre la Luna y el Sol debía ser de 10.5 grados.<sup>20</sup> Sobre bases teóricas McNally estableció el límite de Danjon en 5 grados. Por su parte Schaefer, también teóricamente, ajustó el límite a 7.5 grados.<sup>21</sup> Una investigación exhaustiva de todos los jóvenes crecientes observados, realizada por Fatoohi, Stephenson y Al-Dargazelli, que reunía incluso observaciones de Babilonia, concluyó que el límite de Danjon o mínima distancia que la Luna debe mantener con el Sol para ser visible, es de 7.5 grados, valor que adoptaremos en lo que sigue.<sup>22</sup>

Si bien no es posible ver la Luna desde la superficie terrestre a menos de 7.5 grados del Sol, no ocurre lo mismo cuando la observación es realizada desde fuera de la atmósfera. La Luna ha sido fotografiada a 2° de elongación con una cámara colocada en un cohete, observándose un irregular brillo en el limbo lunar, producido por la débil iluminación producida por la luz rasante que llega del Sol.<sup>23</sup>

20. Ilyas M., "The Danjon limit of lunar visibility: a re-examination", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **77** (1983) 214-219 y Ilyas M., "Limb Shortening and the limiting elongation for the lunar crescent's visibility", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **25** (1984) 421-422

21. Schaefer B. D., "Length of the lunar crescent", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **32** (1991) 265-277.

22. Fatoohi L. J., Stephenson F. R., Al-Dargazelli S. S., "The Danjon limit of first visibility of the lunar crescent", *The Observatory* **118** (1998) 65-72.

23. Koomen M. J., Seal R. T., Tousey R., "Moon photographed at 2° solar elongation", *Astronomical Journal* **72** (1967) 808-809.

Danjon explicó que el acortamiento del limbo lunar es causado por el apantallamiento de las montañas lunares. Cuando la Luna está muy próxima al Sol, las montañas lunares enfrentan a la Tierra su parte oscura. Además, las sombras de estas montañas se proyectan sobre la superficie lunar, y por último, las montañas iluminadas son ocultadas por otras montañas que no lo están. A favor de esta hipótesis de Danjon habla el aspecto que toma el terminador interno cuando la fase lunar está más avanzada. Se observa una línea con múltiples irregularidades, reflejo de la diferencia de albedo de distintas partes de la superficie lunar y del efecto de las sombras proyectadas por las montañas.

Según McNally el acortamiento del limbo es un efecto de la atmósfera terrestre; en concreto de la turbulencia atmosférica, que impide ver una imagen compacta, haciendo que se disperse varios segundos de arco. En la zona de los cuernos lunares, el ancho iluminado es muy estrecho, menor que el tamaño de la turbulencia atmosférica. Esto significa que esa zona del creciente será dispersada hasta un tamaño igual al de turbulencia. El resultado es una disminución del contraste de la zona iluminada respecto al fondo del cielo, siendo insuficiente para ser observado.

Yallop ha sugerido otra posible explicación del acortamiento del limbo lunar. Según su hipótesis la luz cenicienta disminuye el contraste de los cuernos del creciente, haciendo que descienda más abajo del valor umbral para ser perceptible.

Por su parte, Schaefer argumenta que el acortamiento del creciente es debido a la brusca caída de brillo de los cuernos, de tal forma que es inferior al umbral para la detección visual. La disminución de la brillantez es debido a tres razones. La primera es el rápido estrechamiento de los cuernos. La segunda razón es que los cuernos son regiones iluminadas por un Sol muy cercano al horizonte, incidiendo los rayos muy tangencialmente. Por último, las irregularidades de la superficie lunar crean sombras en los polos, que cubren zonas más amplias que las producidas en el ecuador.

Lo que es importante para la Hemerología es el límite de Danjon y no la causa que lo produce. Es indudable que el límite de Danjon por sí sólo no puede ser un criterio para asegurar la visibilidad del primer creciente. Que la elongación entre el Sol y la Luna sea más de 7.5 grados no significa, ni mucho menos, que la Luna sea visible. Aún así, se han desarrollado criterios de visibilidad basados en el límite de Danjon. Es el caso del criterio adoptado en la conferencia para la reforma del calendario islámico desarrollada en Estambul en 1978, que estableció que el creciente es visible si su separación del Sol es mayor que 8° y la diferencia de altitud es mayor que 5°. Este mismo criterio ha sido sugerido por el observatorio de Kandilli en Turquía.

Al mismo grupo de criterio se podría asociar el seguido por el Real Observatorio de Greenwich: “es improbable que el nuevo creciente sea visible a menos que la elongación exceda 10° y que la altitud de la Luna supere los 5° cuando la depresión del Sol sea 3°”.

### **Parámetros para el estudio del primer creciente lunar**

La determinación del día en que se observa el primer creciente lunar en un lugar determinado depende de seis parámetros, que son las tres coordenadas de los dos astros implicados, a lo que hay que añadir las condiciones atmosféricas. Si despreciamos las variaciones de distancia que en sus órbitas tienen el Sol y la Luna respecto a la Tierra y si se toman unas condiciones atmosféricas típicas, nos quedarán sólo dos parámetros, siempre y cuando las condiciones se den en el momento del ocaso solar. Normalmente

estos parámetros son las diferencias de altura y de azimut entre el Sol y la Luna en el momento del ocaso solar:  $\Delta h$  y  $\Delta Z$ .<sup>24</sup> A veces estas magnitudes se miden desde centro a centro de los astros, mientras que en otras ocasiones se hace desde el limbo inferior de la Luna. Unos autores toman en cuenta el paralaje y la refracción, mientras que otros no lo hacen.

Otra magnitud utilizada es el *lag* o tiempo transcurrido entre las puestas del Sol y de la Luna,  $\Delta t$ . Desde antiguo se usan unos parámetros que han conservado sus primitivos nombres. Es el caso del arco de luz  $a_L$  que lo entendemos como la distancia angular entre los centros del Sol y de la Luna sin considerar ni el paralaje ni la refracción. El arco de visión  $a_v$  es la distancia vertical entre los centros del Sol y de la Luna, sin paralaje ni refracción. El arco de separación  $a_s$  es la separación ecuatorial en ascensión recta entre los centros del Sol y de la Luna, sin refracción ni paralaje.

Cuando nos referimos a la edad de la Luna en este contexto, la entendemos como el tiempo transcurrido desde el momento de la conjunción hasta el ocaso del Sol. La depresión solar  $s$  es el ángulo bajo el horizonte del centro del Sol, tomado con signo positivo, con paralaje y refracción. La elongación  $\theta$  es la distancia angular entre los centros del Sol y de la Luna, tomando en consideración el paralaje y la refracción.

### Criterios empíricos

El primer criterio moderno sobre visibilidad del creciente lunar fue establecido por Fotheringham en el año 1910. Utilizando las observaciones realizadas principalmente por Schmidt en Atenas durante la segunda mitad del siglo XIX, obtuvo una gráfica que usa como coordenadas la diferencia de azimut de los centros del Sol y de la Luna, y la altura del centro de la Luna, ambas calculadas en el momento de la puesta del Sol, sin tener en cuenta ni el paralaje ni la refracción.<sup>25</sup> Fotheringham eligió las observaciones negativas del primer creciente para representar la curva. Maunder modificó el anterior criterio, al elegir las observaciones positivas, al entender que eran más fiables las observaciones del primer creciente que las no visiones.<sup>26</sup> Este último criterio altitud-azimut es utilizado por las Efemérides India con una pequeña corrección. La tabla 3.5 da los valores asociados a estos tres criterios.<sup>27</sup>

Ilyas amplió el criterio para diferencias de azimut mayores de  $20^\circ$ , situación que se da cuando la latitud geográfica del lugar de observación es elevada.<sup>28</sup> Para grandes valores del azimut, la mínima altura para la que es observable el primer creciente es cercana a 4 grados.

24. Si la Luna está en el perigeo su tamaño aparente será mayor y lo mismo ocurrirá con el creciente, lo que favorecerá la observación. Esta circunstancia puede ser significativa, así que la suposición del texto lleva implícito este error.

25. Fotheringham J. K., M. A., Litt D., "On the smallest visible phase of the Moon", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **70** (1910) 527-531 y Fotheringham J. K., "The visibility of the lunar crescent", *The Observatory* **44** (1921) 308-311.

26. Maunder E. W., "On the smallest visible phase of the Moon", *Journal of the British Astronomical Association* **21** (1911) 355-362.

27. Ashbrook J., "Some very thin lunar crescents", *Sky and Telescope* **42** (1971) 78-79.

28. Ilyas M., "Limiting altitud separation in the new Moon's first visibility criterion", *Astronomy and Astrophysics* **206** (1988) 13-135. En este artículo se presenta una modificación del criterio altura-azimut, ya que la gráfica de visibilidad está en función de altura-arco de luz.

Diferencia de azimut	Altitud de la Luna		
	Fotheringham	Maunder	India
0	12.0	11.0	10.4
5	11.9	10.5	10.0
10	11.4	9.5	9.3
15	11.0	8.0	8.0
20	10.0	6.0	6.2
23	7.7	-	-

Tabla 3.5. Criterios azimut-altura.

Caldwell y Laney del Observatorio Astronómico de Sudáfrica SAAO han mejorado este criterio altitud-azimut tras analizar todos los datos disponibles sobre la observación del primer creciente.<sup>29</sup> En la gráfica 5.5 se han trazado dos curvas. Más arriba de la superior se encuentran los crecientes que serán visibles. Debajo de la curva superior están los crecientes que son improbables de ver. La curva inferior es otro límite, más abajo del cual es imposible la observación del creciente, incluso con ayuda óptica. Hay que advertir que en este criterio del SAAO la altura de la Luna es la altura topocéntrica (con refracción incluida) del limbo inferior de la Luna en el momento de la puesta aparente del Sol.<sup>30</sup>

Algunos de los valores en la que se basa la gráfica 5.5 vienen recogidos en la tabla 3.5, donde  $\Delta h_1$  y  $\Delta h_2$  son las alturas aparentes del limbo inferior de la Luna en el momento de la puesta del Sol para las dos curvas límites anteriores.

Este criterio se puede poner de diversas formas. Una muy interesante viene dada por las relaciones

$$\Delta h + \frac{a_L}{3} \geq 11.3 \Rightarrow \text{visible}$$

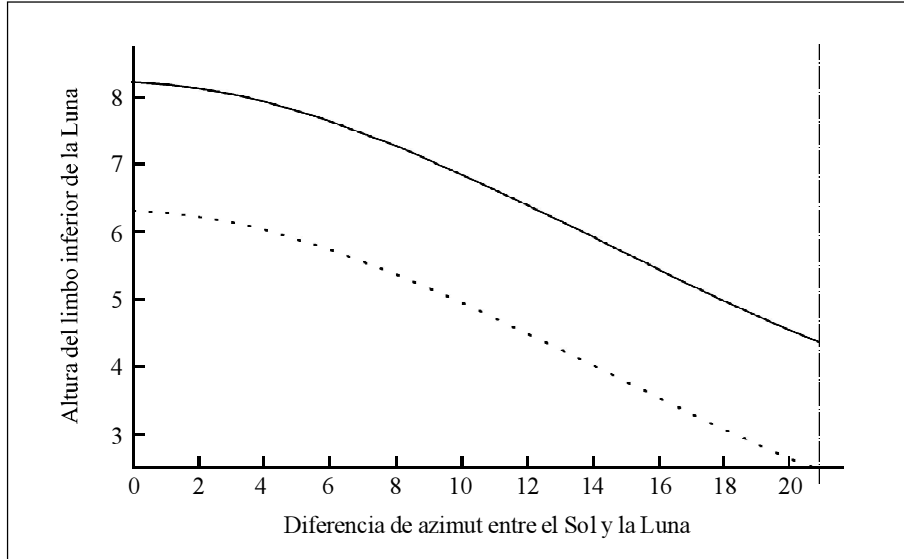
$$9.0 \leq \Delta h + \frac{a_L}{3} < 11.3 \Rightarrow \text{improbable}$$

$$\Delta h + \frac{a_L}{3} < 9.0 \Rightarrow \text{imposible.}$$

Se han formulado otros criterios empíricos. Khalid Shaukat del Comité para el creciente de Nueva York ha establecido un criterio que relaciona la altura topocéntrica de la Luna en el momento de la puesta de Sol con el ancho del creciente expresado en minutos de arco. Según este criterio, para que el creciente sea visible es necesario que la altitud de la Luna sea superior a 3.4 grados y que el ancho del creciente cumpla la desigualdad

29. Caldwell J. A. R., Laney C. D., "First visibility of the lunar crescent", *African Skies* 5 (2001) 15-23.

30. Téngase presente que el azimut no es afectado por la aberración y sólo muy ligeramente por el paralaje.



Gráfica 5.5. Criterio SAAO de visibilidad del creciente lunar.

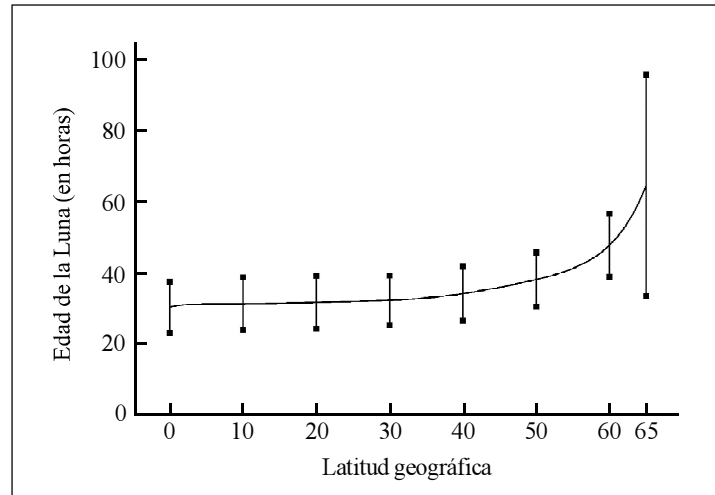
$$\frac{\Delta h}{12.7} + \frac{\omega}{1.2} > 1.$$

El criterio de Yallop usa un coeficiente  $q$  dependiente de la diferencia de altitud geocéntrica de la Luna y el Sol y del ancho del creciente, ambos parámetros medidos en el mejor momento, que se calcula sumándole al momento de la puesta del Sol las 4/9 partes del *lag*.

El más antiguo criterio para determinar el día de observación del primer creciente lunar fue desarrollado en Babilonia. Establece que la edad de la Luna debe tener más de 24 horas en el momento de la observación y entre la puesta de Sol y la de la Luna debe

$\Delta Z$	$\Delta h_1$	$\Delta h_2$	$\Delta Z$	$\Delta h_1$	$\Delta h_1$
0.0	8.19	6.29	11.0	6.61	4.71
1.0	8.16	6.26	12.0	6.38	4.48
2.0	8.10	6.20	13.0	6.15	4.25
3.0	8.02	6.12	14.0	5.91	4.01
4.0	7.91	6.01	15.0	5.67	3.77
5.0	7.77	5.87	16.0	5.43	3.53
6.0	7.62	5.72	17.0	5.19	3.29
7.0	7.44	5.54	18.0	4.96	3.06
8.0	7.26	5.36	19.0	4.74	2.84
9.0	7.05	5.15	20.0	4.53	2.63
10.0	6.80	4.94	21.0	4.33	2.43

Tabla 3.5. Criterio SAAO de visibilidad del creciente lunar.



Gráfica 6.5. La edad como criterio.

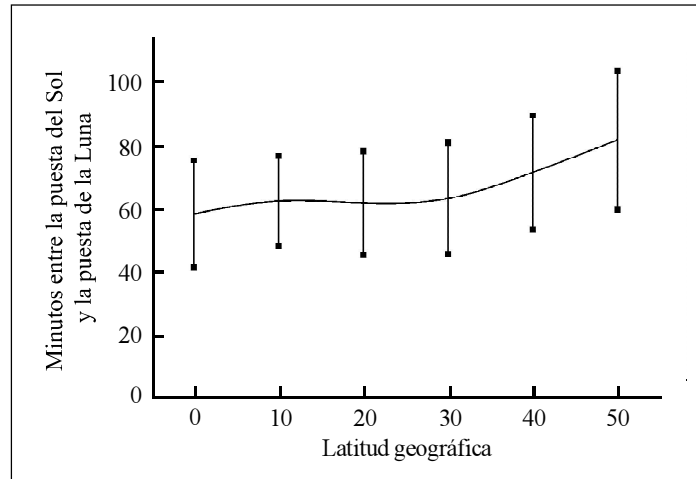
haber transcurrido más de 48 minutos.<sup>31</sup> No obstante, el criterio antiguo que más se ajusta a la realidad astronómica fue formulado por al-Tabai y afirma que el creciente sería visto si, en el momento de la puesta de la Luna, la depresión del Sol es  $9^{\circ}.5$  o superior.

Como se ha indicado, la determinación del día de observación del primer creciente depende de varios parámetros, así que el uso de uno sólo de ellos como criterio de visibilidad es insatisfactorio. Esto es lo que ocurre con la edad de la Luna, que en ocasiones ha sido empleada para saber si es o no visible.<sup>32</sup> La gráfica 6.5 ha sido determinada teóricamente a partir del criterio SAAO altitud-azimut. Si la edad de la Luna está por encima de la curva, el primer creciente será probablemente visto. Las líneas verticales representan la desviación cuadrática media, una indicación de la dispersión de los valores, causada principalmente por motivos estacionales. La edad de la Luna sería un buen criterio si su representación gráfica fuera una línea recta horizontal y si la dispersión de los valores fuera pequeña. Ninguna de las dos cosas ocurre.<sup>33</sup>

31. Bruin F., "The first visibility of the lunar crescent", *Vistas in Astronomy* **21** (1977) 331-358.

32. En cuanto nosotros sepamos el más joven creciente registrado fue el observado por John Pierce, que vio la Luna en Tennessee el 25 de febrero de 1990, con una edad de 15.0 horas. Con ayuda óptica el record es la observación de Jim Stamm, efectuada el 20 de enero de 1996 en Arizona, cuando el creciente tenía sólo 12.1 horas, para esta observación se usó un telescopio de 8 pulgadas a 50 aumentos, Schaefer B. E., Ahmad I. A., Dogget L., "Records for young Moon sightings", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **34** (1993) 53-56, Schaefer B. E., "Lunar crescent visibility", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **37** (1996) 759-768 y Loewinger Y., "Some comments on the article of Dr. E. E. Schaefer, 'Visibility of the lunar crescent' QJRAS(1988), 29. 511-523 and related papers, by the autor *et al*", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **36** (1995) 449-452. Bajo condiciones excepcionales es posible que los records sean mejorados, también ayudaría que la observación fuese realizada en altura.

33. Ilyas M., "Age as a criterion of Moon's earliest visibility", *The Observatory* **103** (1983) 26-28.



Gráfica 7.5. El lag como criterio.

Otro criterio de un solo parámetro es el *lag* o tiempo transcurrido entre los ocasos del Sol y la Luna. La gráfica 7.5 nos muestra como varía este parámetro con respecto a la latitud del lugar de observación; por encima de la línea estarían los crecientes visibles. Las líneas verticales muestran la dispersión de valores. Se comprueba que el *lag* tampoco es buen criterio por no tener una representación en línea recta horizontal y tener una gran dispersión.<sup>34</sup>

Una indicación del grado de error que se comete con los criterios anteriores es dando la zona de incertidumbre. Se denomina así a la extensión en longitud geográfica terrestre donde no se puede asegurar si el creciente será o no visto. Una estimación de esta zona de incertidumbre se obtiene a partir de la desviación cuadrática media. Para el caso de la edad de la Luna, tiene un valor de unas 8 horas para latitudes medias, que corresponde a 120° en longitud geográfica, así que la zona total de incertidumbre es de 240° y toda la Tierra se encontraría en una zona de incertidumbre de  $1.5\sigma$ . Para el *lag* la desviación es de 18 minutos de tiempo, que corresponden a 4°.5, ya que cada 4 minutos el cielo gira 1°. Como en promedio la Luna se mueve respecto al Sol 0°.5 en una hora, la anterior separación la recorrerá en 9 horas, que corresponden a 135° de longitud geográfica. La extensión de la zona de incertidumbre es 270°. Toda la Tierra se encontraría en la zona de incertidumbre de  $1.3\sigma$ .<sup>35</sup>

Un procedimiento diferente debemos utilizar para averiguar la zona de incertidum-

34. Schaefer B.E., "Lunar crescent visibility", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **37** (1996) 759-768.

35. Téngase presente que los criterios edad y *lag* han sido obtenidos y analizados con el criterio SAAO, que lo suponemos acorde con la observación. Los criterios edad y *lag* pueden ser confrontados con la observación. El análisis realizado por Schaefer con este método da un ancho de la zona de incertidumbre de 238° para el criterio de edad y 150° para el *lag*. Ilyas ha propuesto un criterio basado en el *lag* y la latitud, que se aparta sensiblemente del que exponemos en el texto, Ilyas M., "Visibility of the young crescent Moon", *Journal British Astronomical Association* **95** (1985) 183-184.

bre asociada con el criterio azimut-altura. Al comparar el criterio SAAO con las observaciones se encuentran discordancias. El valor medio de las desviaciones de la altura de la Luna a la puesta del Sol para las observaciones discordantes es de  $1^{\circ}.6$ . Para estimar el ancho de la zona de incertidumbre supongamos que tanto el Sol como la Luna se mueven por el ecuador. Entonces para determinar la separación entre el Sol y Luna hay que dividir  $1^{\circ}.6$  entre el coseno de la latitud geográfica. Tomado una latitud de  $40^{\circ}$  se obtiene una separación entre los dos astros de  $2^{\circ}.1$ , lo que significa una zona de incertidumbre de una extensión aproximada de  $65^{\circ}$ .<sup>36</sup>

### Línea de cambio de fecha lunar

Para cada paralelo geográfico existirá un punto donde se verá el primer creciente más al este que en cualquier otro lugar de ese paralelo. Puntos situados en la misma latitud y que se encuentren más al oeste de ese punto, observarán el primer creciente en un intervalo de 24 horas desde la primera observación. Esto es así, porque cuando la observación es realizada más al oeste, más tiempo ha transcurrido desde la conjunción, lo que significa que la Luna se habrá apartado más del Sol, siendo más factible la observación del creciente. Por tanto, si el primer creciente es observado en un lugar, también lo será en todas las posiciones más al oeste situadas en el mismo paralelo y esto siempre en el intervalo de un día solar.

El lugar de esta primera observación no tendrá la misma latitud geográfica para todos los meridianos terrestres. El lugar geométrico de todos los puntos extremos de cada meridiano donde la observación del creciente se realiza más al este, forma una curva denominada línea de cambio de fecha lunar (o LDL por su acrónimo en inglés). El nombre se entiende porque el mes lunar se inicia al anochecer del día en que es observado el primer creciente lunar; así mientras los lugares situados al oeste de la LDL comienzan el nuevo mes, los sitios al este todavía están en el mes anterior.

Nótese que la LDL es parecida a la línea de cambio de fecha solar, ya que también hay que saltar un día lunar al cruzarla hacia el oeste. Pero mientras la línea de cambio de fecha solar coincide siempre con el mismo meridiano (el antimeridiano de Greenwich), no ocurre así con la LDL, puesto que la forma que tiene es aproximadamente una parábola abierta hacia el oeste y tanto su posición como su forma cambia de mes a mes. Por otra parte, la LDL tiene sentido solamente para el cambio del día del mes pero no para el cambio de día solar.

El apex o vértice de la pseudoparábola que forma la LDL es el punto de la Tierra en donde es visible el creciente en la posición más al este.<sup>37</sup> En la gráfica 8.5 aparece la LDL para el mes de Safar del año 1431 de la Hégira, según el criterio de las Efemérides India. Los puntos situados al este de la curva se encuentran en el último día del mes de Muharram y los situados al oeste ya están en el primer día de Safar.

A consecuencia de la movilidad del LDL resulta que un mismo mes tendrá duraciones de 29 y 30 días según el lugar de observación. Si la LDL se desplaza hacia el este, entonces la zona comprendida entre la nueva línea y la del mes anterior (haciendo el

---

36. El criterio SAAO ha sido comparado con las observaciones hechas por Schmidt. Este análisis muestra que sólo hay observaciones discordantes entre las observaciones negativas de Schmidt.

37. Curiosamente el apex no resulta ser el punto de la Tierra donde es observado el primer creciente con menor edad.



recorrido hacia el oeste) tendrá un mes de 29 día y será de 30 días el mes si es observado en el resto de la Tierra. Sin embargo, si la LDL se desplaza hacia el oeste, entonces la región comprendida entre la antigua LDL y la nueva (moviéndonos hacia el oeste) tendrá 30 días y 29 serán los días del mismo mes en las restantes zonas de la Tierra.

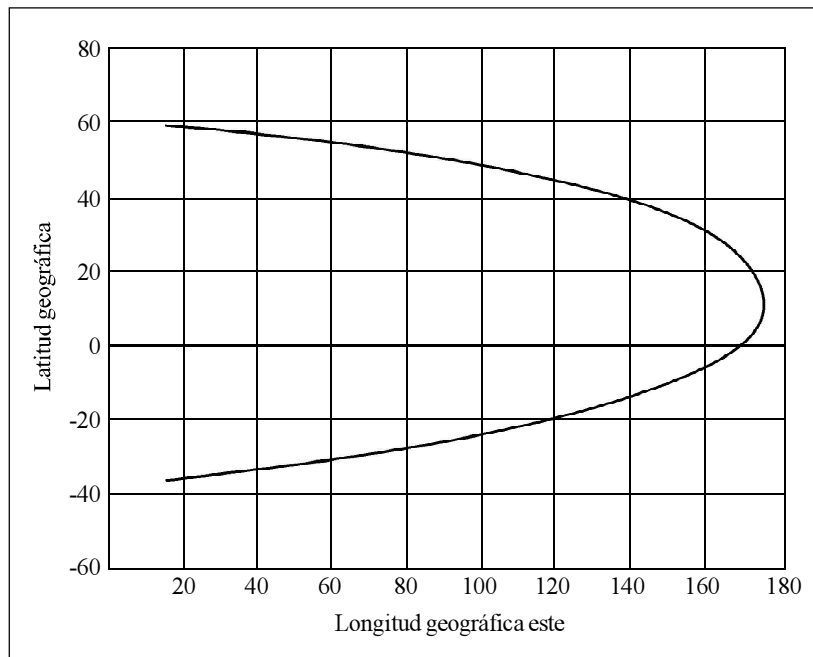
El apex se puede encontrar tanto en el hemisferio norte como en el sur, entre las latitudes geográficas de 56 N y 56 S aproximadamente. En la gráfica 9.5 se observa como varía la latitud del apex de la línea de cambio de fecha lunar, comprobándose que se encuentra sometido a un periodo de 19 años.

### Fotometría

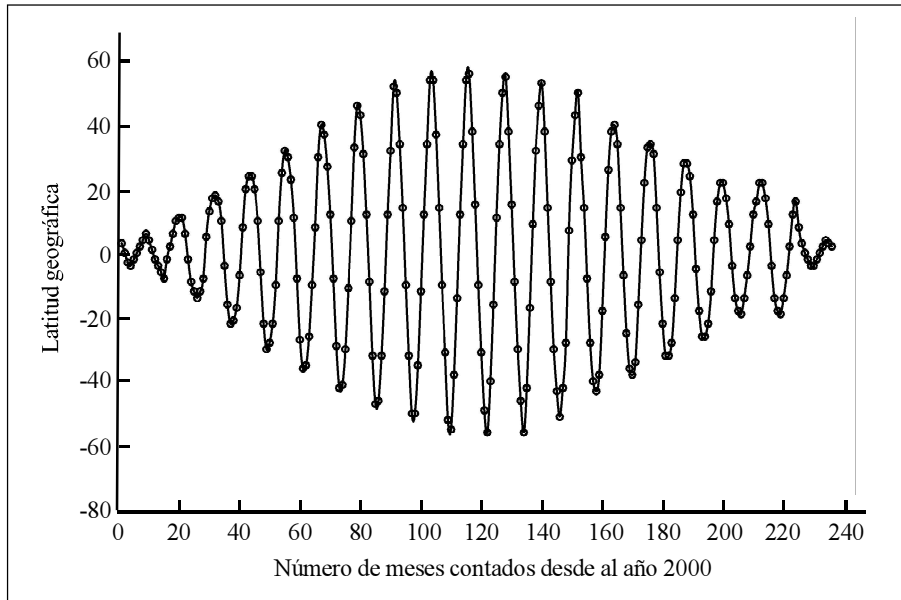
Varias magnitudes vamos a usar en el estudio de la fotometría lunar. Un primer concepto es el de flujo radiante, que se entiende como la potencia total emitida por una superficie. Su unidad en el Sistema Internacional es el lumen, que se define como una candela por estereoradián.

La luminancia o brillo, que representamos por  $L$ , es el flujo emitido en una dirección dada por unidad de ángulo sólido y por unidad de área perpendicular a la dirección de emisión. La unidad de luminancia es la candela por metro cuadrado.

La luminancia es una magnitud intrínseca de la superficie luminosa y no queda alterada por la distancia desde la que se observe. No ocurre lo mismo con la iluminación  $E$ , que es definida como la potencia luminosa que incide sobre la unidad de área perpendicular a la dirección de propagación. Su unidad es el lux, que es igual al lumen/m<sup>2</sup>. La iluminación disminuye con la inversa de la distancia al cuadrado al foco luminoso.



Gráfica 8.5. Línea de cambio de fecha lunar para el mes de Safar del año 1431 de la Hégira. El apex corresponde a 11°N y 176°E aproximadamente.



Gráfica 9.5. Latitud geográfica del apex de la línea de cambio de fecha lunar.

Existe una simple relación entre la luminancia y la iluminación. Sea  $\Phi$  el flujo radiante que llega a la superficie  $S$  perpendicular a la dirección de propagación y supongamos, por simplicidad, que es uniforme. Entonces se cumplirá

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{L\sigma\Omega}{S}$$

donde  $L$  es la luminancia del emisor,  $\sigma$  es el área de la superficie luminosa que ilumina a la superficie  $S$  y  $\Omega$  es el ángulo sólido de la superficie  $S$ . Por definición de ángulo sólido

$$\Omega = \frac{S}{r^2}; \quad \Gamma = \frac{\sigma}{r^2}$$

donde  $r$  es la distancia entre emisor y receptor y  $\Gamma$  es el ángulo sólido de la superficie radiante tal como es medido desde la superficie receptora. Combinando las anteriores expresiones se llega a

$$E = L\Gamma,$$

que nos permite calcular la luminancia o brillo luminoso a partir de la iluminación que es una magnitud fácilmente medible. El ángulo sólido del objeto luminoso se calcula fácilmente si se conoce su tamaño angular; por ejemplo, para una superficie circular de radio angular  $\alpha$

$$\Gamma = \frac{\pi\alpha^2}{4}.$$

La magnitud estelar  $m$  se define de tal forma que un aumento de 5 unidades corresponde a un aumento de 100 veces su iluminación. Se toma arbitrariamente como magnitud cero la correspondiente a un objeto que tiene una iluminación de  $2.5 \cdot 10^{-6}$  lux. La

correspondiente expresión matemática es

$$m = -2.5 \log E - 13.988 \quad (6.5)$$

estando medido  $E$  en lux.

La extinción atmosférica es el debilitamiento que experimenta la luz al pasar por la atmósfera. Es causada por la dispersión de Rayleigh y la absorción molecular del ozono y del vapor de agua, a lo que añadir la dispersión por aerosoles. Aunque la dispersión de Rayleigh se puede calcular con precisión, no ocurre lo mismo con la absorción por la capa de ozono que puede variar significativamente en un intervalo de algunas horas, siendo además dependiente de la latitud y de la estación. En cuanto a la absorción por el vapor de agua y la dispersión por aerosoles no pueden ser calculados de forma precisa por las variaciones que experimentan de un lugar a otro.<sup>38</sup>

La disminución de la luminancia obedece a la ley de Lambert-Beer, que expresa un decaimiento exponencial

$$L = L_0 e^{-\beta x}$$

siendo  $L_0$  la luminancia observada fuera de la atmósfera,  $x$  la distancia recorrida por la luz en la atmósfera y  $\beta$  es un parámetro llamado opacidad (con unidades de inversa de la distancia).

Se define el espesor óptico por

$$d\tau = \beta dx$$

entonces la ley de Lambert-Beer aparece en la forma

$$L = L_0 e^{-\tau}.$$

El espesor óptico es adimensional y depende del grosor de la capa atmosférica atravesada por la luz, por tanto es variable según la distancia cenital del astro. Para simplificar los cálculos supongamos provisionalmente una atmósfera uniforme de espesor  $d$  (modelo de Cassini). Sea  $D$  la distancia recorrida por la luz a través de la atmósfera. Se le llama *air-mass* o masa de aire a la relación

$$X(z) = \frac{D}{d},$$

entonces la ley de Lambert-Beer queda

$$L = L_0 e^{-\tau_0 X(z)}$$

donde  $\tau_0$  es el espesor óptico correspondiente a una capa atmosférica de espesor  $d$ . Con el propósito de relacionar la extinción con la magnitud estelar se redefine la ley de Lambert-Beer de la siguiente forma

$$L = L_0 10^{-0.4kX(z)}$$

a  $k$  se le llama coeficiente de extinción y tiene unidades de magnitudes por *air-mass*.

---

38. Hayes D. S., "A rediscussion of the atmospheric extinction and the absolute spectral-energy distribution of Vega", *The Astrophysical Journal* **197** (1975) 593-601. Un ejemplo de aplicación del cálculo del coeficiente de extinción a la observación del primer creciente lunar puede ser visto en Schaefer B. E., "Lunar visibility and the crucifixión", *Quarterly Journal of the Astronomical Society* **31** (1990) 53-67.

Relacionando las dos formas de la ley de la extinción atmosférica se llega a

$$k = 1.0857\tau_0.$$

La relación entre la magnitud y el coeficiente de extinción resulta ser lineal

$$m = m_0 + kX(z) \quad (7.5)$$

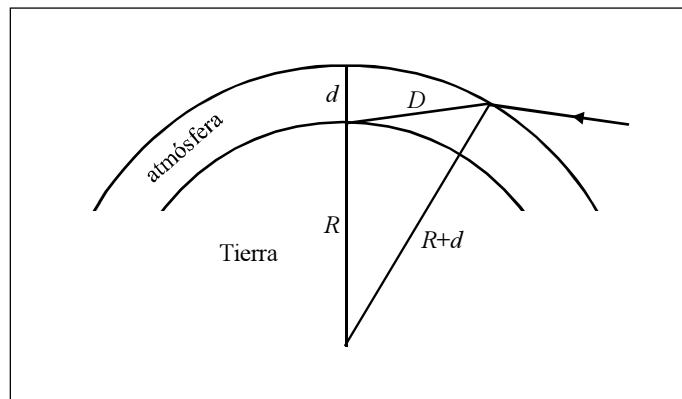
siendo  $m_0$  la magnitud fuera de la atmósfera. La anterior fórmula es la que se usa para determinar el coeficiente de extinción. El coeficiente de extinción visual medio es mínimo en zonas marítimas (0.11-0.17 magnitudes por *air-mass*),<sup>39</sup> de valor medio en lugares continentales (0.17-0.24) y alta en zonas urbanas (0.27-0.42), siendo más alto en verano. Las variaciones que puede experimentar el coeficiente de extinción en una noche pueden ser muy altas, dependiendo de la estabilidad de la atmósfera del lugar de observación. Se alcanzan variaciones que superan el 100% del valor medio, y esto puede ocurrir sin que se aprecie ningún cambio a simple vista.

El problema de la extinción atmosférica requiere el conocimiento de la función  $X(z)$ . A partir del dibujo 7.5 se encuentra la relación

$$X = \sqrt{(a \cos z)^2 + 2a + 1} - a \cos z \quad (8.5)$$

siendo  $a = d/R$  y  $z$  la distancia cenital. Un valor de  $a$  en torno a los 740, que corresponde a una atmósfera uniforme de 8.6 kilómetros, da valores aceptables para el *air-mass* a grandes distancias cenitales. Se han desarrollado varias fórmulas para la determinación de  $X(z)$ , una de ellas nos permite determinar el coeficiente  $a$  mediante la siguiente expresión

$$a = 462.46 + \frac{2.8121}{\cos^2 z + 0.22 \cos z + 0.1}$$



Dibujo 7.5. Trayectoria de un rayo a través de la atmósfera.

39. Pakstiene E., Zdanavicius K., Bartsiute S., "A study of atmospheric extinction by stellar photometry in the Vilnius system", *Baltic Astronomy* **10** (2001) 439-460. El polvo volcánico afecta severamente al coeficiente de extinción, Przybylski A. "The reduction of photometric observations affected by variable extinction", *Acta Astronomica* **14** (1964) 285-296.

y con este valor hacer uso de (8.5).<sup>40</sup>

### Luminancia del cielo crepuscular

No se ha realizado una investigación sistemática de la luminancia del cielo crepuscular. Sólo se tienen datos muy parciales pero que nos permiten con confianza obtener los rasgos principales de este fenómeno.<sup>41</sup>

El brillo crepuscular es ocasionado por la difusión de la luz en la atmósfera. Se distingue el brillo primario, causado por la difusión directa de la luz solar y el brillo secundario, resultado de la difusión en la troposfera de los anteriores rayos.<sup>42</sup>

Se ha comprobado que el brillo crepuscular varía de día a día y de lugar a lugar. Depende de la elevación del sitio de observación, de tal forma que a mayor altitud, la luminancia observada es menor. Afecta el tipo, color y reflectividad del terreno de alrededor. El grado de polución por aerosoles es un factor determinante, ya que hace aumentar la luz difundida. En invierno se ha observado una menor luminancia que en verano.<sup>43</sup> Hay una sensible diferencia según el nivel de actividad solar. Se estima que la luminancia del crepúsculo disminuye en un factor de 3.6 cuando existe un máximo de actividad solar.<sup>44</sup>

Para la observación realizada en un lugar y momento determinado, la luminancia del cielo depende del ángulo  $s$  del Sol bajo el horizonte; de la altura  $h$  de la zona del cielo que se observa y de la diferencia de azimut  $Z$  entre el lugar donde se pone el Sol y la zona del cielo observada.

Se ha comprobado que el logaritmo de la luminancia es proporcional a  $Z$ , al menos para la gama de valores de interés.<sup>45</sup> Las medidas fotométricas llegan a la conclusión de que el logaritmo de la luminancia también es proporcional a la depresión del Sol para valores comprendido entre  $3^\circ$  a  $11^\circ$ , que son los que nos interesan. La relación entre el logaritmo de la luminancia y la altura sobre el horizonte se ajusta más a una relación polinómica. La depresión es, con diferencia, el factor que tiene mayor importancia. Tanto es así, que se puede tomar, con buena aproximación, un cielo de luminancia

40. Kristensen L. K., "Astronomical refraction and airmass", *Astronomische Nachrichten* **319** (1998) 193-198.

41. Koomen M. J., Lock C., Packer D. M., Scolnik R., Tousey R., Hulbert E. O., "Measurements of the brightness of the twilight sky", *Journal of the Optical Society of America* **42** (1952) 353-356 y Nawar S., "Sky twilight brightness and colour during high solar activity", *The Moon and the Planets* **29** (1983) 99-105.

42. Divari N. B., Plotnikova L. L., "Computed brightness of the twilight sky", *Soviet Astronomy* **9** (1966) 840-852.

43. Mikhail J. S., Asaad A. S., Nawar S., Hassanin N. Y., "Improving the crescent visibility limits due to factors causing decrease in the sky twilight brightness", *Earth, Moon and Planets* **70** (1995) 109-121. Para un mismo día la luminancia del cielo depende de la latitud, cuánto mayor sea, menor será el brillo crepuscular. Esto es debido a que a altas latitudes los rayos solares tienen que atravesar una mayor capa atmosférica.

44. Nawar S., "Solar activity and atmospheric attenuation effects on the visibility of stars and planets during twilight", *The Moon and the Planets* **29** (1983) 107-116.

45. Kastner S. O., "Calculation of the twilight visibility function of near-sun objects", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **70** (1976) 153-168. Lo que a efectos prácticos es de interés no es la luminancia, sino su logaritmo, ya que según la ley de Weber-Fechner el ojo es un detector logarítmico.

$s$	$Z=0^\circ$			$Z=22^\circ.5$		
	$h=0^\circ$	$h=10^\circ$	$h=30^\circ$	$h=0^\circ$	$h=10^\circ$	$h=30^\circ$
0	-	9.294	8.987	9.096	9.070	8.924
3	8.349	8.294	8.096	8.248	8.232	8.005
6	7.021	6.963	6.595	6.896	6.931	6.595
9	5.662	5.595	4.975	5.581	5.516	4.963
12	4.349	4.294	3.896	4.197	4.160	3.817
15	3.565	3.440	3.160	3.397	3.349	3.160

Tabla 4.5. Logaritmo de la luminancia del cielo crepuscular.

uniforme y que dependa sólo de la depresión del Sol.

Según las medidas de Koomen y otros, el logaritmo de la luminancia del cielo crepuscular en Maryland (a 30 metros de altitud) son los dados en la tabla 4.5.

Las unidades están expresadas en números de estrellas de décima magnitud por grado cuadrado  $S_{10}(v)$ ; unidad relacionada con las  $\text{cd}/\text{m}^2$  mediante

$$1 \text{ cd}/\text{m}^2 = 1.219538 \cdot 10^6 S_{10}(v)$$

En la gráfica 10.5 se encuentra una isofoto correspondiente a una depresión del Sol de 5 grados, donde se muestra los puntos de igual luminancia. La gráfica ha sido obtenida interpolando los datos de la anterior tabla. Hemos supuesto que hay simetría a derecha e izquierda de donde se pone el Sol. Como se ve, las diferencias del logaritmo de la luminancia en distintos puntos son mínimas, alcanzando apenas un 2% en la zona de interés. Por esto es aceptable tomar un cielo crepuscular con brillo uniforme. Los valores dados por otros autores están en consonancia entre sí, las diferencias no son significativas. Así que podemos tomar estas medidas para el estudio posterior.

Lo que detecta el ojo es la distribución superficial de fotones que llegan a la retina por unidad de tiempo, es decir, la iluminación retiniana. El mecanismo de detección de un cuerpo luminoso exige distinguir entre objetos resolubles y no resolubles.

Consideremos un cuerpo luminoso de una luminancia  $L$  y de tamaño angular superior a la resolución del ojo.<sup>46</sup> Supongamos que la pupila del ojo tiene una superficie  $S$ , la distancia focal del cristalino es  $f$ , mientras que  $\Gamma$  es el ángulo sólido del cuerpo iluminado, expresado en estereoradianes.

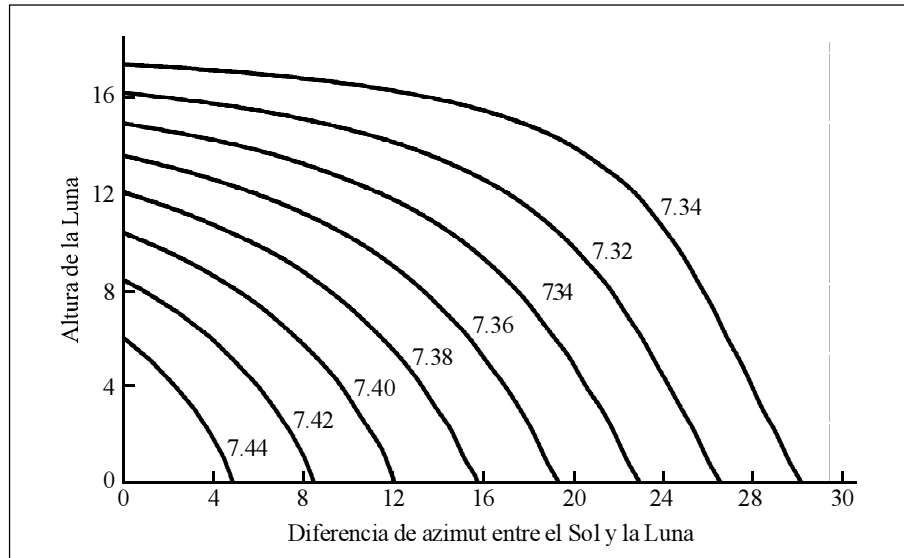
El área de la imagen en la retina es  $\Gamma f^2$ . La iluminación en la retina es

$$E_r = \frac{\Phi}{\Gamma f^2} = \frac{ES}{\Gamma f^2} = \frac{\Gamma LS}{\Gamma f^2} = \frac{LS}{f^2}$$

esto nos viene a decir que para objetos de tamaño superior al de resolución, el ojo responde a la luminancia y no a la iluminación.

Las cosas cambian cuando el objeto tiene un tamaño menor que el poder de resolución del ojo. En este caso, la imagen retiniana del objeto se dispersa hasta que su mínimo tamaño alcanza el poder resolutivo del ojo, que representamos por  $D$  y medimos en radianes. Por ejemplo, si el objeto es circular, la imagen retiniana tendrá un área  $\pi D^2 f^2$  y si el objeto es rectangular (con un ancho inferior al poder de resolución del

46. Tomamos 42 segundos de arco como valor del poder de resolución.



Gráfica 10.5. Isofoto del cielo correspondiente a una depresión del Sol de 5°. Los números sobre las curvas es el logaritmo de la luminancia del cielo.

ojo y una longitud angular  $\alpha$ ) tendrá un área retiniana  $D\alpha f^2$ . La iluminación retiniana en estos casos es

$$E'_r = \frac{\Phi'}{Af^2} = \frac{E'S}{Af^2}$$

donde  $A$  es el área angular de la imagen proyectada en la retina. Vemos entonces que en el caso de objetos no resolubles, el ojo responde a la iluminación del objeto  $E'$  y no a su luminancia.

Se busca la condición mínima para que un objeto luminoso (como la Luna creciente) sea visible al ojo desnudo sobre un fondo luminoso (el cielo crepuscular). Cuando se trata de objetos de tamaño estelar o planetario (es decir, de un tamaño menor que el de resolución) existe una relación bien establecida entre las magnitud luminosa umbral y la luminancia del cielo.<sup>47</sup> Utilizando para la luminancia la unidad de número de estrellas de décima magnitud visual por grado cuadrado, la relación que nos da la mínima iluminación perceptible es

$$E = 4.276 \cdot 10^{-8} \left[ 1 + 1.51 \cdot 10^{-3} \sqrt{0.25786L} \right]^2$$

la iluminación viene expresada en lux y a partir de (6.5) se calcula la magnitud mínima perceptible por el ojo desnudo.<sup>48</sup>

47. Weaver H. F., "The visibility of stars without optical aid", *Astronomical Society of the Pacific* **59** (1947) 232-243 y Nawar, S., "Solar activity and atmospheric attenuation effects on the visibility of stars and planets during twilight", *The Moon and the Planets* **29** (1983) 107-116.

48. Garstang B. H., "Limiting visual magnitude and night sky brightness", *Memorie della Societa Astronomia Italiana* **71** (2000) 83-92.

Cuando el objeto luminoso tiene una extensión que supera la resolución del ojo se hace uso de la relación de Weber

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

siendo  $L$  y  $L'$  las luminancias del fondo y del objeto respectivamente. El umbral de contraste se expresa como una función de la relación de Weber respecto a la luminancia del fondo. La ley de Weber-Fechner establece que la relación de Weber para el umbral es constante.<sup>49</sup> Se puede afirmar que para los valores de las luminancias del cielo crepuscular esta aproximación es aceptable

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.04$$

con una desviación de alrededor del 1%.

No obstante, este planteamiento omite la influencia de la forma del objeto, de sus dimensiones relativas, de su orientación y de su área. Factores que experimentos de laboratorio han comprobado que afectan al umbral de visión.<sup>50</sup>

El problema de la determinación del umbral de visibilidad del creciente lunar se complica porque la luminancia de la Luna varía de punto a punto, dependiendo del ángulo de fase del punto lunar y de su ángulo de posición. Es decir, la iluminación de la Luna sobre la retina no es uniforme, sino que es máxima en el centro del creciente y disminuye hacia los cuernos. No se conoce la ley que rige el umbral para la observación del creciente lunar y deberá obtenerse a partir de experimentos de laboratorio. Lo que han hecho los distintos investigadores que han tratado este asunto es utilizar criterios aproximados, tales como el criterio para observar discos circulares.<sup>51</sup>

### La iluminación de la Luna

Partimos de que en todas las ocasiones de interés, el ancho de la Luna está por debajo del poder de resolución del ojo, por tanto la imagen producida en la retina tendrá un mismo ancho. Esto quiere decir que el ojo discrimina la iluminación que llega a la pupila y en nada interviene la luminancia superficial de la Luna.

Dividiremos el creciente lunar en porciones de una longitud igual al poder resolutivo del ojo. Establecemos como hipótesis básica que las observaciones de cada una de estas porciones no están relacionadas entre sí. Como la porción central es la que tiene mayor iluminación porque los rayos solares inciden con menor inclinación, será la más visible. De tal forma que el problema se reduce a saber si es o no visible esta porción central.

Al dividir el creciente lunar en 69 partes, adquieren cada una de ellas una anchura de aproximadamente el poder de resolución del ojo. Cada una de estas porciones está

---

49. Davies B. F., "Photometric considerations in observing Venus", *Journal of the British Astronomical Association* **75** (1963) 188-194.

50. Lamar E. S., Hecht S., Slaer S., Hendley C., "Size, shape, and contrast in detection of targets by daylight vision. I. Data and analytical description", *Journal of the Optical Society of America* **37** (1947) 531-545.

51. Siedentopf H., "Neue Messungen der visuellen Kontrastschwelle", *Astronomische Nachrichten* **271** (1940) 193-203.



caracterizada porque el ángulo de posición  $\psi$  de su centro es dado por

$$\psi_i = \frac{i\pi}{69},$$

donde  $i$  es un índice que caracteriza a cada porción, reservando el número 0 para la porción central, entonces la iluminación total del creciente es

$$E = E_0 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{34} \frac{\omega_i \cos \psi_i}{\omega_0} \right) \quad (9.5)$$

donde  $E_0$  representa la iluminación de la porción central de la Luna,  $\omega_i$  es el ancho de la porción  $i$  del creciente y  $\omega_0$  es el ancho de la parte central, calculados por (5.5).<sup>52</sup> Para deducir la expresión (9.5) hemos tenido en cuenta la diferente inclinación de los rayos solares, de tal forma que más cerca de los cuernos inciden más horizontalmente, por lo que estas zonas estarán menos iluminadas y por ello irradiarán menos luz. Hemos establecido una serie de simplificaciones, tales como no tener en consideración el albedo, la libración, la reflectividad y la rugosidad de la superficie lunar. Como veremos más adelante, estas simplificaciones son admisibles.

La iluminación  $E$  depende de la fase lunar y puede determinarse a partir de la magnitud de la Luna, que en función del ángulo  $\chi$  es

$$m = -12.734 + 0.026\chi + 4 \cdot 10^{-9} \chi^4$$

expresando el ángulo en grados. Nótese que existe una magnitud lunar remanente, que corresponde a un ángulo de fase de  $0^\circ$  (Luna nueva ó  $\chi = 180^\circ$ ), de valor  $8.847 \cdot 10^{-5}$  lux. El procedimiento a seguir es: primero averiguamos el valor de  $m$  según el ángulo de fase de la Luna; determinamos la correspondiente iluminación lunar invirtiendo la ecuación (6.5); tras restarle la iluminación remanente se obtiene el valor  $E$ ; y por último, mediante (9.5) se calcula  $E_0$  y de aquí  $m_0$ , que es la magnitud de la parte central del creciente de un ancho igual al poder de resolución del ojo. En la tabla 5.5 aparece la relación entre la

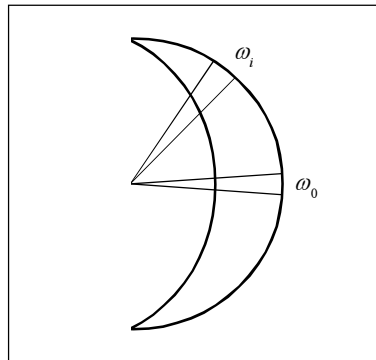


Tabla 8.5. Dos de las 69 porciones en que queda dividido el creciente.

52. Vamos a considerar la Luna en su distancia media de la Tierra. Si la Luna estuviera en el perigeo la división tendría que ser por 75 y por 65 aproximadamente cuando se encuentra en el apogeo.

elongación topocéntrica y la magnitud  $m_0$ .

$\theta$	$m_0$	$\theta$	$m_0$	$\theta$	$m_0$
1	2.16	11	-0.98	21	-2.20
2	1.35	12	-1.13	22	-2.30
3	0.86	13	-1.27	23	-2.40
4	0.49	14	-1.40	24	-2.49
5	0.20	15	-1.53	25	-2.59
6	-0.05	16	-1.65	26	-2.68
7	-0.28	17	-1.77	27	-2.77
8	-0.47	18	-1.88	28	-2.85
9	-0.65	19	-1.99	29	-2.94
10	-0.82	20	-2.10	30	-3.02

Tabla 5.5. Magnitud de la porción central de la Luna en función de la elongación.

### Criterios físicos de visibilidad lunar

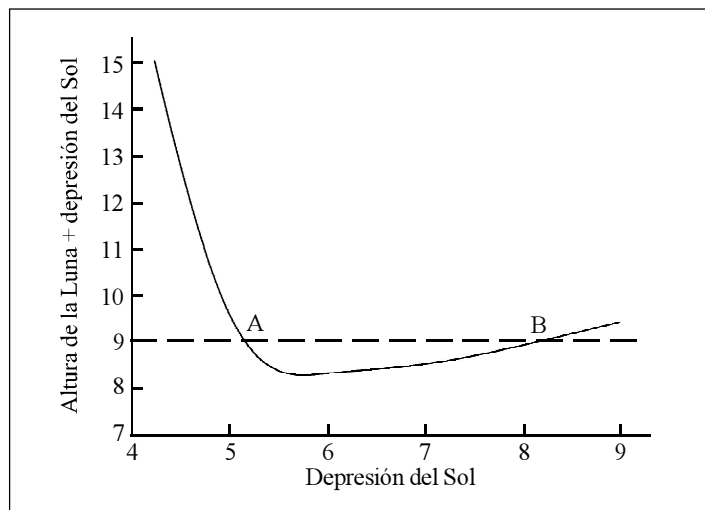
En el año 1977 Bruin publicó un trabajo donde se abordaba la predicción de la visibilidad lunar. En vez de basarse en datos empíricos, formuló el problema desde el punto de vista físico, iniciando con ello otra forma de abordar la visibilidad del creciente.

Bruin utilizó tres conjuntos de datos: la luminancia del cielo del crepúsculo, la luminancia de la Luna y el criterio fisiológico que permite saber el mínimo contraste que debe de existir para que sea visible un objeto luminoso respecto a un fondo también iluminado. Combinando esta información obtienen unas gráficas que permiten, no sólo saber si un creciente lunar será visto, sino cuándo esa observación sería posible.<sup>53</sup> La gráfica 11.5 nos muestra una curva típica de las obtenidas por Bruin.

La curva corresponde a una fase lunar de 164 grados y un espesor óptico de 0.2. Por ejemplo, si la diferencia de altura entre el Sol y la Luna fuera  $9^\circ$ , entonces el creciente sería visible. La observación comenzaría en el punto A, cuando la depresión del Sol es algo más de  $5^\circ$  y continuaría hasta el punto B, pasados ya los  $8^\circ$  de depresión. El mejor momento para la observación es cuando el Sol se encuentre a  $6.5$  grados bajo el horizonte. En este ejemplo la diferencia entre el azimut del Sol y el de la Luna es de unos  $13^\circ$ ,

---

53. Bruin F., "The first visibility of the lunar crescent", *Vistas in Astronomy* **21** (1977) 331-358. Bruin simplificó el problema al suponer que la luminancia del cielo del crepúsculo es independiente tanto de la altura como del azimut y sólo dependería de la depresión del Sol. Consideró la luminancia de la Luna independiente de la fase, lo cual no es cierto. Como criterio para establecer el umbral de contraste usó los datos empíricos obtenidos por Siedentopf, H. "Neue Messungen der visuellen Kontrastschwelle", *Astronomische Nachrichten* **271** (1940) 193-203, por el contrario nosotros hemos usado el criterio que aparece en Davis, B. F., "Photometric communicated in observing Venus", *Journal of the British Astronomical Association* **73** (1963) 188-194.



Gráfica 11.5. Curva de visibilidad según el criterio de Bruin.

ya que la elongación de estos dos astros es de 16 y su diferencia de altura  $9^\circ$ .<sup>54</sup>

El problema ha sido tratado de forma más detallada por astrónomos del Observatorio de Helwan en Egipto.<sup>55</sup> Han calculado la luminancia promedio de la Luna en función de la fase y del espesor óptico, han hecho uso de la luminancia del cielo crepuscular medida experimentalmente y han determinado el umbral de visibilidad usando la curva que nos relaciona la función de Weber con la luminancia del cielo.<sup>56</sup>

Nosotros resolvemos el problema de otra forma. Tomamos como base la luminancia del cielo medida por Koomen y otros.<sup>57</sup> Los datos de entrada son: la fecha, las coord

54. Es interesante reseñar que el método descrito nos permite explicar la existencia del límite de Danjon. Cuando el creciente es muy joven, su luminancia también es muy pequeña, tanto que es posible que no llegue a superar el mínimo contraste para la observación. Con los datos utilizados anteriormente, se encuentra que pueden ser visibles crecientes de hasta  $9^\circ$  de elongación o de  $171^\circ$  de fase, si se supone un espesor óptico de 0.2. Para una menor elongación, nunca es visible la Luna, al no alcanzar su luminancia el mínimo requerido. Si suponemos un espesor óptico de 0.1 (que representa excelentes condiciones atmosféricas), se encuentra que el límite de Danjon es de  $7^\circ$ , en razonable acuerdo con la observación que nos da el valor de  $7^\circ.5$ .

55. Mikhail J. S., Asaad A. S., Nawar S., Hassanin N. Y., "Visibility of the new moon at two sites. I: Maryland situated at northern geographical latitude, II: Sacramento Peak situated at high altitude above sea level", *Earth, Moon and Planets* **70** (1995) 93-108.

56. Schaefer ha desarrollado un programa, que basado en principios físicos, determina si un determinado creciente será o no visible. La comparación de su teoría con la observación es muy satisfactoria, Schaefer B. E., "Visibility of the lunar crescent", *Quarterly Journal Royal Astronomical Society* **29** (1988) 511-523. Lamentablemente, no ha dado a la publicidad los detalles de su programa, por lo que sólo se conocen sus aspectos genéricos, Schaefer B. E., "An algorithm for predicting the visibility of the lunar crescent", en *Proceedings of the IIIIT Lunar Calendar Conference*, editado por Imad-ad-Dean Ahmad, The International Institute of Islamic Thought, 1998, pp. 10:1-10:10.

57. Hemos hecho la interpolación haciendo uso de los polinomios de Lagrange.

$s$	$\Delta h$	$Z$	$\theta$	$h$	$\log L$	$m_0$	$m$	$R$	$V$
3	11.58	0.92	11.62	8.44	8.30	-1.07	-2.24	-1.17	No
4	11.60	1.03	11.64	7.47	7.88	-1.07	-1.44	-0.37	No
5	11.78	1.12	11.83	6.66	7.44	-1.10	-0.68	0.42	Si
6	11.84	1.22	11.90	5.74	7.00	-1.11	-0.07	1.04	Si
7	11.89	1.34	11.97	4.82	6.55	-1.12	0.37	1.49	Si
8	11.96	1.46	12.05	3.92	6.10	-1.13	0.57	1.71	Si
9	12.03	1.58	12.13	3.03	5.65	-1.14	0.50	1.65	Si
10	12.12	1.71	12.24	2.19	5.21	-1.16	0.11	1.27	Si
11	12.23	1.84	12.37	1.39	4.78	-1.18	-0.64	0.54	Si
12	12.38	1.99	12.53	0.68	4.37	-1.20	-1.76	-0.56	No

Tabla 6.5. Parámetros para determinar la visibilidad de la Luna el día 28 de abril de 2006 en Atenas. En la última columna se indica si será o no visible la Luna.

nadas geográficas, la altura del lugar de observación y el coeficiente de extinción. Se calcula las diferencias topocéntricas (sin refracción) de altura  $\Delta h$  y azimut  $Z$  entre el Sol y la Luna en función de la depresión  $s$  del Sol. Luego se calcula la elongación topocéntrica de la Luna  $\theta$  y la altura (con refracción) sobre el horizonte  $h$  de la porción central del creciente lunar.<sup>58</sup> Con estos datos se calcula la luminancia  $L$  del cielo del lugar donde se encuentra la porción central de la Luna. Se averigua la magnitud  $m_0$  de la porción central de la Luna por el procedimiento ya descrito, que tendrá que ser corregida por la atenuación atmosférica según la ecuación (7.5). Por último, se compara este resultado con la magnitud mínima observable según la luminancia del cielo.

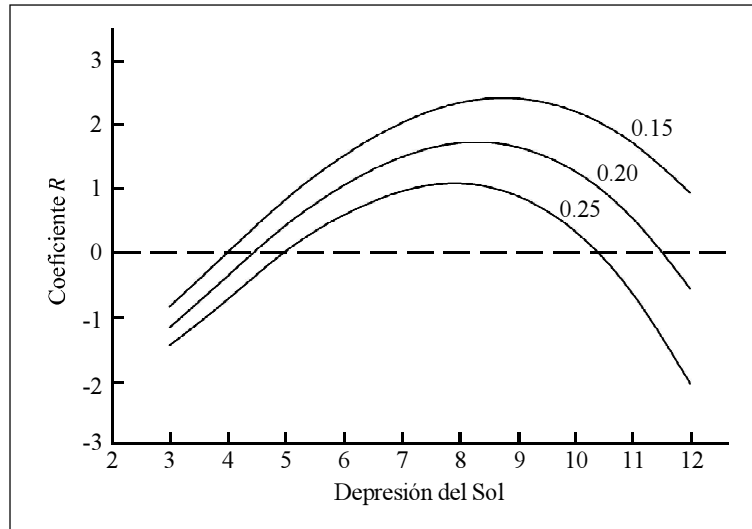
Como ejemplo consideremos la observación del primer creciente lunar del día 28 de abril de 2006 en Atenas. La salida de los datos se expresa en función del coeficiente  $R$ , que se define como la diferencia entre la magnitud  $m_0$  y la mínima magnitud visible según la luminancia del cielo. En la tabla 6.5 se recogen los valores numéricos para el caso de un coeficiente de extinción de 0.20.

En la gráfica 12.5 se muestra una familia de curvas puestas en función del coeficiente de extinción. La línea horizontal a trazos es el límite de visibilidad. Si  $R$  es negativo la Luna será invisible y ocurre el caso contrario cuando  $R$  es positivo. Vemos que para el caso de un coeficiente de extinción de 0.20 la Luna empieza a ser visible a los cuatro grados y medio de depresión solar, posteriormente alcanza la máxima visibilidad cuando el Sol está a unos nueve grados bajo el horizonte; la visibilidad concluye a los once grados y medio de depresión, a partir de aquí la Luna volverá a ser invisible.

58. La refracción atmosférica ha sido calculada por la fórmula de Bennet

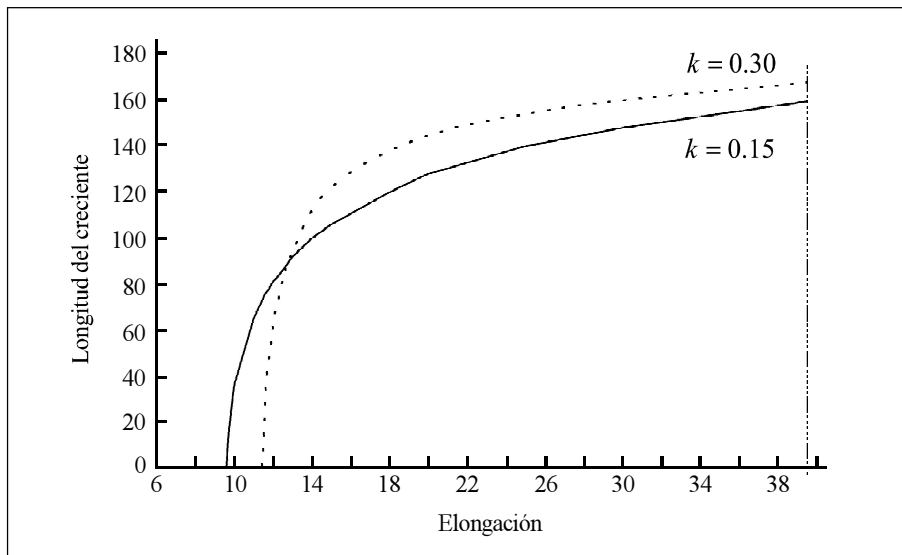
$$Re = \frac{1}{\tan \left[ h + \frac{7.31}{h + 4.4} \right]}$$

siendo  $h$  la altura en grados de la porción central de la Luna, no del centro de la Luna y  $Re$  viene en minutos, Mees J., *Astronomical Algorithms*, Willman-Bell, 1991, p.102.



Gráfica 12.5. Curvas de visibilidad lunar para diferentes coeficientes de extinción atmosférica para el día 28 de abril de 2006 en Atenas.

La teoría que hemos desarrollado permite explicar el límite de Danjon. En efecto, si la elongación disminuye, la iluminación también disminuirá, hasta llegar a un extremo que sea inferior al mínimo requerido para la visión, dejando entonces de ser visible el creciente. Sin embargo, no sólo interviene la elongación, sino también el coeficiente de extinción y la diferencia de azimut entre el Sol y la Luna. Suponiendo igual azimut para



Gráfica 13.5. Longitud del creciente en función de la elongación y el coeficiente de extinción para una depresión solar de  $5^\circ$  y una diferencia de azimut nula.

Coefficiente de extinción	Mínima elongación topocéntrica
0.10	7.6
0.15	8.8
0.20	9.8
0.25	10.6
0.30	11.4

**Tabla 7.5. Límite de Danjon para varios coeficientes de extinción.**

los dos astros, la mínima elongación para la cual será visible el creciente viene dada por la tabla 7.5, en aceptable acuerdo con la observación. El cálculo se ha realizado suponiendo la Luna en su distancia media de la Tierra. Los anteriores valores tienen que ser disminuidos en torno a una décima de grado cuando la Luna se encuentra en el perigeo y aumentados en igual cantidad cuando se encuentra en el apogeo. En el caso considerado en la tabla, el momento óptimo para ver la Luna es cuando la depresión del Sol se encuentra entre 6.5 y 7 grados.

También es fácil explicar el acortamiento que registran los cuernos lunares. A medida que se asciende hacia los cuernos a partir del centro de la Luna, disminuye la iluminación que producen las distintas porciones, tanto porque estas porciones lunares son más pequeñas, como por irradiar menos luz a consecuencia de que los rayos solares le inciden más oblicuamente. Por tanto, la magnitud de las distintas porciones de la Luna va disminuyendo a medida que nos acercamos a los cuernos. Naturalmente, habrá un ángulo de posición asociado a una porción lunar, que tenga una magnitud inferior a la crítica para ser visible, perdiéndose la visión de la Luna a partir de esa posición.

El acortamiento del limbo lunar está relacionado además de con la elongación, con el coeficiente de extinción, con la diferencia de azimut entre el Sol y la Luna y con la depresión del Sol, dado que la luminancia del cielo depende de estas dos últimas magnitudes. Consideremos el caso especial de que la diferencia de azimut sea nula. En la gráfica 13.5 se dibujan dos gráficas expresadas en función del coeficiente de extinción y para una depresión solar de 5°.

A mayor depresión es mayor la longitud del creciente, dado que la luminancia del cielo disminuye y podrá ser vista una magnitud menor. A mayor coeficiente de extinción menor será la longitud del creciente, ya que al aumentar la atenuación atmosférica menor será la magnitud lunar. La teoría expuesta es incapaz de explicar el alargamiento que experimenta los cuernos del creciente, es decir que a grandes elongaciones la longitud del creciente supera los 180 grados. Se ha señalado que esto es debido a las irregularidades de la superficie lunar.

### **El calendario musulmán**

Con ocasión del comienzo y fin del ayuno del mes de Ramadhan y de la celebración de

la fiesta del Sacrificio (décimo día del último mes), un gran caos surge en el mundo islámico, resultado de no existir un calendario definido. Las celebraciones en uno y otro país pueden separarse hasta cuatro días. Por ejemplo, el comienzo del Ramadhan del año 2005 fue el 3 de octubre para Nigeria; el 4 de octubre para países como Yemen, Arabia Saudí, Kuwait, Egipto o Francia; el día 5 de octubre comenzó en Indonesia, Malasia, Irán y Turquía y el día 6 de octubre el ayuno se inició en Pakistán, Bangladesh y la India.<sup>59</sup>

Hay numerosos criterios actualmente en uso que explican esta diversidad de fechas. En algunos países el comienzo del mes lunar resulta de la visión real del creciente, tal como ocurre en Bangladesh, India y Pakistán. En Estados Unidos y Canadá también se basan en la visión del creciente lunar, pero tiene que estar confirmada por el cálculo astronómico. En otros países existe un criterio basado en la conjunción lunar. Este es el caso de Arabia Saudí, cuyo criterio establece que «si el día 29 las siguientes condiciones son satisfechas, entonces el siguiente día comenzará el nuevo mes: 1. La conjunción geocéntrica ocurrirá antes de la puesta de Sol y 2. La Luna se pone después de la puesta del Sol». Otros países siguen la proclamación realizada en Arabia Saudí, como ocurre en Qatar, Kuwait, Emiratos Árabes Unidos, Yemen o Turquía. En Egipto se considera que el nuevo mes comienza si la Luna nueva acontece 5 minutos antes de la puesta del Sol. Otros países hacen uso de algún criterio de visibilidad del creciente lunar, por ejemplo, en Malasia, Brunei e Indonesia el mes comienza cuando la edad de la Luna es mayor de 8 horas, su altitud a la puesta del Sol superior a 2 grados y la elongación supera los 3 grados. Hay naciones que siguen a los países más cercanos: Nueva Zelanda obtiene la información de Australia, y Surinam lo hace de Guyana. Por último destacar que varias comunidades musulmanas siguen el calendario computacional lunar, tal es el caso de los ismaelitas.

Los varios criterios anteriores no se ajustan bien a la visibilidad del primer creciente lunar. Por ejemplo, entre los años 1963 y 2000 las fechas proclamadas en Argelia para el comienzo y final del Ramadhan y la fiesta del Sacrificio, estuvieron en error en al menos un 80% de las ocasiones, error que es superado por los países del Oriente Medio.<sup>60</sup> También hay que destacar que los funcionarios encargados del calendario suelen cambiar de criterio con frecuencia, por ejemplo, en el lapso de cuatro años Arabia Saudí utilizó tres criterios diferentes para saber cuándo comienza el nuevo mes.

Es frecuente que se acepten visiones del primer creciente cuando la Luna ya se encuentra bajo el horizonte; antes de haber alcanzado la conjunción; antes de la puesta del Sol e incluso observaciones del creciente hechas hacia el este; todas ellas situaciones imposibles. En buena medida esto ocurre por la escasa fiabilidad de los testigos que observan el creciente y además porque la visión del primer creciente lunar tiene una componente probabilística. Se ha mostrado que existe un 15% de errores positivos para observadores fiables, es decir, casos donde el creciente no puede ser observado pero el

---

59. Para conocer el estado actual del calendario islámico véase *Proceedings of the IIT Lunar Calendar Conference*, editado por Imah-ad-Dean Ahmad, The International Institute of Islamic Thought, 1998.

60. Guessoum N., Meziane K., “Visibility of the thin lunar crescent: the sociology of an astronomical problem (A case study)”, *Journal of Astronomical History and Heritage* 4 (2001) 1-14.

testigo afirma haberlo visto. Por contra existe un 2% de errores negativos, casos donde el creciente es trivial pero hay personas que afirman no verlo.

La comunidad musulmana ha reiterado su deseo de conseguir un calendario unificado, en el sentido de que una misma fiesta sea celebrada en todo el mundo en el interior de 24 horas. Para conseguir este objetivo es inevitable la adopción de algunas convenciones, a lo que se une la extendida opinión de la conveniencia de hacer uso del cálculo astronómico.

En primer lugar habría que concretar qué se entiende por visibilidad del creciente. ¿Se podría decir que el creciente ha sido visto si se le detecta por radar o por cámara infrarroja? ¿Es válida la observación desde un cohete o un avión? ¿Se puede hacer uso de ayuda óptica? ¿Es imprescindible la visión física del creciente o bien se puede aceptar el cálculo astronómico? ¿Es equivalente el creciente lunar a la Luna nueva? Estas son cuestiones que tienen que ser definidas en un calendario unificado.

Otro asunto que es necesario aclarar es la extensión territorial para la validez de las observaciones. Existen dos criterios igualmente aceptables. Uno de ellos se denomina unidad del creciente, de acuerdo a esta opinión, la observación del creciente en cualquier lugar sería una declaración válida para toda la Tierra. El otro criterio es el de diferentes crecientes, que afirma que el comienzo del mes debe basarse en visiones locales. Esta es la postura que aceptó la Sociedad Islámica de Norteamérica en el año 1988, al acordar que sólo dependerían de visiones del creciente en Estados Unidos y Canadá.

Un calendario unificado exige una línea de cambio de fechas o LDL, en caso contrario se estaría en la situación absurda de que un mismo día solar pueda tener dos fechas lunares. Se ha sugerido que la LDL se identifique con el meridiano que pasa por su apex. Otros han planteado definir una LDL fija en vez de una que se desplace de mes a mes, eligiendo el meridiano que pasa por La Meca. También se ha planteado desplazar la LDL al océano más al este, ya sea el Atlántico o el Pacífico. En cualquier caso, alguna adaptación exigen las altas latitudes para evitar meses lunares de duraciones distintas de 29 ó 30 días.

Se ha sugerido que la LDL tenga su habitual forma cuasiparabólica, como se desprende del cálculo astronómico, pero que siga un meridiano a altas latitudes. Sería necesario modificar la LDL para ajustarla a las fronteras nacionales, para evitar el inconveniente de que en un mismo país no muy extenso puedan coexistir dos fechas lunares diferentes el mismo día solar. A no ser que la LDL coincida con el antimeridiano de Greenwich, es inevitable que una misma fecha lunar transcurra a lo largo de dos días solares, lo que no representa inconveniente alguno.

Se han mantenido numerosas reuniones internacionales con la idea de unificar el calendario musulmán, pero no se ha conseguido progreso apreciable. Un asunto tratado ha sido la elección del criterio para saber cuándo comienza el nuevo mes. En la conferencia mantenida en El Cairo el año 1986 se estableció que el mes lunar debía comenzar si la conjunción de la Luna se producía 5 minutos antes de la puesta del Sol. En la conferencia de Estambul de 1978 se acordó que la visión del creciente se produce cuando se cumple que la diferencia de altura entre el Sol y la Luna es mayor que 8° y la altura de la Luna sobre el horizonte sobrepase los 5°, siempre que estas dos condiciones se den después de la puesta del Sol.

Algunos astrónomos han mantenido la idea de usar el momento de la Luna nueva



como hito para calcular el comienzo del mes lunar. Por ejemplo, si la conjunción tiene lugar antes de la medianoche de tiempo local, entonces el siguiente día es el primero del nuevo mes, o bien, si la conjunción tiene lugar antes de la puesta de Sol local, el nuevo mes comienza.<sup>61</sup>

La II Conferencia Astronómica Islámica reunida en Amán el año 2001 adoptó el calendario UHC (calendario universal Hejric) tal como había sido preparado por la Unión Árabe de Astronomía y Ciencias del Espacio. El calendario UHC divide la Tierra en tres grandes regiones: la región este, extendida desde la longitud 180° E a la longitud 60° E; la región central, que va desde los 60° E a 20° W y la región oeste, que se extiende desde los 20° W hasta el continente americano. Si para cada región el cálculo permite la visibilidad con el ojo desnudo o con ayuda óptica, entonces comenzará el nuevo mes. El calendario UHC utiliza el criterio de visibilidad de Yallop y supone que para las regiones central y este, la visibilidad del creciente es aceptada si el cálculo lo permite para regiones ubicadas en tierra y no solamente en el mar.

No parece que en un inmediato futuro vaya a cambiar la caótica situación en que permanece el calendario islámico. Por una parte por la dificultad que entraña que numerosas naciones lleguen a un acuerdo mutuo sobre su calendario, y porque la extensión del fundamentalismo religioso es un fuerte obstáculo para introducir en el calendario criterios modernos basados en el conocimiento astronómico que suplanten a la visión física del creciente lunar.

---

61. McNaughton D., "A universal islamic calendar", *Hamdard Islamicus* **20** (1997) 77-85.

# Calendarios

### Introducción

Un calendario es una teoría astronómica simplificada que nos permite hacer una medida cronológica del tiempo, o sea, ubicar en una escala temporal los acontecimientos pasados y futuros.<sup>1</sup> Una escala de tiempo necesita una unidad y un origen. La unidad básica de los calendarios es el día solar medio, expresado por múltiplos y submúltiplos. El origen es un acontecimiento arbitrariamente elegido, normalmente proléptico, lo que significa que es anterior a la fecha en que se definió como origen. Este es el caso de la era cristiana –también llamada vulgar o de la encarnación– que fue introducida cinco siglos después de su comienzo.

Distinguimos tres tipos de calendarios. Están los computacionales, que son los que se basan en unas reglas y que nos trazan en promedio los movimientos del Sol, la Luna, o de ambos astros a la vez; un ejemplo de calendario computacional es el gregoriano. Otros calendarios son los astronómicos, que exigen la teoría astronómica para fijar algún acontecimiento, a partir del que se construye el calendario; a esta categoría pertenece el calendario chino. Por último, están los calendarios observacionales, que necesitan la observación física de algún fenómeno astronómico, dato que sirve de partida para preparar el calendario, el ejemplo más característico lo representa el calendario musulmán.

Se admite otra clasificación de los calendarios, según qué astros utilicen como referencia. Tenemos los calendarios solares, caracterizados porque las estaciones acontecen aproximadamente en las mismas fechas de ese calendario. Están los calendarios lunares, que exigen que el comienzo del mes corresponda a la Luna nueva.

---

1. Son muy numerosos los libros que tratan los calendarios de forma general. Entre los más destacados se encuentran: Biémont É., *Rythmes du temps. Astronomie et calendriers*, De Boeck, 2000; Parisot J. P., Suagher F., *Calendriers et cronologie*, Masson, 1996; Richardas E. G., *Mapping Time. The calendar and its History*, Oxford University Press, 1998; Palau M., *La pintoresca historia del calendari*, Millá, 1973; García Serrano I., «El problema del calendario», *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid* (1965) 315-407; Courderc P., *Calendrier*, Presses Universitaires de France, 1948; *Calendarios y medidas del tiempo*, Acento Editorial, Madrid, 1999; Bourgoing J., *Le calendrier maître du temps?*, Gallimard, 2000 y Westheim M., *Calendars of the world*, Oneworld, 1993. El asunto del calendario es tratado en las enciclopedias generales, citemos la *Enciclopedia Universal Ilustrada Europea-Americana*, Espasa-Calpe, 1989, vol. 10 pp. 706-742 y *The New Encyclopaedia Britannica*, 1998, vol. 15, pp. 417-439.

El tercer grupo son los calendarios lunisolares, una mezcla de los dos anteriores, en el sentido de que sus meses son lunares pero limitan la movilidad de las estaciones, evitando que vaguen por el calendario, como ocurre en un calendario exclusivamente lunar. Por último, debemos de anotar los calendarios que están desconectados de los movimientos del Sol y de la Luna, aunque ligados, como todos, al movimiento de rotación terrestre, es decir, al día. Ejemplos de estos últimos calendarios son el cómputo del día juliano y el calendario egipcio.

Tres son los principales múltiplos calendaristas del día: la semana, el mes y el año. Hoy se piensa que la semana tuvo un origen lunar. En efecto, la cuarta parte de una lunación excede sólo en algunas horas a los siete días. Esta semana lunar o cuasisemana estaba atada a las fases lunares. Los judíos debieron heredar este ciclo cuasisemanal durante su exilio en Babilonia en el siglo VII a. C. De aquí debió surgir la semana hebdomadaria de una duración fija de siete días y desconectada de cualquier fenómeno natural. Desde entonces la semana sigue una marcha independiente de cualquier calendario, convertida en un cómputo cronológico complementario. La semana se convirtió en uno de los pilares de la religión judía y, siglos más tarde, pasaría al cristianismo, al islam y al hinduismo, hasta quedar convertida en un ciclo de uso universal.<sup>2</sup>

En la Alejandría helenizada del siglo II a. C. tuvo origen otro tipo de semana, denominada planetaria o astrológica. En la astronomía griega el orden de los planetas según su distancia a la Tierra, era de mayor a menor: Saturno, Júpiter, Marte, el Sol, Venus, Mercurio y la Luna<sup>3</sup>. La aparición de la semana planetaria fue el resultado de la fusión de la división del día en 24 horas y de la teoría de las cronocratorías. Según esta teoría a cada hora se le adjudicaba un planeta, según el orden de su supuesta distancia a la Tierra. El planeta regente de un día era al que le correspondía la primera hora de ese día. Se comenzaba con Saturno, quizás por ser el planeta más alejado, de tal forma que el regente del primer día era Saturno. La siguiente hora de ese día es la de Júpiter, le seguía la de Marte y así sucesivamente. Al recorrer las primeras 24 horas se encuentra el regente del siguiente día, que como fácilmente se puede comprobar es el Sol. Si continuamos el proceso de dar el nombre de un planeta a cada una de las 24 horas de estnuevo día, llegaremos a la primera hora del tercer día y veremos que el regente es la Luna. El siguiente día tendrá por regente a Marte, después a Mercurio, al que le sigue Júpiter, para terminar con Venus. A partir de aquí se vuelve a repetir el mismo ciclo. Pues

---

2. Un magnífico estudio sobre la semana se encuentra en Zerubavel E., *The seven day circle. The History and Meaning of the week*, The University of Chicago Press, 1985.

3. La distancia de los planetas a la Tierra se estableció a partir de sus periodos zodiacales, que es el tiempo transcurrido para que el planeta recorra el zodiaco según observación hecha desde la Tierra. Este período es el que corresponde a la rotación del planeta en torno a la Tierra según el modelo geocéntrico. Los periodos zodiacales son: Saturno, 29.5 años; Júpiter, 11.9 años; Marte, 1.9 años; Sol, Venus y Mercurio, 1 año y la Luna 27.3 días. En la astronomía griega no estuvo claro el orden en que debían colocarse el Sol, Mercurio y Venus, pues tienen el mismo periodo zodiacal, dado que los planetas interiores tienen un movimiento visto desde la Tierra de oscilación en torno al Sol, por lo que se suponía que acompañaban al Sol en su movimiento sobre el fondo estrellado. Ptolomeo en su *Almagesto* adoptó la ordenación clásica que fue transmitida a la Europa medieval, Dreyer J. L. E., *A history of astronomy from Thales to Kepler*, Dover, 1953, pp. 126-130 y pp. 168-170.

bien, la semana planetaria está formada por los consecutivos regentes de los siete días, comenzando por el día de Saturno.

La semana –del latín *septimania*– llegó por un doble camino a Roma. La semana planetaria alcanzó el corazón del imperio en el siglo I a. C. y siglos después los cristianos introdujeron la semana judía. La semana que hemos heredado es la fusión de ambas: se ha conservado la relación astrológica con los planetas, pero se ha singularizado el domingo al ser tomado como festividad cristiana. En el idioma español se siguen utilizando los antiguos nombres planetarios de los días de la semana, al igual que en muchos otros idiomas. Así el lunes es el día de la Luna, martes el de Marte, miércoles el de Mercurio, jueves el de Júpiter y viernes el de Venus. El siguiente día tiene su origen en el nombre hebreo de *sabat* y domingo viene del latín *dominica* o día del Señor.<sup>4</sup> Al igual que en la semana judía, en la semana cristianizada se ha elegido un día especial: el domingo, que sustituye al sábado judío.

El mes es una agrupación de días que está relacionado con la lunación o periodo sinódico de la Luna. Pero hay que distinguir otro tipo de meses; son los solares, que se definen como el tiempo que tarda el Sol en recorrer 30 grados de la eclíptica; este es el tipo de mes utilizado en el calendario persa, cuyas duraciones pueden ser de 30 ó 31 días, frente a los 29 ó 30 días que tiene un mes lunar. Por último, se encuentran los meses que no están ligados a ningún fenómeno astronómico, tal es el caso del calendario gregoriano, cuyos meses originariamente eran lunares, pero que se convirtieron en meras agrupaciones de días exentas de cualquier relación con los movimientos del Sol y de la Luna.

Un calendario necesita una era u origen para la cuenta de los años. La elección de ese momento es arbitraria y frecuentemente se hace uso de acontecimientos históricos o religiosos. El problema de las eras estriba en el enorme número que existen, sobre todo las usadas en épocas históricas. El estudio de la enmarañada conexión entre las eras corresponde a la cronología, que por esta razón se encuentra conectada a la hemerología<sup>5</sup>.

---

4. Sobre el nombre de los días de la semana en diversos idiomas véase Falk M., “Astronomical names for the days of the week”, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **93** (1999) 122-123 y Wartburg, W., «Los nombres de los días de la semana», *Revista de Filología Española* **33** (1955) 1-14.

5. Han sido muy numerosas las eras utilizadas en tiempos históricos. En el mundo clásico se utilizaban las eras de la fundación de Roma, la consular y la basada en las Olimpiadas. En Asia estuvo extendida la era de los seléucidas o de Macedonia, también usada por los judíos que la denominaron la era de los contratos. La era de Nabonasar fue definida por Ptolomeo y utilizaba el calendario egipcio. En Persia existió la era de Yezdeguerdi. Otras eras de menor difusión fueron la de Alejandra, la de Tito y la cesárea de Antioquía. Otro conjunto de eras muy utilizadas fueron las mundanas, que comienzan con la creación del mundo según los datos contenidos en la Biblia. Entre las centenares de eras mundanas que se han definido, citar la de Alfonso X el Sabio, que supuso el comienzo del mundo en el año 6984 a. C. En tiempos modernos se han intentado establecer nuevas eras, como la era republicana francesa o la era fascista italiana que comenzó en el año 1922. En España se quiso introducir una nueva era durante la Guerra Civil, por decreto del 12 de abril de 1937 se estableció que el lapso de tiempo entre el 17 de julio de 1936 a igual fecha del siguiente año fuera denominado primer año triunfal, Bickerman E. J., *Chronology of de ancient world*, Thames and Hudson, 1968.

Aunque no haya sido explícitamente declarada como tal, la era cristiana, que originariamente llevaba el nombre de la era de la Encarnación de Nuestro Señor Jesucristo, ha adquirido la categoría de internacional. Pero resulta que es una era que nunca ha sido precisamente definida,<sup>6</sup> de aquí los debates registrados con motivo del comienzo del tercer milenio, donde las discusiones fueron frecuentes sobre si se iniciaba con el año 2000 o con el 2001.<sup>7</sup> Según la cuenta de Dionisio el Exiguo –que fue quien introdujo la actual era cristiana– Jesucristo fue concebido el 25 de marzo del que hoy llamamos año 1 antes de nuestra era y nació el 25 de diciembre del mismo año. Al tener actualmente nuestro calendario su comienzo en enero, así también debe ocurrir con la era, cuya fecha de inicio debe ser el día 1 del primer mes del año. Dos medidas se pueden adoptar. Tomar como origen de la era cristiana el comienzo del año en que Jesucristo nació y fue concebido, o bien tomar como origen de la era el comienzo del siguiente año. Las dos opciones son igual de legítimas. Si optamos por la primera, debemos de llamar año del nacimiento de Cristo el año 0. De esta manera sea una u otra la opción elegida, la numeración de los años es la misma. La única diferencia entre ambas se refiere al año inicial de la era, que para unos será el año 0 y para otros el año 1. Si se sigue el primer método el tercer milenio comenzó con el año 2000 y con el 2001 si se opta por la segunda opción.

Una de las eras más utilizadas durante la Edad Media fue la conocida como era española, también llamada hispánica, de Augusto, de Octaviano, de los césares o simplemente la Era. Se cree que la era española procede de Asturias, de donde pasó a Mérida, ciudad fundada por muchos veteranos de las guerras astúricas. De Mérida pasaría de la Lusitania y a la Bética a finales del siglo V y, de ahí, al resto de la Península. La inscripción más antigua que se conoce datada en la era española es de mitad del siglo V. En Castilla perduró hasta el año 1383. En Aragón se estuvo utilizando hasta 1349, durante el reinado de Pedro IV el Ceremonioso. En Portugal la era española tuvo carácter oficial hasta el año 1422.<sup>8</sup>

---

6. La correcta definición de una era exige el momento preciso del origen, es decir, hora, día, mes y año. El origen de la era vulgar sólo especifica el año, esto originó que durante siglos hubiera confusión acerca del día en que comenzaba el nuevo año. De los diversos estilos de comienzo del año señalar el pisano, que hacía comenzar el año con el 25 de marzo, práctica que siguió Inglaterra hasta que adoptó el calendario gregoriano, Poole R., *Time's alteration. Calendar reform in early modern England*, UCL Press, 1998. Otro estilo fue el florentino, caracterizado por comenzar el año el 25 de marzo pero del año siguiente al del estilo pisado. El estilo de la Pascua hacía comenzar el año el domingo de Resurrección, lo que ocasionaba que los años tuvieran duraciones diferentes. Hasta final del siglo XVIII en la república de Venecia se comenzaba el año el 1 de marzo, lo mismo que ocurrió en Rusia, que también optó por el estilo bizantino, caracterizado por comenzar el año el 1 de septiembre. A lo largo de la Edad Media, el 1 de enero siguió ocupando un lugar especial como día de año nuevo. Este criterio fue el que finalmente permaneció, y para darle carácter cristiano a esa antigua fecha pagana, se le llamó estilo de la Circuncisión o estilo común.

7. Este debate ya se registró en siglos anteriores, Vizconde de Arganda, *¿En qué siglo estamos?*, Marmar, 1998.

8. Peón B., *Estudios de cronología universal*, Madrid, 1857, pp. 544-592 y Agustí y Casanovas J., Volter Bou P., *Manual de cronología española y universal*, Madrid, 1952, pp. 11-13.

### El calendario juliano

El calendario que existía en Roma antes de la reforma que hizo Julio César tenía una duración de 355 días, agrupados en doce meses de duraciones desiguales: enero, 29 días; febrero, 28; marzo, 31; abril, 29; mayo, 31; junio, 29; *quintilis*, 31; *sextilis*, 29; septiembre, 29; octubre, 31; noviembre, 29 y diciembre, 29.<sup>9</sup>

Como se quería que la duración del año del calendario coincidiera con el año astronómico, se añadía de vez en cuando un decimotercer mes, llamado mes intercalar. Este mes solía tener 22 días y en algunas ocasiones 23. El mes intercalar se colocaba después del 23 de febrero. Los cinco días restantes de este mes se le añadían el mes intercalar, por lo que éste en realidad tenía 27 días. Cuando se intercalaban 23 días, se iniciaba el mes intercalar después del 24 de febrero y los últimos cuatro días de este mes se añadían al final del mes intercalar, con lo que éste seguía teniendo 27 días pero se habían intercalado 23.

La colocación del mes intercalar después del día 23 de febrero lo explicaba Macrobio diciendo que “viene de una antigua costumbre religiosa, para que, siempre marzo siguiera inmediatamente a febrero”, quizás refiriéndose a una relación entre las fiestas de Equirria que había en febrero y a mitad de marzo.

La intercalación del decimotercer mes era muy irregular, a lo que se unía que su anuncio podía retrasarse hasta bien entrado febrero. Esta tardanza en el anuncio de la intercalación por los pontífices –que eran los encargados de gestionar el calendario– ocasionaba problemas en la vida romana, en particular en las zonas alejadas de Roma, que tenían conocimiento de la intercalación quizás meses después de que ésta se hubiera hecho en la metrópoli.

Parece ser que no existían reglas definidas para saber con anticipación qué años serían intercalares. Esto fue aprovechado por los pontífices, que manipularon intencionadamente la intercalación movidos por intereses innobles. El resultado fue un calendario que seguía con mucha irregularidad la marcha del Sol. Tanto era así, que en las profesiones en que se necesitaba saber con precisión cuándo venían las estaciones –como les ocurría a los agricultores y militares– se hacía uso de unos calendarios estelares, que permitían saber cuándo iban a comenzar las estaciones por observación de las estrellas en el momento del orto o del ocaso del Sol.

La caótica intercalación del decimotercer mes en el calendario republicano romano no cambió con el nombramiento de Julio César como pontífice máximo en el año 63 a. C. La azorosa vida pública de Cesar exigió su frecuente ausencia de Roma. Esto explicaría que desde el año de proclamación de Julio César como pontífice máximo, fueran colocados sólo cuatro meses intercalares, en vez de los ocho que debió haber.

---

9. Sobre los calendarios republicano romano y juliano consúltese: Michels A. K., *The calendar of the roman republic*, Princeton University Press, 1968; Brind'Amour P., *Le calendrier Romani. Recherches chronologiques*, Université d'Ottawa, 1983; Johnson V. L., *The roman origins of our calendar*, American Classical League, 1974 y Samuel A. E., *Greek and roman chronology. Calendars and years in classical antiquity*, Verlag C. H. Beck, 1972, pp. 153-188. El autor romano que más atención prestó al calendario fue Macrobio (Macrobio, *Les Saturnales*, Garnier, 1937, traducción de Henri Bornecque, pp. 111-167). Numerosos autores romanos escribieron sobre el calendario, entre ellos destacar a Ovidio, Censorino, Suetonio, Cicerón, Plutarco, Dión Casio, Varrón y Tito Livio.

En el año 46 a. C. César prestó atención al calendario. Lo primero que hizo fue corregir el atraso que llevaba. Para conseguir este objetivo, se le agregaron a ese año tres meses. Uno intercalar de 23 días, colocado, como era habitual, después del 24 de febrero. Entre los meses de noviembre y diciembre se colocaron otros dos meses intercalares de una duración total de 67 días. Todos estos días extraordinarios, unidos a los 355 que habitualmente tenía el año, elevaron aquel año 46 a. C. hasta los 445 días; año que Macrobio llamó “último de la confusión”. Se ha pensado que los 67 días intercalados entre noviembre y diciembre no fueron más que tres meses intercalares de duraciones de 22, 22 y 23 días que, unidos al mes intercalar colocado en febrero y de 23 días, completaban los cuatro meses de atraso que llevaba el calendario prejuliano.

La reforma tuvo una segunda parte: la definición de las características del nuevo calendario. Se optó por una duración promedio de 365.25 días. Para esto se aumentó en diez los días del antiguo calendario y, cada cuatro años, se colocó un día intercalar, que se puso en el mismo lugar donde anteriormente se colocaba el decimotercer mes, es decir, después del 23 de febrero.<sup>10</sup> Los nuevos días se colocaron al final de diversos meses, con el cuidado de no alterar las celebraciones religiosas y procurando que se distribuyeran lo más regularmente posible a lo largo del año. Febrero quedó inalterado; probablemente por alguna razón religiosa desconocida.<sup>11</sup>

En el año 44 a. C., poco después de la muerte de Julio César, el entonces cónsul Marco Antonio hizo aprobar una ley que cambiaba el nombre de *quintilis* por el de julio, en honor a César, que había nacido en ese mes. En el año 27 a. C. un decreto del Senado romano renombró *sextilis* con el nombre de agosto, honrando la figura del primer emperador, entrando en vigor el nuevo nombre el año 8 a. C.<sup>12</sup> La elección de este mes se hizo porque en él Augusto había logrado sus mayores éxitos políticos y militares.

Otra modificación se dio en el calendario por aquellos años. La regla de intercalación de los bisiestos fue mal entendida por los pontífices, que colocaron el día extra cada tres años, en vez de cada cuatro. Parece ser que el año 45 a. C. –primer año de aplicación del calendario juliano– no fue bisiesto. El primer día intercalar fue colocado en el año 42 a. C. y a partir de aquí hasta el año 9 a. C. inclusive se intercalaron los días bisiestos cada

---

10. Esta idea de un día intercalar colocado cada cuatro años surgió en Egipto en el año 238 a. C. En esta fecha se emitió una ley (hoy conocida como decreto de Cánope) que ordenaba la intercalación cada cuatro años: “[...] de ahora en adelante se añadirá un día todos los cuatro años a los cinco epagómenos, consagrado a la fiesta de los dioses Evergetes[...]”, Pochan A., *Les calendriers des anciens égyptiens*, Maat, 1962, p. 49. Más información sobre los calendarios egipcios se encuentra en Depuydt L., *Civil calendar and lunar calendar in ancient Egypt*, Peeters, 1997 y Rose L. E., *Sun, Moon, and Sothis. A study of calendar and calendar reform in ancient Egypt*, Kronos, 1999.

11. Es corriente encontrar en la bibliografía la historia de un cambio en el número de días del mes *sextilis* (el actual agosto), según la cual al principio este mes tenía 30 días y posteriormente lo elevó el emperador Augusto a 31. Esta historia es falsa y parece haber surgido en la Edad Media. Esta narración ya aparece en los escritos de John Holywood Sacrobosco en el siglo XIII. La evidencia documental y epigráfica confirma que la duración de los meses no ha sido alterada desde el año en que César reformó el calendario.

12. Herbert-Brown G., *Ovid and the 'Fasti'*, Clarendon Press Oxford, 1994, pp. 22-25. Los emperadores Calígula, Claudio, Nerón, Domiciano, Antonio, Tácito y Cómodo propusieron cambios en el nombre de los meses pero no perduraron.

tres años. Advertido de este error, Augusto mandó suprimir los bisiestos de los años siguientes, reanudándose la intercalación el año 8 d. C., siguiéndose desde entonces la regla correcta. Con esta suspensión de la intercalación se pudieron quitar los tres días bisiestos colocados en exceso.<sup>13</sup> Desde este momento el calendario juliano no sufrió ninguna otra modificación, perviviendo inalterable hasta el año 1582, en que se puso en aplicación el calendario que resultó de la reforma gregoriana, que en definitiva no es más que un perfeccionamiento del calendario implantado por Julio César.

El calendario juliano sigue existiendo en la actualidad transformado en el calendario de la iglesia cristiana copta. Este calendario tuvo su origen en el antiguo calendario egipcio, que tenía una duración fija de 365 días. Al quedar Egipto bajo la autoridad de Roma, se alteró su calendario en el año 25 a. C., introduciéndose desde entonces el día bisiesto cada cuatro años, a este calendario se le llamó alejandrino. El calendario copto no es más que una herencia del alejandrino.

La iglesia cristiana ortodoxa sigue usando el calendario juliano para fijar las fechas de las fiestas religiosas, de aquí que haya una diferencia de 13 días con las correspondientes fiestas del resto de los cristianos. Existe aún otro caso, como es el calendario etíope, que es en esencia el calendario copto, diferenciándose en la era y en el nombre de los meses.<sup>14</sup>

Por una coincidencia los años de nuestra era que son bisiestos en el calendario juliano son aquellos divisibles entre cuatro.<sup>15</sup> En este caso se le agrega un día más a febrero, que para efectos civiles se coloca en la posición 29. No obstante, la iglesia cristiana todavía sigue usando la antigua práctica romana de duplicar el día 24 de febrero cuando se intercala un día bisiesto.

Hay constancia de que el comienzo del año en el mes de enero cuenta con la máxima antigüedad. Los meses numerados a partir de marzo (que se conservan desde septiembre a diciembre), han hecho pensar que ese mes habría sido el primero en una época lejana, pero no existe evidencia directa de este cambio.

Se denomina carácter de un año al día semanal de su primer día. Se entiende por variedad los distintos tipos de años que pueden existir. En el caso del calendario juliano tenemos 14 tipos o variedades de años, correspondientes a los 7 diferentes años según el carácter, multiplicado por 2, con lo que se tiene en cuenta los años bisiestos y normales. Si consideramos la Pascua, que puede caer desde el 22 de marzo hasta el 25 de abril ambos inclusive, o sea 35 posibilidades; encontraríamos 70 calendarios distintos,

---

13. Para los años comentados debemos de considerar tres tipos de calendarios: el pontifical, que fue el que se utilizó realmente, que colocó los bisiestos cada tres años; el que tuvieron intención de que se siguiera, que hacía al año 45 a. C. el comienzo de una tetraérida que culminaría en un año bisiesto en el 42 a. C.; y, por último, hay que considerar al año juliano proleptico, el que se obtiene prolongando hacia atrás el calendario que resultó de la reforma de Augusto y que convierte al año 45 a. C. en un año bisiesto.

14. Otro de los calendarios que sigue el sistema juliano es el utilizado por los quákeros, secta religiosa que no aceptó la reforma gregoriana y que implantaron un calendario "bíblico", en el sentido de que los días semanales y los meses son numerados y no nombrados, Aitken R., "The calendar again", *Astronomical Society of the Pacific* 5 (1949) 376-383.

15. Hay quien piensa que esta coincidencia fue buscada por Dionisio el Exiguo cuando estableció la actual era cristiana, Somerville W. B., "On the chronology of leap years", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* 29 (1988) 397-398.



resultado de multiplicar 35 por 2.

Las 14 variedades de años no se producen consecutivamente. Es necesario que transcurran 28 años para que vuelva a acontecer un año de igual variedad. A este periodo se le llama ciclo solar. Se toma arbitrariamente como inicio del ciclo solar un año bisiesto cuyo primer día es lunes.

La duración promedio del año juliano supera en unos 11 minutos la duración del año trópico. Tomando como año de referencia el de inserción del calendario juliano, los errores acumulados, calculados por la fórmula (17.4) son los de la tabla 1.6.<sup>16</sup>

Año	Días de error	Ciclos transcurridos
223	2	67
483	4	132
747	6	198
1007	8	263
1267	10	328
1523	12	392

Tabla 1.6.- Error acumulado en el calendario juliano.

En el año 1524 ya se habían acumulado 12 días de error desde el año proléptico 45 a. C., lo que significa el aumento de un día cada 131 años aproximadamente, cantidad que va variando a consecuencia del frenado de la rotación terrestre y de la variación del año trópico con el tiempo.

### El calendario gregoriano

Haciendo uso de la fórmula (16.4) se encuentra que la dispersión de la primavera en el año 1581 (el año anterior a la reforma gregoriana) con referencial año 325 en que se celebró el concilio de Nicea fue de 9.7 días.<sup>17</sup> Cantidad similar se encuentra para las dispersiones de las restantes estaciones. Este desplazamiento de las estaciones por el calendario juliano no originaba problemas en la vida cotidiana, a causa de la lentitud del desplazamiento, que apenas es perceptible a lo largo de la vida de una persona. Pero sí dio motivo para que surgiera un problema religioso. La fiesta cristiana de la Pascua debe celebrarse en los primeros días de la primavera, que se suponía fija en el 21 de marzo, lo que no era cierto por el mencionado desplazamiento de las estaciones. La consecuencia fue que la Pascua se iba celebrando cada vez más tarde respecto a la primavera. Si el calendario juliano no hubiese sido reformado, hubiera llegado el momento en que la Pascua se hubiese celebrado en verano.

16. Los años que aparecen en la tabla 1.6 son siempre los inmediatamente anteriores a un bisiesto, ya que elegimos como partida el año -44 que es bisiesto en el calendario juliano proléptico. El cálculo está hecho considerando bloques de cuatro años.

17. En el caso del calendario juliano  $E_c \gg \Delta_p^i$ , por esta razón el desplazamiento de las estaciones es prácticamente igual al  $E_c$ .

Aunque desde el siglo XIII se presentaron propuestas para reformar el calendario, no fue hasta el pontificado del papa Gregorio XIII que tuvo éxito su reforma.<sup>18</sup> Al cuarto año de su mandato, Gregorio pidió a su tesorero, Tommaso Gigli, que le preparara un informe sobre el estado de la reforma. A manos de Gigli llegó el proyecto del profesor calabrés de medicina Luigi Lilio, presentado por su hermano Antonio tras la muerte de su autor.<sup>19</sup> Al poco se nombró un comité (o “congregación” según la terminología de la época) que empezó a funcionar en 1572 ó 1575. Entre otros miembros se encontraba el español y profesor de la Universidad de Salamanca, Pedro Chacón; el astrónomo jesuita Ignacio Dante y el célebre matemático alemán Christophorus Clavius, a los que se añadió el ex-patriarca de Antioquía, de nombre Ignacio.

Apartir del trabajo de Lilio la comisión preparó un resumen que fue publicado en el año 1577 y enviado a los reyes católicos; entre ellos al de España y a las principales universidades, entre las que se encontraban las de Alcalá y Salamanca, por entonces el más destacado centro científico europeo.<sup>20</sup>

En general, las opiniones recibidas fueron favorables a la reforma, mostrando más simpatías los príncipes que los sabios, que, en algunos casos, mostraron sus reservas, proponiendo proyectos alternativos.<sup>21</sup> El nuevo calendario fue aprobado por una bula del papa Gregorio XIII fechada el 24 de febrero de 1582. La bula tenía tres aspectos diferentes. Primero, la restauración del calendario, es decir volver a colocar el equinoccio en el día 21 de marzo, en el mismo día en que estaba en tiempo del concilio de Nicea. Para conseguir este propósito fue necesario quitar diez días del calendario juliano. Fueron eliminados los días que iban del 5 al 14 de octubre de 1582, ambos inclusive; se eligieron esas fechas para perturbar lo menos posible las festividades religiosas.

Otro asunto que trataba la bula era el método que debía seguirse para evitar en lo sucesivo que el equinoccio de primavera se volviera a desplazar. La idea de Lilio fue quitar tres bisiestos cada cuatrocientos años.<sup>22</sup> Según esta regla los años centenarios

18. Magníficos informes sobre la reforma se encuentran en *Gregorian reform of the calendar. Proceedings of the Vatican conference to commemorate its 400 th anniversary 1582-1982*, editado por Coyne, Hoskin y Pedersen, Specola Vaticana, 1983. Para un breve resumen véase Hope E. R., “Further adjustment of the Gregorian calendar year. Part II”, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **58** (1964) 79-87.

19. Moyer G., “Luigi Lilio and the Gregorian reform of the calendar”, *Sky and Telescope* **64** (1982) 418-419.

20. La relación entre la Universidad de Salamanca y la reforma gregoriana se encuentra en Bustos y Miguel J., *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1898 a 1899*, Salamanca, 1898.

21. Juanelo Turriano entonces a sueldo del rey español, Felipe II, emitió un informe en el que hacía una propuesta para modificar las ideas de Lilio, Turriano J., *Breve discurso a su majestad el rey católico en torno a la reducción del año y reforma del calendario*, Castalia, 1990.

22. En la Edad Media la duración del año se expresaba en días y en partes fraccionarias sexagesimales, llamadas primeros, segundos y terceros. La duración del año alfonsino utilizado como base para el calendario gregoriano es en esta notación  $365^d 14' 33'' 10'''$ . Al redondear la anterior cifra omitiendo los terceros, se encuentra que la duración del año es la misma que la del calendario gregoriano. Se ha planteado que aquí se encuentra el origen de la duración del año gregoriano, McNally D., “The first 400 years of the gregorian calendar”, *Irish Astronomical Journal* **16** (1983) 17-22 y Moyer G., “The gregorian calendar”, *Scientific American* **246** (1982) 144.

(aquellos que terminan en dos ceros) cuyas cifras centenarias no sean divisibles entre cuatro no serán bisiestos.<sup>23</sup> El primer año centenario al que se aplicó esta regla fue el 1600, que sí fue bisiesto, aunque no lo fueron los siguientes tres años centenarios, o sea, 1700, 1800 y 1900.

El nuevo calendario fue de inmediato implantado en España. Felipe II ordenó el cumplimiento de la reforma mediante una pragmática fechada en Lisboa el 29 de septiembre de 1582 y pregonada en Madrid el 3 de octubre al son de trompetas y atabales por pregoneros públicos a “altas e inteligibles voces”. En la pragmática real se ordenaba que se omitieran los diez días en la fecha dictada por el Papa. Esta orden de Felipe II no se aplicó en las colonias americanas. Hubo que esperar al 14 de mayo de 1583 cuando, por acuerdo del Real Consejo de Indias, Felipe II promulgó una nueva pragmática, en esta ocasión para implantar la reforma en los territorios transoceánicos, ordenando que el 5 de octubre de 1583 se procediera a la eliminación de los diez días.<sup>24</sup>

Los territorios de las Antillas, Nueva España y Guatemala cumplieron el mandato real. Sin embargo, no ocurrió lo mismo con el virreinato del Perú, que a consecuencia de su lejanía de España, conoció tardamente la pragmática de Felipe II, por lo que se vieron obligados a adoptar el nuevo calendario al año siguiente, en 1584.<sup>25</sup>

La bula papal no fue acatada en todo lugar, ni siquiera en los países más cercanos a la iglesia católica. La aceptación del calendario reformado tuvo lugar en un largo proceso en el cual podemos distinguir cuatro etapas.<sup>26</sup> En la primera de ellas se encontraron los países que durante los años 1582 a 1587 hicieron el cambio, como fue el caso de España, Francia, Italia, Austria, Polonia, Luxemburgo, Hungría y las zonas católicas de Bélgica, Alemania, Países Bajos y Suiza. Luego podemos agrupar los países mayoritariamente protestantes que hicieron la reforma en el siglo XVII y, sobre todo el año 1700; entre ellos están: Islandia, Noruega, Dinamarca, Alsacia y las zonas protestantes de Alemania, Países Bajos y Suiza.

Otra hornada de conversiones se produjo a mitad del siglo XVIII, a la par que se hacía la reforma en Gran Bretaña, a la que se unieron Lorena y Suecia. Por último, tenemos que citar un cuarto grupo formado por aquellos países europeos de mayoría ortodoxa que adoptaron el nuevo calendario en el siglo XX y entre lo que se encontraron: Rusia, Bulgaria, Albania, Croacia, Estonia, Grecia, Rumanía, Yugoslavia y Turquía.

Mencionamos los países no europeos, que fueron aceptando el calendario gregoriano

23. Si en un calendario de un ciclo de 400 años se colocaran regularmente 97 bisiestos, sería necesario intercalar normalmente 85 años (es decir, se colocaría el bisiesto cada cuatro años), mientras que en 12 ocasiones los bisiestos se intercalarán cada 5 años ( $85 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 400$ ).

24. La bula papal *Inter gravissimas* que promulgó el nuevo calendario, preveía que no todas las naciones iban a aplicara el nuevo calendario en el año 1582 y establecía que en cuanto “a los que a pesar de todo viven en regiones demasiado alejadas para conocer a tiempo esa carta, que les se permitido de hacer tal cambio en el mes de octubre que sigue inmediatamente, es decir, en 1583 o durante el año siguiente a éste [...]”

25. Comas J., «El calendario gregoriano en América», *Historia Mexicana* 7 (1957) 207-215.

26. El 7 de noviembre de 1582 el papa Gregorio XIII emitió nueva orden para que aquellos que aún no habían adoptado el nuevo calendario lo hicieran al año siguiente. Según este documento, el Papa ordenó que “[...] después del décimo día de febrero del año 1583, domingo de Quincuagésima según el antiguo calendario, se pasará directamente al veintiún día de este mismo mes de febrero [...]”

conjuntamente con sus metrópolis o, en el caso de naciones no colonizadas como China o Japón, a medida que su contacto con occidente se fue haciendo más intenso.<sup>27</sup>

### El calendario aritmético musulmán

Como hemos indicado, el calendario musulmán es de carácter observacional y por lo tanto no se puede preparar con antelación. Para solucionar los problemas originados por este tipo de calendarios, se hace uso de un calendario esquemático, aritmético o computacional que nos permite, aunque con un error de uno o dos días, conocer con antelación el calendario islámico y además utilizarlo para fines cronológicos.<sup>28</sup>

El calendario aritmético musulmán es exclusivamente lunar, comenzando sus meses en la cercanía del día de la Luna nueva. Está compuesto de doce meses de duraciones alternativas de 30 y 29 días, lo que hace un total de 354 días en los años normales. Tiene un ciclo de 30 años, de los cuales 11 son abundantes, de una duración de 355 días, para lo cual se añade al último mes del año un día extra, pasando de 29 a 30 días. Esto hace que la lunación promedio sea de  $29^d 12^h$  y  $44^s$ , muy cercano al valor astronómico.

El nombre de los meses es el mismo que se utiliza en el calendario ritual: Moharram, Safar, Rabi I, Rabi II, Djumada I, Djumada II, Radjeb, Chaaban, Ramadhan, Chawal, Dhulcada y Dhuhlidjah. Los meses impares tienen 30 días de duración y 29 los colocados en lugares pares. El calendario musulmán hace uso de la semana y se considera que el día comienza a la puesta del Sol.

La cuenta de los años se inicia con el 16 de julio del año 622; era conocida como la Hégira. La intercalación de los años abundantes tiene lugar en los años situados en las posiciones 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 y 29, contados los años desde la Hégira. Es decir, es el orden dado por la fórmula (19.4) cuando se toma  $\alpha = 1$  y  $\beta = 4$ . La razón de este orden en la intercalación hay que buscarla en el criterio establecido para saber cuándo hay que colocar un año abundante: si la primera Luna nueva promedio del año llega después de haber transcurrido las 12 horas del día, entonces el año anterior es abundante. Supongamos un año donde coincida la Luna nueva con el comienzo del primer día del año. La primera Luna nueva del siguiente año ya no coincidirá con el comienzo del primer día del nuevo año, sino que habrá una diferencia

$$(29.530\ 555\ 55 - 29.5) \cdot 12 = 0.366\ 6666.$$

Al comienzo el tercer año la diferencia habrá alcanzado el doble de la anterior cantidad, 0.733 333 días, es decir, que sobrepasa las doce horas, motivo por el que se coloca en el año anterior (que es el segundo) un día intercalar. Al principio del cuarto año la diferencia será la que arrastraba del segundo año más la que se ha incrementado durante tercer año

$$0.733\ 3333 - 1 + 0.366\ 6666 = 0.01$$

que no supera las doce horas, por lo que el tercer año no será abundante y así se procede sucesivamente.

27. Gingerich O., "Notes on the gregorian calendar reform", *Sky and Telescope* **64** (1982) 530-533.

28. Freeman-Grenville G. S. P., *The Islamic and Christian calendars*, Garnet, 1995 y Martin R., *Mémoire sur le calendrier musulman et sur le calendrier hébraïque*, Mallet-Bachelier, 1857.

Se usa otro criterio para la intercalación, que exige que la diferencia acumulada entre la duración promedio de las lunaciones y los días transcurridos, sea mayor o igual que doce horas. En este caso será abundante el año 15 y no el 16, permaneciendo igual los restantes años intercalares.

Si tomamos la longitud geográfica de La Meca y suponemos que en promedio la puesta del Sol tiene lugar a las 18 hora local, entonces se encuentra que al comienzo de aplicación del calendario islámico, las Lunas nuevas llegaban 2.3 días antes que el primer día del mes.

Como la duración promedio del mes lunar del calendario musulmán no coincide con el mes sinódico medio, deberá de existir un error que se irá acumulando. En la tabla 2.6 se dan los errores acumulados desde el comienzo de la Hégira tal como son calculados mediante la fórmula (17.4).

Año Hégira	Nº de ciclos	Error (en días)
1500	50	-0.62
3000	100	-1.15
4500	150	-1.58
6000	200	-1.92

Tabla 2.6.- Error acumulado en el calendario musulmán.

Esto quiere decir que las Lunas nuevas astronómicas vienen cada vez más tarde, ya que la lunación astronómica es mayor que la lunación media del calendario.

### El calendario judío

El calendario judío es lunisolar y computacional.<sup>29</sup> El año viene caracterizado por el género, que es el número de meses que tienen: 12 para los años normales y 13 para los años abundantes o embolismicos. Cada uno de estos géneros de años pueden tener tres duraciones diferentes, que representan la especie. Así los años normales pueden ser defectivos, con 353 días; regulares de 354 días y abundantes de 355 días. Mientras que los años embolismicos pueden tener 383, 384 ó 385 días, correspondientes a los años defectivos, regulares y abundantes.

Los meses siempre tienen las mismas duraciones, exepcto Hechvan y Kislev, que tienen una duración variable de 29 ó 30 días, lo que permite que los años sean de especies diferentes. En un año embolismico al mes intercalar se le denomina Adar I y

---

29. Abundante información sobre el calendario judío se encuentra en las siguientes referencias: Bushwick N., *Understanding the Jewish calendar*, Moznaim, 1989; Spier A., *The comprehensive hebrew calendar*, Feldheim, 1986; Stiouï R., *Le calendrier hébraïque*, Colbo, 1988; Martin R., *Mémoire sur le calendrier hébraïque*, Angers, 1863; Beckwith R., *Calendar and Chronology, Jewish and Christian*, E. J. Brill, 1996; *Enciclopedia Judaica*, Meter Publishing House, 1971, en voz «Calendar» y Bouchet U., *Hémérologie ou traité pratique complet des calendriers*, 1868, pp. 229-359. Las festividades religiosas judías vienen descritas en Wylen S. M., *The book of the jewish year*, UAHC, 1995.

Meses	Año común			Año embolísico		
	Defectivo	Regular	Abundante	Defectivo	Regular	Abundante
Tishri	30	30	30	30	30	30
Hechvan	29	29	30	29	29	30
Kislev	29	30	30	29	30	30
Tévet	29	29	29	29	29	29
Chevat	30	30	30	30	30	30
Adar I	29	29	29	30	30	30
Adar II	-	-	-	29	29	29
Nisan	30	30	30	30	30	30
Iyar	29	29	29	29	29	29
Sivan	30	30	30	30	30	30
Tammuz	29	29	29	29	29	29
Ev	30	30	30	30	30	30
Elul	29	29	29	29	29	29
Suma	353	354	355	383	384	385

Tabla 3.6.- Duración de los meses del calendario judío según el tipo de año.

tiene 30 días, en este caso el mes que ordinariamente se llama Adar viene después de embolismo, toma la numeración II y continúa teniendo los 29 días habituales.

El calendario judío toma  $29^d 12^h 3^s .32$  como duración de la lunación, muy cercano al valor astronómico. En vez de usar los minutos y segundos se hace uso del *'helek* (en plural *'halakim*), definido tal que una hora tenga 1080 *'halakim*. Dos razones existen para hacer esta elección. Una de ellas es porque el 1080 es el número más pequeño que permite expresar la lunación con un número entero

$$29^d 12^m 3^s .32 = 29^d 12^h 793^p = 29.50594 = 765\,433 \text{ 'halakim}$$

la otra es el gran número de divisores que tiene: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, ... lo que facilita las operaciones algebraicas.<sup>30</sup>

La práctica tradicional judía hace comenzar el día al anochecer; entendiéndose que ese momento corresponde a las 0 horas judías. Si se supone que el Sol se pone a las 18 hora local, entonces entre las horas judías y locales existe la relación

$$HJ = HL + 6.$$

El calendario judío sigue el ciclo de Metón, compuesto de 19 años y 235 lunaciones, siendo embolísmicos los años situados en las posiciones 3, 6, 8, 11, 14, 17 y 19.

Para el cálculo es conveniente hacer uso de los *she'riot* o excesos sobre semanas enteras de un periodo de tiempo determinado. Por ejemplo, la duración del mes lunar excede a cuatro semanas enteras en  $1^d 12^h 793^p$ . Los *she'riot* de interés son los que aparecen en la tabla 4.6. Entendemos el año común como compuesto de 12 lunaciones, el año embolísmico son 13 lunaciones y el ciclo lunar 235.

30. Para evitar confusión abreviaremos los *'halakim* con una p, en vez de con una h.

Periodo de tiempo	<i>She'riot</i>
Mes lunar	1 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 793 <sup>p</sup>
Año común	4 <sup>d</sup> 8 <sup>h</sup> 876 <sup>p</sup>
Año embolístico	5 <sup>d</sup> 21 <sup>h</sup> 589 <sup>p</sup>
Ciclo lunar	2 <sup>d</sup> 16 <sup>h</sup> 595 <sup>p</sup>

Tabla 4.6.- *She'riot* de distintos periodos de tiempo.

El primer día del año 1 del calendario judío corresponde al día 7 de octubre del año -3760 de nuestra era. Según la tradición el mundo fue creado a las 0 horas del domingo 24 de Elul y el hombre apareció el viernes 29 de Elul a las 17 horas de tiempo judío, ambos sucesos se produjeron en el año de *Tohu*, que fue el anterior al primero. También se supone que el primer *molad* (o Luna nueva) después de la creación tuvo lugar a las 14 horas del viernes 29 de Elul, momento que representaremos por 6<sup>d</sup> 14<sup>h</sup>, indicando con ello que es el viernes (día 6 de la semana) a las 14 horas.<sup>31</sup> La tradición judía considera que los astros quedaron inmobilizados durante el año del diluvio. Las posiciones del Sol y la Luna no cambiaron pero el número de años aumentó en una unidad. Se supone que el año del diluvio fue un año común, entonces podemos omitir el año del diluvio si suponemos que el primer *molad* de la creación ocurrió en el momento

$$6^d 14^h - 4^d 8^h 876^p = 2^d 5^h 204^p$$

donde hemos hecho uso del *she'riot* del año común. Si queremos determinar el primer *molad* de un año cualquiera, le sumaremos al supuesto momento del primer *molad* (que es 2<sup>d</sup> 5<sup>h</sup> 204<sup>p</sup>) la duración de todas las lunaciones ocurridas desde el comienzo del mundo hasta el comienzo del año considerado.

El primer día del año se denomina *Roch-hachana* y su día semanal es el carácter de ese año. Para determinar el carácter es necesario tener en cuenta los *dehiyyot* o aplazamientos, que establecen cinco excepciones para la celebración del *Roch-hachana*: 1) Si el *molad* del nuevo año tiene lugar el domingo, miércoles o viernes, el primer día del año se traslada al día siguiente. Si *Roch-hachana* fuer miércoles o viernes entonces el *Yom Kipur* (que cae el 10 de Tishri) sería viernes o domingo. Esto significaría dos días de reposo absoluto, al venir el sábado antes o después del *Yom Kipur*. Si *Roch-hachana* cayera en un domingo, entonces la fiesta de *Hocha'ana-Rabba* (que cae el 21 de Tishri) coincidiría con un sábado, lo que se trata de evitar, pues esa celebración quedaría anulada al coincidir en sábado.

2) Si el *molad* calculado ocurre a las 18 horas judías (es decir mediodía) o posterior, debe trasladarse el *Roch-hachana* al día siguiente. Este *dehiyyah* proviene de cuando el calendario judío era empírico. En efecto, se supone que el *molad* coincide con la Luna nueva pero el mes debe comenzar con el momento en que es observado el primer creciente lunar. Se supone que para observaciones hechas en Jerusalén el intervalo

31. Aunque no afecta a nuestro razonamiento, hay que tener en cuenta que el tiempo asociado al calendario judío se refiere al tiempo local del meridiano de Jerusalén, que se encuentra a 35° 10' E. Por tanto, la relación entre hora judía y tiempo universal es

$$HJ = UT + 8^h 20^m 40^s .$$

mínimo entre ambos acontecimientos es de 6 horas. Por tanto, si el *molad* cae después del mediodía, la observación del nuevo creciente no podría ser ese día, sino el siguiente, que sería el primer día del año.

3) Si por causa de la anterior regla el día de año nuevo acontece en domingo, miércoles o viernes, se retrasa otro día más el comienzo del año.

4) Si el año es común y el *molad* cae un martes a las 9 horas 204 *'halakim* o posterior, el *Roch-hachana* se retrasa al jueves. La razón de este *dehiyyah* se encuentra en que si el *molad* cae en el día y hora indicado o posterior, el primer *molad* del año siguiente sería

$$29^d 12^h 793^p \times 12 + 3^d 9^h 204^h = 357^d 18^h = 7^d 18^h$$

es decir, sería un sábado a las 8 horas o posterior, por lo que el comienzo del año tendría que trasladarse al siguiente día que es domingo, pero como este día no puede ser el *Roch-hachana*, será necesario hacer el desplazamiento un día más y pasar el inicio del año al lunes. Pero en este caso la duración del año común alcanzaría los 356 días, lo que está prohibido.

5) Si en un año ordinario que sigue a un año embolístico (es decir los que están en los puestos 1, 4, 7, 9, 12, 15 y 18 del ciclo lunar) el *molad* calculado cae el lunes a las 15 horas 589 *'halakim* o posterior, entonces se traslada el comienzo del año al martes. La razón de esta regla se encuentra en que si el *molad* ocurriera en el día y hora indicado o posterior, el *molad* del principio del año anterior habría sido

$$2^d 15^h 589^p - 13 \times 29^d 12^h 793^p = 3^d 18^h$$

es decir el primer *molad* del año embolístico sería el martes a las 18 horas, por lo que tendría que ser postpuesto al jueves, pero entonces el año embolístico tendría una duración de sólo 382 días, lo cual no puede ser porque la duración mínima es de 383 días.

Al hacer uso de las reglas anteriores se puede determinar el carácter del año o día semanal de su primer día. Para hallar la especie del año es necesario determinar el día semanal de *Roch-hachana* del año siguiente y hacer uso de la tabla 5.6. La segunda columna es el día semanal del año siguiente menos el día semanal del año analizado (añadiéndole 7 si el resultado fuera negativo).

Para determinar el calendario judío de un año lo primero que hay que hacer es determinar su posición lunar, o sea, el número de ciclos lunares completos que han transcurrido desde el momento de la creación, así como los años normales y abundantes

Género del año	Diferencia	Especie del año	Días de Hechvan y Kislev	Días del año
Común	3	Defectivo	29 y 29	353
Común	4	Regular	29 y 30	354
Común	5	Abundante	30 y 30	355
Abundante	5	Defectivo	29 y 29	383
Abundante	6	Regular	29 y 30	384
Abundante	0	Abundante	30 y 30	385

Tabla 5.6.- Duración de Hechvan y Kislev según el género del año.



que han transcurrido en el ciclo en curso. Se multiplican los anteriores números por los *she'riot* correspondientes, a los que se le suma el momento del primer *molad* del año. Luego se determina si el año es normal o abundante, utilizando para ello su posición en el ciclo lunar. Con todo esto se aplican los *dehiyyot* y se determina el día de *Roch-hachana*. Para hallar la especie del año, se repite todo el cálculo para el siguiente año y haciendo uso de la tabla 5.6 se averiguan los días de los meses de Hechvan y Kislev. Conociendo el día semanal de Roch-hachana, el género y la especie del año se puede construir el calendario.

Por ejemplo, sea el año 5820. Hasta el comienzo de ese año han transcurrido 306 ciclos de 19 años, 4 años normales y 1 año embolístico. La suma de los correspondientes *she'riot* es

$$\begin{aligned} 306 \times 2^d 16^h 595^p &= 823^d 0^h 630^p = 4^d 0^h 630^p \\ 4 \times 4^d 8^h 876^p &= 17^d 11^h 264^p = 3^d 11^h 264^p \\ 1 \times 5^d 21^h 589^p &= 5^d 21^h 589^p \\ \text{Suma} &= 6^d 9^h 403^p \end{aligned}$$

y al añadir el momento de la primera lunación queda

$$6^d 9^h 403^p + 2^d 5^h 204^p = 29^d 14^h 607^p = 1^d 14^h 607^p$$

Esto significa que el primer *molad* del año 5820 es un domingo, entonces el primer día del año debe ser un lunes, según establece el primer *dehiyyot*. Hacemos el mismo análisis para el año 5821 y se encuentra que el primer *molad* se produce a las  $0^d 12^h 116^p$ , en cuyo caso no hay ningún desplazamiento y el primer día de ese año es el sábado. El año 5820 es embolístico, al ser el sexto del ciclo lunar. La diferencia entre los días de comienzo de los años consecutivos es  $0 - 2 = -2 = 5$ , entonces mirando la tabla 5.6 se encuentra que el año 5820 es embolístico, defectivo y empieza por lunes.

El año viene caracterizado por el carácter, el género y la especie. Sin embargo, es habitual expresar las características del año mediante su carácter, especie y el día semanal en que cae la Pascua (que es siempre el día 15 de Nisán). De manera abreviada se define el tipo de año por tres letras, correspondientes a las iniciales en hebreo de las características anteriormente citadas.

Para los días de la semana las iniciales son: lunes (ב), martes (ג), jueves (ד), sábado

Años comunes		Años abundantes	
Kebiot	Duración	Kebiot	Duración
ב ש ה	355	ז ש ב	385
ג ח ב	353	ה ח ב	383
ה כ ג	354	ז כ ז	384
א ש ה	355	ג ש ה	385
ז כ ה	354	א כ ה	384
ז ש ג	355	ה ש ז	385
א ח ז	353	ג ח ז	383

Tabla 6.6.- Duración de los distintos años del calendario judío.

(f) y domingo (g). Las iniciales de la especie son: defectivo (p), regular (q) y abundante (r). Existen dos géneros de años, cuatro posibilidades para las duraciones de los meses Hechvan y Kisleb. Es decir, que en principio deben de existir 24 variedades o *kebiot* de años en el calendario judío (= 2 · 4 · 3). Sin embargo, sólo 14 de esos tipos se pueden dar en la realidad, tal como recoge la tabla 6.6. Para la lectura de los *kebiot*, téngase presente que en hebreo se lee de derecha a izquierda.

La duración promedio del mes lunar del calendario judío es  $29^d 12^h 44^m 3^s .2$ , lo que significa 0.41 segundos más que la lunación media astronómica en la época actual. a pesar de este preciso valor, el calendario hebreo comete un error que se irá acumulando con el tiempo. El año implicado en el calendario judío tiene un valor medio dado por

$$\frac{29.530594 \cdot 12 \cdot 12 + 29.530594 \cdot 13 \cdot 7}{19} = 365^d 5^h 55^m 25^s .29$$

lo que generará un error acumulado y una movilidad de todas las estaciones respecto al calendario.

### El calendario chino

El calendario chino es lunisolar y astronómico. Para su preparación se necesita conocer los momentos en que se producen ciertos fenómenos astronómicos. Esto quiere decir que no puede construirse por sí mismo, sino que necesita un calendario auxiliar, como puede ser el gregoriano o la cuenta de los días julianos.<sup>32</sup>

El calendario chino divide el recorrido eclíptico del Sol en doce partes, distanciadas entre sí 30 grados. A cada una de esas posiciones se le llama términos principales y se reserva el nombre de términos seccionales a los 12 puntos intermedios. El primer término principal se inicia cuando el Sol tiene una longitud de 330 grados y finaliza cuando tiene 0 grados. El tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por dos términos principales es variable, por serlo la velocidad eclíptica solar y esta duración corresponde a cada uno de los doce meses solares del año.

Los meses del calendario chino comienzan el día en que ocurre la Luna nueva astronómica y los días se inician a medianoche. Para conseguir estabilizar las estaciones en el calendario, se intercala ocasionalmente un decimotercer mes, por tanto, los años ordinarios tienen 12 meses y los años abundantes o embolísmicos tienen 13.

Los meses son numerados y no nombrados.<sup>33</sup> El mes 11 es siempre aquel en que se produce el solsticio de invierno, que corresponde al undécimo término principal, cuando el Sol tiene una longitud eclíptica de 270 grados.

---

32. Dogget L. E., "Calendars" en *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, editado por P. Kenneth Seidelmann, University Science Books, 1992, pp. 575-608 y Welch W. C., *Chinese-american calendar for the 102 chinese years commencing January 24, 1849, and ending February 5, 1951*, U. S. Department of Labor, 1928, esta referencia se aparta de las normas dadas en el texto, en cuanto afirma que el año nuevo comienza con la segunda Luna nueva después del día del solsticio de invierno, es decir, niega la posibilidad de que puedan existir meses intercalares con los números 11 y 12.

33. En algunas versiones se denominan a los meses solares con los mismos nombres de animales que las ramas terrestres (ver más adelante). Otros llaman a los meses lunares con el mismo nombre que los meses solares a los que están asociados.

Troncos celestes		Ramas terrestres		
1	Jia	1	Zi	Rata
2	Yí	2	Chou	Buey
3	Bing	3	Yin	Tigre
4	Ping	4	Mao	Liebre
5	Wu	5	Chen	Dragón
6	Ji	6	Si	Serpiente
7	Geng	7	Wu	Caballo
8	Xin	8	Wei	Oveja
9	Ren	9	Shen	Mono
10	Gui	10	You	Gallina
		11	Xu	Perro
		12	Hai	Cerdo

Tabla 8.6.- Troncos celestes y ramas terrestres del calendario chino.

El mes intercalar recibe el número del mes anterior, con el añadido de intercalar. En los años abundantes son intercalares aquellos meses que no contienen ningún término principal.<sup>34</sup> Si existiesen dos meses con esas características, sería intercalar el primero de ellos que venga después del solsticio de invierno. En los años normales es posible que algún mes no tenga término principal y por tanto exista otro mes que tenga dos términos principales; esta circunstancia no modifica en nada la numeración de los meses.

Tanto los cálculos para determinar la Luna nueva como los momentos de los términos principales, son realizados con el tiempo medio del meridiano que se encuentra a 120 grados al este y que se halla en el uso horario de Pekín.

El calendario chino carece de era. Para nombrar los años se usa un ciclo de 60 años, cuyos nombres están compuestos de dos conjuntos de términos: 10 de ellos llamados troncos celestes y 12 ramas terrestres cuyos nombres hacen referencia a animales.

El primer año del ciclo es Jia-Zi, le sigue Yi-Chou, así hasta Gui-You (ver tabla 8.6); a partir de aquí se inician de nuevo los troncos celestes y se continúa con las ramas terrestres, de tal forma que el undécimo año es Jia-Xu, después viene Yi-Hai. Se inicia ahora de nuevo con las ramas terrestres y se sigue con los troncos celestes, por tanto el siguiente es Bing-Zi y así hasta completar el ciclo de 60 años.

Para facilitar los cálculos podemos numerar los ciclos, siendo el 78 el ciclo que comenzó el 2 de febrero de 1984. Los años de nuestra era se relacionan con el año del ciclo mediante

$$Y_G = (C - 78) \cdot 60 + Y_C + 1983 = 60C + Y_C - 2697 \quad (1.6)$$

donde  $Y_G$  son años de nuestra era,  $Y_C$  y  $C$  es el año y ciclo de la fecha china. La relación

---

34. Un problema surge cuando el mes lunar comienza el mismo día en que hay un término principal. El calendario civil entiende que ese término principal está incluido en la lunación.

inversa es

$$C = \text{int}\left(\frac{Y_G + 2696}{60}\right); \quad Y_C = (Y_G + 2696) \bmod 60 + 1.$$

Para construir el calendario chino de un año  $Y$  de nuestra era, calculamos los días en que se producen los términos principales desde final del año  $Y-1$  (concretamente desde el término asociado a la longitud solar de 270 grados) hasta el final del año  $Y+1$ . Cada uno de esos momentos lo representamos por  $P(r)$ , de tal forma que  $P(0)$ ,  $P(12)$  y  $P(24)$  son los solsticios de invierno de los años  $Y-1$ ,  $Y$  e  $Y+1$ . Con  $L(r)$  representamos los días de la Luna nueva. El término principal  $s$  se encuentra en la lunación  $r$  si se cumple

$$L(r+1) > P(s) \geq L(r) \quad (2.6)$$

$L(0)$ ,  $L(u)$  y  $L(v)$  son los comienzos de las lunaciones que contienen los términos  $P(0)$ ,  $P(12)$  y  $P(24)$  y son los comienzos del undécimo mes de los años  $Y-1$ ,  $Y$  e  $Y+1$ .

Si  $u$  es igual a 12 no habrá lunaciones embolísticas entre los undécimos meses de los años  $Y-1$  e  $Y$ . Tampoco los habrá entre  $Y$  e  $Y+1$  si  $v-u$  es igual a 12. En caso contrario existirán tales meses entre esas fechas. En el caso de que  $u$  sea 12, el comienzo del primer mes del año  $Y$  será  $L(2)$ . Si entre  $u$  y  $v$  sólo hay 12 meses, el comienzo del año  $Y+1$  será  $L(u+2)$ , que puede ser el  $L(14)$  o el  $L(15)$ .

Si  $u$  es 13, entonces entre los undécimos meses de los años  $Y-1$  e  $Y$  hay un mes intercalar. Es necesario averiguar su posición para determinar el comienzo de  $Y$ . Para ello se empiezan a analizar todas las lunaciones desde la  $L(1)$  hasta la  $L(12)$ . La lunación intercalar será la primera de ellas que no cumpla (2.6). Si esta lunación viniera después de los meses 11 ó 12, entonces el año  $Y$  comenzaría con  $L(3)$ , en caso contrario el año se inicia con  $L(2)$ .

Si  $v-u$  fuera 13, entonces habría un mes intercalar entre los undécimos meses de  $Y$  e  $Y+1$ . Se utiliza el mismo criterio que antes para averiguar cuál es el mes embolístico, o sea, el primero de ellos que no cumpla (2.6).<sup>35</sup> Si ese mes viniera después del mes 11 o del 12 del año  $Y$ , entonces el año  $Y+1$  comenzaría con la lunación  $L(u+3)$ , si no fuese así el año comenzaría con  $L(u+2)$ .

Veamos lo anterior con un ejemplo. Queremos calcular el calendario chino que tiene su comienzo en el año 2001 de nuestra era. Los términos principales y lunaciones de los años 2000, 2001 y 2002 se encuentran en la tabla 9.6, donde las fechas vienen dadas en el calendario gregoriano. Los meses 11 comienzan en las fechas 26/11/2000 y 15/12/2001, habiendo entre ellas trece lunaciones, por lo que una de ellas tiene que ser la embolística. El mes intercalar es aquel que comienza el 23/5/2001 porque no contiene ningún término principal. Entre los undécimos meses de los años 2001 y 2002 (mes que en este año comienza el 4/12/2002) hay 12 lunaciones, por lo que no hay ninguna embolística. El año chino 2001 comenzó el día 25/1/2001 y finalizó el día 11/2/2002, siendo un año embolístico de trece meses. El mes intercalar es el que sigue al mes 4 de ese año.

Hay que advertir que el calendario chino al ser astronómico seguirá indefinidamente

---

35. El mes embolístico será el mes colocado en la posición  $r$  que no cumpla con la relación

$$L(r+1) > P(r) \geq L(r)$$

Términos principales		Lunas nuevas		Términos principales		Lunas nuevas	
Nº	Fecha	Nº	Fecha	Nº	Fecha	Nº	Fecha
Año 2000		-----		Año 2002		-----	
<b>P(0)</b>	<b>22/12</b>	<b>L(0)</b>	<b>26/11</b>	P(13)	20/1	<b>L(13)</b>	15/12
Año 2001		-----		P(14)	18/2	L(14)	13/1
P(1)	20/1	L(1)	26/12	P(15)	20/3	L(15)	12/2
P(2)	19/2	L(2)	25/1	P(16)	20/4	L(16)	12/3
P(3)	20/3	L(3)	23/2	P(17)	21/5	L(17)	12/4
P(4)	19/4	L(4)	24/3	P(18)	21/6	L(18)	12/5
P(5)	20/5	L(5)	23/4	P(19)	22/7	L(19)	10/6
P(6)	21/6	L(6)	23/5	P(20)	23/8	L(20)	10/7
P(7)	22/7	L(7)	21/6	P(21)	23/9	L(21)	8/8
P(8)	22/8	L(8)	21/7	P(22)	23/10	L(22)	7/9
P(9)	22/9	L(9)	19/8	P(23)	22/11	L(23)	6/10
P(10)	23/10	L(10)	17/9	<b>P(24)</b>	<b>21/12</b>	L(24)	5/11
P(11)	22/11	L(11)	17/10	Año 2003		-----	
<b>P(12)</b>	<b>21/12</b>	L(12)	15/11	P(25)	20/1	<b>L(25)</b>	<b>4/12</b>

Tabla 9.6.- Tabla para calcular el calendario chino.

en sintonía con los movimientos del Sol y de la Luna. También debe tenerse presente que en promedio el año del calendario chino es el año de invierno, es decir, el tiempo promedio entre dos pasos consecutivos del Sol por el solsticio de invierno. No obstante, las demás estaciones se moverán respecto al solsticio de invierno, la movilidad de los distintos puntos estacionales se obtienen a partir de (15.4) y fórmulas siguientes.

### El calendario persa

El calendario persa o iraní es el heredero del calendario jalalí que fue instituido en el año 1079.<sup>36</sup> Ambos calendarios se diferencian en la duración de los meses y en la era. Desde el año 1925 el calendario persa utiliza la Hégira. Los meses son solares y sus duraciones vienen dadas en la tabla 10.6.

Existen años normales de 365 días y años abundantes de 366. En este último caso el día intercalar se coloca al final del último mes, que teniendo 29 días en los años normales pasa a 30 en los años intercalares.

Debemos de distinguir dos tipos de calendarios persas: el astronómico y el aritmético. El primero de ellos usa la teoría astronómica para averiguar la fecha del día de año nuevo y por tanto saber si el año es normal o abundante. El primer día del calendario astronómico

36. Birashk A., *A Comparative Calendar of the Iranian, Muslim Lunar, and Christian Eras for Three Thousand Years (1260 B. H. - 2000 A. H. / 69 B. C. - 2621 A. D.)*, Mazda Publishers, 1992 y Borkowski K. M., "The Persian calendar for 300 years", *Earth Moon and Planets* **74** (1996) 223-230.

Mes	Días	Mes	Días
1. Farvadin	31	7. Mehr	30
2. Ordibehest	31	8. Aban	30
3. Xordad	31	9. Azar	30
4. Tir	31	10. Dey	30
5. Mordad	31	11. Bahman	30
6. Sahrivar	31	12. Esfand	30 ó 29

Tabla 10.6.- Duración de los meses en el calendario persa.

persa es aquel en que acontece el equinoccio de primavera en o después del mediodía según la hora local media de Teherán. Si entre dos días de año nuevo consecutivos median 365, el año es normal y Esfand tendrá 29 días. Si los días que hay de uno a otro día es 366, entonces el año es abundante y Esfand tendrá 30 días.<sup>37</sup>

El calendario aritmético utiliza la regla de intercalación del calendario jalalí, que recibe el nombre de Omar Khayyam, el más prestigioso de los miembros del comité que en el siglo XI reformó el calendario iraní.

Según Birashk el calendario aritmético iraní tiene un ciclo de 2,820 años, que se encuentran divididos en 21 subciclos de 128 años, seguidos al final por un subciclo de 132 años. A su vez los subciclos de 128 años se dividen en un periodo de 29 años, a los que le siguen 3 periodos de 33 años. El subciclo de 132 años se inicia con un subciclo de 29 años, seguidos de 2 de 33 años y finalizando con 1 de 37. En un periodo son intercalares los años que ocupan las posiciones 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 y 37. El primer ciclo de 2,820 años se inició en el año 1725 a. C. (2346 antes de la Hégira).

Según otros investigadores el ciclo del calendario iraní está compuesto por periodos de 33 años, estando la intercalación regularmente repartida, es decir en los años 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 y 33. En el siglo XX el primer año de este ciclo fue el que comenzó con el año 1927 de nuestra era.

Ambos sistemas de intercalación se ajustan bastante bien a los datos astronómicos. Con el calendario basado en el ciclo de 2,820 años se comete un error al final del ciclo de 0.483 días, o sea que este es el desplazamiento del equinoccio de primavera respecto al calendario. Mientras que en el calendario basado en el ciclo de 33 años el desplazamiento es de 0.153 al cabo de 2,838 años ó 86 ciclos. A título de comparación señalar que desde el año 1900 al 2200 el ciclo de 33 años no coincide en tres ocasiones con el calendario astronómico, y el ciclo de 2,280 años se separa de la astronomía cinco veces en el mismo periodo.

Al igual que ocurre con el calendario chino, también el calendario astronómico persa permanece perpetuamente en sintonía con el Sol; concretamente el equinoccio de primavera siempre será el primer día del calendario, pero las demás estaciones irán variando su posición en el calendario.

---

37. Nos encontramos con un problema característico de los calendarios astronómicos. A saber, que en algunos años el cálculo nos da un equinoccio muy cerca del mediodía, dentro del margen de error de la teoría astronómica. Por tanto, hay algunos años en el futuro para los que no se puede anticipar con seguridad si el año será normal o embolístico.

En cuanto al calendario computacional hay que tener presente que su año tiene una duración promedio de  $365^d 5^h 48^m 45^s$ .<sup>96</sup> Desde el año 1096 hasta el 3916 en que comenzará el nuevo ciclo, se va a producir un error acumulado de 0.25 días, lo que representa un promedio anual de unos 8 segundos; por tanto superior al gregoriano en cuanto a precisión astronómica.

### El calendario nacional indio

Más de treinta calendarios existían en la India cuando alcanzó su independencia en 1947, diferenciándose unos de otros en la era, el comienzo del año y el método para la medida del tiempo.<sup>38</sup> A los que hay que añadir el calendario gregoriano de uso civil desde la llegada a la India de los británicos en 1757 y el calendario islámico implantado en el país desde el siglo XIII.

Conseguida la independencia y la unidad nacional de la India, se constató la necesidad de unificar los varios calendarios locales, una medida que pretendía fortalecer la unidad del Estado recién creado. Tanto la Sociedad de Naciones como la ONU fueron incapaces de llevar a cabo la reforma del calendario gregoriano. Las esperanzas que las autoridades indias habían puesto en convertir el nuevo calendario que saliera de esa reforma en su calendario nacional se disiparon. Ante la que iba a ser una paralización definitiva de los trabajos calendaristas en las Naciones Unidas, el gobierno de la India trató de resolver el problema por su propia cuenta.<sup>39</sup>

El Consejo de Ciencia e Investigación Industrial del Ministerio de Recursos Naturales formó, en noviembre de 1952, una comisión de siete miembros con el objeto de proponer “un exacto y uniforme calendario para todo el conjunto de la India”. La comisión eligió la era Saka por ser la más antigua de las varias en uso y la utilizada por los astrólogos que antiguamente hacían los calendarios. Esta era comienza a contarse desde el año 78 de nuestra era.

En el nuevo calendario nacional indio la regla gregoriana de los bisiestos sigue siendo válida. Para saber si un año es bisiesto se le suma 78 al año de la era Saka, si es divisible entre cuatro será bisiesto; pero cuando la suma sea múltiplo de 100, será un años bisiesto sólo cuando sea divisible por 400. Los meses tienen los nombres tradicionales del calendario lunisolar hindú y sus duraciones son coincidentes con el tiempo que tarda el Sol en recorrer 30 grados de la eclíptica, o sea, son meses solares. Chaitra es el primer mes y tiene una duración de 30 días y 31 en los años bisiestos, le siguen Vaishkha con 31 días; Jistha, 31; Asdha, 31; Sravana 31; Bhadra, 31; Asvina, 30; Kartika, 30; Agrahayana, 30; Pausa, 30; Magha, 30 y Phalguna, 30. El año comienza con la primavera, de tal forma que el 1 de Chaitra coincide con el 22 de marzo gregoriano en los años normales y con el 21 de marzo en los años bisiestos.

---

38. *Calendar reform*, Ministry of Information and Broadcasting, 1957 y Mukherjee S. K., *Calendar: An analytical Investigation*, Progressive Publishers, 1978.

39. En diciembre de 1931 Mahamad Gandhi envió una carta a la Sociedad de Naciones en la que apoyaba la reforma del calendario gregoriano: “Sería espléndida cosa si nuestros trescientos cincuenta millones de habitantes tuvieran un sólo calendario nacional unificado [...] Estoy a favor de un calendario normalizado para el conjunto del mundo, como estoy a favor de una moneda única para todos los países y una lengua suplementaria artificial (como es el esperanto, por ejemplo) para todas las personas.”

El gobierno de la India adoptó el nuevo calendario basado en la era Saka, que empezó a ser oficial el 22 de marzo de 1957 que fue el día 1 de Chaitra de 1879. Pero como tantas veces ha ocurrido en otras ocasiones, el nuevo calendario reformado no ha llegado a suplantar a los numerosos calendarios lunisolares locales.

En cuanto a la exactitud astronómica del calendario indio es idéntica a la del calendario gregoriano, pues ambos tienen un año de igual duración promedio.

### Calendario juliano revisado

Los miembros de la comisión papal que reformaron el calendario juliano, discutieron si debían aplazar el cambio del calendario para invitar a representantes de las iglesias ortodoxas. La comisión optó por no atrasar la reforma, tal vez con las miras puestas en la avanzada edad de Gregorio XIII.

Tras conocerse en el este la bula papal que instituía un nuevo calendario, se celebró un sínodo de las iglesias ortodoxas en Constantinopla en noviembre de 1582, que condenó la reforma gregoriana, al pensar que era contraria a las tradiciones, a los decretos del concilio de Nicea, a los deseos de los fundadores de la Iglesia, y particularmente, porque hacía coincidir ocasionalmente la Pascua cristiana con la judía. La oposición se incrementó porque Roma había procedido sin el consentimiento previo de las otras Iglesias cristianas, por lo que aceptar la reforma hubiera significado un acatamiento del resto de las comunidades cristianas a la autoridad del Papa. Pocos años después, en 1593, se celebró un nuevo sínodo que confirmó el anatema a todos los cristianos ortodoxos que se atrevieran a aceptar la reforma del calendario, lo que anuló la posibilidad de que los ortodoxos se unieran a la reforma emprendida por Roma.<sup>40</sup>

Al comienzo del siglo XX se alzaron voces en los países de mayoría ortodoxa para adecuar su calendario al del resto de los países europeos. En 1918 el director del observatorio astronómico de Atenas, D. Eginitis, envió una memoria al gobierno griego sobre la reforma del calendario.<sup>41</sup> Argumentaba la necesidad y utilidad de la unificación en la medida del tiempo. El ministro de Cultos griego elevó la memoria al Santo Sínodo de Grecia, que formó una comisión para su estudio y, en su informe final aprobado por unanimidad del sínodo, afirmaba que era “del parecer que el cambio del calendario juliano no choca con razones dogmáticas o canónicas, y puede ser realizado, después de un acuerdo con todas las otras iglesias autocéfalas ortodoxas y sobre todo con el patriarca de Constantinopla [...] a condición, de acceder no al calendario gregoriano, sino a la redacción de un nuevo calendario, más exacto desde el punto de vista científico y exento de los defectos de los dos calendarios juliano y gregoriano.”

En mayo de 1923 se reunió en Constantinopla un congreso inter-ortodoxo presidido por el patriarca Meletios IV. En las sesiones se discutió un nuevo calendario propuesto por el astrónomo serbio Milankovitch, que exigía la eliminación de trece días para quedar en concordancia con el gregoriano, de tal forma que el 1 de octubre de 1923 sería contado como el 14 del mismo mes y año. Este nuevo calendario difiere del gregoriano

---

40. Hoskin M., “The reception of the calendar by other churchers”, en *Gregorian reform of the calendar. Proceedings of the Vatican conference to commemorate its 400th anniversary 1582-1982*, editado por Coyne, Hoskin y Pedersen, Specola Vaticana, 1983, pp. 255-264.

41. Eginitis D., “Sur la question du calendrier dans l’Europe orientale”, en *Transactions of the International Astronomical Union*, vol. 1, 1992, pp. 189-194.



en su regla de intercalación de bisiestos. Sólo los años centenarios cuyas cifras centenarias al dividir las por 9 den resto de 2 ó 6 serán bisiestos.<sup>42</sup> O sea, quita siete días bisiestos cada novecientos años. Los años centenarios que no serán bisiestos según la regla de Milankovitch, serán los mismos que en los del calendario gregoriano hasta el año 2800; año que según la regla ortodoxa sí será bisiesto pero no lo será según la regla gregoriana.

Algunas iglesias como las de Alejandría, Antioquía, Grecia, Chipre, Polonia y Rumanía, adoptaron en el año 1924 el calendario de Milankovitch (llamado juliano revisado). Las iglesias de Jerusalén, Rusia y Serbia y los monjes del monasterio del monte Athos continúan con el calendario juliano. En Grecia hubo una fuerte oposición al nuevo calendario, que finalmente fue aceptado por la Iglesia y el Estado. Grupos de “viejos calendaristas” rehusaron acatar la decisión y continuaron con el antiguo calendario. Piensan que, únicamente, un sínodo ecuménico tiene autoridad suficiente para instituir la reforma. Su pertinaz oposición terminó con su excomunión.

El debate calendarista no ha concluido en el seno de la iglesia ortodoxa. Existe un cisma producido al seguir unos el calendario juliano y otros el revisado; aunque todos siguen el calendario festivo que estuvo en vigor antes de la reforma gregoriana.<sup>43</sup>

La duración promedio del año del calendario juliano revisado es de  $365^d 5^h 48^m 48^s$ . Lo que significa que se alcanzará un día de error cuando se finalice el quinto ciclo en el año 6100. En este aspecto el calendario juliano revisado supera al gregoriano, que alcanzará un error de un día en el año 4000.

### El calendario republicano francés

A principios del año 1792 los revolucionarios franceses se enfrentaron al problema de la era con motivo de la emisión de monedas y billetes, estableciendo la era de la Libertad, que tendría su comienzo en la toma de la Bastilla en 1789. Poco después y tras el derrocamiento de la monarquía, la Convención Nacional promulgó que todos los actos públicos fueran datados por la era de la República, que comenzó a contarse desde el 21 de septiembre de 1792.

Con la idea de reformar el calendario se creó un subcomité bajo la presidencia del matemático Charles Gilbert Romme, que acogió en su seno a destacados miembros de la Academia de Ciencias, como los matemáticos Lagrange y Monge, el astrónomo Pingré y al filósofo Dupuis, entre otros.<sup>44</sup>

Romme expuso las conclusiones en el Comité de Instrucción Pública, explicó que el nuevo calendario debía formar parte del proyecto emprendido para la normalización de los pesos y medidas. Los comisionados abogaron por la era de la República y recalcaron una singular coincidencia: que el primer día de la República fue también el del equinoccio de otoño. Partiendo de este acontecimiento fortuito se propuso que los años comenzaran

---

42. Milankovitch M., “Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen”, *Astronomische Nachrichten* **220** (1924) 379-383.

43. Existen comunidades ortodoxas, como la iglesia de Finlandia, que siguen el cómputo gregoriano para determinar la fecha de la Pascua. Esto es permitido por el reducido número de fieles que tienen esas comunidades, lo que hace difícil que puedan apartarse de la norma de católicos y protestantes.

44. *Le calendrier républicain*, Bureau des Longitudes, 1994.

con el primer día de otoño; concretamente que “el comienzo de cada año sea fijado a medianoche, comenzando el día donde cae el equinoccio verdadero de otoño por el observatorio de París”. De esta forma el nuevo calendario republicano tomaba el carácter astronómico y no el computacional. La definición del comienzo del año vendría a significar que el año bisiesto sería automáticamente exigido por la naturaleza.

Se le hizo al Comité de Instrucción Pública la proposición de que el año estuviese compuesto por doce meses de treinta días cada uno, a los que habría que añadir cinco días epagómenos al final del año (o seis en los años bisiestos), en estrecha similitud con el calendario alejandrino. La semana fue objeto de ataques por su “origen supersticioso”, en su lugar se creó la década o periodo de diez días, lo que estaba en consonancia con el sistema decimal. Dos días después de la exposición de Romme, el proyecto pasó a la Convención Nacional que aprobó el nuevo calendario con diversas modificaciones: los meses, décadas y días serían numerados; al periodo de cuatro años se le llamó franciada y el sexto día epagómeno sería llamado día de la Revolución.

No tardó en notarse lo farragoso que era dar la fecha exclusivamente con números. Para solventar este problema se comisionó a los poetas d’Englantine, Chernier y al pintor David para que estudiaran nombres para los meses. Sugirieron dar a los meses “un nombre característico que expresase la temperatura que le es propia, el género de producción de la tierra en ese momento, y que a la vez permita sentir el género de la estación donde se encuentra”. Los nombres elegidos fueron Vendémiaire, Brumaire y Frimaire para el otoño; Nivôse, Pluviôse y Ventôse para el invierno; Germinal, Floréal y Prairial para la primavera y Messidor, Thermidor y Fructidor para el verano. Los nombres de los días de la década serían: primidi, duodi, tridi, quartidi, quintidi, sextidi, septidi, octidi, nonidi y década.<sup>45</sup>

Un error de la mayor gravedad se deslizó cuando se instauró el calendario republicano francés, siendo de la responsabilidad de los astrónomos que fueron consultados. Se pensó que cada cuatro años vendría uno bisiesto y que al cabo de 132 años aproximadamente, se saltaría un bisiesto; o sea, que habría siete años consecutivos de 365 días. Pero como advirtió Delambre, la intercalación no iba a ocurrir como estaba previsto, ya que los bisiestos vendrían regularmente: en algunas ocasiones cada cuatro años y en otras cada cinco. Al seguir la regla republicana no se podría saber con anticipación qué años serían bisiesto, a la manera de lo que ocurre en el calendario gregoriano.

Delambre detectó otro problema en la regla de intercalación de los sextilis. En algunos años el equinoccio de otoño podría venir muy cerca de medianoche, de tal forma que no se podría decir, anticipadamente y con garantías, en qué día caería el equinoccio y por lo tanto si el año sería normal o bisiesto. Incluso podría ocurrir que ni siquiera la observación astronómica realizada el mismo día del equinoccio fuera decisiva por causa del mal tiempo.

Delambre propuso modificar la regla republicana de intercalación, sustituyéndola por la gregoriana, con el añadido de que cada 36 ó 40 siglos, se suprimiera un bisiesto. Para preparar la nueva ley de modificación del calendario, Romme formó un subcomité formado principalmente por astrónomos. La propuesta que presentaron contemplaba la

---

45. Zerubavel E., *Hidden Rhythms. Schedules and calendars in social life*, University of California Press, 1985, pp. 82-95.

aceptación de la regla gregoriana con el añadido de que los años divisibles entre 4000 dejaran de ser bisiestos.

La azarosa vida política de la revolución truncó la pretendida reforma calendarista. Romme fue detenido y se suicidó. Desaparecido el máximo impulsor del calendario y con el surgimiento de opositores al calendario republicano, la enmienda no siguió adelante.

Si bien el calendario republicano resolvió algunos de los problemas que tiene el calendario gregoriano, también es cierto que creó otros defectos que se hicieron sentir acusadamente, dada la brusquedad del cambio. Entre otros destacar que los nombres de los meses eran ajustados sólo en las latitudes septentrionales del hemisferio norte, pero no para el resto del planeta. La nomenclatura del calendario era excesivamente nacionalista, algo que también ocurría con la era republicana, lo que hacía prácticamente imposible extender el calendario más allá de las fronteras francesas. El periodo de diez días era excesivamente largo, “no hay hombre ni animal que pueda aguantar nueve días consecutivos de trabajo”, se lamentaba un diputado de la Convención. La implantación del nuevo calendario había traído un gran desorden social, con la necesidad de utilizar tanto el nuevo como el antiguo calendario, especialmente en las relaciones internacionales. Pero lo que causó más trastorno y dio pie a las más fuertes críticas fue el abandono de la semana.

La historia siguiente no es más que el lento pero irremediable declinar del calendario republicano y su sustitución por el calendario gregoriano. El primer ataque se dirigió contra la década. A mitad del año 1800 se decretó que la observación de los decadi no sería obligatoria más que para los funcionarios. Dos años después se aprobó que el descanso de los funcionarios quedara fijado en domingo. Finalmente, en septiembre de 1805, el domingo fue restaurado como el día de descanso para todos los ciudadanos. Eliminada la década, el calendario republicano perdió una de sus principales ventajas, quedando aún más expuesto a los ataques de sus adversarios.

El ascenso de Napoleón al poder iba a precipitar la caída del calendario republicano. La reconciliación que promovió con el Papa, con la vuelta del catolicismo a religión de Estado y el deseo de Napoleón de instaurar el imperio, hacían insostenible el calendario republicano.

En el año 1805 se le propuso al Senado el restablecimiento del calendario gregoriano. Curiosamente, los senadores que hicieron la propuesta terminaban su informe cantando las excelencias del calendario republicano: “Un día vendrá, sin duda, donde la Europa calmada, vuelta a la paz, a sus concepciones útiles, a sus estudios sabios, sentirá la necesidad de perfeccionar las instituciones sociales [...] Entonces un nuevo calendario podrá componerse para Europa entera [...], de los restos de aquel al que Francia renuncia en este momento [...]” El Senado finalmente aprobó el proyecto que en su artículo primero dice: “A contar del 1 de nivôse próximo, 1 de enero de 1806, el calendario gregoriano será puesto en uso en todo el imperio francés.”

El calendario republicano francés volvió a ser implantado durante la efímera vida de la Comuna de París, aunque sólo se aplicó en el diario oficial de la República y en los carteles colocados por el Comité de Salud Pública. Se utilizó por primera vez el 6 de mayo de 1871 y por última, el 23 del mismo mes y año.

## Conversión de fechas

### El calendario auxiliar

Para cada calendario computacional (que son los basados en el cálculo y no en la observación o en la teoría astronómica) existe un calendario auxiliar, especialmente concebido para eliminar algunos de los inconvenientes de los calendarios en uso. La cuenta de los días, meses y años en el calendario auxiliar nos dice directamente los días, meses y años transcurridos, quiero esto decir que los calendarios auxiliares comienzan a contar desde el día, mes y año cero. Por ejemplo, la fecha 10/8/3025 (desde ahora en adelante las fechas de un calendario auxiliar las escribiremos subrayadas) significa que han transcurrido desde el punto de partida (que tiene de fecha 0/0/0) 3,025 años, 8 meses y 10 días.<sup>1</sup>

Vamos a aplicar el método del calendario auxiliar a aquellos calendarios donde se hace ocasionalmente la intercalación de un sólo día, tal como ocurre en el calendario juliano o en el aritmético musulmán. En un calendario auxiliar el primer mes (que toma el número 0) es aquel que viene inmediatamente después del mes en que se hace la intercalación. Por ejemplo, en el calendario juliano el primer mes del año auxiliar es marzo, por venir inmediatamente después de febrero, mes en que se coloca el día bisiesto.

---

1. Este capítulo está basado en las siguientes referencias: Hatcher D. A. "Generalized equations for julian day numbers and calendar dates", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **26** (1985) 151-155; Hatcher D. A. "Simple formulae for Julian day numbers and calendar dates", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **25** (1984) 53-55; Parisot J. P. "Additif to the paper of D. A. Hatcher: 'Generalized equations for julian day numbers and calendar dates'", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **27** (1985) 506-507. Véase también Richards E. G. *Mapping time. The Calendar and its History*, Oxford University Press, 1988, pp. 292-341, hay que lamentar los numerosos errores tipográficos que aparecen en esta obra, lo que dificulta su lectura. Consúltese también Harvey O. L. *Calendar Conversions by way of the Julian Day Number*, American Philosophical Society, 1983. Una colección de trabajos sobre algoritmos calendaristas fue preparado por Grossler del Instituto de Astronomía de la Universidad de Graz: Grossler M., "Basisformeln zur programmierten Unrechnung einiger atronomicsher Kalendertypen", *Astronomische Nachrichten* **301** (1980) 191-194; "Basisformeln zur programmierten Berechnung zyklisch fixierter lunisolärer Kalendertypen", *Astronomische Nachrichten* **302** (1981) 161-164 y "Mäherunformlen zur programmierten Berechnung azyclischer Kelandertypen", *Astronomische Nachrichten* **303** (1982) 213-214.

Los calendarios computacionales que vamos a analizar tienen un ciclo de  $r$  años, compuestos cada uno de ellos por  $n$  meses, teniendo el ciclo un total de  $p$  días, también supondremos que la intercalación viene en el mes número  $m - 1$ . Normalmente el origen de un ciclo de  $r$  años es aquel que comienza inmediatamente después de la última intercalación realizada en el anterior ciclo.<sup>2</sup> Por ejemplo, en el calendario juliano el ciclo cuatrienal comienza con el mes de marzo de cada año bisiesto, ya que este mes es el que da comienzo al año auxiliar y es inmediatamente posterior al año en que se intercala el día bisiesto. Esto quiere decir que febrero pertenece a un año del calendario auxiliar y marzo al año siguiente.

El origen del calendario auxiliar deberá coincidir con el inicio de un ciclo de  $r$  años que sea inmediatamente anterior al origen de los días julianos (1 de enero del -4712).<sup>3</sup> Esta elección es arbitraria y la hacemos para que dentro del calendario auxiliar se encuentren todas las fechas históricas.

Sea  $e$  los días que van del día juliano 0 ( $J = 0$ ) al origen del calendario en estudio, que tiene la fecha 1/1/1. Este número  $e$  coincidirá con el día juliano de esa fecha. Por ejemplo, el calendario computacional musulmán tiene de fecha de inicio el 16 de julio de 622, al que le corresponde el día juliano 1 948 440, que como es un número que se cuenta desde el cero, indica los días que han transcurrido, o sea el número que hemos llamado  $e$ . El número de ciclos de  $r$  años del calendario auxiliar contenido en los  $e$  días es

$$\text{int}\left(\frac{e}{p}\right),$$

que también corresponde al número de ciclos comprendidos entre el comienzo del mes  $m$  inmediatamente posterior a  $J = 0$  y la fecha 1/ $m$ /1.<sup>4</sup> Consideremos que el ciclo de  $r$  años al que pertenece la fecha 1/ $m$ /1, empieza el día 1/ $m$ /1 -  $a$ , siendo  $a$  los años que median entre ambas fechas. Sea  $b$  los días que hay desde la fecha de comienzo del primer ciclo (1/ $m$ /1 -  $a$ ), hasta la fecha inicio del calendario (1/1/1). El número de días entre  $J = 0$  y la fecha 1/ $m$ /1 -  $a$  será la diferencia entre  $e$  y  $b$ . Como el origen del calendario auxiliar debe ser inmediatamente anterior a  $J = 0$ , deberá haber entre ese origen (0/0/0) y la fecha 1/ $m$ /1 -  $a$  un número de ciclos dado por

$$\text{int}\left(\frac{e-b}{p}\right) + 1.$$

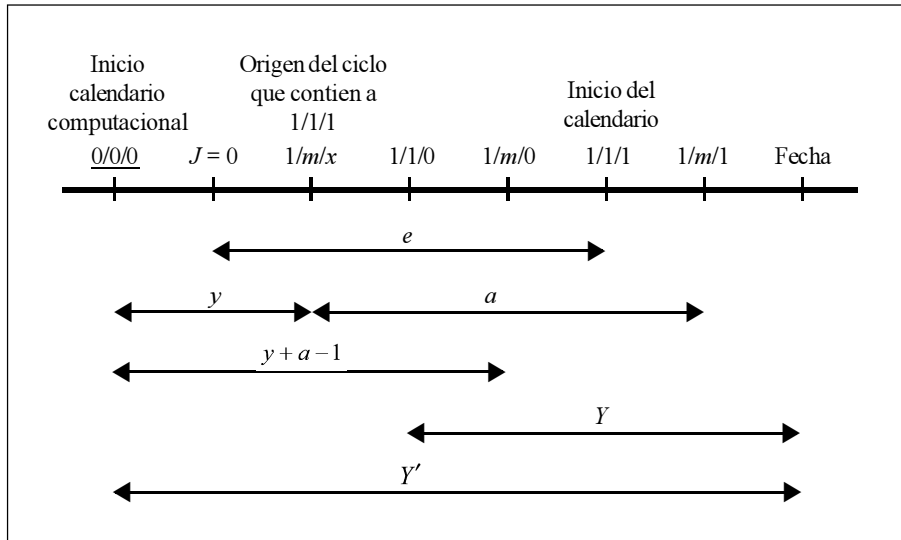
El número de años que van desde el origen del calendario auxiliar (0/0/0) a la fecha 1/ $m$ /1 será

$$\left[ \text{int}\left(\frac{e-b}{p}\right) + 1 \right] r + a.$$

2. No siempre es así. Este es el caso del calendario aritmético musulmán que tiene un ciclo de 30 años pero la última intercalación se hace a final del año 29.

3. O bien sea anterior al origen del calendario en estudio, en el caso en que este origen sean anterior al de los días julianos.

4. Nótese que los días entre las dos últimas fechas puede ser  $e$ ,  $e + 1$  o  $e - 1$ . No obstante, en el caso de que 1/ $m$ /1 sea el comienzo de un nuevo ciclo, entonces entre las dos fechas consideradas en el texto, sí mediarán  $e$  días.



Gráfica 1.7.

Si hacemos la definición

$$y = \left[ \text{int} \left( \frac{e-b}{p} \right) + 1 \right] r, \tag{1.7}$$

entonces los años que van desde  $0/0/0$  a  $1/m/1 - a$  será  $y$ ; de  $0/0/0$  a  $1/m/1$  será  $y + a$ ; y de  $0/0/0$  a  $1/m/0$  será  $y + a - 1$ , tal como puede verse en la gráfica 1.7. Hemos llamado  $Y$  a los años que van desde  $1/1/0$  a la fecha que se analiza, mientras que con  $Y'$  representamos los años transcurridos desde el  $0/0/0$  hasta la misma fecha.<sup>5</sup>

Teniendo en mente que los años del calendario auxiliar comienzan en el mes  $m$ , podemos relacionar el año  $Y'$  con el  $Y$ , según la fórmula

$$Y' = Y + y + a - 1 - \text{int} \left( \frac{m+n-1-M}{n} \right) \tag{2.7}$$

siendo  $M$  el número del mes de la fecha. El último sumando será uno, sí y solo sí, el mes  $M$  es menor que  $m$ , ya que en este caso todavía no ha comenzado el año nuevo.

El mes de la fecha en el calendario auxiliar  $M'$  se puede calcular por la expresión

$$M' = (M - m + n) \bmod n, \tag{3.7}$$

obsérvese que cuando el mes es el  $m$ , entonces  $M' = 0$ , y el mes  $M = m - 1$  es el último mes del año, por lo que corresponderá a  $M' = n - 1$ . El día en el calendario auxiliar será

$$D' = D - 1 \tag{4.7}$$

al objeto de comenzar la cuenta de los días con el 0.

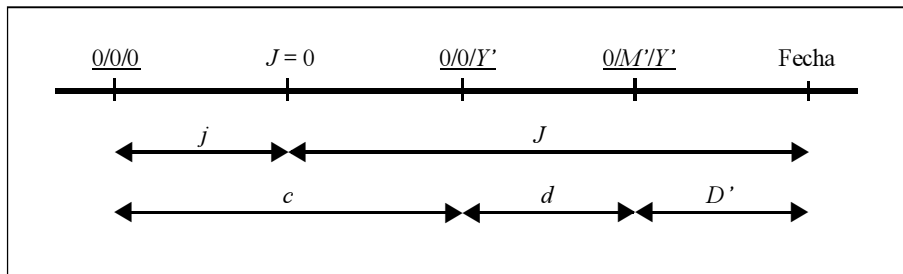
5. Téngase presente que  $Y$  e  $Y'$  representan años transcurridos, o sea que en ambos casos la cuenta es realizada desde el año 0.

Fácilmente se encuentran las expresiones inversas

$$\begin{aligned}
 Y &= Y' - y - a + 1 + \text{int}\left(\frac{m + n - 1 - M}{n}\right) \\
 M &= (M' + m - 1) \bmod n + 1 \\
 D &= D' + 1.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

### Día juliano de una fecha

Vamos a obtener el día juliano de una fecha  $D/M/Y$  de un calendario computacional. La primera operación que hay que hacer es obtener la fecha del calendario auxiliar que le corresponde,  $D'/M'/Y'$ , usando las fórmulas (2.7), (3.) y (4.7). Fijámonos en la gráfica 2.7.



Gráfica 2.7.

se encuentra

$$J = c + d + D' - j$$

el significado de las letras son:  $J$ , es el día juliano de la fecha;  $c$ , los días que van desde el origen del calendario auxiliar al comienzo del año auxiliar de la fecha;  $d$ , son los días contados en el calendario auxiliar desde principio del año al comienzo del mes de la fecha;  $D'$ , son los días transcurridos en el mes de la fecha según el cómputo del calendario auxiliar y  $j$  son los días desde el origen del calendario auxiliar hasta el comienzo de los días julianos.

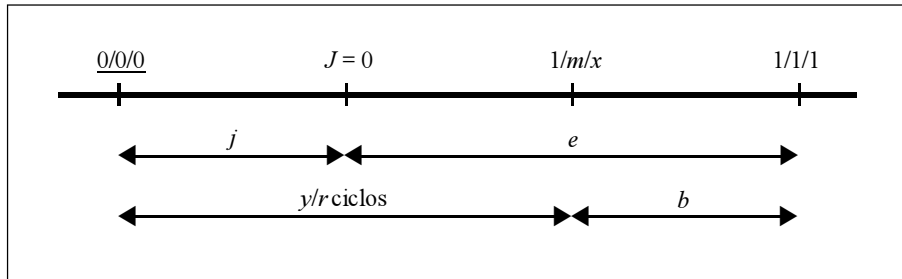
-Cálculo de  $j$ . Como hemos dicho,  $j$  son los días que van desde el día  $0/0/0$  al comienzo de la cuenta de los días julianos (1 de enero de  $-4712$ ). A partir de la gráfica 3.7 se comprueba que

$$j = \frac{y}{r} p + b - e = \left[ \text{int}\left(\frac{e-b}{p}\right) + 1 \right] p + b - e \tag{6.7}$$

donde  $b$  representa los días que van desde el comienzo del ciclo en que se encuentra la

---

6. Estamos considerando el día juliano cronológico (ver Apéndice C), que coincide con el día juliano astronómico a las 12 horas, por tanto siempre es un número entero. Para obtener el día juliano astronómico, habrá que restarle a nuestras fórmulas 0.5. En este caso se pone el día con números decimales, expresando así la fracción de día transcurrido desde la medianoche.



Gráfica 3.7.

fecha 1/1/1 hasta esa misma fecha.

-Cálculo de  $c$ . La relación que existe entre el año de un ciclo  $y'$  y los correspondientes días transcurridos  $c$  hasta ese año en ese ciclo, es muy cercanamente lineal (sólo se encuentra desviada de la linealidad por la colocación de los días bisiestos), por lo que supondremos que se cumple el teorema de congruencia lineal (ver Apéndice B) y que la relación de congruencia es

$$c = \text{int} \left( \frac{py' + q}{r} \right) \tag{7.7}$$

donde  $q$  es un parámetro característico de cada calendario.<sup>7</sup> No todos los calendarios cumplen con la relación de congruencia anterior, un caso importante lo representa el calendario gregoriano, que aún siendo un calendario computacional no es regular. La relación (7.7) es válida para los años transcurridos en un ciclo; necesitamos comprobar que es aplicable para los días transcurridos desde 0/0/0. Para ello supongamos que han transcurrido  $x$  ciclos de  $p$  días cada uno, encontrándonos por tanto en el ciclo  $x + 1$ . En el año  $y'$  de ese ciclo habrán transcurrido desde 0/0/0 los días

$$c = px + \text{int} \left( \frac{py' + q}{r} \right)$$

que al simplificar nos queda

$$c = \text{int} \left( \frac{pxr + py' + q}{r} \right) = \text{int} \left[ \frac{p(xr + y')}{r} \right] = \text{int} \left( \frac{pY' + q}{r} \right) \tag{8.7}$$

quedando demostrada la generalidad de la fórmula.

-Cálculo de  $d$ . Vamos a suponer que la relación entre los días transcurridos  $d$  desde comienzo del año auxiliar hasta el comienzo del mes  $M'$  de ese mismo año es cercanamente lineal, por tanto se puede expresar esta correspondencia mediante una relación de congruencia lineal

---

7. La anterior relación es una condición que imponemos a los calendarios que pueden ser tratados con las técnicas que estamos desarrollando. Podría ocurrir que los coeficientes de la relación de congruencia no fueran  $p$  (número de días en un ciclo) y  $r$  (número de años en un ciclo), pero esto no alteraría nuestro razonamiento, basta en este caso cambiar  $p$  y  $r$  por los coeficientes correspondientes.



$$d = \text{int}\left(\frac{sM' + t}{u}\right) \quad (9.7)$$

donde  $s$ ,  $t$  y  $u$  son los coeficientes de congruencia y son parámetros característicos del calendario en uso.<sup>8</sup>

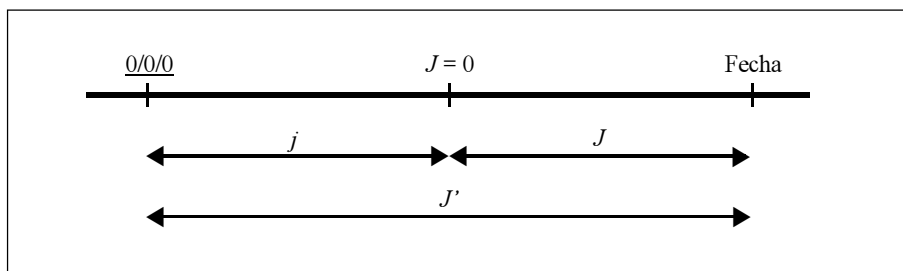
Ya sólo falta reunir todos los términos para encontrar el día juliano de la fecha  $D'/M'/Y'$

$$J = \text{int}\left(\frac{pY' + q}{r}\right) + \text{int}\left(\frac{sM' + t}{u}\right) + D' - j$$

donde la fecha del calendario auxiliar debe ser previamente determinada por las ecuaciones (5.7).

### Cálculo de la fecha en un calendario conocido su día juliano

Ahora queremos resolver el problema inverso. Se conoce el día juliano y queremos calcular la fecha del calendario. Haciendo referencia a la gráfica 4.7



Gráfica 4.7.

$$J' = J + j$$

siendo  $J'$  los días desde el comienzo del calendario auxiliar hasta la fecha en cuestión. Debemos ahora encontrar una fórmula que nos relacione los años transcurridos  $y'$  en un ciclo de  $r$  años en función del número de días  $f$  que han pasado en ese ciclo. Esta relación es la inversa de (7.7)

$$y' = \text{int}\left(\frac{rf + v}{p}\right)$$

donde  $v$  es otro de los coeficientes de congruencia relacionado con el calendario analizado. Vamos a suponer que los coeficientes los hemos elegido de tal forma que se cumpla la relación

$$q + v = r - 1$$

tal como se demuestra en el Apéndice B. Fácilmente se puede generalizar la fórmula para

---

8. Hay algunos calendarios cuyos meses tienen unas duraciones que no pueden ajustarse a una relación de congruencia lineal.

el caso en que los días transcurridos excedan a un ciclo. En efecto, supongamos que han transcurrido  $x$  ciclos y  $f$  días dentro del ciclo  $x + 1$ , entonces los años transcurridos desde el inicio del calendario auxiliar será

$$Y' = xr + \text{int}\left(\frac{rf + v}{p}\right) = \text{int}\left[\frac{r(xp + f) + v}{p}\right] = \text{int}\left(\frac{rJ' + v}{p}\right),$$

El número de días transcurridos en el año  $Y'$  será

$$T = \text{int}\left[\frac{(rJ' + v) \bmod p}{r}\right], \quad (9.7)$$

démonos cuenta que el numerador de la anterior expresión es el exceso de días multiplicado por  $r$ , por eso al dividirlo entre ese mismo número nos da, después de tomar la parte entera, los días transcurridos en el año en curso. Para determinar los meses  $M'$  que han transcurrido en el calendario auxiliar en el año de la fecha, tendremos que volver a hacer uso de la relación de congruencia, habida cuenta de que la correspondencia entre los días transcurridos  $T$  hasta la fecha y el valor de ese mes es cercanamente lineal

$$M' = \text{int}\left(\frac{uT + w}{s}\right) \quad (10.7)$$

nótese que esta relación es la inversa de (9.7). Si elegimos adecuadamente los coeficientes de congruencia se cumplirá

$$t + w = u - 1.$$

Por último vamos a calcular  $D'$

$$D' = \text{int}\left[\frac{(uT + w) \bmod s}{u}\right].$$

Conocida la fecha en el calendario auxiliar, sólo nos falta pasar a fecha del calendario computacional, es decir, obtener la fecha  $D/M/Y$ , para lo que usamos (5.7).

### Calendario juliano auxiliar

Como ejemplo, vamos a aplicar los resultados anteriores al calendario juliano. Este calendario viene caracterizado por tener un ciclo de cuatro años ( $r = 4$ ); el número de meses del año es doce ( $n = 12$ ); el mes en que comienza el correspondiente calendario auxiliar es el tercero ( $m = 3$ ); el número de días que hay en cada ciclo es  $p = 1461$ ; el día juliano de la fecha 1/1/1 es  $e = 1\ 721\ 424$ ; el ciclo en que se encuentra el día 1/1/1 comenzó el 1/3/0, por ser el día siguiente al mes en que se coloca el día bisiesto, esto quiere decir que  $a = 1$ ; el número de días que median entre las dos fechas anteriores es  $b = 306$ ; el coeficiente  $y$  dado por (1.7) vale 4716; los coeficientes de congruencia toman los valores  $q = 0$ ,  $v = 3$ ,  $u = 5$ ,  $s = 152$ ,  $t = 2$ ,  $w = 2$ ; y los días que van desde el origen del calendario auxiliar al comienzo de los días julianos se calculan por la fórmula (6.7), tomando  $j = 1401$ .

Con estos datos las fórmulas que nos permiten pasar de la fecha en el calendario juliano  $D/M/Y$  a la fecha en el calendario auxiliar asociado  $D'/M'/Y'$  son

$$\begin{aligned}
 Y' &= Y + 4716 - \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right) \\
 M' &= (M + 9) \bmod 12 \\
 D' &= D - 1
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

La fórmula que da el día juliano de la fecha es

$$J = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - 1401.$$

Las fórmulas para resolver el problema inverso; o sea, conociendo el día juliano hallar la fecha del calendario juliano, son

$$\begin{aligned}
 Y' &= \text{int}\left[\frac{4(J + 1401) + 3}{1461}\right] \\
 T &= \text{int}\left\{\frac{[4(J + 1401) + 3] \bmod 1461}{4}\right\} \\
 M' &= \text{int}\left(\frac{5T + 2}{153}\right) \\
 D' &= \text{int}\left[\frac{(5T + 2) \bmod 153}{5}\right],
 \end{aligned}
 \tag{12.7}$$

conocida por las anteriores fórmulas la fecha en el calendario auxiliar, se calcula la fecha en el calendario juliano por mediación de

$$\begin{aligned}
 Y &= Y' - 4716 + \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right) \\
 M &= (M' + 2) \bmod 12 + 1 \\
 D &= D' + 1.
 \end{aligned}
 \tag{13.7}$$

### Características de diversos calendarios basados en la intercalación de días

En la tabla 1.7 se dan los coeficientes característicos de diversos calendarios a los cuales se les puede aplicar las técnicas que hemos desarrollado para los calendarios computacionales regulares. Hemos tomado como época inicial del calendario egipcio la era de Nabonasar, que comenzó el 26 de febrero del año 747 antes de nuestra era. Los calendarios egipcio, copto y etíope tienen días epagómenos al final de año, que consideramos como el mes decimotercero.

En la tabla aparece como origen del calendario musulmán el día 16 de julio del año 622; debe tenerse presente que los días en este calendario comienzan a la puesta del Sol, lo que quiere decir que el calendario musulmán comenzó a la puesta del Sol del día 15 de julio de 622.

	Egipcio	Etíope	Copto	Juliano	Persa	Musulmán
<i>e</i>	1 448 68	1 724 221	1 825 030	1 721 424	1 948 321	1 948 440
<i>a</i>	0	1	1	1	2 346	0
<i>b</i>	0	365	365	306	856 858	0
<i>y</i>	3 969	4 720	4 996	4 716	5 640	5 520
<i>j</i>	47	124	124	1 401	968 503	7 664
<i>m</i>	1	1	1	3	1	1
<i>n</i>	13	13	13	12	12	12
<i>r</i>	1	4	4	4	2 820	30
<i>p</i>	365	1 461	1 461	1 461	1 029 983	10 631
<i>q</i>	0	0	0	0	Ver texto	14
<i>v</i>	0	3	3	3	-	15
<i>u</i>	1	1	1	5	-	2
<i>s</i>	30	30	30	153	Ver texto	59
<i>t</i>	0	0	0	2	-	1
<i>w</i>	0	0	0	2	-	0

Tabla 1.7. Características de varios calendarios regulares computacionales. Para los calendarios egipcio, copto y etíope se toman los días epagómenos como el decimotercer mes.

### Calendario persa

La regla de intercalación de los bisiestos del calendario persa no cumple ninguna relación de congruencia lineal. No obstante, si no consideramos el último año del ciclo de 2820 años, sí se cumple una relación de congruencia lineal. A partir de esta circunstancia vamos a obtener un algoritmo válido para el calendario persa, que se asemeja bastante al desarrollado anteriormente.

El día 1/1/1 del calendario iraní corresponde a la fecha juliana 19/3/622 que corresponde al día juliano 1 948 321, valor que denominados con la letra *e*. El ciclo en el cual se encuentra la fecha 1/1/1 comenzó el 1/1/-2345. Por tanto, el parámetro *a* (que son los años que van del comienzo del ciclo que contiene la fecha 1/1/1 hasta esa fecha) es 2346. El coeficiente *b* (que son los días que van del comienzo del ciclo que contiene a 1/1/1 hasta esa fecha) vale 856 858. Por la fórmula (6.7) se obtiene que *j* es 968 503. Al aplicar (2.7) se halla

$$Y' = Y + 7985. \quad (14.7)$$

Los meses y días del calendario auxiliar persa se obtiene a partir de (3.7) y (4.7)

$$\begin{aligned} M' &= (M + 11) \bmod 12 \\ D' &= D - 1 \end{aligned} \quad (15.7)$$

El número de años embolismicos transcurridos desde el comienzo del calendario auxiliar (0/0/0) hasta el inicio del año *Y'* del primer ciclo, obedece a la siguiente relación de congruencia lineal, siempre y cuando no sea el último año del ciclo

$$E = \text{int} \left( \frac{31Y'}{128} \right). \quad (16.7)$$

El segundo ciclo comenzará con el año  $Y' = 2820$ , es decir, que el año 2819 es el último del primer ciclo. El año 2819 no es contemplado como bisiesto por la anterior relación de congruencia, sin embargo, si debe serlo según la regla del calendario iraní. Para tener en cuenta esta circunstancia readaptamos la anterior relación <sup>9</sup>

$$E = \text{int} \left[ \frac{31Y'}{128} + \delta(Y' - 2820) \right].$$

En el siguiente ciclo será válida una relación de congruencia como la anterior, aunque ambas relaciones se encontrarán desplazadas entre sí. Para tener en cuenta esta circunstancia definimos un nuevo parámetro

$$N = \text{int} \left( \frac{Y' - 1}{2820} \right)$$

que son los ciclos transcurridos hasta el comienzo del año  $Y'$ . Entonces la relación de congruencia que nos permite determinar el número de años embolísmicos que se han registrado desde el comienzo del calendario auxiliar será

$$E = \text{int} \left[ \frac{31(Y' - 2820N)}{128} + \delta(Y' - 2820 - 2820N) \right] + 638N,$$

$Y' - 2820$  representa los años transcurridos en el ciclo en curso, la función  $\delta$  es uno sólo en el caso de que se trate del último año del ciclo y 683 representa los días bisiestos que existen en los 2820 años. El número de días transcurridos desde el comienzo del calendario auxiliar hasta el comienzo del año  $Y'$  es

$$\begin{aligned} 366E + 365(Y' - E) &= E + 365Y' = \\ &= \text{int} \left\{ \frac{46 \ 751Y'}{128} + \delta[Y' - 2820(N + 1)] \right\} \end{aligned}$$

entonces el día juliano del primer día del año  $Y'$  es

$$J = \text{int} \left\{ \frac{46 \ 751Y' + 4N}{128} + \delta[Y' - 2820(N + 1)] \right\} - j + d + D' \quad (17.7)$$

siendo  $d$  los días transcurridos desde el comienzo del año  $Y'$  hasta el inicio del mes  $M'$  y  $D'$  los días transcurridos en ese mes.

Tampoco existe en el calendario persa una relación de congruencia lineal que no ligue  $d$  como  $M'$ . Por tanteo se encuentra la relación

$$d = 31M' - (M' - 6)\varepsilon(M' - 6) \quad (18.7)$$

---

9. Nótese que cuando  $Y'$  es 2820 ya ha transcurrido un ciclo completo, puesto que el primer año del ciclo es el 0 y el último el 2819. La fórmula (16.7) nos da los embolismos transcurridos hasta comienzo del año; esto quiere decir que cuando  $Y' = 2820$  nos da el número total de embolismo insertados en el ciclo completo.

Resolvamos el problema inverso, o sea, conocido el día juliano determinar su fecha. Los coeficientes de congruencia lineal se pueden obtener a partir de la relación (ver Apéndice B)

$$v = r - q - 1 = 127 - 4N - 128\delta(J - 61\,479 - 1\,029\,983N) \quad (19.7)$$

donde hemos transformado la función delta y hemos hecho que tome el valor 1 cuando el día juliano coincida con el del primer día del año 2821. La relación buscada queda

$$Y = \text{int} \left[ \frac{128(J + 968\,503) + 127 - 4N}{46\,751} - \delta(J - 61\,479 - 1\,029\,983N) \right]$$

donde ahora

$$N = \text{int} \left( \frac{J + 968\,138}{1\,029\,983} \right)$$

que vuelve a representar los ciclos transcurridos. El coeficiente numérico que aparece en el numerador de la anterior expresión son los días que hay que añadirle al día juliano en que termina el primer ciclo (que es el 61 845) para alcanzar la duración de un ciclo completo.

Para calcular los días  $T$  transcurridos desde el comienzo del año hasta la fecha tenemos que proceder de la siguiente forma. A partir del día juliano de la fecha, se determina el año por la fórmula (19.7). A continuación se aplica (17.7) con  $d$  y  $D'$  iguales a cero, el valor que resulte será  $J_1$ , que es el día juliano del primer día del año. Entonces

$$T = J - J_1.$$

La relación entre los días transcurridos desde el comienzo del año y los meses tampoco obedece a una relación de congruencia lineal. Por tanteo reencuentra la relación

$$M' = \text{int} \left[ \frac{T + \varepsilon(T - 186) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right)}{31} \right]. \quad (20.7)$$

Para calcular el día de la fecha aplicamos la fórmula (18.7) y se determina los días transcurridos hasta el comienzo del mes, entonces el día de la fecha será

$$D' = \left[ T + \varepsilon(T - 196) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right) \right] \bmod 31.$$

Por último se averigua la fecha del calendario por (5.7).

### El calendario gregoriano

El calendario gregoriano no es un calendario regular en cuanto a la colocación de los bisiestos se refiere; de tal forma que no podemos obtener una relación de congruencia lineal entre los días transcurridos en función de los años. Esto ocurre por la irregular intercalación de los bisiestos motivada por la regla de los cuatrocientos años.

El método que vamos a seguir para tratar el calendario gregoriano, consiste en introducir un coeficiente, que denominaremos  $g$ , que nos va a permitir transformar las fechas julianas en gregorianas y viceversa. El coeficiente  $g$  representa la diferencia que hay entre las fechas julianas y gregorianas de un mismo día. Por ejemplo, la fecha juliana

del 1 de agosto de 2000, corresponde al día de fecha gregoriana 14 de agosto de 2000, por lo que  $g$  en ese momento vale 13. Como a medida que pasa el tiempo se van suprimiendo más y más días bisiestos del calendario gregoriano, el coeficiente  $g$  va aumentando, o sea las fechas julianas y gregorianas de un mismo día se van separando entre sí, de tal forma que las fechas julianas quedan más y más rezagadas con respecto a las correspondientes gregorianas.

El coeficiente  $g$  se puede también definir de otra forma que nos será de utilidad más adelante. Sea  $D/M/Y$  una fecha en el calendario juliano, a la que le corresponde el día juliano  $J_J$ . Consideremos ahora que la misma fecha sea una fecha gregoriana, a la que le corresponderá el día juliano  $J_G$ , entonces el coeficiente  $g$  será

$$g = J_J - J_G.$$

Un asunto que debemos de considerar es el relativo al comienzo de los ciclos de 400 años que caracterizan al calendario gregoriano. Vamos a suponer que estos ciclos comienzan en el mes de marzo del año centenario en que no se elimina el bisiesto. Por tanto, entendemos que el primer ciclo comenzó el 1 de marzo de 1600 y el siguiente lo hizo el 1 de marzo de 2000. El día juliano del comienzo del primer ciclo fue  $J_0 = 2\,305\,508$ . Vamos a asociar al calendario gregoriano un calendario auxiliar caracterizado por tener su comienzo el 1 de marzo del año  $-4716$  (esta es una fecha gregoriana), y que al igual que los demás calendarios auxiliares su cuenta se inicia con el día 0, mes 0 y año 0. Las fórmulas serán las mismas que las obtenidas para el calendario juliano (11.7)

$$Y' = Y + 4716 - \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right)$$

$$M' = (M + 9) \bmod 12$$

$$D' = D - 1.$$

Si llamamos  $h$  a los siglos transcurridos desde el origen del primer ciclo de 400 años, entonces  $g$  podrá ser calculado por la tabla 2.7.

$h$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g$	10	11	12	13	13	14	15	16	16
Siglos	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Tabla 2.7. Relación entre los coeficientes  $h$  y  $g$ .

La tercera fila de la tabla representa el siglo para el cual es válido el valor de  $g$  que está sobre él, entendiendo que los siglos, al igual que los años, comienzan el 1 de marzo de los años centenarios. De la anterior tabla se obtiene la relación

$$g = \text{int}\left(\frac{3h+3}{4}\right) + g_0 \quad (21.7)$$

donde  $g_0$  es el valor de  $g$  al comienzo del ciclo, que es 10 como se ve en la tabla.<sup>10</sup> El

10. La fórmula anterior nos permite proyectar hacia atrás el calendario gregoriano. No obstante, hay que hacer uso de las propiedades de la función entero del Apéndice A.

coeficiente  $h$  se calcula por

$$h = \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0}{100}\right)$$

siendo  $Y'$  el año del comienzo del primer ciclo de 400 años tal como es medido en el calendario auxiliar

$$Y'_0 = 1600 + 4716 = 6316,$$

entonces

$$g = g_0 + \text{int}\left\{\frac{3\left[1 + \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0}{100}\right)\right]}{4}\right\}.$$

Sea  $\alpha$  un número entero, entonces podemos poner la igualdad

$$g = g_0 + \text{int}\left\{\frac{3\left[1 + 4\alpha + \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0}{100}\right)\right]}{4}\right\} - 3\alpha$$

y utilizando de nuevo la misma propiedad de la función entero

$$1 + 4\alpha + \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0}{100}\right) = \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0 + 100 + 400\alpha}{100}\right).$$

Definimos nuevos parámetros por

$$\begin{aligned} U &= 400\alpha + 100 - Y'_0 \\ G &= g_0 - 3\alpha \end{aligned}$$

entonces llegamos a la fórmula

$$g = \text{int}\left[\frac{3\text{int}\left(\frac{Y' + U}{100}\right)}{4}\right] + G.$$

Los parámetros  $U$  y  $G$  están indefinidos, aunque se encuentran relacionados entre sí. Para determinar sus valores exigimos que el argumento  $Y' + U$  sea positivo, entonces

$$\alpha \geq \frac{Y'_0 - Y' - 100}{400}.$$

Como queremos que  $\alpha$  valga para todos los posibles años, vamos a exigirle que satisfaga al primero de los años del calendario auxiliar, entonces se encuentra la siguiente desigualdad

$$\alpha \geq \frac{6316 - 0 - 100}{400} = 15.54,$$

como  $\alpha$  tiene que ser un entero, podemos tomar el valor 16, que será válido para todos los años posteriores a la cuenta de los días julianos. Con este valor encontramos  $G = -38$  y  $U = 184$ , entonces la fórmula nos quedará



$$g = \text{int} \left[ \frac{3 \text{int} \left( \frac{Y' + 184}{100} \right)}{4} \right] - 38.$$

A veces es necesario hallar el valor de  $g$  en función del día juliano de la fecha considerada, en vez de hacerlo a partir del año del calendario auxiliar, como hemos hecho anteriormente. Para hallar esta relación definimos un nuevo parámetro  $I$  mediante

$$I = J - J_0$$

donde  $J$  representa el día juliano de la fecha e  $I$  son los días transcurridos desde el inicio del primer ciclo de cuatrocientos años. Con la letra  $K$  vamos a representar los días que hay en un siglo gregoriano “normal”, que son aquellos a los que se le quita uno de los bisiestos que debería tener por la regla juliana y cuya valor numérico es

$$K = 365 \cdot 100 + \frac{100}{4} - 1 = 36\,524.$$

En la tabla 3.7 relacionamos los parámetros  $h$  e  $I$ .

$I$	$h$	Periodo	Días
0 a $K-1$	0	1600-1700	$K$
$K$ a $2K-1$	1	1700-1800	$K$
$2K$ a $3K-1$	2	1800-1900	$K$
$3K$ a $4K$	3	1900-2000	$K+1$
$4K+1$ a $5K$	4	2000-2100	$K$
$5K+1$ a $6K$	5	2100-2200	$K$
$6K+1$ a $7K$	6	2200-2300	$K$
$7K+1$ a $8K+1$	7	2300-2400	$K+1$

Tabla 3.7. Relación entre los coeficientes  $I$  y  $h$ .

En la tercera columna se da el intervalo de años, teniendo presente que los años comienzan con el 1 de marzo. En la última columna se dan los días que hay en cada siglo gregoriano, obsérvese que es una cantidad diferente, dependiendo de si se elimina o no un día bisiesto.

Podemos establecer una relación de congruencia lineal entre  $h$  e  $I$

$$h = \text{int} \left( \frac{4I + 3}{4K + 1} \right).$$

Teniendo en cuenta (21.7) y la expresión anterior, se llega a

$$g = g_0 + \text{int} \left\{ \frac{3 \left[ 1 + \text{int} \left( \frac{4I + 3}{4K + 1} \right) \right]}{4} \right\}.$$

Vamos a introducir un nuevo parámetro  $\beta$ , con lo que descomponemos la función anterior de la siguiente forma

$$g = g_0 + \text{int} \left\{ \frac{3 \left[ 1 + 4\beta + \text{int} \left( \frac{4I + 3}{4K + 1} \right) \right]}{4} \right\} - 3\beta$$

haciendo uso de las propiedades de la función entero se encuentra

$$1 + 4\beta + \text{int} \left( \frac{4I + 3}{4K + 1} \right) = \text{int} \left[ \frac{4J - 4J_0 + 4(K + 1) + 4\beta(4K + 1)}{4K + 1} \right]$$

definiendo dos nuevos parámetros por

$$\begin{aligned} G' &= g_0 - 3\beta \\ V &= 4(K + 1) + 4\beta(4K + 1) - 4J_0 \end{aligned}$$

tendremos

$$g = \text{int} \left[ \frac{3 \text{int} \left( \frac{4J + V}{4K + 1} \right)}{4} \right] + G'.$$

Nos queda hallar los valores de  $G'$  y  $V$ , para ello exigimos que

$$4J + V \geq 0$$

en este caso el valor de  $b$  cuando  $J = 0$  tendrá que ser mayor o igual a 15.54; como  $b$  tiene que ser un número entero, tomamos el valor 16. Entonces  $G' = -38$  y  $V = 274\ 276$ , encontrándose definitivamente

$$g = \text{int} \left[ \frac{3 \text{int} \left( \frac{4J + 274\ 276}{146\ 097} \right)}{4} \right] - 38. \quad (22.7)$$

Ya estamos en condiciones de averiguar el día juliano de una fecha gregoriana. Primeramente obtenemos el día juliano correspondiente a una fecha juliana idénticamente igual a la gregoriana y posteriormente restaremos a ese día juliano la diferencia entre los dos calendarios, que es el coeficiente  $g$ . Entonces partimos de la fecha gregoriana  $D_g/M_g/Y_g$ , a partir de ella obtenemos la fecha en el calendario auxiliar gregoriano. Como

$$g = J_J - J \quad (23.7)$$

entonces el día juliano buscado será

$$J = \text{int} \left( \frac{1461Y'}{4} \right) + \text{int} \left( \frac{153M' + 2}{5} \right) + D' - \text{int} \left[ \frac{3 \text{int} \left( \frac{Y' + 184}{100} \right)}{4} \right] - 1363.$$

Por último resolvamos el problema inverso: conocido el día juliano determinar la fecha en el calendario gregoriano. El primer paso consiste en determinar el coeficiente  $g$  mediante (22.7). Seguidamente se calcula el día juliano de la misma fecha expresada en el calendario juliano, o sea  $J_J$ , mediante (23.7). Con las fórmulas (12.7) se obtiene la fecha del calendario auxiliar gregoriano y por último se aplica (13.7) encontrándose la fecha gregoriana buscada.

Si queremos obtener el día juliano de una fecha del calendario que realmente existió (inicialmente juliano y luego gregoriano), hay que tener presente que hasta el día 4 de octubre de 1582 estuvo vigente el calendario juliano y que a partir de ese día, el calendario vigente es el gregoriano. Nótese también que los diez días posteriores al 5 de octubre de ese año, no existieron. Podemos hacer uso de una fórmula que nos mezcla los dos calendarios

$$J = J_j + g\varepsilon(Y' - 4898)\varepsilon(M' - 7)\varepsilon(D' - 4)$$

donde  $J_j$  es el día juliano de la fecha expresada en el calendario juliano.

### El calendario juliano revisado

Se trata de un calendario que sólo se diferencia del gregoriano en la regla de intercalación de los bisiestos. La regla establece que cada cuatro años haya un día bisiesto pero los años centenarios que al dividirlos entre 9 den un número distinto de 2 ó 6 no serán bisiestos. Actualmente existe una coincidencia completa entre el calendario gregoriano y el juliano revisado, sólo a partir del año 2800 habrá una diferencia de un día.

Se toma como primer año de aplicación del calendario juliano revisado el 2000, entonces el coeficiente  $g$ , que se obtiene por el mismo procedimiento que el visto en el apartado anterior, es

$$g = \text{int} \left[ \frac{10 \text{int} \left( \frac{Y' + 1084}{100} \right) + 11}{13} \right] - 47 ,$$

el resto del algoritmo es igual al del calendario gregoriano.

Si conocemos el día juliano de la fecha podemos determinar el valor de  $g$  mediante la fórmula

$$g = \text{int} \left[ \frac{10 \text{int} \left( \frac{4J + 1\,589\,146}{146\,097} \right)}{13} \right] - 47 ,$$

donde hemos supuesto que el primer ciclo del calendario juliano revisado comenzó el 1 de marzo de 2000.

### El calendario nacional indio

El moderno calendario indio es del tipo gregoriano, en el sentido de que sigue la regla de los cuatrocientos años de intercalación de los bisiestos. Para tratar este calendario seguimos un procedimiento similar al que acabamos de ver para el calendario gregoriano. Primero suponemos un calendario en todo igual al calendario indio pero sin la regla de los cuatrocientos años. Este calendario tendrá las siguientes características

$$n = 12; m = 2; r = 4; p = 1461$$

$$1/1/1 \Leftrightarrow 22 - \text{marzo} - 79$$

$$e = 1\,749\,995; a = 3; b = 1065; y = 4792; j = 1348 .$$

El calendario auxiliar de este calendario será

$$\begin{aligned}
 Y' &= Y + 4794 - \text{int}\left(\frac{13-M}{12}\right) \\
 M' &= (M+10) \bmod 12 \\
 D' &= D-1.
 \end{aligned}
 \tag{24.7}$$

Vamos a tomar como primer ciclo de cuatrocientos años aquel que comienza en el año 400 de nuestra era; la fecha india de comienzo de este ciclo es  $1/2/322$ , que tiene de día juliano  $J_0 = 1\ 867\ 268$ . En el calendario auxiliar el año de comienzo del primer ciclo será el 5116, como resulta de aplicar la fórmula (2.7).

El valor de  $g$  al comienzo del primer ciclo, o sea  $g_0$ , es 3, ya que estos son los bisiestos suprimidos desde el día 1/1/1 (correspondiente al año 79 de nuestra era) hasta el año 400 de nuestra era. Estos bisiestos suprimidos son de los años 100, 200 y 300 de nuestra era. El valor de  $\alpha$  y  $\beta$  es 13. Entonces  $G = -36$ ,  $U = 184$ ;  $G' = -36$  y  $V = 274\ 072$ .

Las fórmulas que nos dan el coeficiente  $g$  serán

$$\begin{aligned}
 g &= \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{Y'+184}{100}\right)}{4}\right] - 36 \\
 g &= \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{4J+274\ 072}{146\ 097}\right)}{4}\right] - 36.
 \end{aligned}$$

Con estas fórmulas podemos encontrar el día juliano de una fecha  $D/M/Y$  del calendario indio. Primeramente se calculan las fechas en el calendario auxiliar (24.7). Posteriormente tendremos que calcular los días transcurridos hasta el inicio del mes  $M'$ . Al igual que ocurre con el calendario persa, esta relación no es de congruencia lineal, ya que en el calendario indio los meses de 30 días no se alternan con los de 31. La fórmula válida es parecida a la del calendario persa

$$d = 31M' - (M' - 5)\varepsilon(M' - 5).$$

Finalmente se aplica la fórmula

$$J = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + d + D' - \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{Y'+184}{100}\right)}{4}\right] - 1312.$$

El problema inverso se trata de igual forma que en el calendario gregoriano pero teniendo presente que las fórmulas (12.7) son diferentes, dado que  $j$  e  $y$  tienen valores distintos, además la relación entre  $M'$  y  $T$  no es de congruencia lineal. Primero se hace uso de (23.7) y después se aplican las ecuaciones

$$Y' = \text{int}\left[\frac{4(J+138)+3}{1461}\right]$$

$$T = \text{int} \left\{ \frac{[4(J+1358)+3] \bmod 1461}{4} \right\}$$

$$M' = \left[ \frac{T + \varepsilon(T-155) \text{int} \left( \frac{T-155}{30} \right)}{31} \right]$$

$$D' = \left[ D + \varepsilon(T-155) \text{int} \left( \frac{T-155}{30} \right) \right] \bmod 31$$

las dos últimas ecuaciones han sido obtenidas por tanteo, teniendo presente que 155 son los días de los cinco meses de 31 días. Evaluadas las ecuaciones anteriores, se calcula la fecha en el calendario indio mediante las ecuaciones inversas a (24.7), que son

$$Y = Y' - 4794 + \text{int} \left( \frac{13-M}{12} \right)$$

$$M = (M' + 1) \bmod 12 + 1$$

$$D = D' + 1.$$

### El calendario judío

La complejidad del calendario judío nos impide aplicar los resultados anteriores, por lo que se exige un estudio individualizado. Para la mejor exposición vamos a dividir este epígrafe en varios apartados.

*-Lunaciones transcurridas desde el primer molad.* El número de ciclos lunares de 19 años que han transcurrido hasta el comienzo del año  $Y$ , se puede calcular por

$$C = \text{int} \left( \frac{Y-1}{19} \right),$$

mientras que el número de años transcurridos en el ciclo en que se encuentra la fecha es igual a

$$Y' = (Y-1) \bmod 19.$$

La relación entre el número de embolismos y los años transcurridos en un determinado ciclo lunar, obedece a una relación de congruencia lineal. Utilizando las técnicas expuestas en el Apéndice B se tiene

$$E = \text{int} \left( \frac{7Y'+1}{19} \right)$$

siendo  $E$  el número de años embolismos transcurridos en el ciclo lunar al que pertenece la fecha. Teniendo presente que en el ciclo lunar hay 235 lunaciones, podemos calcular el número de lunaciones  $L$  desde la primera lunación

$$L = 235C + 12Y' = 235 \text{int} \left( \frac{Y-1}{19} \right) + 12Y' + \text{int} \left( \frac{7Y'+1}{19} \right),$$

teniendo presente las propiedades de la función módulo se encuentra que

$$Y' = (Y - 1) \bmod 19 = (Y - 1) - 19 \operatorname{int} \left( \frac{Y - 1}{19} \right)$$

sustituyéndola en la anterior expresión y después de hacer alguna simplificación se llega a

$$L = \operatorname{int} \left( \frac{235Y - 234}{19} \right)$$

que representa los meses o lunaciones transcurridas desde la primera lunación (que se produjo el 1 de Tishri del año 1 a las 5 horas y 204 'halakim) hasta el primer molad del año  $Y$ .

-*Momento del primer molad del año de la fecha.* Vamos a determinar el día de la semana, la hora y los 'halakim en que se produce el primer molad del año  $Y_H$ . Tengamos en cuenta que la duración de la lunación tal como se toma en el calendario judío es  $m = 29^d 12^h 793^p = 29^d.530 594 141 358$  y que el momento del primer molad, el que ocurrió al principio del año 1, es  $b = 2^d 5^h 205^p = 2^d.216 242 283 951$ .<sup>11</sup> El momento del primer molad del año será el exceso de semanas de la cantidad  $Lm + b$ , o sea

$$T = (Lm + b) \bmod 7.$$

Para hallar el momento del primer molad del año de la fecha se aplican las fórmulas

$$S = \operatorname{int} T + 7\delta(\operatorname{int} T)$$

$$H = \operatorname{int} [24(T - \operatorname{int} T)]$$

$$P = c \operatorname{int} \{1080 [24(T - \operatorname{int} T) - H]\}$$

siendo  $S$  el día de la semana,  $H$  las horas y  $P$  los 'halakim del primer molad del año  $Y$ . Nótese que en la primera de las anteriores fórmulas hemos colocado una función delta para conseguir que el sábado venga dado por el número 7.<sup>12</sup>

-*Determinación del género del año.* Llamamos género al tipo de año según el número de meses que tiene, de tal manera que tenemos años embolismicos de 13 meses y años normales de 12. El calendario judío es regular en el sentido de que los meses embolismicos están colocados uniformemente en el ciclo de 19 años. El año 1 del calendario no corresponde al primer año del ciclo. El ciclo comienza en el año 9 del calendario judío, por tanto el año 1 del calendario se encuentra atrasado 8 años respecto al comienzo del ciclo, o lo que es lo mismo adelantado 11 años. Entonces  $\beta$  en la fórmula (19.4) tiene que ser -8 u 11, y la fórmula que nos permite saber si un año es embolismico es

$$[7(Y + 11)] \bmod 19 < 7.$$

11. En el valor de  $b$ , el día 2 quiere decir la fecha lunes. Para las fórmulas siguientes reservamos el valor de 7 para el sábado.

12. Para evitar perder cifras significativas es necesario ejecutar las fórmulas anteriores en doble precisión. Otro procedimiento consiste en multiplicar el número de ciclos lunares  $C$ , los años embolismicos  $E$  y los años normales transcurridos  $Y' - E$ , por sus correspondientes *she'riot*:  $2^d 16^h 595^p$ ,  $5^d 21^h 589^p$  y  $4^d 8^h 876^p$ . La suma de esos tres productos coincide con  $Lm$ . Tras esto se sigue el procedimiento del texto.

Utilizando las propiedades de la función módulo, la expresión anterior queda

$$[7Y + 1] \bmod 19 < 7.$$

Definimos un nuevo parámetro  $A$  por

$$A = \text{int} \left[ \frac{(7Y + 1) \bmod 19 + 5}{12} \right] \quad (25.7)$$

de tal forma que si  $A$  es 1 el año es normal y si es 0 el año es embolístico. El 5 que aparece en el numerador ha sido colocado para conseguir que  $A$  sólo valga 0 ó 1, evitando que alcance el valor 2.

-*Momento del Roch- 'hachana del año de la fecha.* Para determinar el día de la semana del primer día del año es necesario aplicar los *dehhiyot*. Definimos el coeficiente

$$H' = 1080H + P$$

donde  $H$  y  $P$  son las horas y *'halakim* del primer *molad* del año. Con  $D$  vamos a representar los días que median entre el primer *molad* del año y el *Roch- 'hachana*, cuyo cálculo resulta de la aplicación de los *dehhiyot*. Las fórmulas para su cálculo se obtienen por tanteo, resultando

$$D' = \varepsilon(H' - 19440) + \delta(S - 3)\delta(A - 1)\varepsilon(H' - 9924) + \\ + \delta(S - 2)\delta(A')\bar{\varepsilon}(H' - 19440)\varepsilon(H' - 16789)$$

donde  $A'$  es el género del año anterior al de la fecha, calculado por (26.7), utilizando en vez de  $Y$  el  $Y - 1$ . Posteriormente se calcula  $\bar{D}$

$$\bar{D} = \delta(S + D' - 1) + \delta(S + D' - 4) + \delta(S + D' - 6) + \delta(S + D' - 8) + D',$$

el día de la semana del *Roch- 'hachana* del año de la fecha será  $\bar{D}$  días posterior al día del primer *molad* de ese año

$$S_R = S + \bar{D} - 7\varepsilon(S + \bar{D} - 8)$$

el último sumando impide que  $S_R$  supere el valor 7.

-*Determinación de la especie del año.* La especie del año nos informa de los días que tiene, pudiendo ser defectivo, regular y abundante. Para determinar la especie calculamos primero el día semanal del *Roch- 'hachana* de los años  $Y$  e  $Y + 1$ , que son  $S_R$  y  $S'_R$  respectivamente, de aquí obtenemos

$$\Delta S_R = S'_R - S_R + 7\varepsilon(S_R - S'_R)$$

el último sumando nos garantiza que la diferencia entre los comienzos del año será un número positivo y no nulo. Definimos la especie del año por

$$F = A(\Delta S_R - 2) + (1 - A)(\Delta S_R - 4).$$

el nuevo término  $F$  es 1 si el año es defectivo (de 383 ó 353 días), vale 2 si el año es regular (384 ó 354 días) y toma el valor 3 si el año es abundante (385 ó 355), como se deduce de la tabla (5.6). La fórmula anterior se simplifica quedando

$$F = \Delta S_R + 2(A - 2)$$

-*Días transcurridos desde el 1 de Tishri del año 1 hasta el primer día del año  $Y$ .* Desde las 0 horas del día 1 de Tishri del año 1 hasta el momento del primer *molad* de ese año transcurrió 5 horas y 204 *'halakim*, un valor que llamaremos  $b'$ . Entonces el número de

días enteros transcurridos desde el 1 de Tishri del año 1 de la era de la creación al primer día del año  $Y$  es

$$N = \text{int}(mL + b') + \bar{D}.$$

-Días transcurridos desde el comienzo del año  $Y_H$  hasta el día de la fecha. Sea una fecha dada por  $D/M/Y$ . Queremos saber los días  $N'$  que han pasado desde el comienzo del año al día de la fecha, incluida ésta. La estructura del calendario judío no nos permite utilizar una relación de congruencia lineal, pero por tanteo se llega a la siguiente expresión

$$N' = \text{int} \left[ \frac{59M - 58 + \delta(A)\varepsilon(M-7)}{2} \right] - \delta(F-1)\varepsilon(M-4) + \delta(F-3)\varepsilon(M-3) + D \quad (26.7)$$

-Día juliano de una fecha judía. El número de días desde el inicio del calendario judío hasta el día de la fecha, éste incluido, será  $N + N'$ . Como los días que van desde el inicio de la cuenta de los días julianos hasta el comienzo del calendario judío<sup>13</sup> el día 1 de Tishri del año 1 es 347 997, entonces el día juliano de la fecha será

$$J = N + N' + 347\,997. \quad (27.7)$$

Ahora vamos a abordar el problema inverso: dado el día juliano, determinar la fecha en el calendario judío. Al igual que antes, vamos a hacer la exposición en varios apartados.

-Lunaciones transcurridas hasta la fecha cuyo día juliano conocemos. El número de lunaciones hasta la fecha es

$$L = \text{int} \left( \frac{J - 347\,997}{m} \right).$$

-Años en función de las lunaciones transcurridas. Hay que encontrar la relación de congruencia inversa a (25.7). Utilizando las propiedades dadas en el Apéndice B, se encuentra que la relación buscada es

$$Y = \text{int} \left( \frac{19L + 252}{235} \right) \quad (28.7)$$

siendo  $Y$  el año que corresponde a una fecha en que ya han transcurrido las  $L$  lunaciones.

-Corrección por los *dehhiyot*. La última fórmula no siempre da el resultado correcto. Por ejemplo, supongamos que el primer *molad* del año  $Y$  ocurre el día 28 de Elul y que por los *dehhiyot* se desplaza el *Roch- 'hachana* dos días después. Si el día juliano que vamos a analizar corresponde al 29 de Elul, entonces al calcular el año  $Y$  por el método expuesto más arriba dará una fecha posterior a la que corresponde, porque el 29 de Elul han transcurrido ya las  $L$  lunaciones. El problema señalado sólo se da con los dos últimos días del mes de Elul. Para corregir este error tenemos que obtener el día juliano de *Roch- 'hachana* correspondiente al año encontrado por (28.7). Sea este número  $J_R$ . Este número puede ser menor o igual al día juliano de la fecha considerada  $J$ ; en este caso significa que no se existe desplazamiento por los *dehhiyot*, o sea  $\bar{D} = 0$ . Pero

---

13. El día juliano de la fecha 1/1/1 del calendario judío es 347 998. No obstante, lo que se trata de calcular son los días transcurridos hasta esa fecha, sin contarla, ya que está contada en  $N$ .



puede ocurrir que  $J_R$  sea mayor que  $J$ , ya sea en una o dos unidades, correspondientes a las posibilidades en que por los *dehhiyot* se desplaza el *Roch'hachana* uno o dos días respecto al primer *molad* del año. Entonces debemos de proceder de la siguiente forma: se calcula  $Y$  mediante la fórmula (28.7), después se calcula el día juliano del *Roch'hachana* de ese año  $J_R$  mediante (27.7) para lo cual se pone  $N' = 1$ ; entonces si  $J_R$  es mayor que  $J$  se disminuye el año obtenido en una unidad, en caso contrario se deja el año tal como está. Por tanto la fórmula (28.7) queda

$$Y = \text{int}\left(\frac{19L + 252}{235}\right) - \text{int}\left(\frac{J_R - 1}{J}\right)$$

en la anterior fórmula hay que tener en cuenta que en el caso de que  $J_R$  sea mayor que  $J$ , sólo lo puede ser en una o dos unidades.

-*Cálculo de los días transcurridos en el año de la fecha.* Los días transcurridos desde el inicio del año hasta el día de la fecha son

$$T = J - J_R$$

siendo  $J_R$  el día juliano del año  $Y$  que resulta de la corrección hecha en el apartado anterior.

-*Cálculo del mes de la fecha.* Por tanteo se encuentra que el mes de la fecha en función de los días transcurridos desde el comienzo el año es

$$M = \text{int}\left[\frac{2T + 59 + 2\delta(F-1)\varepsilon(T-88) - 2\delta(F-3)\varepsilon(T-60) - \delta(A)\varepsilon(T-177)}{59}\right].$$

-*Cálculo del día de la fecha.* Es necesario calcular los días transcurridos desde el inicio del año hasta la conclusión del mes anterior a la fecha. Para ello se hace uso de la ecuación (26.7) poniendo  $D = 0$ . Los días restantes son los días transcurridos en el mes  $M$

$$D = T - N'(M, D = 0) + 1,$$

hemos añadido el 1 para que nos de el día de la fecha.

### Día de la semana de una fecha

Conocida la fecha en un calendario podemos obtener su día juliano y a partir de aquí determinar el día de la semana correspondiente. Esta operación es simple, dado que tanto la cuenta de los días julianos como la sucesión de las semanas no han sido interrumpidas. Teniendo en cuenta que el día juliano 0 fue lunes, entonces el día de la semana  $W$  del día juliano  $J$  será

$$W = J \bmod 7 + 1$$

si  $W$  es 1 corresponde al lunes, si es 2 al martes, y así sucesivamente.

Como aplicación vamos a determinar el día juliano del comienzo de una semana del calendario ISO (ver Apéndice E). Para ello calculamos el día juliano  $J'$  del 29 de diciembre del calendario gregoriano del año anterior, fecha extrema para el comienzo de la primera semana del año. Luego se calculan los días que hay desde esa fecha hasta el lunes de la primera semana (que puede ser el 29 de diciembre o posterior), al que se le suma el día juliano del 29 de diciembre y los días que han transcurrido hasta el comienzo de la semana  $k$ ; el resultado será el día juliano  $J$  del lunes de la semana número  $k$

$$J = J' - J' \bmod 7 + 7 \operatorname{int} \left( \frac{J' \bmod 7 + 6}{7} \right) + 7(k-1) \quad (29.7)$$

los sumandos segundo y tercero nos dan los días que hay desde el 29 de diciembre al lunes de la primera semana.

El problema inverso consiste en dado el día juliano, determinar el año y el número de la semana ISO en que se encuentra la fecha, cuyo día juliano representamos por  $J$ . A partir de  $J$  se determina el año  $Y$  del calendario gregoriano en que se encuentra la fecha, para lo que usamos las ecuaciones (22.7), (23.7), (12.7) y la primera de las (13.7). Posteriormente se calcula el día juliano del lunes de la primera semana de ese año  $J_0$ . Este número coincide con el dado por la fórmula (29.7) cuando se toma  $k = 1$

$$J_0 = J' - J' \bmod 7 + 7 \operatorname{int} \left( \frac{J' \bmod 7 + 6}{7} \right)$$

$J'$  sigue siendo el día juliano del 29 de diciembre del año anterior. Finalmente hallamos la semana de la fecha

$$k = \operatorname{int} \left( \frac{J - J_0}{7} \right) + 1.$$

Como puede ocurrir que la fecha de día juliano  $J$  se encuentre a final del año y ya en el interior de la primera semana del siguiente año ISO, tenemos que calcular el día juliano del comienzo de la primera semana del año  $Y + 1$  ( $J'_0$ ) y comprobar que  $J$  es menor que  $J'_0$ , si no lo fuera, el año buscado sería el  $Y + 1$  y la semana sería la primera. Todo lo anterior se encuentra expresado en las fórmulas

$$\begin{aligned} k &= [1 - \varepsilon(J - J'_0)] \operatorname{int} \left( \frac{J - J_0}{7} \right) + \varepsilon(J - J'_0) + 1 \\ \bar{Y} &= Y + \varepsilon(J - J'_0) \\ W &= J \bmod 7 + 1 \end{aligned}$$

donde  $k$  y  $\bar{Y}$  es la semana y el año del calendario ISO en que se encuentra la fecha de día juliano  $J$  y  $W$  el día semanal.

### El calendario republicano francés

Denominamos calendarios astronómicos aquellos que se rigen por la teoría astronómica del movimiento del Sol y de la Luna, que por tanto pueden ser preparados con antelación. Ejemplo de estos calendarios astronómicos son el hindú solar, el hindú lunar, el persa astronómico y el republicano francés, que como ejemplo vamos a considerar a continuación.

Se quiere determinar el día juliano de una fecha expresada en el calendario republicano francés. El procedimiento es el que sigue: se averigua el año de nuestra era en que comienza el año de la fecha republicana (sumándole 1791 al año republicano); se determina por la teoría astronómica el día del equinoccio de otoño según la hora local de París, ese será el primer día del año; el día juliano de la fecha será la suma del día juliano cronológico del equinoccio de otoño más los días que van del comienzo del año a la

fecha. Sea  $D/M/Y$  la fecha del calendario republicano. Se calcula el día juliano astronómico del equinoccio de otoño según el meridiano de Greenwich del año  $Y + 1791$  de nuestra era:  $J_1^a$ . El día juliano cronológico según la longitud del Observatorio de París es

$$J_1^c = \text{int}(J_1^a + 9^m 20^s + 0^d.5) \quad (30.7)$$

donde los  $9^m$  y  $20^s$  nos permite pasar de hora de Greenwich a hora local de París.

Entonces el día juliano cronológico de la fecha es

$$J = J_1^c + 30(M - 1) + D - 1$$

Problema inverso consiste en dado el día juliano  $J$  determinar la fecha en el calendario republicano  $D/M/Y$ . Conocido el día juliano se determina el año  $Y'_G$  en el calendario gregoriano al que corresponde, utilizando las fórmulas (22.7), (23.7), (12.7) y (11.7). De aquí se determina el día juliano cronológico del equinoccio de otoño de ese año  $J_1'^c$  por (30.7). Tiene que cumplirse que  $J$  sea mayor o igual que  $J_1'^c$ , si no lo fuera se repite el cálculo para el año  $Y'_G - 1$ , ya que entonces en ese año estaría el día de la fecha. Este procedimiento se puede poner simbólicamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J &\rightarrow Y'_G \rightarrow J_1'^c \\ Y_G &= \varepsilon(J - J_1'^c)Y'_G + \bar{\varepsilon}(J - J_1'^c)(Y'_G - 1) \rightarrow J_1^c. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Ahora es inmediato el cálculo del mes y el día en el calendario republicano

$$\begin{aligned} M &= \text{int}\left(\frac{J - J_1^c}{30}\right) + 1 \\ D &= (J - J_1^c) \bmod 30 + 1 \\ Y &= Y_G - 1791. \end{aligned}$$

### El calendario astronómico persa

Se trata de otro calendario astronómico, en este caso ligado al equinoccio de primavera calculado con la hora local de Teherán. Para averiguar el día juliano correspondiente a una fecha  $D/M/Y$  del calendario astronómico persa, lo primero que hay que hacer es determinar el año del calendario gregoriano que le es asociado

$$Y_G = Y + 621.$$

Luego se determina el día juliano astronómico del equinoccio de primavera según el primer meridiano  $J_1^a$  al que se le suma  $3^h 26^m$  para expresarlo en hora local de Teherán. De este resultado se obtiene el día juliano cronológico correspondiente

$$J_1'^c = \text{int}(J_1^a + 3^h 26^m + 0^d.5).$$

Este será el primer día del año si el equinoccio acontece antes del mediodía, en caso contrario el año comenzará el siguiente día. Esto se puede poner por la expresión

$$J_1^c = J_1'^c + \varepsilon(J_1^a + 3^h 26^m - J_1'^c). \quad (32.7)$$

El día juliano de la fecha será

$$J = J_1^c + 31(M - 1) - (M - 7)\varepsilon(M - 7) + D - 1,$$

donde hemos hecho uso de (18.7) para obtener los días que van desde el comienzo del año al inicio del mes de la fecha.

Para resolver el problema inverso procedemos de igual forma que para el calendario republicano francés. Primero se determina el año del calendario gregoriano,  $Y'_G$ , correspondiente al día juliano  $J$  de la fecha. Luego determinamos  $J_1^c$  día juliano cronológico del primer día del año por la fórmula (32.7). Es necesario que  $J$  sea mayor o igual a  $J_1^c$ , en caso contrario se repite el cálculo anterior para el año  $Y'_G - 1$ . Finalmente la fecha buscada será

$$\begin{aligned}
 T &= J - J_1^c \\
 M &= \text{int} \left[ \frac{T + \varepsilon(T - 186) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right)}{31} \right] + 1 \\
 D &= \left[ T + \varepsilon(T - 196) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right) \right] \bmod 31 + 1 \\
 Y &= Y'_G - 621.
 \end{aligned}$$

### El calendario chino

El calendario chino es astronómico, ya que hay que determinar los días en que el Sol se encuentra en los términos principales y los días de las Lunas nuevas según la hora local del meridiano que se encuentra 120 grados al este.

Si tenemos una fecha en el calendario chino  $D/M/Y$ , podemos averiguar el día juliano que le es asociado. Para ello debemos primeramente determinar el día juliano del día de año nuevo, al que se le suman los días transcurridos hasta la fecha. El procedimiento a seguir es el siguiente:

\*Conocido el año y el ciclo en el calendario chino se determina el año del calendario gregoriano  $Y'_G$

\*Se determinan los días julianos cronológicos de los 25 términos principales comenzando con el undécimo término principal del año  $Y'_G - 1$ , o sea desde el momento del solsticio de invierno de ese año. A dichos términos los representamos por  $P(0), P(1), \dots, P(24)$ .

\*Se averiguan los días julianos cronológicos de las 26 Lunas nuevas que comienzan con la inmediatamente anterior a  $P(0)$ . Las Lunas nuevas inmediatamente anteriores a  $P(0), P(12)$  y  $P(24)$  la representamos por  $L(0), L(u)$  y  $L(v)$ . Se determinan los valores de  $u$  y  $v$

$$\text{Si } \frac{L(u) - L(0)}{29} > 13 \Rightarrow u = 13 \text{ en caso contrario } u = 12$$

$$\text{Si } \frac{L(v) - L(u)}{29} > 13 \Rightarrow v - u = 13 \text{ en caso contrario } v - u = 12$$

\*Si  $u$  es 13 se determina cuál es la primera lunación que no cumple la relación

$$L(r+1) > P(r) \geq L(r), \tag{33.7}$$

si resulta que  $r$  es mayor que 2, el año será embolístico y comenzará en  $L(s)$ , siendo  $s = 2$ .

\*Si  $u = 13$  y  $r$  es 1 ó 2, entonces el año es normal y  $s = 3$ .

\*Si  $u = 12$  y  $v = 24$  entonces el año es normal y  $s = 2$ .

\*Si  $u = 12$  y  $v = 25$  y el primer valor de  $r$  que no cumple la desigualdad es 12 ó 13 entonces el año será embolístico y  $s = 2$ , en caso contrario el año será normal y  $s = 2$ .

\*Entonces el día juliano de la fecha se calcula por la siguiente fórmula

$$J = L(M + s - 1) + D - 1$$

los meses los numeramos consecutivamente del 1 en adelante, terminando en 12 ó en 13 según sea el año normal o embolístico.

En el problema contrario se conoce el día juliano y hay que determinar la fecha en el calendario chino. El problema puede ser resuelto mediante los pasos siguientes:

\*Dado el día juliano  $J$  se determina el año gregoriano  $Y_G$  al que pertenece.

\*Se determinan los 3 primeros términos principales y las primeras 14 Lunas nuevas y se comprueba si se cumple la relación

$$L(1) \leq P(1) < L(2) \leq P(2) < L(3) \quad (34.7)$$

si es así, entonces el año chino comienza en  $L(2)$  en caso contrario lo hará en  $L(3)$ , día que denominamos  $J_1$ . En el primer de los casos anteriores  $s = 2$  y en el segundo  $s = 3$ .

\*Es necesario que  $J$  sea mayor o igual que  $J_1$ , si no lo fuera significaría que hemos errado el año en que comienza el calendario chino, que debe ser el  $Y_G - 1$ . Con este valor determinamos el ciclo  $C$  y el año  $Y$  de la fecha. Con el nuevo valor del año se aplica de nuevo (34.7) y se determina el valor correcto de  $s$ .

\*Averiguamos el valor de  $r$  que cumple la desigualdad

$$L(r) \leq J < L(r-1),$$

el mes de la fecha será

$$M = r - s + 1,$$

donde contamos los meses consecutivamente, incluyendo al intercalar.

\*El día del calendario chino se obtiene por

$$D = J - L(M) + 1.$$

### Resumen de los algoritmos

#### A1: Juliano a auxiliar

Conversión de fecha del calendario juliano a fecha en el calendario auxiliar

ENTRADA:  $D, M, Y$

$$Y' = Y + 4716 - \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right)$$

$$M' = (M + 9) \bmod 12$$

$$D' = D - 1$$

SALIDA:  $D', M', Y'$

**A2: Auxiliar a juliano***Conversión de fecha del calendario auxiliar a fecha en el calendario juliano*ENTRADA:  $D', M', Y'$ 

$$M = (M' + 2) \bmod 12 + 1$$

$$Y = Y' - 4716 + \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right)$$

$$D = D' + 1$$

SALIDA:  $D, M, Y$ **A3: Día juliano de fecha juliana***Cálculo del día juliano a partir de una fecha del calendario juliano*ENTRADA:  $D, M, Y$  $D, M, Y \rightarrow \mathbf{A1} \rightarrow D', M', Y'$ 

$$J = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - 1401$$

SALIDA:  $J$ **A4: Fecha juliana de un día juliano***Cálculo de la fecha en el calendario juliano a partir de su día juliano*ENTRADA:  $J$ 

$$Y' = \text{int}\left[\frac{4(J + 1401) + 3}{1461}\right]$$

$$T = \text{int}\left\{\frac{\left[4(J + 1401) + 3\right] \bmod 1461}{4}\right\}$$

$$M' = \text{int}\left(\frac{5T + 2}{153}\right)$$

$$D' = \text{int}\left[\frac{(5T + 2) \bmod 153}{5}\right]$$

 $D', M', Y' \rightarrow \mathbf{A2} \rightarrow D, M, Y$ SALIDA:  $D, M, Y$ **A5: Día juliano de fecha gregoriana***Cálculo del día juliano de una fecha del calendario gregoriano*ENTRADA:  $D, M, Y$  $D, M, Y \rightarrow \mathbf{A1} \rightarrow D', M', Y'$

$$J = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{Y' + 184}{100}\right)}{4}\right] - 1363$$

SALIDA:  $J$

**A6: Fecha gregoriana de un día juliano**

*Cálculo de la fecha en el calendario gregoriano a partir de su día juliano*

ENTRADA:  $J'$

$$g = \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{4J' + 274\,276}{146\,097}\right)}{4}\right] - 38$$

$$J = g + J'$$

$J \rightarrow \mathbf{A4} \rightarrow D, M, Y$

SALIDA:  $D, M, Y$

**A7: Lunaciones transcurridas en el calendario judío**

*Cálculo de las lunaciones transcurridas hasta el año  $Y$*

ENTRADA:  $Y$

$$L = \text{int}\left(\frac{235Y - 234}{19}\right)$$

SALIDA:  $L$

**A8: Momento primer molad**

*Cálculo del momento del primer molad de un año*

ENTRADA:  $Y$

$Y \rightarrow \mathbf{A7} \rightarrow L$

$$T = (29.530\,594\,141\,358L + 2.216\,242\,28395) \bmod 7$$

$$S = \text{int} T + 7\delta(\text{int} T)$$

$$H = \text{int}\left[24(T - \text{int} T)\right]$$

$$P = \text{c int}\left\{1080\left[24(T - \text{int} T) - H\right]\right\}$$

SALIDA:  $S, H, P$

**A9: Género del año del calendario judío**

*Determinación del coeficiente que nos da el género del año*

ENTRADA:  $Y$

$$A = \text{int}\left[\frac{(7Y + 1) \bmod 19 + 5}{12}\right]$$

SALIDA:  $A$

**A10: Desplazamientos**

*Cálculo de los días que se desplaza Roch-'hachana respecto al primer molad del año*

ENTRADA:  $Y$

$Y \rightarrow \mathbf{A8} \rightarrow S, H, P$

$$H' = 1080H + P$$

$Y \rightarrow \mathbf{A9} \rightarrow A$

$Y - 1 \rightarrow \mathbf{A9} \rightarrow A'$

$$D' = \varepsilon(H' - 9440) + \delta(S - 3)\delta(A - 1)\varepsilon(H' - 9924) + \\ + \delta(S - 2)\delta(A')\bar{\varepsilon}(H' - 19440)\varepsilon(H' - 16789)$$

$$\bar{D} = \delta(S + D' - 1) + \delta(S + D' - 4) + \delta(S + D' - 6) + \delta(S + D' - 8) + D'$$

SALIDA:  $\bar{D}, S$

**A11: Roch-'hachana**

*Cálculo del día semanal de Roch-'hachana*

ENTRADA:  $Y$

$Y \rightarrow \mathbf{A10} \rightarrow S, \bar{D}$

$$S_R = S + \bar{D} - 7\varepsilon(S + \bar{D} - 8)$$

SALIDA:  $S_R$

**A12: Especie**

*Determinación de la especie del año*

ENTRADA:  $Y$

$Y \rightarrow \mathbf{A11} \rightarrow S_R$

$Y + 1 \rightarrow \mathbf{A11} \rightarrow S'_R$

$Y \rightarrow \mathbf{A9} \rightarrow A$

$$\Delta S_R = S'_R - S_R + 7\varepsilon(S_R - S'_R)$$

$$F = \Delta S_R + 2(A - 2)$$

SALIDA:  $F$

**A13: Día juliano de fecha judía**

*Cálculo del día juliano de una fecha del calendario judío*

ENTRADA:  $D, M, Y$

$Y \rightarrow \mathbf{A7} \rightarrow L$

$Y \rightarrow \mathbf{A10} \rightarrow \bar{D}, S$

$$N = \text{int}(29.530\ 594\ 1358L + 0.216\ 203\ 704) + \bar{D}$$

$Y \rightarrow \mathbf{A9} \rightarrow A$



$$N' = \text{int} \left[ \frac{59M - 58 + \delta(M-6)}{2} \right] - \delta(F-1)\varepsilon(M-4) + \delta(F-3)\varepsilon(M-3) + D$$

$$J = N + N' + 347\,997$$

SALIDA:  $J$

#### **A14: Fecha judía de un día juliano**

*Cálculo de la fecha en el calendario judío a partir de su día juliano*

ENTRADA:  $J$

$$L = \text{int} \left( \frac{J - 347\,997}{29.530\,594\,1358} \right)$$

$$Y = \text{int} \left( \frac{19L + 252}{235} \right)$$

1, 1,  $Y \rightarrow \mathbf{A13} \rightarrow J_R$

$$Y - \text{int} \left( \frac{19L + 252}{235} \right) - \text{int} \left( \frac{J_R - 1}{J} \right)$$

1, 1,  $Y \rightarrow \mathbf{A13} \rightarrow J_R$

$$d = J - J_R$$

$Y \rightarrow \mathbf{A12} \rightarrow F$

$Y \rightarrow \mathbf{A9} \rightarrow A$

$$M = \text{int} \left[ \frac{2d + 59 + 2\delta(F-1)\varepsilon(d-88) - 2\delta(F-3)\varepsilon(d-60) - \delta(A)\varepsilon(d-177)}{59} \right]$$

$$N' = \text{int} \left( \frac{59M - 58 + \delta(A)\varepsilon(M-6)}{2} \right) - \delta(F-1)\varepsilon(M-4) + \delta(F-3)\varepsilon(M-3)$$

$$D = d - N' + 1$$

SALIDA:  $D, M, Y$

#### **A15: Día juliano de una semana ISO**

*Determinar el día juliano conocido el año, el número de semana y el día semanal en el calendario ISO*

ENTRADA:  $W, k, Y$

29, 12,  $Y - 1 \rightarrow \mathbf{A5} \rightarrow J'$

$$J = J' - J' \bmod 7 + 7 \text{int} \left( \frac{J' \bmod 7 + 6}{7} \right) + W - 1 + 7(k-1)$$

SALIDA:  $J$

**A16: Semana y año ISO de un día juliano**

*Determinar el número de semana, el día semanal y el año del calendario ISO de una fecha de la que se conoce el día juliano*

ENTRADA:  $J$

$J \rightarrow \mathbf{A6} \rightarrow Y$

$1, 1, Y \rightarrow \mathbf{A15} \rightarrow J_0$

$1, 1, Y + 1 \rightarrow \mathbf{A15} \rightarrow J'_0$

$$k = \left[ 1 - \varepsilon(J - J'_0) \right] \text{int} \frac{J - J_0}{7} + \varepsilon(J - J'_0) + 1$$

$$\bar{Y} = Y + \varepsilon(J - J_0)$$

SALIDA:  $W, k, \bar{Y}$

**A17: Persa a auxiliar**

*Conversión de fecha del calendario persa a fecha en el calendario auxiliar*

ENTRADA:  $D, M, Y$

$$Y' = Y + 7985$$

$$M' = (M + 11) \bmod 12$$

$$D' = D - 1$$

SALIDA:  $D', M', Y'$ .

**A18: Auxiliar a persa**

*Conversión de fecha del calendario auxiliar a fecha en el calendario persa*

ENTRADA:  $D', M', Y'$

$$Y = Y' - 7985$$

$$M = M' \bmod 12 + 1$$

$$D = D' + 1$$

SALIDA:  $D, M, Y$

**A19: Día juliano de una fecha persa**

*Cálculo del día juliano a partir de una fecha del calendario persa*

ENTRADA:  $D, M, Y$

$D, M, Y \rightarrow \mathbf{A17} \rightarrow D', M', Y'$

$$d = 31M' - (M' - 6)\varepsilon(M' - 6)$$

$$N = \text{int} \left( \frac{Y' - 1}{2810} \right)$$

$$J = \text{int} \left\{ \frac{46\,751Y' + 4N}{128} + \delta[Y' - 2820(N + 1)] \right\} - 968\,503 + d + D'$$

SALIDA:  $J$

**A20: Fecha persa de un día juliano***Cálculo de la fecha en el calendario persa a partir de su día juliano*ENTRADA:  $J$ 

$$N = \text{int} \left( \frac{J + 968\,138}{1\,029\,983} \right)$$

$$Y' = \text{int} \left[ \frac{128(J + 968\,503) + 127 - 4N}{46\,751} - \delta(J - 61\,479 - 1\,029\,983N) \right]$$

$$Y = Y' - 7985$$

$$1, 1, Y \rightarrow \mathbf{A19} \rightarrow J'$$

$$T = J - J'$$

$$M' = \text{int} \left[ \frac{T + \varepsilon(T - 186) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right)}{31} \right]$$

$$D' = \left[ T + \varepsilon(T - 186) \text{int} \left( \frac{T - 186}{30} \right) \right] \bmod 31$$

$$D', M', Y' \rightarrow \mathbf{A18} \rightarrow D, M, Y$$

SALIDA:  $D, M, Y$ **A21: Día juliano de fecha del calendario aritmético musulmán**ENTRADA:  $D, M, Y$ 

$$Y' = Y + 5519$$

$$M' = (M + 11) \bmod 12$$

$$D' = D - 1$$

$$J = \text{int} \left( \frac{10\,631Y' + 14}{30} \right) + \text{int} \left( \frac{59M' + 1}{2} \right) + D' - 7664$$

SALIDA:  $J$ **A22: Fecha del calendario musulmán a partir del día juliano**ENTRADA:  $J$ 

$$J' = J + 7664$$

$$Y' = \text{int} \left( \frac{30J' + 15}{10\,631} \right)$$

$$T = \text{int} \left[ \frac{(30J' + 15) \bmod 10\,631}{30} \right]$$

$$M' = \text{int}\left(\frac{2T}{59}\right)$$

$$D' = \text{int}\left[\frac{(2T) \bmod 59}{2}\right]$$

$$Y = Y' - 5519$$

$$M = M' \bmod 12 + 1$$

$$D = D' + 1$$

SALIDA:  $D, M, Y$

**A23: Día juliano de una fecha del calendario nacional indio**

ENTRADA:  $D, M, Y$

$$Y' = Y + 4794 - \text{int}\left(\frac{13 - M}{12}\right)$$

$$M' = (M + 10) \bmod 12$$

$$D' = D - 1$$

$$d = 31M' - \varepsilon(M' - 5)(M' - 5)$$

$$J = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + d + D' - \text{int}\left(\frac{3 \text{int}\left(\frac{Y' + 184}{100}\right)}{4}\right) - 1312$$

SALIDA:  $J$

**A24: Fecha del calendario nacional indio conocido su día juliano**

ENTRADA:  $J$

$$g = \text{int}\left[\frac{3 \text{int}\left(\frac{4J + 274\,072}{146\,097}\right)}{4}\right] - 36$$

$$J' = J + g$$

$$Y' = \text{int}\left[\frac{4(J' + 1348) + 3}{1461}\right]$$

$$T = \text{int}\left\{\frac{[4(J' + 1348) + 3] \bmod 1461}{4}\right\}$$

$$M' = \text{int} \left[ \frac{T + \varepsilon(T-155) \text{int} \left( \frac{T-155}{30} \right)}{31} \right]$$

$$D' = \left[ T + \varepsilon(T-155) \text{int} \left( \frac{T-155}{30} \right) \right] \bmod 31$$

$$M = (M' + 1) \bmod 12 + 1$$

$$Y = Y' - 4794 + \text{int} \left( \frac{13 - M}{12} \right)$$

$$D = D' + 1$$

SALIDA:  $D, M, Y$

**A25: Día juliano de fecha del calendario juliano revisado**

ENTRADA:  $D, M, Y$

$D, M, Y \rightarrow \mathbf{A1} \rightarrow D', M', Y'$

$$J = \text{int} \left( \frac{1461Y'}{4} \right) + \text{int} \left( \frac{153M' + 2}{5} \right) + D' - \text{int} \left[ \frac{10 \text{int} \left( \frac{Y' + 1084}{100} \right) + 11}{13} \right] - 1354$$

SALIDA:  $J$

**A26: Fecha del calendario juliano revisado de un día juliano**

ENTRADA:  $J'$

$$g = \text{int} \left[ \frac{10 \text{int} \left( \frac{4J' + 1\,589\,146}{146\,097} \right) + 11}{13} \right] - 47$$

$$J = g + J'$$

$J \rightarrow \mathbf{A4} \rightarrow D, M, Y$

SALIDA:  $D, M, Y$

Con estos algoritmos es inmediata la conversión de fechas de un calendario a otro. Dada una fecha obtenemos el día juliano correspondiente y posteriormente a partir de este día juliano obtenemos la fecha en el otro calendario. Veamos a continuación algunos ejemplos de conversión de fechas.<sup>14</sup>

---

14. Tradicionalmente los problemas de conversión de fechas se han resuelto mediante la utilización de tablas, tal es el caso de la obra de Bouchet U., *Hémérologie ou traité pratique complet des calendriers*, París, 1868, que además de describir los principales calendarios computacionales desarrolla las técnicas para la conversión de uno en otro y de Jusué E., *Tablas para la comprobación de fechas en documentos históricos*, Madrid, 1911, que tiene tablas para la conversión entre los

**A27: De fecha gregoriana a judía**

*Averigua la fecha del calendario judío conociendo la fecha en el calendario gregoriano*

ENTRADA:  $D, M, Y$

$D, M, Y \rightarrow A5 \rightarrow J$

$J \rightarrow A14 \rightarrow D', M', Y'$

SALIDA:  $D', M', Y'$

**A28: De fecha musulmana a ISO**

*Averigua la fecha del calendario ISO conociendo la fecha en el calendario musulmán*

ENTRADA:  $D, M, Y$

$D, M, Y \rightarrow A1 \rightarrow J'$

$J' \rightarrow A16 \rightarrow W, k, \bar{Y}$

SALIDA:  $W, k, \bar{Y}$

---

calendarios cristiano, musulmán y judío. Otra posibilidad de resolver el problema ha consistido en publicar los diversos calendarios para un amplio intervalo de tiempo, imprimiéndose unos al lado del otro; la conversión se hace por directa inspección, tal es el caso de Reingold E. M., Dershowitz N., *Calendrical tabulations 1900-2200*, Cambridge University Press, 2002, que publica los calendarios gregoriano, ISO, hebrero, chino, copto, etíope, persa astronómico y aritmético, hindú lunar, hindú solar, islámico astronómico y aritmético. Otras tablas para calendarios específicos son Spier A., *The comprehensive hebrew calendar*, Feldheim Publishers, Jerusalén, 1986, contiene conversiones para los años 1900-2100; Freeman-Grenville G. S.P., *The islamic and christian calendars*, Garnet, 1995, con tablas para conversión hasta el 2222 AH; Birashk A., *A Comparative Calendar of the Iranian, Muslim Lunar, and christian Eras for three Thousand Years (1260 BH-2000 AH / 639 BC-2621 AD)*, Mazda Publishers, 1993. Una tercera posibilidad consiste en dar los algoritmos necesarios para hacer la conversión, algo especialmente útil para confeccionar los correspondientes programas informáticos, ejemplo de este tipo de libros son Dershowitz N., Reingold E. M., *Calendrical calculations*, Cambridge University Press, 1997 y Lathan L., *Standard C date/time library. Programming the world's calendars and clocks*, R&D Books, 1988. Una última posibilidad es el uso de un programa informático, de los muchos que existen en el mercado destacar *World Calendar*, The PandaWawe, 1999.

## El calendario lunisolar eclesiástico

### Las Pascuas judía y cristiana

En el capítulo 12 del libro del Éxodo se narra la institución de la Pascua poco antes de la salida de los hebreos de Egipto, en vísperas de la décima plaga que cayó sobre aquel país. Esta narración apoya la idea de que la Pascua tiene su origen en una antigua institución religiosa anterior a los tiempos de Moisés y asociado a un pueblo nómada. La actitud con que se come era la de los nómadas dispuestos a iniciar su camino. La sal era sustituida por hierbas amargas que crecen en el desierto. Es necesario consumir todo el cordero, como debió ocurrir en tiempos de los pastores nómadas que debían, al día siguiente, continuar su camino.<sup>1</sup>

La Pascua es por tanto la evolución de una antigua fiesta de primavera de los pastores trashumantes pero se piensa que después que los hebreos se convirtieron en sedentarios abandonaron su celebración. Esto lo atestigua la ausencia de referencias sobre la Pascua en los libros sagrados anteriores al exilio, donde en sólo una ocasión –en el segundo libro de los Reyes– se hace referencia a la celebración pascual, pero como algo excepcional y no como una fiesta de periodicidad anual.

La Pascua judía ha quedado unida a la festividad de los ázimos, que prolonga la fiesta pascual –que tiene la duración de un sólo día– durante la semana posterior y que exige la abstención de comer pan con levadura. Esta fiesta de los panes ázimos parece tener un origen cananeo, que pronto se asoció a las festividades de Israel. En un principio, la fiesta sería de origen agrario y asociada con la presentación de la primera gavilla de cereales a los dioses de la naturaleza.

Por tiempo de Ezequías (siglo VII a.C.) se produjo una transformación religiosa que tiene su expresión en el código legal del Deuteronomio que replantea la Pascua, notándose en el legislador deuteronomico un interés por unir la originaria Pascua nómada con la antigua fiesta agrícola de los ázimos.

Las novedades del código deuteronomico se centran en la posibilidad de sacrificar ovejas y ganado vacuno (quizás resultado de un cambio en la producción ganadera), exigió que la Pascua fuese celebrada en un lugar determinado, permitiendo que pueda cocerse y trocarse, como lo podía exigir la víctima del sacrificio si fuese un buey. Las normas de la celebración de la Pascua expuestas en el Éxodo se referían sólo a los

---

1. Seguimos en este párrafo la tesis de Haag H., *De la antigua a la nueva Pascua. Historia y teología de la fiesta pascual*, Sígueme, Salamanca, 1980.

hombres varones, pero en el Deuteronomio se convoca a todo el pueblo sin distinción. Por último, se debe hacer hincapié en que las reglas deuteronomicas no expresan con precisión en qué día debe celebrarse la fiesta.

La Pascua, tal como era celebrada en tiempos de Jesucristo, se iniciaba con el sacrificio del cordero pascual en el Templo, al que le seguía el banquete casero. La destrucción del Templo de Jerusalén por Tito Flavius en el año 70 d.C. imposibilitó que en lo sucesivo se siguiera sacrificando la víctima, por lo que se continuó celebrando el banquete pero sin cordero pascual, o al menos sin su sacrificio ritual.<sup>2</sup>

La celebración de la Pascua en tiempos de Jesucristo se iniciaba en la noche que va del 13 al 14 de Nisán o primer mes de la primavera; el padre de familia buscaba con la ayuda de una linterna o una vela restos de pan u otros alimentos que hubieran fermentado con levadura. El cordero era sacrificado en la tarde del 14 de Nisán. Cada israelita llevaba el cordero que él mismo sacrificaba, mientras que el sacerdote recogía la sangre de la víctima y la vertía sobre el altar. Después, el sacerdote quemaba los trozos grasientos del cordero; terminado este ritual, cada israelita se llevaba el cordero a su casa donde lo asaba en una rama de granado.

En las Pascuas celebradas en tiempos de Cristo ya no era preceptivo llevar la indumentaria de los caminantes sino que el banquete se había transformado, adquiriendo las características greco-romanas, con los comensales sentados, como manifestación de una fiesta de liberación donde todos los miembros debían comportarse como personas libres.

De la información dada por los cuatro evangelios es indudable que Jesucristo sufrió su pasión y muerte en viernes. Si el día semanal de la muerte de Cristo es claro, no ocurre así con el día del mes que, según las interpretaciones cronológicas de los evangelios, habría que situarlo en los días 14 ó 15 de Nisán. Según los evangelistas sinópticos (san Mateo, san Marcos y san Lucas) la última cena fue un verdadero banquete pascual, por tanto debió ser preparada durante el jueves día 14 de Nisán y comida al anochecer de ese día, es decir ya comenzado el viernes 15 de Nisán, porque los judíos hacían comenzar el día al anochecer. Ese mismo viernes Cristo murió por la tarde.

El problema surge porque según el evangelio de san Juan, se desprende otra cronología de la pasión y muerte de Cristo. Según el cuarto evangelista la última cena no fue verdaderamente un banquete pascual, ya que se celebró un día antes de la Pascua. Esto nos viene a decir que, según san Juan, la última cena debió ser el día 13 de Nisán por la noche, pues la Pascua se comía el día siguiente, es decir al final del día 14. Lo que nos lleva a la conclusión de que la muerte fue el viernes 14 de Nisán.

Se han hecho multitud de especulaciones para conciliar estas dos versiones aparentemente contradictorias. Una de ellas sería suponer que la Pascua de aquel año, al ser viernes (15 de Nisán) y víspera de otra festividad como era el sábado, se pasó a este día. Por lo que los judíos comieron la Pascua en la noche del viernes 15 de Nisán, pero Cristo anticipó la cena pascual y la celebró en su día tradicional de la noche del 14; de esta forma se compatibilizan las opiniones de los evangelistas. También podría haber

---

2. Para una introducción sobre las festividades religiosas judías puede consultarse Vainstein Y., *El ciclo del año judío*, Departamento de Educación y Cultura religiosa para la diáspora de la Organización Sionista Mundial, Jerusalén, 1986 y Wylen S. M., *The book of the jewish year*, UAHC Press, New York, 1995.



ocurrido que en ese año la Pascua hubiera caído en sábado, por lo que la última cena de Cristo fue en la noche del día 13 de Nisán y por tanto su muerte se produjo el día 14.

En su narración evangélica san Juan intentó darle un nuevo sentido a la Pascua y desligarla de la tradicional comida pascual que según los sinópticos siguió Jesús. En su cronología, Cristo muere el mismo día y casi a la misma hora que en el Templo se inmolaban los corderos, lo que lleva al evangelista a afirmar: «He aquí el cordero de Dios, el que quita el pecado del mundo.» La identificación de Cristo con el cordero pascual se reitera en el evangelio de san Juan cuando narra –y sólo lo hace él– que a Cristo no le fue quebrado ningún hueso, tal como ocurría con el cordero que inmolaban los judíos.

La modificación que plantea san Juan en su evangelio hace identificar a Cristo con el cordero pascual y, al igual que el sacrificio de éste tenía un sentido de liberación, así la muerte de Cristo es planteada como una liberación del pecado de la Humanidad.

Este planteamiento que tiene su origen en san Juan –y que llegó a convertirse en el oficial del cristianismo– la apoyó san Pablo, que narra la última cena con la nueva visión eucarística y no como un banquete pascual: “[...] tomó el pan y dando gracias lo partió y dijo: Tomad y comed: este es mi cuerpo, que por vosotros será entrado: haced esto en memoria mía” (1 Corintios 11, 24).

Los primeros cristianos, que eran de origen judío, continuaron cumpliendo con la ley mosaica. Las circunstancias del desarrollo posterior del cristianismo, sobre todo su expansión fuera del ámbito judío, movió a sus dirigentes a replantear su relación con las viejas leyes judaicas.<sup>3</sup> El resultado fue la rotura con la ley mosaica que dejó de ser de obligado cumplimiento, mas en el calendario cristiano permaneció la fiesta de la Pascua, originada en la equivalente fiesta judía, pero ahora con un sentido completamente nuevo. Posteriormente se recuperó por los cristianos otra de las fiestas judías, como es la de Pentecostés pero, dándole también un nuevo significado, relacionándola con la llegada del Espíritu Santo.

El calendario que seguían los judíos en tiempos de Jesucristo era lunisolar y basado enteramente en la observación. Desde muy antiguo los judíos se regían por un calendario lunisolar del que hay abundantes referencias en el Antiguo Testamento, donde los años se numeran, prueba de que seguían algún tipo de intercalación.

---

3. El origen de la fiesta de la Pascua ha sido muy debatida. Algunos piensan que su celebración data desde el mismo comienzo del cristianismo. Sin embargo, existen razones para dudar de este origen apostólico, tal como la falta de referencia documental de la celebración pascual durante el primer siglo, la tardanza en adaptar al cristianismo la fiesta judía de Pentecostés, o que no haya pasado a las celebraciones cristianas los Tabernáculos, la otra fiesta judía de la peregrinación. Bien pudo ser que los primeros cristianos hubiesen abandonado pronto las fiestas judías –como pedía san Pablo– celebrando sólo el domingo. Es lógico pensar que le darían un mayor énfasis al domingo que venía después de la Pascua judía. Posteriormente, en un lugar donde debía de haber una fuerte presencia judía, los cristianos quisieron ser más exactos y pasaron a celebrar la pasión y muerte de Cristo en el mismo día de la Pascua judía, de ahí la práctica de los cuartodecimanos. La aparición de la Pascua debió ser en una región de influencia hebrea como pudo haber sido el caso de Jerusalén, Antioquía, Alejandría, Roma o Cartago y tendría que haber ocurrido al **comienzo del siglo II**, **Bedwith R. T.**, *Calendar and chronology, jewish and christian*, E. J. Brill, 1996, pp. 51-70.

La cautividad de Babilonia, que comenzó con la captura de Jerusalén por Nabucodonosor II en el año 597 a.C., permitió a los hebreos adoptar el calendario babilónico, en particular copiaron los nombres de sus meses que son los que tienen en la actualidad.

El Sanedrín era el órgano encargado de proclamar el comienzo del nuevo mes, que ocurría cuando comprobaban que al menos dos testigos habían observado el primer creciente lunar. La razón religiosa para mantener un calendario lunisolar es que la fiesta de la Pascua tiene que celebrarse al comienzo de la primavera, en su primera Luna llena, por lo que la determinación de la festividad pascual exige que el calendario pueda trazar el curso de la Luna y también el del Sol, de tal forma que en un determinado mes (el de Nisán) caiga siempre el comienzo de la primavera.

Recopiladas de antiguas referencias se conocen múltiples razones para añadir el mes extra. Entre las más importantes estaban que la cebada no estuviera madura, que los hornos para la Pascua no estuvieran aún secos, que los judíos de la dispersión en su camino hacia Jerusalén todavía no hubieran llegado, que las carreteras y puentes que conducían a Jerusalén necesitaran ser reparados, que los corderos estuvieran demasiado delgados, que hiciera frío o estuviera nevando, que las tórtolas no hubieran emplumado, que los judíos de la dispersión no hubieran podido ponerse en camino o que existiera peligro de que una gran parte de la nación no pudiera comer la Pascua por estar impuros.

Nos es desconocido desde cuándo los hebreos empezaron a utilizar el calendario computacional que sustituyó al empírico que hemos relatado. Existen razones para suponer que el calendario judío actual se desarrolló posteriormente al calendario lunisolar cristiano, lo que llevaría a plantear la siguiente hipótesis de la interrelación entre los calendarios judío y cristiano. El último surgió del primero, pero éste se perfeccionó a imagen del que los cristianos construyeron, basándose en los conocimientos astronómicos griegos que heredaron los computistas alejandrinos.

### Breve historia del calendario eclesiástico

Los evangelios nos informan que Cristo murió el día 14 ó 15 de Nisán, es decir en el primer mes—cuando comienza la primavera—y coincidiendo con la Luna llena, que en un calendario lunisolar se produce en promedio en el catorce día de la Luna. Los primeros cristianos quisieron recordar aquel acontecimiento celebrándolo anualmente. Un doble camino pudieron elegir: optar por fijar la fecha de aquel acontecimiento en el calendario juliano—entonces vigente en el imperio romano—o bien seguir ligándolo a un calendario con base lunar como el que tenían los judíos. Eligieron esta última opción, quizás porque aquellas comunidades cristianas aún no habían sacralizado al calendario juliano, como después hicieron al asociarle sus festividades religiosas.<sup>4</sup>

No tenemos referencias seguras de cuándo y dónde comenzó la Iglesia primitiva a celebrar la festividad pascual. Si nos es conocido que para fijar su fecha se seguían del

---

4. Para la evolución histórica del calendario lunisolar eclesiástico véase Pedersen O., “The ecclesiastical calendar and the life of the church”, in *Gregorian reform of the calendar*, edited by Coyne, Hoskin and Pedersen, Specola Vaticana, 1983, pp. 17-74 y Bedae, *Opera de Temporibus*, edited by Charles W. Jones, The Mediaeval Academy of America, Cambridge, 1943, pp.3-122.

calendario que entonces utilizaban los judíos. Desde que se empieza a guardar la fiesta pascual –o al menos desde tiempos del Papa Sixto I al comienzo del siglo II– surgieron varios criterios sobre cuándo celebrarla. Esto dio lugar a la primera controversia pascual, comienzo de una serie de al menos cinco conflictos que causaron graves trastornos a la Iglesia.<sup>5</sup>

El problema residía en que los cristianos de Asia Menor celebraban la Pascua el catorce día de la Luna (y por ello llamados cuartodecimanos) con independencia de su día semanal, al contrario del resto de las iglesias que siempre hacían coincidir la Pascua con el domingo. Desde mitad del siglo II se trató de resolver esta diferencia en la celebración pascual. A final de ese siglo el Papa Víctor I ordenó que se celebrasen sínodos en toda la Iglesia para suprimir a los cuartodecimanos. El resultado de esta primera disputa pascual fue la paulatina desaparición de los cuartodecimanos, que aceptaron el criterio del resto de los cristianos de celebrar la Pascua solamente en domingo, cualquiera que fuese el día de la semana en que cayera el 14 de Nisán del calendario judío.

Como hemos señalado, los cristianos dependían de la información facilitada por la Sinagoga para celebrar su Pascua, pero el calendario judío se veía influenciado por multitud de factores, algunos de ellos puramente religiosos y otros sociales y políticos, lo que afectaba indirectamente a la celebración de los cristianos, por lo que éstos seguían ligados a la religión de la que querían emanciparse.

En un intento de independizarse de los judíos, los cristianos del siglo III empezaron a desarrollar sus propios calendarios lunisolares para determinar, por sus propios medios, la fecha de la celebración pascual. En vez de optar por un calendario empírico que directamente pudieron haber heredado de los judíos, se inclinaron por un calendario computacional, que sólo se pudo abordar y desarrollar gracias a los conocimientos matemáticos y astronómicos que existían donde se emprendió esta tarea.

El problema residía en encontrar la fecha del calendario juliano en que cae la primera Luna llena de la primavera, conocido este dato se determinaba el domingo posterior en el que había de celebrarse la Pascua. Para resolver este problema era necesario elaborar un calendario lunisolar, que exigía establecer los siguientes cuatro criterios:

1.- ¿Cómo se debe determinar el “primer mes”, es decir el mes de la primavera? Los

---

5. Normalmente se señalan tres controversias pascales. La primera sería la de los cuartodecimanos, la segunda la que resolvió el concilio de Nicea y la tercera la mantenida entre Roma y algunas iglesias británicas. Pero debemos añadir otras dos: la que durante siglo y medio enfrentó a las iglesias protestantes con la católica y la que aún opone a los ortodoxos con el resto de los cristianos. En el año 1997 se celebró en la ciudad siria de Alepo una reunión del Consejo Mundial de Iglesias, donde se acordó unificar el método para determinar la Pascua en todas las iglesias cristianas, siguiendo para ello el método astronómico, o sea, que la Pascua sea el domingo siguiente a la Luna llena astronómica que viene en o inmediatamente después al equinoccio de primavera astronómica. Durante la primera mitad del siglo XX se trató de modificar la regla para determinar el día de la Pascua para hacerla más estable en el calendario, Abbé Chauve-Bertrand, *La question de Paques et du calendrier*, 1936. La Sociedad de Naciones trató ampliamente la estabilización de la Pascua, sin llegar a poner de acuerdo a los distintos sectores religiosos, ya que la iglesia católica se mostró remisa a fijar la Pascua en una fecha dada del calendario solar, *Stabilisation des fêtes mobiles*, Société des Nations, Organisation des Communications et du Transit, C.335.M.154, 1934.

cristianos aceptaron el equinoccio de primavera como ayuda para esa definición, con lo que se le dio al calendario cristiano un contenido astronómico del que carecía el judío.

2.- ¿En qué fecha del calendario juliano se fijaba el equinoccio de primavera? Este día es variable de un año a otro e, incluso, a lo largo del tiempo su ubicación en el calendario juliano va variando. Las opiniones sobre esa fecha fueron diferentes, mientras que en Roma se tomaba el 25 de marzo, los alejandrinos tomaban la fecha correcta del 21 de marzo.

3.- ¿Sobre qué días del mes lunar se puede celebrar la Pascua? Esta celebración debe caer en un domingo posterior a la primera Luna llena de primavera; es decir: que no puede celebrarse todos los años en el mismo día del mes lunar, por lo que es necesario establecer los límites lunares de la Pascua. Los alejandrinos tomaron estos límites entre los días XV al XXI del mes lunar; <sup>6</sup> los romanos consideraron por mucho tiempo que la Pascua sólo podía estar entre los días XVI al XXII; e incluso en algunos lugares de las Islas Británicas, se tomó –durante algún tiempo– las fechas lunares XIV al XX.

4.- ¿Sobre qué fechas del calendario juliano cae la Pascua? Esto significa que es necesario traducir las anteriores fechas lunares al calendario juliano. Hay que seguir para ello la siguiente secuencia: primero, fijar un ciclo lunisolar y segundo, determinar las fechas julianas de las Lunas nuevas o llenas del ciclo.

En resumen, la dificultad del calendario lunisolar cristiano reside en que debe conjugar tres periodos de tiempo no relacionados entre sí: el año, al que se ajusta el calendario juliano; la lunación, que siguen los meses lunares y la semana, porque sólo en domingo se puede celebrar la Pascua.

El único lugar donde esta tarea podía ser emprendida satisfactoriamente era Alejandría, pues allí se había recopilado la ciencia astronómica griega, que dedicó especial atención a los calendarios lunisolares. Durante el siglo III la Iglesia romana continuó esencialmente las mismas técnicas que Alejandría. Eusebio de Cesárea escribió que el presbítero romano Hipólito «escribió un libro acerca de la Pascua en el que dio un canon pascual de 16 años». En el año 1551 en unas excavaciones en Roma, se desenterró una estatua de Hipólito que contiene en uno de sus laterales el canon pascual referido por Eusebio.

La tabla de Hipólito es en realidad una doble ciclo de ocho años que comenzó en el año 222, en tiempos del emperador Alejandro Severo. Los criterios elegidos por Hipólito fueron el 18 de marzo como la más temprana Luna llena pascual –que corresponde a una Luna nueva el 5 de marzo– y la Pascua debía ser el domingo comprendido entre los días XVI y XXII de la Luna; es decir: que si la Luna llena de primavera acontecía un sábado, la Pascua no sería el siguiente domingo sino el de la semana posterior; práctica romana que, durante siglos, se opuso a la alejandrina que tomaba la Pascua el domingo inmediato posterior a la Luna llena pascual o de primavera. <sup>7</sup>

En el año 243, un computista romano publicó un nuevo ciclo revisado de 112 años que contenía un tratado sobre la Pascua que, equivocadamente, se ha asociado a san Cipriano de Cartago. Este tratado apoya los límites lunares de Hipólito, recurriendo para

---

6. Para referirnos a los días del calendario lunar haremos uso de las cifras romanas. Entendemos que el día de la Luna nueva es el I y el día treinta es el 0.

7. Al ser el extremo de la Pascua el día XVI se impedía que la Pascua cayera en los días en que murió o estuvo enterrado Cristo.

ello a una comparación –muy usual durante la Edad Media– entre la semana de la pasión de Cristo y la semana de la Creación.

A principios del siglo IV apareció en Roma un nuevo ciclo lunisolar que fue frecuentemente utilizado. Se trata del ciclo de 84 años que se denominó *Supputatio Romana* (de suputación, es decir cálculo). Es de origen incierto, pero se cree que procedió de un tratado pascual de un computista de nombre Augustalis –quizás un norteafricano– que escribió unas tablas para cien años (del 213 al 312) basadas en un ciclo de 84 años. El *Supputatio* usaba el 21 de marzo como la fecha del equinoccio de primavera y se aferraba a los límites lunares romanos del XVI al XXII para la Pascua.

El ciclo romano de 84 años consideraba como término de la Pascua el día 21 de abril, con lo que evitaba su coincidencia con las bulliciosas fiestas del aniversario de la fundación de Roma. Este acertado límite no dejaba lugar para que en algunos años se pudiera celebrar la Pascua en su día; en estas ocasiones se entendía que el Papa debía de decidir entre las fechas más cercanas.

Mientras que en occidente los computistas se debatían en ciclos lunisulares imperfectos, en Alejandría dio fruto el conocimiento astronómico heredado de los griegos y, parece ser que en el año 258, Anatolio de Alejandría –un sabio cristiano que años después se convirtió en obispo de Laodicea– utilizó el ciclo de 19 años, que ya fue ideado por el astrónomo griego Metón. En su tratado *Sobre la Pascua* referido por Eusebio de Cesárea, Anatolio hace comenzar el ciclo con el año que tiene una Luna nueva el 23 de marzo y consideraba que la Luna llena pascual sólo puede ser aquella que coincide o es posterior al 21 de marzo.

A principio del siglo IV la mayoría de las Iglesias utilizaban calendarios computacionales para fijar la fecha de la Pascua, pero otras Iglesias, entre las que se encontraba la de Antioquía, seguían con la vieja práctica de guiarse por el calendario judío, aunque eso sí, celebrando la Pascua el domingo siguiente al 14 de Nisán judío.

Por aquel entonces un nuevo peligro amenazó la unidad del cristianismo. La herejía arriana había llegado a tan enconada disputa con la posición ortodoxa, que ni siquiera la pudo resolver la intervención directa del emperador romano Constantino el Grande, por lo que sólo se vio como solución la convocatoria de un concilio ecuménico, que patrocinado por el Estado romano reunió a 318 obispos en la ciudad turca de Nicea en el año 325.

Constantino dirigió una misiva a los dirigentes cristianos que no pudieron asistir al concilio, donde de manera precisa planteó la que ha sido llamada la segunda controversia pascual. En la carta expuso cómo algunas iglesias continuaban guiándose por el calendario judío para obtener información sobre qué día debían de celebrar la Pascua cristiana, lo que consideraba inaceptable. Finalizaba su carta transmitiendo el “común parecer de todos a celebrar la santísima festividad de la Pascua en un único y mismo día”.<sup>8</sup>

En los documentos que se han conservado de aquel primer concilio ecuménico no aparece resolución alguna sobre las reglas para la determinación del día de Pascua. Todo indica que los participantes en el concilio implícitamente reafirmaron la validez del cómputo que ya utilizaba Alejandría, ciudad donde se encontraban los más hábiles

---

8. Eusebio de Cesárea, *Vida de Constantino*, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1994, pp. 281-284.

computistas del mundo cristiano. En el texto griego de los documentos aprobados en Nicea se encuentra una carta dirigida a la Iglesia de Alejandría donde leemos: “También le enviamos noticias de la solución concerniente a la santa Pascua, en respuesta a sus oraciones, esta cuestión también ha sido resuelta”, afirmando posteriormente que se había llegado al acuerdo de celebrar la Pascua todas las Iglesias el mismo día, según las reglas que se seguían en Alejandría y en la mayor parte de la cristiandad.

Aunque el concilio de Nicea no prescribió explícitamente ninguna regla para calcular la Pascua, todo parece mostrar que el oriente y el occidente estuvieron de acuerdo en el día en que se celebraba la fiesta pascual, a pesar de las discrepancias que en el cómputo mantenían Roma y Alejandría. En los casos de divergencias parece ser que fueron los romanos los que aceptaron las fechas alejandrinas, excepto cuando se pasaba de la tradicional fecha romana del 21 de abril.

Durante este tiempo se dieron a conocer en el occidente dos tablas pascales confeccionadas en Alejandría. La primera de ellas daba las Pascuas desde el año 380 al 480 y su autor fue el obispo Teófilo, que se las envió al emperador Teodosio I. Otra tabla con fechas pascales circuló por Roma, comprendía 95 años, desde el 437 al 531 y que equivocadamente fueron adjudicadas al obispo Cirilo, sucesor de Teófilo en la sede de Alejandría. Las dos tablas se han perdido, pero sabemos que se basaban en el ciclo de Metón de diecinueve años y en los criterios de que el equinoccio era el día 21 de marzo y que la Pascua debía estar entre los días lunares XV al XXI, es decir la Pascua sería el domingo siguiente al catorce día de la Luna pascual, que es aquella que se produce el 21 de marzo o es inmediatamente posterior, es decir los mismos criterios que han llegado hasta nosotros.

Las frecuentes diferencias que se encontraban entre las anteriores tablas alejandrinas y las que se desprendían de los cómputos romanos, especialmente el más extendido de ellos que era el basado en el ciclo de 84 años, hizo que el entonces archidiacono san Hilario pidiera en el año 455 al matemático Victorio de Aquitania que examinara cuidadosamente las causas de las discrepancias.

Victorio tomó el 21 de marzo como día del equinoccio y exigió que la Pascua fuera siempre celebrada después de ese día. Pero no logró abandonar definitivamente las costumbres romanas, pues tomó como criterio para los posibles días de la Pascua los comprendidos entre los días XVI y XXII del mes lunar, es decir que si la Luna llena –o el día lunar XIV– fuera un sábado, la Pascua no sería el siguiente domingo –como ocurría en el cómputo alejandrino– sino el domingo de la semana posterior. La combinación de los criterios anteriores hacen que la Luna nueva pascual más temprana sea el 7 de marzo, que llega a ser llena el 20 y la Pascua más temprana sería dos días después, es decir el 22, por lo tanto después del equinoccio. Otra característica diferenciadora en el calendario de Victorio fue la colocación del salto lunar (ver más adelante) en el último año de su ciclo, que estaba ordenado a partir del año de la creación. Pero el diecinueve año de Victorio coincidía con el sexto según el orden alejandrino, que partía –como luego veremos– del reinado de Diocleciano. Entonces el salto lunar de Victorio quedaba colocado en el sexto año según el orden oriental, mientras que éstos lo colocaban en el año decimonoveno. Esta desigual colocación del salto lunar producía una diferencia de un día en las Lunas pascales entre los años 7 al 19 del ciclo alejandrino. Hay que señalar que las tablas de Victorio permitían que la Pascua llegara hasta el día 24 de abril, sobrepasando el día 21 del mismo mes, que era el tradicional límite pascual romano.

El ciclo de Victorio no llegó inmediatamente a suplantarse al antiguo *Supputatio* romano de 84 años, incluso hubo Iglesias que prefirieron las tablas alejandrinas de Cirilo, como ocurrió en el norte de África durante la última mitad del siglo V. Pero finalmente el sistema de Victorio se fue extendiendo, como lo prueba la decisión del concilio de Orleáns del 541 que aprobó que todos los sacerdotes usaran el canon de Victorio.

Como las diferencias entre las tablas de Victorio y las de Teófilo seguían produciéndose, el Papa pidió a Victor de Capua que explicara la razón de las diferencias. Victor reconoció los errores del ciclo de Victorio, es decir su deslocalización del salto lunar y los límites lunares de la Pascua. El trabajo de Victor de Capua terminaba con una petición para que se prepararan mejores tablas.

Dionisio el Exiguo en el año 525 publicó sus tablas pascuales, acompañadas por una serie de reglas calendaristas –los argumentos–.<sup>9</sup> Lo que hizo Dionisio fue transcribir al calendario juliano el último ciclo de 19 años de Cirilo y lo continuó con otros 95 años que comenzaban en el 532, año siguiente al último de la tabla cirilica, utilizando para su preparación el mismo ciclo y los mismos criterios que desde hacía siglos utilizaban los alejandrinos, consiguiendo de esta forma tan explícita la unidad deseada en la celebración pascual.

Según Dionisio, las reglas pascuales que pretendía propagar en occidente, habían sido fijadas en el concilio de Nicea. Este supuesto origen niceno de las reglas pascuales ha sido una constante mantenida durante siglos, aunque como hemos precisado anteriormente, no hay evidencia de que el concilio de Nicea definiera explícitamente las reglas para determinar la Pascua.<sup>10</sup>

Las tablas de Dionisio tardaron tiempo en ser adoptadas, porque tenían que competir con las bien asentadas de Victorio, que tenían la aparente sanción papal y eran consideradas las verdaderas tablas alejandrinas. Otra ventaja tenía la teoría de Victorio de Aquitania respecto a la de Dionisio. Victorio había acertadamente encontrado un verdadero ciclo pascual, es decir un número de años transcurridos los cuales los domingos de Pascua se vuelven a repetir en las mismas fechas del calendario. Su duración es de 532 años, resultado de multiplicar 19 por 28 (número de años llamado ciclo solar, tras los que vuelven a repetirse en el mismo orden los días semanales). Dionisio al igual que sus continuadores inmediatos se aferró al seudociclo de 95 años, sin llegar a conocer el verdadero ciclo pascual.<sup>11</sup>

La tabla de Dionisio el Exiguo nunca tuvo la sanción oficial de Roma. En su lenta dispersión alcanzó Italia en el año 562, tal vez a través de África para gradualmente

9. Neugebauer O., “On the Computus Paschalis of ‘Cassiodorus’”, *Centaurus* 25 (1982) 292-302.

10. Grosjean P., “La date de paques et le concile de Nicee”, *Ciel et Terre* 78 (1962) 20-30. La bula papal que introdujo el calendario gregoriano en 1582 también hace referencia a este origen niceno de las reglas de la Pascua, Rodrigo Alonso de Ávila, *Explicación del cómputo eclesiástico*, Granada, 1631; esta es la única obra en español donde hemos encontrado una traducción (sólo parcial) de la citada bula papal.

11. Noventa y cinco años es un pseudociclo pascual, ya que transcurridos esos años los días de la Pascua se vuelven a repetir “casi” en las mismas fechas del calendario juliano. El pseudociclo de 95 años se encuentra dividido en bloques de cuatro años, en tres de éstos se vuelven a repetir la fecha de la Pascua cada 95 años. Es decir, que en cada periodo de 95 años, 71 de ellos vuelven a repetir sus días de Pascua en el ciclo siguiente.

suplantar a las tablas de Victorio en el resto del occidente cristiano.

Años antes de la conclusión de la tabla de Dionisio, que finalizaba en el 626, se publicaron otras nuevas. La primera continuación fue la del abab Félix Cyrillitani que basándose en los cálculos dionísicos compuso una tabla para 95 años que concluía en el 721. El mismo periodo comprende la tabla pascual de San Isidoro de Sevilla, que evidentemente está basada en los cálculos dionísicos, pero adaptados con poco acierto, habida cuenta del considerable número de errores que contiene.<sup>12</sup>

Un siglo después del germinal trabajo de Dionisio se produjo una avalancha de obras computísticas, algunas de ellas falsamente atribuidas a grandes personajes del pasado. La más importante contribución al cómputo es la obra del benedictino inglés Beda el Venerable, quien en el 725 compuso *De Temporum Ratione*, que estaba llamada a ser la obra de referencia para todos los trabajos computistas posteriores. Fue escrita con una finalidad académica y con el propósito de aclarar la confusión existente en Inglaterra e Irlanda sobre la celebración pascual.<sup>13</sup>

La obra de Beda fue ampliamente usada durante la Edad Media, especialmente su terminología, que aunque no la descubrió el sabio benedictino, sí logró uniformarla. Después de Beda es importante la contribución de Alcuin (siglo IX), que popularizó el cómputo dionísico en el imperio carolingio. Mientras que Habranus Maurus llevó la obra de Beda a Alemania a mitad del siglo IX.

La unificación de la Pascua en el mundo cristiano tuvo que superar todavía una nueva controversia. Los misioneros romanos que llegaron a las Islas Británicas en tiempo de Gregorio Magno a final del siglo VI, encontraron que sus habitantes seguían el ciclo de 84 años abandonado hacia tiempo en Roma. El ciclo, que ha sido llamado celta, consideraba el equinoccio de primavera el 25 de marzo y los límites lunares eran los comprendidos entre XIV-XX, por lo que los límites del día de Pascua estaban entre el 25 de marzo y el 21 de abril.

En varias ocasiones los Papas pidieron a los británicos que se ajustaran a las reglas romanas, sin conseguir plenamente sus objetivos. En el año 664 se reunió en Whitby un concilio, que sin llegar a resolver el problema definitivamente, sí inició un lento proceso que concluyó a principios del siglo VIII, cuando todas las Iglesias británicas aceptaron el sistema romano de determinación de la Pascua.

La definitiva independización del calendario solar alejandrino llegó a principios del siglo XIII con Alexandre de Villadieu, que hizo comenzar el año en enero y no en septiembre como Dionisio y sus continuadores.<sup>14</sup> Aplicó el concepto de número de oro, es decir el número de orden en el ciclo de 19 años, lo que le permitió determinar fácilmente los días en que caen las Lunas nuevas, por lo que ya no necesitó otros términos computistas como la epacta o los regulares. La obra de Villadieu representó el fin y el apogeo del cómputo medieval al llevarlo a su mayor desarrollo.

Durante la Edad Media el cómputo no sólo se convirtió en parte del curriculum de los estudios de los novicios en los monasterios, sino en elemento indispensable en la

---

12. San Isidoro de Sevilla, *Etimología*, Biblioteca de Autores Cristianos, Editorial Católica, Madrid, 1982, pp. 595-609.

13. Wallis F., *Bede: The Reckoning of Time*, Liverpool University Press, 1999.

14. Van Wijk W. E., *Le nombre d'or. Étude de choronologie technique suivie du texte de la Massa Compoti d'Alexandre de Villedieu*, Martinus Nijhoff, La Haye, 1936.



enseñanza cristiana. Pero aún llegó a más, los textos de cómputo fueron verdaderos manuales astronómicos, donde se podía aprender el escaso conocimiento que de esa ciencia se tenía en la Europa medieval.

### Calendarios lunisolares astronómicos griegos

Durante el periodo de esplendor de la ciencia griega, los astrónomos estudiaron el problema de los calendarios lunisolares, ideando múltiples calendarios astronómicos. No parece que se aplicaran a la sociedad civil, sino que fueron utilizados exclusivamente por los astrónomos, en particular con una finalidad cronológica.

Se acredita a Cleostratos de Tenedos (alrededor del 500 a.C.) como el inventor de un calendario lunisolar basado en un periodo de ocho años llamado octaetérides. Según discute el astrónomo griego Gémino (siglo I a.C.), el ciclo –que partía de un año de 365 días y cuarto– estaba compuesto por 99 meses, alcanzando un total de 2,922 días. Esto hace que el mes lunar medio tuviera un valor algo inferior al real, diferencia que debió dificultar la aplicación de la octaetérides a amplios periodos de tiempo. En el mismo texto se nos informa que los embolismos eran colocados en los años tercero, quinto y octavo del ciclo.

Gémino dice que Eudoxo de Cnido (siglo IV a.C.) mejoró la octaetérides tras comprobar que la Luna media del calendario adelantaba respecto a la astronómica 3 días al cabo de 16 años. La corrección de Eudoxo consistió en quitar 30 días (es decir un mes lunar) en el transcurso de 10 ciclos de 16 años. La octaetérides mejorada tenía 58,440 días ( $= 365.25 \times 160$ ) y el número de lunaciones era 1,979 ( $= 99 \times 20 - 1$ ), lo que representó una mejora significativa, pues la lunación media del nuevo calendario se diferenciaba en unos 46 segundos de la lunación astronómica media de la época.

El astrónomo ateniense Metón (siglo V a.C.) ideó un nuevo calendario lunisolar ajustado a un ciclo de 19 años, que contenía en total 6,940 días y 235 lunaciones, 125 de ellas de 30 días y 110 de 29; encajadas en años solares de 365 y 5/19 días. La colocación de los meses completos y defectivos (de 30 y 29 días respectivamente) se hacía de la siguiente forma: se suponía que todos los meses eran de 30 días y cada 63 días ( $= 6940 / 110$ ) se le quitaba uno al mes lunar en que cayera, dando así lugar a los 110 meses defectivos.

Años del ciclo	Nombre	Nº lunaciones	Nº embolismos	Lunación media	Exceso al final del ciclo
4	Tetraérides	50	2	29 <sup>d</sup> .5200	-0 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>
8	Octaetérides	99	3	29 <sup>d</sup> .5152	-1 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup>
19	Metón	235	7	29 <sup>d</sup> .5319	-0 <sup>d</sup> 07 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup>
59	Enópides	730	22	29 <sup>d</sup> .5301	-0 <sup>d</sup> 07 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>
76	Calipo	940	28	29 <sup>d</sup> .5309	0 <sup>d</sup> 04 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup>
82	Demócrito	1012	28	29 <sup>d</sup> .5138	-0 <sup>d</sup> 12 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>
160	Eudoxo	1979	59	29 <sup>d</sup> .5301	-1 <sup>d</sup> 00 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup>
304	Hiparco	3760	112	29 <sup>d</sup> .5306	-0 <sup>d</sup> 00 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>

Tabla 1.8.- Calendarios lunisolares astronómicos griegos.

De diversos textos antiguos que se han conservado, se puede afirmar que el ciclo de Metón se inició el 27 de junio del 432 a.C., coincidiendo con el solsticio de verano; mientras que los años abundantes o de 13 meses fueron colocados en los lugares 2, 5, 8, 10, 13, 16 y 18.

El año de Metón es  $1/76$  días más largo que el año juliano de 365 días y cuarto, dato que le sirvió a Calipo (principios del siglo IV a.C.) para hacer una mejora del ciclo de 19 años en el 334 a. C.; su ciclo era cuatro veces el de Metón, es decir, 76 años con 940 meses, 28 de ellos embolismicos. La característica del ciclo de Calipo consistía en que cada cuatro ciclos de Metón se quitaba un día, por lo que tenía en total 27,759 ( $= 6,940 \times 4 - 1$ ), por ende resulta una lunación del calendario que excedía en sólo 23 segundos al mes lunar astronómico. El ciclo de Calipo comenzó el 28 de junio del 330 a.C. y tuvo el mismo tipo de intercalación que el de Metón.

Hiparco de Nicea introdujo un nuevo perfeccionamiento al tomar 16 ciclos de Metón, haciendo un total de 304 años, de los cuales 112 eran intercalares. El número total de días es de 111,035, es decir 16 veces los del ciclo de Metón menos 5 días, lo que da un mes lunar promedio que apenas se separa un segundo de la lunación astronómica.

La importancia de los ciclos astronómicos lunisulares desarrollados en la antigua Grecia es doble; primero porque alcanzaron un alto grado de exactitud, resultado de los valores de la lunación y del año que se manejaron, que fueron muy cercanos a los reales. En segundo lugar, estos ciclos pasaron a la Alejandría helenizada como parte de los logros astronómicos griego. Es lógico que, necesitando la Iglesia cristiana obtener calendarios lunisulares computacionales para independizarse de los judíos, se fijaran en los ya inventados por los griegos; por lo que no es aventurado pensar que el ciclo lunisolar que desarrolló la Iglesia de Alejandría –y que en esencia es el que hoy utilizamos– sea una adaptación del descubierto por los antiguos astrónomos griegos.

### Teoría general del calendario lunisolar eclesiástico

Los calendarios lunisulares eclesiásticos están compuestos de un ciclo de  $A$  años julianos, donde se ajusta un número entero  $L$  de lunaciones, compuestas a su vez de un número entero de días, que pueden ser 29 ó 30. Esto quiere decir que las lunaciones eclesiásticas no pretenden seguir fielmente las lunaciones astronómicas, de las que pueden diferir varios días; su objetivo es representar en promedio el movimiento real de la Luna. Si con  $m_{30}$  y  $m_{29}$  representamos los meses lunares de 30 y 29 días que tiene el ciclo de  $A$  años, deberá cumplirse

$$m_{30} + m_{29} = L.$$

Para evitar el engorro de los días bisiestos, lo que se hace es no tenerlos en cuenta. De tal forma que cuando hay que intercalar el bisiesto en el año solar, se hace otro tanto en el año lunar; es decir, se le agrega un día al mes lunar que contenga el 24 de febrero, día que se duplica en los años bisiestos.<sup>15</sup> Esto quiere decir que en los años bisiestos uno de los meses lunares tendrá realmente un día más de lo habitual, adquiriendo con ello 30 ó 31 días. Pero como queda dicho, obviaremos este aumento ocasional. La suma

---

15. Esta es la práctica eclesiástica que tiene su origen en la práctica romana, en que el día bisiesto duplicaba el día 24 de febrero. Esto encuentra su razón en el calendario que existía en Roma en tiempos de la República, en que se colocaba el mes intercalar después del día 23 de febrero, fiesta

de los días de todos los meses debe coincidir con la duración de los  $A$  años julianos

$$30m_{30} + 29m_{29} = 365A,$$

notemos que no hemos tenido en cuenta los días bisiestos, aún así la igualdad sigue valiendo, pues lo que en realidad hacemos es quitar los días bisiestos tanto en el primero como en el segundo miembro. Combinando las dos últimas ecuaciones obtenemos el número de meses de uno y otro tipo que hay en el ciclo

$$m_{30} = 365A - 29L; \quad m_{29} = 30L - 365A.$$

Calculemos a continuación el número de meses embolísticos (llamados en la Edad Media *nullis mensis*) que hay en el ciclo. Para ello tengamos presente que todos los años tienen doce meses normales y que en algunas ocasiones tendrá un mes de más. Si denominamos  $E$  al número de meses embolísticos, deberá cumplirse

$$E = L - 12A.$$

Los computistas medievales perseguían que todos los meses embolísticos tuvieran treinta días (por razones que veremos más adelante), a los que había que añadir los seis meses de treinta días que normalmente debe tener un año. Pero puede ocurrir que no haya días suficientes para que tanto los embolismos como seis meses de cada año tuviesen treinta días. En este caso se toman los días necesarios de los meses normales de treinta días para que así todos los embolismos tengan los deseados treinta días. A esta operación se le llama salto lunar. Esto quiere decir que a algunos de los meses normales que debieran tener treinta días, se les quita uno, quedando por ello con sólo veintinueve, esto es lo mismo que decir que se hace aumentar en un día la edad de la Luna en esos meses; es decir, que la edad de la Luna “salta” un día. El número de saltos lunares que hay en un ciclo es el exceso de meses de treinta días que debe de haber (los embolísticos y los seis de cada año), menos los meses de treinta días que en realidad hay, o sea,  $m_{30}$

$$S = E + 6A - m_{30} = 30L - 371A,$$

que sólo tiene sentido cuando es un número positivo o nulo. El número de meses de treinta días “normales” es el total menos los embolismos

$$M_{30} = m_{30} - E = 377A - 30L,$$

mientras que los restantes meses serán de veintinueve días

$$M_{29} = L - M_{30} = L - (377A - 30L) = 30L - 365A,$$

donde no se han tenido en cuenta los días bisiestos, que pueden aumentar la duración real de los meses lunares.

El valor de la lunación promedio que se obtiene del ciclo lunisolar es

$$L_m = \frac{365.25A}{L}.$$

Para conocer la posición que deben ocupar los años embolísticos se hace uso de las fórmulas (19.4), al aplicarlas al ciclo de 19 años compuesto de 235 lunaciones se encuentran los siguientes resultados

---

de la Terminalia, Michels A. K., *The calendar of the roman public*, Princeton University Press, Princeton, 1967, pp. 16-18.

$$\begin{aligned}
 A = 19; L = 235; m_{30} = 120; m_{29} = 115; E = 7; S = 1; \\
 M_{30} = 113; M_{29} = 115; L_m = 29.530\ 851
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

y los años que son embolismicos en el ciclo natural son 3, 6, 9, 11, 14, 17 y 19. En el calendario que usó la iglesia cristiana se tomaba  $\beta = 17$  y  $\alpha = 6$ , entonces los años embolismicos son 2, 5, 8, 11, 13, 16 y 19.

Vamos a desarrollar un procedimiento para obtener posibles ciclos lunisulares. Dado el número de años  $A$  del ciclo, el número de lunaciones que mejor se ajusta a esos años viene dada por

$$L = \text{cint} \left( \frac{365.25 A}{29.530\ 588} \right)$$

donde cint representa la función redondeo y el denominador es la duración promedio de la lunación astronómica. Con los valores de  $A$  y  $L$  podemos calcular todas las demás características por las fórmulas desarrolladas en este epígrafe.

Otro sistema para obtener ciclos lunisulares es haciendo uso de las fracciones continuas. El cociente entre la longitud del año trópico y el mes sinódico es 12.3682 6631. Al desarrollar la parte decimal en fracciones continuas se encuentra

$$0.368\ 26631 = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{17 + \dots}}}}}$$

de donde obtenemos la sucesión de fracciones

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}; \frac{7}{19}; \frac{123}{334}; \dots,$$

el denominador de cada una de las fracciones representa el número de años del ciclo y el numerador el número de embolismo. Por ejemplo, la quinta fracción corresponde a un ciclo de 19 años de los cuales 7 son embolismicos.

En la tabla 2.8 se dan algunos ciclos lunisulares con sus características principales.

Años del ciclo	Lunaciones	Embolismos	Meses de 30 días	Meses de 29 días	Saltos lunares	Diferencia
8	99	3	49	50	2	22 <sup>m</sup> .2
11	136	4	71	65	0	-16 <sup>m</sup> .8
19	235	7	120	115	1	-0 <sup>m</sup> .4
65	804	24	409	395	5	2 <sup>m</sup> .4
84	1039	31	529	510	6	1 <sup>m</sup> .8

Tabla 2.8.- Ejemplos de algunos ciclos lunisulares.

La última columna son los minutos de diferencia entre la lunación promedio astronómica y la lunación media del ciclo.

Al ciclo de 8 años se le llama ogdoa u octoetérides. El ciclo de 11 años se le llama hendeca. El ciclo de 19 años, o de Metón no es más que una ogdoa y una hendeca y el ciclo de 84 años está formado por cuatro ciclos de 19 años más una ogdoa. El ciclo lunisolar de una duración menor que 100 años que mejor se ajusta a la lunación astronómica es el de 19 años. Para duraciones mayores señalar el de 255 años, formado por 13 ciclos de Metón y una ogdoa. Todavía mejor es el ciclo de 193 años (15 ciclos de Metón y una ogdoa), separándose su lunación promedio sólo 14.4 segundos de la astronómica.

### **Descripción del calendario lunisolar juliano**

Como queda dicho, las técnicas computistas alejandrinas se introdujeron finalmente en el ámbito romano, a lo cual contribuyeron especialmente Dionisio el Exiguo y Beda el Venerable. No obstante, fue necesario adaptar el calendario lunisolar eclesiástico al calendario civil romano, en vez de al calendario alejandrino. Al calendario resultante le llamaremos lunisolar juliano. Este calendario se desarrolló en base a un ciclo de 19 años. Sin embargo, este no es el ciclo que ideó el astrónomo griego Metón, pues el ciclo cristiano está compuesto de 120 meses de 30 días, contra los 125 que tiene el originario de Metón. La duración total del ciclo eclesiástico es variable, dependiendo del número de años bisiestos que contenga. Si hay 4 bisiestos en el ciclo, su duración será 6,939 días; pero si contiene 5 bisiestos, entonces la duración será 6,940 días. En promedio la duración del ciclo eclesiástico de 19 años es de 6,939.75 días, mientras que el ciclo griego de Metón tiene una duración de 6,940 días. En realidad lo que adoptó la iglesia medieval fue el ciclo de Calipo, al menos en cuanto a la duración se refiere, ya que cuatro ciclos eclesiásticos de Metón coinciden con la duración del ciclo de Calipo y por tanto coinciden sus lunaciones medias.

Se pueden desarrollar varios calendarios lunisolares julianos, aunque todos ellos dan las mismas fechas para la Pascua. Adoptaremos en lo que sigue el punto de vista romano, a saber, comenzar tanto el año solar como el lunar en el mes de enero. El comienzo del ciclo de 19 años es el año solar cuya primera Luna nueva eclesiástica es el día 23 de enero, por razones que veremos más adelante. En el calendario lunisolar que vamos a exponer a continuación aplicaremos las reglas habituales de los computistas medievales, que son:

- 1.- Los meses lunares pertenecen al mes civil o solar en que terminan.
- 2.- Todos los meses embolísmicos tienen treinta días.
- 3.- En el año bisiesto se duplica el día 24 de febrero del calendario solar y también se duplica el día del mes lunar que le es asociado, de tal forma que en el calendario lunisolar no viene expresamente recogido el día bisiesto. Nótese que al seguir esta práctica deja de existir el día 29 de febrero en los años bisiestos.<sup>16</sup>
- 4.- En el calendario se van intercalando los meses de 30 y 29 días. Esta regla se rompe en

---

16. Una hipótesis que explicaría la extraña circunstancia de la corta duración de febrero se encuentra en la animadversión que los antiguos romanos tenían por los números pares. El calendario prejuliano fue una mala adaptación de un calendario lunisolar, que debería de tener en los años

Nº de oro	Enero	Feb.	Mar.	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agos.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
1	23	<u>21</u>	<u>23</u>	<u>21</u>	21	<u>19</u>	19	<u>17</u>	16	<u>15</u>	14	<u>13</u>
2	12	<u>10</u>	<u>12</u>	<u>10</u>	10	<u>8</u>	8	<u>6</u>	5	<u>4</u>	3	<u>2</u>
3	<u>1</u> , 31		<u>1</u> , <u>31</u>	<u>29</u>	29	<u>27</u>	27	<u>25</u>	24	<u>23</u>	22	<u>21</u>
4	20	<u>18</u>	<u>20</u>	<u>18</u>	18	<u>16</u>	16	<u>14</u>	13	<u>12</u>	11	<u>10</u>
5	9	7	<u>9</u>	7	7	<u>5</u>	5	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>2</u> , <u>31</u>	30	<u>29</u>
6	28	<u>26</u>	<u>28</u>	<u>26</u>	26	<u>24</u>	24	<u>22</u>	21	<u>20</u>	19	<u>18</u>
7	17	<u>15</u>	<u>17</u>	<u>15</u>	15	<u>13</u>	13	<u>1</u>	10	<u>9</u>	8	<u>7</u>
8	6	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	3	<u>2</u>	<u>1</u> , <u>30</u>	29	<u>28</u>	27	<u>26</u>
9	25	<u>23</u>	<u>25</u>	<u>23</u>	23	<u>21</u>	21	<u>19</u>	18	<u>17</u>	16	<u>15</u>
10	14	<u>12</u>	<u>4</u>	<u>12</u>	12	<u>10</u>	10	<u>8</u>	7	<u>6</u>	5	<u>4</u>
11	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u> , 31	<u>29</u>	29	<u>27</u>	26	<u>25</u>	24	<u>23</u>
12	22	<u>20</u>	<u>22</u>	<u>20</u>	20	<u>18</u>	18	<u>16</u>	15	<u>14</u>	13	<u>12</u>
13	11	<u>9</u>	<u>11</u>	<u>9</u>	9	7	7	<u>5</u>	4	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>2</u> , <u>31</u>
14	30	<u>28</u>	<u>30</u>	<u>28</u>	28	<u>26</u>	26	<u>24</u>	23	<u>22</u>	21	<u>20</u>
15	19	<u>17</u>	<u>19</u>	<u>17</u>	17	<u>15</u>	15	<u>13</u>	12	<u>11</u>	10	<u>9</u>
16	8	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>6</u>	6	<u>4</u>	4	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>1</u> , <u>30</u>	29	<u>28</u>
17	27	<u>25</u>	<u>27</u>	<u>25</u>	25	<u>23</u>	23	<u>21</u>	20	<u>19</u>	18	<u>17</u>
18	16	<u>14</u>	<u>16</u>	<u>14</u>	14	<u>12</u>	12	<u>10</u>	9	<u>8</u>	7	<u>6</u>
19	5	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	2	<u>1</u> , 31	<u>29</u>	28	27*	25	<u>24</u>

Tabla 3.8.- Calendario lunisolar juliano.  
algunas ocasiones.

5.- Todos los años comienzan con una lunación de 30 días.

6.- Los meses en que cae la Pascua, llamados meses pascales, son aquellos cuyo día XIV (correspondiente a la Luna llena eclesiástica) coincide con el 21 de marzo o es inmediatamente posterior. Esto quiere decir que la fecha en que más pronto puede venir la Luna nueva pascual es el día 8 de marzo, que da lugar a una Luna llena el día 21 de marzo. Mientras que la Luna nueva pascual más tardía comienza el día 5 de abril.

7.- Todas las Lunas pascales tienen 29 días.

8.- A los meses civiles pares (febrero, abril, junio,...) le corresponden lunaciones impares

---

normales una duración de 354 días. Pero los que idearon el antiguo calendario romano aumentaron la duración a 355 días, para evitar el número par. Aunque los meses de un calendario lunisolar deben tener duraciones de 30 y 29 días, se evitaron los meses de 30 días, dándoles una duración excesiva de 31. Todo esto se hizo con la idea de evitar los números pares. Pero inevitablemente uno de los meses debía de tener una duración par. Se eligió para ello el mes más "nefasto", que entonces estaba colocado en la última posición del año y que era nuestro actual febrero porque "un número inferior y par convenía a las divinidades infernales". La posterior reforma del calendario que patrocinó Julio César se hizo con las mínimas modificaciones posibles. Se añadieron diez nuevos días pero no se alteró el mes de febrero que continuó con los 28 días "para no alterar el culto a los dioses infernales", Macrobo, *Les Saturnales*, Garnier, vol. 1, pp. 125-141.

(de 29 días) y viceversa. Esta regla se rompe en algunas ocasiones.<sup>17</sup>

9.- El salto lunar se coloca en el último año del ciclo de 19 años y en el penúltimo mes del año lunar, siguiendo con ello a Beda.

Con estas condiciones el calendario lunisolar eclesiástico juliano es el dado por la tabla 3.8. Los números indican las fechas en que comienzan los meses lunares. Si la fecha está en cursivas significa que ese mes tendrá una duración de 30 días, en caso contrario tendrá 29. Las fechas que están sombreadas corresponden a los meses embolismicos. Los días que están en cursivas y subrayadas corresponden al primer día del año lunar. Si la fecha está en letra normal pero subrayada es el comienzo del mes pascual. Por último, la lunación marcada con un asterisco es aquella en que se realiza el salto lunar, que debiendo ser de 30 días sólo tiene 29.

En la primera columna aparece el número de oro, o número de orden en el ciclo de 19 años. Aquellos números de oro que están en cursivas corresponden a los años embolismicos.

Vamos a explicar pormenorizadamente la estructura del anterior calendario:

\*El primer año lunar del ciclo de Metón comienza con el día 24 de diciembre del año civil anterior y no se aprecia ninguna incidencia particular, pues cumple rigurosamente las normas dadas anteriormente.

\*El segundo año es embolismico, tiene por ello trece meses. Nótese que el mes que comienza el día 2 de diciembre finaliza en ese mismo mes, que ya tiene una lunación, que es aquella que comienza el 3 de noviembre. Por tanto, la lunación que se inicia el 2 de diciembre es el embolismo.

\*El tercer año lunar empieza en el 1 de enero y es el comienzo natural del ciclo o día 1 del ciclo lunar. Es un año normal y al contrario de lo que aparece a primera vista, cumple todos los requisitos.

\*El quinto año del ciclo es embolismico. También en este caso el embolismo comienza y finaliza en el mismo mes, lo que permite que los demás meses civiles sigan teniendo sus lunaciones.

\*El año ocho también es embolismico y además surge una circunstancia especial. En este año la lunación que comienza en marzo no es la pascual, ya que la Luna nueva es el 6 de marzo, antes del día 8 que es la fecha más temprana en que puede comenzar la lunación pascual. Si se continua el orden normal de meses pares e impares, se encontraría que la lunación que se inicia en abril (que es la pascual) tendría 30 días, en contra de la norma; por esto tenemos que alterar el orden, para volver a recuperarlo con la lunación de julio. Se hace la elección arbitraria de tomar como el embolismo la lunación de abril. Nótese que al hacer esta elección, la lunación de abril se traslada al siguiente mes, lo mismo que ocurre con las lunaciones de los dos meses siguientes.<sup>18</sup>

\*El siguiente año abundante debería de ser el 11, sin embargo se coloca en el año 10,

---

17. El mes pascual comienza, excepto en tres ocasiones, en la lunación que empieza en marzo y finaliza en abril; como se encuentra asociado a un mes par debe tener una duración impar. Quizás aquí esté la razón de porqué los meses pascales deben tener 29 días.

18. Los computistas medievales distinguían los siguientes errores en el calendario lunisolar. El *error terminationis* era cuando las lunaciones no terminan en sus correspondientes meses civiles; se da, por ejemplo, en los meses de abril, mayo y junio del octavo año, a consecuencia de la elección de la lunación que empieza el 6 de marzo como embolismica. El *error variationis* es

siendo el mes embolismico el que comienza el 4 de diciembre. La razón de esta elección se debe a que si se siguiera el orden normal, entonces se encontraría que el mes pascual también debería ser el embolismo, algo que va contra las normas. Al actuar así, ocurre que el mes de enero del año 11 se queda sin lunación y que la lunación de febrero que debería ser impar queda par, lo mismo ocurre con la lunación de marzo.

\*En los siguientes años no hay problemas. El embolismo, que no pertenece a ningún mes civil, se coloca en un mes donde tenga lugar su inicio y finalización, sin interrumpir la normal sucesión de los meses lunares.

\*El último año del ciclo es embolismico y en él hay que colocar el salto lunar. En este año también se tiene que desplazar el mes pascual, siguiendo la misma norma que en otras ocasiones. En cuanto al salto lunar está colocado en el penúltimo mes del año lunar, igual que hacían los alejandrinos que ponían el salto lunar en el penúltimo mes de su año.<sup>19</sup> Otros computistas dejaron el salto lunar en el mismo lugar que ocupaba en el calendario alejandrino, de tal forma que el mes que se acortaba era el que comenzaba el 1 de julio.<sup>20</sup>

### Términos computistas

Durante la Edad Media se fueron desarrollando tecnicismos relacionados con el cómputo, que perseguían facilitar el manejo del calendario lunisolar eclesiástico. Estas técnicas que vamos a exponer a continuación, eran necesarias si se quería que cualquiera con escasa instrucción científica fuera capaz de calcular la Pascua por su propia cuenta.

El más básico de los parámetros computistas es el número de oro, es decir el número de orden en el ciclo de 19 años. Los alejandrinos tomaron como año primero del ciclo el del comienzo de la era de Diocleciano (29 de agosto del 284). Adaptado el calendario lunisolar al calendario juliano que comienza en enero, se tomó como año de número de oro 1 el 285 de la era cristiana. Entonces la regla para determinar el número de oro de un año de la era cristiana es dada por

$$n = Y \bmod 19 + 1 \quad (2.8)$$

donde  $Y$  representa el año de nuestra era y  $n$  es el número de oro de dicho año.

Un término equivalente al número de oro es el número del ciclo lunar, que también indica el orden del año en el ciclo de 19 años, pero tomando como partida el supuesto año de la creación del mundo. Existe una diferencia constante de tres años con el número de oro, de tal forma que el ciclo lunar 1 corresponde al número de oro tres.<sup>21</sup>

Otro de los conceptos más utilizados en los cálculos computistas es la epacta. Se

---

cuando un mes que debe tener lunación par la tiene impar y viceversa; se da con la lunación de febrero del año 11, que tiene 30 días en vez de los 29 que le debía de corresponder por ser mes civil par. Y el *error vicissitudinis* que es la sucesión de varias lunaciones de un mismo número de días, que ocurre en los meses de octubre, noviembre y diciembre del decimonoveno año, que tienen los tres 29 días.

19. El comienzo del año alejandrino, al que estaba referido el calendario lunisolar, coincide en los años normales con el día 29 de agosto, excepto el año anterior al bisiesto juliano, en que la coincidencia es con el 30 de agosto.

20. Es igualmente posible establecer el calendario lunisolar eclesiástico en función del momento de las Lunas llenas y no de las nuevas. Este fue el método que propuso el profesor francés Meliton Capucin.

21. La regla de Beda para hallar el año del ciclo lunar consiste en restarle dos al año de nuestra era



manejaron dos epactas diferentes, una de ellas está referida al 22 de marzo (día llamado *sede epactorum*) y es definida como la edad de la Luna en ese día, tomando como día I el de la Luna nueva e identificando el día XXX con el 0 ó \*.<sup>22</sup>

La otra epacta es la que podemos llama juliana y está referida al primero de enero. Queda definida como la edad de la Luna el 1 de enero disminuida en una unidad.<sup>23</sup> Es decir, que si la epacta juliana de un año es 8, la edad de la Luna al comienzo del año es 9. La epacta de un año se obtiene sumándole 11 a la epacta del año anterior y restándole 30 si excede a esa cantidad. El salto lunar altera esta regla, pues a la epacta del año 19 hay que añadirle 12 para obtener la del año siguiente.<sup>24</sup> Una fórmula para calcular la epacta juliana de un año de número de oro  $n$  es

$$\varepsilon = (11n - 3) \bmod 30$$

que puesta en función del año queda

$$\varepsilon = [11(Y \bmod 19) + 8] \bmod 30.$$

Para poder determinar el día semanal o feria de un día cualquiera se hace uso de la letra dominical. A cada día del año se le da consecutivamente una de las siete letras de la A a la G, empezando en el primero de enero. La letra dominical del año será la letra que tenga el primer domingo de ese año. Todos los domingos sucesivos del mismo año tendrán la misma letra dominical. Los años bisiestos tienen dos letras dominicales, la primera vale hasta el 24 de febrero y la segunda para el resto del año. Podemos asociar a cada letra dominical un número, así a la A le daremos el valor 1, a la B el 2 y así sucesivamente.

Como cada año normal tiene una duración de 52 semanas enteras más un día, el número dominical del siguiente año habrá retrocedido en 1 respecto a la del año anterior. En el caso de que el año sea bisiesto se saltarán dos números hacia atrás. Los saltos que ha experimentado el número dominical desde el comienzo de nuestra era es

$$R = Y + \text{int}\left(\frac{Y}{4}\right) \quad (3.8)$$

donde  $Y$  representa el año. Entonces el número dominical lo podemos poner como

$$\lambda = 7 - (R + a) \bmod 7 \quad (4.8)$$

donde  $a$  es una constante de ajuste, que se puede calcular teniendo presente que en el

y luego calcular el resto de su división entre 19.

22. El primer año del ciclo lunisolar es aquel que tiene de epacta alejandrina 0 ó \*.

23. En la bibliografía es corriente encontrar definida la epacta como la edad de la Luna al comienzo del año. Esta definición es incorrecta. En el calendario lunisolar juliano la edad de la Luna el 1 de enero es un día superior a la edad del 31 de diciembre, pero en el calendario lunisolar gregoriano esta circunstancia no se da siempre, por eso hemos dado la definición del texto, que nos servirá para ambos calendarios. Nótese también que la epacta 30 no puede existir, ya que entonces la edad de la Luna el 1 de enero tendría que ser XXXI días, lo que no está permitido.

24. Para que esta regla que da el incremento de las epactas de cada año no se altere, es necesario que el salto lunar se coloque en el último año del ciclo. Téngase en cuenta que si el embolismo tuviera 29 días en vez de 30 no sería de aplicación esta simple regla.

año 1 el número dominical fue el 2; entonces  $a$  tiene que ser 4, quedando la fórmula como

$$\lambda = 7 - \left[ Y + \text{int} \left( \frac{Y}{4} \right) + 4 \right] \text{ mod } 7, \tag{5.8}$$

que en el caso de los años bisiestos nos da el segundo número dominical, que es el que interesa para determinar la Pascua.

Con una finalidad similar a la de la letra dominical se utilizó el concurrente o epacta solar, que se define como los días transcurridos desde el último domingo del año anterior, hasta el primer día del presente año, sin contar los días extremos. El concurrente puede tener siete valores diferentes y está asociado a las letras dominicales, de tal forma que a la letra A le corresponde el concurrente 6, a la B el 5 y así sucesivamente. El concurrente también se puede definir respecto al 24 de marzo (día denominado *locus concurrentium*), en este caso coincide con su feria o día semanal.<sup>25</sup> Al igual que ocurre con las letras dominicales, también existen dos concurrentes para los años bisiestos, el primero válido hasta el día bisiesto y el segundo para el resto del año.

Existen siete clases de años diferenciados entre sí por el día de la semana en que empieza el 1 de enero, pero al haber dos tipos de años –bisiestos y normales– encontramos 28 (= 7×4) años diferentes según la distribución semanal de sus días. A esta agrupación de años se le llama ciclo solar y hace corresponder a cada año un número del 1 al 28. Transcurrido el ciclo se vuelven a repetir en el mismo orden las ferias o días semanales de cada uno de los días del año. Arbitrariamente se eligió como primer

Meses	Regular solar	Regular lunar 1-enero	Regular lunar 22-marzo
Enero	1	1	9
Febrero	4	2	10
Marzo	4	1	9
Abril	7	2	10
Mayo	2	3	11
Junio	5	4	12
Julio	7	5	13
Agosto	3	6	14
Septbre	6	8	16
Octbre	1	8	16
Novbre	4	10	18
Dicbre	6	10	18

Tabla 4.8.- Los regulares.

25. La elección de este día hay que interpretarla por encontrarse al comienzo de las fechas pascuales, o quizás por ser el día 30 del mes de Mechir del calendario alejandrino.

año del ciclo al que le corresponde la letra dominical GF –un año bisiesto que comienza por sábado–. Si llamamos  $s$  al número del ciclo solar, se cumple

$$s = (Y + 8) \bmod 28 + 1$$

siendo  $Y$  el año.

La indicción romana es un periodo, quizás heredada de Egipto, y que conforma otro de los términos computistas. Su duración es de 15 años y se toma el primer año de nuestra era con indicción 4, entonces la indicción de cualquier año vendrá dada por

$$i = (Y + 2) \bmod 15 + 1.$$

Se conocen como regulares una serie de números fijos que nos permiten hacer diversas determinaciones calendaristas. Con el nombre de regular solar (también conocido como mensual o ferial) son conocidos unos números asociados a cada uno de los meses y que se utilizan para conocer el día semanal de una fecha cualquiera.<sup>26</sup>

Para ello sumamos al concurrente del año el regular y el día del mes, restándole tantas veces como sea posible 7. Por ejemplo, vamos a averiguar el día semanal del 15 de agosto del año 1523. Este año tiene por letra dominical D, a la que le corresponde el concurrente 3. Como el regular solar de agosto es 3, entonces el día semanal buscado será  $3 + 3 + 15 = 21$ , que queda reducido a  $7 (= 21 - 7 - 7)$ , es decir, sábado.

Los regulares lunares son unos números ligados a cada mes y que nos permiten determinar la edad de la Luna un día cualquiera.<sup>27</sup> Tenemos que distinguir dos regulares lunares, uno de ellos relacionado al primero de enero y el otro al 22 de marzo. Para determinar la edad de la Luna de un día cualquiera se suma la epacta del año con el regular lunar del mes y con los días transcurridos del mes sin contar el primero, restándole 30 si fuera necesario. Por ejemplo, para hallar la edad de la Luna el 15 de agosto del año 1523 partimos de que su número de oro es 4, al que le corresponde una epacta 11 –referida al 1 de enero–, que sumamos a 6 que es el regular lunar de agosto y a 14, es decir  $11 + 6 + 14 = 31$ , por tanto la edad lunar es 1.

Los regulares pascales son unos números asociados con el número de oro y que sumados al concurrente del año nos da la feria del plenilunio pascual.<sup>28</sup> Por ejemplo, el año 1523 tiene de número de oro 4 y de letra dominical D, por lo que le corresponde 3 como concurrente. Como el regular pascual es 2 resulta que el día de semana del plenilunio pascual es  $3 + 2 = 5$ , es decir, jueves.

El problema principal del cómputo es hallar el día de Pascua, que se puede determinar fácilmente utilizando los parámetros definidos anteriormente. Calculemos como ejemplo la Pascua del 1523, año que le corresponde el número de oro 4; el término pascual –fecha de la Luna XIV– es el 2 de abril, siendo Pascua el domingo siguiente. El regular solar de abril es 7 y el concurrente del año es 3, por lo tanto el día semanal del 2 de abril fue  $3 + 7 + 2 = 12$ , que al quitar 7 queda 5, es decir jueves. Entonces la Pascua del año 1523 será tres días después, o sea, el 5 de abril.

26. Calculado el regular solar de enero, los demás regulares se hallan sumándole la duración de los meses transcurridos y hallando luego el resto de su división entre siete.

27. El regular lunar referido al 1 de enero es la edad de la Luna en los meses del año de epacta 0, que corresponde al tercer año del ciclo decimonoval.

28. El regular pascual es el resto de dividir entre 7 la diferencia que hay desde el 11 de marzo hasta el término pascual, haciendo la cuenta inclusive.

Número de oro	Ciclo lunar	Epacta egipcia	Epacta juliana	Claves móviles	Término pascual	Regular pascual
1	17	0 (*)	8	26	5-abril	5
2	18	11	19	15	25-marzo	1
3	19	22	0 (*)	34	13-abril	6
4	1	3	11	23	2-abril	2
5	2	14	22	12	22-marzo	5
6	3	25	3	31	10-abril	3
7	4	6	14	20	30-marzo	6
8	5	17	25	39	18-abril	4
9	6	28	6	28	7-abril	7
10	7	9	17	17	27-marzo	3
11	8	20	28	36	15-abril	1
12	9	1	9	25	4-abril	4
13	10	12	20	14	24-marzo	7
14	11	23	1	33	12-abril	5
15	12	4	12	22	1-abril	1
16	13	15	23	11	21-marzo	4
17	14	26	4	30	9-abril	2
18	15	7	15	18	29-marzo	5
19	16	18	26	38	17-abril	3

Tabla 5.8.- Términos computistas.

Podemos también abordar el problema de encontrar el domingo de Pascua mediante el regular pascual. En el ejemplo del año de 1523 ya habíamos encontrado mediante el regular pascual y el concurrente que la Luna llena pascual o término pascual, que es el 2 de abril, fue un jueves y la Pascua tres días después, es decir el 5 de abril.

Las claves móviles son una serie de números fijos relacionados con el número áureo, que nos sirven para conocer determinadas fiestas ligadas con la Pascua.<sup>29</sup> Para usar las claves móviles se necesita conocer el término de las fiestas, que son unas fechas asociadas a cada una de las fiestas móviles. Así el 28 de enero corresponde al primer domingo de Cuaresma, el 11 de marzo a la Pascua y el 28 de abril a Pentecostés. Por ejemplo, para el año 1523, que tuvo de número áureo 4, le corresponde la clave 23. Al añadirle inclusivamente al 11 de marzo 23 días, encontramos el término pascual, es decir el 2 de abril, siendo Pascua el domingo siguiente. Para averiguar la fecha de Pentecostés empezamos a contar 23 días inclusivamente desde el 28 de abril y encontramos el 20 de mayo, Pentecostés fue el domingo posterior. Para averiguar la fecha de ese domingo podemos utilizar el concurrente o más fácilmente el calendario perpetuo, donde se encuentra que la letra dominical del 20 de mayo es la G, el domingo

29. Las claves móviles fueron conocidas como *clavis terminorum* o *regularis clavium*.

posterior será el día marcado con la D –porque esa es la letra dominical del año–, que se comprueba que es el 24 de mayo, que resulta ser el domingo de Pentecostés.

### Determinación de la Pascua juliana

Vamos a desarrollar un método analítico para la determinación del día del domingo de Pascua según establece el calendario lunisolar juliano.<sup>30</sup> Primero calculemos el día en que acontece el término pascual o día XIV de la Luna, contado a partir del 1 de marzo incluido este día. Del calendario lunisolar (tabla 3.8) se comprueba que ese día será

$$d = 44 - \varepsilon$$

donde  $\varepsilon$  es la epacta. La anterior expresión es válida para todos los años excepto para el 8, 11 y 19, en que el término pascual viene 30 días después. Entonces la fórmula debe ponerse como

$$d = 44 - \varepsilon + 30 \operatorname{int}\left(\frac{\varepsilon}{25}\right) = 44 - \varepsilon'$$

ya que en los años 8, 11 y 19 la epacta vale más de 24. Hemos introducido el término  $\varepsilon'$  para simplificar los cálculos. Si la cuenta la hacemos desde el comienzo del año haciendo la cuenta inclusive, el día de la Luna XIV será

$$31 + 28 + d = 103 - \varepsilon'$$

El domingo inmediatamente posterior al término pascual contado desde el inicio del año será el día

$$\lambda + 7m$$

siendo  $\lambda$  el número dominical del año y  $m$  un número entero, cuyo valor tiene que cumplir

$$\lambda + 7m > 103 - \varepsilon'$$

o bien

$$m = \operatorname{int}\left(\frac{103 - \lambda - \varepsilon'}{7}\right) + 1,$$

entonces los días que median entre el término pascual y el domingo siguiente son

$$\lambda + 7 \operatorname{int}\left(\frac{103 - \lambda - \varepsilon'}{7}\right) + 7 - 103 + \varepsilon',$$

y los días transcurridos desde el día 1 de marzo hasta el domingo de Pascua serán

$$P = 44 - \varepsilon' + \lambda + 7 \operatorname{int}\left(\frac{103 - \lambda - \varepsilon'}{7}\right) + 7 - 103 + \varepsilon'$$

y tras un cálculo donde hay que tener en cuenta las propiedades de la función entero descritas en el apéndice A, queda

$$P = 46 + \lambda - 7 \operatorname{int}\left(\frac{1 + \lambda + \varepsilon'}{7}\right)$$

---

30. El siguiente razonamiento está basado en las ideas expuestas en el *Annuaire pour l'an 1959*, Le Bureau des Longitudes, 1958, pp. 107-162.

Nótese que en los años 8, 11 y 19 del ciclo, el último de los sumandos es nulo. Expresemos, por último, la anterior expresión con la función módulo

$$P = 45 - \varepsilon + 30 \operatorname{int}\left(\frac{\varepsilon}{25}\right) + \left[8 + \lambda + \varepsilon - 30 \operatorname{int}\left(\frac{\varepsilon}{25}\right)\right] \bmod 7 \quad (6.8)$$

al último paréntesis le hemos añadido 7 para evitar que pueda salir un valor negativo.<sup>31</sup> El domingo de Pascua, según el calendario lunisolar juliano, será el mes  $M$  y el día  $D$  dado por las siguientes fórmulas

$$M = 3 + \operatorname{int}\left(\frac{P}{32}\right); \quad D = 1 + (P-1) \bmod 31.$$

Hay que señalar que no en todos los días comprendidos entre el 22 de marzo y el 25 de abril cae la Pascua con igual probabilidad. Esos días extremos son los menos probables, ya que acontecen en el 0.75 % de las ocasiones. Los días en que es más frecuente que venga la Pascua tienen una probabilidad de 3.76 % de las veces, circunstancia que ocurre en diez días.<sup>32</sup>

### Error en el calendario lunisolar juliano

La lunación media astronómica o periodo sinódico es dado por

$$m_s = p' - q'T = 29.530\,58781 - 3.6398 \cdot 10^{-7} T$$

expresada en la escala UT, donde  $T$  son siglos julianos contados desde el año 2000. Este valor difiere del valor de la lunación promedio del calendario lunisolar juliano (1.8), de aquí que aparezca una diferencia que se va acumulando, distanciándose por ello las lunaciones eclesiásticas de las astronómicas.

Para estudiar el error que se comete al hacer uso del calendario eclesiástico, vamos a expresar el periodo sinódico en función del número de ciclos de 19 años transcurridos desde un año de referencia  $Y_0$ . Para ello expresamos  $T$  en función de  $c$ , número de ciclos transcurridos desde el año  $Y_0$

$$T = 0.19c - 20 + 0.01Y_0,$$

entonces el periodo sinódico será

$$m_s = [p' + (20 - 0.01Y_0)q'] - 0.19q'c.$$

El error cometido al cabo de  $N$  periodos de 19 años, contados desde el año  $Y_0$  vendrá

31. Ahora podemos comprobar porqué el intervalo de 95 años representa un pseudociclo pascual en el calendario juliano. Como 95 es un múltiplo de 19, todos los años separados por ese intervalo tendrán el mismo número de oro y la misma epacta. Si en esos 95 años hubiese 24 bisiestos, entonces el paréntesis de (6.8) aumentaría en ese periodo en  $95 + 24 = 119$ , que es múltiplo de 7, lo que significa que los años separados por esos 95 años tendrían el mismo número dominical y por (6.8) tendrían el mismo valor de  $P$ , o sea, la Pascua tendría lugar en el mismo día. Pero si en el pseudociclo sólo se computasen 23 bisiestos, la anterior identidad no se daría. De aquí que en el periodo de 95 años, sólo los tres cuartos de las Pascuas coinciden. En concreto, cuando el año es bisiesto su fecha de la Pascua no coincidirá con la acontecida 95 años antes.

32. Una tabla con las fechas de la Pascua desde el año 325 hasta el 2150 se encuentra en Agustí y Casanovas J., Voltes Bou, P., *Manual de Cronología Española y Universal*, Consejo de Investigaciones Científicas, Madrid, 1952, pp. 171-207.

dado por

$$E(Y_0, N) = 235 \sum_{c=0}^{c=N} \{ [p' + (20 - 0.01Y_0)q' - L_m] - 0.19q'c \},$$

que al simplificar queda

$$\begin{aligned} E(Y_0, N) &= 235N [p' + (20 - 0.01Y_0)q' - L_m] - 22.325q'N(1 + N) - \\ &= -8.554 \cdot 10^{-7} Y_0 N - 0.0601612N - 8.12585 \cdot 10^{-6} N^2 \end{aligned}$$

expresado en días. Este error es lo que, en  $N$  ciclos contados desde el año  $Y_0$ , se ha incrementado la diferencia entre la Luna nueva astronómica y la eclesiástica. Desde el año 325 hasta el momento de la reforma, la fórmula anterior nos da un error acumulado de 3 días y 23 horas, lo que significa en promedio 1 día cada 311.6 años,

Por tiempo de la reforma gregoriana la Luna nueva eclesiástica se producía en promedio cuatro días después de la astronómica (calculada en la longitud de Roma). Lo que significa que por tiempo del concilio de Nicea el calendario eclesiástico juliano coincidía aceptablemente bien con la observación astronómica.<sup>33</sup>

### La reforma gregoriana del calendario lunisolar

La reforma gregoriana del calendario lunisolar exigió “restaurar” el calendario, o sea, volver a poner las fechas de las Lunas nuevas eclesiásticas en su día correcto. La comisión encargada de la reforma calendarista decidió quitar sólo tres días a la Luna nueva del calendario, con la idea de que en el futuro aconteciera en promedio un día después de la astronómica.<sup>34</sup>

Por otra parte, al corregir el calendario solar se eliminaron diez días. De la combinación de ambas correcciones resultó quitar siete días a la epacta. Por ejemplo, el año 1582 comenzó teniendo epacta 3, como corresponde en el calendario juliano a un año de número de oro 6. Al hacer la reforma gregoriana se le quitó siete unidades a la epacta, es decir, la epacta de ese año pasó a ser la 26 ( $= 3 - 7 + 30$ ).

Para evitar que en lo sucesivo hubiera desplazamientos de las Lunas eclesiásticas respecto a las astronómicas, Lilio ideó sus tablas de epactas que, en esencia, se basan en quitar ocho días a la Luna cada 2,500 años. Esta ecuación lunar consiste en quitar un día a la Luna (aumentando por ello en una unidad la epacta) cada 300 años, a comenzar en el 1800, y siguiendo en los años 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900 y, para el octavo salto de la Luna, se dejan transcurrir 400 años, es decir será a comienzos del año

33. Se encuentra que en el año 325 la diferencia entre las Lunas nuevas astronómicas y las del calendario era 1<sup>h</sup> aproximadamente y en el año 1560 la diferencia era de -3<sup>d</sup>22<sup>h</sup>, lo que significa que en ese periodo el calendario se apartó 3<sup>d</sup>23<sup>h</sup> de la Luna astronómica, de acuerdo con la fórmula anterior. El cálculo ha sido realizado promediando a través de ciclos de 19 años, usando el meridiano de Greenwich, expresando el resultado en tiempo universal y considerando que el nuevo día comienza a las 18 horas.

34. La razón de esta decisión es desconocida. Puede ser que la comisión de la reforma quisiera hacer coincidente las Lunas del calendario con la observación del primer creciente o bien que quisieran que la Luna eclesiástica viniera más tarde en el calendario para así tener la seguridad de que la Pascua llegaría después de la Luna llena.

4300.<sup>35</sup>

La última parte de la reforma consistió en el establecimiento de un nuevo calendario lunisolar, que está basado en la epacta en vez de en el número de oro como ocurría con el calendario juliano. El nuevo calendario está completamente romanizado, en el sentido de que el inicio de todos sus parámetros se refieren a enero. El nuevo calendario perpetuo es parecido al antiguo, excepto que ahora a cada día se le asocia una epacta y no un número de oro. Es necesario, por tanto, contar con una tabla auxiliar que nos de la epacta del año, en la que se utiliza como entrada el número de oro que se calcula como en el calendario juliano. Esta tabla comienza en el año 1700 y finaliza en el 8699, por lo que existe un periodo de 7,000 años, al cabo de los cuales se vuelven a repetir las epactas en la misma secuencia. En efecto, al cabo de esos 7,000 años hay 53 correcciones solares (3 cada 400 años) y 23 correcciones lunares (8 cada 2,500 años); es decir, una variación neta correspondiente a 30 (= 53 – 23) desplazamientos de la epacta, igual número de las que existen, por lo que al transcurrir los 7,000 años se vuelve al comienzo de la línea de epactas.<sup>36</sup>

En el calendario perpetuo las Lunas nuevas vendrán en aquellos días que tengan asociados la epacta del año. La Luna nueva pascual es la que viene inmediatamente después del 7 de marzo. La Luna llena pascual será catorce días después (contando inclusive), que puede venir, como más pronto el 21 de marzo y como más tarde el 5 de abril. Como ejemplo de lo que hemos dicho vamos a calcular la Luna llena pascual del año 2020. Su número de oro es 7, o sea, que su epacta es 5, lo que significa que la edad de la Luna el 1 de enero del año 2020 es de 6 días, o sea, el valor de la epacta más uno. En el calendario perpetuo podemos encontrar que la primera Luna nueva del año es el 26 de enero y la Luna nueva pascual es el 26 de marzo; sumándole trece unidades encontramos que la Luna llena pascual será el 8 de abril.

En el calendario perpetuo a cada día se le asocia una epacta. Si el mes lunar tiene 30 días, a cada uno de ellos le corresponderá cada una de las 30 epactas. El problema aparece en las lunaciones de 29 días, en este caso –que se da seis veces a lo largo del calendario perpetuo–, es necesario que haya un día al que le correspondan dos epactas a la vez. Para saber qué dos epactas hay que agrupar ocasionalmente en el calendario perpetuo, es necesario tener presente que se quiere que los meses pascuales sean de 29 días. Esta condición limita las posibilidades; los reformadores optaron por asociar las epactas 24 y 25.

Un nuevo problema se origina con esta elección. En las líneas de epactas donde

---

35. Se supone que el ciclo de la ecuación lunar comienza con el año 2100, así que la corrección del año 1800 hay que entenderla como la última del ciclo anterior. A consecuencia de la ecuación lunar cada ciclo de 19 años disminuye en promedio en  $0.0608 = 19 \times 8 / 2500$  días. Por ello la duración de la lunación promedio en el calendario gregoriano es la lunación media juliana disminuida en la anterior cantidad:  $29^d 12^h 44^m 3.18^s$ , lo que representa 0.39 segundos más que la lunación promedio astronómica en el año 2000.

36. Woodman C., “Easter and the ecclesiastical calendar”, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 17 (1923) 141-155, se describen las técnicas para conocer la Pascua según las reglas gregorianas. Véase también Campbell J. W., “The determination of the date of Easter”, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 11 (1917) 367-375 y Allen R. K., “When is Easter?”, *Astronomical Society of the Pacific* 5 (1949) 321-327.



aparecen la 24 y la 25 (por ejemplo en la segunda línea de la tabla de epactas) ocurre que el ciclo lunar se cierra antes de concluir los 19 años del ciclo de Metón. Es decir, que durante el ciclo la Luna nueva se repite en un mismo día, lo que da a entender que en ese día el ciclo lunar se cierra y, esto, sin haber completado los 19 años. Para evitar esta situación (que se da en ocho líneas de epactas) la comisión creó una nueva epacta, la

Centenas del año			Tabla de epactas																		
			Números de oro																		
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
17	18		*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18
19	20	21	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6	17
22	24		28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16
23	25		27	8	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15
26	27	28	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14
29	30		25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13
31	32	33	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12
34	36		23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11
35	37		22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10
38	39	40	21	2	13	24	5	1	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6	17	28	9
41			20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8
2	43	44	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7
45	46		18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6
47	43	49	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5
50	52		16	27	8	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4
51	53		15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3
54	55	56	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2
57	58		13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6	17	28	9	20	1
59	60	61	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*
62	64		11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29
63	65		10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6	17	28
66	68		9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27
67	68		8	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26
70	71	72	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'
73	74		6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24
75	76	77	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23
78	80		4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22
79	81		3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21
82	83	84	2	13	24	5	16	27	8	19	*	11	22	3	14	25'	6	17	28	9	20
15	16	85	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27	8	19'

Tabla 6.8.- Tabla de epactas del calendario lunisolar gregoriano.

que vamos a escribir como 25', ésta hay que utilizarla en vez de la 25 cuando en la línea de epactas que corresponde al año tendrían que aparecer tanto la 24 como la 25 y se asocia con la epacta 26 en los meses lunares de 29 días. Por ejemplo, el año 2030 tiene de número de oro 17 y le corresponde la epacta 25', no la 25.<sup>37</sup>

El calendario lunisolar gregoriano sigue el ciclo de Metón de 19 años, que tiene, como ya sabemos, siete años abundantes que cuentan cada uno con un mes embolístico de 30 días. Los años que son embolísticos son aquellos que tienen de epactas: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 25', 26, 27, 28 y 29. Al igual que ocurría en el antiguo calendario lunisolar, es preciso quitar un día a la Luna, dicho de otro modo, es necesario hacer el salto lunar. En el calendario gregoriano el salto lunar siempre se hace en el año de número de oro 19 y en el mes lunar que comienza en diciembre (que normalmente tiene 30 días) no obstante, cuando hay que aplicar el salto lunar se reduce a 29 días.

Tenemos que señalar una última excepción en el calendario perpetuo gregoriano. Resulta que cuando el año tiene 19 tanto de epacta como de número de oro, se debe hacer uso a final del año de otra epacta, la que representamos por 19'. En efecto, en un año normal en el cual no se da el salto lunar pero que tuviera de epacta 19, la última lunación del año comenzaría el 2 de diciembre y la siguiente Luna nueva sería el 1 de enero que corresponde a un año de epacta \* (= 19 + 11). Sin embargo, cuando el año también tiene como número de oro 19, es necesario hacer el salto lunar en la lunación que comienza en diciembre. En este caso, la lunación en cuestión sigue comenzando el día 2 de diciembre, pero la siguiente lunación comenzará el 31 de diciembre al haberle quitado un día a la Luna, en ese día se encuentra colocada la epacta 19' indicando, con ello, que allí comienza la nueva Luna, que finalizará el 29 de enero del año siguiente por ser un mes lunar de 30 días. El último año en que ocurrió esta extraña coincidencia fue el 1690 y habrá que esperar hasta el 8511 para que vuelva a utilizarse la epacta 19'.

Con todo lo anteriormente dicho es fácil averiguar la Pascua de cualquier año. El primer paso consiste en hallar el número de oro del año y su letra dominical; posteriormente se pasa a determinar la epacta que le corresponde. Se recurre, por último, al calendario perpetuo donde se localiza el día de la Luna nueva pascual, que es aquella

**Tabla 7.8.- En las dos páginas siguientes se representa el calendario lunisolar gregoriano.**

---

37. Se cometería un error si se identificasen dos epactas mayores que 25. Por ejemplo, si el agrupamiento lo hubiésemos hecho con las epactas 29 y 28 hubiera ocurrido que los años de epactas 28, 27, 26, 25 y 24 tendrían lunaciones pascuales de 30 días, lo que iría en contra de la tradición. Si las epactas a identificar hubieran sido menores que 24, por ejemplo, la 20 y 21, los años de epactas 22 y 23 hubiesen tenido lunaciones pascuales de 30 días. Única y exclusivamente en el caso de identificar las epactas 24 y 23, ningún año hubiese tenido lunación pascual par, pero en este caso, se daría la extraña circunstancia de que los años de epacta 23 comenzarían su lunación pascual en marzo y los años de epacta 24 la comenzarían en abril, a pesar de ser idénticas. Clavius escribió al respecto: "Fue preferible elegir las dos epactas, 25 y 24, para el ajuste lunar porque, de esta forma, las lunaciones están de acuerdo al ciclo de 30 epactas, y particularmente y más importante, las 30 lunaciones pascuales coinciden más adecuadamente con las lunaciones de los números de oro del Concilio de Nicea, cuyos decretos y decisiones hemos retenido, en tanto en cuanto fue posible y razonable." Pero esto no se pudo cumplir perfectamente, ya que las Lunas pascuales de los años de epactas 24 y 25' tienen 30 días.

Días	Enero		Febrero		Marzo		Abril		Mayo		Junio	
1	*	A	29	D	*	D	29	G	28	B	27	E
2	29	B	28	E	29	E	28	A	27	C	25 <sup>o</sup> -26	F
3	28	C	27	F	28	F	27	B	26	D	25-24	G
4	27	D	25 <sup>o</sup> -26	G	27	G	25 <sup>o</sup> -26	C	25 <sup>o</sup> -25	E	23	A
5	26	E	25-24	A	26	A	25-24	D	24	F	22	B
6	25 <sup>o</sup> -25	F	23	B	25 <sup>o</sup> -25	B	23	E	23	G	21	C
7	24	G	22	C	24	C	22	F	22	A	20	D
8	23	A	21	D	23	D	21	G	21	B	19	E
9	22	B	20	E	22	E	20	A	20	C	18	F
10	21	C	19	F	21	F	19	B	19	D	17	G
11	20	D	18	G	20	G	18	C	18	E	16	A
12	19	E	17	A	19	A	17	D	17	F	15	B
13	18	F	16	B	18	B	16	E	16	G	14	C
14	17	G	15	C	17	C	15	F	15	A	13	D
15	16	A	14	D	16	D	14	G	14	B	12	E
16	15	B	13	E	15	E	13	A	13	C	11	F
17	14	C	12	F	14	F	12	B	12	D	10	G
18	13	D	11	G	13	G	11	C	11	E	9	A
19	12		10	A	12	A	10	D	10	F	8	B
20	11	F	9	B	11	B	9	E	9	G	7	C
21	10	G	8	C	1	C	8	F	8	A	6	D
22	9	A	7	D	9	D	7	G	7	B	5	E
23	8	B	6	E	8	E	6	A	6	C	4	F
24	7	C	5	F	7	F	5	B	5	D	3	G
25	6	D	4	G	6	G	4	C	4	E	2	A
26	5	E	3	A	5	A	3	D	3	F	1	B
27	4	F	2	B	4	B	2	E	2	G	*	C
28	3	G	1	C	3	C	1	F	1	A	29	D
29	2	A			2	D	*	G	*	B	28	E
30	1	B			1	E	29	A	29	C	27	F
31	*	C			*	F			28	D		

Días	Julio		Agosto		Septiembre		Octubre		Noviembre		Diciembre	
1	26	G	25-24	C	23	F	22	A	21	D	20	F
2	25 <sup>o</sup> -25	A	23	D	22	G	21	B	20	E	19	G
3	24	B	22	E	21	A	20	C	19	F	18	A
4	23	C	1	F	20	B	19	D	18	G	17	B
5	2	D	20	G	19	C	18	E	17	A	16	C
6	21	E	19	A	18	D	17	F	16	B	15	D
7	20	F	18	B	17	E	16	G	15	C	14	E
8	19	G	17	C	16	F	15	A	14	D	13	F
9	18	A	16	D	15	G	14	B	13	E	12	G
10	17	B	15	E	14	A	13	C	12	F	11	A
11	16	C	14	F	13	B	12	D	11	G	10	B
12	15	D	13	G	12	C	11	E	10	A	9	C
13	14	E	12	A	11	D	10	F	9	B	8	D
14	13	F	11	B	10	E	9	G	8	C	7	E
15	12	G	10	C	9	F	8	A	7	D	6	F
16	11	A	9	D	8	G	7	B	6	E	5	G
17	10	B	8	E	7	A	6	C	5	F	4	A
18	9	C	7	F	6	B	5	D	4	G	3	B
19	8	D	6	G	5	C	4	E	3	A	2	C
20	7	E	5	A	4	D	3	F	2	B	1	D
21	6	F	4	B	3	E	2	G	1	C	*	E
22	5	G	3	C	2	F	1	A	*	D	29	F
23	4	A	2	D	1	G	*	B	29	E	28	G
24	3	B	1	E	*	A	29	C	28	F	27	A
25	2	C	*	F	29	B	28	D	27	G	26	B
26	1	D	29	G	28	C	27	E	25 <sup>o</sup> -26	A	25	C
27	*	E	28	A	27	D	26	F	25-24	B	24	D
28	29	F	27	B	25 <sup>o</sup> -26	E	25 <sup>o</sup> -25	G	23	C	23	E
29	28	G	26	C	25-24	F	24	A	22	D	22	F
30	27	A	25 <sup>o</sup> -25	D	23	G	23	B	21	E	21	G
31	26	B	24	E			22				19 <sup>o</sup> -20	A

que tiene la epacta del año y es inmediatamente posterior al 7 de marzo. El plenilunio correspondiente será trece días después y la Pascua el domingo que le sigue inmediatamente. Ese domingo será el día que tenga en el calendario perpetuo la letra dominical del año. Como ejemplo hallemos la Pascua para el año 2020. Su número de oro es 7 y la letra dominical es la ED, por tener de número dominical 4 y ser bisiesto; correspondiendo la letra D para después del mes de febrero. La epacta es la 5, es decir la Luna pascual comenzará el 26 de marzo y se hará llena el 8 de abril. El domingo de Pascua será el siguiente día que tenga de letra D que, según nos dice el calendario perpetuo, es el 12 de abril.

El calendario lunisolar gregoriano hace repetir las fechas de las Pascuas en el mismo orden cada 5,700,000 años; en oposición a los 532 años del ciclo de victoriano que era válido para el calendario juliano. El periodo de repetición de las Pascuas en el mismo orden es el resultado de hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes factores: los 19 años que dura el ciclo de Metón, los 400 del ciclo de intercalación de los bisiestos, los 4,000 años que tarda la regla gregoriana en añadir (por las correcciones solares) un mes de 30 días y 9,375 años ( $= 2500 \times 30/8$ ), tiempo que tarda la ecuación lunar en acumular 30 días.

Las Pascuas obtenidas con el calendario gregoriano no se dan con igual probabilidad en los 35 días durante los cuales puede acontecer. El día que con más frecuencia cae la Pascua es el 19 de abril (el 3.87% del total) y, el día en que es más infrecuente la Pascua es el 22 de marzo, lo que se da en el 0.48% de las ocasiones.<sup>38</sup>

### Determinación de la Pascua gregoriana

El número dominical de un año en el calendario gregoriano se puede expresar de forma equivalente a como se hizo en el calendario juliano.<sup>39</sup> El número de retrocesos que ha experimentando el número dominical desde el comienzo de nuestra era en el calendario gregoriano es

$$R' = Y + \text{int}\left(\frac{Y}{4}\right) - \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) \quad (7.8)$$

donde los dos últimos sumandos nos dan la regla gregoriana de intercalación de los bisiestos.<sup>40</sup> El número dominical del año vendrá dado por (4.8), siendo  $a$  un parámetro de ajuste que vale  $-1$

$$L = 7 - (R' - 1) \bmod 7 = 7 - \left[ Y + \text{int}\left(\frac{Y}{4}\right) - \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) - 1 \right] \bmod 7, \quad (8.8)$$

38. Parisot J. P., Suagher F., *Calendriers et chronologie*, Masson, Paris, 1996, pp. 97-98.

39. El cómputo gregoriano se encuentra en Archer, P., *The christian calendar and the gregorian reform*, Fordham University Press, New York, 1941; Alexander Schocken W., *The calculated confusion of calendars*, Vantage Press, New York, 1976 y Richards E. G., *Mapping Time*, Oxford University Press, New York, 1998, pp. 299-378; Boloix Carlos-Roca, R., "El calendario eclesiástico", *Boletín ROA* 6 (2001) 1-75; una excelente referencia, aunque con muchos errores tipográficos, se encuentra en la voz "Calendario", *Enciclopedia Universal Ilustrada Europea-Americana*, Espasa Calpe, Madrid, 1911, vol. 10, pp. 707-742.

40. Comparando se encuentra que la diferencia de días entre el calendario gregoriano y el juliano desde el tiempo de la reforma viene dado por

nuevamente esta fórmula nos da el segundo número dominical en los años bisiestos.<sup>41</sup>

Como a comienzos de la reforma la diferencia entre las epactas gregoriana y juliana era 23 (3 la epacta juliana y 26 la gregoriana), debe de cumplirse la relación

$$e = (\varepsilon + 23 - E_s + E_L) \bmod 30$$

donde  $\varepsilon$  es la epacta juliana,  $E_s$  la ecuación solar (que hace disminuir en una la epacta) y  $E_L$  la ecuación lunar (que hace aumentar en una la epacta).

La ecuación solar aumenta una unidad cada año centenario no divisible entre 400 y fue nula en el momento de la reforma, por tanto

$$E_s = \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) - \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) - 12.$$

La expresión de la ecuación lunar se puede obtener a partir de una relación de congruencia, siempre y cuando se establezca la relación entre  $E_L + 5$  y  $\text{int}(Y/4)$ , obteniéndose

$$E_L = -5 + \text{int}\left[\frac{8 \text{int}(Y/100) + 13}{25}\right].$$

Entonces la epacta gregoriana se podrá obtener por la ecuación

$$e = \left\{ 11(Y \bmod 19) + 8 - \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) + \text{int}\left[\frac{8 \text{int}(Y/100) + 13}{25}\right] \right\} \bmod 3,$$

para evitar que salga un resultado negativo añadimos al corchete  $30 \text{int}(Y/100)$ , lo que no alterará el resultado, así

$$e = \left\{ 11(Y \bmod 19) + 8 - 29 \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) + \text{int}\left[\frac{8 \text{int}(Y/100) + 13}{25}\right] \right\} \bmod 30,$$

Debemos de corregir la anterior ecuación para tener en cuenta que si la epacta es 25 y el número de oro es mayor que 11, entonces debe de usarse como epacta la 25'. Para propósito de obtener el día de Pascua hay que identificar las epactas 24 con la 25 y la 25' con la 26. En efecto, si la epacta fuese 24 se toma como si fuera 25, y si la epacta es 25' se toma como si fuese 26; con ello no hacemos más que tener presente la identificación que el calendario lunisolar hace de dichas epactas. Así la epacta  $E$  que vamos a usar en lo que sigue, habrá que ponerla como

---


$$d = \text{int}\left(\frac{Y}{100}\right) - \text{int}\left(\frac{Y}{400}\right) - 2$$

donde el número 2 nos permite poner  $d$  igual a 10 en el momento de la reforma. Con este parámetro se puede relacionar los números dominicales julianos  $\lambda$  y gregorianos  $L$

$$L = (\lambda + d - 1) \bmod 7.$$

41. El ciclo de letras dominicales se renueva en el calendario gregoriano cada 400 años. En efecto, al cabo de 400 años el paréntesis de (8.8) aumenta en 497 que es la suma de 400, 100, -4 y 1, que corresponde a un número entero de veces 7, por lo que el valor de la función módulo no variará y lo mismo ocurrirá con  $L$ .

$$E = e + \delta(e - 24) + \delta(e - 25)\varepsilon(n - 12)$$

donde el número de oro  $n$  se calcula por la ecuación (2.8).

El procedimiento para hallar la fecha de la Pascua es el mismo que el ya obtenido para hallar la Pascua en el calendario juliano. El número de días transcurridos desde el comienzo de marzo (incluido este día) hasta el día de la Luna llena pascual es

$$d = 44 - E$$

excepto para los años de epactas mayores de 23, en este caso la fórmula deberá ser readaptada a

$$d = 44 - E + 30 \operatorname{int}\left(\frac{E}{25}\right),$$

siguiendo el mismo procedimiento que antes se llega a

$$P = 45 - E + 30 \operatorname{int}\left(\frac{E}{25}\right) + \left[8 + L + E - 30 \operatorname{int}\left(\frac{E}{25}\right)\right] \bmod 7$$

que nos da los días transcurridos desde el 1 de marzo hasta la fecha del domingo de Pascua, ambos días incluidos. Entonces el mes  $M$  y el día  $D$  del domingo de Pascua se calcula mediante

$$M = 3 + \operatorname{int}\left(\frac{P}{32}\right); \quad D = 1 + (P + 1) \bmod 31.$$

Las Pascuas juliana y gregoriana coinciden en algunas ocasiones. Desde la inserción del nuevo calendario hasta el año 2000 hubo 153 coincidencias (un 37% de las ocasiones). A partir del año 2000 se registrarán 116 nuevas coincidencias, siendo la última la correspondiente al año 2698. A partir de aquí ya no se producirá coincidencia entre las Pascuas juliana y gregoriana.

### Pascuas gregorianas y astronómicas

Entendemos que la Pascua astronómica es el domingo que viene un día después de la Luna llena que acontece inmediatamente después del equinoccio astronómico de primavera. Suponiendo que el día comienza a las 0 horas, se encuentra que para el siglo XXI habrá diez ocasiones en que la Pascua gregoriana será diferente de la astronómica, siempre atrasando las Pascuas gregorianas respecto a las astronómicas.

Las diferencias son causadas en unas ocasiones porque la Luna llena viene muy poco después del equinoccio (años 2019, 2038, 2057, 2076 y 2095), por tanto la Pascua viene cuatro semanas después. En las otras ocasiones ocurre que la Luna llena está muy cerca del domingo y esto hace que la Pascua se retrase una semana (años 2045, 2049, 2069, 2089 y 2096).

# Reforma del calendario gregoriano

### Defectos del calendario gregoriano

Con la reforma gregoriana se persiguió recolocar la fecha de la Pascua, sin preocuparse de las otras imperfecciones del calendario, que por el siglo XVI no eran percibidas como problemas.

Entre los principales defectos del calendario gregoriano hallamos que los meses tienen duraciones diferentes, de 28 a 31 días. Además, no todos los meses tienen el mismo número de días de fines de semana, los hay con 8, 9 y 10. Esto ocasiona que el número de días laborables varíe de mes a mes, oscilando entre 20 y 23. El principal inconveniente es que los salarios se pagan por mensualidades iguales unas a otras, sin embargo, no se trabaja ni se produce lo mismo en cada mes. Las estadísticas mensuales de producción, meteorológicas o de sanidad son de limitada utilidad, ya que las pequeñas diferencias que existen de un mes a otro, quedarán enmascaradas por la variable longitud de los meses. Si el salario se paga semanalmente, hay meses que se cobra cuatro veces y cinco en otros meses, aunque se haya trabajado el mismo número de días.

Existe una excesiva variedad de meses en el calendario gregoriano. Hay cuatro clases de meses según su duración (de 28, 29, 30 y 31 días) y, para cada uno de ellos, existe siete tipos diferentes, según el día semanal en que comiencen, lo que suma 28 meses diferentes.

En el calendario gregoriano los cuatro trimestres tienen duraciones de 90 (ó 91 en los años bisiestos), 91, 92 y 92 días respectivamente. El primer semestre tiene 181 días (182 los años bisiestos) pero el segundo tiene 184. Estas desigualdades resultan problemáticas en ciertas actividades, especialmente en las estadísticas que se basan en esos periodos.

El día intercalar se sitúa entremedio del año y no al final como la lógica aconseja. Esto origina que el orden de los días dependa de si el año es o no bisiesto. Otro defecto es la circunstancia de que los meses comiencen con el número 1, cuando deberían de hacerlo con el 0. El día 1 debería comenzar cuando se hubiesen completado las primeras 24 horas del mes; no es lógico que cuando el calendario marca, por ejemplo, el día 11, signifique que han transcurrido 10 días.<sup>1</sup>

---

1. Hope E. R., "The arithmetical reform of the calendar. Part I", *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 57 (1963) 14-23.



Pero los principales problemas provienen de la discordancia entre fecha mensual y día semanal. Al datar un día nos enfrentamos a la necesidad de un doble cómputo, uno mensual y otro semanal. Dar información de un día exige no sólo situarlo en el mes, sino dar su ubicación en la semana, en vista del distinto peso que tienen los diversos días semanales.

Dada una fecha no se puede averiguar sin más cual es su día semanal a menos que sepamos el año. Fecha y día semanal están relacionados entre sí pero de forma tan intrincada que, a efectos prácticos, es como si no lo estuvieran.

Todos sentimos lo incómodo de la falta de correspondencia entre fecha del mes y día semanal. Esto se debe a que nuestra vida se programa tanto mensual como semanalmente. Para fijar una fecha ya sea para una reunión, un acontecimiento social o para la convocatoria de unas elecciones, es necesario recurrir a un almanaque para poder averiguar el día semanal de la fecha elegida y viceversa.

Colocar las fiestas civiles y religiosas exige que los gobiernos tengan que preparar leyes específicas todos los años. Esto ocurre por la imposibilidad de definir de manera estable los días festivos. Un día especial del año puede fijarse por su posición semanal en el mes, por ejemplo, el tercer sábado de marzo; o bien por su fecha, por ejemplo, el 15 de julio. Ya sea adoptando un criterio u otro, no se logra la perpetuidad.

Existen 14 diferentes tipos de años, siete por cada uno de los días semanales en que puede comenzar el año, multiplicado por los dos posibles clases de años según su duración (los normales y los bisiestos). Las 14 variedades de años aparecen en una sucesión que se repite cada 28 años; aunque la regla gregoriana rompe ocasionalmente este ritmo, elevando a 400 los que tienen que transcurrir para que se repita exactamente en el mismo orden los 14 años diferentes.

El comienzo del año el 1 de enero goza de la mayor antigüedad, habiendo logrado permanecer desde la antigua Roma. Si embargo, ese día no tiene significación alguna en el transcurso del movimiento anual del Sol entre las estrellas, lo que no ocurriría si el comienzo del año civil coincidiera con algún punto estacional. Las estaciones no tienen buen encaje entre los meses, no coincidiendo los trimestres con las estaciones, como debería de ocurrir en un calendario completamente solar.

Otro defecto que ni la reforma juliana ni la gregoriana abordaron es el nombre de los meses. Los primeros hacen referencia a dioses (Jano, Februus, Marte, Venus, Maya y Juno), los dos restantes son nombres de dirigentes romanos (Julio César y Augusto) y los cuatro últimos indican orden. Una nomenclatura mixta, resultado de cambios parciales registrados en el pasado. No es lo más apropiado la utilización en un calendario internacional de nombres de dioses de una antigua civilización, ni de nombres de personajes que ninguna influencia tuvieron en pueblos alejados de la zona de dominio del imperio romano. Los últimos nombres de los meses inducen a confusión porque toman como partida marzo y no enero; así septiembre que se deriva de siete es en realidad el noveno mes.

La era asociada al calendario gregoriano hace referencia al supuesto año de la concepción de Jesucristo, o sea, se encuentra ligada a una determinada creencia, lo que dificulta su utilización en lugares con otra fe religiosa. A esto se debe agregar que, al hacer referencia al año, se le suele añadir como aclaración "antes o después de Cristo", lo que hace que sea más repudiada por las religiones no cristianas.

Hemos dejado aparte los problemas que origina el método para fijar la Pascua, dado

que las medidas para hallarles solución tienen cierta independencia respecto a las que serían necesarias adoptar para resolver los problemas del calendario civil. Lo primero que llama la atención es que existan dos tipos de fiestas religiosas cristianas, aquellas que están fijadas al calendario solar (por ejemplo la Navidad) y las que lo son al calendario lunisolar, como es el caso de la Pascua.

El principal problema que produce la Pascua es su gran movilidad, dado que puede caer entre los 35 días que van del 22 de marzo al 25 de abril, es decir, que al tener en cuenta la Pascua existen 70 años diferentes (35 para los años normales y otros tantos para los años bisiestos).

Es desde el punto de vista económico donde más críticas ha recibido esta gran movilidad. En muchos países la Pascua significa el fin de los hábitos de invierno y el inicio de las costumbres de primavera. Si la Pascua es muy temprana se resienten actividades como la industria textil, dado que no se compra la ropa de primavera, esperando al verano para la compra de las prendas estivales. La industria turística también se ve afectada porque, cuando la Pascua es temprana, el tiempo invernal en ciertos países retiene a los potenciales viajeros, lo que significa que las empresas de transportes se vean afectadas teniendo que preparar horarios diferentes cada año.

Es bien conocido el efecto tan nocivo que tiene en la enseñanza la variabilidad de la Pascua, lo que hace que los trimestres escolares (al concluir el segundo trimestre académico con la Semana Santa) sean variables, provocando graves alteraciones en la marcha del curso escolar.

### Los primeros proyectos de reforma

El sacerdote italiano, profesor de filosofía y matemáticas, Marco Mastrofini es acreditado como el autor del primer proyecto prometedor de reforma del calendario gregoriano.<sup>2</sup> En 1834 propuso un calendario perpetuo, en el sentido de tener una coincidencia permanente entre la fecha del mes y el día de la semana. Para conseguir este objetivo introdujo el dispositivo de los días en blanco. El año quedaría compuesto de 52 semanas enteras, es decir 364 días. El día que hace el 365 sería colocado fuera del ciclo semanal, tomando el nombre de feria octava. El día bisiesto también sería extrasemanal; es decir, sin pertenecer a ninguna semana y debería dejarse en su lugar habitual en febrero, o bien colocarlo al final del tercer año de la tetraérida, inmediatamente después de la feria octava.

---

2. La historia general de la reforma del calendario puede verse en Achelis E., *The calendar for everybody*, Putnam, 1943 y Abbé Chauve-Bretrand, *La question de Pâques et du calendrier*, Les Oeuvres Françaises, 1936. Han sido numerosas las obras que se publicaron durante la primera mitad del siglo pasado sobre la reforma del calendario, entre otras citar: Achelis E., *Of time and the calendar*, Hermitage House, 1935; Achelis E., *The calendar for the modern age*, Nelson, 1959; E.C.M., *La reforma del calendario. Orígenes y estudio práctico de esta cuestión*, 1924; Santillana J., *El actual calendario juliano-gregoriano y su sensacional reforma en el año 1939*, 1936; Otros libros dedican capítulos a la reforma, por ejemplo Courderc P., *Le calendrier*, Presses Universitaires de France, 1948, pp. 101-114; Cotsworth M. *The evolution of calendars and how to improve them*, The Pan American Union, 1922, pp. 25-28. También se editaron obras contrarias a la reforma, por ejemplo Álvarez Martínez A., *La disparatada reforma del calendario, pretensión de los apodados científicos*, 1934.

En el proyecto de Mastrofini todos los años serían idénticos, unos a otros, y comenzarían por domingo. La Pascua quedaría semifija, pues su ocurrencia sólo podría ser los días: 26 de marzo, 2, 9, 16 y 23 de abril. Mastrofini no propuso ninguna modificación en la longitud de los meses.

Quince años después del germinal trabajo de Mastrofini, vio la luz en París el proyecto calendarista de Auguste Comte.<sup>3</sup> Proponía un calendario perpetuo, y a tal fin introdujo días en blanco al final del año; uno en los años normales y dos en los bisiestos, que serían llamados día complementario y día adicional. El año quedaría dividido en 13 meses de 28 días cada uno (es decir, cuatro semanas exactas) que se irían reproduciendo idénticamente todos los años. El nuevo decimotercer mes sería colocado a final de año y llamado Final. Todos los meses comenzarían en lunes, de tal forma que los 1, 8, 15 y 22 de cada mes serían lunes, los 2, 9, 16 y 23 serían martes y así sucesivamente.

En el año 1884 el abad francés Croze (capellán en París) se dirigió a Roma para exponer su preocupación sobre la fijación de la fecha de la Pascua. Allí se le respondió que antes de abordar el problema de la Pascua, los astrónomos debían de estudiar el calendario civil, por lo que se le aconsejó que se dirigiera, a tal fin, al Instituto de Francia. Croze se encontró allí con el eminente astrónomo francés Camille Flammarion, al que entregó los 5,000 francos de un donante anónimo para preparar la nueva reforma del calendario.

Flammarion convocó en la revista *L'Astronomie* de la Sociedad Astronómica de Francia un concurso de ideas para la reforma del calendario. Se presentaron más de cincuenta proyectos provenientes de todas las partes del mundo, entre los que un jurado eligió al ganador que recayó en el proyecto presentado por el parisino Gustave Armelin, quedando en segundo lugar el de Émile Hanin.<sup>4</sup>

El proyecto de Armelin utiliza los días en blanco o fuera de semana, a la manera ideada por Mastrofini. Se modificaba la duración de los meses para que todos los trimestres tuviesen 91 días, correspondiendo a meses de 31, 30 y 30 días. Cada trimestre comenzaría por lunes y finalizaría en domingo. El día 365 sería colocado entre diciembre y enero y sería nombrado como día de Año Nuevo o día 0 de enero. El día bisiesto sería el siguiente al 30 de diciembre, o sea, la víspera de Año Nuevo y la Pascua quedaría fijada en el domingo 7 de abril. Armelin veía muy favorable que ninguno de los primeros días de mes fuese domingo, sólo lunes, jueves o sábados. También señalaba, como muy conveniente, que los días 15 de cada mes, durante los que se suelen realizar transacciones económicas, nunca cayera en domingo.<sup>5</sup>

3. Comte A. *Calendrier positiviste ou système général de commémoration publique*, 1849.

4. Gérigny Philip M., *Bulletin de la Société astronomique de France*, 1887, pp. 62-125. El ganador del concurso recibió un premio de 1,500 francos, el segundo ganó 1,200 francos y al tercero se le dió 1,000 francos.

5. La Sociedad Astronómica de Francia apoyó el proyecto de Armelin, expresando su preferencia porque el comienzo del año fuera una época que marcara una circunstancia astronómica, estimando preferible el solsticio de invierno, pero advertía que esta circunstancia podría comprometer el éxito de la reforma. En este informe también se criticó la era cristiana por ser arbitraria y exigir dos cómputos diferentes, según que los años sean antes o después de Cristo. Exponía su opinión de que la era debía de tener su origen en un pasado muy remoto. Por último, la Sociedad Astronómica de Francia expresaba su deseo de “que un congreso internacional se reúna a propósito de la Exposición de 1889, para escuchar las ventajas y la oportunidad de esta reforma”.

### **Las Cámaras de Comercio y la reforma del calendario**

Al comenzar el siglo XX se fue haciendo cada vez más evidente los problemas de índole económico relacionados con el calendario. Por ello, no es de extrañar que fueran los diversos congresos internacionales de Cámaras de Comercio y Asociaciones Comerciales e Industriales los que urgieran su reforma.

Aunque ya en el año 1907 se había tratado la reforma del calendario, fue en el congreso internacional de 1910 de Cámaras de Comercio reunido en Londres cuando los asistentes fueron mejor preparados. Se aprobó una resolución donde se exponía que era deseable “obtener el establecimiento de un calendario internacional fijo”, el congreso también pidió que, por acuerdo internacional, se estableciera una fecha fija para la Pascua. El congreso se dirigió al gobierno suizo para que tomase la iniciativa para la convocatoria de la citada conferencia diplomática internacional. Pocas fueron las gestiones que pudo hacer el gobierno de Suiza, ya que siendo la opinión generalizada de que era necesario el asentimiento del Vaticano, y no teniendo el país helvético representación oficial en la Santa Sede, la iniciativa volvió al congreso de Cámaras de Comercio que se iba a celebrar a celebrar en Boston en 1912. En este congreso hubo un voto unánime de los 891 miembros para que se estableciese un calendario perpetuo y una Pascua fija.

La Santa Sede dirigió al congreso de Boston un mensaje donde declaraba que no ponía ninguna objeción “pero invita a los poderes civiles a entrar en acuerdo sobre la reforma del calendario civil, después de ello gustosamente daría su aprobación en tanto en cuanto la materia afecte a las fiestas religiosas”.

Por los años que comentamos otras reuniones internacionales abogaron por modificar el calendario. Fue el caso del Congreso Mundial de Asociaciones Internacionales reunido en Bruselas en 1913, de la Asociación Internacional de Academias en su reunión de San Petesburgo en 1913 y de la Unión Geodésica y Geofísica reunida en Madrid en 1924. Pero fue de nuevo el congreso de Cámaras de Comercio reunido en París en 1914 quien dio un paso más efectivo. Logró reunir una conferencia en Lieja en ese mismo año, a la que fueron invitados los autores de los principales proyectos de reforma del calendario, además de astrónomos, miembros de academias científicas, Cámaras de Comercio y algunas personalidades religiosas y políticas. Los asistentes votaron la utilidad de un calendario universal y perpetuo de 12 meses, al considerar que el calendario de 13 meses era de difícil aplicación. Se pedía que el nuevo calendario comenzara el año con el solsticio de invierno. Estas resoluciones fueron elevadas al congreso de Cámaras de Comercio siendo aprobadas por unanimidad de los cuatro mil delegados asistentes.

Concluida la primera guerra mundial las Cámaras de Comercio se reorganizaron en el plano internacional, creándose la Cámara Internacional de Comercio que, en su primera reunión en Londres en 1921, volvió a retomar la reforma del calendario, acordándose “la reunión próxima de un congreso especial agrupando representantes del mundo eclesiástico, científico y de los negocios”.

La Cámara Internacional de Comercio siguió preocupándose por la reforma calendarista, pero sus deseos chocaban con las enormes dificultades que entraña una reforma de tanto alcance. En 1923, en su reunión en Roma, volvió a insistir sobre el mismo asunto, tal como hizo en el congreso mantenido en Bruselas en 1925, en el que acordó que habría que tomar todas las medidas necesarias en vista de “la ejecución de

una reforma pedida por el mundo entero desde hace bastante tiempo”.

El asunto fue de nuevo tratado en el congreso que la Cámara Internacional de Comercio mantuvo en Ámsterdam en 1929, cuando ya la Sociedad de Naciones había tomado el liderazgo de la reforma del calendario. El congreso de Ámsterdam expresó su deseo, “vivamente sentido”, de estabilizar la fecha de la Pascua y perfeccionar el calendario, constatando con satisfacción que muchas naciones habían organizado comités especiales para estudiar el perfeccionamiento del calendario y la estabilización de la Pascua. El congreso animaba a la Sociedad de Naciones a que reuniera una conferencia internacional para asegurar, sin retraso, “los mejoramientos que el mundo del comercio frecuentemente ha reclamado”.

### La Unión Astronómica Internacional

Las frecuentes peticiones de las asociaciones comerciales e industriales fueron recogidas por la Unión Astronómica Internacional que, en 1919, constituyó una comisión para el estudio de la reforma del calendario.<sup>6</sup> La comisión fue presidida por Bigourdan, director de la Oficina Internacional de la Hora. Los restantes miembros de la comisión tenían una alta calificación, lo que motivó que las conclusiones de la comisión fueran consideradas con el máximo respeto. Entre los miembros estaba Deslandres (director del Observatorio de Meudon), el astrónomo real británico Dyson, Eginitis (director del Observatorio de Atenas), Flammarion (director del Observatorio de Juvisy) y Delaporte. Asistieron como invitados especiales Armand Baar (delegado oficial de la Cámara Internacional de Comercio) y el abad Chauve-Bertrand, autor del más cualificado libro sobre la reforma del calendario. A algunas de las reuniones asistió Luis Rodès, director del Observatorio del Ebro.

En las discusiones se le dio la máxima importancia al posicionamiento de las varias confesiones religiosas, en especial a la católica, a la que en vano se invitó a que enviara un delegado a las discusiones. En los debates se recordó la posición expresada en 1897 por el cardenal Rampolla quien (en nombre del Papa León XIII) expresó que la reforma de la Pascua podría “ser considerada por la Santa Sede, sobre todo en un concilio general”. Igualmente se valoró la opinión de la Iglesia anglicana que, en 1912, aprobó una resolución en la que decía expresamente que “la semana de siete días no debe ser modificada, y el domingo debe continuar siendo su primer día”, añadía que ningún cambio debería darse en la fecha de Navidad.

La comisión de la Unión Astronómica Internacional se inclinó por unanimidad hacia el año de 12 meses, mostrando su oposición al calendario de 13 meses. Propuso que el año quedara dividido en cuatro partes de 91 días, compuestas cada una de ellas de dos meses de 30 días y uno de 31. Existiría un día en blanco y dos los años bisiestos. También aprobó llevar el comienzo del año al 22 de diciembre, tratando con ello que el inicio del año coincidiera, aproximadamente, con el solsticio de invierno. La comisión no se opuso a una división auxiliar de 13 meses de 28 días cada uno. En cuanto a la duración del año estimó que la regla gregoriana de intercalación de bisiestos era suficientemente exacta para muchos miles de años, descartando su modificación. Por últi-

---

6. *Transactions of the International Astronomical Union*, vol. 1, 1922, pp. 114-1190 y pp. 182-194.

mo, la comisión emitió un voto para que la fiesta de la Pascua fuera estabilizada, creía que sería un gran progreso el fijar esta fecha en un calendario exclusivamente solar. La comisión entendía que lo deseable era una estabilización absoluta de la Pascua que sólo se podría conseguir con un calendario perpetuo.

### **El calendario perpetuo de doce meses**

Cuatro grupos de proyectos de reforma del calendario tuvieron aceptación, a saber: los que pretendían exclusivamente una reorganización de los meses para conseguir una mayor igualdad de sus duraciones; los calendarios de trece meses con un día en blanco que lo hacen perpetuo; los calendarios que ocasionalmente tienen una semana intercalar, consiguiendo con ello la coincidencia perpetua entre la fecha y el día semanal; y por último los calendarios de doce meses con un día extrasemanal.

El esquema de los calendarios de doce meses se puede aplicar de múltiples maneras según: la duración de los meses, el día semanal de comienzo del año y la colocación de los días extrasemanales. Fueron descartados los proyectos formados por trimestres formados por dos meses de 28 días y uno de 35. Una variante de este esquema son los calendarios de 12 meses de 28 días con semanas añadidas a cada uno de los cuatro trimestres, aunque estas propuestas tienen la ventaja de tener todos los meses duraciones múltiples de siete y por tanto conseguir una completa perpetuidad, las duraciones tan diferentes de sus meses sería motivo de muchos problemas.

La mayoría de estos proyectos tienen trimestres de 91 días (13 semanas exactas), repartidos en dos meses de 30 días y uno de 31. Los proyectos difieren en el orden de colocación de estos meses. Otro asunto a decidir es la elección del día semanal del primer día del año (que también sería el primer día de cada trimestre). El asunto no es trivial porque una u otra opción puede modificar sustancialmente el calendario resultante. Lo siguiente que hay que decidir es dónde colocar los días en blanco, siendo lo más frecuente que se sitúe a final de diciembre y el bisiesto a final de junio.<sup>7</sup> En otras propuestas el día en blanco sería el primer día del año. Relacionado con lo anterior se encuentra el dilema de si darle a los días en blanco una ubicación en el mes, es decir, tomarlo o no como día extramensual. En algunos proyectos incluso se le da una fecha, tal como el 31 de diciembre o el 31 de junio, aunque siempre fuera del ciclo semanal.

El calendario perpetuo de doce meses que más influencia tuvo fue el calendario mundial, promovido por "The World Calendar Association".<sup>8</sup> En este proyecto los trimestres están formados por meses de 31, 30 y 30 días, comenzando la semana, los trimestres y el año con domingo, el día en blanco estaría situado a final del año y el bisiesto a final de junio y tendrían las denominaciones de diciembre W y junio W. Estos días tendrían la consideración de fiestas mundiales. Entre las ventajas del calendario mundial destaca el tener trimestres y semestres de igual duración, teniendo todos los meses 26 días (eliminados los domingos), agregando sólo dos nuevas fechas que no existen en el calendario gregoriano, el 30 de febrero y el 31 de abril y desapareciendo los días 31 de marzo, mayo, agosto y diciembre. El calendario mundial recomendaba fijar la

---

7. Entre otras muchas propuestas señalar la del sacerdote Pierre Jounel, que coloca el día en blanco en el 25 de diciembre, que seguiría siendo Navidad, pero no tendría asignado ningún día semanal, después de este día vendría el 26 de diciembre.

8. Achelis E., *El calendario mundial*, The World Calendar Association, 1931.

Pascua en el 8 de abril o bien el 22 del mismo mes, evitando expresamente el 15 de abril, día mitad de mes y por tanto asociado a transacciones comerciales.<sup>9</sup>

Un plan de reforma debe contar con un procedimiento para su implantación. Así el calendario mundial debe ser iniciado en un año que comience en domingo.<sup>10</sup> Para adoptar un nuevo calendario sería necesario diseñar una amplia y compleja legislación para acoplar todos los aspectos de la actividad humana a la nueva situación.

La historia del calendario mundial se encuentra unida a la figura de la norteamericana Elisabeth Achelis, quien creó en 1930 la Asociación del Calendario Mundial, que hasta 1955 estuvo editando trimestralmente una publicación con el título *Journal of Calendar Reform* que llegó a tener gran influencia entre los que debatían la reforma del calendario. Aunque la Asociación del Calendario Mundial surgió como una organización exclusivamente norteamericana, pronto tomó carácter internacional, logrando el apoyo de más de treinta comités constituidos en otras naciones, entre ellos el español, que tuvo como primer presidente al jesuita Luis Rodés, sustituido posteriormente por el también jesuita Antonio Romañá, que al igual que su antecesor fue director del Observatorio del Ebro.

La Asociación del Calendario Mundial contó con numerosos e importantes apoyos. Al poco de fundarse podía vanagloriarse de tener más de cincuenta mil socios. Entre ellos dieciocho obispos y arzobispos, entre los que se encontraba el obispo de Madrid Leopoldo Eijo Garay. En el año 1955, Achelis dejó la presidencia de la asociación, que ha perdurado hasta la fecha con un carácter meramente testimonial.

### El calendario de trece meses

El principal competidor del calendario perpetuo de doce meses fue el plan de trece meses, que tuvo su origen histórico en el calendario de Comte pero que logró convertirse en un proyecto prometedor en el siglo XX, gracias a la dedicación y esfuerzo que en ello puso Moses Cotsworth. En este calendario existen trece meses de 28 días cada uno. Al nuevo mes se le llamaría Sol y estaría colocado entre junio y julio. El día 365 sería extrasemanal y vendría después del 28 de diciembre, mientras que el día bisiesto, igualmente fuera de semana, estaría colocado después del 28 de junio; ambos días tendrían fechas mensuales: 29 de diciembre y 29 de junio respectivamente. Todos los años y todos los meses comenzarían en domingo y finalizarían en sábado. La perfecta regularidad del calendario perpetuo de trece meses fue sin duda su máximo atractivo, logrando la completa perpetuidad de hacer coincidir, tanto la fecha en el año como la del mes, con un determinado día semanal, ya que todos los meses son múltiplos de la semana. Las ventajas que este proyecto traería para contables y economistas eran innegables, de ahí que este plan tuviera sus principales defensores en el mundo económico.<sup>11</sup>

---

9. El calendario mundial fue propuesto independientemente por la Asociación de Comerciantes de Maderas de Chicago en el año 1928. La citada asociación, que denominó a su proyecto como plan Chicago, valoraba la regularidad al comprender todos los años 312 días de trabajo (donde incluía los sábados), cada mes tendría 26 días laborables, 78 cada trimestre y 156 cada semestre, *Proyecto de Chicago sobre el calendario*, Chicago Retail Lumbre Dealers Association, 1931.

10. Con otros proyectos la aplicación sería más compleja, Abad Chauve-Bertrand, "Pour un calendrier unique", *Ciel et Terre* 78 (1961) 387-390.

11. Eastman G., *Do we need calendar reform?*, 1927.

Unido a sus claras ventajas existen unos defectos que representan serios inconvenientes ante una eventual adopción. El calendario de trece meses no tiene una simple división en trimestres, cuatrimestres y semestres, al no tener un número de meses divisibles entre cuatro, tres y dos. Lo que a la larga trajo el abandono del calendario de trece meses como posible sustituto del gregoriano, fueron los considerables cambios que experimentarían nuestras costumbres en el caso de que se decidiera adoptarlo. Baste decir al respecto que se producirían 337 alteraciones en la conversión de fechas, lo que significaría un drástico cambio en el sistema de conmemoración y fiestas. Serían eliminadas del calendario 29 fechas, que persistirían en la datación de acontecimientos históricos, lo que sería motivo de frecuentes equivocaciones.

Entre los años veinte y treinta del siglo pasado, los apoyos que recibió el calendario de trece meses fueron incesantes, especialmente en Estados Unidos, donde el plan encontró más adeptos que en Europa, donde era preferido el calendario de doce meses. Recibió numerosos apoyos de grandes corporaciones industriales y sociedades científicas.

En el año 1924 con la ayuda del millonario y filántropo George Eastman se creó en Londres la Liga Internacional del Calendario Fijo del que Costworth quedó como director europeo. En los Estados Unidos se constituyó el Comité Nacional para la Simplificación del Calendario, organismo no oficial que tuvo a Eastman como director. En el año 1932 murió el magnate americano y aunque el aporte económico continuó, las asociaciones creadas a sus expensas se fueron diluyendo, de tal forma que en 1937 tanto las oficinas de Londres como las de Nueva York cerraron definitivamente.

Fueron ideados otros muchos proyectos de calendarios perpetuos de 13 meses, diferenciándose unos de otros en el nombre del nuevo mes y en su colocación, en el lugar reservado al día en blanco y al bisiesto, y en el día de comienzo del año, mes y semana.

### Otros proyectos

El mayor obstáculo que encontraron los anteriores proyectos fue la oposición que algunas organizaciones religiosas plantearon a los días en blanco. Principalmente fueron los judíos ortodoxos y los adventistas del séptimo día los que se opusieron por motivos religiosos. Según los representantes de estas religiones a ellos les estaba mandado descansar cada siete días, pero al introducir los días en blanco, el ciclo semanal quedaría interrumpido, al existir en el año una o dos semanas de ocho días.<sup>12</sup> Si se llegara a aplicar un calendario con días en blanco, los judíos y otras sectas sabaritanas se verían en el dilema de ajustarse al nuevo calendario e incumplir el para ellos mandato divino de descanso en el séptimo día, o bien seguir su práctica de celebrar el sábado cada siete días, por lo que su día de descanso podría ocurrir en cualquier día de la semana del nuevo calendario.

A esta argumentación se opusieron tanto los defensores del plan de trece meses como los del calendario mundial, que decían que una minoría no podía imponer su opinión a la inmensa mayoría. Añadían que con el nuevo calendario no se limitaba la libertad religiosa y que cada uno podía seguir la creencia que quisiera, pero eso sí,

---

12. Yamson M., *The blank day device in proposed plans for calendar reform*, The League for Safeguarding the Fixity of the Sabbath, 1931.



ajustándose al deseo de la mayoría.<sup>13</sup>

Como veremos más adelante, la oposición a los días extrasemanales se incrementó, sumándose a ella los católicos, otros grupos cristianos y finalmente los musulmanes. En la batalla planteada en los foros internacionales los detractores de los días en blanco consiguieron hacer valer su postura, bloqueando los proyectos de reforma del calendario.

En este ambiente de dificultad para los defensores de calendarios basados en días en blanco, resurgió el interés por los proyectos de calendarios de semanas intercalares, que logra convertir el calendario en perpetuo sin necesidad de romper la continuidad semanal.<sup>14</sup> El primer proyecto de este tipo fue presentado en 1884, con motivo del concurso abierto por *L'Astronomie*, su proponente, que se identificaba con las siglas A.B.C., afirmaba que “en cada año se reservará el día 365 e igualmente el 366 de los años bisiestos, para hacer, en épocas fijadas en avance por los astrónomos, y por siglos, una semana complementaria”. El autor se percataba del excesivo desplazamiento de las estaciones que se produciría en su nuevo calendario, pero clamaba para un calendario para todo el mundo y no sólo para los astrónomos.

En esencia un calendario de semanas intercalares consiste en años de 364 días ó 52 semanas exactas, el día que falta para completar los 365, o en su caso los días en los años bisiestos, se van acumulando hasta alcanzar los siete días, entonces se intercala un año extraordinario de 371 días ó 53 semanas. De tal forma que se logra la perpetuidad del calendario sin necesidad de usar los días en blanco.

Se han propuesto ciclos de semanas intercalares de 28 años en que 5 son abundantes o con una semana extra y ciclos de 62 años con 11 de ellos embolísmicos. En otras ocasiones se han propuesto reglas más complejas, por ejemplo la de Colligan que hace intercalares los años terminados en 06 o que sus dos últimas cifras sean divisibles entre 6, además en los años finalizados en 99 ó 00 no divisibles entre 400 será colocada una nueva semana extra. Como se ve, en todo caso más complejo que la simple regla gregoriana. Otra posibilidad que se ha planteado es que la regla de intercalación de las semanas sea dada por la astronomía, lo que significa que habría una semana intercalar cuando un acontecimiento astronómico (tal como el equinoccio de primavera) se haya desplazado excesivamente respecto al calendario. Este es el caso del calendario equitativo de Evarist

---

13. Los sabaritanos se defendían afirmando que el ciclo semanal había tenido continuidad ininterrumpida desde la más remota antigüedad. Esta afirmación no es cierta, lo único que se puede decir es que no tenemos noticia de que se haya interrumpido el ciclo semanal. Señalar la curiosidad de que el ciclo semanal se rompe cuando se atraviesa la línea de cambio de fecha. Si nos movemos hacia el oeste hay que adelantar un día, ocurriendo que la semana del viajero quede en seis días. Si el tránsito es en el sentido contrario la semana se elevaría a ocho días, *Religious aspects of calendar reform*, The National Committee on Calendar Simplification for the United States.

14. Entre las muchas obras escritas sobre los calendarios de semanas intercalares citar: García Serrano I., *La reforma del calendario*, 1962; Kohler H., *The equitable calendar rational solution*, Sister of St. Dominic, 1987; Black F. A., *The calendar and its reform*, Galla an Inglis, 1932; Suran J., “The calendar of the future. A world calendar with leap weeks”, *Vistas in Astronomy* 41 (1998) 493-506 y Suran J., “Erratum. The calendar future. A world calendar with leap weeks [Vista in Astronomy 41 (1998) 493]”, *New Astronomy Reviews* 43 (1999) 79.

Klleszcz, según el cual hay que colocar una semana intercalar para evitar que el equinoccio vernal no venga antes del 18 de marzo y no más tarde del 24 de marzo, restringiendo de esta forma la movilidad del equinoccio de primavera a un rango de sólo siete días.

Los proyectos de estos calendarios deben establecer en qué parte del año hay que colocar la semana intercalar. En algunos casos la semana intercalar está absorbida en algún mes o tiene un cómputo independiente. Igualmente deben definir el día en que empieza el año y establecer la distribución de los meses. En algunos proyectos se establecen calendarios de 13 meses y en otros de 12 meses.

Los calendarios de semanas intercalares tienen como principal virtud su carácter perpetuo sin necesidad de alterar la secuencia semanal. No obstante, ha sido criticada la muy diferente longitud de sus años. Además, las fechas del comienzo de las estaciones tendrían una gran movilidad, superior en algunos casos a una semana.

Los otros esquemas considerados como alternativas al calendario gregoriano fueron los que se limitan a modificar las duraciones de los meses y a recolocar el día bisiesto. Para regularizar el calendario se consideran sólo meses de 30 y 31 días. Este es el caso del calendario ideado por van der Harst, que tiene una distribución de los meses con duraciones de: 31, 30, 30 – 31, 3, 31 – 31, 30, 30 – 31, 30, 30, con lo que se consigue que trimestres y semestres tengan casi la misma duración.

Una idea que se ha propuesto en varias ocasiones es colocar el día bisiesto a final del año.<sup>15</sup> En otros casos sólo se traslada un día de agosto al mes de febrero, que en los años normales tendría 29 días y 30 en los años bisiestos.

Además de los cuatro bloques de proyectos que acabamos de describir se han propuesto multitud de otros esquemas. Como estos proyectos cambian sensiblemente nuestras bien asentadas costumbres no han sido considerados como alternativas plausibles al calendario gregoriano.

En todos los intentos para reformar el calendario fueron descartados desde un principio aquellos proyectos que cambiaban el número de días de la semana, al entenderse que tal modificación no sería aceptada por la población. Semanas de 4, 5, 6 ó 10 días han sido propuestas. Citar por ejemplo el modelo de Georges cuyo calendario está compuesto por 12 meses de 30 días, divididos en cinco semanas de seis días, con cinco días en blanco situados al comienzo de los meses de enero, abril, mayo y octubre.

### El calendario en la Sociedad de Naciones

Las insistentes voces que desde tan diversos organismos se habían alzado para la reforma del calendario obligaron a la Sociedad de Naciones SDN a tomar el asunto en consideración. Durante catorce años, desde 1923 a 1937, la reforma del calendario y la fijación de la Pascua fueron reiteradamente tratadas por la SDN.<sup>16</sup> Se ejecutó un plan de trabajo que tuvo como base la recopilación de una amplísima información y la consulta

---

15. Mayes V., "Leap day deserves look", *Journal of the British Astronomical Association* **103** (1993) 162-163.

16. Un completo informe de las gestiones de la SDN se encuentra en Key-Rasmussen E., "League of Nations and calendar reform", *Journal of Calendar Reform* 1º quarter (1942) 3-4; 2º quarter (1942) 35-41 y 3º quarter (1942) 76-81. Véase también un resumen parcial en *La Sociedad de las Naciones y la reforma del calendario*, Secretaría de la Sociedad de las Naciones, 1928.

a numerosas organizaciones tanto civiles como religiosas.<sup>17</sup>

En 1923, la Comisión Consultiva y Técnica de las Comunicaciones y de Tránsito de la SDN acordó formar un Comité Especial de Estudio acorde a la demanda para conseguir un mejor del calendario. El comité fue presidido por van Esynga, experto en legislación internacional de la Universidad de Leyden y formaron parte: el padre Gianfranceschi (nombrado por la Santa Sede), Eginitis (nombrado por el patriarca ecuménico de Constantinopla) el reverendo Theodore Phillips (secretario de la Real Sociedad Astronómica de Londres) designado por el obispo de Canterbury, Bigourdan (anterior presidente del comité de la Unión Astronómica Internacional para la reforma del calendario) y Willis Booth (ex presidente de la Cámara Internacional de Comercial).

Previamente había sido hecha una consulta entre los representantes religiosos en la que se pudo constatar “que desde un punto de vista estrictamente dogmático, el examen de la reforma del calendario, tanto en lo que concierne a la fijación de la fiesta de la Pascua como a las cuestiones más generales de la reforma del calendario gregoriano, no tropiezan con dificultades de una naturaleza tal que se pueda con anticipación considerar como insuperables”.

Las gestiones del Comité Especial de Estudio atrajo la atención de la prensa y del público en general. Recibió 185 proyectos de nuevos calendarios, siete de ellos elaborados por españoles.<sup>18</sup>

En agosto de 1926 el comité publicó sus resultados. No recomendó cambiar la fecha del comienzo del año, tampoco favoreció un cambio en la regla de intercalación de los bisiestos. Descartó los calendarios de semanas intercalares y los proyectos que tuviesen meses de longitudes muy diferentes. El comité se quedó con tres tipos de proyectos: los que conseguían una simple igualación de los trimestres, los perpetuos de 12 meses y los de 13 meses. Se constató que la mayoría de los gobiernos se inclinaban por un calendario perpetuo de 12 meses, pero finalmente el comité no defendió ningún plan. Fue de la opinión de que ninguna reforma sería realizable sin haber obtenido el asentimiento de la totalidad o casi totalidad de los medios afectados, como: los religiosos, administrativos, comerciales, económicos y científicos, principalmente.

El comité constató que una conferencia internacional no tendría posibilidades de éxito. Por ello abogó por la creación de comités nacionales, que tendrían entre sus funciones la propagandista y el estudio de los tres tipos de proyectos considerados. Concluía el informe diciendo que si al cabo de un tiempo se viera imposible crear un calendario perpetuo, la SDN podría proponer una reforma restringida basada en la reorganización de los meses.

En cuanto a la Pascua el comité distinguió entre la estabilización y la fijación. Para la primera medida no sería necesario modificar el calendario, sino sólo reducir a una semana la movilidad de la Pascua. En este sentido cabe interpretar el contenido del acta que aprobó el parlamento británico en 1928, donde se estableció que la fecha de la Pascua sería el domingo siguiente al segundo sábado de abril. Esta acta fue aprobada por las

---

17. “Enquête générale sur la réforme du calendrier” y “Enquête concernant spécialement l’opportunité de la fixité de la fête de Pâques” en *Rapport relatif à la réforme du calendrier*, Societe des Nations, 1926, pp. 37-108 y pp. 138-165.

18. *Classification and summary of proposals for calendar reform*, League of Nations, C. 167. M.49, 1927.

dos cámaras del parlamento británico, contó con el apoyo de la Iglesia anglicana y únicamente tendría efectividad tras un acuerdo internacional de las diferentes confesiones religiosas.

La otra opción para la limitación de la fecha de la Pascua es su fijación, para lo que se requiere un calendario perpetuo, en el cual la Pascua vendría en un domingo determinado, es decir, el mismo para todos los años.

El Comité Especial de Estudio pidió opinión al Vaticano, quien por mediación del nuncio apostólico en Berna, contestó en marzo de 1924, que la fijación de la Pascua “no levanta ninguna dificultad dogmática, llevando sin embargo el abandono de tradiciones fuertemente establecidas, que no sería legítimo ni aceptable abandonar sin graves razones de interés universal”, añadía “que si fuera demostrado que el bien general demanda algún cambio en estas tradiciones, la Santa Sede no desearía examinar la cuestión sin la voz previa del próximo concilio ecuménico”.<sup>19</sup>

Las opiniones manifestadas por otras iglesias cristianas fueron más favorables a la fijación de la Pascua. En febrero de 1924, el patriarca ecuménico de Constantinopla comunicó que la Iglesia ortodoxa estaba dispuesta a declarar a favor de la estabilización de la fiesta de la Pascua, prefiriendo fijarla “el domingo correspondiente al domingo real de la Resurrección del Señor”.

La iglesia anglicana declaró en abril de 1925 que “no hay razón dogmática para oponerse a la Pascua fija, pero desea que la modificación fuera aceptada por todos los cristianos”, proponiendo que la fecha debería ser en abril, en un día promedio entre los dos extremos actuales.

Diversas iglesias protestantes apoyaron con entusiasmo la fijación de la Pascua. Keller, en nombre de las Iglesias y federaciones protestantes de todo el mundo, afirmó que no veía dificultades para fijar la Pascua y si bien algunas Iglesias no estaban de acuerdo “ninguna se opondría a una reforma que podría ser de utilidad a la humanidad”.

El comité extendió la consulta a los más variados medios, comprobando que la mayoría de las respuestas estaban a favor de fijar la Pascua. En sus conclusiones, el Comité de Estudio propuso que la Pascua fuera establecida en el domingo siguiente al segundo sábado de abril, es decir, coincidente con la resolución del parlamento británico.

Los defensores norteamericanos del plan de 13 meses lograron, en 1928, que el congresista Stephen Porter presentara una resolución al parlamento norteamericano para que el presidente de los Estados Unidos hiciera una llamada a una conferencia internacional para la simplificación del calendario. La propuesta fue trasladada al comité de Asuntos Exteriores del Congreso que tenía como presidente al propio Porter. Entretanto la comunidad judía norteamericana advirtió la operación y movió sus contactos para oponerse a la resolución.<sup>20</sup> Los judíos lograron el apoyo del congresista Sol Bloom, quien frenó la propuesta de Porter, que pedía que la conferencia fuera mantenida en el año 1929 y que el nuevo calendario perpetuo de trece meses fuera establecido en

---

19. “Stabilisation des fêtes móviles”, Société des Nations, C.335.M.154, 1934 ; Schwegler E., *Catholics and calendar reform*, The World Calendar Association, 1934 y Arend S., “La stabilisation de la fête de Pâques”, *Ceil et Terre* 78 (1961) 391-393.

20. Simon J., *Will we let them blast the Bible?. The romance and the fallacy of the world calendar*, 1949, pp. 14-17.

el 1933.

El revés sufrido por los defensores de la reforma en los Estados Unidos quedó contrarrestado por la decisión del Consejo de la Sociedad de Naciones que (sobre proposición de la Comisión Consultiva) decidió poner el examen de la reforma del calendario en el orden del día de la Cuarta Conferencia General de las Comunicaciones y de Tránsito, a celebrar en 1931.

### **La conferencia internacional de reforma del calendario y el plan chileno**

Se creó un Comité Preparatorio para facilitar los trabajos de la Conferencia Internacional que tenía en su quinto punto del orden del día examinar «la oportunidad, desde los puntos de vista económico y social: a) de una estabilización de las fiestas móviles y b) de una simplificación del calendario». <sup>21</sup>

El comité preparatorio recibió los informes de los comités nacionales, donde pudieron constatar que la opinión pública no estaba especialmente interesada en el asunto de la reforma. Las opiniones fueron variadas, destacar el apoyo a un calendario perpetuo dado por los comités nacionales de Alemania, Bélgica, Brasil, Estados Unidos, Francia, Polonia, Portugal, Suiza y Yugoslavia.

El comité preparatorio constató que la mayoría de los gobiernos y autoridades competentes en materia de instrucción pública se declaraban a favor de una estabilización de la Pascua. El comité dio audiencia a representantes religiosos judíos, que volvieron a expresar su desacuerdo con los días en blanco. Fueron escuchadas las opiniones de tres defensores de la reforma: Achelis, Costworth y Broughton Richmond (secretario de la Asociación del Calendario Internacional) que apoyaba el establecimiento de un calendario de diez meses.

Del 21 al 24 de octubre de 1931, se reunieron en Ginebra 42 gobiernos, siendo invitadas algunas organizaciones partidarias y opuestas a la reforma. En el desarrollo de la conferencia tuvo gran impacto las opiniones de los grupos religiosos y las manifestaciones poco favorables a la reforma de John Baldwin, representante del gobierno británico. De las manifestaciones de las delegaciones nacionales se desprende que Canadá y Yugoslavia estaban a favor del calendario perpetuo de trece meses, mientras que Grecia y Suiza se decantaron por el calendario perpetuo de doce meses, las restantes delegaciones expresaron que sus gobiernos no habían aún formado una opinión definitiva. La conferencia concluyó con el único acuerdo de recomendar la estabilización de la Pascua al siguiente domingo después del segundo sábado de abril.

El secretario general de la SDN entregó a las autoridades cristianas el acuerdo sobre la estabilización de las fiestas móviles, pidiendo su valoración al respecto. La Santa Sede contestó por mediación del cardenal Pacelli quien volvió a insistir que la Pascua es una cuestión religiosa “que por razones de interés espiritual superior la Santa Sede no puede examinar cambios en esta materia”. Este planteamiento contrastó con las opiniones expresadas por el resto de las comunidades cristianas, más predispuesta a aceptar

---

21. *Reforme du calendrier. Documents préparatoires. Quatrième conférence générale des communications et du transit*, Société des Nations, 1931 y *Instruments officiels approuvés par la conférence, Quatrième conférence générale des communications et du transit*, Société des Nations, 1931.

la estabilización de la Pascua.

El siguiente paso se originó en Chile, país que acogió en enero de 1936 la Conferencia del Trabajo de países americano. Entre sus conclusiones estuvo la aprobación por unanimidad de recomendar “la aprobación de un calendario perpetuo de doce meses e iguales trimestres y resuelve pedir al Consejo de Administración de la Organización Internacional de Trabajo que envíe copias de esta resolución al secretario general de la Sociedad de Naciones y a todos los gobiernos de los países americanos”. Meses después, la anterior resolución fue aprobada por la Organización Internacional del Trabajo y el asunto de la reforma del calendario volvió a estar en la agenda de la SDN.

En este contexto el embajador chileno en Gran Bretaña y representante ante la SDN sometió en 1937 un borrador pidiendo a la SDN “la adopción del calendario perpetuo de doce meses e iguales trimestres, conocido como calendario mundial”. El texto del borrador fue enviado a los estados miembros para que expresaran su opinión. Catorce gobiernos estuvieron a favor de implantar el calendario mundial: Afganistán, Brasil, Chile, España, Estonia, Grecia, Hungría, México, Noruega, Panamá, Perú, Uruguay y Turquía.

El Vaticano influyó en la respuesta de algunos gobiernos. Durante el tiempo que duró la consulta, la Santa Sede dirigió cartas a ciertos gobiernos expresando la opinión de que la estabilización de la Pascua debía formar parte integral de una reforma del calendario y que la decisión sobre la Pascua debía se hecha en un concilio. Esta interconexión entre los dos asuntos fue la principal reserva del Vaticano que, desde 1924, venía incrementando sus condiciones. La actitud del Vaticano hizo que algunos países de influencia católica manifestaran que era demasiado ponto para una reforma.

Ante las respuestas recibidas el Comité de Comunicaciones y de Tránsito no recomendó la convocatoria de una Conferencia Diplomática sobre la Reforma del Calendario, ya que en “las presentes circunstancias no parece tener ninguna perspectiva de lograr su objetivo”.

### **El calendario en las Naciones Unidas**

Con el inicio de la segunda guerra mundial en 1939, quedaron paralizadas las acciones internacionales para conseguir la reforma. Concluida la guerra y antes que las Naciones Unidas cumpliera un año, su secretario general había recibido multitud de borradores y comunicaciones sobre esquemas de nuevos calendarios. La primera iniciativa la tuvo el gobierno de Perú, quien en febrero del año 1947, sometió a la cuarta sesión del Consejo Económico y Social una resolución donde pedía la formación de un comité “para estudiar y expresar su juicio sobre la adopción de un nuevo calendario el 1 de enero de 1950, como el preparado por la Asociación del Calendario Mundial”. De esta forma se iniciaba un nuevo intento de reforma del calendario, que volvía a fundamentarse en el efecto perjudicial que tiene la estructura interna del calendario gregoriano para la vida civil y económica. En esta ocasión los proyectos habían quedado reducidos al calendario mundial, que aparecía como la única opción viable para sustituir al calendario gregoriano.

El secretario general de la ONU distribuyó una nota entre los gobiernos miembros. Hubo esperanzas de que la quinta sesión del Consejo Económico y Social tomaría alguna acción pero a última hora la propuesta peruana fue eliminada de la agenda.

El año 1949 vio una nueva oportunidad. De nuevo fue un país latinoamericano, Panamá, quien propuso a la cuarta sesión de la Asamblea General que el asunto de la reforma fuera colocado en la agenda de la quinta sesión. También en esta ocasión se

pedía la implementación del calendario mundial. De nuevo hubo problemas de agenda. Al preparar el orden del día, 4 miembros votaron por el interés de la anterior reforma, 4 votaron en contra, hubo 4 abstenciones y 2 ausencias.

El siguiente intento se realizó en octubre de 1953, cuando el representante de la India se dirigió al secretario general de la ONU para pedir la reforma del calendario expresando que “el gobierno de la India considera que el plan para la reforma del calendario gregoriano propuesto por la Asociación del Calendario Mundial es de gran importancia para las naciones del mundo”. Como resultado de esta petición, el secretario general de la ONU escribió en el año 1954 a todos los gobiernos miembros pidiéndole que emitieran su consideración sobre la reforma del calendario. De los 81 gobiernos que fueron contactados, sólo 41 replicaron a la demanda de la ONU y, de ellos, solamente cinco: Mónaco, Tailandia, Nepal, Laos y la Unión Soviética expresaron su aprobación a la introducción del calendario mundial para el 1 de enero de 1961.

Entre las opiniones recibidas se apreciaba escaso interés por el asunto y poca predisposición a hacer un cambio de tanta envergadura. De nuevo las consideraciones religiosas estuvieron en primer línea, a las que ahora se unían algunos países musulmanes que veían con desagrado que “la natural sucesión de los viernes, que ha continuado regularmente cada siete días en toda la era musulmana fuera alterada”, como expresamente declaró el gobierno de Pakistán.

La respuesta que tuvo más peso fue la que dio el Departamento de Estado de los Estados Unidos en marzo de 1955, que mostró su oposición, no sólo a la pretendida reforma, sino a que las Naciones Unidas siguieran considerando el asunto. El comunicado norteamericano declaraba que su gobierno “no favorece ninguna acción de las Naciones Unidas para revisar el presente calendario”, entre otras cosas por no haberse constatado que tal reforma “fuera favorecida por una mayoría sustancial de los ciudadanos de Estados Unidos”, además expresaba que “cualquier revisión del calendario existente entraría en conflicto con los principios de importantes fe religiosas”. La respuesta del gobierno norteamericano iba más allá al pedir “que ningún futuro estudio del asunto sea emprendido”. Finalmente, en abril de 1956 sobre una propuesta de Holanda, el presidente del Consejo Económico y Social puso a votación el aplazamiento de la reforma del calendario mundial *sine die*. La propuesta fue aprobada por 15 votos a favor, ninguno en contra y 3 abstenciones.

### La reforma calendarista en la Unión Soviética

Al poco de triunfar la revolución de 1917, el calendario de Rusia se alineó con el de la mayoría de los países europeos. En efecto, el 26 de enero de 1918, Lenin como presidente del Consejo de Comisarios del Pueblo, firmó un decreto que adoptaba el calendario gregoriano “con el propósito de estar en armonía con todos los países civilizados”.<sup>22</sup> El decreto eliminó 13 días, pasando del 31 de enero de 1918 al 14 de febrero.

Desde el comienzo de la revolución bolchevique se lanzaron ideas para modificar el calendario, en particular para adoptar el calendario republicano francés. Desde el año 1927 se discutió la implantación de una semana laboral continuada. En el marco del V

---

22. Parry, A., “The soviet calendar”, *Journal of the Calendar Reform* **10** (1940) 63-69 y Zerubavel E., *The seven day circle. The history and meaning of the week*, The University of Chicago Press, 1989, pp. 35-43.

Congreso de los Soviet de la Unión Soviética celebrado en mayo de 1929, el diputado Larin propuso la adopción de una semana productiva ininterrumpida. Aunque la propuesta fue entonces acogida con frialdad, al paso de sólo unos meses fue examinada por la Sección de Racionalización del Consejo Superior de Economía y con gran rapidez, empezó a ganar apoyos, tomándose incluso como una medida revolucionaria.

La idea que llevaba implícita la semana laboral ininterrumpida era el aumentar la productividad, de tal forma que la costosa maquinaria industrial estuviera funcionando todos los días, incluso por la noche. La nueva semana laboral ininterrumpida fue aprobada el 26 de agosto de 1929 por el Consejo de Comisarios del Pueblo, que dictaminó que entraría en aplicación el 1 de octubre del mismo año. En principio no se pretendía alterar el periodo semanal de siete días, sólo reemplazar el domingo como único y común día de descanso por un día libre semanal escalonado, es decir estableciendo siete turnos de trabajo.

Poco antes de implementarse el cambio, se modificó el decreto, el Consejo de Comisarios estipuló que la semana ininterrumpida (a la que se le llamó *nepreyvka*) tendría sólo cinco días. Cada obrero trabajaría cuatro días y el quinto descansaría, dividiéndose los trabajadores en cinco grupos, dependiendo del día libre que les correspondiera. De esta forma mientras que el 20% de los trabajadores descansaba, el 80% continuaba en sus puestos de trabajo.

Los meses continuarían teniendo los nombres y duraciones habituales. El año quedaría dividido en cuatro trimestres de 90 días productivos cada uno, es decir: 18 semanas de cinco días. Cada mes constaría de seis de esas semanas. La primera semana de febrero comenzaría el 31 de enero, mientras que su última semana concluiría el 1 de marzo; es decir, para efectos laborales, que no cronológicos, febrero tendría también 30 días. Los días 31 de los restantes meses, o sea, de mayo, julio, agosto, octubre y diciembre, serían proclamados fiestas nacionales y no entrarían en el cómputo semanal. El año quedaba así compuesto por 360 días laborables y cinco días de fiestas revolucionarias.

Hubo intentos de darles nuevos nombres a los días semanales, entre los que se barajaron: Sindicato, Soviético, Lenin, Komsomol, Partido, Hoz o Martillo. Pero pronto a cada día se le dio un número de orden, al que se le asoció un color, el primero fue amarillo, el segundo naranja, el tercero rojo, el cuarto púrpura y el quinto verde. En un principio se planteó la posibilidad de establecer una nueva era que comenzaría con la revolución de octubre de 1917, que sería considerado como el año I. Finalmente esta medida no prosperó.

Originariamente la semana de cinco días fue considerada únicamente para la industria y la administración oficial. Pero pronto se hicieron esfuerzos para extenderla a las demás actividades económicas. Al nuevo ciclo semanal irían accediendo las empresas a medida que se encontraran preparadas para ello, pero el celo revolucionario precipitó a los responsables empresariales, que se adhirieron al nuevo ciclo sin la necesaria adecuación de sus empresas. De tal forma que, en la primavera de 1930, la semana ininterrumpida de cinco días estaba completamente implementada en la industria y departamentos oficiales.

Cada día tenía una jornada laboral de 7 horas de trabajo, teniendo cada trabajador 72 días de fiestas al año, además de un periodo que iba de quince días a un mes de vacaciones anuales, con el resultado que los trabajadores soviéticos tenían 12 días



menos de trabajo que los occidentales.

La semana ininterrumpida de trabajo llevaba implícita un carácter antirreligioso o, para ser más exactos, eliminaba la preeminencia religiosa en la vida civil, al quitar el lugar especial que se le adjudica al domingo. La aplicación de la *nepreyvka* haría perder la memoria de la localización del domingo, y junto a ello, su significación religiosa.

Las quejas por la nueva semana de cinco días aparecieron al mismo tiempo que su aplicación. El mismo día en que la *nepreyvka* era puesta en aplicación, el diario *Pravda* advertía de los problemas familiares que traería: “¿Qué hacemos en nuestras casas si nuestras esposas están en la factoría, nuestros hijos en la escuela y nadie puede visitarnos? No es fiesta si usted se encuentra sólo.”

Los trabajadores fueron divididos en cinco grupos, dependiendo del color del día en que estuvieran libres. Como había previsto *Pravda*, los problemas familiares surgieron inmediatamente. Las quejas se referían a la imposibilidad de unirse toda la familia, excepto después del trabajo y en las pocas fiestas comunes. Las quejas fueran atendidas y el 16 de marzo de 1930, el comité gubernamental para la transición a la semana de producción ininterrumpida comenzó a reconocer las peticiones familiares para sincronizar sus días de descanso.

Se argumentaba que, dada su cortedad, una semana de sólo cuatro días de trabajo era demasiado tensa. Los mecánicos decían que la maquinaria también necesitaba descansar y revisarse de vez en cuando. Como en cualquier día estaba de descanso el veinte por ciento de la fuerza laboral, no podían celebrarse asambleas que reunieran a todos los trabajadores. En fin, la ausencia de directivos en sus días de descanso, mientras que las industrias estaban en funcionamiento, daba lugar a problemas en la gestión. Pero lo más grave parecía ser la sensible reducción de la responsabilidad, resultado de la participación de varios trabajadores en la misma tarea, por lo que la responsabilidad, al dispersarse entre varios trabajadores, disminuía en todos.

En la primavera de 1930 era evidente la disminución de la productividad laboral como resultado de la implementación de la semana continuada. Para solucionar el problema se arbitraron algunas medidas que no lograron mejorar los resultados.

El 23 de junio de 1931, Stalin dio un discurso. Sus palabras fueron críticas con la aplicación de la semana laboral ininterrumpida: “Muchas de nuestras empresas fueron a la producción continua demasiado deprisa sin preparar las necesarias condiciones, sin organizar adecuadamente los turnos”. Las acertadas críticas de Stalin hacían presagiar un rápido fin de la experiencia calendarista soviética.

El 23 de noviembre de 1931, el Consejo de Comisarios del Pueblo publicó un decreto que modificaba el sistema de trabajo en el país. Quedaba anulada la semana de cinco días. Se estableció que a partir del 1 de diciembre de 1931, se instauraría una nueva semana de seis días (que fue llamada *chestidnevki*), donde cinco de ellos serían de trabajo y uno de fiesta común para todos los trabajadores.

Los descansos quedaron fijados en los días 6, 12, 18, 24 y 30 de cada mes. En el caso singular de febrero se decretó que la quinta semana de ese mes y la primera de marzo tendrían sólo cinco días, es decir, que los días de descanso serían el 1 y el 6 de marzo. Todos los días 31 serían también feriados, tratando con ello de contrarrestar la pérdida de días de descanso al pasar de una semana de cinco a otra de seis días.

Los días siguieron sin ser nombrados, y en su lugar eran numerados, por lo que los antiguos nombres semanales dejaron de tener uso común (al menos en las zonas urba-

nas), aunque nunca se perdió la memoria, entre otras cosas porque los periódicos los seguían manteniendo en sus cabeceras.

Fueron creadas cinco fiestas revolucionarias de ámbito nacional. El 22 de enero se conmemoraba el “domingo sangriento” que aconteció aquel mismo día del año 1905. En los días 1 y 2 de mayo se celebraba la fiesta del trabajo y en los días 7 y 8 de noviembre se recordaba el aniversario de la revolución bolchevique.

Tampoco la semana de seis días logró asentarse en la sociedad soviética. Es cierto que se impuso en la industria y en las zonas urbanas, pero encontró la oposición de la conservadora población rural. La vida económica del campo permaneció ligada al ritmo tradicional de la semana de siete días. Cuando las autoridades intentaron que los campesinos siguieran la semana de seis días, se volvió a repetir lo que había ocurrido en la Francia revolucionaria, es decir, que los agricultores descansaban el domingo y también el sexto día de la semana oficial.

Paulatinamente la Unión Soviética quedó dividida en dos sociedades, aquella que seguía la semana de seis días y la que continuaba con la semana hebdomadaria. La coexistencia de estos periodos semanales, no sólo producía roces entre las dos comunidades, sino lo que era aún más grave, ponía de manifiesto la incapacidad del gobierno para imponer sus leyes.

La aventura calendarista soviética concluyó el 26 de junio de 1940, cuando el Presidium Supremo de la Unión Soviética abolió la *chestidnevki*, o semana de seis días, reinstaurando la semana de siete días y el domingo como día común de descanso. La razón que se adujo para hacer el cambio fue, paradójicamente, la misma esgrimida en 1929 para introducir la nueva semana, o sea, la necesidad de aumentar la producción económica.

### Medidas recientes

El cierre del camino emprendido en las Naciones Unidas no significó la definitiva conclusión de los intentos para la reforma del calendario.<sup>23</sup> En el año 1954, el gobierno de India creó un calendario reformado nacional indio, con el que pretendió unificar la computación en aquel país. Poco después y ante la inminente celebración del concilio Vaticano II, el Comité Nacional de Astronomía de Bélgica constituyó, en 1961, una comisión para “examinar las reformas que podrían ser aportadas a nuestro calendario”. Bajo la presidencia de Moreau, los astrónomos belgas se inclinaron por un calendario perpetuo de doce meses y trimestres iguales y la fijación de la Pascua al domingo siguiente del segundo sábado de abril, que correspondería al 12 de abril en el nuevo calendario.<sup>24</sup>

El día 25 de octubre de 1963 se procedió a votar una resolución sobre la reforma en el concilio Vaticano II, que contó con el apoyo de 2,058 votos frente a nueve en contra y uno nulo. El texto aprobado reconocía la importancia de los deseos de muchos de conseguir una fiesta de la Pascua fija y una estabilización del calendario. El concilio declaraba que “no se opone a que la fiesta de la Pascua se fije en un domingo determinado dentro del calendario gregoriano, con tal que den su asentimiento todos los que

23. A pesar de los reveses que estaba sufriendo la reforma del calendario, se seguían presentando nuevos proyectos, véase por ejemplo Edwards W., *The Edwards perpetual calendar*, 1943.

24. Moreau F., “Comisión d’étude de la réforme du calendrier”, *Ciel et Terre* 78 (1961) 394-405.

están interesados”. En cuanto al calendario civil el concilio declaró que no se opondría “con tal que se conserven y garanticen la semana de siete días con el domingo, sin añadir ningún día que quede al margen de la semana, de modo que la sucesión de las semanas se mantenga intacta, a no ser que se presenten razones gravísimas, de las que juzgará la Sede Apostólica”.

Una reciente medida para la reforma del calendario se produjo en el año 1997 en la ciudad siria de Aleppo, donde el Consejo Mundial de Iglesias tuvo una reunión para promover medidas de unificación de la fecha de la Pascua. Asistieron a la reunión numerosas comunidades cristianas, incluido un representante del Vaticano que asistió como oyente.

En Aleppo se señaló como perjudicial la diversidad de criterios seguidos para calcular la fecha de la Pascua. Se constató que las diferencias en el cálculo de la Pascua obedecen a las distintas tablas que se utilizan y no a una diferencia en los fundamentos teológicos. Los reunidos no se inclinaron por una fecha fija para la Pascua, porque oscurecería y debilitaría la unión que debe existir entre la Pascua bíblica y la pasión y resurrección de Cristo, agregaban que “los principios nicenos para calcular la fecha de la Pascua, basados como ellos lo son sobre los ciclos del Sol y la Luna, reflejan una dimensión cósmica mucho más completa que un sistema de fecha fija”. Se acordó seguir con las reglas nicenas: la Pascua es el siguiente domingo después de la primera Luna llena de primavera, debiéndose calcular por los métodos astronómicos más exactos posibles, eligiéndose el meridiano de Jerusalén para hacer los cálculos.

Los reunidos en Aleppo por el Consejo Mundial de Iglesias, fueron conscientes de la dificultad para adaptar las nuevas reglas. Para facilitar su aceptación pedían como primer paso que, hasta el año 2001, las iglesias miembros consideraran las recomendaciones y si las estimaban aceptables que explorasen la forma de implementarlas de acuerdo con sus propios procedimientos. Como segundo paso se sugirió que en el año 2001 el Consejo Mundial de Iglesias organizara una consulta en la cual la implementación de las nuevas normas fuera discutida. La posición del Vaticano, que se mantiene en que sólo un concilio general puede aprobar un cambio en la fecha de la Pascua, da muy escasas posibilidades a los acuerdos de la reunión de Aleppo que, por cierto, no satisface las demandas de la sociedad civil.

# Apéndices

## A.- Funciones matemáticas

**Función entero.-** Dado dos números reales  $x, y$  se llama función entero y se representa por

$$\text{int}\left(\frac{x}{y}\right)$$

a la parte entera del cociente de  $x$  entre  $y$ .

*Propiedades:*

$$\forall x, y > 0, \text{int}\left(\frac{x}{y}\right) = -1 - \text{int}\left(\frac{-x}{y}\right) = -1 - \text{int}\left(\frac{x}{-y}\right) = \text{int}\left(\frac{-x}{-y}\right) - 1$$

esta propiedad permite que el resto sea siempre un número positivo o nulo.

$$\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{Z}^+ \text{ se cumple } \text{int}\left(\frac{x+ay}{y}\right) = \text{int}\left(\frac{x}{y}\right) + a$$

$$\forall z < 0, y > 0, a \in \mathbb{Z}^+ \text{ se cumple } \text{int}\left(\frac{x+ay}{y}\right) = a - 1 - \text{int}\left(\frac{|x|-1}{y}\right).$$

**Función módulo.-** Dado dos números reales  $x, y$  se le llama función módulo

$$x \bmod y$$

al resto de la división entre  $x$  e  $y$ .

*Propiedades:*

$$x \bmod y = \frac{x}{y} - \text{int}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\forall x, y > 0, x \bmod y = y - (-x) \bmod y = y + x \bmod (-y) = y - (-x) \bmod (-y)$$

$$\forall x, y > 0, 0 \leq x \bmod y \leq y - 1 \Rightarrow 1 \leq x \bmod y \leq y$$

$$\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{Z}^+ (x + ay) \bmod y = x \bmod y$$

$$\forall x, y, r, s < 0, a = (r + s) \bmod y, \text{ entonces } (x + a) \bmod y = (x + r + s) \bmod y$$

$$\forall x, y > 0, (x + y) \bmod z = (x \bmod z + y \bmod z) \bmod z$$

**Función redondeo.**- Dado un número real  $x$ , la función redondeo da el valor entero más cercano a  $x$ , o sea

$$\text{cint}(x) = \text{int}(x + 0.5).$$

**Función máximo y mínimo.**- Sean  $x, y$  dos números reales, las funciones máximo y mínimo se definen como

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x > y \\ x \text{ ó } y & \text{si } x = y; \\ y & \text{si } x < y \end{cases}; \quad \min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x < y \\ x \text{ ó } y & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Estas funciones se pueden extender a cualquier conjunto de números reales.

**Función delta.**- Es una función de  $x$  tal que si  $x$  es igual a un parámetro  $a$ , la función es 1 y es 0 en caso contrario

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

Es posible encontrar varias representaciones de la función delta, por ejemplo

$$\delta(x - a) = \text{int}\left(\frac{1}{1 + |x - a|}\right),$$

válida para cualquier valor real de  $x$ . Si  $x$  es un número entero y positivo, lo que suele ocurrir frecuentemente, la función delta se puede poner de la forma

$$\delta(x - a) = \text{int}\left(\frac{x}{a}\right) \text{int}\left(\frac{a}{x}\right).$$

**Función anti-delta.**- Se trata de la función opuesta a la función delta. Es decir, si la variable  $x$  es igual al parámetro  $a$  el valor de la función es 0 y 1 en caso contrario

$$\bar{\delta}(x - a) = 1 - \delta(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

**Función salto.**- Es una función de  $x$  tal que si  $x$  es mayor o igual a un parámetro  $a$ , toma el valor 1 y 0 en caso contrario

$$\varepsilon(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Se define la función anti-salto por

$$\bar{\varepsilon}(x-a) = 1 - \varepsilon(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

En el caso frecuente en que  $x$  sea siempre menor que el doble de  $a$ , la función salto se puede representar por

$$c(x-a) = \text{int}\left(\frac{x}{a}\right).$$

**Funciones lógicas.**- Sea  $t$  una variable dependiente de las variables  $x, y$ ; la condición lógica

$$t = c \text{ si } x = a \boxed{Y} y = b; t = 0 \text{ en cualquier otro caso,}$$

se puede poner como

$$t = c\delta(x-a)\delta(y-b).$$

La condición

$$t = c \text{ si } x = a \boxed{O} y = b; t = 0 \text{ en cualquier otro caso,}$$

se puede expresar como

$$t = c[\delta(x-a) + \delta(y-b) - \delta(x-a)\delta(y-b)].$$

Las instrucciones  $\boxed{O}$  e  $\boxed{Y}$  se pueden mezclar, por ejemplo

$$t = d \text{ si } [x = a \boxed{O} x = c] \boxed{Y} y = b$$

se puede poner como

$$t = d[\delta(x-a) + \delta(y-c) - \delta(x-a)\delta(y-c)]\delta(y-b).$$

Otra instrucción lógica es la O exclusiva, por la cual  $t = c$  si se cumple sólo una de las dos siguientes condiciones:  $x = a$  ó  $x = b$

$$t = c \text{ si } x = a \boxed{Oex} y = b$$

lo expresamos como

$$t = c[\delta(x-a) + \delta(y-b) - 2\delta(x-a)\delta(y-b)].$$

Las condiciones lógicas se pueden establecer con desigualdades, por ejemplo

$$t = c \text{ si } x \geq a \boxed{Y} y = b$$

es equivalente a

$$t = c\varepsilon(x-a)\delta(y-b).$$

Es posible combinar las instrucciones lógicas anteriores, así como aumentar el número de variables. Por ejemplo, la siguiente instrucción

$$t = c \text{ si } x = a \text{ en cualquier otro caso } t = b$$

es equivalente a

$$t = c\delta(x-a) + b\bar{\delta}(x-a).$$

**Fracciones continuas.**- Consideremos un número real  $x$ , el cual queremos aproximar a una fracción. Este número se puede descomponer en su parte entera  $p_1$  y en la parte decimal, que la podemos poner como la inversa de un número real  $x_1$  mayor que la unidad

$$x = p_1 + \frac{1}{x_1},$$

podemos ahora volver a repetir la operación con el número real  $x_1$

$$x = p_1 + \frac{1}{x_1} = p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{x_2}},$$

a su vez el número  $x_2$  lo podemos volver a descomponer y así sucesivamente

$$x = p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{p_4 + \dots}}} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots\}.$$

Eligiendo los primeros  $n$  coeficientes obtenemos una fracción que se aproxima al número  $x$

$$x \approx \frac{r_n}{s_n} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Una ley de recurrencia para determinar las fracciones de orden  $n + 1$  es

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{p_{n+1}r_n + r_{n-1}}{p_{n+1}s_n + s_{n-1}}.$$

## B.- Teorema de congruencia lineal

**Enunciado.**- Sean dos conjuntos de números enteros, cuyos elementos representaremos por  $x$  e  $y$ . Supongamos que existe una correspondencia que asocia a cada elemento  $x$  uno y sólo un elemento  $y$ ; correspondiéndole, a su vez, a cada elemento  $y$ , al menos un elemento  $x$ . Si existe un número fraccionario  $A$  tal que cumpla la desigualdad

$$\max(y - Ax) - \min(y - Ax) < 1 \quad (1.B)$$

para todo par de valores  $x, y$ ; entonces es válida la relación

$$y = \text{int}(Ax + B) \quad (2.B)$$

donde  $B$  es otro número fraccionario definido por

$$B = \max(y - Ax), \quad (3.B)$$

a la (2.B) se le llama relación de congruencia lineal.

Si a las condiciones anteriores se le añade que la correspondencia sea biyectiva, entonces existe la relación inversa

$$x = \text{int}\left(\frac{y - B'}{A}\right)$$

donde

$$B' = \min(y - Ax) \tag{4.B}$$

Como los números  $B$  y  $B'$  tienen el mismo denominador que  $A$ , se puede poner

$$A = \frac{p}{r}; \quad B = \frac{q}{r}; \quad B' = -\frac{s}{r}$$

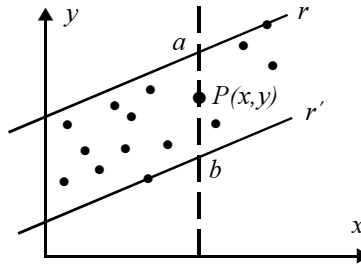
ahora se pueden expresar las relaciones de congruencia lineal de la forma

$$y = \text{int}\left(\frac{px + q}{r}\right); \quad x = \text{int}\left(\frac{ry + s}{p}\right),$$

a los números  $p, q, r$  y  $s$  se le llaman coeficientes de congruencia lineal. Estos coeficientes no suelen ser únicos, al igual que ocurre con  $A, B$  y  $B'$ .

**Demostración del teorema.-** Representemos en unos ejes coordenados todos los puntos  $(x,y)$ . Imaginemos la familia de rectas que teniendo pendiente  $A$  pasan por algún punto  $(x,y)$ . Elijamos dos de esas rectas  $r$  y  $r'$  caracterizadas por tener la mayor y menor ordenada en el origen posible. Entonces todos los puntos  $(x,y)$  se encuentran en o entre las rectas  $r$  y  $r'$ , no existiendo ningún punto fuera de la banda formada por ambas rectas. Bajo estas condiciones, las ordenadas en el origen de  $r$  y  $r'$  son los parámetros que antes hemos llamado  $B$  y  $B'$ .

Consideremos un punto determinado  $P(x,y)$ . Tal como muestra la gráfica  $a$  y  $b$  son las ordenadas de los puntos de corte de la recta perpendicular que pasa por el punto  $P$  con las rectas  $r$  y  $r'$  respectivamente.



Como se cumple la relación (1.B), podemos poner

$$B - B' = a - b < 1,$$

por la definición de las rectas  $r$  y  $r'$

$$a > y > b.$$

Combinando las dos últimas expresiones se llega a

$$a < y + 1,$$

o bien

$$y + 1 > a \geq y$$



o lo que es lo mismo

$$y = \text{int}(a),$$

pero al estar situado el punto  $(x, a)$  en la recta  $r$  deberá cumplirse

$$a = Ax + B$$

quedando

$$y = \text{int}(Ax + B),$$

el razonamiento se puede repetir para cualquier punto  $P$ , con lo que el resultado toma carácter general.

La demostración del teorema inverso es similar. Partimos de las ecuaciones de las rectas  $r$  y  $r'$ , pero convirtiendo ahora la  $x$  en la variable dependiente

$$x = \frac{y - B}{A}; \quad x = \frac{y - B'}{A}.$$

Nótese que ahora la recta  $r'$  es la que tiene mayor ordenada en el origen, o sea

$$-\frac{B'}{A} > -\frac{B}{A}.$$

La condición (1.B) se puede poner de la forma

$$\max\left(x - \frac{y}{A}\right) - \min\left(x - \frac{y}{A}\right) < 1$$

donde  $x - y/A$  es la ordenada en el origen de las rectas en el nuevo sistema de coordenadas. Ahora basta repetir el razonamiento anterior, para obtener el resultado

$$x = \text{int}\left(\frac{y - B'}{A}\right).$$

**Relación entre los coeficientes de congruencia lineal.**- Al considerar los coeficientes de congruencia lineal y usar la relación (1.B) se encuentra que debe cumplirse

$$\frac{q}{r} - \left(-\frac{s}{r}\right) < 1 \Rightarrow q + s < r;$$

como todos los coeficientes son números enteros, debe de existir un número positivo  $e$  tal que

$$q + s = r - e$$

cumpliéndose

$$r > e \geq 1$$

$r - e$  tiene que ser siempre positivo por ser  $B$  mayor que  $B'$ , o lo que es lo mismo  $q + s$  mayor que cero. Queremos demostrar que entre los varios valores posibles de  $A$  que cumplen la condición (1.B), existe al menos uno que hace tomar a  $e$  el valor 1.

Siempre podemos formar rectas  $r$  y  $r'$  que pasando por puntos  $(x, y)$  sean perpendiculares al eje horizontal y que contengan en su interior a todos los restantes puntos. La pendiente de esta recta no cumple la condición (1.B). A partir de aquí podemos obtener nuevos pares de rectas  $r$  y  $r'$  de pendientes  $A$  paulatinamente menores. La diferencia

entre los parámetros  $B$  y  $B'$  que le son asociados a la pendiente  $A'$ , será en un principio mayor que 1. A medida que vayamos disminuyendo la pendiente  $A'$  disminuirá la diferencia entre  $B$  y  $B'$ . Como  $q$  y  $s$  son números enteros, la disminución que vaya experimentando su suma, como consecuencia de la disminución de la diferencia entre  $B$  y  $B'$ , deberá ser a saltos de una unidad. Si seguimos eligiendo nuevos valores  $A'$  según el criterio anterior, llegará el momento en que el valor elegido de la pendiente cumpla la condición (1.B), a este primer valor de  $A'$  que cumple la condición le corresponde valores de  $q$  y  $s$  cuya suma será el mayor valor posible compatible con (1.B), es decir cumplirá

$$q + s = r - 1. \tag{5.B}$$

**Ejemplo.-** Consideremos la siguiente correspondencia:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	0	3	5	8	1	13	16
$y - Ax$	0	0.4	-0.2	0.2	-0.4	0	0.4

En la tercera fila aparecen los valores correspondientes a  $y - Ax$ , tomando como  $A$  la fracción  $13/5$ , obtenida por inspección. Vemos que para ese valor de  $A$  se cumple la condición (1.B), pues la diferencia entre  $B$  y  $B'$  es menor que la unidad

$$B - B' = 0.4 - (-0.4) = 0.8 < 1.$$

por tanto la relación de congruencia será

$$y = \text{int}\left(\frac{13x + 2}{5}\right),$$

y la relación inversa

$$x = \text{int}\left(\frac{y + 2/5}{13/5}\right) = \text{int}\left(\frac{5y + 2}{13}\right).$$

Los coeficientes de congruencia lineal son

$$r = 5; \quad p = 13; \quad q = 2; \quad s = 2$$

cumpléndose en este caso la relación (5.B).<sup>1</sup> Con estos coeficientes las relaciones de congruencia lineal son

$$y = \text{int}\left(\frac{72x + 16}{28}\right); \quad x = \text{int}\left(\frac{28y + 8}{72}\right).$$

Un tercer procedimiento para determinar el coeficiente  $A$  es usar la fórmula

$$A = \frac{1}{n} \text{c int}(na)$$

donde  $a$  es la pendiente de la recta de ajuste y  $n$  es un número natural que va del 1 en

1. Para obtener los coeficientes  $q$  y  $s$  se aplican las fórmulas (3.B) y (4.B). Nótese que la relación (5.B) sí se cumple para la fracción equivalente  $18/7$ .

adelante.<sup>2</sup> Para nuestro ejemplo las primeras fracciones son

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$A$	3/1	5/2	8/3	10/4	13/5	16/6	18/7	21/8	...

y ahora por tanteo se comprueba cuáles son los coeficientes  $A$  que cumplen la condición (1.B), resultando que pueden ser las fracciones 13/5, 18/7 y 21/8.

### Corolarios.-

*-Relación de congruencia lineal con excepciones.* Puede darse el caso que la relación considerada cumpla la condición (1.B) para todos los puntos excepto para uno (o varios) de ellos. Por ejemplo, supongamos que no se cumple cuando  $x = a$ . Podemos en este caso readaptar la relación de congruencia lineal, de tal forma que el punto  $x = a$  se encuentre excluido de la relación, esto se logra mediante

$$y = \text{int}[Ax + B + C\delta(x - a)],$$

donde  $A$  y  $B$  son coeficientes calculados al igual que antes pero sin tener en cuenta el valor  $x = a$ , mientras que  $C$  es un número tal que cuando  $x = a$  entonces la variable  $y$  toma el valor imagen de  $a$ .

*-Relación de congruencia poligonal de igual pendiente.* Hay situaciones en que no se cumple la condición (1.B) para todos los pares de valores  $x, y$ , a consecuencia de que a partir de  $x = a$  los puntos han sufrido un desplazamiento de su ordenada de valor  $C$ , entonces podemos hacer uso de

$$y = \text{int}[Ax + B + C\varepsilon(x - a)].$$

Es fácil generalizar estos corolarios para situaciones más complejas.

## C.- Fecha juliana

**El periodo juliano.-** El sistema juliano es un procedimiento de datación introducido por José Scaliger en el año 1582 y posteriormente aplicado al cómputo de los días por el astrónomo William Herschel en 1851.<sup>3</sup> Scaliger dejó constancia de las razones para darle el nombre de juliano a su ciclo: "Le he llamado periodo juliano porque se ajusta al año juliano."

El periodo juliano es el producto de los tres ciclos siguientes: el solar (de 28 años de duración), el de Metón (de 19 años) y el de indicción (de 15 años). El producto de estos tres periodos es de 7,890 años. Los orígenes de los tres periodos son tales que al año 1 de nuestra era le correspondió el 2 del ciclo de Metón, el 10 del ciclo solar y el 4 de

2. Otra opción sería usar la función entero en vez de la función redondeo, o sea

$$A = \frac{\text{int}(na)}{a}$$

3. Moyer, G., «The origin of the julian day system», *Sky and Telescope* 62 (1981) 311-312.

la indicción. Por tanto, los comienzos de los tres ciclos coincidieron en el año  $-4712$ , que se toma como el origen del primer periodo juliano. El segundo ciclo tendrá inicio en el año 3178.

**El día juliano.**- La cuenta de los días julianos comienza el 1 de enero del año  $-4712$  del calendario proléptico juliano, a las 12 horas de UT (o bien de otra escala de tiempo), aunque el denominado día juliano cronológico empieza, al igual que el día civil, a medianoche. El 1 de enero del  $-4712$  será el día juliano cronológico cero, aunque ese año es considerado como el primero del ciclo. Por tanto, el día juliano cronológico coincide con el día juliano astronómico a las 12 horas. El día juliano cronológico siempre toma un valor entero, no así el astronómico, que puede tener cifras decimales correspondientes a la fracción del día. En el capítulo 7 se trata con más detalles el día juliano<sup>4</sup>, estableciendo métodos para calcularlo a partir de la fecha de diversos calendarios.

## D.- Épocas besseliana y juliana

**El año ficticio de Bessel.**- Se define el año de Bessel como el tiempo que tiene que transcurrir para que la ascensión recta media del Sol aparente (es decir, teniendo en cuenta la aberración) aumente en 24 horas, tomando como inicio el momento en que la ascensión recta alcanza las 18 horas y 40 minutos o 280 grados.<sup>5</sup> Según la teoría de Newcomb (sobre la que en un principio se basó el concepto de año de Bessel), la ascensión recta aparente media del Sol referida al equinoccio medio de la fecha es

$$\alpha_m = 18^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}}.836 + 8\,640\,184^{\text{s}}.542 T + 0^{\text{s}}.0929 T^2$$

donde  $T$  son los siglos julianos contados desde las 12 horas del día 0 de enero del año 1900 en la escala de tiempo de las efemérides o tiempo terrestre.

El año de Bessel viene definido por la expresión

$$\alpha_m(T + a_B) - \alpha_m(T) = 86\,400$$

que al desarrollar nos queda

$$0.0929 a_B^2 + (8\,640\,184.542 + 0.1858 T) a_B - 86\,000 = 0,$$

ecuación de segundo grado que tiene por solución

$$a_B = 365^{\text{d}} 5^{\text{h}} 48^{\text{m}} 45^{\text{s}}.975 - 0^{\text{s}}.678 T.$$

que es ligeramente diferente del año trópico.

La elección del origen del año besseliano como aquel en que la ascensión recta media del Sol es de 280 grados, es debido a que este momento está muy cercano al comienzo civil del año. Al inicio del año 1900 ( $T = 0$ ) al Sol medio le faltaba todavía

---

4. Se suele usar el día juliano modificado *MJD* que empieza a contar desde el día 17 de noviembre de 1858, que tiene de día juliano cronológico 2 400 001. La relación entre el día juliano y el día juliano modificado es

$$MJD = J - 2\,400\,001.$$

5. Vives, T., *Astronomía de posición*, Alhambra, 1971, pp. 310-314.

$$18^{\text{h}} 40^{\text{m}} - 18^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}}.836 = 74^{\text{s}}.164$$

para llegar al punto desde donde debe comenzar el primer año de Bessel. La rapidez con que varía la ascensión recta del Sol es

$$\frac{d\alpha_m}{dT} = 8\ 640\ 184^{\text{s}}.542 + 0^{\text{s}}.1858T$$

expresado en segundos por siglo juliano. Si dividimos entre 36 252 se obtendrá

$$\frac{d\alpha_m}{dT} = 236^{\text{s}}.555\ 360\ 493 + 0^{\text{s}}.000\ 005\ 087T$$

cuya unidad es segundos por día. Entonces los 74.164 segundos que le faltan a la ascensión recta para llegar al punto de inicio del año besseliano será recorrido en

$$\frac{74^{\text{s}}.164}{236^{\text{s}}.555\ 360} = 0^{\text{d}}.313\ 516.$$

Esto quiere decir que el año besseliano del 1900 comenzó 0.313 517 días después del comienzo de la fecha de referencia ( $T = 0$ ), que es las 12 horas del día 0 de enero (ó 31 de diciembre del año anterior); es decir, el año besseliano 1900 (que se representa por B1900.0) fue el día 0.813 516 de enero del año 1900, expresado como hemos dicho antes en tiempo terrestre.

**La época besseliana.**- En el año 1976 la Unión Astronómica Internacional redefinió los conceptos anteriores. Estableció una duración constante del año besseliano e igual a la duración del año trópico en el año B1900.0. Para calcular el segundo año besseliano se le suma a la fecha de comienzo del primer año, la duración del año trópico 365.242 198781 días de tiempo uniforme, y se le quita la duración del año 1900, que fue de 365 días, ya que por la regla gregoriana no fue bisiesto. Por lo tanto, el segundo año besseliano comenzó el 1.055 715 de enero de 1901.

En la siguiente tabla colocamos los días que median desde el comienzo del año civil (el 1 de enero) y el comienzo del año besseliano. Si la cantidad es negativa, significa que el año de Bessel comienza antes del año civil.

Año	Diferencia
1950	-0.077
2000	+0.033
2050	-0.856
2100	-0.747

La relación entre la época besseliana y el día juliano viene dada por

$$J = (B - 1900) \times 365.242\ 198\ 781 + 2\ 415\ 020.31352$$

donde  $B$  representa la época besseliana cuyo día juliano,  $J$ , queremos calcular.

**La época juliana.**- Tomemos como punto de partida para el cálculo de la época juliana las 12 horas de tiempo uniforme del día 1 de enero del año 2000. Las siguientes épocas julianas se calculan añadiendo a la anterior fecha la duración del año juliano, o

sea 365.25 días. La relación entre la época juliana y el día juliano es

$$J = 365.25(A - 2000) + 2\,451\,545$$

donde  $A$  representa el año para el que queremos calcular la época juliana.

En la siguiente tabla aparece la fecha gregoriana del comienzo de las distintas épocas julianas

Época	Fecha
J1900.0	31.5-enero-1899
J2000.0	1.5-enero-2000
J2100.0	1.5-enero-2100
J2200.0	2.5-enero-2200
J2300.0	3.5-enero-2300

## E.- Notación de fechas y tiempo

**Representación de fechas.-** En el año 1988 la Organización Internacional de Normalización ISO publicó su norma ISO 8601 sobre representación de fechas y tiempo, que fue adoptada por la Unión Europea. La norma ISO 8601 define por añadido un nuevo calendario, que utiliza como unidad principal la semana en vez del día, como es habitual en los demás calendarios. Este calendario ISO es especialmente adecuado para programar aquellas actividades que se basan en la semana en vez del día.

Las normas sobre formato y representación de fechas y tiempo vienen a unificar la multitud de notaciones que imperan por doquier. Una fecha como el 19 de julio del año 2000 la vemos representado de multitud de formas: 19-7-2000; 19-VII-2000; 7-19-2000; 19-julio-2000; 19-07-00 y muchas más. La norma ISO 8601 viene a establecer una forma coherente y lógica de hacer la representación de las fechas y los instantes de tiempo.

La forma básica de representación de fechas viene dada por la notación CCYY-MM-DD, es decir colocando primero el año con cuatro cifras CCYY, le sigue el mes y el día, ambos con dos cifras MM y DD, referenciados al calendario gregoriano y separadas todas las cifras por un guión. Nuestra fecha ejemplo deberá ponerse como 2000-07-19, con la lógica de poner inicialmente la unidad mayor (el año) y al final la unidad más pequeña (el día).

Existen varias maneras de simplificar la anterior notación. Está permitido representar la fecha omitiendo los guiones, por ejemplo 20000719, lo que es adecuado para programación informática. Está permitido eliminar las cifras de las centenas del año, por ejemplo 00-07-19. Cuando el día no es significativo se elimina, como por ejemplo 2000-07. Existen aún otras simplificaciones de las fechas.

**Representación de semanas.-** La norma ISO 8601 define como primer día de la semana el lunes, asociándole el número 1, siendo el 7 el que corresponde al domingo. La primera semana del año es aquella que contiene el primer jueves de ese año, o equivalentemente, aquella que incluye el día 4 de enero. Es decir, que la primera semana del año puede comenzar en los días comprendidos entre el 29 de diciembre y el 4 de

enero ambos inclusive, tal como se ve en la siguiente tabla

Día 1 de enero	Primer jueves	Comienzo del año ISO
Lunes	4-enero	1-enero
Martes	3-enero	31-diciembre
Miércoles	2-enero	30-diciembre
Jueves	1-enero	29-diciembre
Viernes	7-enero	4-enero
Sábado	6-enero	3-enero
Domingo	5-enero	2-enero

La definición del orden semanal hace que el año pueda tener en algunas ocasiones 52 semanas y en otras 53, variando su número de días entre 364 y 371.

La forma de representar las semanas utiliza el patrón CCYY-Www-D. Por ejemplo: 2000-W29-3 significa el día 3 (miércoles) de la semana número 29 del año 2000. Se admiten simplificaciones, tal como eliminar los guiones 2000W293; eliminar el día semanal 2000-W29 e incluso eliminar las dos primeras cifras del año 00-W29, o bien 00W29.

Existe un método complementario de representar las fechas sin necesidad de utilizar la división mensual ni la semanal, es decir contando ininterrumpidamente los días desde el comienzo del año, la notación sería CCYY-DDD, por ejemplo: 2000-211 sería el día 211 del año 2000.