Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Investigación en Educación Matemática XIX

3, 4 y 5 de septiembre de 2015 · Facultad de Educación

Departamento de Innovación y Formación Didáctica   Área de Didáctica de la Matemática
http://web.ua.es/es/investigacion-educacion-matematica/

Editoras
Ceneida Fernández Verdú   Marta Molina González   Núria Planas Raig

Organizan
UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departament d'Innovació i Formació Didàctica
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
SEIEM

Colaboran
UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Vicerrectorado de Campus y Sostenibilidad
Facultad de Educación
GENERALITAT VALENCIANA
1881 VALOR CHOCOLATES
MELIÃ ALICANTE

Investigación en Educación Matemática

XIX

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Investigación en Educación Matemática

XIX

Ceneida Fernández, Marta Molina y Núria Planas (eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Alicante, 3, 4 y 5 de septiembre de 2015

Investigación en Educación Matemática XIX

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Ceneida Fernández Verdú
Marta Molina González
Núria Planas Raig

Cítese como:

C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX*. Alicante: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

***Diseño de la portada**: Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante*.

Servicio editorial: Universidad de Alicante
ISBN: 978-84-9717-385-8
ISSN: 1888-0762
Depósito legal: A 602-2015

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se reúne anualmente desde su creación en 1996 siendo estas actas las correspondientes al XIX Simposio celebrado los días 3, 4 y 5 de septiembre de 2015 en la Universidad de Alicante.

En estos diecinueve años se ha podido comprobar cómo los grupos de investigación que conforman la sociedad se han ido consolidando y desarrollando diferentes líneas de investigación en Educación Matemática. Este hecho, ha permitido que las investigaciones realizadas en España sobre Educación Matemática vayan evolucionando al mismo tiempo que lo hace la SEIEM. Por otra parte, en los últimos años, ha crecido la participación de jóvenes investigadores en la Sociedad debido al aumento en el número de alumnos de máster y doctorado que van participando en las actividades de la sociedad, presentando sus avances de investigación. Es por esto, que por primera vez en este Simposio, se celebrará una sesión dedicada a investigadoras e investigadores jóvenes con el fin de fomentar el contacto y la intercomunicación científica entre ellos. Además, durante estos años también ha ido creciendo la participación de investigadores portugueses e hispanoamericanos en el Simposio, bien en forma de ponencias invitadas o de comunicaciones individuales o conjuntas con investigadores españoles.

Continuando con la estructura de los anteriores Simposios se realizan diferentes tipos de actividades: dos seminarios con ponentes invitados, tres sesiones con la presentación de comunicaciones por diferentes investigadores sujetas a un proceso de evaluación por pares, espacios de discusión de los grupos de trabajo formados por investigadores que comparten una línea de investigación común, presentación de pósteres, y la sesión dedicada a los jóvenes investigadores.

El seminario de investigación 1 coordinado por José Luis Lupiáñez de la Universidad de Granada, y titulado *Investigaciones sobre Pensamiento Numérico y Algebraico* cuenta con dos ponencias, una presentada por José Luís González Marí de la Universidad de Málaga, que versa sobre los principales modelos y marcos teóricos que se emplean en la actualidad en la investigación en Pensamiento Numérico en España. La otra ponencia presentada por David Arnau de la Universidad de Valencia muestra los fundamentos del diseño de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. Ambas ponencias han sido replicadas respectivamente por Francisco Gil de la Universidad de Almería y Antonio Moreno de la Universidad de Granada.

El seminario de investigación II coordinado por Carmen Batanero de la Universidad de Granada y titulado *Investigación en Didáctica de la Probabilidad* cuenta con tres ponencias. La primera presentada por José Miguel Contreras de la Universidad de Granada y realizada en colaboración con Emilse Gómez de la Universidad Nacional de Colombia y Carmen Batanero, presenta una caracterización de la probabilidad en los libros de texto de la Educación Primaria correspondientes al Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006). La segunda ponencia presentada por Ernesto Sánchez y realizada en colaboración con Julio César Valdez, ambos del CINVESTAV-IPN (México) versa sobre cómo los estudiantes articulan sus conocimientos sobre los enfoques de probabilidad para dar respuesta a preguntas de probabilidad. En la tercera ponencia presentada por Pedro Huerta de la Universidad de Valencia, se realiza una reflexión sobre la resolución de problemas de probabilidad en la formación de maestros y profesores.

Se incluyen en las actas un total de 43 comunicaciones de las 77 inicialmente presentadas y evaluadas a través de un proceso de revisión por pares doble-ciego (55.84% de aceptación) y coordinado por el comité científico del Simposio. También se incluyen en las actas los 31 resúmenes de los pósteres presentados y aceptados en el Simposio.

El programa de jóvenes investigadores, celebrado el 2 de septiembre de 2015, consta de dos partes. La primera consta de una charla-coloquio titulada *Primeros pasos en el mundo de las publicaciones* cuyas ponentes son Núria Planas de la Universidad Autónoma de Barcelona y Ceneida Fernández de la Universidad de Alicante. La segunda parte consta de una sesión grupal titulada *Conociendo nuestros trabajos de investigación e inquietudes* cuyo coordinador es Matías Arce de la Universidad de Valladolid.

Por otra parte, queremos agradecer al Dr. Tomás Ortega del Rincón de la Universidad de Valladolid, como anterior presidente y al Dr. José Carrillo Yañez como presidente actual de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y a los componentes de la Junta Directiva por la elección de la Universidad de Alicante como sede del XIX Simposio de la SEIEM así como el apoyo dado al Comité Organizador Local.

Igualmente, agradecemos a la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana la ayuda económica concedida, a la Universidad de Alicante la cesión de las instalaciones y a la Facultad de Educación y al Departamento de Innovación y Formación Didáctica el apoyo dado para la celebración de este evento. También agradecer a Chocolates Valor, al Hotel Meliá Alicante y al Patronato Municipal de Turismo de Alicante por su colaboración, al Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante por la ayuda en el diseño de los carteles y dípticos de difusión.

No puedo terminar esta presentación sin antes dar mi más sincero agradecimiento, como coordinadora del Comité Local, a todos sus miembros y a todos los estudiantes de doctorado, de máster y grado que nos han brindado su ayuda durante todos estos meses de trabajo. Un agradecimiento especial también a Mª Teresa Picó Alemany y a Rosa N. Quiles Gadea, administrativas del Departamento de Innovación y Formación Didáctica, por la ayuda recibida desde la gestión.

Alicante, Septiembre de 2015

Ceneida Fernández Verdú

Coordinadora del Comité Local

Seminario I

Investigaciones sobre Pensamiento Numérico y Algebraico

Coordinador

José Luis Lupiáñez, Universidad de Granada.

Introducción seminario de investigación I: Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico.

Ponentes

José Luis González Marí, Universidad de Málaga.

Modelos y marcos teóricos en la investigación en pensamiento numérico en España.

David Arnau, Universitat de València**.**

Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales.

Replicantes

Francisco Gil, Universidad de Almería**.**

Réplica a la ponencia: Modelos y marcos teóricos en la investigación en pensamiento numérico en España del profesor José Luis González Marí.

Antonio Moreno, Universidad de Granada.

Réplica a la ponencia: Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales del profesor David Arnau.

INVESTIGACIONES SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

Research on numerical and algebraic thinking

Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Uno de los objetivos que se propuso en la creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, fue el de que se asumiera la responsabilidad de promover la creación y estabilización de grupos de investigadores en Educación Matemática, que abordaran problemas de indagación específicos y que generaran una producción científica de calidad. La constitución del grupo "Pensamiento Numérico y Algebraico" obedeció a esa finalidad.

Aunque el núcleo de las investigaciones desarrolladas en el seno de este grupo lo constituyen los estudios sobre las estructuras numéricas y las relaciones algebraicas, como fundamentos básicos de las matemáticas y del lenguaje matemático, lo cierto es que las investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico abarcan una amplia variedad de estudios y cuestiones. Algunas de las líneas de indagación prioritarias de este grupo son los fundamentos de los conjuntos y estructuras numéricas, los sistemas de representación, los procesos y dificultades de aprendizaje y comprensión de esas estructuras y los modos con que los escolares interpretan y emplean conocimientos y procedimientos propios de ellas para resolver problemas en una variedad de situaciones (Lupiáñez y Rico, 2009; Verschaffel, Greer y Torbeyns, 2006). También se exploran cuestiones relacionadas con el significado y el manejo del lenguaje algebraico y su relación con otras formas de expresión, el aprendizaje y las dificultades en el trabajo con relaciones y expresiones algebraicas, incógnitas o variables, el pensamiento matemático avanzado o el álgebra temprana. La invención y la resolución de problemas (Filloy, Puig y Rojano, 2008) y el uso de materiales estructurados y de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas (Kieran, 2006), han sido especialmente visibles en un gran número de investigaciones.

Por otro lado, aunque pueden encontrarse prioridades concretas a cada uno de esos dos pensamientos, numérico y algebraico, los problemas derivados de la enseñanza y del aprendizaje en estos dos campos son similares y las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes. Así, es posible identificar investigaciones centradas en escolares de todos los niveles educativos, en la formación inicial de profesores o en el desarrollo profesional de docentes en ejercicio. También se han llevado a cabo estudios de tipo histórico, focalizados en determinados autores, obras o épocas, y se han analizado gran variedad de textos escolares y de documentos curriculares.

Toda esta variedad de estudios se puede constatar en la dilatada producción de los miembros de este grupo. Una revisión de las conferencias y comunicaciones presentadas en los distintos simposios de la Sociedad, de las tesis doctorales defendidas y de las aportaciones en las reuniones intermedias del grupo, dan buena cuenta de este hecho[i] (Lupiáñez, Puig y González-Calero, en prensa).

En este seminario de investigación se presentan y ejemplifican varias de las cuestiones y problemas que aborda el grupo "Pensamiento Numérico y Algebraico", por parte de especialistas con una dilatada experiencia. Están organizadas según se centren en la faceta numérica o algebraica.

En la conferencia que presenta José Luis González Marí, de la Universidad de Málaga, se propone una caracterización de los métodos y tendencias de investigación en el campo del pensamiento numérico. Para ello, el autor comienza con una caracterización de esta área de indagación y

Lupiáñez, J. L. (2015). Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 17-19). Alicante: SEIEM.

describe varios grupos y autores que desarrollan su actividad investigadora en ella. A continuación, propone y justifica una serie de descriptores que le permiten clasificar y organizar una gran cantidad de estudios realizados, modelos desarrollados y aplicados y prioridades de investigación ya consolidadas. Aunque el autor sostiene la no exhaustividad y la no completitud de su propuesta, ciertamente su trabajo pone de manifiesto la pluralidad de intereses, problemas y resultados de la investigación sobre pensamiento numérico.

La réplica a este trabajo la desarrolla Francisco Gil, de la Universidad de Almería, y precisamente se inicia con el reconocimiento de la dificultad de establecer una categorización de este tipo de investigaciones. Pudiéndose entender como alternativa al trabajo de González Marí, por la especificidad del contenido, o como complemento por la identificación de otras prioridades, Gil ha revisado dos trabajos de referencia que le permiten organizar los focos de atención de estudios sobre conjuntos numéricos y aritmética. Estas nuevas revisiones le permiten ejemplificar cambios en esas prioridades a lo largo del tiempo, que entre otros efectos, ha traído consigo la consolidación de nuevas áreas de investigación.

La segunda conferencia la brinda el profesor David Arnau, de la Universidad de Valencia. En este caso, su aportación se centra en pensamiento algebraico y considera la utilización de un sistema tutorial inteligente que simula actuaciones del profesor y que permite promover el desarrollo de la competencia matemática de los escolares mediante la resolución de tareas algebraicas. Una revisión de antecedentes le permite identificar dos usos clave de sistemas interactivos para el aprendizaje, los centrados en las relaciones entre diferentes sistemas de representación y los que proponen el empleo de sistema de inteligencia artificial. En este segundo caso, su vínculo con la resolución de problemas es desarrollado con detalle; en ese contexto presenta una investigación que tiene como objetivo "describir la base teórica sobre la que se han diseñado los componentes de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos". Una descripción y justificación de ese sistema unido a una propuesta de enseñanza basada en su empleo, permiten a Arnau reflexionar sobre su relevancia, su impacto en el aprendizaje y en la enseñanza y delimitar varias líneas de actuación futuras.

La réplica a esta intervención la lleva a cabo Antonio Moreno, de la Universidad de Granada, quien sintetiza las ideas clave del trabajo de Arnau para después describir puntos fuertes y débiles a sus planteamientos y supuestos sobre sistemas tutoriales y sobre el papel del profesor. La réplica finaliza con una serie de puntos para la discusión y el debate en torno a tres facetas clave: el papel del profesor en un modelo de enseñanza en el que se empleen estos sistemas tutoriales, sobre el modelo cognitivo que se asume y que expresa un modo de entender y promover el aprendizaje escolar y sobre el modelo de competencia que postula las expectativas formativas a conseguir con el empleo de este tipo de sistemas.

Me gustaría cerrar esta presentación con mi más sincero agradecimiento a la Junta Directiva de la SEIEM y al Comité Científico de este Simposio por invitarme a organizar el seminario y, sobre todo, a los cuatro compañeros que lo han hecho posible con su trabajo. Espero que las conferencias y sus respectivas réplicas susciten el interés y el debate de todos los asistentes.

Referencias

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. Nueva York: Springer.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of Algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 11-49). Róterdam, Holanda: Sense Publishers.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2009). Research in Mathematics Education: Numerical Thinking. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 239-242.

Lupiáñez, J. L., Puig, L. y González-Calero, J. A. (en prensa). Pensamiento numérico y algebraico e historia de las matemáticas y educación matemática. *Ensayos, 30*(1), 2015.

Verschaffel, L., Greer, B. y Torbeyns, J. (2006). Numerical Thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51-82). Róterdam, Holanda: Sense Publishers.

---

[i] En los boletines de la Sociedad se pueden consultar las tesis defendidas y las comunicaciones presentadas en las reuniones del grupo. En su página web también se pueden descargar buena parte de esas contribuciones: http://www.seiem.es/gruposdetrabajo/pna.htm.

MODELOS Y MARCOS TEÓRICOS EN LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESPAÑA

Models and theoretical frameworks in research on numerical thinking in Spain

González Marí, J. L.
Universidad de Málaga

Resumen

Se presenta una breve revisión de los principales modelos y marcos teóricos que se emplean en la actualidad en la investigación en Pensamiento Numérico en España. Se adopta para ello una clasificación que no pretende ser exhaustiva; tampoco se mencionan todas las aportaciones que se pueden incluir en cada una de las categorías, de las que sólo se incluye una breve descripción junto a algunas referencias recientes. Después de analizar las relaciones que se pueden apreciar entre algunos marcos, se examina la situación actual y futura de la investigación en el campo de estudio y se hace una apuesta por una mayor atención a la investigación para la innovación en el aula ordinaria de Matemáticas.

Palabras clave: *pensamiento numérico, didáctica de la matemática, métodos de investigación, educación matemática*

Abstract

In this paper I present a brief review of the main models and theoretical frameworks that are currently used in research in numerical thinking in Spain. A classification which does not intend to be exhaustive is adopted and not all the potential contributions to be included in each category are mentioned; only a brief description is included along with some recent references. After analyzing the relationships between some frameworks, present and future research is examined in the field of study and a greater attention to research for innovation in regular mathematics classrooms is recommended.

Keywords: *numerical thinking, didactic of mathematics, research methods, mathematics education*

INTRODUCCIÓN

Los modelos y marcos teóricos de las investigaciones en un campo científico son referencias privilegiadas para conocer mejor los problemas propios del campo, el enfoque desde el que se abordan y el estado general del conocimiento sobre dichos problemas. Más aún, un marco teórico:

> - "...cumple el papel fundamental de participar en la producción de nuevo conocimiento…
> - permite orientar la investigación, el enfoque epistemológico, la formulación de preguntas y señalar los hechos significativos que deben indagarse...
> - hace posible el enunciado de afirmaciones que posteriormente se habrán de someter a comprobación empírica…
> - brinda un marco de referencia para interpretar los resultados y establecer nuevas líneas y áreas de investigación...
> - constituye una guía para mantener el enfoque, centrar el problema e impedir la desviación del planteamiento original." (Schanzer, 2015)

Hasta ahora, tal y como indican Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011), las investigaciones en educación matemática se han analizado desde el punto de vista de su visibilidad

González Marí, J. L. (2015). Modelos y marcos teóricos en la investigación en pensamiento numérico en España. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 21-37). Alicante: SEIEM.

internacional (Llinares, 2008), la producción de tesis doctorales (Vallejo, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008) y la publicación de artículos científicos en revistas españolas (Bracho, 2010). Recientemente se han analizado también las metodologías utilizadas (Godino y otros, 2011), las líneas de estudio (Palarea y Hernández, 2014), los contenidos (Gómez y otros, op.cit) y las aportaciones a los Simposios de la SEIEM (Maz-Machado, Bracho, Torralbo y Gutiérrez, 2011). En este trabajo se presentan los resultados de un breve análisis de los modelos y marcos teóricos de las investigaciones nacionales en pensamiento numérico, para lo que hemos tenido en cuenta las aportaciones que tienen que ver con la iniciación al Álgebra, con las relaciones entre el Pensamiento Algebraico, Geométrico o Matemático Avanzado y el Pensamiento Numérico, con los estudios sobre Pensamiento y Creencias del Profesor de Matemáticas, las que se abordan en el campo de la Cienciometría, entre otras publicadas en reuniones y documentos de los quince últimos años; del mismo modo, hemos aprovechado la oportunidad para realizar una selección de estudios de las distintas tendencias analizadas.

PENSAMIENTO NUMÉRICO: LÍNEAS Y GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

Bajo la denominación "Pensamiento Numérico" se identifica una línea o marco general que estudia las estructuras numéricas y los sistemas de representación con los que se expresan conceptos y relaciones en el sistema escolar. En otras palabras, "los modos con que los escolares interpretan y, en su caso, responden a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas cuando los abordan mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica" (Rico, 2015).

"La investigación en Pensamiento Numérico aborda problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos numéricos empleando bases teóricas y metodológicas bien delimitadas y abarcando tanto estudios empíricos (observacional, etnográfico, experimental, cuasi-experimental y estudios de caso) como ensayos teóricos, históricos o epistemológicos" (Rico, 2015). El grupo Didáctica de la Matemática - Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada concibe la actividad investigadora en el campo como: "un modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante uso prioritario de las estructuras numéricas como herramientas conceptuales" (Grupo fqm193, 2015). A partir de esta idea el trabajo se centra en:

- La organización conceptual de sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura matemática, y las interrelaciones entre tales sistemas.
- La elaboración y construcción de sistemas simbólicos, así como la organización, sistematización y desarrollo de diferentes capacidades y competencias basadas en los campos conceptuales mencionados.
- Los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica o algebraica.

Varias son las líneas de investigación y diversos los trabajos de investigación que se han desarrollado en los últimos años (Palarea y Hernández, 2014) empleando una diversidad de métodos (Godino et al, 2011). También son diversos los grupos de profesores que desarrollan su labor investigadora en este campo, destacando los siguientes grupos y Universidades:

- Un grupo interuniversitario en las Universidades de Almería, Córdoba, Granada y Málaga. En particular, en la Universidad de Almería se vienen desarrollando, entre otros, estudios sobre formación de profesores; en la Universidad de Córdoba se apuesta por el uso de materiales didácticos, por la investigación histórica y por el desarrollo del sentido numérico; en la Universidad de Granada se atiende a la historia de las matemáticas, las concepciones sobre el límite finito de una función, la resolución de problemas, los sistemas de representación, y la formación de maestros y profesores de matemáticas, entre otros temas de interés, siendo el grupo mayoritario en la Comunidad Autónoma Andaluza. Por su parte, en la Universidad de Málaga se viene trabajando sobre la comprensión del conocimiento numérico y aritmético, la formación de maestros de Educación Primaria, la cognición matemática en la edad infantil mediante el uso de metodología multimedia y otras TIC y el concepto de límite de sucesiones y funciones.

- Un grupo en la Universidad de Valencia, dedicado a la configuración histórica de la aritmética y el álgebra escolar y su interrelación con el desarrollo numérico al amparo de los modelos teóricos locales. Algunas de las principales actividades llevadas a cabo en este marco son el análisis histórico de la enseñanza en los libros de texto (¿qué se ha enseñado?, ¿cómo se ha enseñado?) y el análisis del desarrollo conceptual o cómo construyen el conocimiento los estudiantes de los diversos niveles. Asimismo se ha prestado atención a la fundamentación de sugerencias para el currículum y a la elaboración de propuestas didácticas que puedan ser contrastadas mediante el estudio de la comprensión de los estudiantes.
- Un grupo en la Universidad de La Laguna, trabajando sobre distintos aspectos en Pensamiento Numérico y Algebraico, en particular sobre resolución de problemas verbales aritméticos en base a un modelo de competencias siguiendo un enfoque denominado ELOS. Los estudios dentro de este enfoque se centran, como se explica con más detalle más adelante, en errores y dificultades y la utilización de sistemas de representación yuxtapuestos. Del mismo modo, son de destacar los estudios realizados sobre los números enteros y la resolución de problemas con dichos números.
- En otras Universidades se encuentran trabajando profesores y grupos de profesores sobre temas relacionados con la investigación en el campo del Pensamiento Numérico.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN; CRITERIOS, CATEGORÍAS Y PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS

El estudio realizado pretende identificar y delimitar los modelos y marcos teóricos que sustentan las investigaciones en Pensamiento Numérico en España y establecer una categorización que permita situar convenientemente, en unas pocas clases, la mayoría de los estudios tanto específicos como relacionados con dicho campo.

Hemos elegido una terminología especial para realizar la clasificación y unos criterios que responden a una manera de ver las investigaciones en Educación Matemática, en general, y en Pensamiento Numérico, en particular. En cuanto a la terminología se ha tenido en cuenta lo siguiente:

- identificar el núcleo de la investigación, el elemento central y determinante del estudio, valorando seguidamente el papel y la contribución de los demás aspectos relevantes y definitorios del trabajo al resultado final y a la línea de estudio en su conjunto;
- analizar la evolución y la situación actual de las investigaciones así como de los modelos y marcos teóricos;
- suprimir cualquier consideración sobre la capacidad productiva, la evolución previsible o las perspectivas futuras de los estudios.

La denominación de cada bloque de estudios, modelo, tendencia o marco teórico hace alusión, por tanto, a la denominación conocida en tendencias consolidadas y, en caso de duda, al elemento central del núcleo de la investigación.

En cuanto a la clasificación, las categorías utilizadas no han resultado ser exhaustivas ni mutuamente excluyentes, aunque el sistema de categorías se ha establecido inicialmente con la intención de organizar el mayor número posible de estudios. Dicho esto, puede ocurrir que algunos tipos de investigaciones queden fuera de la clasificación y que haya estudios que se puedan situar en varios marcos y modelos. Por otra parte, la inclusión de los estudios en alguna de las categorías no siempre ha sido inmediata, en unos casos por la multiplicidad de aspectos involucrados y en otros por las dudas surgidas en cuanto al propósito central del estudio del que la publicación constituye un fragmento.

Por otra parte, junto a las características de los fundamentos teóricos de cada tipo de estudio, se han analizado los marcos teóricos definidos para comprobar si las investigaciones realizadas contribuyen en mayor o menor medida a satisfacer las demandas del Sistema Educativo enumeradas por Font (2011). En este sentido se relacionan los fundamentos teóricos de las investigaciones con su capacidad de dar respuestas a los problemas reales del Sistema Educativo. Font enuncia dichas demandas en los siguientes términos:

> Primera demanda: herramientas para analizar las diferentes maneras de organizar el contenido matemático;
> Segunda demanda: ¿cómo se produce la emergencia de los objetos matemáticos a partir de contextos extra matemáticos?;
> Tercera demanda: conocimiento de las dificultades de comprensión de los contenidos matemáticos;
> Cuarta demanda: incorporación de las TIC;
> Quinta demanda: atención a la diversidad;
> Sexta demanda: transición entre etapas;
> Séptima demanda: desarrollo y evaluación de procesos y competencias;
> Octava demanda: desarrollo de competencias profesionales; (pp. 169-192)

En el presente trabajo se analizan los marcos y fundamentos teóricos de las investigaciones en Pensamiento Numérico, según su capacidad para dar respuestas a los problemas antes enunciados.

MODELOS Y MARCOS TEÓRICOS EN LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO

En lo que sigue se agrupan bajo diferentes categorías y denominaciones las investigaciones y líneas de estudio que presentan, a nuestro entender, características comunes en cuanto a fundamentos, modelos, enfoques y/o tipos de trabajos. Los modelos y marcos teóricos que hemos identificado son los que se mencionan a continuación agrupados en bloques de características similares. En cada caso se hace una breve descripción de las principales características, se menciona la contribución a los problemas educativos generales y se detallan referencias que, a modo de ejemplos, se ajustan al modelo o marco analizado.

De carácter fundamental / básico

Una de las primeras referencias de la investigación en Educación Matemática se centra en el conocimiento matemático, su historia, epistemología y fenomenología. La información en estos campos se suele considerar básica para el estudio de los fenómenos de la Educación Matemática, y es en este sentido en el que se realizan las indagaciones en estos campos, más allá del mero interés histórico, matemático, epistemológico o fenomenológico de los resultados; para nosotros es evidente que toda incursión en dichos campos desde el ámbito de la investigación educativa en matemáticas se realiza con la mirada puesta en la Educación Matemática.

En todos los casos se trata de estudios que atienden a la primera demanda del Sistema Educativo: historia, textos clásicos, análisis del contenido y análisis didáctico (Font, 2011).

Dentro de este gran grupo podemos distinguir varios subgrupos, de entre los que destacamos por su importancia los siguientes:

Matemáticas, Historia y Epistemología

Marco teórico general en el que hemos situado las investigaciones que consideran la Historia y la Epistemología como fuentes privilegiadas, directa o indirectamente, necesarias aunque no siempre suficientes, del conocimiento didáctico en matemáticas. Algunos de dichos estudios se centran exclusivamente en la indagación histórica y/o epistemológica, mientras que otros se extienden algo más para tratar algunas consecuencias de los análisis realizados. Tanto en esta categoría como en la siguiente, hemos incluido el término Matemáticas porque entendemos, como así ocurre en algunos de los estudios, que el conocimiento matemático formal está presente y es necesario realizar incursiones en las definiciones y teorías matemáticas relacionadas con el conocimiento matemático involucrado.

Los estudios referenciados en Gómez y Sanz (2014) y Maz-Machado, Torralbo y Rico (2006) se han ocupado de indagar en la historia y analizar sus contenidos manteniendo algún hilo conductor con el campo y los problemas propios de la Educación Matemática en general y del Pensamiento Numérico en particular.

Matemáticas, Epistemología y Fenomenología

El conocimiento en profundidad de las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático relacionado con un problema didáctico puede contribuir de manera significativa a la resolución del problema, a plantear otros problemas relacionados o a analizar el problema desde puntos de vista diferentes. Los siguientes estudios se centran, aunque no de forma exclusiva, en los aspectos epistemológicos y fenomenológicos de conocimientos numéricos: Maz-Machado, López y Sierra (2013) y González (1995).

Por su parte, los estudios de Sánchez, Claros y Coriat (2011) y Claros, Sánchez y Coriat (2014) abordan la fenomenología del concepto de límite desde una perspectiva novedosa que involucra aspectos de lo que se conoce como sentido numérico y establecen los fundamentos de un marco teórico y metodológico para el estudio del límite.

De carácter instrumental (Análisis Didáctico)

Los modelos instrumentales se aglutinan bajo la denominación genérica "Análisis Didáctico" (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), que adquiere una utilidad diversa en función del campo de estudio al que se aplica y de la finalidad del trabajo. En todos los casos se trata de estudios que atienden a la primera demanda del Sistema Educativo: historia, textos clásicos, análisis del contenido, análisis didáctico (Font, 2011), pero, además, en cada uno de los casos que se presentan a continuación, los estudios responden también a otras necesidades y dan respuesta a problemas relevantes para la mejora de la educación matemática.

Análisis Didáctico como Instrumento para organizar y fundamentar investigaciones (un verdadero estudio teórico de la información y no sólo un tratamiento especial de los antecedentes)

Método cualitativo que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección y tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática mediante un procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1995, 1998a, 1998b). Su necesidad se basa, por un lado, en la naturaleza compleja de los fenómenos, incluidas la multidisciplinariedad y la interdisciplinariedad del campo y la situación incipiente de numerosos conocimientos, y, por otro, en las características de la información y las fuentes disponibles, cuya dispersión y amplitud son notables y aconsejan un tratamiento meta-analítico que no se puede limitar a la mera revisión tradicional. El Análisis Didáctico bajo este enfoque se ha aplicado a campos conceptuales y conocimientos matemáticos concretos, tales como los números enteros y los números naturales relativos (González, 1995, 1998a), la secuencia numérica (Fernández, 2001), la integral de línea (Padilla, 2003), la inducción matemática (Ortiz, 1997), la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004) o la atención a la diversidad sordos-oyentes (Larrubia, 2006). Igualmente, los estudios que se abordan en González (1995, 1998b) y González, Ortiz y Gallardo (2014) han realizado un análisis de los antecedentes siguiendo las directrices del Análisis Didáctico bajo este enfoque.

Análisis Didáctico como Instrumento Curricular para el diseño, desarrollo y evaluación de procesos educativos

En el contexto curricular se describe una propuesta práctica que viene siendo utilizada para fundamentar, organizar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas y/o de procesos educativos puntuales. La aportación de González y Gallardo (2013) proporciona información sobre este tipo de estudios. Por su parte, Real, Segovia y Ruiz (2012) utilizan el Análisis Didáctico como herramienta para el estudio de libros de texto escolares.

Análisis Didáctico como Instrumento para la formación de profesores

Para facilitar el proceso formativo de los futuros docentes, en estrecha relación con el enfoque anterior, se ha desarrollado en el grupo “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada una parte importante del proceso de análisis didáctico orientada a proporcionar instrumentos de análisis para la formación de los docentes. Gómez, Lupiañez, Rico y Marín (2007) señalan que:

> El análisis didáctico es un procedimiento que permite explorar, profundizar y trabajar diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (pp. 18-19).

Este procedimiento permite al profesor organizar el saber desde dos ámbitos, desde las matemáticas y desde la enseñanza, mediante cuatro subanálisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. El análisis didáctico bajo este enfoque, aunque tiene un origen teórico, se muestra como un procedimiento eminentemente práctico, al facilitar al profesor el proceso sistemático de diseño de unidades didácticas (Rico, 1997).

Además de responder a la primera demanda ya mencionada, los estudios de Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte (2014), en torno a la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra; Lupiáñez y Rico (2008), en relación con la formación inicial de profesores sobre competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares; y Lupiañez y Rico (2010), en torno al aprendizaje de los futuros docentes sobre enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares, contribuyen también a la octava de dichas demandas (desarrollo de las competencias profesionales) (Font, 2011). En todos ellos, situados en el corazón de este marco teórico, se aplican los principios e instrumentos mencionados en Rico et al. (2013).

Centrados en la cognición (matemática y numérica y aritmética)

Los estudios interesados en los aspectos cognitivos de la Educación Matemática se fundamentan en teorías de aprendizaje, comprensión y construcción de conocimientos o en modelos explicativos sobre capacidades, destrezas, estrategias y razonamientos. Se incluyen aquí, los estudios que se limitan a observar y analizar respuestas de los sujetos a tareas, cuestionarios y entrevistas.

En este bloque situamos modelos y marcos teóricos que siguen la tradición del grupo PME y responden a la segunda demanda del Sistema Educativo: construcción del conocimiento matemático, construcción mediante situaciones funcionales o de matemáticas realistas y en contextos extramatemáticos; así como a la tercera demanda: dificultades, errores y comprensión.

Se trata de un bloque amplio en el que podemos distinguir los siguientes marcos teóricos generales.

Aprendizaje, conocimientos, habilidades y destrezas

Las investigaciones en este campo tratan de indagar en la cognición de alumnos y profesores. En los estudios realizados por Ortiz y Fernández (2007), sobre razonamiento inductivo numérico y las competencias ordinales en Educación Infantil, y Hernández y González (2011) sobre la utilización de la tecnología multimedia para indagar en las capacidades y competencias ordinales de sujetos de edades comprendidas entre 3 y 7 años, se construye un modelo evolutivo de competencias ordinales y se somete a prueba mediante entrevistas individuales.

En el segundo estudio se utiliza la tecnología multimedia para la recogida y el tratamiento de las respuestas de los sujetos. Igualmente, se realiza en el mismo un análisis histórico y epistemológico de la estructura de orden como instrumento para fundamentar la investigación, de manera que también se puede situar entre las investigaciones que utilizan el Análisis Didáctico como instrumento de fundamentación. Sin embargo, lo que caracteriza este tipo de estudios, el verdadero motor del trabajo y la idea impulsora original, es el aspecto meramente cognitivo.

Dentro de este amplio conjunto de estudios, Pons, Valls y Llinares (2012) analizan los significados que utilizan los alumnos para el concepto de límite de una función en un punto a partir de la aproximación a un número y qué papel desempeñan en ello los modos de representación. Del mismo modo, se pueden situar también en esta tendencia los estudios de Molina, Castro y Castro (2009), sobre el signo igual en las ecuaciones numéricas, y los trabajos que se mencionan en Segovia y De Castro (2007) sobre estimación en cálculo, aunque comparten aspectos de otros marcos teóricos.

Competencias

La evaluación de capacidades y competencias es un problema didáctico importante y siempre de actualidad en Educación Matemática. El estudio de las competencias matemáticas, su desarrollo y evaluación responde a la séptima demanda sobre desarrollo y evaluación de procesos y competencias.

Aunque las producciones en este campo han sido numerosas en los últimos años, citamos por su interés las referenciadas en Rico (2004, 2007) sobre evaluación de competencias matemáticas dentro del Proyecto PISA/OCDE. Este tipo de estudios también pueden ser considerados a propósito de la interpretación y la evaluación así como de los estudios curriculares.

Resolución de problemas

La línea de investigación sobre resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal, trata de dilucidar aspectos relacionados con el razonamiento, habilidades y estrategias puestas en juego en la elaboración de determinado tipo de problemas. Los estudios sobre resolución de problemas de matemáticas se desarrollan en numerosas universidades españolas, pero hemos de destacar los trabajos que se vienen realizando en la Universidad de Granada y en la Universidad de Valencia, de los cuales resultan significativas la aportación de Puig (1996) así como las aportaciones que se mencionan en Cañadas y Castro (2002) a propósito de un estudio sobre problemas de carácter inductivo.

Formación de Profesores

Se comparte finalidad con los estudios sobre comprensión del conocimiento matemático en relación con la formación de maestros y profesores, aunque sin utilizar la fundamentación del modelo operativo de dicha tendencia. Los estudios de Menino, Tavares, Quaresma y Rodrigues (2011), sobre el sentido del número en los futuros profesores de primer ciclo, y de López y Cañadas (2013), sobre la utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad, se caracterizan por el interés en los aspectos cognitivos de la formación de docentes.

Errores y dificultades

Se trata de un enfoque que responde a la tercera demanda del Sistema Educativo: conocer los errores y dificultades relacionados con la actividad y el aprendizaje en Educación Matemática. Comparte una de las finalidades con el enfoque lógico semiótico (ELOS) que analizaremos más adelante. Los trabajos incluidos en Socas, Hernández y Palarea (2014) y Buhlea y Gómez (2008) se refieren a investigaciones centradas en errores y dificultades de carácter cognitivo relacionados con el aprendizaje en procesos matemáticos.

Ansiedad y actitudes

Se trata de una línea de investigación prometedora dentro de este bloque de tendencias. Las aportaciones de Rodríguez, Hidalgo y Palacios (2012), sobre la ansiedad matemática, constituyen un ejemplo entre otros para indagar en este marco teórico.

Modelos y marcos teóricos centrados en la interpretación y la evaluación

Hemos realizado la siguiente clasificación con diferentes enfoques y modelos.

Comprensión del conocimiento matemático. Enfoque general

Modelo que incluye las facetas epistemológica, cognitiva, semiótica y hermenéutica en relación con un conocimiento matemático concreto. El modelo se viene perfilando con la intención de disponer de un constructo operativo para la interpretación de la comprensión de conocimientos matemáticos. Se han desarrollado y se vienen desarrollando en la actualidad trabajos en distintas vertientes, de los que podemos citar, entre otros, los de Gallardo y colaboradores (Gallardo y González, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González y Quintanilla, 2013; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008).

El marco general se sustenta en tres orientaciones básicas para la interpretación de la comprensión, cognitiva, semiótica y hermenéutica, y en un modelo general asociado basado en:

(a) Una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración.

(b) Una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.

(c) Una concepción analítica del conocimiento matemático basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento.

(d) Un método o proceso secuenciado en torno a dos dimensiones:

(d1) *Dimensión fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio con el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a):

1. Análisis Didáctico (González, 1998a; Gallardo y González, 2006b);
2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones;
3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Modelo local;
4. Selección de tareas y construcción de instrumentos;
5. Análisis de resultados y primeras conclusiones.

(d2) *Dimensión hermenéutica*, en la que se analiza la información y se completan los resultados y conclusiones mediante lo que denominamos círculo interpretativo o método hermenéutico (Gallardo y González, 2011).

La aportación más reciente es la de Gallardo y Quintanilla (2015), en la que se tiene en cuenta el consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. Asimismo, se viene trabajando en la consideración de los aspectos afectivos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos y en la interpretación de la comprensión de conocimientos matemáticos elementales.

Comprensión de conocimientos numéricos y aritméticos

La aplicación del marco teórico general descrito anteriormente a los conocimientos numéricos y aritméticos proporciona un tipo de estudio específico que añade las características propias del campo que hemos denominado Pensamiento Numérico. Los estudios de Gallardo (2004) y Gallardo y González (2007), sobre el algoritmo para la multiplicación de números naturales, y Gallardo et al. (2007), sobre la comprensión del concepto de fracción, constituyen ejemplos de este marco teórico.

También se pueden incluir aquí los estudios sobre comprensión del Sistema de Numeración Decimal que se mencionan a continuación.

Formación de Maestros y Profesores

La investigación referenciada en González, Ortiz y Gallardo (2014), sobre la comprensión de los futuros maestros de Primaria acerca de los Sistemas de Numeración, responde a la octava demanda del sistema educativo recogida por Font y constituye un ejemplo de los estudios preocupados por el problema de la interpretación de respuestas y comportamientos.

Evaluación de Programas y evaluación comparada

La evaluación constituye un elemento esencial del proceso educativo. Los estudios sobre competencias y los estudios curriculares se pueden considerar también en este apartado, del que incluimos como ejemplo la aportación de Gutiérrez, Rico y Gómez (2014) sobre la evaluación en TEDS-M.

Modelos y marcos teóricos de componentes integradas

Se trata de modelos y marcos de tipo holístico en el que se pueden distinguir distintas componentes integradas en un todo. Se aprecia además un interés en establecer las relaciones entre las distintas partes y realizar investigaciones separadas en función de las diferentes componentes.

Modelos Teóricos Locales

El marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) fue elaborado inicialmente por Eugenio Filloy (Kieran y Filloy, 1989), cuya exposición más detallada y completa se puede encontrar en Filloy, Puig y Rojano (2008). Desde esta perspectiva, las situaciones de enseñanza y aprendizaje en los sistemas escolares pueden concebirse como situaciones de comunicación y de producción de sentido, en las cuales están implicados la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, la enseñanza, que organiza el profesor, y los alumnos, en cuyas actuaciones se muestra lo que han aprendido.

Filloy (1999) argumenta que para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de la enseñanza y el aprendizaje, hemos de tener un marco teórico y metodológico (MTL) que nos permita interpretar y organizar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que hay entre los cuatro componentes que entran en juego. Dicho marco se compone, según el autor, de las siguientes componentes:

1) Componente de enseñanza del MTL o abreviado Modelo de enseñanza.

2) Componente de cognición del MTL o Modelo para los procesos cognitivos.

3) Componente de competencia formal del MTL o Modelo de competencia formal.

4) Componente de comunicación del MTL o Modelo de comunicación.

La noción de Modelo Teórico Local conlleva una manera de organizar la investigación, en la que se distinguen dos partes principales relacionadas: una teórica y otra empírica. El desarrollo de la parte teórica, con la cual se constituye el modelo teórico local inicial, se configura a lo largo de varios ejes que se caracterizan por utilizar, por separado o en combinación, metodologías que tienen que ver con:

- El análisis histórico y epistemológico, a fin de identificar las principales concepciones y dificultades que ha entrañado la construcción de un determinado objeto matemático hasta llegar a su formulación actual.
- El análisis de libros de texto, como registro que son de la evolución científica, curricular y pedagógica en los diversos momentos de la historia.

La parte empírica o segunda etapa del trabajo toma como metodología el análisis de tareas para informar acerca de las realizaciones individuales de los estudiantes al responder a tareas específicas propias de los temas de los currícula de enseñanza.

Algunas aportaciones destacadas dentro de esta tendencia son las de Puig (2008) sobre el componente de competencia de los modelos teóricos locales, las de Filloy et al. (2008) sobre álgebra educativa, y las de Ortega y Puig (2014) y Gómez (2005) sobre las componentes de la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico.

Los dos modelos siguientes se centran en el análisis epistemológico y semiótico, aunque con incursiones en aspectos cognitivos y estableciendo relaciones con otras componentes.

Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS se propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal-institucional. Las nociones teóricas se clasifican en cinco grupos (Godino, 2012):

(1) *Sistema de prácticas* (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

(2) *Configuración de objetos y procesos* matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

(3) *Configuración didáctica*, como sistema para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

(4) *Dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas.

(5) *Idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático.

Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

El Fnfoque Lógico Semiótico es una propuesta teórico-práctica que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de situaciones problemáticas en el microsistema educativo y centra su estudio en uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas (Socas, 2001, 2007, 2012).

En este enfoque se parte del Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), que permite describir el campo conceptual del objeto matemático con sus funciones y su fenomenología en términos operacionales, estructurales y procesuales y sus relaciones (Socas, 2010).

De manera resumida, cualquier actividad matemática puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos. Cada una de ellas queda determinada, a su vez, por tres elementos: la componente Operaciones queda determinada por las operaciones, los algoritmos y las técnicas; la componente Estructuras queda determinada por los conceptos, las propiedades y las estructuras; y la componente Procesos queda determinada por las sustituciones formales, la generalización y la modelización (Socas, 2012). Además, las actividades matemáticas están siempre situadas en un contexto que debemos analizar, y que viene descrito por las tres componentes: Situaciones problemáticas, Representaciones y Argumentos. En las Situaciones problemáticas, se consideran las tres fases de la resolución de un problema: identificación, planteamiento y resolución, además de los contenidos matemáticos implicados en ellas; en las Representaciones (lenguajes): su reconocimiento, transformación y elaboración; y en los Argumentos (razonamientos): la descripción, justificación y razonamientos implicados (Socas, 2012).

Centrados en el desarrollo didáctico en el aula ordinaria de matemáticas

Experimentos de enseñanza

Constituye una tradición basada en la investigación en el aula y que debe tomar un mayor protagonismo en la escena de la investigación en Pensamiento Numérico en España. Así, en el estudio de Bracho, Adamuz, Jiménez y Gallego (2014) se trata de potenciar el desarrollo del sentido numérico de manera eficaz e integradora a través de una metodología basada en dos pilares fundamentales:

- El aprendizaje significativo del sistema de numeración decimal y el conocimiento y aplicación de las propiedades de los números y de las operaciones.
- El abordaje de las operaciones aritméticas básicas a través de los algoritmos

Otros estudios dentro de este marco teórico son los que describen Maz-Machado y Adrián (2014), sobre el uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria, Molina, Castro, Molina y Castro (2011) o las investigaciones colaborativas en desarrollo sobre la implementación del método de cálculo ABN en Centros de Educación Primaria de Andalucía.

Modelo Investigación para la Innovación Curricular en la acción en el aula de Matemáticas

Se trata de un modelo que procede de la tradición italiana de la investigación para la innovación (González, 1999) y que apela al hecho constatado de que gran parte de la investigación en Educación Matemática estudia los fenómenos en situaciones de laboratorio y tiene dificultades para influir de manera significativa en la práctica docente en el aula ordinaria. Se observan carencias en lo que se refiere a los resultados más cercanos a la realidad del aula que se pueden paliar mediante la utilización de un modelo de investigación para la innovación, con la participación de los profesores responsables y manteniendo la integridad de los fenómenos analizados allí donde se producen y tal y como se producen (González, 2015). Además de incidir en la innovación curricular y en la mejora de la práctica educativa, los estudios aportan información científica y contribuyen a mejorar la formación de los profesores que intervienen.

El modelo se construye a partir del análisis de las principales tendencias y se utilizan métodos mixtos de investigación para analizar los efectos de nuevos tratamientos didácticos sobre el rendimiento y la actitud de los alumnos. Cada profesor responsable dirige el estudio en su grupo y colabora en los demás grupos como observador y ayudante. Se emplean protocolos de enseñanza en grupos experimental y control, protocolos de observación, pruebas objetivas y entrevistas.

Otros modelos y marcos teóricos relacionados

Conocimiento, creencias, pensamiento del profesor y formación de profesores

Desde un punto de vista general, Gil y Rico (2003) abordan las concepciones y creencias del Profesorado de Secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Igualmente, son de destacar los numerosos estudios que se mencionan en Llinares (2009) así como otros trabajos que pueden tener relación con conocimientos numéricos, como es el caso de Montoro y Gil (2012), en el que se trata un instrumento para medir experiencias de flujo en situaciones que provocan concentración profunda, pérdida de la noción del tiempo, disfrute e interés en el aula.

Estudios cienciométricos

Relacionados indirectamente con los estudios en Pensamiento Numérico, se pueden encontrar referencias e informaciones complementarias en Maz-Machado et al. (2011) así como en otras publicaciones de Torralbo y colaboradores.

Estudios curriculares

Un ejemplo de estudios de este tipo, en estrecha relación con las investigaciones durante el desarrollo didáctico en el aula ordinaria, lo constituyen los estudios curriculares sobre el método ABN, de los que se pueden encontrar referencias en Bracho et al. (2014).

CONCLUSIONES

La clasificación que se propone no pretende ser definitiva. Está abierta a modificación y a nuevas reorganizaciones de las categorías. De entrada, se puede reconocer una cierta convergencia entre los modelos y marcos teóricos en aquellos aspectos que hemos considerado básicos y/o instrumentales; la mayoría de los modelos comparten un núcleo común que podemos categorizar como fundamental para la investigación en Pensamiento Numérico. Igualmente, se aprecian diferencias entre los modelos que hemos llamado de componentes integradas, que tratan de incluir a priori todos los factores y relaciones que pueden intervenir, y aquellos otros que se van construyendo paulatinamente en función de los datos que proporcionan los estudios empíricos.

Quedan abiertos al análisis y discusión los siguientes aspectos, entre otros: a) la relación entre las construcciones teóricas, los modelos y fundamentos y la información empírica; b) la existencia de marcos teóricos no contemplados en la clasificación realizada; c) características y tipos de estudios de difícil o imposible ubicación en las categorías utilizadas; d) características y tipos de estudios que comparten varios marcos teóricos; e) características y tipos de estudios específicos de un solo marco teórico; f) la capacidad de cada tipo de estudios y de cada modelo para incidir en la mejora real de la práctica educativa; g) investigación básica y aplicada en Pensamiento Numérico y su relación con los modelos y marcos teóricos relacionados en el trabajo.

Para terminar, sugerimos la necesidad de: 1) profundizar en los análisis iniciados en el presente estudio; 2) realizar meta análisis de distintos tipos de estudios en base a su fundamentación teórica, la metodología e instrumentos utilizados y los resultados obtenidos; 3) comparar modelos y marcos teóricos en relación con un problema específico; 4) la realización de investigaciones durante el propio desarrollo curricular ordinario en el aula de matemáticas de cualquier nivel educativo, incluida el aula de didáctica de la matemática en los centros de formación de docentes, con la implicación de los propios docentes.

REFERENCIAS

Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Gallego-Espejo, M. C. (2014). Una experiencia de investigación-acción colaborativa para el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática -2014* (pp. 1-9). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Buhlea, C. y Gómez, B. (2008). Sobre raíces y radicales: Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumanía). En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 241-256). Badajoz: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 147-153). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Claros, J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México DF: Grupo Editorial Iberoamericano.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and empirical approach.* Nueva York: Springer.

Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Ciudad Real: SEIEM.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. La comprensión del algoritmo de multiplicar números naturales*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: Steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, *26*(2), 10-15.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006b). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, *1*(1), 21-31.

Gallardo, J. y González, J. L. (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, *66*, 1-8.

Gallardo, J. y González, J. L. (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: El caso del algoritmo estándar para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares*. Granada: Universidad de Granada.

Gallardo, J. y González, J. L. (2011, Diciembre). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 26. Disponible en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html.

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T. González (Eds.), *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 207-222). Tenerife: Caja Canarias y SEIEM.

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *11*(3), 355-382.

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 283-293). Badajoz: SEIEM.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: Aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática, 25*(2), 61-88.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. (2015). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *Bolema* (en prensa).

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-48.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Baeza: SEIEM.

Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 33-50). Ciudad Real: SEIEM.

Gómez, B. (2005). Componentes de la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). Ponencia en el *XIV Encontro de Investigaçâo em Educaçâo Matemática. Números e Álgebra. Na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores*. Caminha, Portugal: Sociedade Portugesa de Ciências de Eduacaçâo, Secçâo de Educaçâo e Matemática. Recuperado de www.uv.es/gomezb/24Componentes

Gómez, B. y Sanz, M. T. (2014). Problemas clásicos de fracciones encadenadas. *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática* (HMEM). Investigación en Educación Matemática XVIII (en prensa). Salamanca: SEIEM.

Gómez, P., Lupiañez, J. L., Rico, L. y Marín, A. (2007). Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. *Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática* (2005). Málaga: Universidad de Málaga.

Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, A. M. y Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

González, J. L. (1998a). *Números naturales relativos*. Granada: Comares

González, J. L. (1998b). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En Rico, L. y Sierra, M. (Eds.). *I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 77-105). Zamora: SEIEM.

González, J. L. (1999). Comentarios a la ponencia: Linee di tendenza della ricerca per l'ìnnovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmático (Bartolini, 1999). En P. da Ponte, P. y L. Serrazina (Eds.). *Educação matemática : em Portugal, Espanha e Itália*. *Actas da Escola de Verao-1999 (*pp. 101-108). *Lisboa: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educaçao.*

González, J. L. (2015). *Modelo de investigación para la innovación curricular en el aula de matemáticas.* Documento en poder del autor. Málaga: Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga.

González, J. L. y Gallardo, J. (2013). Análisis Didáctico Curricular: Un procedimiento para fundamentar el diseño, el desarrollo y la evaluación de Unidades Didácticas de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico Curricular en Educación Matemática* (pp 161-190). Granada:

Comares.

González, J. L., Ortiz, A. L. y Gallardo, J. (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración. *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática* (HMEM). Investigación en Educación Matemática XVIII (en prensa). Salamanca: SEIEM.

Grupo fqm193. Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico (junio 2015). *Líneas de investigación*. Granada: Universidad de Granada. Extraído de: http://fqm193.ugr.es/.

Gutiérrez, A., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* -2014 (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Hernández, P. y González, J. L. (2011). Applications of multimedia technology to study the ordinal competencies of scholars from 3 to 7 years old. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 18*(3), 127-135.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*, 229-240.

Larrubia, J. J. (2006). *Modelo Didáctico Inclusivo para atender a la diversidad sordo-oyentes en el aula ordinaria de Matemáticas. El caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado en la ESO*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde ISI-web of knowledge y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-53). Badajoz: SEIEM.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO, 51*, 92-102.

López, A. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada: Comares.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: Competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2010). Aprendizaje de futuros profesores sobre el enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 409-421). Lleida: SEIEM.

Maz-Machado, A. y Adrián, C. (2014). Uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria. En González y otros (Eds.), *Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática* (pp. 109-114). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga y SEIEM.

Maz-Machado, A., Bracho, R., Torralbo, M. y Gutiérrez, M. P. (2011). La investigación en educación matemática en España: Los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-185.

Maz-Machado, A., Torralbo, M. y Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica practica of Juan de Yciar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada: Comares.

Menino, H., Tavares, D., Quaresma, A. y Rodrigues, M. (2011). El sentido del número en los futuros profesores de primer ciclo. Dos estudios de caso. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 439-449). Ciudad Real: SEIEM.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(17), 341-368.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2012). Elaboración y aplicación de un instrumento para medir experiencias de flujo. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 397-406). Baeza: SEIEM

Ortega, M. y Puig, L. (2014). El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática–2014* (pp. 125-134). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Ortiz, A. y Fernández, C. (2007). Razonamiento inductivo numérico. Modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares* (pp.101-128). Granada: Universidad de Granada.

Padilla, Y. (2003). *Integrales de Línea con DERIVE. Un estudio de Innovación Curricular en Primer Curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

Palarea, M. y Hernández, J. (2014). Los trabajos de investigación en pensamiento numérico y algebraico de la SEIEM en la última década. En C. Fernández, C. y J. L. González (Eds.). *Aprendizaje y razonamiento matemático. Homenaje a Alfonso Ortiz Comas* (pp. 24-47). Málaga: Colección Thema, Universidad de Málaga.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA, 2*(3), 87-107.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática*-2014 (pp. 135-143). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Real, I., Segovia, I. y Ruiz, F. (2012). Aplicación del análisis didáctico al diseño de una herramienta de análisis de los textos de Andrés Manjón para la enseñanza de las matemáticas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática-2012* (pp. 169-180). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Rico, L. (ed.) (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas: Proyecto PISA/OCDE. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 89-102). A Coruña: SEIEM.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Rico, L. (2015). *Líneas de investigación, Pensamiento Numérico*. Recuperado el 1 de junio de 2015 de: www.ugr.es/~lrico/investigacion_files/lineasinv.pdf

Rodríguez, P., Hidalgo, S. y Palacios, A. (2012). La ansiedad matemática en alumnos de Grados en Estadística. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 469-478). Baeza: SEIEM.

Sánchez, M. T., Claros, F. J. y Coriat, M. (2011). Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática.* (pp. 203-216). Granada: SEIEM.

Segovia, I. y de Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares* (pp. 213-236). Granada: Universidad de Granada.

Schanzer, R. (2015). *El marco teórico de una investigación*. Disponible en http://www.fhumyar.unr.edu.ar/escuelas/3/materiales%20de%20catedras/trabajo%20de%20campo/marco_teorico.htm

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática* XI (pp. 19-52). Tenerife: SEIEM.

Socas, M. M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, *10*, 9-33.

Socas, M. M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*-2012 (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Socas, M. M., Hernández, J. y Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González y otros (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* - 2014 (pp. 145-154). Málaga: Universidad de Málaga.

Vallejo-Ruiz, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L (2008). History of Spanish mathematics education focusing on PhD theses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 313-327.

CONTEXTUALIZANDO LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESPAÑA

Contextualizing the research on numerical thinking in Spain

Gil, F.

Universidad de Almería

INTRODUCCIÓN

Con la intención de contextualizar las investigaciones realizadas en España dentro del marco de las realizadas a nivel mundial, busqué algún trabajo sobre el estado de la cuestión en pensamiento numérico. No he encontrado ninguno realizado en los últimos años pero sí uno realizado por Verschaffel, Greer y Torbeyns en 2006 que a su vez hacía referencia a otro anterior de Bergeron y Herscovics de 1990. Teniendo en cuenta que las primeras tesis en didáctica de la matemática están en este periodo de años, me ha parecido oportuno centrarme en estos trabajos para contextualizar a nivel mundial, por un lado, el punto de partida de las investigaciones en pensamiento numérico en nuestro país y, por otro, el nivel que se llega a alcanzar al final de este periodo. Así, he organizado este texto de réplica en tres partes, la primera dedicada a la revisión realizada por Bergeron y Herscovics (1990), la segunda al estudio realizado por Verschaffel et al. (2006) y la tercera dedicada a sacar conclusiones sobre los trabajos anteriores y el presentado aquí por el profesor González Mari.

PRIMERA REVISIÓN

La primera revisión que presento fue realizada por Bergeron y Herscovics (1990). En ella se plantearon los principales temas en los que la investigación en la aritmética temprana se había centrado durante los quince años anteriores.

Los conceptos numéricos

En su revisión sistemática estos dos autores determinaron la presencia de dos enfoques teóricos y metodológicos independientes y complementarios. Los dos enfoques son: la teoría de Piaget, que utiliza el razonamiento lógico como base para la construcción de los conceptos numéricos naturales; y el enfoque basado en el conteo, que sostiene que los conceptos numéricos evolucionan mediante las competencias adquiridas de contar a través del proceso de cuantificación.

Las estructuras aditivas

Estos trabajos describen los procedimientos empleados por los niños más pequeños en su intento de resolver problemas de un paso de suma y resta de números naturales. Estos procedimientos se han clasificado en tres tipos principales: el modelado directo (con objetos físicos), el conteo verbal y las estrategias mentales que implican directamente el recuerdo de algún hecho básico de la adición o de la sustracción.

Gil, F. (2015). Contextualizando la investigación en Pensamiento Numérico en España. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 39-44). Alicante: SEIEM.

La resolución de problemas

Los problemas verbales aditivos se pueden dividir según su estructura semántica; aquí, las categorías semánticas ayudan a explicar el nivel de dificultad, las estrategias de solución y los errores. Además, el desarrollo de la capacidad del niño para resolver estos problemas puede verse como parte de la evolución cognitiva global de los esquemas del niño que le permite resolver problemas cada vez más complicados. También los dos autores que comentamos, llegaron a constatar que otras variables no semánticas como la presencia de determinadas palabras (por ejemplo "más" o "ambos") o el orden de presentación de los elementos, determinan el nivel de rendimiento de los niños.

Conclusiones de esta primera revisión

En la mayoría de estos trabajos se identifica número con número natural. Las investigaciones se centran en estudiar el desarrollo matemático de los niños como evolución de esquemas conceptuales abstractos. Las estructuras que se describen son de carácter local, y no se abordan cuestiones generales como los aspectos del número o los de la suma y la resta. Se limitan a estudios de evaluación de los conocimientos de los niños utilizando entrevistas clínicas. Finalmente, los autores concluyen sobre la necesidad de realizar investigaciones con carácter más didáctico (menos psicológico y más pedagógico) a fin de explorar y valorar los efectos cognitivos que puedan tener distintas intervenciones educativas.

SEGUNDA REVISIÓN

Esta segunda revisión realizada por Verschaffel et al. (2006) muestra la evolución desde la revisión de las investigaciones sobre números y la aritmética presentadas en los Congresos PME a lo largo de los quince años anteriores. Estos tres autores organizan su revisión en tres apartados: número naturales, otros números y estructura aritmética.

Números naturales

Aquí los autores indicados incluyen las investigaciones sobre los números naturales y sus operaciones. Las características y el desarrollo de las estrategias que los niños de primaria utilizan para *operar con números naturales* han sido foco de atención en el PME. En este ámbito se han detectado dos líneas de trabajo: el análisis cognitivo de las estrategias de cálculo (se continúa profundizando en temas que quedaron pendientes como estudio del dominio por los niños del producto) y el desarrollo de la competencia aritmética en diversos contextos (que surge a raíz de considerar al escolar como miembro de una comunidad). En esta última línea aparecen tres temas principales: (a) el diseño, implementación y evaluación de entornos educativos que amparen la visión activa del aprendizaje matemático y la construcción conjunta de significados en contextos socioculturales; (b) el papel de los conocimientos, creencias y acciones de aprendizaje de los docentes; y (c) la adquisición y uso de conocimientos y habilidades aritméticas en contextos fuera de la escuela y sus conexiones con la escuela.

Otra área de investigación se ha centrado en las *Operaciones aritméticas como modelos para situaciones;* aquí se estudia la vinculación entre las estrategias aritméticas de los niños y los procedimientos aritméticos y situaciones significativas a las que se refieren. Se incluyen cuatro temas: (a) las estructuras conceptuales (esquemas) para representar y resolver problemas; (b) el análisis y la enseñanza de estrategias de resolución de problemas (heurística); (c) el análisis sociocultural del rendimiento en problemas aritméticos de enunciado verbal; y (d) el enfoque de modelado emergente sobre cómo diseñar y utilizar diferentes tipos de contextos del mundo real, modelos, materiales virtuales, etc., para mejorar el desarrollo de la aritmética elemental.

Otros números

El "número" también refleja la integridad del sistema numérico (que tenga simétrico para la suma/resta) a través de la resolución de las diversas formas de desequilibrio/falta de cierre (en particular, los números negativos y números racionales). Las investigaciones del PME han evolucionado con una cantidad considerable de trabajos sobre números racionales y números negativos.

Los estudios sobre el *número racional* incluyen dos grandes líneas: las interpretaciones y representaciones de fracciones y los decimales. En interpretaciones y representaciones de las fracciones no hay consenso sobre qué papel debe jugar cada modelo ni sobre el uso de estos constructos en las escuelas. También se estudian errores de interpretación de las fracciones y sus representaciones. La mayoría de los trabajos sobre decimales se enmarcan en el estudio de errores. Son pocos los trabajos en el PME sobre la extensión de las cuatro operaciones básicas más allá de los números naturales, si bien existe consenso sobre que los estudiantes, además de comprender los cálculos, deben comprender cómo esas operaciones modelizan aspectos del mundo real.

En los trabajos del PME hay un continuo debate sobre si los *números negativos* deben introducirse a través de modelos y/o representaciones concretas o como abstracciones formales. La mayoría de los trabajos se realizan desde el primer enfoque, y casi todos con la suma y la resta, sin llegar a la multiplicación y división, pues es con la multiplicación y la división por números negativos donde las limitaciones de los modelos concretos se agudizan.

Son pocos los trabajos sobre la comprensión del *número real*. Los tres que se referencian se centran en: obstáculos epistemológicos para la comprensión de los irracionales, un experimento de enseñanza de los reales y la concepción del número de estudiantes de cálculo.

El *conocimiento y las creencias de los profesores* se han convertido en objeto de muchas investigaciones que pretenden: unas valorar el conocimiento del contenido de los docentes, a menudo revelando debilidades alarmantes, y otras determinar el conocimiento del contenido pedagógico de los docentes.

Estructura aritmética

Gran parte de los trabajos sobre la aritmética se centra, de una manera u otra, en las propiedades estructurales de los sistemas numéricos y operaciones. En dos aspectos: (a) la naturaleza inherentemente algebraica de la aritmética, así los autores hablan de "pre-álgebra" o "pensamiento algebraico incipiente" y (b) el alcance de la aritmética temprana para sentar las bases de los procesos de conjetura y prueba.

Se detectan tres líneas. La primera se centra en explorar la compresión de los estudiantes sobre las propiedades de las operaciones y en desarrollar planteamientos de enseñanza que fomenten dicha comprensión. También se incluyen estudios sobre la compresión del signo igual. La segunda se centra en la estructura de los números naturales, bien mediante la exploración de configuraciones puntuales o haciendo indagaciones en teoría de números. La tercera se sitúa en la generalización, la argumentación y la prueba, y se sustenta en la idea de que hay que entender por qué funciona un patrón y para ello los estudiantes tienen que defenderlo haciendo uso de conjeturas, refutaciones y generalizaciones.

Conclusiones de la segunda revisión

Esta segunda revisión pone de manifiesto que el enfoque en lo que se debe de aprender para adquirir la competencia numérica se ha desplazado hacia una visión que implica la disponibilidad integrada de los diferentes conocimientos y la posibilidad de aplicarlos de manera flexible. La concepción del aprendizaje ha evolucionado hacia un marco "participativo", entendido como la construcción del sentido a través de la actividad del alumno en una comunidad de prácticas. A ello han contribuido numerosas corrientes.

Con respecto a la enseñanza, las investigaciones presentadas en el PME han demostrado interés por los problemas a los que se enfrentan los profesores cuando tratan de enseñar matemáticas, siguiendo las ideas de la comprensión y la flexibilidad. También se ha constatado el desarrollo de investigaciones donde los investigadores trabajan con los maestros, estudiantes y administradores para construir ambientes de aprendizaje que potencien la habilidad matemática y el aprendizaje en una comunidad de prácticas. Un aspecto al que no se ha prestado mucha atención ha sido la diversidad cultural.

Gran parte de las investigaciones revisadas dan la visión de que la aritmética es contemplada como una oportunidad para establecer las bases de una buena preparación matemática.

CONCLUSIONES DE MI RÉPLICA

En primer lugar hemos constatado a través de las tres revisiones presentadas, las dos de este texto y la del texto a cargo del profesor González Mari, que el campo del pensamiento numérico está en constante expansión a través de nuevas líneas de trabajo sobre números y operaciones, o bien mediante líneas más transversales como el análisis didáctico que confluyen con él porque la mayoría de las investigaciones se han implementado con contenidos numéricos.

Veamos cual ha sido la presencia española en el campo del pensamiento numérico. En la revisión de Bergerson y Herscovics (1999) no aparece referenciado ningún trabajo español; se están produciendo la primera generación de tesis/investigaciones en didáctica de la matemática, bastantes de ellas en pensamiento numérico. En la revisión de Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006) ya aparecen referenciados tres trabajos españoles (Rico, 1994; Rico, Castro y Romero, 1996; Romero y Rico, 1996) y dos de ellos como generadores de nuevas líneas (números reales y estructura de los números). Se ha comenzado tener presencia mundial. Si nos fijamos en la presentación de González Mari vemos que ya existen trabajos españoles en todas las líneas de pensamiento numérico, tan solo hay que ver las actas de los últimos PME, y además seguimos con nuestra capacidad de innovación abriendo nuevas líneas y perspectivas, por ejemplo, el concepto de flujo para estudiar la motivación en matemáticas (Montoro y Gil, 2013)

Se ha podido apreciar el enorme esfuerzo realizado por los investigadores del campo para, partiendo desde una posición de apenas presencia en los años noventa, pasar a estar ahora jugando en la “primera división” mundial. Es justo reconocer el papel fundamental jugado por el profesor Dr. Luis Rico Romero en este desarrollo; los tres trabajos referenciados en Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006) son de él y si repasamos la presentación anterior podemos constatar que en todos los campos hay contribuciones suyas y todas ellas son punteras, es un pilar clave en torno al que se ha desarrollado el pensamiento numérico en España en el último cuarto de siglo.

REFERENCIAS

Bergeron, J. C. y Herscovics, N. (1999). Psychological aspects of learning early arithmetic. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 31-52). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2013). Measuring flow in mathematical tasks. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 130). Kiel, Germany: PME.

Rico, L. (1994). Two-step addition problems with duplicated structure. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–129). Lisboa, Portugal: PME.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: PME.

Romero, I. y Rico, L. (1996). On the introduction of real numbers in secondary school. An action research experience. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME International Conference, *of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 227–234). Valencia: PME.

Verschaffel, L., Greer B. y Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 51-82). Róterdam, Holanda: Sense Publishers.

HACIA PROFESORES ARTIFICIALES EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

Towards artificial teachers in algebraic word problem solving

Arnau, D.

Universitat de València

Resumen

Presentamos los fundamentos del diseño de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. El programa resultante admite resoluciones aritméticas y algebraicas, establece la validez de las acciones atendiendo a las restricciones del problema y puede generar ayudas a demanda, tras identificar la línea de resolución que se está siguiendo. El sistema es capaz de determinar parte de las características del estudiante como resolutor con respecto al modelo de competencia. Con este fin usamos la idea de esquema conceptual. De esta forma podemos clasificar las acciones de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de más de una etapa mediante un criterio que tiene en cuenta la tarea y las decisiones que se toman. Para finalizar, ofrecemos líneas futuras y preguntas de investigación que quedan abiertas.

Palabras clave: *Resolución de problemas, problemas verbales, álgebra, conocimiento profesional, inteligencia artificial*

Abstract

We present the foundations of the design of an intelligent tutoring system for the teaching and learning of arithmetic-algebraic word problem solving. The resulting program supports arithmetic and algebraic solutions, establishes the validity of the actions taking into account the constraints of the problem, and can generate help on demand after identifying the solution way that is being followed. The system is able to determine some of the characteristics of the student as a solver with regard to the competence model. To this end, we use the idea of conceptual schema. Thus we can classify the students' actions when solving multi-step word problems by an approach that takes into account the task and the decisions taken by the solvers. Finally, we offer future research lines and questions that remain open.

Keywords: *Problem solving, word problems, algebra, professional knowledge, artificial intelligence*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Es habitual que la introducción del álgebra en la escuela se realice mediante: la enseñanza de un conjunto de reglas para resolver ecuaciones o transformar expresiones algebraicas, la resolución de problemas, el reconocimiento de patrones y la generalización, o la modelización de situaciones mediante funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).La trascendencia del uso de la resolución de problemas verbales como una forma de aplicar o enseñar ideas algebraicas se ha reflejado en la presencia común de capítulos dedicados a la resolución de problemas en las agendas de investigación y en las recopilaciones de estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Bednarz y Janvier, 1996; Chaiklin, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Filloy, Rojano y Rubio, 2001).

Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 45-59). Alicante: SEIEM.

Numerosos estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales han descrito las dificultades de los estudiantes cuando se inician en el mundo del álgebra (véase, por ejemplo, Bednarz y Janvier, 1996; Cerdán, 2008; Rojano, 1985; Stacey y MacGregor, 1999). Con el objetivo de hacer frente a estas dificultades, se ha investigado la posibilidad de introducir métodos de resolución que pudieran servir como intermediarios entre la forma de resolver aritmética y algebraica como: el método analítico de las exploraciones sucesivas (Filloy et al., 2001); el método de la hoja de cálculo (Arnau y Puig, 2013) o los métodos de representación pictórico-geométricos (Martínez-Videla, 2011). También se ha analizado el uso de sistemas de aprendizaje interactivos para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos centrados en dos aspectos: (1) el recurso a múltiples sistemas de representación que sirvan para apoyar el planteamiento del problema; y (2) el uso de técnicas de inteligencia artificial para simular parte de las acciones de un profesor.

Sistemas basados en la representación gráfica de la resolución

Los entornos *Schemes for Problem Analysis* (Hershkovitz y Nesher, 1996) y *Word Problem Assistant* (Thompson, 1989) ofrecen la posibilidad de representar las relaciones entre cantidades mediante diagramas de árbol para facilitar el planteamiento y resolución de los problemas. Por ejemplo, en *Word Problem Assistant* cada cantidad se simboliza mediante un icono con cuatro posibles formas según éste represente número de objetos, diferencias, razones externas o razones internas. Cada icono está formado por cuatro celdas en las que se escribe un nombre en lenguaje natural, el cálculo que el sistema infiere y realiza automáticamente a partir de las relaciones que establece el resolutor, el valor de la cantidad si es conocida o el resultado obtenido al calcularla, y la unidad de medida. Para indicar las relaciones entre cantidades, el resolutor traza flechas entre los iconos que las representan. Sin embargo, el programa no tiene la capacidad de verificar la validez de la solución alcanzada ni de proporcionar ayudas al resolutor. *Word Problem Assistant* permite resolver problemas de manera aritmética y, en algunos casos, también de manera algebraica, pero no siempre es posible plantear todas las ecuaciones válidas.

En la misma línea, el programa *ANIMATE* (Nathan, 1998) se diseñó inicialmente para resolver problemas de móviles de manera algebraica. Permite al resolutor expresar las relaciones entre cantidades mediante representaciones gráficas formadas por nodos y arcos. El programa es capaz de determinar la consistencia del grafo que el resolutor genera y reproduce una animación de los móviles que participan en el problema, a partir de dicha representación. El resolutor puede valorar la idoneidad del planteamiento atendiendo al comportamiento de los móviles en la animación. Sin embargo, *ANIMATE* no tiene ningún conocimiento del problema que se tiene que resolver y, por lo tanto, no puede determinar la validez de las acciones, ofrecer ayudas al usuario sobre una situación problemática concreta, ni identificar características del resolutor.

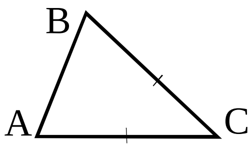
El programa *Story Problem Solver* (Marshall, 1995) se diseñó con la intención de ayudar en la resolución aritmética de problemas. En este entorno el resolutor debe elegir los diagramas adecuados para resolver el problema. Estos diagramas expresan las categorías de combinación, cambio, comparación aditiva, comparación multiplicativa y proporcionalidad. La intención es conseguir que el sistema apoye la construcción mental de los esquemas ligados a los diagramas. Por otro lado, los creadores de *WORDMATH* (Looi y Tan, 1996) basaron su diseño en un método de enseñanza de resolución de problemas verbales que usa una representación pictórico-geométrica típica de la enseñanza propuesta por el currículum de Singapur. Con este fin, para resolver el problema, los estudiantes deben construir un modelo geométrico en el que las cantidades se representan mediante barras y, a continuación, deben manipularlas para alcanzar la solución.

Sistemas basados en inteligencia artificial

A diferencia de los entornos anteriores, *PAT* (Koedinger y Anderson, 1998), también conocido como *Cognitive Algebra Tutor*, fue diseñado utilizando técnicas de inteligencia artificial. El programa es capaz de supervisar la resolución algebraica de problemas verbales que pueden traducirse a ecuaciones del tipo $y=ax+b$. Al mismo tiempo, la interfaz proporciona la posibilidad de utilizar distintos sistemas de representación que incluyen el tabular, gráfico y simbólico. Por lo que respecta a la interacción con el estudiante, el programa únicamente interviene si observa que se ha cometido un error. El usuario siempre puede solicitar ayuda y el sistema la ofrece de manera incremental, yendo desde una primera sugerencia vaga hasta proporcionar la acción a seguir de manera explícita.

La arquitectura del sistema es del tipo *tutor cognitivo* (también conocida como *model tracing*) la cual adopta la representación de un modelo cognitivo basado en la teoría ACT (Anderson, 1983). Esta teoría establece que hay dos memorias de largo plazo: la declarativa y la procedimiental. Desde el punto de vista del aprendizaje, en primer lugar se adquiere el contenido declarativo, el cual incluye hechos y conceptos, que posteriormente se convierte en conocimiento procedimental. Este conocimiento procedimental se representa en forma de reglas de producción. La enseñanza de las reglas de producción se convierte en el elemento clave en la enseñanza que proporcionan los tutores cognitivos. A continuación se muestra un ejemplo de las reglas de producción usadas para la resolución de un problema (extraído de Mitrovic, Koedinger y Martin, 2003, p. 314).

El ángulo A mide 65º. ¿Cuál es el ángulo C?



Dos reglas de producción correctas:

SI el objetivo es determinar un ángulo en un triángulo isósceles ABC y AC = BC [en el original aparece *AB* por error] *y el ángulo A es conocido, ENTONCES pon el valor del ángulo B a A.*

SI el objetivo es encontrar un ángulo en un triángulo ABC y los ángulos A y B son conocidos, ENTONCES pon el valor de C a 180 – A – B.

La inteligencia artificial en la investigación en didáctica de la resolución de problemas

En la década de los 80 del siglo pasado, se crearon grandes expectativas con respecto a la posibilidad de emplear la inteligencia artificial como una forma de desarrollar entornos interactivos de aprendizaje en el campo de la aritmética y el álgebra (Thompson, 1989). Sin embargo, estas esperanzas rápidamente se desvanecieron por la dificultad de crear sistemas que realmente pudieran sustituir a tutores humanos (Welham, 2008).

No obstante, la influencia de la inteligencia artificial no se limitó al diseño de entornos de aprendizaje sino que también se reflejó en la forma en que se concibió la investigación sobre resolución de problemas en el campo de la educación matemática.

> Además, el trabajo en inteligencia artificial y campos relacionados (como la psicología del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva en última instancia) ha producido un conjunto de métodos que son claramente "científicos". Por ejemplo, la implementación exitosa de un programa que resuelve problemas, proporciona una prueba empírica de que determinadas ideas teóricas sobre el pensamiento realmente "funcionan" (Schoenfeld, 1994, pp. 707-708).

En este artículo Schoenfeld insiste en propuestas que ya había defendido desde principios de la década de los 80 en cuanto a la necesidad de: (a) organizar la investigación en resolución de problemas mediante métodos centrados en el proceso que sustituyan a las técnicas estadísticas; (b) generar teorías que eviten el excesivo recurso al empirismo, y (c) familiarizarse con la investigación en ciencia cognitiva y con técnicas de modelización en inteligencia artificial y de la psicología del procesamiento de la información. Estas ideas pueden alinearse con las expuestas en el libro *Human*

Problem Solving de Newelly Simon (1972) donde se describe la construcción de un modelo basado en la teoría del procesamiento de la información cuando se emplea con la intención de analizar cómo los humanos resuelven problemas. La metodología de investigación asociada se caracteriza por centrarse en el proceso y en el individuo; ser empírica, pero no experimental; ser no estadística; y orientarse al contenido. Además, los autores apuntan que "el formalismo natural de la teoría es el programa, el cual juega un papel directamente análogo a los sistemas de ecuaciones en teorías con espacios de estados continuos (por ejemplo, la física clásica)" (p. 11).

Dicho todo esto, el objetivo de esta ponencia es describir la base teórica sobre la que se han diseñado los componentes de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos.

MARCO TEÓRICO

Utilizaremos como armazón sobre el que construir nuestro marco teórico lo que Eugenio Filloy llama Modelos Teóricos Locales (Filloy et al., 2008). Este marco resulta especialmente útil en las investigaciones en inteligencia artificial en educación matemática, pues permite establecer una relación directa con los componentes de un sistema tutorial inteligente. A saber: (a) el modelo del dominio, que contiene el conocimiento del experto proporcionado en forma de definiciones o procedimientos; (b) el modelo de estudiante, que contiene el conocimiento de cómo los estudiantes actúan en forma de errores cometidos o proximidad al conocimiento del experto; (c) el modelo didáctico, que contiene una representación de cómo los profesores actúan; y (d) el modelo de comunicación, que representa los métodos y técnicas para el intercambio de información entre programa y estudiante (Woolf, 2008).

El modelo de competencia o modelo del dominio

Como señala Pólya (1962), René Descartes concibió el proyecto de desarrollar un método universal de resolución basado en la idea de reducir cualquier problema a un problema algebraico. Evidentemente fracasó en su intento, pero proporcionó las bases de un método de resolución de problemas verbales basado en el planteamiento de ecuaciones.La competencia en la resolución algebraica de problemas verbales puede describirse mediante una secuencia de pasos ideales basados en las reglas cartesianas que dan origen a lo que llamamos método cartesiano (en adelante MC) (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008; Puig, 2003). A diferencia de los métodos que utilizan el lenguaje aritmético, el método cartesiano permite resolver cualquier problema verbal. Por esta razón el método cartesiano supone la competencia en la resolución de problemas verbales y su dominio se convierte en uno de los objetivos de la formación matemática. El método cartesiano, hasta el momento del planteamiento de la ecuación o sistema de ecuaciones, puede describirse de la manera siguiente:

> 1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
>
> 2) La elección de las cantidades desconocidas que se va a representar con letras.
>
> 3) La representación de las otras cantidades desconocidas a partir de la expresión algebraica o número que se obtiene de la relación que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas.
>
> 4) El establecimiento de ecuaciones igualando dos expresiones de una misma cantidad. Para este fin se usan relaciones que aún no han sido utilizadas y que enlazan cantidades a las que ya se les ha asignado una representación en los pasos anteriores.

Desde hace 25 años, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València se viene desarrollando y utilizando un sistema de representación en forma de hipergrafos que es específico del dominio de la resolución de problemas (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008).

Estos hipergrafos, que son una generalización dela propuesta de Fridman (1990), permiten representarlos cuatro primeros pasos del método cartesiano. Lo ejemplificaremos utilizando el problema anterior en el que se pedía determinar el valor del ángulo C. Para ello partiremos de que el problema se puede reducir a las cantidades conocidas: ángulo A (*A*, 65) y suma de los ángulos(*S*, 180).Y a las desconocidas: ángulo B (*B*) y ángulo C (*C*). Estas cantidades se relacionan mediante las proposiciones: (a) el *ángulo A* es igual al *ángulo B* y (b) la *suma de los ángulos* es igual al *ángulo A* más el *ángulo B* más el *ángulo C*. Para reducir la longitud de las relaciones las expresaremos a la manera en que se haría en álgebra A=B y S = A+B+C. Sin embargo, aunque usemos un lenguaje matemático, estamos expresando relaciones que estarán representadas en la mente del resolutor de distintas maneras. Esta información, que representa la lectura analítica del problema (Filloy et al., 2008) se puede expresar mediante hipergrafos (Figura 1). Este hipergrafo proporcionaría la estructura matemática del problema que identifica un determinado resolutor.

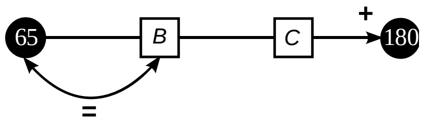


Figura 1. El paso 1 del MC

El conocimiento ligado a la lectura analítica y el representado en los hipergrafos es puramente declarativo. Sin embargo, la determinación de la lectura analítica implica realizar varios procedimientos. Desde el punto de vista del resolutor ideal estos procesos podemos dividirlos en, al menos, dos tipos. Por un lado, la recuperación y uso de esquemas conceptuales (Riley, Greeno y Heller, 1983) asociados al contexto descrito en el enunciado que permiten relacionar las cantidades del problema. Por otro, una serie de procesos lógicos en los que se reflexiona sobre la suficiencia de la lectura analítica para conseguir alcanzar la resolución del problema.

El segundo paso del método cartesiano puede expresarse mediante acciones en el hipergrafo. En concreto, consistiría en oscurecer algún vértice claro, lo que sería equivalente a asignar una letra a una cantidad desconocida. En la Figura 2se muestra cómo se representaría la asignación de la letra x a la cantidad C.

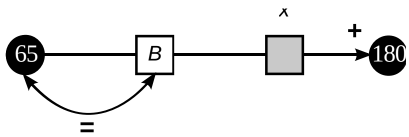


Figura 2. El paso 2 del MC

El tercer paso supondría oscurecer los vértices claros de las hiperaristas en las que sólo hay un vértice claro. A este proceso se le llama destruir las hiperaristas. Esto equivaldría a asignar una expresión algebraica o número a la cantidad desconocida que se representaba en el vértice claro (Figura 3, donde la hiperarista que acaba de ser destruida se representa mediante una línea discontinua).

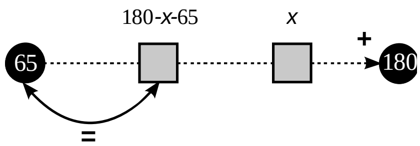


Figura 3. El paso 3 del MC

El cuarto paso implicaría recorrer las hiperaristas en las que todos los vértices son oscuros. Como consecuencia un vértice que ya era oscuro, se volvería a oscurecer. Esto equivaldría a asignar dos expresiones a una misma cantidad y, por lo tanto, a construir una ecuación (Figura 4).

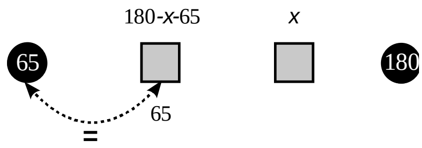


Figura 4. El paso 4 del MC

Si analizamos la solución que se derivaría del conjunto de reglas de producción propuesta en Mitrovic et al. (2003, p. 314), observamos que esta forma de resolver el problema (la que lleva a plantear $180 - x - 65 = 65$) no estaría incluida. De hecho, usando estas reglas de producción, la única forma de resolver el problema pasaría por asignar a B el valor 65 y calcular el valor de C mediante $180 - 65 - 65$. Esta resolución aritmética también se podría derivar de nuestra lectura analítica. De hecho, una reinterpretación algorítmica de los pasos del método cartesiano nos permitirá considerar la resolución aritmética como un caso particular de la algebraica. Con este fin, expresamos los pasos de procedimiento como un conjunto de reglas de producción que se aplicarían a la lectura analítica:

> **Regla de producción 1 (RP1)**: Siempre es posible asignar una letra a una cantidad desconocida.
>
> **Regla de producción 2 (RP2)**: Si existe una relación con una única cantidad que no tiene asignada expresión algebraica o número, entonces es posible asignársela.
>
> **Regla de producción 3 (RP3)**: Si existe una relación en la que todas las cantidades tienen asignada expresión algebraica o número, entonces es posible construir una ecuación.

En nuestra lectura analítica se observa que no es necesario aplicar RP1 (Figura 5). De hecho, la lectura analítica y el hipergrafo que la representa se clasificarían como aritméticos (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008) y eso se ha reflejado en el carácter aritmético de la ecuación (Filloy y Rojano, 1989).

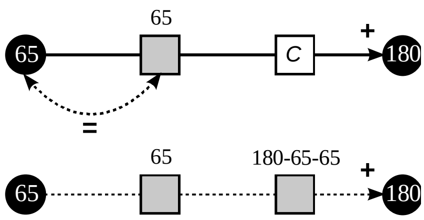


Figura 5. La resolución aritmética

El modelo cognitivo o modelo de estudiante

El modelo cognitivo contiene la información sobre las características del estudiante con respecto a cómo aprende, cómo resuelve o, por ejemplo, cómo reacciona ante el reto o la frustración. En el diseño de sistemas inteligentes enfocados a la enseñanza de la resolución de problemas es habitual que la determinación de los rasgos de un estudiante se relacione con alguna característica de la tarea o con las acciones que se deben llevar a cabo para resolverla. Por ejemplo, los creadores del programa *AnimalWatch* (Beal, 2013), diseñado para la enseñanza de la resolución aritmética de problemas, ligan cada problema a criterios como la operación necesaria para resolverlo (e.g., división) y las características de los números que aparecen en el enunciado (e.g., números naturales multidígito). La competencia del estudiante en un determinado tipo de problemas se determina como el porcentaje de éxitos en la resolución. Evidentemente, esta clasificación deja fuera las posibles diferencias semánticas en los enunciados. Por otro lado, el programa *PAT* centra su atención en las reglas de producción que el estudiante usa en cada paso de la resolución de una determinada tarea, lo que permite que el programa pueda poner marcha un algoritmo bayesiano llamado *trazado del conocimiento* que proporciona la probabilidad de que un estudiante domine dicha habilidad (Aleven, Roll, McLaren y Koedinger, 2010).En consecuencia, al igual que

AnimalWatch, el modelo de estudiante que se construye está basado en la descripción de un contenido procedimental.

En nuestra área diversos estudios han intentado clasificar los problemas verbales atendiendo a distintos factores. Es habitual clasificar los problemas de una etapa por su categorización semántica (Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1983). Ha habido intentos de clasificar los problemas de más de una etapa atendiendo a esta categorización u otras similares (véase, por ejemplo, Castro et al., 1998; Puig, 1998a). Sin embargo, como norma, este criterio de clasificación no se ha extendido, ya que "la estructura de los problemas de más de una etapa presenta elementos distintos de los semánticos y que son más pertinentes para comprender el proceso de resolución" (Puig y Cerdán, 1988,p. 106). Entre otros aspectos conviene señalar que en los problemas de más de una etapa la propia estructura matemática subyacente puede no ser única[i].Como consecuencia se ha recurrido a otros criterios de clasificación como los contextos que se describen (Hinsley, Hayes y Simon, 1977) o, de manera similar, las fórmulas fuente necesarias para resolverlos (Mayer, 1981). En otros casos también se han clasificado por la estructura matemática subyacente (Cerdán, 2008) o por la ecuación o ecuaciones que sirven para resolverlos. Una aplicación práctica de estos estudios es posibilitar la organización de secuencias de enseñanza en las que los estudiantes puedan identificar analogías entre problemas que les permitan transferir conocimiento que previamente hayan utilizado con éxito.

En nuestro caso planteamos dos categorías para la generación de los modelos de estudiante: (1) la actuación ante los pasos 2, 3 y 4 del MC; y (2) el uso de esquemas conceptuales en la resolución de un problema, lo que nos permitirá realizar una clasificación más fina de los problemas que además tenga en cuenta las decisiones que toma un sujeto a la hora de resolverlos (es decir, la actuación en el paso 1 del MC cuando se usan los esquemas conceptuales para establecer relaciones entre cantidades). El recurso a los esquemas conceptuales pretende que se puedan establecer relaciones entre el conocimiento necesario para resolver problemas distintos. Evidentemente, la dificultad en la resolución aritmética o algebraica de un problema verbal no puede reducirse exclusivamente a un análisis de la dificultad de una secuencia de subproblemas asociados, cada uno de ellos, a un esquema conceptual concreto. Sin embargo, el desconocimiento o dificultad a la hora de emplear un esquema conceptual puede actuar como obstáculo para completar el proceso de resolución. Además, de esta manera, el modelo de estudiante, como una medida del conocimiento ligado a la resolución de problemas, posibilita su comparación con otros modelos de estudiante o con un modelo de estudiante promedio para que pueda ser usado en la toma de decisiones de cara a la instrucción.

Para ejemplificar cómo se pueden usar los esquemas conceptuales para caracterizar a un estudiante, partiremos de dos posibles lecturas analíticas del problema *Las naranjas*. Hemos de aclarar que el problema tiene varias lecturas analíticas más, pero limitamos su número para facilitar la exposición.

> *Las naranjas*. Hemos guardado 180 naranjas en dos sacos de distinto tamaño. En el saco grande hemos introducido 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas hay en cada saco?

Una posible lectura analítica partiría de la posibilidad de quitar las 30 naranjas de más que hay en un saco y hacer un reparto equitativo. Esta lectura analítica (a la que llamaremos L1) reduciría el problema a las cantidades conocidas: número de naranjas, N (180); naranjas de más en el saco grande, Mgp (30); y número de sacos, S (2); y a las cantidades desconocidas: número de naranjas si eliminamos el exceso del saco grande, Nqe; número de naranjas en el saco grande, Sg, y número de naranjas en el saco pequeño, Sp. Estas cantidades se relacionarían mediante: $N = Sg + Sp$ (combinación[ii]), $N = Nqe + Mgp$ (cambio) y $Nqe = Sp \cdot S$ (isomorfismo de medidas). Evidentemente no se puede afirmar que la estructura matemática del problema sea esta lectura analítica ni las ecuaciones o resolución aritmética que se podrían derivar de ella. Esto es así porque una resolución es el resultado de la interpretación de una persona cuando se enfrenta a un problema. Por ejemplo, otro sujeto con otros conocimientos o intenciones, podría llevar a cabo otra lectura analítica del mismo problema (a la que llamaremos L2) que lo reduciría a las cantidades conocidas: número de naranjas, *N* (180), y naranjas de más en el saco grande, *Mgp* (30). Y a las desconocidas: número de naranjas en el saco grande, *Sg*, y número de naranjas en el saco pequeño, *Sp*. Estas cantidades se relacionarían mediante: *N* = *Sg* + *Sp* (combinación) y *Sg* = *Mgp* + *Sp* (comparación). En este caso, la lectura analítica no es aritmética porque no es posible encontrar ninguna relación que contenga una única cantidad desconocida. A las lecturas que no son aritméticas, las llamaremos algebraicas.

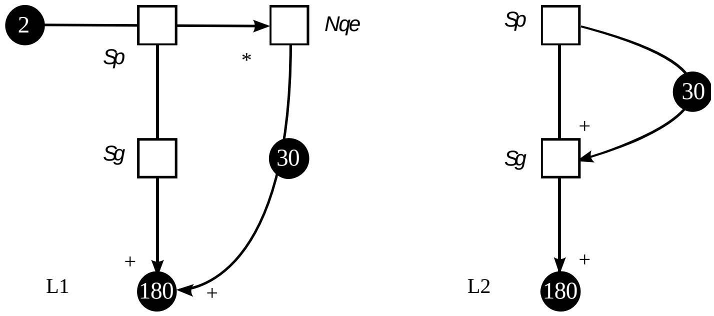


Figura 6. Dos lecturas análiticas del problema *Las naranjas*

Supongamos que un estudiante comete un error o no sabe cómo seguir después de realizar la operación 180 – 30=150. Las conclusiones que podríamos obtener son: (1) que ha sido capaz de aplicar el esquema de combinación que podía de deducirse de una reelaboración del enunciado, transformarlo en una relación entre cantidades, decidir la operación y el orden de los operandos y plasmarla; y (2) que, sin embargo, no ha sido capaz de seguir la línea de resolución que implicaría aplicar el esquema de isomorfismo de medidas. Esto no implica que no sea capaz de aplicarlo, ni necesariamente que no lo haya hecho en este caso, pero sí se puede afirmar que ha habido algún error en el proceso conjunto que va de la identificación a la plasmación. Es importante indicar que, en este caso, no ha resultado trascendente para la caracterización del estudiante el hecho de que en otras formas de resolver el problema hubiera sido necesario usar el esquema de comparación aditiva, aunque, evidentemente, esta información se habrá tenido en cuenta en la reelaboración del enunciado.

El modelo de enseñanza

Cuando un profesor supervisa la resolución de un problema verbal de un estudiante, debe atender a varias tareas como: comprobar la validez de las acciones, identificar la vía de resolución que se está siguiendo, proporcionar ayudas, plantear vías alternativas de resolución, describir modelos generales de resolución, controlar el tiempo de ejecución, identificar características del estudiante, determinar secuencias de problemas adaptadas a características del individuo, etc. Centraremos la exposición en la enseñanza del método de resolución y en la generación de ayudas a demanda.

El método cartesiano puede implementarse de maneras diferentes dando lugar a distintos modelos de enseñanza de la resolución algebraica de problemas. Es habitual encontrar secuencias de enseñanza en las que se es fiel al orden de los pasos descritos anteriormente y en las que el paso 3 antecede completamente al paso 4 (véase, por ejemplo, Puig, 1998b). En este caso es necesario (o al menos conveniente) usar etiquetas que liguen las expresiones generadas en el paso 3 con la semántica del problema.

Sin embargo, también es posible encontrar secuencias de enseñanza en las que no se hace hincapié en finalizar el paso 3 antes de iniciar el paso 4. De hecho, es habitual que los estudiantes comiencen la construcción de la ecuación y vayan dando respuesta al paso 3 a medida que se necesita una representación de las cantidades en la misma. Esta forma de proceder exige en ocasiones una gran carga de la memoria de trabajo, sobre todo cuando únicamente se emplea una ecuación en la resolución. Por ejemplo, en la resolución algebraica del problema *Las naranjas* siguiendo la lectura

L2 y si tomamos *x* como el *número de naranjas en el saco grande*, podríamos encontrarnos con que estamos planteando la ecuación 180 = *x*+ … al mismo tiempo que damos respuesta a parte del paso 3, pues falta por asignar expresión a la cantidad *número de naranjas en el saco pequeño*. Esto nos obligaría a mantener en la memoria de trabajo la relación sobre la que se construye la ecuación (paso 4) y la (o las) que se usa para asignar una expresión (paso 3) al *número de naranjas en el saco pequeño*. Esta exigencia a la memoria de trabajo se consigue disminuir al emplear más de una ecuación, pues de esta forma se reducen las relaciones que deben usarse en el paso 3 y aumentan las que se usan en el paso 4. Incluso puede hacerse desaparecer el paso 3 como sería el caso si en la resolución de este problema representáramos con *x* e *y* a las cantidades por las que se pregunta en el enunciado y planteáramos las ecuaciones $x + y = 180$ y $x = y + 30$.

En las situaciones uno a uno, además de la enseñanza del método, también es posible llevar a cabo la supervisión individualizada del proceso de resolución. Esto puede ser utilizado para dirigir la enseñanza hacia la identificación de las situaciones y esquemas conceptuales que normalmente se utilizan en una familia concreta de problemas. Centraremos nuestra atención en el procedimiento que un profesor puede llevar a cabo para generar ayudas a demanda con contenido de la tarea. No entraremos a discutir lo que Koedinger y Aleven (2007) llaman *assistance dilemma* y que puede enunciarse: ¿cómo determinar la información que se debe dar o retener para conseguir un aprendizaje óptimo?

El procedimiento para generar ayudas a demanda se apoya en el conocimiento del profesor sobre la tarea y el estudiante, y sobre la situación concreta que se está dando en la resolución. El análisis de la situación concreta exige identificar la vía de resolución que está siguiendo el estudiante. Para ejemplificar el proceso supongamos que un estudiante, que está resolviendo el problema *Las naranjas*, decide asignar la letra *x* a la cantidad *Sg* y a continuación escribe la expresión 180 – *x*. El profesor infiere que se ha asignado una representación a la cantidad *Sp* mediante la relación $N = Sg + Sp$, una relación que forma parte de las dos lecturas que hemos realizado anteriormente (Figura 7). También entendería que la resolución que se está llevando a cabo es algebraica. Si ahora el estudiante solicitara ayuda, el profesor debería decidir si proporciona una ayuda para seguir por L1 o L2. Ante la duda, el profesor podría recurrir a criterios distintos entre los que podría estar el de aconsejar seguir el camino del que se haya avanzado una mayor proporción. En el caso que nos ocupa en la L2 se ha usado una de las dos relaciones, mientras que en L3 se ha avanzado una de tres. Otros criterios podrían ser, por ejemplo, considerar L2 por tratarse de una lectura algebraica o recurrir a la experiencia para identificar las dificultades que podría tener un estudiante siguiendo una u otra línea. En cualquier caso, la ayuda podría oscilar desde ofrecer una idea general (como “Vuelve a leer el enunciado”) hasta proporcionar una sugerencia con contenido de la tarea atendiendo a las acciones que ha realizado el alumno (como “Puedes construir una ecuación asignando una nueva expresión a la cantidad número de naranjas en el saco pequeño”).

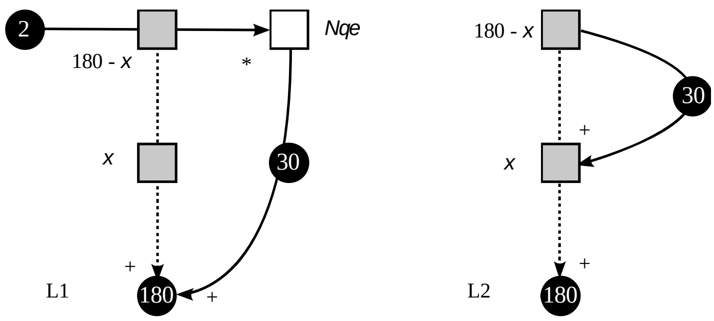


Figura 7. Estado tras 180 – *x*

El modelo de comunicación

En el modelo de comunicación describiremos los intercambios de información que se producen entre un sistema tutorial inteligente que hemos implementado (Arevalillo-Herráez, Arnau y Marco-Giménez, 2013; Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig y González-Calero, 2013) y un estudiante. En el diseño del sistema tutorial se ha tenido en cuenta los modelos descritos anteriormente como se pondrá de manifiesto a continuación. Centraremos nuestra atención en las restricciones que impone la interfaz y aprovecharemos para poner ejemplos del funcionamiento del sistema y de la toma de decisiones a la hoja de generar los mensajes que envía al resolutor.

Como el programa no es capaz de generar las lecturas analíticas a partir del enunciado, éstas deben ser codificadas por humanos y almacenadas en archivos XML (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014). Esta codificación incluye el enunciado, un nombre en lenguaje verbal de las cantidades conocidas y desconocidas que aparecen en las distintas lecturas analíticas, el valor de las cantidades conocidas, las relaciones entre cantidades, y el esquema conceptual ligado a cada relación. Las relaciones se agrupan para formar las distintas lecturas del problema. Para la exposición que sigue, y con el objetivo de facilitar la descripción, usamos una codificación incompleta del problema *Las naranjas* en la que únicamente se han incluido las lecturas descritas anteriormente[iii]. Supondremos que un mismo estudiante lo intenta resolver primero de manera aritmética y después de manera algebraica.

Al elegir una configuración aritmética, cuando se cargara el problema, el sistema descartaría las lecturas algebraicas (en este caso la L2). A continuación mostraría el enunciado y unos botones con las cuatro operaciones básicas y los valores de las cantidades conocidas. Si el usuario, por ejemplo, introdujera la expresión 180 – 30, el sistema determinaría si existe alguna relación en la que aparecen las cantidades *N* y *Mgp*y es posible aplicar la RP2 (la única regla aplicable cuando se resuelve de manera aritmética) y, por último, comprobaría si es correcta la operación y el orden de los operandos. En este caso existe una relación en L1 que cumple las condiciones anteriores y el sistema en consecuencia inferiría que se ha calculado *Nqe*. Ante una acción correcta, como es el caso, el sistema no genera mensaje y se limita a representar el valor y nombre de la cantidad en la ventana *Cantidades definidas* (Figura 8) y a crear un nuevo botón en el que aparece el valor que se ha asignado a la cantidad.

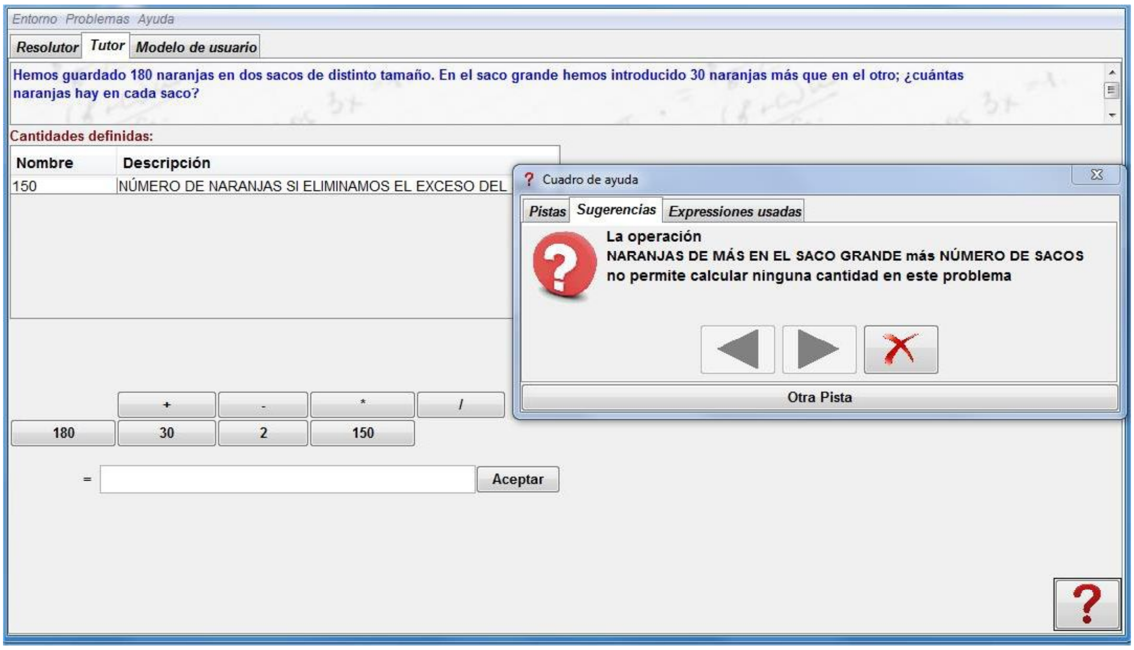


Figura 8. Interfaz para la resolución aritmética

Si el resolutor, a continuación, introdujera una operación incorrecta como 30 + 2, el programa ofrecería un mensaje de error en el que se recurre a los nombres de las cantidades que se han usado para poner de manifiesto la falta de sentido (Figura 8). Como consecuencia de estas acciones el sistema interpretaría que el resolutor ha sido capaz de realizar una operación que proviene de aplicar un esquema conceptual de cambio, pero que ha tenido dificultades en el paso que implicaba el uso de un esquema conceptual de isomorfismo de medidas.

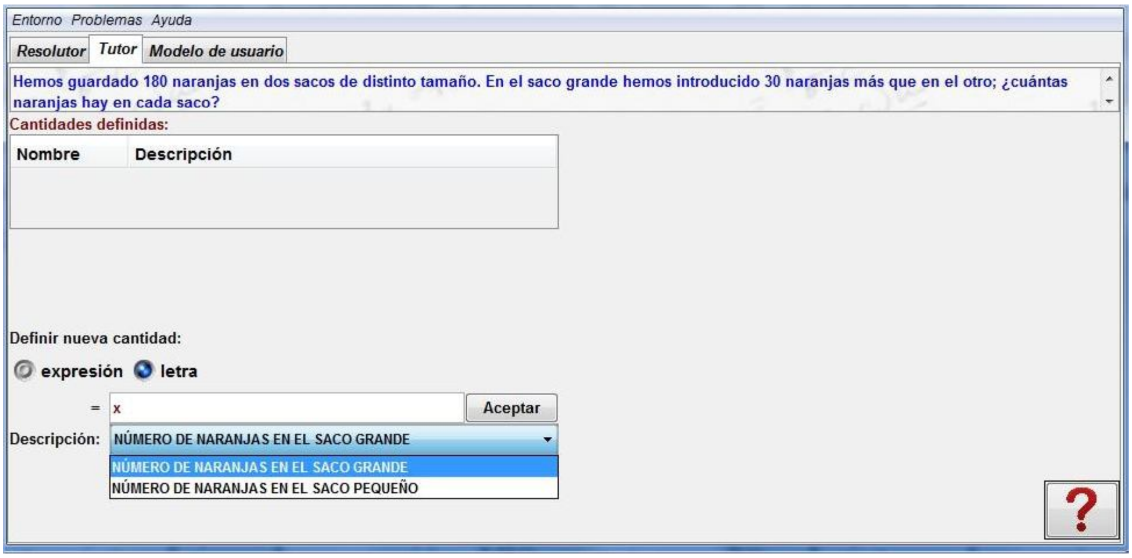


Figura 9. Asignación de una letra

En este punto el estudiante puede seguir asignando letras a las cantidades desconocidas o bien asignar expresiones algebraicas. Si decidiera construir la expresión $x - 30$, el sistema, al igual que en el caso aritmético, comprobaría si existe alguna relación en la que se pueda aplicar la RP2 y, en consecuencia, asignaría la expresión a la cantidad *Sp*. El programa, al dar por correcta la acción, encuentra que es ya posible aplicar la RP3, pues existe una relación en la que todas las cantidades tienen asignada una expresión matemática, y comunica la posibilidad de introducir una ecuación haciendo aparecer un nuevo panel en el que además de los botones anteriores se incluye el del signo igual (Figura 11). Si ahora el estudiante pidiera ayuda, el sistema proporcionaría información sobre el planteamiento de la ecuación. Las ayudas pueden contener distintos niveles de explicitación y pueden usar las distintas formas de referirse a las cantidades. En la Figura 10se muestra la información que recibiría si en este momento se pidiera ayuda dos veces seguidas.

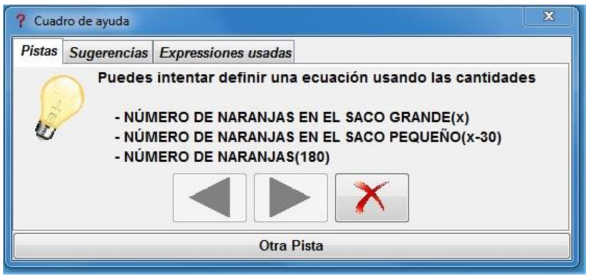


Figura 10. Dos niveles de ayuda en el paso 4

Si ahora el resolutor introdujera la ecuación $x - 30 = 180 - x$ (Figura 11) el sistema buscaría alguna relación en la que a todas las cantidades se les hubiera asignado una representación matemática, comprobaría el orden de los operandos y el signo de operación, y consideraría finalizado el planteamiento.

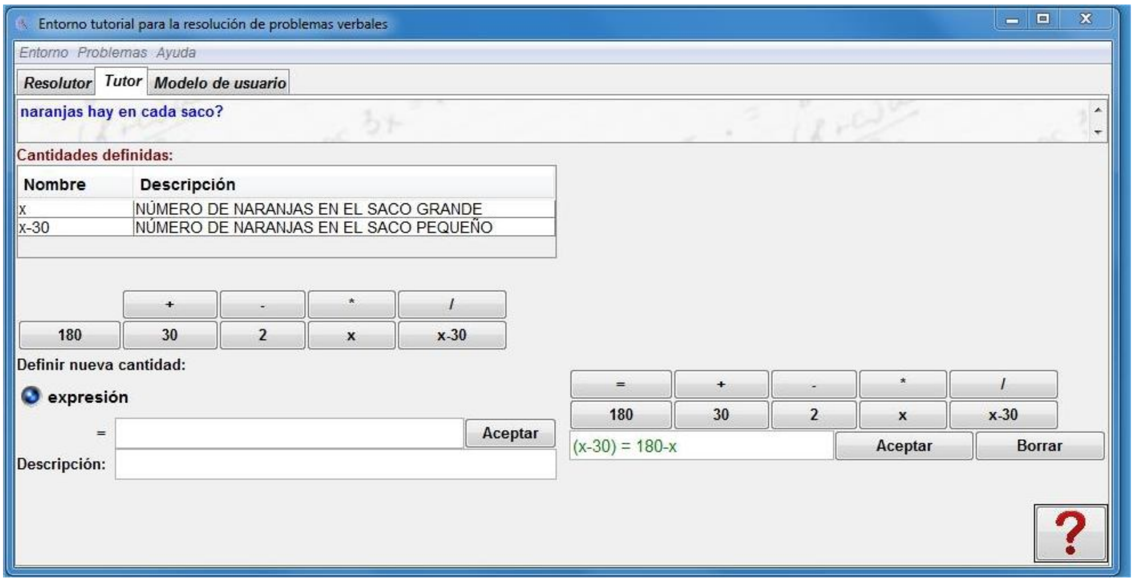


Figura 11. Construcción de una ecuación

En definitiva, tras el intento aritmético de resolución y la posterior resolución algebraica, el sistema habría caracterizado al estudiante como se muestra en la Figura 12 (donde las marcas rojas representan errores y las verdes aciertos). Con la información disponible, por ejemplo, el programa podría concluir que el estudiante ha tenido dificultades en el planteamiento de la ecuación. Si bien es cierto que en este punto no sería posible determinar si la dificultad era propia del problema o se trataba de una dificultad ligada al paso 4 del método cartesiano, la resolución de nuevos problemas por parte del estudiante podría aclarar la situación.

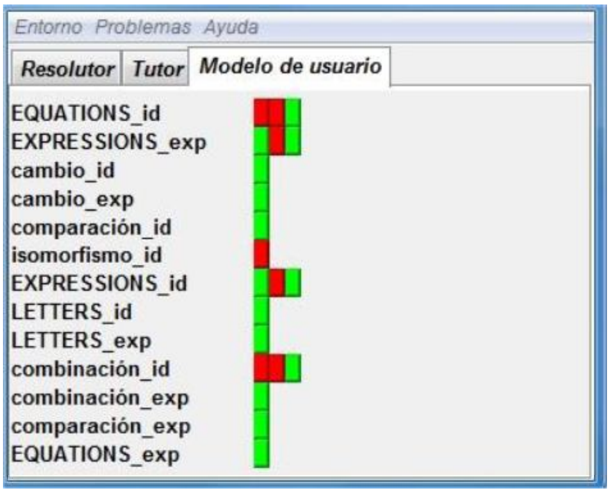


Figura 12. Estado final del modelo de estudiante

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

La minimización de las reglas de producción, la separación estricta entre el conocimiento declarativo y procedimental y el recurso a la representación mediante hipergrafos de la resolución de un problema, han permitido que el motor de inferencia ligado al modelo del dominio sea flexible ante las decisiones del estudiante. El sistema soporta resoluciones aritméticas y algebraicas y permite múltiples vías de solución para una misma lectura analítica (para una exposición más detallada véase: Arnau et al., 2013, 2014).

Hemos mostrado que el sistema es capaz de ofrecer ayudas a demanda teniendo en cuenta las restricciones que impone la tarea y las acciones que ha realizado el resolutor. Sin embargo, surge la necesidad de dar una respuesta personalizada a los errores o peticiones de ayuda teniendo en cuenta las características del estudiante. Un ejemplo de cómo generar ayudas adaptadas se puede encontrar en Arevalillo-Herráez, Arnau, et al. (2013), pero es necesaria una mayor investigación para determinar cuándo se debe retener información o el efecto de proporcionar una parte (véase, por ejemplo, González-Calero, Arnau, Puig, y Arevalillo-Herráez, 2014).

La determinación del modelo de estudiante se apoya en la hipótesis de que es posible describir una parte del conocimiento del alumno atendiendo a su competencia a la hora de aplicar esquemas conceptuales en el proceso reducción del enunciado a un conjunto de relaciones matemáticas. En este momento estamos diseñando los elementos del modelo de enseñanza que deberán emplearse para procesar esta información con la finalidad de poder anticipar decisiones, diseñar secuencias de enseñanza y, en última instancia, comprobar la validez de la hipótesis.

Por otro lado, los intercambios de información entre sistema y estudiante son poco ricos si los comparamos con los que se producen entre humanos. El sistema no es capaz de detectar frustración o cansancio. No obstante, la identificación de emociones, que típicamente realiza un profesor humano, y su incorporación al modelo de estudiante es una de nuestros ámbitos de interés (véase, por ejemplo, Arevalillo-Herráez, Moreno-Picot, et al., 2013).

Para terminar, parafraseando en parte a Newell y Simon (1972), una teoría de cómo los profesores tutorizan la resolución de problemas, *permitirá construir profesores artificiales* que tutorizarán la resolución de problemas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado al amparo del proyecto EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

Referencias

Aleven, V., Roll, I., McLaren, B. M. y Koedinger, K. R. (2010). Automated, unobtrusive, action-by-action assessment of self-regulation during learning with an intelligent tutoring system. *Educational Psychologist*, *45*(4), 224-233.

Anderson, J. R. (1983).*The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D. y Marco-Giménez, L. (2013). Domain-specific knowledge representation and inference engine for an intelligent tutoring system. *Knowledge-Based Systems*, *49*, 97-105.

Arevalillo-Herráez, M. et al. (2013). Towards enriching an ITS with affective support. En M. Kravcik, O. C. Santos, J. G. Boticario, y D. Pérez-Marín (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Workshop on Personalization Approaches in Learning Environments (PALE), held in conjunction with the 21st International Conference on User Modeling, Adaptation, and Personalization (UMAP2013)* (pp. 5-13). Roma, Italia: CEUR Workshop Proceedings.

Arnau, D., Arevalillo-Herraez, M. y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on*, *7*(2), 155-164.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers&Education*, *63*, 119-130.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de lasCiencias*, *31*(3), 49-66.

Beal, C. R. (2013). AnimalWatch: An intelligent tutoring system for algebra readiness. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (pp. 337-348). Nueva York: Springer.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 3-12). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Castro, E. et al. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 63-76). Zamora: SEIEM.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Chaiklin, S. (1989). Cognitive studies of algebra problem solving and learning. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 93-114). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-175). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2014). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*.doi: 10.1111/bjet.12183

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(4), 339-365.

Hinsley, D., Hayes, J.R. y Simon, H. A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. En P. A. Carpenter y M. A. Just (Eds.), *Cognitive processes in comprehension* (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Koedinger, K. R. y Aleven, V. (2007). Exploring the assistance dilemma in experiments with cognitive tutors. *Educational Psychology Review*, *19*, 239-264.

Koedinger, K. R. y Anderson, J. R. (1998). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments*, *5*(1), 161-179.

Looi, C. K. y Tan, B. (1996). WORDMATH: A computer-based environment for learning word problem solving. En A. Díaz de Ilarraza Sánchez y I. Fernández de Castro (Eds.), *Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering* (pp. 78-86). Berlín: Springer.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Nueva York: Cambridge University Press.

Martínez-Videla, M. V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*.Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science*, *10*, 135-175.

Mitrovic, A., Koedinger, K. y Martin, B. (2003). A comparative analysis of cognitive tutoring and constraint-based modeling. En P. Brusilovsky, A. Corbett y F. de Rosis (Eds.), *User Modeling 2003 - Lecture Notes in Computer Science 2702* (pp. 313-322). Berlín: Springer.

Nathan, M. J. (1998). Knowledge and situational feedback in a learning environment for algebra story problem solving. *Interactive Learning Environments*, *5*(1), 135-159.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (Combined Edition)*. Nueva York: John Wiley&Sons.

Puig, L. (1998a). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 106-118). Zamora: SEIEM.

Puig, L. (1998b). *Poner un problema en ecuaciones*. Manuscrito publicado en http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: Componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 97-108). Granada: SEIEM.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: AcademicPress.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 de edad)*. Trabajo de Tesis Doctoral. México DF: CINVESTAV-IPN.

Schoenfeld, A. H. (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 697-710.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167.

Thompson, P. W. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 135-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Welham, D. (2008). AI in training (1980--2000): Foundation for the future or misplaced optimism? *British Journal of Educational Technology*, *39*(2), 287-296.

Woolf, B. P. (2008). *Building intelligent interactive tutors, student-centered strategies for revolutionizing e-learning*. Burlington, MA: Morgan Kaufmann Publishers.

---

[i] Por ejemplo, el problema “He comprado tres cajas de pasteles. Cada caja contiene cinco pasteles de crema y dos de chocolate. ¿Cuántos pasteles he comprado?” se puede clasificar tanto como un problema de dos como de tres etapas.

[ii] Evitaremos indicar el tipo de combinación, comparación, cambio o isomorfismo de medidas porque en el caso de resoluciones algebraicas se materializan en el momento en que se expresa la relación.

[iii] Podríamos comparar el sistema en este momento con un profesor que no sería capaz de resolver este problema de todas las formas habituales. Por ejemplo, si un estudiante introdujera la expresión 180 + 30, el sistema consideraría la acción incorrecta pues no podría encontrar ninguna relación en la que aparecieran estas dos cantidades.

RÉPLICA A LA PONENCIA:

HACIA PROFESORES ARTIFICIALES EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES DEL PROFESOR DAVID ARNAU

Moreno, A.

Universidad de Granada

La ponencia comienza señalando antecedentes en los que se ponen de manifiesto las dificultades del alumnado cuando se inician en el álgebra y analiza el uso de sistemas de aprendizaje interactivos para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos centrándose en dos aspectos: por un lado, el recurso a múltiples sistemas de representación que apoyen el planteamiento del problema y, por otro, el uso de técnicas de inteligencia artificial para simular parte de las acciones de un profesor.

El trabajo plantea, dentro de un contexto general de uso de tutoriales, tres ideas:

- La posibilidad de crear un sistema tutorial inteligente o "profesor artificial", empleando un marco que tiene en cuenta aspectos cognitivos, competenciales, didácticos y de comunicación entre máquina y estudiante.
- La atención a diversos tipos de aprendizaje.
- La presencia de un sistema capaz de evaluar la actuación del estudiante (lo prefiero al término caracterizar que emplea el autor).

La mayor parte de los marcos teóricos utilizados en la metacognición se centran en dos componentes: el conocimiento declarativo y procedimental, y la regulación de ese conocimiento, entendido como el repertorio de acciones que un individuo dedica al realizar una tarea (Schraw, 2001; Schraw, Brooks y Crippen, 2005; Schraw, Crippen y Hartley, 2006).

La fundamentación del sistema tutorial inteligente que se presenta en la ponencia, y ese es uno de sus méritos a mi juicio, se cimienta en los Modelos Teóricos Locales. Un marco teórico y metodológico elaborado por Filloy en la década de los ochenta y en el que "desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de una investigación, es un Modelo Teórico Local (MTL). El carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. El carácter de modelo viene dado, entre otras cosas, por el hecho de no afirmarse que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito." (Puig, 2008, p. 88).

Arnau considera que este modelo es el que mejor se adapta al trabajo con inteligencia artificial porque establece una relación directa entre ésta y los cuatro componentes de los MTL: a) un componente de competencia que en el trabajo analizado se denomina modelo del dominio y se asocia al conocimiento del experto en forma de definiciones o procedimientos; b) otro de actuación o de los modelos cognitivos, que Arnau denomina "modelo del estudiante", que está asociado al conocimiento de cómo los estudiantes actúan en forma de errores cometidos o proximidad al

Moreno, A. (2015). Réplica a la ponencia: Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales del profesor. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 61-65). Alicante: SEIEM.

conocimiento experto; c) un tercer componente de enseñanza relacionado con el modelo didáctico, y que contiene una representación de cómo los profesores actúan; y d) un cuarto de comunicación, que representa los métodos y técnicas para el intercambio de información entre programa y estudiante.

El modelo de competencia o modelo del dominio, siguiendo a Puig (2008), provendría de dos fuentes: una que examina al sujeto ideal y otra que examina al sujeto real. El trabajo de Arnau propone el método cartesiano como el que "permite resolver cualquier problema verbal". En este sentido, este método supone la parte de la competencia en la resolución de problemas verbales basado en el análisis de experto.

El modelo cognitivo o modelo del estudiante contiene la información sobre las características del estudiante con respecto a cómo aprende, cómo resuelve o cómo reacciona ante el reto o la frustración. Para el diseño de sistemas inteligentes enfocados a la resolución de problemas, el autor plantea dos categorías para la generación de los modelos de estudiante:

1) la actuación ante alguno de los pasos del método cartesiano y
2) el uso de esquemas conceptuales en la resolución de un problema con el fin de realizar una clasificación más fina de los problemas que además tenga en cuenta las decisiones que toma un sujeto a la hora de resolverlos.

El modelo de enseñanza atiende a las tareas que realiza un profesor cuando supervisa la resolución de un problema verbal que realiza un estudiante. La ponencia se centra en la enseñanza del método de resolución y en la generación de ayudas a demanda teniendo en cuenta las restricciones que impone la tarea y las acciones que ha realizado el resolutor.

El modelo de comunicación describe los intercambios de información que se producen entre un sistema tutorial inteligente con el estudiante. El análisis se centra en las restricciones que impone la interfaz.

OBJETIVO DE LA PONENCIA

El trabajo presentado por el profesor Arnau, "Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales", describe los fundamentos de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza y aprendizaje de problemas verbales aritmético-algebraicos.

De acuerdo con esto y desde mi perspectiva, algunos de los puntos fuertes del trabajo son que:

- Aborda la relación entre sistemas tutoriales en el ámbito de la Inteligencia Artificial y el problema del aprendizaje de problemas verbales.
- Intenta conjugar en el sistema tutorial inteligente ámbitos tan complejos como la competencia matemática, aspectos cognitivos, didácticos y de interfaz.
- Construye un sistema de ayuda a demanda del estudiante que permite seleccionar cuál ofrecer entre múltiples posibles.
- La construcción del sistema tutorial inteligente ayuda a caracterizar problemas y subproblemas verbales.

Por otro lado, algunos de los puntos débiles del trabajo son los siguientes:

- El modelo cognitivo no parece sustentarse con profundidad planteando dos categorías para los modelos de estudiante: por un lado los que utilizan parte del esquema cartesiano y por otro, el uso de esquemas conceptuales para clasificar problemas en la resolución de problemas verbales. Y esto porque se basa en la hipótesis aún no validada (como señala el propio autor) de que es posible describir una parte del conocimiento del alumno atendiendo a su competencia a la hora de aplicar esquemas conceptuales en el proceso de reducción del enunciado a un conjunto de relaciones matemáticas.

- Como consecuencia de lo anterior, y esta autocrítica la asume el propio autor, el modelo de enseñanza está en desarrollo con el fin de ser capaz de anticipar decisiones y diseñar secuencias de enseñanza.
- Un aspecto que habría que clarificar y que ya surgió en este mismo foro con González (2005) sería el papel del contexto. Debemos entender que si el estudiante aprende por repetición de esquemas de problemas, el contexto no juega ningún papel en el aprendizaje o quizás se presenta como oferta complementaria. Tampoco queda claro el papel del profesor: ¿tiene posibilidad de intervenir en el diseño de las secuencias de tareas?

PUNTOS DE INTERÉS PARA DEBATIR

Finalmente, presento varios puntos de discusión que pueden suscitar el debate. Los organizo en torno a tres ideas clave desarrolladas en la ponencia de Arnau: el papel del profesor, un modelo cognitivo y un modelo de competencia.

Respecto al papel del profesor

El profesor artificial proporciona ayuda al estudiante cuando éste la solicita. Sin embargo, la atención a la diversidad de estudiantes requiere que el profesor trabaje de forma personalizada dichas ayudas a partir del conocimiento de los estudiantes. De hecho, Stevens, Beal y Sprang (2013) indican que las ayudas que incluyeron en su tutorial, unas veces perjudicaban el aprendizaje de sus estudiantes y otras lo beneficiaban. Decidieron retirar las ayudas hasta no conocer qué tipos de mensajes y por qué, producían un efecto u otro. Surge pues la cuestión sobre de qué manera los sistemas tutoriales inteligentes pueden tratar a la diversidad de estudiantes.

Asimismo, el profesor realiza propuestas de tareas sobre la base del conocimiento del grupo de estudiantes. Toma decisiones sobre los contenidos que se van impartiendo fundamentándose en el conocimiento de los estudiantes que surge de la interacción entre el profesor y el grupo. De ahí, surge la cuestión de si el profesor participa en el diseño y organización de las tareas que el sistema tutorial plantea a los estudiantes. O bien esta otra cuestión sobre si los resultados de aprendizaje con el sistema tutorial inteligente dependerán de la influencia del profesor.

Respecto al modelo cognitivo

La visión que se percibe del sistema tutorial inteligente del que se habla es que el aprendizaje es un proceso de codificación, fortalecimiento y conocimiento procedimental. Este proceso ocurre poco a poco. Como señalan Siegler y Shipley (1995), habrá conocimientos nuevos que se olvidarán (o seguirán siendo lo suficientemente débiles para quedarse sin usar) si no se practican, y elementos del conocimiento competirán para ser utilizados sobre la base de su fuerza.

La ponencia alude, en este sentido, a estudiantes que utilizan métodos algebraicos para la resolución de problemas verbales pero a otros que emplean métodos aritméticos. De aquí, surge la cuestión de si los sistemas tutoriales inteligentes permiten un cambio de un modo de resolución a otro por medio del aprendizaje repetido de estos problemas.

Puesto que la capacidad para realizar una tarea se basa en los componentes de conocimientos individuales requeridos para la misma, la educación es más eficiente cuando se enfoca directamente sobre los componentes de conocimiento individual que tienen relativamente poca fuerza. En una investigación sobre un sistema tutorial para la resolución de problemas de química, IMMEX, se comprobó que los estudiantes con las habilidades más pobres para la resolución de problemas mejoraban su eficiencia (habilidad para la resolución de problemas) tanto como los estudiantes con mayores habilidades, pero no convergían en resultados efectivos (Stevens et al., 2013). Esto enmarca la cuestión de si los sistemas tutoriales inteligentes son o serán capaces de evidenciar las debilidades del conocimiento de los estudiantes y dirigir el aprendizaje en su fortalecimiento.

Respecto al modelo de competencia

Desde hace cuarenta años se realizan predicciones sobre el papel que jugará la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes sin que hasta ahora se hayan producido grandes cambios. Unas veces, como señalan Rushby y Seabrook (2008), porque hasta que a partir del año 2000 se generalizó el uso de internet para consultar fuentes de información, la mayor parte de las preguntas de investigación planteadas en el uso de la tecnología para el aprendizaje, ya habían sido respondidas años antes. Sin embargo, los resultados se desconocían y seguía trabajándose sobre las mismas preguntas de investigación. En otras ocasiones, el ciclo de vida de las tecnologías ha sido muy corto (Rushby, 2013).

Estas ideas se traen a colación porque hace diez años, González (2005) planteaba unas preguntas relativas a otro sistema tutorial inteligente que aún me parecen pertinentes hoy y que vuelvo a retomar. En aquel momento González planteaba el choque entre el conocimiento curricular y el conocimiento competencial. El sistema tutorial inteligente del que hablamos ahora caracteriza el conocimiento competencial con el conocimiento experto y el de los estudiantes. No parece que exista un consenso en la comunidad de profesionales relacionados con la educación matemática. De aquí, surgen varias cuestiones, entre ellas: ¿Qué referentes objetivos tiene sobre lo que significa su desarrollo y consecución?, ¿Cómo se valida la bondad de las tareas realizas con este sistema tutorial inteligente de las cuales emergen las competencias matemáticas?, ¿Qué comparten con otras tareas que pretendan los mismos fines?, ¿Qué aporta al proceso de enseñanza-aprendizaje que no hubiera aportado el entorno presencial?

Referencias

González, M. J. (2005). Réplica a la ponencia: El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 71-78). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y SEIEM.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, *2*(3), 87-107.

Rushby, N. (2013). The future of learning technology: some tentative predictions. *Journal of Educational Technology & Society*, *16*(2), 52-58.

Rushby, N. y Seabrook, J. (2008). Understanding the past—illuminating the future. *British Journal of Educational Technology*, *39*(2), 198-233.

Schraw, G. (2001). Promoting general metacognitive awareness. En H. J. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction* (pp. 3-16). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Schraw, G., Brooks, D. W. y Crippen, K. J. (2005). Using an interactive, compensatory model of learning to improve chemistry teaching. *Journal of Chemical Education*, *82*(4), 637-640.

Schraw, G., Crippen, K. J. y Hartley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: Metacognition as part of a broader perspective on learning. *Research in Science Education*, *36*, 111-139.

Siegler, R. S. y Shipley, C. (1995). Variation, selection, and cognitive change. En T. J. Simon y G. S. Halford (Eds.), *Developing cognitive competence: New approaches to process modeling* (pp. 31-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stevens, R., Beal, C. y Sprang, M. (2013). Assessing students' problem solving ability and cognitive regulation with learning trajectories. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (pp. 409-423). Nueva York: Springer.

Seminario II

Investigación en Didáctica de la Probabilidad

Coordinadora

Carmen Batanero, Universidad de Granada.

Introducción seminario de investigación II: Investigación en Didáctica de la Probabilidad.

Ponentes

J. Miguel Contreras, Universidad de Granada.

Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía.

Ernesto Sánchez Sánchez, CINVESTAV-IPN**.**

El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato.

M. Pedro Huerta, Universidad de Valencia.

La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas.

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

Research on the didactics of probability

Batanero, C.

Universidad de Granada

Al ser invitada a organizar un seminario relacionado con las investigaciones del Grupo de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria, decidí centrarlo en la didáctica de la probabilidad, tema no tratado anteriormente en los seminarios de nuestro Simposio.

Todos los miembros de la Sociedad nos encontramos involucrados en la formación de los futuros maestros para enseñar este tema a los niños, desde los primeros niveles de la Educación Primaria. Esta formación ha de incluir no sólo el conocimiento matemático, sino las diferentes facetas de su conocimiento didáctico. Muchos también hemos participado en la formación didáctica de los futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Nos encontramos ante el dilema de organizar en la mejor forma posible esta formación, teniendo en cuenta lo limitado del tiempo disponible y las características específicas de la probabilidad. Como investigadores y especialistas en didáctica de la matemática, debemos también involucrarnos en lo posible en el análisis de las directrices curriculares, los materiales didácticos y en especial los libros de texto, en la evaluación de las concepciones y dificultades de los estudiantes, y en el diseño y análisis de propuestas para mejorar la tarea docente.

Todos estos temas son hoy día objeto de investigación de interés creciente a nivel internacional (Jones, Langrall y Mooney, 2007). La didáctica de la probabilidad cuenta con una tradición de investigación más amplia que la didáctica de la estadística; además asistimos recientemente a una intensificación, como se muestra en la publicación de los libros de Jones (2005) y Chernoff y Sriraman (2013), o en la existencia de un grupo específico (TSG14) en los congresos ICME (International Congres of Mathematics Education). Los trabajos que presentamos en este seminario reflejan algunas de las tendencias recientes en la investigación en el tema, a la vez que el trabajo realizado en los Simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática por los ponentes.

José Miguel Contreras presenta una caracterización de la probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria correspondientes al Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) que ha sido realizada en colaboración con Emilse Gómez y yo misma. Esta investigación parte del análisis epistemológico de los significados de la probabilidad, que coexisten en la enseñanza, pero están sujetos a controversias filosóficas (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). La aplicación de ideas tomadas del enfoque onto-semiótico para la didáctica de la matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) permite a los autores discriminar las configuraciones epistémicas de objetos implícitos en los diferentes significados de la probabilidad, que muestran que la diferencia entre estos significados no es simplemente filosófica, sino también de índole matemática (véase Batanero, 2015). La comparación de estas configuraciones epistémicas con las directrices curriculares lleva a los autores a describir con detalle los objetos específicos ligados a los enfoques intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo que aparecen explícita o implícitamente en dichas directrices.

Este primer paso fue el punto de partida para el estudio que ahora se resume de los textos escolares y que se describe con mayor detalle en Gómez (2014) y publicaciones posteriores (Gómez, Batanero y Contreras, 2014; Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013; Gómez, Ortiz y Gea, 2014). Sus resultados proporcionan un mapa detallado del contenido de probabilidad en los textos

Batanero, C. (2015). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

analizados; informando de los significados de la probabilidad y objetos matemáticos que se privilegian en cada uno de sus niveles y mostrando ejemplos de actividades factibles para trabajar con niños de diferentes edades. Este material es de gran utilidad en el diseño de actividades para el aula y la mejora de los libros de texto. También puede orientar el trabajo del maestro de primaria y la formación de los futuros maestros.

El segundo trabajo, presentado por Ernesto Sánchez y realizado en colaboración con Julio César Valdez, también aborda los diferentes significados de la probabilidad, pero desde el punto de vista del sujeto que aprende (significado personal). Se trata de una investigación dirigida al análisis de la forma en la que algunos estudiantes de Bachillerato coordinan los significados clásico y frecuencial al resolver tareas de probabilidad relacionadas con la comprensión intuitiva de la ley de los grandes números y de la variabilidad aleatoria. Con objeto de comprender mejor y tratar de disminuir las dificultades para realizar esta coordinación, los autores proponen un marco teórico que describe el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes. Dicho *razonamiento probabilístico informal* se entiende como la manera en que los estudiantes utilizan sus conocimientos y creencias para comprender y argumentar los problemas de probabilidad. Se basa en el uso de las ideas fundamentales probabilísticas de aleatoriedad, independencia, variabilidad aleatoria e incertidumbre asociada a una predicción en situaciones probabilísticas.

Mediante el análisis de las respuestas de diez estudiantes a un cuestionario formado por tres tareas, y apoyándose en la taxonomía propuesta por Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997), Sánchez y Valdez proponen una clasificación de las respuestas, en función de los niveles del razonamiento probabilístico informal que se muestran en ellas. Para ello analizan con detalle la complejidad de las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas para cada una de las ideas fundamentales descritas, resaltando el progreso creciente en la profundidad de su razonamiento probabilístico. Con este trabajo los autores completan otros previos del mismo equipo de investigación, centrados en la clasificación jerárquica del razonamiento probabilístico de los estudiantes (véase, por ejemplo, Sánchez, 2010; Sánchez, Borim y Coutinho, 2011; Sánchez, García y Medina, 2014; Sánchez y Landín, 2014). Dichas jerarquías proporcionan orientaciones para la evaluación de los estudiantes, al informar al profesor de la forma en que razonarán en los problemas de probabilidad así como para ayudarles a identificar el nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes y a promover su desarrollo hasta los niveles superiores de razonamiento.

Nuestro tercer trabajo, presentado por Pedro Huerta, se centra en el concepto de probabilidad condicional, base del enfoque subjetivo de la probabilidad y respecto al cual se han descrito numerosas dificultades. Continuando su amplia trayectoria de investigación en esta temática (véase, por ejemplo, Cerdán y Huerta, 2007; Huerta, 2009 y 2014; Huerta, Amorós, Arnau y Edo, 2015; Lonjedo, Huerta y Carles, 2008), el autor aborda en este caso el uso de problemas de probabilidad condicional como recurso para la formación matemática y didáctica de maestros y de futuros profesores de matemáticas en el campo de la probabilidad.

Para ello Huerta introduce la idea de *resolución de problemas con intención didáctica*, donde el objetivo de la resolución del problema no es sólo la búsqueda de la solución, sino el análisis global del proceso por parte del futuro maestro o profesor. Otra finalidad es el análisis de las potencialidades del problema y de su resolución para la formación de los futuros maestros y profesores. Huerta sugiere utilizar la simulación como principal estrategia en la resolución de estos problemas, para aumentar su potencialidad formativa. La simulación es un instrumento esencial para la enseñanza de la modelización en probabilidad (Chaput, Girard y Henry, 2011) por constituir un puente entre realidad y modelo matemático, es decir un *modelo pseudo-concreto* (Henry, 1997). Por ello lleva al estudiante a una actividad de modelización y le fuerza a utilizar herramientas heurísticas; a la vez que le conduce a trabajar con el enfoque frecuencial de la probabilidad, coordinándolo con el clásico y mejorando su comprensión de la ley de los grandes números.

Adicionalmente, tanto la resolución del problema mediante simulación, como su posterior análisis por parte del futuro maestro o profesor contribuyen al refuerzo de múltiples facetas de su conocimiento didáctico. Huerta nos brinda un ejemplo concreto de cómo llevar a cabo su propuesta para cada uno de los escenarios (formación de maestros y formación de profesores), indicando los objetivos perseguidos en cada caso y los pasos en la actividad formativa. Mientras que en el caso de los futuros maestros se pretende que transiten desde un razonamiento subjetivo hacia otro basado en una información más objetiva producto de la simulación, en el caso de los futuros profesores la finalidad es modificar su concepción excesivamente formal de la resolución de problemas de probabilidad a otra más factible de utilizar con sus propios estudiantes. Al tiempo, se proporciona a ambos colectivos una mejor comprensión de múltiples ideas de probabilidad.

En resumen, nuestro seminario analiza tres puntos importantes e interrelacionados en la enseñanza de la probabilidad: los materiales curriculares, la comprensión de los estudiantes y la formación de los profesores. Aunque esta muestra de trabajo no agota la inmensa riqueza del campo de investigación, pensamos que se cumple el objetivo de mostrar una muestra representativa de las investigaciones actuales, sus focos, marcos teóricos y aproximaciones metodológicas. Al mismo tiempo esperamos que la información proporcionada sea útil para profesores y formadores de profesores.

Recomendamos continuar e intensificar la investigación en didáctica de la probabilidad y encontrar nuevos caminos para familiarizar a los niños y jóvenes con situaciones inciertas; pues como Fischbein (1975) sugirió, el conocimiento y razonamiento probabilístico no se desarrollan espontáneamente sin una enseñanza específica. Debemos analizar con detalle la forma en que podemos llevar a los estudiantes y profesores a coordinar los diferentes significados de la probabilidad; superando las dificultades para comprender sus relaciones y diferencias (véase la discusión de Konold et al., 2011). Finalmente, es necesario que todos los implicados en la formación de profesores contribuyamos a la mejora del conocimiento didáctico de futuros maestros y profesores y la mejora de sus actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza.

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2015, febrero). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, *19*(1), 27-62.

Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 85-95). Nueva York: Springer.

Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (Eds.) (2014), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives.* Nueva York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children.* Dordrecht, Holanda: Reidel.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En M. Henry (Ed.), *Enseigner les* *probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims, Francia: Commission Inter-IREM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon, 31*(2), 25-42.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 49-71.

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research. Structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 163-194.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 613-639). Nueva York: Springer.

Lonjedo, Mª A., Huerta, M. P. y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 319-338.

Huerta, M. P., Amorós, R., Arnau, J. y Edo, P. (2015). Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (en prensa).

Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning.* Nueva York: Springer.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 101-125.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 68-86.

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Sánchez, E. (2010). Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 409-422.

Sánchez, E., Borim, S. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). Nueva York: Springer.

Sánchez, E., García, J. I. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(6), 5-23.

Sánchez, A. y Landín, P. R. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 581-597). Nueva York: Springer.

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO PARA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ANDALUCÍA

Meanings of probability in primary school textbooks used in Andalucía

Gómez Torres, E.[a], Contreras, J. M.[b] y Batanero, C.[b]

[a]Universidad Nacional de Colombia, [b]Universidad de Granada

Resumen

Se sintetiza el contenido probabilístico de dos series de libros de texto para educación primaria, analizando el significado de la probabilidad latente y comparando los contenidos con las directrices curriculares. Usamos herramientas de análisis del enfoque onto-semiótico para identificar y describir cómo se introduce cada objeto matemático (situación problema, lenguaje, concepto, propiedad, procedimiento y argumento) en los libros seleccionados. Los resultados muestran la introducción de objetos matemáticos ligados a cuatro significados de la probabilidad: el intuitivo está presente en todos los ciclos, el clásico y el frecuencial en los dos últimos, mientras que el subjetivo solo se menciona de forma tangencial. La comparación de las dos series muestra coincidencia en la mayoría de objetos encontrados; se resalta el tratamiento diferenciado del enfoque frecuencial, pues una editorial sólo presenta el punto de vista estadístico y la otra también desarrolla el punto de vista probabilístico.

Palabras clave*: Significados de la probabilidad, análisis de libros de texto, alfabetización probabilística*

Abstract

We summarize the results of analyzing the probabilistic content in two series of primary school textbooks and the latent meanings of probability they introduce in comparing them with the curricular guidelines. We use the onto-semiotic approach and describe the way the mathematical objects are introduced in the selected textbooks (problem situations, language, concepts, properties, procedures and arguments). Our results show the introduction of mathematical objects linked to four meanings of probability: the intuitive meaning is present in all the different levels, the classical and frequentist in the two upper levels, and the subjective approach is only tangential. There is coincidence in both series in the majority of objects included; we found different treatment of the frequentist approach, since one editorial only presents the statistical point of view, while the other also develops the probabilistic point of view.

Keywords: *Meanings of probability, analysis of textbooks, probabilistic literacy*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la probabilidad se ha introducido en la educación primaria en diversos países en las últimas décadas (Jones, Langrall y Mooney, 2007; Batanero, Burril y Reading, 2011) con la finalidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas.

Los documentos oficiales (MEC, 2006; MECD, 2014) proponen que la enseñanza de la probabilidad sea más experimental, para proporcionar a los niños una experiencia estocástica desde su infancia, reforzando sus intuiciones probabilísticas, en línea con los estándares americanos (CCSSI, 2010, NCTM, 2000). Mediante un lenguaje elemental probabilístico, juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, se intenta que el niño aprenda a reconocer la aleatoriedad y

Gómez Torres, E., Contreras, J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

al final de este ciclo educativo sea capaz de comparar y estimar algunas probabilidades sencillas. Una novedad en esta propuesta es un cambio desde un significado exclusivamente clásico de la probabilidad a un significado frecuencial, que conecta estadística y probabilidad (Batanero, 2005).

Una implicación de esta decisión es la necesidad de adaptar el contenido de los libros de texto, para que los conceptos que tratamos de introducir sean asequibles a los niños, pues con frecuencia, estos textos determinan el discurso matemático escolar y regulan la enseñanza y el aprendizaje (Cordero y Flores, 2007). Los libros son un producto de la transposición didáctica, descrita por Chevallard (1991), donde el conocimiento matemático formal se ha adaptado para convertirlo en conocimiento matemático para ser enseñado. El análisis de libros de texto es un componente del análisis curricular, dado que el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores es un paso entre el currículo pretendido y el implementado en el aula (Herbel-Eisenmann, 2007). Ortiz (2002) subraya la importancia del análisis de libros de texto por ser una fuente de contenidos y actividades para la enseñanza y aprendizaje de una disciplina. Además, menciona que el papel de los profesionales dela educación es vigilar epistémicamente los contenidos que figuran en los libros de texto, para identificar significados sesgados y evitar su transmisión a los estudiantes.

Este trabajo pretende contribuir en tal sentido, caracterizando los objetos matemáticos, considerados en el enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2012), para los significados de la probabilidad adecuados a la educación primaria, que se presentan en dos series de libros de texto de amplia difusión en la comunidad autónoma de Andalucía. A continuación se presenta el marco teórico y el método utilizado, así como una síntesis de los resultados, que se detallan más ampliamente en Gómez (2014). Resultados parciales del estudio se han publicado en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), Gómez, Ortiz y Gea (2014) y Gómez, Batanero y Contreras (2014).

MARCO TEÓRICO

Significados de la probabilidad

Aunque los juegos de azar han abundado en diferentes culturas, el inicio de la teoría matemática de la probabilidad ha sido tardío, sin que haya un acuerdo sobre las razones de este retraso (Bennet, 1999). Borovcnik y Kapadia (2014) sugieren que las creencias que ligaron el azar con las ceremonias religiosas o mágicas y la concepción determinista del mundo pueden haber sido una razón para no intentar matematizar estos fenómenos. Lo que es cierto es que la probabilidad, desde su emergencia, ha estado sujeta a diferentes interpretaciones y debates filosóficos que todavía continúan y se relacionan con la concepción y definición del azar en diferentes periodos históricos (Batanero, 2005 y 2015; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Borovcnik y Kapadia, 2014).

Una vez iniciado el cálculo de probabilidades, se han diferenciado dos puntos de vista complementarios (Hacking, 1975): por un lado, la probabilidad trata de medir el grado de creencia personal en la verosimilitud de los sucesos inciertos (perspectiva epistémica); por otro, la probabilidad trata de medir objetivamente esta verosimilitud a partir de datos de experimentos y observaciones (perspectiva estadística). De estas dos corrientes principales se deducen diversos significados, entre los que tendremos en cuenta en nuestro estudio los intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo (Fine, 1971), puesto que los hemos identificado en nuestro análisis previo de los documentos curriculares del Ministerio y de la Comunidad Autónoma de Andalucía (Gómez y Contreras, 2014).

Significado intuitivo. Al igual que aparecieron en las culturas primitivas, las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en adultos que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales como posible, previsible, presumible, para "cuantificar" sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. En consecuencia, la aproximación intuitiva, donde se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias individuales, es apropiada en la educación primaria (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). En este enfoque se emplean diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático.

Significado clásico. A partir del siglo XVII matemáticos tales como Cardano (1961/1663) resuelven algunos problemas relacionados con los juegos de azar, pero el concepto de probabilidad no se formaliza hasta comienzos del siglo XVIII. La preocupación por las ganancias esperadas en estos juegos, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad (Heitele, 1975). La correspondencia entre Pascal y Fermat, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla (Batanero y Díaz, 2007). De Moivre propone la primera definición formal de probabilidad, posteriormente refinada por Laplace (1995/1814).

> Si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (De Moivre, 1967/1718, p.1).

Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Esto constituye una debilidad, pues esta definición no es aplicable cuando los experimentos tienen infinitas posibilidades (la variable es continua) o no se cumple la equiprobabilidad. Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse este significado, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Sin embargo ha sido popular en la enseñanza; pues los niños se interesan por los juegos de azar. Más allá del cálculo de probabilidades sencillas requiere de razonamiento combinatorio, que es difícil para los niños, por lo que en la actualidad este enfoque ha perdido su primacía en la educación primaria.

Significado frecuencial. Bernoulli proporciona la primera demostración de la *ley de los grandes números* en su libro *Ars Conjectandi*. Esta demostración fue aceptada como prueba del carácter objetivo de la probabilidad (Batanero, 2005). Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial (von Mises, 1952/1928). La probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo. Algunos problemas filosóficos de este enfoque (Godino et al., , 1987) son los siguientes: no se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino que siempre se dan aproximaciones; no se sabe con certeza el número idóneo de experimentos para aceptar la estimación; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Otra objeción es que no se podría aplicar en algunos campos del conocimiento, por ejemplo a fenómenos económicos o históricos que por su naturaleza son irrepetibles. Didácticamente tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad.

Significado subjetivo. La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. Esta idea fue retomada más tarde por Ramsey (1931) y de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia personal. La probabilidad pierde su carácter objetivo, pues está condicionada por un cierto sistema de conocimientos. No es necesaria la repetición en idénticas condiciones y se amplía el campo de aplicación de las probabilidades. La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal (Batanero, 2005). Didácticamente el interés de esta visión es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia.

Investigaciones previas

Los estudios de la presentación de la probabilidad en libros de texto de matemática son escasos, siendo los principales en España los de Azcárate y Serradó (2006), Barragués y Guisasola (2006) y Ortiz (2002). Todos ellos concluyen que predominan los aspectos procedimentales sobre la comprensión conceptual o el desarrollo de razonamiento probabilístico.

Ortiz (2002) analizó una muestra de 11 libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años que fueron usados en el período 1975-1991. Los significados clásico y frecuencial se presentaban en todos los libros, casi siempre de manera formal; muy pocos presentaban el subjetivo. El autor se basó también en el enfoque onto-semiótico y realizó un análisis detallado de los principales objetos matemáticos presentes en dichos libros. Los conceptos de espacio muestral y frecuencia relativa se introducían en la mayoría de los libros estudiados, pero pocos mencionaban las propiedades de la aleatoriedad o la frecuencia relativa. El autor también realizó un estudio detallado de las variables que caracterizan los problemas de probabilidad.

Azcárate y Serradó (2006) analizaron la estructura de cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Una diferencia en la organización de los contenidos es que mientras dos editoriales los presentan de forma lineal (primero nociones teóricas y luego actividades de aplicación), en las otras dos la presentación es helicoidal (alternan nociones teóricas y actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo). Observan presencia mayoritaria del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras, y concluyen que las relaciones entre estos dos significados no se formalizan.

Barragués y Guisasola (2006) analizan 34 libros de texto universitarios, la mayoría de los cuáles omiten aspectos importantes del conocimiento disciplinar, como las diferentes interpretaciones de la probabilidad y sus relaciones o el desarrollo histórico de este concepto.

Para completar estos trabajos nos centramos en los textos de primaria, con especial interés en analizar el modo en que ahí se presentan los diferentes significados de la probabilidad.

METODOLOGÍA

Las dos series de los libros de texto analizados se eligieron por su amplio uso en Andalucía durante el curso 2011-2012 (tras una consulta vía web a la Consejería de Educación). Cada una de estas editoriales, denominadas en lo que sigue como Serie 1 o 2, tenía uno o dos proyectos vigentes en este curso para cada ciclo. La muestra fue constituida por un texto de primer ciclo, dos de segundo ciclo y dos de tercer ciclo por cada editorial; en total diez libros de texto (ver Anexo).

Los temas dedicados a probabilidad o estadística de estos textos fueron analizados mediante un análisis de contenido (Krippendorff, 1997), adaptando la metodología de Cobo (2003), con los pasos siguientes:

- División del texto en unidades de análisis conformadas por párrafos independientes.
- Fijación a priori de las variables para el análisis, basándonos en los objetos matemáticos considerados en el enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2012): situaciones problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos de la probabilidad en cada uno de sus significados.
- Definición de las categorías, para cada variable de análisis. Estas categorías se determinan mediante sucesivas revisiones de los documentos curriculares, en modo cíclico e inductivo de acuerdo a trabajos previos (Ortiz, 2002; Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

- Establecimiento de la presencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra, a través de la comparación del contenido de estos textos con la lista de categorías elaborada en el paso anterior y añadiendo categorías en caso necesario.
- Selección de ejemplos en los textos y elaboración de tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre la presentación de cada uno de los tipos de objetos matemáticos primarios en estas dos series.

A continuación presentamos un resumen de los resultados del análisis, organizado según los objetos matemáticos considerados en nuestro estudio. También indicamos algunas investigaciones previas en que se ha desarrollado alguno de los apartados que sigue.

SITUACIONES PROBLEMA

De acuerdo a nuestro marco teórico, las situaciones- problemas son el punto de partida de la actividad matemática. Los libros de texto estudiados proponen actividades enmarcadas en juegos de azar sencillos conocidos por el niño y experiencias de su vida cotidiana, que se clasifican en los siguientes tipos de situaciones problema:

- *SP1. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos.* En las series analizadas hay pocas actividades de reconocimiento del azar en el primer ciclo, y éstas se refieren básicamente a dispositivos usados en juegos de azar; los experimentos sencillos en contexto cotidiano son más frecuentes a partir del segundo ciclo. El grado de creencia se representa en una escala cualitativa; corresponde por tanto al *significado intuitivo.*
- *SP2. Valoración de probabilidad en juegos de azar.* Actividades referidas a juegos de azar se proponen en los tres ciclos, con diverso nivel de complejidad; es el contexto más habitual para ejemplos que siguen a la definición de un concepto probabilístico. La asignación numérica aparece en la Serie 1 al final del segundo ciclo y en la Serie 2 en el tercer ciclo, después de trabajar con la regla de Laplace. Sin embargo, este campo de problemas aparece con alta frecuencia en actividades didácticas de los dos últimos ciclos, pidiendo la valoración cualitativa de la ocurrencia de un suceso con calificativos como “muy, mas, igual, menos o poco” probable.
- *SP3. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados. La* recolección de datos por parte de los mismos niños aparece pocas veces en estos textos. Se proponen desde segundo ciclo en la Serie 1; sin embargo, la mayoría parten de datos recolectados previamente, presentados dentro del mismo texto en una tabla de datos.
- *SP4. Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible.* Los textos analizados presentan algunas situaciones ligadas a fenómenos naturales o a juegos de destreza, que dependen de la disponibilidad de información o conocimiento previo. Por su naturaleza corresponden al *significado subjetivo*; sin embargo, su tratamiento se hace a un nivel más sencillo, acorde con la edad del niño, se valora la verosimilitud de forma intuitiva; pero la experiencia personal del niño puede llevar a diferentes respuestas.

Un ejemplo de cada una de ellas se muestra en la Figura 1 y su presencia en los textos en la Tabla 1. Observamos que estos problemas de una forma sencilla introducen los cuatro significados de la probabilidad considerados. Todas estas situaciones problema favorecen un primer contacto con la capacidad de contextualizar el pensamiento probabilístico y el lenguaje, tanto en contextos públicos como privados; por tanto permiten desarrollar uno de los componentes de conocimiento en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005). Las situaciones de tipo intuitivo se restringen a primer ciclo; la clásica y subjetiva en los otros dos; sólo una de las dos series propone problemas de probabilidad ligados al enfoque frecuencial, en contra de lo propuesto en las orientaciones curriculares.

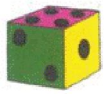
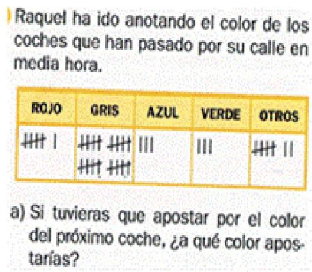
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Indica si los sucesos son muy, igual o poco probables:
-Sacar un 1
-Sacar mayor que 1
</td>
<td></td>
<td>Clasifica como "seguro", "probable" o "imposible" cada uno de estos sucesos en la experiencia LANZAR A CANASTA:
• Que meta canasta
• Que el balón vuele por el aire
• Que el balón toque el aro
• Que la canasta valga cuatro puntos</td>
</tr>
<tr>
<td>SP1: ([T1] p. 186)</td>
<td>SP2 ([T8], p. 124)</td>
<td>SP3: ([T3], p. 213)</td>
<td>SP4: ([T5], p. 214).</td>
</tr>
</table>

Figura 1. Tipos de situación problema en los textos

Tabla 1. Situaciones problema en los libros de texto

	1º ciclo		2º ciclo		3º ciclo	
Situaciones problema	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
SP1. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos	x	x	x	x	x	X
SP2. Valoración de probabilidades en juegos de azar			x	x	x	X
SP3. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados			x		x	
SP4. Estudio de sucesos cuya probabilidad cambia en función de la información disponible			x	x	x	X

LENGUAJE PROBABILÍSTICO

Como componentes de este lenguaje se analizaron los términos y expresiones verbales, expresiones numéricas y simbólicas, así como representaciones tabulares y gráficas, observando una gran diversidad entre textos, que se describe con detalle en Gómez et al. (2013).

Identificamos 70 expresiones ligadas a la probabilidad en los textos analizados, que hacen alusión a algunos de los conceptos probabilísticos, a sus propiedades o a procedimientos asociados. Respecto a la aleatoriedad encontramos los siguientes: Acertar, Adivinar, Aleatoria, Asegurar resultado, Azar, No saber, Saber qué saldrá, Saber de antemano, Saber resultados posibles, Sin mirar y Suerte. La mayoría de los vocablos pertenecen a dos de las categorías que distinguen Shuard y Rothery (1984): palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque difiere el significado en los dos contextos, y palabras que en ambos contextos tienen significado idéntico o muy próximo. Pensamos que la diversidad de términos observada puede aumentar la dificultad del tema, sobre todo si se utilizan términos del lenguaje cotidiano con otra acepción; por ejemplo, en el lenguaje ordinario el término seguro a veces se emplea para referirse a un suceso de probabilidad cercana a uno, mientras que en matemáticas, siempre indica un suceso de probabilidad uno.

Se observó que el uso de expresiones cotidianas es más frecuente que el de expresiones formales y simbólicas en estas colecciones, acorde con la edad de los niños. Esta riqueza de lenguaje, en las series de texto, apoya el componente comunicativo en el modelo de alfabetización probabilística (Gal, 2005); que incluye el uso de lenguaje, en particular verbal y numérico, puesto que permite comunicar no solo la probabilidad de un suceso sino también otros constructos relevantes para un ciudadano de la era de la información.

Por otra parte, la mayoría de expresiones hacen alusión a los significados clásico e intuitivo; pocas están asociadas al significado frecuencial, de poco peso (o nulo) en las editoriales; y ninguna se al significado subjetivo, debido a que las pocas situaciones asociadas a este significado están formuladas de manera que el niño las relacione con el intuitivo o el frecuencial.

En cuanto al lenguaje numérico, se observó una gran variedad, en contraposición con el simbólico que apenas aparece. En ambas editoriales los números enteros se introducen desde primer ciclo con función nominal o numérica. Las fracciones se utilizan desde segundo ciclo, principalmente para representar la frecuencia o el valor de la probabilidad (en especial en la Serie 2). En la Serie 1, desde el tercer ciclo, se hace la equivalencia de estas fracciones con números decimales, en concordancia con el currículo, que sugiere retrasar hasta tercer ciclo la introducción de la representación con decimales. De otro lado, la mayor parte del lenguaje simbólico es común con otros bloques de contenido y se introduce en el ciclo en que el niño lo aprende o en el siguiente. Es de notar que la desigualdad se encontró solo en un texto, para expresar relaciones de orden en la comparación de probabilidades.

La complejidad del lenguaje tabular avanza con los cursos; paralela al incremento del número de objetos matemáticos y la complejidad de sus relaciones (Tabla 2). Su principal uso se asocia con presentación de datos; sólo al final de la educación primaria se relaciona explícitamente con la probabilidad, al presentar las frecuencias relativas como estimaciones de probabilidades, facilitando su articulación con la estadística y la introducción del significado frecuencial. Aunque, en general, los autores de los libros no hacen mención de la relación entre estadística y probabilidad, ni resaltan que la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a uno. Observamos la variedad de tablas y su complejidad al incluir frecuencias relativas y en algún caso, incluso frecuencias agrupadas.

Tabla 2. Tipos de tablas presentadas en los textos

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
Tipo de tabla	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Listado de datos			x	x		
Tabla de recuento	X	x				
Tabla de frecuencias sin agrupar			x	x		
Tabla de frecuencias con datos agrupados					x	
Tabla de doble entrada			x			
Tabla de frecuencias relativas					x	x
Tabla de frecuencias y probabilidad					x	

En cuanto al lenguaje gráfico, se observó el uso de diagramas de barra, de sectores y pictogramas, relacionado con el tratamiento de datos, en ambas editoriales (ver ejemplos en la Figura 2). También se presenta en ambas editoriales el diagrama en árbol, que se emplea como recurso sistemático de enumeración, aunque no se hace una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas. Al igual que en el uso de lenguaje tabular, la Serie 1 desarrolla más el significado frecuencial, aquí con la presencia del histograma; representación que no se usa en la Serie 2. El pictograma, en cambio, se adelanta en la Serie 2 respecto a la Serie 1.

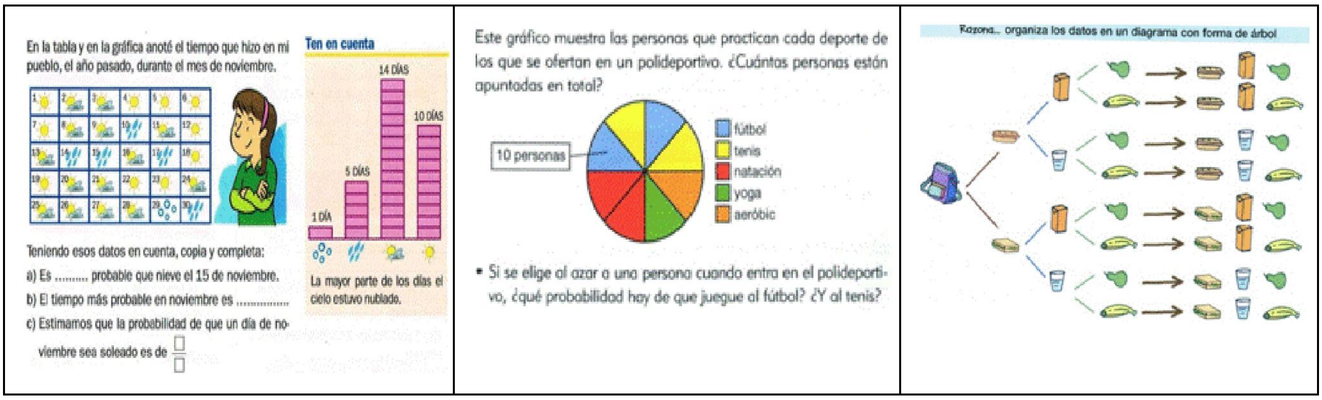


FIGURA 2. EJEMPLOS DE LENGUAJE GRÁFICO ASOCIADO EN LOS TEXTOS A LA PROBABILIDADCONCEPTOS

Aunque conocimiento conceptual y procedimental son dos partes de un continuo, el primero es flexible y más generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001). En la Tabla 3 presentamos los conceptos probabilísticos básicos identificados en el análisis, clasificados de acuerdo al significado de la probabilidad en que toman su sentido. Observamos que a nivel de educación primaria estos conceptos se introducen de manera informal, sin desarrollar todas sus propiedades y no se utiliza la terminología formal o definiciones de los mismos. Estos conceptos en su conjunto incluyen la mayoría de ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975), quien opina que dichas ideas deben constituir una guía del currículo de probabilidad desde la escuela primaria a la universidad. Asimismo, estos conceptos serían componentes de las tres ideas probabilísticas fundamentales en el modelo de Gal (2005): variación, aleatoriedad e independencia, así como sus contrapartes constancia, determinismo y asociación. Hacemos notar que conceptos como experimento compuesto, dependencia e independencia no se incluyen en las orientaciones curriculares.

Tabla 3. Conceptos en los libros de texto

Concepto según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Significado Intuitivo						
CI1. Azar y variabilidad	x	x	x	x	x	x
CI2. Suceso; seguro, posible e imposible	x	x	x	x	x	x
CI3. Posibilidad, grado de creencia	x	x	x	x	x	x
Significado Clásico						
CC1. Juego de azar	x	x	x	x	x	x
CC2. Casos favorables; casos posibles			x		x	x
CC3. Probabilidad			x		x	x
CC4. Juego equitativo					x	x
CC5. Experimento compuesto	x		x	x	x	x
Significado Frecuencial						
CF1. Colectivo (población); atributos	x	x	x	x	x	x
CF2. Ensayo; ensayos repetidos			x		x	
CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)			x	x	x	x
CF4. Valor estimado de la probabilidad			x		x	
Significado Subjetivo						
CS1. Suceso incierto			x	x	x	x
CS2. Probabilidad como grado de creencia personal			x	x	x	x
CS3. Dependencia, independencia	x		x	x	x	x

Ambas editoriales desarrollan conceptos básicos de los cuatro significados de la probabilidad. Durante todos los ciclos se observan conceptos propios del significado intuitivo y en los dos últimos ciclos, los significados clásico, frecuencial y subjetivo. Algunos conceptos no se formalizan, como es de esperar a esta edad, solo se presentan en forma intuitiva, en especial los ligados al significado subjetivo. La Serie 2 presta mayor atención al significado clásico; mientras que la Serie 1 también desarrolla conceptos del significado frecuencial, respecto al cual había propuesto situaciones problema. Los resultados en detalle de este análisis se presentan en Gómez et al. (2014).

PROPIEDADES

La presentación de propiedades en los textos analizados es informal pues hay pocos enunciados explícitos y ninguna demostración, como corresponde a esta edad. En la Tabla 4 presentamos aquellas propiedades que se contemplan de modo implícito en las orientaciones curriculares. Un análisis más detallado se encuentra en Gómez et al. (2014).

Ambas editoriales incluyen propiedades de los cuatro significados de la probabilidad. Se observa la presencia durante todos los ciclos de propiedades del significado intuitivo, con respecto a la impredecibilidad y a la tipología de sucesos. Las propiedades fundamentales de los significados clásico y frecuencial se presentan gradualmente; con mayor presencia del primero, muy baja atención a la experimentación y sin mención a la simulación, a pesar de la importancia que dan las orientaciones curriculares al uso de tecnologías. Asimismo, dos propiedades fundamentales del significado subjetivo están mencionadas en los dos últimos ciclos.

Cabe resaltar que la Serie 1 desarrolla cuatro propiedades del significado frecuencial que facilitan la comprensión de su carácter aproximado y su relación con la estadística. Ambas editoriales, durante todos los ciclos, incluyen propiedades del significado intuitivo que vinculan con los significados frecuencial y subjetivo, como que la probabilidad se puede revisar en función de la experiencia; y en los dos últimos ciclos presentan la asignación clásica como cuantificación de una posibilidad, y dos propiedades del subjetivo referidas a la posible relación de causas y resultados.

Tabla 4. Propiedades presentes en los libros de texto y los documentos curriculares

Propiedad según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Significado Intuitivo						
PI1. Impredecibilidad del resultado	x	x	x	x	x	x
PI2. Posible: cualquier resultado	x	x	x	x	x	x
PI3. Imposible: nunca se verifica	x	x	x	x	x	x
PI4. Seguro: siempre ocurre	x	x	x	x	x	x
PI5. Calificable comparando				x		x
Significado Clásico						
PC1. Número de resultados finito y numerable	x	x	x	x	x	x
PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales	x	x	x	x	x	x
PC3, PC4. Casos favorable; posibles	x	x	x	x	x	x
PC5. Valor objetivo, calculable			x		x	x
PC6. Regla de Laplace			x		x	x
Significado Frecuencial						
PF1. Colectivo	x	x	x	x	x	x
PF2. Atributos equiprobables o no	x	x	x	x	x	x
PF3. Probabilidad: Valor objetivo estimable			x		x	
Significado Subjetivo						
PS1. Suceso incierto: impredecible			x	x	x	x
PS2. Probabilidad: condicionada			x	x	x	x

También hemos encontrado propiedades consideradas por las editoriales y que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares. En particular, la Serie 1 desarrolla propiedades del significado frecuencial que facilitan la comprensión de su carácter aproximado: Convergencia de la frecuencia a la probabilidad; carácter aproximado de la estimación y variabilidad de la estimación.

PROCEDIMIENTOS

La exposición de los procedimientos en los textos analizados (Tabla 5) es informal y no se hace énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible. Ambas editoriales incluyen procedimientos de cada uno de los significados de la probabilidad, sin mención de la interpretación de resultados. La presencia de procedimientos asociados al significado intuitivo es notable en todos los ciclos, donde los procedimientos de reconocimiento aparecen desde primero y los de valoración desde segundo ciclo. El ciclo en que se introducen procedimientos del significado clásico varía de una editorial a otra. En el significado frecuencial, el foco de atención también varía de una editorial a otra: solo la Serie 1 incluye procedimientos de naturaleza probabilística, ambas incluyen procedimientos de naturaleza estadística y ninguna incluye procedimientos de simulación. Los procedimientos del significado subjetivo están implícitos en otros y tienen baja presencia en estos textos, así como en las directrices curriculares.

Tabla 5. Procedimientos presentes en los libros de texto y documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Significado Intuitivo						
PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas	x	x	x	X	x	x
PRI2. Reconocer la impredicibilidad de un resultado	x	x	x	X	x	x
PRI3. Reconocer tipos de sucesos	x	x	x	X	x	x
PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades			x	X	x	x
PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades			x	X	x	x
Significado Clásico						
PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x	X	x	x
PRC2. Enumerar casos favorables o posibles			x	X	x	x
PRC3. Diferenciar casos favorables						
PRC4. Distinguir sucesos equiprobables			x		x	x
PRC5. Comparar con razonamiento proporcional			x		x	x
PRC6. Aplicar la regla de Laplace			x		x	x
Significado Frecuencial						
PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x	X	x	x
PRF2. Calcular frecuencias relativas					x	x
PRF3. Representar distribución de frecuencias	x	x	x	X	x	x
PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada			x			
PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos			x		x	
PRF6. Reconocer el carácter aproximado			x		x	
Significado Subjetivo						
PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal			x	X	x	x

Respecto a procedimientos no contemplados en las directrices curriculares, es notable la inclusión en la Serie 1 de dos procedimientos, enmarcados en situaciones del significado clásico, que son transversales a los cuatro significados (calcular la probabilidad de la unión y del complemento), con respecto al desarrollo del significado axiomático. La Serie 2 incluye procedimientos que implican creatividad ya que en los dos últimos ciclos se pregunta al niño por su propia ejemplificación de conceptos. Otros procedimientos, no incluidos en las directrices y sí en los dos últimos ciclos de la Serie 1 son el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos y la determinación de la equitatividad de un juego. Los resultados en detalle se encuentran en Gómez et al. (2014).

ARGUMENTOS

Los textos analizados contienen cuatro tipos de argumento: uso de ejemplos y contraejemplos, generalización, apoyo gráfico y razonamiento inductivo; algunos de éstos se utilizan para varios significados de la probabilidad, en tanto otros son propios de uno, como se describe a continuación.

- *Uso de ejemplos y contraejemplos.* Es la forma de argumentación más frecuente en los libros de texto revisados, con todos los significados de la probabilidad; en particular se utiliza en los primeros cursos, donde los niños no tienen el desarrollo cognitivo requerido para la presentación formal de conceptos probabilísticos.

- *Generalización.* Para todos los significados de la probabilidad, la presentación de algunos contenidos, en segundo y tercer ciclo, incluye un ejemplo para relacionar el concepto con una situación conocida y una definición general para ampliar su validez. Señalamos la introducción de la regla de Laplace que se presenta después del análisis detallado de un ejemplo sin que el texto mencione las condiciones de aplicación; como las situaciones propuestas en esta colección asumen equiprobabilidad de sucesos elementales, se puede generar el sesgo de equiprobabilidad o un conflicto potencial en el momento de introducir las otras formas de asignación de la probabilidad.
- *Apoyo gráfico para comprobación de propiedades.* Los gráficos estadísticos son trabajados en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria. En particular, observamos que se utilizan diagramas de barras para facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial; suponemos que se debe al papel que juega la visualización en el aprendizaje, particularmente en edades tempranas.
- *Razonamiento inductivo a partir de datos.* La interpretación de tablas se trabaja en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria, con diferentes niveles de dificultad tanto en las tablas como en su lectura. Algunas de estas lecturas pueden facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un resumen de nuestro análisis de la probabilidad en los libros de texto de primaria. Los resultados han mostrado la diversidad de lenguajes, situaciones problema, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos relacionados con la probabilidad introducidos en las series analizadas de libros de texto de educación primaria. Se observó cómo se motiva el desarrollo de la alfabetización probabilística mediante el tratamiento inicial de cuatro componentes de conocimiento, de los cinco descritos por Gal (2005): ideas probabilísticas fundamentales, asignación de probabilidades y evaluación de la calidad de la información disponible, terminología y capacidad de contextualizar.

Las dos colecciones analizadas desarrollan parcialmente los cuatro significados de la probabilidad sugeridos para estos ciclos en las directrices curriculares. La mayoría de conceptos se presentan en forma intuitiva, sin definiciones formales y no se mencionan algunas propiedades o los supuestos requeridos para el cumplimiento de propiedades; esto podría promover la generación de conflictos semióticos, sesgos o heurísticas si el profesor no lo clarifica en el aula.

Las dos editoriales difieren en forma notable en cuanto a las características de los procedimientos propuestos y a la orientación, reflejada en la inclusión de algunos contenidos así como en el ciclo en el cual se introducen los mismos. Llama la atención la ausencia, en ambas colecciones, de objetos matemáticos relacionados con simulación, a pesar de la importancia dada en los documentos curriculares al uso de tecnologías.

El significado intuitivo es el que recibe mayor nivel de atención en ambas colecciones. Está presente en los tres ciclos, en el primer ciclo se introduce y desarrolla este significado, en los otros ciclos se fortalece su desarrollo y se articula parcialmente con otros significados.

El significado clásico está muy presente en ambas colecciones en los tres ciclos; en el primero se dan a conocer propiedades de este significado, aunque se está desarrollando el intuitivo; en el segundo se introduce con cierta formalidad y se articula parcialmente con el significado intuitivo; en el tercer ciclo se fortalece su desarrollo, en particular su asignación numérica.

El significado frecuencial de la probabilidad no recibe suficiente importancia. En los textos de primer ciclo, hay algunas menciones a las propiedades del significado frecuencial, cuando se está desarrollando el intuitivo o cuando se presentan contenidos de tratamiento de datos. En los otros dos ciclos, se omite en la Serie 2 y se introduce con poco nivel de detalle en la Serie 1: en el segundo ciclo, se introducen algunas propiedades con cierta formalidad y se articula parcialmente con el significado intuitivo, y en el tercero se fortalece su desarrollo.

La omisión del significado frecuencial en la Serie 2 puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los niños. Es de suponer que extiendan la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que enfrentan ya que no conocen otras alternativas de asignar o aproximar numéricamente probabilidades. Por otra parte, el número de ensayos presentados o requeridos en la Serie 1 es menor que 30, con la desventaja que puede favorecer la heurística de representatividad o el sesgo de la ley de los pequeños números (Tversky y Kahneman, 1974).

El significado subjetivo de la probabilidad tiene muy baja presencia en ambas editoriales. Las propiedades asociadas al significado subjetivo se encuentran presentes en los textos de motivación de los capítulos de probabilidad, nunca en forma explícita. Básicamente referidas a los conceptos de suceso incierto y probabilidad como grado de creencia, sin utilizar estas denominaciones; no se llega a la distinción entre probabilidades a priori y a posteriori. De alguna manera se siguen las sugerencias de Godino, Batanero y Cañizares (1987) con respecto a usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño. Sería labor del profesor sugerir la asignación, por parte del niño, de valores numéricos a las probabilidades, que en los textos solo se preguntan con valoración cualitativa, así como proponer la revisión de estas probabilidades asignadas, después de nuevas experiencias.

Común a los cuatro significados, en las dos series de textos observamos la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanzay aprendizaje de la probabilidad, así como su gran riqueza y diversidad. Este análisis sugiere que la presentación de la probabilidad en los textos lleva un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo. El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen casi desligados de la probabilidad.

También es común, para los cuatro significados en las dos editoriales, el predominio de la argumentación basada en ejemplos y contraejemplos, y el aumento en la complejidad de la argumentación con el avance en los ciclos. En la preferencia por ese tipo de argumentación reconocemos un principio fundamental para el aprendizaje de los conceptos citado por Skemp (1980): Introducir un concepto mediante una adecuada colección de ejemplos y una adecuada secuenciación de actividades, en lugar de hacerlo mediante la definición. Cabe notar que la generalización no es cuidadosa en cuanto a las condiciones de validez, y esto es un generador de conflictos potenciales, sesgos o concepciones erróneas.

Los resultados de nuestro estudio muestran la amplitud y relativa profundidad del tema en las dos colecciones de libros de texto analizadas y plantean el interrogante de cómo preparar a los futuros maestros y maestras para enfrentarse con éxito a la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Puesto que los contenidos de los textos a veces sobrepasan los reglados en las orientaciones curriculares, el maestro debe tener criterio, tanto para elegir el libro de texto como para hacer un uso adecuado del mismo.

Es importante que el maestro sea capaz de analizar las actividades propuestas en los libros de texto e identificar los objetos matemáticos que se requieren en el trabajo con las mismas y las posibles dificultades de comprensión por parte de los niños. Será necesario conocer los recursos didácticos que complementan el libro de texto para apoyar el aprendizaje. Es también importante que el maestro sea consciente de los diferentes significados de la probabilidad y cómo estos significados se privilegian, secuencian y tratan a lo largo del currículo. Es nuestra responsabilidad como formadores ayudarles a conseguir un adecuado conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad durante su formación en nuestras facultades.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Barragués, J. I. y Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(2), 241-256.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2015, febrero). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga..

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* Nueva York: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education.* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Bennett, D. J. (1999). *Randomness.* Harvard, MA: Harvard University Press.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, Holanda: Springer.

Cardano, G. (1961). *The book on games of chances.* Nueva York: Holt, Rinehart & Winston. (Trabajo original *Liber de Ludo Aleae*; publicado en 1663).

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 344-369.

Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. Londres: Academic Press.

Finetti, B. de (1974). *Theory of probability.* Londres: John Wiley (Trabajo original publicado en 1937).

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento ea instrução matemática. *Acta Scientiae, 10*(2), 7-37.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon, 31* (2), 25-42.

Gómez, E. y Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in the Spanish curriculum for primary school. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics, Flagstaff, AR:* International Statistical Institute. Recuperado de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_9_2014.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35,* 75-91.

Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5,* 49-71.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Laplace, P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilités*. París: Jacques Gabay. (Trabajo original publicado en 1814).

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.* Madrid: Autor.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth.* Londres: William Hodge (Trabajo original publicado en 1928).

Moivre, A. de (1967). *The Doctrine of Chances* (3a ed.). Nueva York: Chelsea (Trabajo original publicado en 1718).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Ramsey, F. (1931). Truth and probability. En R. B. Braithwaite (Ed.), *The foundations of mathematics and other logical essay*s (pp. 156-198). Londres: Kegan Paul.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 343-362.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. Londres: Murray.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science, 185*, 1124-1131.

Anexo: Muestra de libros de texto utilizada en el análisis

Serie 1: Editorial Anaya

[T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T. y Cid, O. (2011). *Matemáticas 2*. Proyecto Una a una.

[T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 3*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 4*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). *Matemáticas 5*. Proyecto Abre la puerta.

[T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). *Matemáticas 6*. Proyecto Abre la puerta.

Serie 2: Editorial S.M.

[T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B. y Galve, R. (2011). *Matemáticas. 2º*. Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.

[T7]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 3º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T8]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4°*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V. y Sanz, B. (2009). *Matemáticas 6º*. Proyecto Timonel, reedición 2010.

[T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J. y Pérez, E. (2009). *Matemáticas 6º*. Nuevo proyecto Planeta Amigo.

EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Informal probabilistic reasoning of high school students

Sánchez Sánchez, E. y Valdez Monroy, J. C.

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

Resumen

El objetivo del trabajo es explorar cómo los estudiantes articulan sus conocimientos sobre los enfoques de probabilidad (clásico y frecuencial) para dar respuesta a preguntas de probabilidad. Se describen y analizan los razonamientos informales de 10 estudiantes de bachillerato (12º grado) que habían estudiado un semestre de probabilidad y estadística. Los datos se recogieron mediante un cuestionario con tres situaciones de urnas en las que se pide estimar probabilidades y hacer predicciones. El análisis revela que dicha articulación y los diferentes niveles en la calidad de las respuestas dependen de ideas informales de aleatoriedad, independencia y variabilidad, y de la manera en que se combinan para hacer predicciones con incertidumbre. Se concluye con una propuesta de las proposiciones informales correspondientes a estas ideas cuyo manejo potenciaría el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes.

Palabras clave: *Razonamiento probabilístico informal, enfoque clásico, enfoque frecuencial, grandes ideas de probabilidad*

Abstract

The purpose of the work is to explore how students articulate their knowledge of two approaches of probability (classical and frequentist) to answer probability questions. Informal reasoning of 10 students (12th grade) who had taken a probability course of a semester is described and analyzed. Data were collected through a questionnaire with three urn situations in which students are asked to estimate probabilities and make predictions. The analysis reveals that such articulation and the different levels in the quality of the answers depend on the informal ideas that the students have about randomness, independence and variation, and how they are combined to make predictions with uncertainty. As a conclusion, informal statements on those ideas whose domain would enhance the informal probabilistic reasoning of students are proposed.

Keywords: *Informal probabilistic reasoning, classical approach, frequentist approach, big ideas of probability*

INTRODUCCIÓN

Los eventos y fenómenos aleatorios son sin duda más frecuentes en la naturaleza y en la sociedad que los fenómenos deterministas, por lo que la probabilidad es un área importante del pensamiento matemático y científico con un amplio rango de aplicaciones. Gal (2005) ofrece dos razones por las que es deseable y pertinente que los estudiantes aprendan probabilidad: una es cultural y formativa, la probabilidad es parte del conocimiento matemático y estadístico, y es la base para aprendizajes más complejos; la otra razón es práctica ya que ayuda a los estudiantes a prepararse para la vida. En la actualidad la probabilidad forma parte, en muchos países, de los currículos de matemáticas que van desde la enseñanza básica hasta la formación profesional; sin embargo, en las casi tres décadas transcurridas desde su introducción en la instrucción básica, se ha formado la creencia social de que

Sánchez Sánchez, E. y Valdez Monroy, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.

la probabilidad es difícil de enseñar y de aprender. Aunque los resultados de las investigaciones didácticas sobre probabilidad no niegan dicha creencia, si avanzan en entenderla y explicarla.

A partir de las investigaciones, en la década de los 50, de Piaget e Inhelder (1975) sobre la génesis de la idea de azar en el niño, ha habido diversidad de estudios didácticos sobre el tema. Jones y Thornton (2005) identifican en la historia de la investigación en didáctica de la probabilidad tres periodos: i) piagetiano, ii) post-piagetiano y iii) contemporáneo. Chernoff y Sriraman (2014) preguntan cuáles serán las características de una próxima etapa en la investigación del pensamiento probabilístico y proponen llamarla periodo de asimilación. Sin saber cómo será dicho periodo, especulan que un rasgo sería la adopción de un enfoque unificado para la enseñanza y aprendizaje de las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. Jones, Langrall y Mooney (2007), en su reseña de la investigación en didáctica de la probabilidad, propusieron cuatro temas adicionales a la agenda de investigación para la didáctica de la probabilidad propuesta por Shaughnessy (1992). El primero de esos temas se refiere al estudio de las concepciones de los estudiantes sobre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad; al respecto Jones et al. (2007) comentan: "…ha habido relativamente poca investigación sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la probabilidad experimental[i] y aún menos sobre el entendimiento de los estudiantes de las conexiones entre probabilidad teórica y la probabilidad experimental" (p. 946).

En la búsqueda de resolver el problema de las dificultades que implica la enseñanza de la inferencia estadística y su aprendizaje, se ha propuesto explorar la posibilidad de enseñar a razonar con las ideas que subyacen a los procedimientos de inferencia antes de su formalización (Prat y Ainley, 2008). La misma argumentación que justifica tal propuesta se puede aplicar a la probabilidad. Nos preguntamos si es posible identificar y desarrollar sobre la base de las intuiciones y conocimientos, razonamientos informales que incluyan las ideas principales de la probabilidad previamente o de manera paralela al aprendizaje de los procedimientos y cálculos tradicionales. En consecuencia, el presente trabajo se ubica en una línea de investigación que busca el desarrollo del razonamiento probabilístico informal como una condición que puede favorecer un mejor desempeño de los estudiantes en probabilidad.

Hasta el bachillerato los estudiantes tienen un nivel de razonamiento que Piaget (1950) llamó de las operaciones formales; esto significa que son capaces de manejar sistemas de conceptos, por lo que tienen la posibilidad de construir inferencias para articular redes de ideas básicas de probabilidad. Una red conceptual fundamental para este nivel lo constituyen al menos la definición clásica de probabilidad, el enfoque frecuencial y la ley de los grandes números; pero estos conceptos están relacionados con las grandes ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad. La pregunta de investigación que se pretende responder en este trabajo es la siguiente: ¿Cuáles son los rasgos importantes del *razonamiento probabilístico informal* en relación con los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad que pueden llevar a cabo los estudiantes de bachillerato?

ANTECEDENTES

En esta sección se hace referencia a una selección de estudios relacionados con las cuatro grandes ideas propuestas por Gal (2005) en su trabajo sobre competencia probabilística, a saber: aleatoriedad, independencia, variabilidad y predicción/incertidumbre. El objetivo es bosquejar un contexto para el marco conceptual que se propone en la siguiente sección.

Aleatoriedad. Batanero (2015) presenta un resumen de estudios importantes y discusiones sobre la aleatoriedad en su relación con la causalidad, la probabilidad, y los intentos de formalización del concepto, así como de las percepciones de la aleatoriedad de adultos, niños y profesores. Siguiendo algunas pistas ofrecidas por ella, referiremos estudios sobre aleatoriedad que aportan ideas relacionadas con nuestro objetivo. La aleatoriedad es un concepto resbaladizo que se resiste a caber en una definición simple (Batanero y Serrano, 1999; Gal, 2005). Ha sido concebida como lo opuesto a algo que tiene causas conocidas (Bennett, 1998) y su característica primordial es la imposibilidad de predicción; en la probabilidad clásica y en contextos de muestreo, la aleatoriedad se entiende como equiprobabilidad (ver Batanero y Serrano, 1999, para otras interpretaciones). Para Moore (1990) y Metz (1998), la aleatoriedad implica impredecibilidad en ensayos particulares y estabilidad a la larga de las frecuencias de ocurrencia de los eventos.

Independencia. Steinbring (1986) llamó la atención sobre el estatuto extraordinario de la independencia estocástica en la teoría de la probabilidad, analizando su desarrollo histórico y ubicándolo en una perspectiva didáctica. Por otro lado, los psicólogos Tversky y Kahneman (1982) mostraron que mucha gente realiza juicios en situaciones de incertidumbre con base en la heurística de representatividad, ignorando en muchos de ellos la independencia de las situaciones, o no haciendo las inferencias apropiadas de ella, aun cuando debería ser evidente reconocerla, como en el caso de la independencia de los resultados de lanzamientos sucesivos de una moneda. Varias investigaciones en didáctica de la probabilidad se relacionan con la representatividad y la independencia; en particular, se han identificado los efectos de recencia positiva y recencia negativa (la falacia del jugador) (Cox y Mouw, 1992; Fischbein y Schnarch, 1997; Fischhoff, 1982; Gal y Baron, 1996; Shaughnessy, 1981). Por otro lado, la independencia estocástica se relaciona con el concepto de probabilidad condicional; de este tema hay una gran cantidad de estudios didácticos que no constituyen antecedentes para el presente trabajo.

Variabilidad estadística. La importancia de incluir el análisis de la variabilidad en los estudios de didáctica de la probabilidad y la estadística fue señalada inicialmente por Green (1993). Shaughnessy (1997) más tarde llama a los educadores a poner atención en lo que denominan variación; comenta el problema de los dulces (Utilizado en las evaluaciones nacionales del progreso de la educación de los Estados Unidos de América): Una urna tiene 50% de dulces rojos, 30% de dulces amarillos y 20% de dulces verdes. Se van a sacar 10 dulces al azar ¿Cuántos dulces rojos crees que van a salir? Una respuesta frecuente es 5; la debilidad de esta respuesta, que era considerada correcta, se pone en evidencia cuando se pide que se propongan los resultados de llevar a cabo 5 veces el experimento y la mayoría de los estudiantes responden lógicamente 5, 5, 5, 5, 5; Shaughnessy se pregunta dónde está la "variación". A partir de dicho cuestionamiento se han publicado diversos trabajos didácticos relacionados con la variabilidad aleatoria; algunas referencias de estos estudios se pueden encontrar en Sánchez, Borim y Coutinho (2011).

Predicción/Incertidumbre. La más clara e inmediata relación entre predicción e incertidumbre en la teoría de la probabilidad se aprecia en la Ley de los Grandes Números (LGN). Aunque la versión matemática de esta ley ha sido y es un tema de cursos universitarios avanzados de probabilidad, con la ayuda de recursos tecnológicos se han vislumbrado trayectorias para incluir versiones empírico-virtuales de dicha ley en la enseñanza básica. Stohl y Tarr (2002) y Stohl, Rider y Tarr (2004) utilizan el software *Probability Explorer*; en el primer caso, para observar cómo estudiantes de primaria hacen inferencias sobre la probabilidad de un evento, a partir de muestras grandes de un experimento aleatorio (generadas con la computadora); en el segundo, para promover y observar en estudiantes de secundaria, y con ayuda de la herramienta tecnológica, cómo establecen las conexiones entre 'probabilidad experimental' y 'probabilidad teórica'. Es decir, cómo llegan a comprender que las frecuencias relativas tienden a la probabilidad, cuando el número de sorteos de la variable aleatoria crece. Estos estudios se enfocan sólo a ciertos aspectos de la LGN, sin explorar el pensamiento sobre la incertidumbre.

Ireland y Watson (2009) y Konold et al. (2011) abordan el mismo problema con estudiantes de secundaria utilizando el software *TinkerPlots.* Para Ireland y Watson un aspecto crucial en el proceso es la necesidad de que los estudiantes establezcan una conexión entre las experiencias reales y las experiencias virtuales (simuladas); es decir, el problema es que los estudiantes vean que una simulación es una genuina representación de una situación real y que los resultados vistos en ella se transfieran a ésta. Informan que los estudiantes llegan a saber cómo determinar la probabilidad teórica de un proceso simulado, pero conservan serias dificultades para entender la

LGN. Konold et al. (2011) estudian un caso en el que una estudiante (14 años) de elevado talento no consigue organizar en un todo coherente sus concepciones sobre 'probabilidad estimada o empírica' y 'probabilidad teórica (clásica)', manteniéndolas como opciones independientes. Ella cree que no puede haber un solo valor que exprese la probabilidad, pues ésta varía de ensayo a ensayo. La probabilidad teórica es una guía, pero no la relaciona con la convergencia de las frecuencias relativas hacia la probabilidad. Estos estudios aportan sólidos antecedentes para construir y explorar trayectorias para los estudiantes de bachillerato en las que no se evite la incertidumbre sino que aprendan a aceptarla y organizar los conceptos de la LGN para tratar de manera racional con ella.

MARCO CONCEPTUAL

El marco que se ha elegido para organizar los resultados del análisis consiste de tres componentes importantes: i) Razonamiento probabilístico informal, ii) las grandes ideas de probabilidad y iii) los enfoques de la probabilidad (clásico y frecuencial).

Cuando se habla de *razonamiento probabilístico* se puede hacer referencia a dos ideas en relación; por un lado, los argumentos que tienen como premisas y conclusiones enunciados de probabilidad, es decir, que involucran conceptos matemáticos de probabilidad; por el otro, los procesos de entendimiento y construcción de tales argumentos. El *razonamiento probabilístico informal* es el modo en que los estudiantes utilizan sus conocimientos y creencias para entender y argumentar la respuesta a una pregunta, la solución a un problema o la verdad de un enunciado probabilístico con los que se comprometen. También es dual; por un lado, son las representaciones o formulaciones que hacen de los razonamientos que contienen enunciados informales de probabilidad; por otro, los procesos en que los estudiantes descubren y justifican enunciados de probabilidad con base en sus conocimientos y sin utilizar los métodos y técnicas matemáticas formales de la probabilidad.

La segunda componente está formada por cuatro conceptos clave de la probabilidad: *aleatoriedad*, *independencia*, *variabilidad*, *predicción /incertidumbre*, que Gal (2005) sitúa como parte de las 'grandes ideas' de la competencia probabilística. La *aleatoriedad* se asocia con la impredecibilidad de los resultados y con la regularidad estadística, es decir, que sus frecuencias relativas tienden a estabilizarse. La *independencia* se presenta cuando el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos (previos, simultáneos o futuros). La *variabilidad* en probabilidad se refiere a las diferencias entre las frecuencias de los eventos y los valores esperados o las frecuencias relativas y la probabilidad de los eventos. La dualidad *predicción/incertidumbre* es una relación que se construye en combinación con los conceptos anteriores y su representación formal es la LGN.

La tercera componente se refiere a los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad. Aunque la aplicabilidad del enfoque clásico es muy limitada, tiene un valor didáctico enorme pues permite construir modelos de probabilidad (distribuciones) de situaciones manipulables. No obstante, dichos modelos son estáticos y con pocas posibilidades de aplicación si no se vinculan con el enfoque frecuencial de probabilidad. Al hacerlo, los modelos construidos con el enfoque clásico se vuelven instrumentos de predicción (con incertidumbre) que revelan el potencial y sentido práctico de la probabilidad. Aunque la LGN es un teorema más general de la probabilidad que no depende de la definición clásica, lo cierto es que una interpretación o instancia de dicha ley expresa la relación entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial de probabilidad.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de tipo cualitativo y exploratorio ya que los datos son las respuestas de los estudiantes en las que se buscan rasgos de la manera en que razonan con ideas de probabilidad. Los participantes en el estudio fueron 10 alumnos del tercer grado de bachillerato (17-18 años), equivalente a 12º grado. Al momento del estudio asistían a la clase de Probabilidad y Estadística II, por lo que tenían los conocimientos básicos de un primer curso de probabilidad, en particular, habían estudiado los enfoques clásico y frecuencial.

El instrumento para la recolección de datos consistió de un cuestionario de tres situaciones con tres preguntas cada una (ver Apéndice). La primera es una adaptación de un problema de Metz (1998) y la segunda de Cañizares (1997). A continuación se exponen las situaciones, las respuestas normativas y las ideas que exploran.

> *Situación 1*. El resultado de 1000 extracciones de una urna (una muestra) que contiene 4 bolas (entre blancas y negras), fue de 489 bolas blancas y 511 bolas negras: a) ¿Cuántas bolas blancas y cuántas negras tiene la urna? B) Si se realiza la extracción 1001, ¿qué color de bola crees que se obtendrá? C) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tus respuestas.

La respuesta normativa es que el contenido de la urna es de 2 bolas blancas y 2 negras, ya que bajo esta hipótesis el resultado dado de las 1000 extracciones es plausible. En la pregunta 1b, se espera que la respuesta sea *se tiene la misma expectativa de bola blanca o negra*. En la pregunta 1c, la respuesta es que pudo ocurrir *cualquiera de los dos eventos*.

El estudiante debe evaluar que la *variabilidad* de los resultados respecto a los valores del modelo equiprobable (2 blancas y 2 negra) es poca y, por tanto, aceptable; el resultado sería casi imposible con cualquier otro modelo de urna con la restricción de contener 4 bolas. En las respuestas a las preguntas 1b y 1c se debe considerar el modelo establecido y la *independencia* de las extracciones; pero también se explora la *aleatoriedad*, en el sentido de que el estudiante debe inferir que no es posible predecir con certeza lo que se obtendrá en un ensayo, o decir lo que ocurrió en el primer ensayo sin más información.

> *Situación 2*. Se tienen dos urnas: La urna B contiene 6 bolas en total (entre blancas y negras) y la urna C contiene 3 bolas en total. Se hicieron 1000 extracciones al azar de cada urna. En la urna B se obtuvieron 324 bolas blancas y 676 bolas negras. En la urna C se obtuvieron 344 blancas y 656 negras. A) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1001, de tal forma que la bola resultante sea negra? B) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1001'? c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna C en la extracción 1001'? Justifica tus respuestas.

En esta situación se espera que los estudiantes deduzcan los contenidos de ambas urnas: B con 2 blancas y 4 negras; C con 1 blanca y 2 negras. Una vez hecha esta hipótesis, la repuesta a la pregunta segunda es que *cualquier urna se puede elegir*, no hay diferencia entre ellas. La respuesta a la pregunta 2b es 2/3, y la respuesta a la pregunta 2c es también 2/3.

La respuesta a la pregunta segunda se basa en la identificación de que ambas urnas son equivalentes, asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural del fenómeno, ya que 9 y 11 de mil es relativamente poco. Se debe tener en cuenta también la *independencia* del resultado 'bola negra' de lo ocurrido en ensayos anteriores. Asimismo, es necesario considerar la *aleatoriedad*, es decir, que con ninguna urna se puede asegurar obtener bola negra en la extracción 1001. En las respuestas a las preguntas 2b y 2c se deben considerar los modelos establecidos y la *independencia* de las extracciones.

> *Situación 3*. Los resultados de sacar 10 bolas de cada urna se presentan en seguida (con los contenidos establecidos en el inciso anterior: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras):

Tabla 1. Resultados de 10 extracciones hechas de las urnas B y C (b = bola blanca, n = bola negra).

Urna B	*n*	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*N*	*n*	*b*	*N*
Urna C	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*b*	*B*	*b*	*n*	*B*

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la onceava extracción de tal forma que la bola resultante sea blanca? B) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola blanca de la urna B en la onceava extracción'? c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola blanca de la urna C en la onceava extracción'? Justifica tus respuestas.

En esta situación los estudiantes deben responder con base en la hipótesis establecida en la situación anterior: B con 2 blancas y 4 negras; C con 1 blanca y 2 negras. Por tanto, se espera que la respuesta a la pregunta tercera sea que *cualquier urna puede ser elegida*; la respuesta a las preguntas 3b y 3c es 1/3 en ambos casos. Las preguntas se responden bajo la hipótesis de que las extracciones son *independientes* y teniendo en cuenta el modelo (Urna B: 2 blancas y 4 negras; Urna C: 1 blanca y 2 negras). Sin embargo, puede surgir la cuestión de si la *variabilidad* de los resultados observados (Urna B: 2 blancas y 8 negras, Urna C: 5 blancas y 5 negras) respecto al modelo es aceptable. Teniendo en cuenta la *aleatoriedad* se puede deducir que una desviación de ocurrencias de 2 o 3 resultados respecto al valor esperado es posible. El valor esperado está entre 6 y 7 (6.67), luego los resultados 8 y 5 no representan desviaciones mayores a 2 unidades.

La aplicación del cuestionario se efectuó dentro del horario de clases y los estudiantes tuvieron 50 minutos para responderlo. Se comunicó a los participantes que los resultados contribuirían a su evaluación; esto con el fin de que se comprometieran con los problemas y sus soluciones. Las respuestas fueron transcritas, analizadas y, posteriormente, clasificadas.

En un primer momento, se comparan las respuestas de los estudiantes a una misma pregunta para identificar grupos de respuesta con rasgos comunes y se hace una descripción de los principales grupos en términos de las grandes ideas de la probabilidad y/o del enfoque de probabilidad subyacentes en las respuestas. En un segundo momento, se analizan las respuestas desde la perspectiva de las grandes ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad, con el fin de describir los diferentes niveles en la calidad de las respuestas. El resultado se resume en una tabla semejante a las propuestas por Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997), pero tomando como base las grandes ideas propuestos por Gal (2005).

RESULTADOS

Descripción de las respuestas a los situaciones 1, 2 y 3

La exposición de los resultados está organizada de manera que se presentan descripciones resumidas del conjunto de respuestas de cada una de las preguntas del cuestionario; tales descripciones tienen como referencia las respuestas puntuales a cada uno de los incisos de las tres situaciones planteadas en el cuestionario, codificadas y resumidas en la Tabla 2

Tabla 2. Respuestas de los alumnos a las preguntas

	Situación 1			Situación 2			Situación 3		
Alumno	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3ª	3b	3c
A1	3/4	N	n	B	677/1001	657/1001	C	3/11	6/11
A2	1/2	n/a	n	B	677/1001	657/1001	C	2/11	6/11
A3	511/1000	n	n	B	1	0	C	0	1
A4	3/4	n	n	C	4/6	2/3	C	3/11	4/11
A5	1/2	Cualquiera	n/a	B	0.677	0.656	C	3/4	1/2
A6	1/2	n/a	Cualquiera	B	676/1000	4/6	C	2/10	5/10
A7	1/2	b/a	n/a	C	4/6	2/3	C	2/6	1/3
A8	511/1000	n	n	B	676/1000	656/1000	C	2/10	5/10
A9	1/2	n	b/a	C	676/1000	656/1000	C	2/10	1/2
A10	1/2	b/a	n	B	4/6	2/3	C	1/5	1/2

Situación 1. La pregunta 1a pide deducir la cantidad de bolas negras y bolas blancas de una urna que tiene en total 4 bolas, sabiendo que de 1000 extracciones de una bola, con remplazo, en 489 ocasiones salieron blancas y en 511 salieron negras. En la pregunta 1b se pide predecir lo que

podría ocurrir en una siguiente extracción, es decir, en la extracción 1001; por último, en la pregunta 1c se pide indicar el color de la bola que pudo haber salido en la primera extracción.

Un grupo de seis estudiantes respondió que el contenido debía ser 2 bolas blancas y 2 negras (hemos indicado esta respuesta con "1/2" en la Tabla 2). De éstos, A5, A6 y A7 responden a las dos preguntas siguientes con respuestas indeterminadas ("cualquiera") o eligiendo un color pero aclarando que podría ser cualquiera ("n/a" = negra pero aclarando que puede ser cualquier color; "b/a" = blanca, aclarando). En contraste, A2, A9 y A10, sólo en una pregunta aclaran que puede ser cualquiera, pero en la otra eligen un color determinado influidos por la proporción en la muestra y no con base en el modelo propuesto por ellos mismo (2b, 2n). Los cuatro alumnos restantes no proponen un modelo de urna equiprobable; dos de ellos sugieren que la urna debe tener 3 bolas negras y una blanca, para explicar la mayor proporción de bolas negras en la muestra, mientras que los otros dos no tienen en cuenta la restricción de que la urna tiene sólo 4 bolas y proponen una urna que reproduce las cantidades de la muestra.

En resumen, se encuentran tres patrones de respuesta:

- Aceptan la variabilidad en la muestra como posible resultado del modelo equiprobable y la ignoran al hacer predicciones.
- Reconocen el modelo equiprobable, pero consideran la variabilidad en la muestra como significativa; es decir, que la proporción de bolas negras o blancas en la muestra marca una tendencia sobre lo que realmente ocurre.
- Deducen un modelo no-equiprobable que refleja la diferencia entre los resultados en la muestra.

Situación 2. En la situación 2 se proponen dos urnas, B y C, con bolas blancas y negras, cuyo contenido es de 6 y 3 bolas, respectivamente, pero sin indicar la proporción de bolas de cada color. Adicionalmente, se ofrecen los resultados de 1000 extracciones de una bola, con remplazo, de cada una de las urnas: 324 blancas y 676 negras de la urna B; 344 blancas y 656 negras de la urna C. En la pregunta 2a se pide elegir una urna con la intención de obtener una bola negra en la extracción 1001; en la pregunta 2b se pide asignar un valor numérico al evento "sale bola negra de la urna B en la extracción 1001", y en la pregunta 2c se pide lo mismo en relación a la urna C.

En la Tabla 2 se observa que para la pregunta 2a, siete estudiantes eligen la urna B, que contiene 6 bolas, y 3 eligen la urna C, que contiene 3 bolas; ninguno indicó que daba lo mismo elegir cualquier urna. Para la pregunta 2b, de los que eligen la Urna B, sólo A10 asigna la probabilidad 4/6 al evento "salir bola negra de la urna B en la extracción 1001", A6 y A8 le asignan la frecuencia relativa de la muestra de las mil extracciones dada para la urna B; para este mismo inciso A1 y A2 proponen la frecuencia relativa más una unidad en el numerador y en el denominador (677/1001); es decir, se ofrece la frecuencia relativa añadiendo un resultado exitoso; mientras que A5 proporciona un valor inesperado (0.677). De los tres alumnos que eligen la urna C, A4 y A7 proporcionan la probabilidad 4/6, mientras que A9 da la frecuencia relativa. Para la pregunta 2c, A4, A6, A7 y A10, con base en el contenido de la urna C, asignan la probabilidad 2/3 al evento "salir bola negra de la urna C en la extracción 1001"; A5, A8 y A9 asignan la frecuencia relativa de la muestra de la urna C, y A1 y A2 asigna la misma frecuencia relativa más una unidad en el numerador y el denominador. En sus respuestas, A3 asigna 1 al evento "obtener bola negra de la urna B" (*Éxito*) y 0 al evento "obtener bola negra de la urna C" (*Fracaso*).

De lo anterior se distinguen los siguientes patrones de respuesta:

- Deducen los modelos implicados, asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural, pero no identifican que son equivalentes.

- Eligen una urna y asignan la frecuencia relativa a los eventos teniendo a las muestras como su único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestra agregando un éxito (bola negra), el cual atribuyen a la extracción 1001.
- Asigna el valor 0 ó 1 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Situación 3. En la situación 3 se ofrecen muestras de 10 resultados para cada urna, indicando que de 10 extracciones de la urna B resultaron 8 negras y 2 blancas, y de 10 extracciones de la urna C, 5 negras y 5 blancas. Conviene aclarar que se mantienen los contenidos de las urnas: la B contiene 4 negras y 2 blancas, y la C contiene 2 negras y una blanca. En la pregunta 3a, se pide elegir una de las urnas para obtener bola blanca en la onceava extracción. En la pregunta 3b, se debe asignar un valor numérico al evento "obtener una bola blanca en la 11^{va} extracción de la urna B"; mientras que en el inciso c, se pide lo mismo, pero en relación a la urna C.

Todos los estudiantes eligieron la urna C como respuesta a la pregunta 3a. En la pregunta 3b, sólo A7 se basó en el modelo y asignó 2/6 al evento de obtener blanca de la urna B. Para cuatro estudiantes (A6, A8, A9, A10) la respuesta fue la frecuencia relativa (2/10 ó 1/5) de la muestra de resultados de la urna B. A1 y A4 responden 3/11, que corresponde a la frecuencia relativa de la muestra de la urna B añadiendo un éxito, mientras que A2 y A5 proporcionan valores inesperados (2/11 y 3/4). Por su parte, A3 asigna el valor 0, que representa el valor de *Fracaso* en la binomial. En la pregunta 3c, sólo A7 respondió con base en el modelo de urna (1/3); cinco respuestas fueron 1/2 ó 5/10, (A5, A6, A7, A8, A9, A10) que representan la frecuencia relativa de blancas en la muestra C; A1 y A2 dan la frecuencia relativa agregando un éxito (6/11); finalmente A4 responde atípicamente con 4/11, mientras que A3 asigna el valor de *Éxito* de la binomial, es decir, 1.

Los patrones que se perciben en las respuestas son:

- No logran articular los modelos con las muestras respectivas, debido a que no aceptan como natural la *variabilidad* que se observa.
- Eligen una urna y asignan la frecuencia relativa a los eventos teniendo a las muestras como su único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestras agregando un éxito (bola blanca), el cual atribuyen a la onceava extracción.
- Asigna el valor 1 ó 0 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Análisis de las respuestas de los estudiantes

En esta sección se destacan las respuestas de los estudiantes de acuerdo a las categorías del marco.

Aleatoriedad. Considerar la aleatoriedad en las situaciones de probabilidad no es tan inmediato como podría suponerse, ya que varias de sus consecuencias importantes no son intuitivas. Si se acepta que un fenómeno es aleatorio, la consecuencia directa es que sus resultados son impredecibles, mientras prever cierta estabilidad de las frecuencia relativas de los eventos alrededor de un valor conforme se repite el fenómeno muchas veces (Moore, 1990) o esperar secuencias desordenadas sin patrón aparente y con rachas relativamente largas, supone un conocimiento más elaborado de la aleatoriedad (Batanero y Serrano, 1999).

No todos los estudiantes encuestados pudieron sacar la consecuencia directa de la aleatoriedad y expresarla en las respuestas en las que era posible y pertinente hacerlo. Por ejemplo, en la Situación 1, inciso b, se pregunta: "Si se realizara la extracción 1001, ¿qué color de bola crees que se obtendrá?" Una respuesta razonable es "cualquiera de los dos colores, bola blanca o bola negra". En cuatro respuestas las expresiones de los alumnos ignoran la aleatoriedad, en la primera hay un cierto matiz al usar el verbo "obtendrá" pero en los otros casos la respuesta es determinista:

A7: Obtendría bola blanca. *P(B) = P(N),* así que la probabilidad no se inclina hacia la bola negra o blanca, así que sólo extraje una bola blanca.

A4: Negra, ya que tienen mayor cantidad de bolas negras, según muestra la tabla 1.

A8: Una bola negra ya que hay mayor probabilidad de que salga al tener mayor cantidad de ellas.

A9: Negra, ya que la distribución [*489 bolas blancas, 511 negras*] favorece a este color.

En contraste en seis casos las respuestas utilizan expresiones que indican incertidumbre acerca de lo que puede ocurrir:

A1: Se estimaría que salga negra, ya que su probabilidad es mayor. Negra (511⁄1000).

A2: Solamente existen dos posibles resultados en el experimento [*cualquiera se puede presentar*], pero en este caso salieron más negras que blancas [*489 bolas blancas, 511 negras*], puede salir otra negra.

A3: Creo que saldría negra, porque en las extracciones pasadas salieron bolas negras 511 de 1000 y sólo 489 blancas de 1000 extracciones.

A5: Puede ser de cualquier color, pero en su mayoría, la probabilidad de que salga bola negra es mayor, ya que así se observa en la tabla de las 1000 extracciones.

A6: […] creo que saldría negra basándome en previos resultados.

A10: Posiblemente la blanca, porque tienen la misma probabilidad que la negra.

Sólo en una respuesta se expresa que puede ocurrir cualquier color de bola en la extracción 1001, no obstante, en todas se considera que los resultados de la muestra influyen en la probabilidad de la extracción 1001. Esta atribución de más probabilidad a que ocurra una de las bolas, se infiere de observar las muestras de resultados; es decir, no se reconoce la independencia de las extracciones.

Independencia. La independencia de experiencias o sorteos implica que los resultados de una de ellas no afectan las probabilidades de los eventos de la otra. En términos informales se dice que no 'tienen que ver una con otra', 'que no se afectan', etc., mientras que formalmente se caracterizan por satisfacer alguna forma de la regla del producto. Una consecuencia de asumir que los sorteos de una experiencia son independientes es ignorar la información de lo que ha ocurrido y mantener las probabilidades constantes. En cambio, los efectos de recencia positiva y recencia negativa, al observar secuencias de resultados, son sesgos frecuentes en los razonamientos de los estudiantes que violan la independencia.

Una de las manifestaciones de la percepción de la independencia por parte de los estudiantes se observa en la pregunta 2b: ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1001'?

En tres casos se asigna la probabilidad 4/6, es decir, se ignoran los resultados:

A4: 4⁄6, ya que la probabilidad de que salga una bola negra son 4⁄6, según muestra la tabla [*324 bolas blancas, 676 bolas negras*]. Tomando en cuenta el valor del total de bolas extraídas [*1000*], es mayor al número de bolas [*negras*] extraídas.

A7: P(N) = probabilidad de bola negra. P(B) = probabilidad de bola blanca. P(N) = 4⁄6.

A10: 4⁄6, porque son 6 bolas con una probabilidad [*cantidad*] estimada de 4 bolas negras.

Mientras que seis estudiantes asignan una probabilidad que depende de lo ocurrido en la muestra; estas respuestas olvidan el modelo de urnas que define la situación y se centran en los resultados observados; al hacerlo no consideran la independencia:

A1: 677⁄1001 ⇒ Puesto que en la extracción 1000 la probabilidad era de 676⁄1000 al aumentarle otra bola y otra extracción esto daría como resultado 677⁄1001.

A2: Urna B: negras = 677/1001; blancas = 324/1001.

A5: P(A): 'Sacar una bola negra de la urna B'. P(A) = 0.677.

A6: De que salga bola negra en la 1001 tenemos una probabilidad 676⁄1000.

A8: P(Bola negra) = 324/1000.

A9: 676⁄1000, ya que esa es la probabilidad que me indica en las primeras 1000 extracciones.

Por otro lado, hemos visto en el apartado anterior sobre aleatoriedad, que ningún alumno asume totalmente la independencia de la experiencia, pues todos sienten que los resultados de las muestras ofrecen indicios que favorecen la probabilidad de negra (o blanca en un caso). Las respuestas dadas a la pregunta 2b, dan una indicación de que un concepto que interfiere en la consideración de la independencia es la interpretación frecuencial de probabilidad. En efecto, los estudiantes responden enfocando la situación hacia las frecuencias y olvidando el modelo de urnas.

Variabilidad. Aceptar la variabilidad en fenómenos aleatorios implica combinar un conocimiento de la estructura de la situación con la aleatoriedad. Con la estructura nos referimos al modelo o la distribución, por ejemplo, el contenido de la urna y las probabilidades de obtener bola negra y bola blanca. En el problema de realizar 1000 extracciones con remplazo de una urna con dos bolas blancas y dos negras, el valor esperado del evento "obtener una bola negra" es 500, no obstante, debido a la aleatoriedad se espera que los resultados varíen alrededor de 500. ¿Qué tan lejos de 500 es razonable esperar un valor? La respuesta formal a esta pregunta no es inmediata ni intuitiva y se apoya en un teorema fundamental de la probabilidad: el teorema del límite central. Las respuestas intuitivas de los estudiantes están en un punto intermedio entre dos extremos; los que se centran en la aleatoriedad ("cualquier cosa puede pasar") y los que interpretan el modelo de manera determinista ("van a ocurrir 500 bolas negras").

En la pregunta 1a se explora el sentido de la variabilidad de los estudiantes, dándoles como dato un resultado de realizar 1000 extracciones de una urna (511 negras y 489 blancas) que contiene cuatro bolas en total, entre blancas y negras. Se les pide que propongan su posible distribución. La respuesta con base en una adecuada valoración de la variabilidad es la que propone el mismo número de bolas blancas que de negras. Esta fue, en efecto, la respuesta de cinco estudiantes:

A2: 2 negras y 2 blancas, ya que no es mucha la diferencia de los resultados.

A5: Hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras porque el resultado de las extracciones es casi igual, lo que nos indica que hay el mismo número de bolas blancas y negras.

A6: Considero que hay igual número de bolas negras que de blancas, o sea 2 y 2, ya que sus probabilidades, si bien no son las mismas, son muy cercanas.

A9: Hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Su distribución es equivalente, ya que no hay gran diferencia entre ambas.

A10: La distribución de las bolas es equitativa, es decir, hay dos bolas blancas y dos negras porque se ve en los resultados obtenidos. No hay mucha diferencia más que de 22 extracciones, por lo que tienen la misma probabilidad de extracción.

Para estos estudiantes la diferencia de los resultados respecto al valor esperado es una variabilidad natural del modelo equiprobable, es decir, la diferencia no es significativa. En cambio, cuatro alumnos (A1, A3, A4, A8) creen que la diferencia es significativa y que el modelo debe reflejarlo:

A1: Con los resultados dados se estimaría que hay un número mayor de bolas negras, ya que su probabilidad es más alta (511⁄1000), mientras que de la blanca es lo contrario (489⁄1000), ⇒ yo diría que hay 3 bolas negras y 1 bola blanca) a notar por su probabilidad.

A3: Considero que es no equiprobable; y que hay más # de bolas negras que blancas, porque salieron 511 bolas negras de 1000 y sólo 489 blancas de 1000 extracciones.

A4: 1/4 = de bolas blancas, 3/4 = de bolas negras. Por cada 3 bolas negras hay 1 blanca. Esto aumenta la posibilidad que se obtenga una bola negra.

A8: En la distribución de bolas para un color habrá mayor probabilidad de que salga la de bolas negras. Bolas blancas = 489/1000, bolas negras = 511/1000.

En la pregunta 3c se reflejan actitudes contrarias a la variabilidad; la situación es que los estudiantes tienen, por un lado, un modelo de urna de 2 bolas negras y 1 blanca y, por otro, un resultado de 10 extracciones de esa urna con 5 bolas negras y 5 blancas. Se les pide que asignen un valor numérico al evento "sale bola blanca"; excepto por uno, todos los estudiantes asignan una probabilidad basada en las frecuencias relativas (1/2, 5/10 o 6/11). El otro lo hace con base en el modelo (1/3). El modelo se ignora probablemente porque se asume que no es posible que si la probabilidad de negra fuera 1/3, entonces el resultado de 10 extracciones sea 5 blancas y 5 negras. Al parecer los estudiantes creen que la variabilidad de los resultados con relación al valor esperado es más reducida de lo que realmente es cuando la muestra, o el número de repeticiones, es pequeña.

CONCLUSIONES

La posibilidad de hacer inferencias válidas a partir de estimaciones o juicios de probabilidad presupone la articulación de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, a través de al menos una versión informal de la LGN. Si bien es importante asignar probabilidades a los eventos y frecuentemente no es sencillo, sobre todo cuando implican fuerte combinatoria, también es necesario abarcar la dimensión relacionada con las grandes ideas de la probabilidad que destaca Gal (2005): Aleatoriedad, Independencia, Variabilidad, Predicción/Incertidumbre. En la exploración realizada hemos visto que las situaciones en el contexto familiar de extracción de bolas de urnas (que implican cálculos triviales), se producen diversas respuestas en las que subyacen diferentes niveles de aceptación y usos de las ideas espontáneas de los estudiantes sobre aleatoriedad, independencia y variabilidad. En la Tabla 3 se resumen las características de las respuestas a las preguntas del cuestionario, en relación con las grandes ideas, organizadas de manera jerárquica en los tres primeros niveles. En el cuarto nivel se describen las proposiciones normativas informales correspondientes que podrían haber emergido pero en ninguna respuesta se presentaron de manera completa; es entonces un nivel a alcanzar mediante un diseño de la instrucción.

Tabla 3. Niveles de respuesta en relación a las grandes ideas de probabilidad.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Aleatoriedad (Situación 1b)	Hace una predicción determinista	Hace una predicción determinista matizándola con lenguaje probabilístico	Reconoce que no se puede predecir el resultado con exactitud.	No se puede predecir con certeza el resultado de un sorteo pero se puede predecir que las frecuencias se estabilizan a la larga alrededor de un número (la probabilidad).
Independencia (Situación 2b)	Asigna probabilidades ignorando el modelo y considerando las frecuencias más un ensayo cuyo resultado es el evento que se quiere calcular	Asigna probabilidades con base en las frecuencia relativas e ignora el modelo	Asigna probabilidades con base en el modelo e ignora los resultados previos (muestra)	Bajo el supuesto de independencia se debe ignorar lo ocurrido y asignar las probabilidades con base en el modelo.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Variabilidad (Situaciones 1a y 3c)	Espera resultados sin variabilidad y/o en muestras pequeñas consideran las diferencias de las frecuencias a los valores esperados como significativas	Creen que las pequeñas diferencias son significativas en muestras grandes	Estima que frecuencias relativamente pequeñas no son significativas cuando la muestra es grande	La variabilidad es grande cuando la muestra es pequeña, pero es poca cuando la muestra es grande (Observan el tamaño de la muestra)

En el nivel 1 se cree que existe la posibilidad de hacer predicciones determinadas y se busca en los datos clave que permitan hacer la predicción; al asignar probabilidades se ignora el modelo y se toma la frecuencia relativa afectándola con el resultado del evento cuya probabilidad se quiere estimar; asimismo se considera que las diferencias incluso en muestras pequeñas son significativas.

En el nivel 2 se hace una cierta predicción pero matizándola con enunciados de incertidumbre como "puede ser que…", "espero…pero no es seguro", etc. que indican que se acepta la impredecibilidad, aunque también se buscan indicios en los datos; los estudiantes utilizan el enfoque frecuencial para asignar la probabilidad ignorando el modelo y creen que las diferencias pequeñas en las muestras grandes son significativas.

En el nivel 3 se reconoce que no se pueden hacer predicciones determinadas por la naturaleza aleatoria de la experiencia, la asignación de probabilidades se hace con base en el modelo ignorando los resultados anteriores tanto en el caso de pequeñas como grandes muestras y se estima que siempre existen pequeñas diferencias en las frecuencias de los eventos en las muestras grandes, aunque sólo de manera intuitiva, sin criterios numéricos.

En el nivel 4 se precisan y completan los alcances del nivel 3, respecto a la aleatoriedad aparte de la impredecibilidad se reconoce la estabilidad a la larga; la independencia es una hipótesis que debe ser verificada antes de ignorar la evidencia y utilizar el modelo y, finalmente, la variabilidad va de más a menos dependiendo del tamaño de la muestra.

En la enseñanza de la probabilidad se suelen enfatizar las definiciones formales y en los procedimientos matemáticos sin una estrategia clara para hacer que emerjan y se desarrollen las grandes ideas; basta ver algunas revisiones de los tratamientos en los libros de texto (Ortiz, Batanero y Serrano, 1996). No obstante, si los problemas se formulan de manera diferente a pedir solo el cálculo de probabilidades, se puede propiciar que emerjan nociones sobre las grandes ideas para permitir su precisión y desarrollo mediante simulaciones acompañadas de interacciones y discusiones.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P, MEC, España.

Referencias

Batanero, C. (2015, julio). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Presentado en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Chernoff, E. y Sriraman, B. (2014) Introduction. En E. J Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. xv-xvii). Nueva York: Springer.

Cox, C. y Mouw, J. T. (1992). Disruption of the representative heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning? *Educational Studies in Mathematics, 23*(2), 163-178.

Fischhoff, B. (1982). For those condemned to study the past: Heuristics and biases in hindsight. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 335-351). Nueva York: Cambridge University Press.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Gal, I. y Baron, J. (1996). Understanding repeated simple choices. *Thinking and Reasoning, 2*(1), 81-98.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York: Springer.

Green, D. (1993). Data analysis: What research do we need? En L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Introducing data analysis in the schools: Who should teach it?* (pp. 219-239). Voorburg, Holanda: ISI.

Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339-370.

Jones, G. A. y Thornton, C. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). Nueva York: Springer.

Jones, G. A., Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2007). Research on probability. Responding to classroom realities. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC: NCTM & IAP.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics 32*, 101-125.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*, 68-86.

Metz, K. (1998). Emergent understanding and attribution of randomness: Comparative analysis of the reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 285-365.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants* (pp. 95-138). Washington DC: National Research Council.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996), Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. *EMA*, *2*(1), 29-48.

Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. Londres: Routledge & Keagan Paul.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. Nueva York: W.W. Norton.

Pratt, D. y Ainley, J. (Eds.) (2008). Introducing the special issue on informal inference. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 3-4.

Sánchez, E., Borim, S. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). Nueva York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1981). Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. En A. P. Shulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability* (pp. 90-100). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6-22). Rotorua, Nueva Zelanda: University of Waikata.

Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 7*(3), 99-118.

Sthol, H. y Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 319-337.

Stohl, H., Rider, R. y Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado de http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Nueva York: Cambridge University Press.

APÉNDICE

Situación 1

1. La urna A contiene en su interior 4 bolas entre blancas y negras (Figura 1).

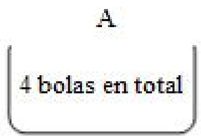


Figura 1

Se extrae una bola, se observa su color y se regresa a la urna. Se extrae una segunda bola, se observa su color y se regresa a la urna. Después de 1,000 extracciones efectuadas de la urna, se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados de 1,000 extracciones efectuadas de la urna A.

	# de bolas blancas	# de bolas negras
Urna A	***489***	***511***

a) De acuerdo con los resultados de la Tabla 1, ¿cómo consideras que es la distribución de bolas blancas y negras contenidas en la urna? ¿Cuántas bolas blancas hay? ¿Cuántas bolas negras hay? Justifica tu respuesta.
b) Si se realiza la extracción 1,001, ¿qué color de bola crees que se obtendría? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tu respuesta.

Situación 2.

2. Otras dos urnas tienen en su interior algunas bolas negras y algunas bolas blancas (Figura 2).

Urna B: 6 bolas entre negras y blancas

Urna C: 3 bolas entre negras y blancas

Figura 2

Después de 1,000 extracciones efectuadas de cada una de las urnas B y C, se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 2. Resultados de 1,000 extracciones hechas de las urnas B y C.

Urna	# de bolas blancas	# de bolas negras
B	***324***	***676***
C	***344***	***656***

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1,001, de tal forma que la bola resultante sea **negra**? Justifica tu respuesta

b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **negra** de la urna B en la extracción 1,001'? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **negra** de la urna C en la extracción 1,001'? Justifica tu respuesta.

Situación 3

3. Después de 10 extracciones efectuadas de cada una de las urnas B y C (Figura 2), se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 3. Resultados de 10 extracciones hechas de las urnas B y C (b = bola blanca, n = bola negra).

Urna B	***n***	***b***	***n***	***n***	***n***	***n***	***n***	***n***	***b***	***n***
Urna C	***b***	***n***	***n***	***n***	***n***	***b***	***b***	***b***	***n***	***b***

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer una onceava extracción, de tal forma que la bola resultante sea **blanca**? Justifica tu respuesta.
b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **blanca** de la urna B en la onceava extracción'? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **blanca** de la urna C en la onceava extracción'? Justifica tu respuesta.

---

[i] Se reproduce la terminología de los autores, aunque conviene aclarar que la probabilidad es siempre teórica y lo que es experimental o empírico es la estimación por medio de la frecuencia.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD *CON INTENCIÓN DIDÁCTICA* EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Probability problem solving *with didactical intention* when preparing mathematics teachers

Huerta, M. P.

Universitat de València

Resumen

En este trabajo se reflexiona sobre la resolución de problemas de probabilidad en la formación de maestros y profesores. Se introduce la idea de la resolución de problemas con intención didáctica y se analiza una manera de resolver problemas de probabilidad, que llamamos "por simulación". Esta manera se introduce como un método de resolución de problemas de probabilidad con potencial heurístico; su conocimiento se revela necesario en la formación de los maestros y profesores de matemáticas como gestores del proceso de resolución de problemas de probabilidad por estudiantes de primaria y secundaria.

Palabras clave: *Didáctica de la probabilidad, resolución de problemas, simulación, formación de maestros y profesores*

Abstract

In this piece of work we reflect on the role of probability problem solving in preparing mathematics teachers. We introduce the notion of problem solving with didactical intention and we show it in a way to solve probability problems that we call "by simulation". This way of solving problems is introduced as a solving method with heuristic potential; its knowledge is considered as necessary in preparing mathematics teachers in order to control the process of solving probability problems at schools in a competent way.

Keywords: *Didactics of probability, problem solving, simulation, training teachers*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo hablamos, indirectamente, de la formación de maestros y profesores en resolución de problemas de probabilidad. Hablamos de problemas de probabilidad y de la resolución de problemas de probabilidad, cuando en ella lo que interesa es comprender los procesos de resolución y los medios que se utilizan para ello. Por resolución de problemas con intención didáctica nos referimos a la resolución cuando se enfoca al análisis global del proceso y a las potencialidades del problema y de su resolución en otros niveles educativos, como la enseñanza primaria y secundaria. Vemos la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica como contexto apropiado para la formación de futuros maestros y profesores en didáctica de la probabilidad.

En muchos otros lugares hemos avanzado la idea de que los problemas de probabilidad pueden clasificarse de más de una manera, según qué criterio se use para ello. Así, dependiendo de la tipología de los datos y la manera en la que se relacionan entre ellos, identificamos una familia de problemas de probabilidad que llamamos problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007). Si nos fijamos en cómo actúa o puede actuar un resolutor de problemas de probabilidad cuando maneja la información requerida para dar respuesta a lo que se pregunta, de un modo ingenuo si se quiere, podemos distinguir tres grandes grupos de problemas: problemas resolubles por asignación, problemas resolubles por cálculo de probabilidades y problemas

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad *con intención didáctica* en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

resolubles por simulación (Huerta, 2002). En el primer tipo un resolutor responde a la pregunta del problema tomando una decisión sobre la probabilidad preguntada, generalmente mediante una asignación de probabilidad a partir de la información disponible a lo largo de la resolución del problema. En el segundo, el resolutor responde mediante un cálculo de probabilidades al interpretar la información contenida en el problema, siendo consciente de que la pregunta del problema consiste en una probabilidad desconocida que está relacionada con las probabilidades conocidas mediante relaciones precisas entre ellas, de tipo aditivo o multiplicativo (que a veces conoce y otras no, aunque sospecha de su existencia). Un tercer grupo de problemas, debido a la falta de información disponible, ni se abordan como problemas de asignación ni como problemas de cálculo de probabilidades, si no de otra manera, que llamamos por simulación, los llamamos problemas resolubles por simulación. Algunos de estos tan obvios como el problema de la chincheta, aquel que pide la probabilidad de que al lanzar al aire una chincheta ésta se pose de una manera determinada sobre el suelo, aunque en general se trataría de aquellos problemas para los que no se dispone de un modelo teórico al que ajustarlo o para el que nuestra experiencia no puede aportar una información fiable que nos permita responder a la pregunta formulada en él, e incluso en aquellos problemas para los cuales la consideración del modelo teórico implica la realización de cálculos complejos pero que, sin embargo, la información proporcionada por una simulación adecuada del problema permite al resolutor dar una respuesta al problema con un alto grado de de confianza en ella.

La distinción anterior no presta atención exclusivamente al problema sino al resolutor. Así, un resolutor puede ver un problema de probabilidad como un problema de asignación y otro resolutor como un problema de cálculo, simplemente por el modo de interpretar la información disponible y usarla en un sentido u otro para obtener la respuesta del problema, bien como una decisión sobre la probabilidad de un suceso o bien como un cálculo.

Esta distinción está clara cuando se observan las múltiples resoluciones que se han considerado para hablar sobre la actuación de los resolutores ante el famoso problema del taxi, *The taxi cab problem* (Citaremos aquí tres: Tversky y Kahneman, 1982; Shaugnhessy, 1992; Kahneman, 2014). Consideremos la siguiente formulación:

> Una noche, un taxi provocó un accidente tras el cual se dio a la fuga. En la ciudad operan dos compañías de servicio de taxis, la Verde y la Azul, cuyos colores se corresponden con el de las compañías. La más numerosa es la compañía Verde con un 85% del total de taxis en la ciudad. Un testigo observó que el taxi culpable del accidente era azul. ¿Qué probabilidad hay de que el taxi implicado en el accidente fuera azul y no verde?

La información sobre la fiabilidad del testigo no está disponible de antemano, por lo que una simulación de su capacidad y agudeza visual en las mismas condiciones de visibilidad que la noche de autos es requerida para poder estimarla y ser usada con posterioridad, tras la cual el problema original queda reformulado de la siguiente manera:

> Una noche, un taxi provocó un accidente tras el cual se dio a la fuga. En la ciudad operan dos compañías de servicio de taxis, la Verde y la Azul, cuyos colores se corresponden con el de las compañías. La más numerosa es la compañía Verde con un 85% del total de taxis en la ciudad. Un testigo observó que el taxi culpable del accidente era azul. Comprobada la fiabilidad de este testigo, se comprobó que reconoció correctamente los colores en el 80% de los casos y fracasó en el 20% restante. ¿Qué probabilidad hay de que el taxi implicado en el accidente fuera azul y no verde?

A partir de aquí el resolutor decide si aprecia el problema como resoluble por asignación o por cálculo de probabilidades. El proceso de resolución será radicalmente distinto según qué decisión tome. Esta decisión puede ser de experto o de aprendiz. En el segundo de los casos guiada por el maestro o profesor que le enseña. Pero, ¿es el maestro o profesor consciente de estas formas de actuar en algunos problemas de probabilidad? El maestro o profesor, como resolutor, ¿cree tener competencia suficiente para abordar la resolución de problemas por asignación, por cálculo o por simulación? ¿Es realmente necesaria esta competencia en los maestros y profesores? O lo que es equivalente, ¿es realmente necesario que los futuros maestros y profesores sean conscientes de las diferentes naturalezas de la probabilidad y las usen en la resolución de problemas?

LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

No descubrimos nada si afirmamos que los futuros maestros y profesores tienen muchas dificultades al enfrentarse con tareas que implican a la probabilidad. Puede afirmarse, casi sin error, que conceptualmente aquéllos tienen las mismas dificultades que tendrán sus futuros alumnos. Muchos estudios han tratado con estas dificultades y las han confirmado (por ejemplo, Contreras, 2011; Díaz y De la Fuente, 2007; Huerta y Cerdán, 2010; Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011). De ahí que la resolución de problemas de matemáticas deba estar presente en la formación de maestros y profesores, no ya solamente como estudiantes de un curso de matemáticas para maestros o de didáctica de las matemáticas, sino para entender algunos de los aspectos que relacionan el proceso de resolución de problemas de probabilidad con la construcción del pensamiento matemático (probabilístico) del estudiante, y para aprender a ser gestores del proceso de resolución de problemas en las aulas de primaria y secundaria.

Santos (2012) formula una serie de preguntas alrededor de qué actividades de resolución de problemas deberían considerarse en un programa de formación y desarrollo profesional de profesores. Se incluyen preguntas relevantes que deberían ser tenidas en cuenta, también, cuando hablemos de la resolución de problemas de probabilidad en la formación de maestros y profesores:

a. ¿Qué actividades de resolución de problemas ayudan a los profesores a desarrollar y construir el conocimiento matemático para la enseñanza?

b. ¿Qué distingue o cómo se caracteriza el pensamiento matemático que deben exhibir los profesores en sus experiencias de resolución de problemas y diseño de actividades para la enseñanza?

c. ¿Qué tipo de problemas favorecen la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes?

d. ¿Cómo se explica la construcción o desarrollo de un conocimiento nuevo en los estudiantes?

Con esto en mente, hemos considerado para la formación de maestros y profesores la idea de la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica. Aquella que no solo presta atención a la resolución del problema, sino también a su potencial didáctico. Es decir, a la posibilidad de que los problemas resueltos constituyan contextos apropiados para la enseñanza de la probabilidad, ya sea en la escuela primaria o secundaria. Así, al estudiante para maestro o al estudiante para profesor se le sitúa en una doble condición: como resolutor de problemas y como futuro enseñante de dichos problemas. Como resolutor se pone en contacto con el conocimiento matemático necesario para la resolución de los problemas. Como futuro enseñante, evalúa potencialidades del problema y de su resolución cuando, en este caso, el futuro resolutor será un estudiante de primaria o de secundaria, por lo que adquiere conocimientos sobre la enseñanza. Ya hemos hablado de esta doble condición de los resolutores con las problemas ternarios de probabilidad condicional (Huerta y Arnau, 2014).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CON INTENCIÓN DIDÁCTICA

En lo que sigue mostraremos qué entendemos por resolución de problemas con intención didáctica mediante lo que hemos llamando aquí, y también en Huerta (2015), la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Distinguimos entre formación de maestros y formación de profesores de matemáticas de secundaria, por razones obvias, como veremos más adelante.

Consideremos el siguiente problema de los pasteles:

> Una conocida firma de pastelería regala con cada uno de sus pasteles una figurita que incluye en el interior del envoltorio con el que los vende. La colección completa está formada por 6 figuritas. ¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?

Ante un problema de probabilidad, como el de los pasteles, no estoy seguro de que los maestros, los profesores de secundaria o los formadores de maestros y profesores seamos conscientes de lo que puede haber detrás de una sugerencia tan fácil de formular como: *puedes simular el problema con un dado* o de esta otra, un poco más larga: *saca papelitos de un saco en el que hayan 6 papelitos numerados del 1 al 6, pero no olvides devolverlos cada vez antes de volver a sacar otro papelito …*. O tal vez seamos ilusos al pensar que este problema, y su sugerencia correspondiente, pueda darse con alguna frecuencia en los centros escolares. No estoy seguro tampoco de que, aquéllos que nos dedicamos con más atención a la didáctica de la probabilidad y la estadística seamos conscientes de lo que realmente significa considerar la simulación, junto al modelo de la urna, como una de las ideas fundamentales en estocástica (Heitele, 1975) o de sus potencialidades y dificultades (Chaput, Girard y Henry, 2011). Creo que no me equivoco si digo que no. Creo que, en muchos casos, esta idea fundamental o, en su lugar, el método de resolución de problemas por (o mediante el uso de la) simulación, como queramos llamarlo, o bien está trivializado: *lanza el dado mucha veces*, y "verás" lo que pasa, o bien se convierte en un ejercicio monótono y sin sentido ordenado por los profesores *lanza un dado muchas veces y anota los resultados que obtengas*. A veces ni eso, la simulación ya ha sido hecha, "Juanito ha lanzado el dado 500 veces y este es el resultado…".

¿Cuál es entonces el sentido de la simulación al considerarla como una manera de resolver problemas de probabilidad? Y, ¿por qué considerarla así puede ayudar a los maestros y profesores en formación en la enseñanza de los conceptos básicos de probabilidad y estadística tanto en primaria como en secundaria?

Ante un problema de probabilidad, un resolutor necesita información con la que poder responder la pregunta del problema. Sin ella no hay posibilidad de darla. La información disponible puede ser objetiva o subjetiva, basada en informaciones de tipo teórico o experimental o sustentada o complementada en creencias u opiniones personales. Se trata así de utilizar las diferentes naturalezas con las que se puede considerar la probabilidad, objetiva (clásica o empírica) o subjetiva (bayesiana), para responder a una pregunta en un problema. Si la información de tipo teórico no está disponible para un resolutor, entonces solo la experimental o la subjetiva es la que sí lo está o puede estar. Así, la experimentación o la simulación como método ayuda al resolutor a obtener dicha información, que puede usarse en algún sentido para dar respuesta a la pregunta que se formula. Este es el sentido de uso que damos en este trabajo a la noción de simulación.

Resolviendo problemas de probabilidad con intención didáctica, como es la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación que estamos ofreciendo aquí, ayudamos a los futuros profesores a formarse no sólo en los conceptos y procedimientos básicos implicados en la resolución del problema sino a formarse también como gestores "ilustrados" del proceso de resolución de los problemas. De esta manera, podrá ser consciente de que, en sus clases y con sus alumnos, tendrá que decidir qué rol va a tener cada uno de los *personajes* que intervendrán en la resolución de los problemas: los propios problemas (su pertinencia, utilidad, finalidad), los alumnos (qué protagonismo le va a dar el futuro maestro en la simulación) y él mismo (el maestro/profesor gestor del proceso). En particular, en la resolución de un problema por simulación, tendrá que decidir qué le corresponde a él gestionar del problema y su resolución y qué le corresponde a los estudiantes hacer como resolutores, cuando uno de los objetivos de la enseñanza sea, además, la manera de resolver los problemas de probabilidad por simulación. Aquí vemos un segundo sentido en el que usamos la noción de simulación: como contexto en el que producir enseñanza de conceptos básicos de probabilidad en los niveles básicos de escolarización.

LA MANERA DE RESOLVER PROBLEMAS DE PROBABILIDAD POR SIMULACIÓN

¿Qué entendemos por la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación? Llamamos así a un método de resolución de problemas de probabilidad, con contenido heurístico, que recurre a la simulación durante el proceso de resolución del problema.

Diremos que un problema de probabilidad se ha resuelto por simulación si, durante el proceso de resolución, el problema formulado, al que llamaremos *problema original*, se ha transformado en otro, al que llamaremos *problema simulado*, mediante algún generador de azar, de tal forma que, desde un punto de vista probabilístico, el problema simulado es equivalente al original. Además, se es capaz de abordar el problema simulado y dar una respuesta de la que se puede inferir una solución posible para el problema original (Figura 1). Una condición para que pueda llevarse a cabo es que el experimento aleatorio simulado sea isomorfo al experimento aleatorio considerado en el problema original; es decir, que conste del mismos número de sucesos, que se pueda establecer una correspondencia biyectiva entre ellos y que los sucesos puestos en correspondencia tengan la misma probabilidad de ocurrir. Como la solución del problema simulado depende de un número dado de ensayos o pruebas, entonces su fiabilidad o credibilidad dependerá de la manera en la que se considere la ley de los grandes o pequeños números.

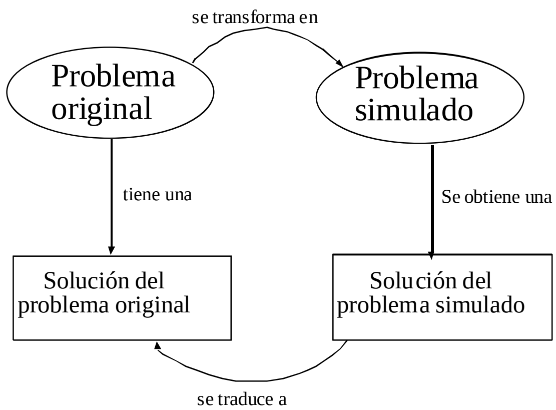


Figura 1. Esquema básico del proceso de resolución de un problema de probabilidad por simulación

Resolver un problema por simulación implica considerar herramientas que transformen el problema original en otro, de tal manera que, para la herramienta considerada, el problema original y el problema simulado sean, probabilísticamente equivalentes[1]. Desde un punto de vista didáctico, lo interesante de dichas herramientas es su carácter y potencial heurístico (Puig, 1996), de exploración y de descubrimiento, que permiten ser consideradas en un número de problemas distintos. Desde el punto de vista del resolutor, interesa que su conocimiento y experiencia en las herramientas le permitan obtener la mayor cantidad posible de información para que pueda ser tratada con posterioridad con el fin de dar respuesta al problema original. Por tanto, situados en el problema simulado, el resolutor ha de saber encontrar y formular una respuesta a lo preguntado en él, lo que le exige considerar los instrumentos y métodos estadísticos necesarios para tratar con la información disponible. Ha de abordar así un problema estadístico auxiliar asociado al problema simulado. La respuesta dada al problema simulado, mediante la solución del problema estadístico, se ha de "devolver" con posterioridad al problema original, lo que necesariamente implica considerar la naturaleza empírica de la probabilidad y su "estabilidad" ante un número elevado de ensayos.

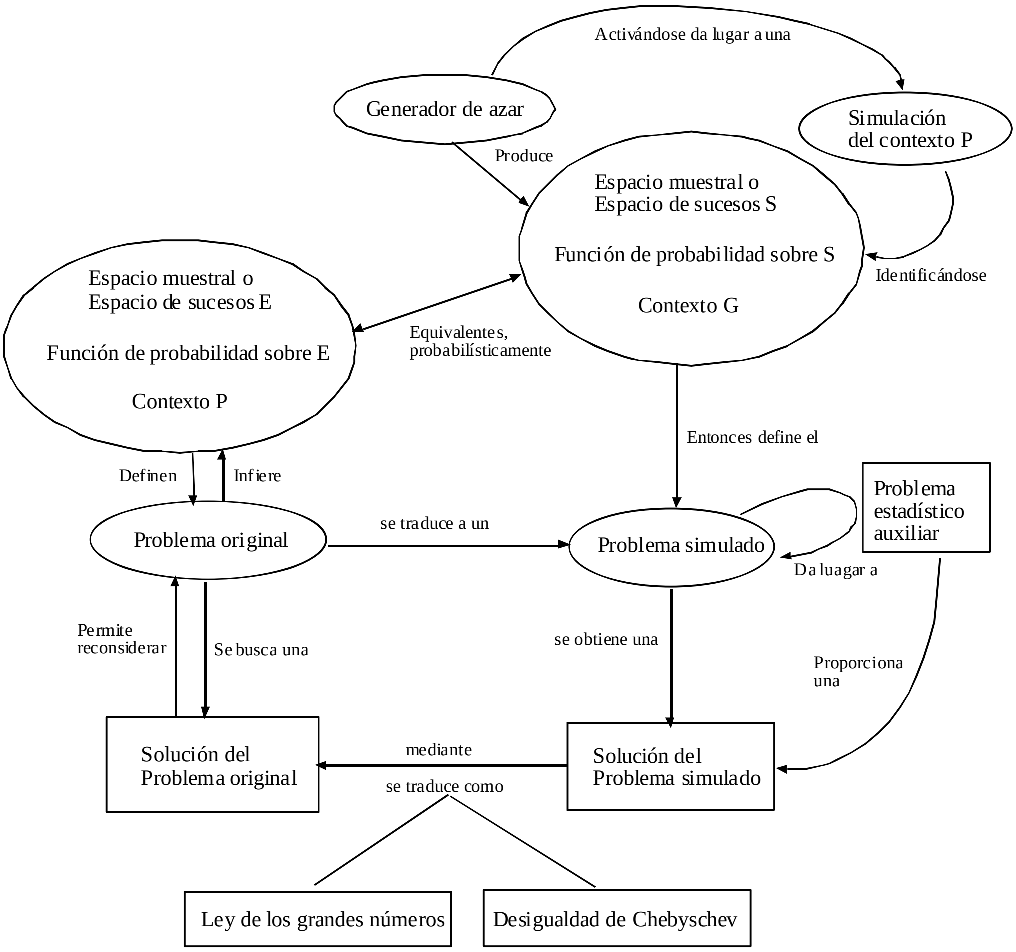


Figura 2. El trabajo durante la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación[2]

Como el proceso de trasformación depende de la herramienta considerada, a cualquiera que se interese por los procesos de resolución de estos problemas le puede surgir una serie de preguntas que deberían tenerse en cuenta, ya sea en los análisis sobre la actuación de cualquier resolutor o bien durante la enseñanza de la manera de resolver los problemas por simulación, como son, por ejemplo (parafraseando a Puig, 1996, p. 41): ¿cuál es la intención de uso de la herramienta? Si uso tal o cual herramienta, ¿cómo está relacionado el problema original con el problema simulado por la herramienta? Una vez obtenga una solución al problema simulado, ¿qué implicaciones puede tener en relación con la solución del problema original? ¿Qué se puede exportar de la solución del problema simulado al problema original y qué no? ¿Cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se exporte de la solución del simulado? ¿Requiere ser reformulado el problema original? Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta. Así, habría que considerar estas preguntas para diferentes generadores de azar: urnas, dados, pirindolas, etc., tablas de números aleatorios, generadores de número aleatorios en hojas de cálculo, programas en R o en Matlab.

Con el fin de ver en qué consiste la manera de resolver un problema por simulación, consideremos el problema de los pasteles formulado en el apartado anterior, en el que detrás de la sencillez de su enunciado oculta un buen número de dificultades para su resolución teórica. Un problema similar ya lo planteó Shaughnessy (1983) en su propuesta de *simulation for simulation* (p. 340).

Asumamos que el problema formulado (el original) no se sabe resolver teóricamente pues el modelo teórico que da cuenta de él está al alcance de unos pocos e incluso fuera del nivel de nuestros estudiantes o de los objetivos de enseñanza para el que se plantea el problema, no en balde se trata de una cadena de Markov absorbente[3]. Propongamos como objetivo que el resolutor llegue a dar una respuesta al problema y que ésta sea lo más razonable posible y, además, que mientras esto ocurre aprenda a manejarse en entornos de incertidumbre. Nuestro objetivo no es, por el momento, transitar hacia el modelo teórico ni enseñar el algoritmo (Engel, 1975a) como paso intermedio, sino una manera de dar respuesta al problema que llamamos por simulación.

Según se desprende del esquema de la Figura 1, para el trabajo que hay que hacer, pueden identificarse cuatro momentos a lo largo del proceso de resolución completo que implica, de una parte, trabajo independiente en cada momento sin "perder de vista" a los otros: trabajo en el problema original, trabajo en el problema simulado, trabajo con la solución del problema simulado y trabajo con la solución del problema original, y, claro está, trabajo en las correspondientes relaciones/traducciones (Figura 2). El trabajo que hay que hacer puede sugerirse durante el proceso de enseñanza, descomponiéndose este en ocho "tiempos" para la indagación y la reflexión, como veremos en el apartado siguiente.

Excepto la primera vez, cada vez que adquiera un pastel obtengo una de las 6 figuritas[4] que o bien no tenía aún e incrementa la colección, o bien ya tenía y estoy en las mismas circunstancias que estaba antes de comprarlo. Pero cada vez que lo compro no sé qué figurita me va a salir hasta que no abra el envoltorio. Por hipótesis (hipótesis 1) puedo pensar que cualquiera de las figuritas es susceptible de aparecer en un pastel con la misma probabilidad que tendría cualquier otra, 1/6, también bajo la hipótesis (hipótesis 2) de que la firma de la pastelería ha distribuido uniformemente sus figuritas entre sus bolsas conteniendo los pasteles que vende y (hipótesis 3) el centro comercial distribuye los pastelitos uniformemente en sus estantes. Dejaré de comprar pastelitos en el momento en el que tenga la colección completa. ¿Tendré la colección completa alguna vez? ¿Habrá que comprar muchos pasteles?

Al lanzamiento de un "dado cúbico" y la correspondiente observación de la cara sobre la que se posa también se le ha concedido la hipótesis (hipótesis 1, en el problema original) de la equiprobabilidad, asignándole a cualquiera de sus caras el valor de 1/6 para su probabilidad. Le concedemos a los lanzamientos sucesivos de un dado, anotando cada vez los resultados que aparecen, la hipótesis de ser un experimento aleatorio compuesto de pruebas independientes (hipótesis 2 y 3, en el problema original). Lanzar el dado repetidamente, anotar el resultado de la cara sobre la que se posa, hasta que se haya posado en las 6 caras por lo menos una vez simula el proceso de comprar pasteles (por el lanzamiento del dado) hasta tener las 6 figuritas (todas las caras del dado aparecen por primera vez en una racha de resultados). El problema simulado queda así: ¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado cúbico hasta que éste tarde o temprano se pose al menos una vez en todas sus caras? Como consecuencia, ¿se posará sobre todas las caras, al menos una vez?, ¿habrá que hacer muchos lanzamientos para que eso ocurra?

Abordemos el problema simulado. Lancemos el dado cuantas veces estimemos que sea necesario. Diremos que hemos realizado una simulación cuando al lanzar repetidamente el dado hemos conseguido reproducir el suceso por el que se nos pregunta. Lo que esta simulación produce es información sobre lo que ha ocurrido, información que debe ser organizada y tratada. Surge así el problema estadístico asociado al problema simulado. La consideración y definición de variables estadísticas es consustancial al proceso y el tamaño de la población también. Ahora la pregunta ¿cuántas simulaciones hay que hacer para dar respuesta al problema? es, entre otras, pertinente. La pregunta tiene múltiples respuestas, probablemente tantas como resolutores y tantas como niveles de exigencia sean requeridos para la respuesta que se proporciona. Por lo menos dos simulaciones, por aquello de promediar. Ahora bien, el estado de incertidumbre que puede producir una respuesta basada en dos simulaciones puede ser mayor que si hago muchas más. Pero, ¿cuántas más?

Algunos métodos para determinar la probabilidad experimental de un suceso sugieren realizar un número de simulaciones dado de antemano: 50, 100 o 1000, número con el que se considera que se puede proporcionar una respuesta razonable al problema simulado (por ejemplo, paso 7 en el modelo de Byan, 1986). Otros, como los libros de texto por lo general, son más ambiguos: muchas simulaciones, cuantas más mejor. En todo caso, siempre el resolutor se hará preguntas alrededor de cualquier sugerencia que se le haga sobre el número de simulaciones que habrá que hacer: ¿Por qué ese número y no otro? La respuesta concluyente es de naturaleza matemática[5], aunque el número de simulaciones dependerá solo del resolutor y del grado de credibilidad o fiabilidad que éste otorgue a una respuesta basada en el número de simulaciones que haya considerado razonable realizar. O, tal vez, del profesor quien establece cuáles son dichas condiciones. Por ejemplo, supóngase que se quiere una aproximación de la probabilidad teórica de hasta un 1% ($\varepsilon = 0.01$) con un grado de confianza del 95%, $\delta = 0.95$. En estas condiciones el profesor demanda de sus estudiantes un número de simulaciones n_0 que puede ser calculada usando la desigualdad de Chebyschev (DeGroot, 1975, p. 185-186):

$$n_0 \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\delta)}.$$

Para obtener este número se ha de partir de una probabilidad teórica p conocida[6]. No obstante, se puede estimar el máximo necesario, para una aproximación y grados de confianza dados, maximizando la función $n = kp(1-p)$, siendo $K = \frac{1}{\varepsilon^2\,(1-\delta)}$ una constante prefijada[7]. Este número tiene más valor metodológico que real, ya que permite hacer el tránsito desde la simulación en lápiz y papel al uso consciente de la simulación con la ayuda de un software. Pero podría carecer de valor para un resolutor cuyo nivel de satisfacción y exigencia de la solución experimental aportada podría adquirirse con un número menor de simulaciones.

En todo caso la respuesta al problema simulado depende del grado de precisión y fiabilidad con la que se quiera expresar. Pero no deja de ser una respuesta al problema simulado que requiere ser traducida o usada para dar respuesta al problema original. En los términos en los que está expresada la pregunta: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*, requiere además dar una credibilidad a la respuesta del problema simulado: *¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado hasta que éste, tarde o temprano, se pose en todas sus caras?*, puesto que pide del resolutor un grado de creencia o credibilidad que le concede a dicho valor promedio.

UNA MANERA DE ENSEÑAR LA MANERA DE RESOLVER PROBLEMAS DE PROBABILIDAD POR SIMULACIÓN EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

La gestión del proceso de resolución de un problema de probabilidad no es la misma, razonablemente, si a quienes se dirigen los problemas son los estudiantes de primaria o los de secundaria. Tampoco puede serlo entonces la formación de los maestros y de los profesores de matemáticas. Así que dividiremos este apartado en dos atendiendo a la diferencia entre ambas muestras, no solo por el nivel de formación matemática de cada uno de ellos sino por su futura competencia en la enseñanza de las matemáticas. Aunque no describamos estos aspectos con detalle, suponemos por hipótesis, en ambos casos, un nivel de preparación deficiente en probabilidad y un mayor nivel de preparación en matemáticas de los futuros profesores de secundaria que de los futuros maestros.

Una manera de enseñar la manera de resolver problemas por simulación en la formación de maestros. Un ejemplo

Nuestro objetivo es que los futuros maestros adquieran un mayor conocimiento sobre conceptos básicos de probabilidad mediante la resolución de problemas y un conocimiento sobre su enseñanza a través de la exploración y análisis de las potencialidades de la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación, es decir, sobre el papel del maestro como gestor del proceso con niños.

Describiremos a continuación cómo se ha formulado este problema a estudiantes para maestro y algunas consecuencias que se han observado. Los objetivos específicos de enseñanza son variados, entre otros:

- Explorar las diferentes naturalezas del concepto probabilidad en la resolución de problemas de probabilidad.
- Explorar el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación.
- Explorar si la resolución de problemas de probabilidad por simulación facilita y permite modificar el juicio subjetivo del resolutor sobre los fenómenos aleatorios implicados en el problema.

Hay todavía un objetivo más, sobre potencialidades, como consecuencia del trabajo mientras se resuelve el problema: explorar el potencial que tiene el método de resolución de los problemas por simulación y sus objetivos de enseñanza para la educación primaria.

El problema se enuncia a los estudiantes tal y como lo hemos presentado en el apartado anterior, junto con la tarea descompuesta en ocho tiempos y un conjunto de cuestiones asociadas a cada tiempo a modo de sugerencias heurísticas (Puig, 1996). El número de tiempos está relacionado con las macro-etapas del método de resolución (Figura 1) y las sugerencias con el trabajo que habría que hacer en cada una de ellas (Figura 2). El número de sugerencias es variable y puede ser modificado dependiendo del problema y del nivel de los resolutores. Los tiempos y las sugerencias formuladas para el problema han sido las siguientes:

- Primer tiempo: Exploración de la situación real, identificación de lo que está sujeto a incertidumbre y no lo está, de lo que es conocido y desconocido en la situación real.
  - ¿Crees tener seguridad de que tarde o temprano se completará la colección de figuritas? ¿Por qué?
  - Al comprar un buen número de pasteles, ¿en qué condiciones puede encontrarse la colección de figuritas?
  - Entonces, ¿cuántos pasteles exactamente se tendrían que comprar para tener la colección completa? ¿Por qué?
- Segundo tiempo: Juicios subjetivos a priori derivados del análisis de la situación real.
  - ¿Qué crees que es más fácil que ocurra, conseguir la colección completa o no conseguirla? ¿Por qué?
  - Si no sabes exactamente cuántos comprar, al menos haz una conjetura sobre el cuántos, ¿Cuántos pasteles estimas que se tendrían que comprar, más o menos, para poder conseguir la colección completa? ¿Por qué?
- Tercer tiempo: Fiabilidad o credibilidad de la conjetura.
  - Quieres explorar hasta qué punto es fiable o creíble tu conjetura sobre la posibilidad de conseguir toda la colección completa y sobre el número de pasteles que habría que comprar para obtenerla. ¿Cómo lo harías?
- Cuarto tiempo: Simulación, necesidad y uso de herramientas heurísticas. El problema simulado.
  - ¿Experimentar o simular? ¿Puede experimentarse el problema? Por el contrario, ¿solamente se puede simular? ¿Por qué?

- Si vas a simular la compra de pasteles, ¿qué vas a usar para ello? Si hay hipótesis que formular, ¿qué hipótesis son estas?
- ¿En qué consiste una simulación?
- ¿Cómo queda el problema original en términos de la simulación (el problema simulado)? Formúlalo sin usar las palabras “pasteles” ni “figuritas” solamente en términos de la herramienta usada.
- ¿Puedes decir otra forma de simular el problema? Repite todas las cuestiones anteriores para la nueva herramienta considerada.
- Las simulaciones pensadas y sus correspondientes problemas simulados formulados, ¿en qué crees que te van a ayudar a la hora de dar respuesta al problema original?

• Quinto tiempo: Simulación productora de la información dependiente de la herramienta usada. Tratamiento de la información, el problema estadístico asociado dependiente del número de simulaciones realizadas.
  - Resuelve los problemas simulados.

• Sexto tiempo: Equivalencia de problemas. Equivalencia entre los problemas simulados dependientes de las herramientas consideradas
  - Tienes una solución para cada uno de los problemas simulados. Si las comparas, ¿qué puedes decir de ellas?
  - ¿Te lo esperabas? ¿Por qué?
  - Entonces, ¿cuál de las soluciones anteriores vas a usar para dar respuesta al problema original? ¿Por qué?

• Séptimo tiempo: De la solución del problema simulado a la solución del problema original.
  - Con la información disponible de las soluciones de los problemas simulados, trata de dar respuesta a la pregunta formulada en el problema original: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*
  - Justifica por qué crees que es ese número. ¿Qué significa para ti ese número?

• Octavo tiempo. Devolución de la solución al problema original: utilidad y fiabilidad.
  - ¿Hasta qué punto crees que es fiable la respuesta que acabas de dar?
  - ¿Podrías mejorar aún más esa fiabilidad de la respuesta o la credibilidad que le concedes?
  - Seguro que has vivido situaciones como la que acabas de resolver en este problema. ¿Hasta qué punto la solución que has obtenido se puede considerar como solución de una situación real que hayas vivido?
  - ¿Qué se puede aprovechar de esa solución para la situación real vivida por ti y qué no? Explícate lo mejor que puedas.
  - La reflexión anterior, ¿afectaría a la formulación del problema original? ¿De qué manera?

Podría comprobarse cómo lo que se le ofrece al estudiante es un método de resolución con potencial heurístico en ocho pasos, ya que, por una parte, tiene la intención de ser útil no solo para este problema sino para otros problemas de probabilidad en los que haya que tratar con probabilidades y variables aleatorias y, por otra, tiene carácter de exploración en busca de la información que permite contestar a lo que se pregunta en él. A lo largo del proceso, el futuro maestro puede considerar la posibilidad de actuar así con sus futuros alumnos de primaria, teniendo en cuenta las restricciones lógicas del nivel educativo al que se dirige. Capella (2013 y 2014) muestra un ejemplo.

Una manera de enseñar la manera de resolver problemas por simulación en la formación de profesores de matemáticas de secundaria. Un ejemplo

Con los futuros profesores de secundaria, uno de nuestros objetivos tiene por objeto acortar sus dificultades cuando se enfrentan a problemas "elementales". Estas dificultades surgen porque la información que requieren para resolver los problemas se encuentra en un modelo teórico que saben que existe pero que no llegan a él y, desgraciadamente, no saben qué hacer si no: "sé que se trata de un problema de Bayes pero no me acuerdo cómo era la fórmula". Por otro lado, no se concibe que un problema, por ejemplo de probabilidad, que puede resolverse mediante el uso de un modelo teórico, se pueda resolver de otra manera, la manera que llamamos por simulación, y que las soluciones en ambos casos sean consideradas válidas o pertinentes.

En la formación de profesores los tiempos son distintos a aquéllos que describimos para los futuros maestros. Pueden ser descritos por el esquema siguiente:

- Solución teórica del problema original.
- Traducción del problema original al problema simulado.
  - Formulación del problema simulado.
  - Prueba de la equivalencia en probabilidad de los dos problemas.
- Diseño de la simulación.
  - Posibles generadores de azar. Tratamiento de les datos producidos por la simulación.
- Solución del problema simulado.
- Traducción de la solución del problema simulado al problema original:

– Aplicación de la ley de los grandes números al número de simulaciones necesarias con el fin de que la simulación produzca un resultado aceptable para el problema original.

- Metodología de enseñanza que se deriva de estas resoluciones:
  - Discusión razonada del uso de software.
  - Discusión razonada de los diferentes papeles de los protagonistas (Profesores, alumnos y contenidos que han de ser enseñados).

El problema original tiene una solución teórica que debe ser hallada en primer lugar. El profesor de secundaria conoce el modelo teórico que da cuenta del problema, aunque puede actuar como el maestro y recorrer el camino en sentido contrario. Habíamos dicho que el problema de los pasteles se modeliza mediante una cadena de Markov absorbente. En general este modelo no es conocido por una amplia mayoría de futuros profesores de secundaria, ni siendo graduados en Matemáticas. Por ello, el modelo teórico ha de ser implementado en nuestras clases, dado que el problema ha sido considerado como pertinente en todos los colectivos de los que hablamos, alumnos de primaria, secundaria, maestros y profesores. Si no se considera pertinente, no hay caso.

Una cadena de Markov se describe mediante una matriz de probabilidades, llamada matriz de transición, entre estados en los que se encentra el sistema. El sistema aquí es la colección de figuritas y su estado varía con el tiempo o con las veces que se compre un pastelito. El grafo de la Figura 3 ayuda a ver dichos estados, su tipología y las probabilidades de transición de uno a otro vecino con él.

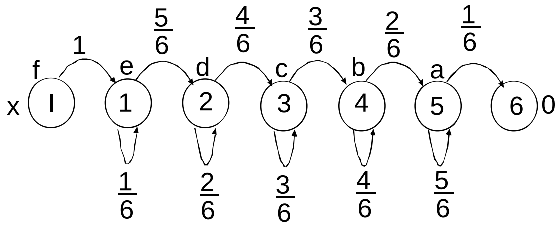


Figura 3. Grafo del problema de los pasteles. Estados del sistema (la colección) y probabilidades de transición entre estados

En el sistema anterior siempre se avanza, nunca se retrocede, aunque nos podemos quedar estancados por un momento, pero no siempre, de modo que tarde o temprano se alcanza el objetivo de llegar al estado absorbente, teniendo así la colección completa de figuritas. Esta propiedad de las cadenas de Markov absorbentes desvía la atención de la probabilidad de llegar a un estado del sistema, desde otro cualquiera anterior, a evaluar el "tarde o temprano" con el que se llega al estado absorbente, lo que se suele conocer como duración media del paseo aleatorio por el grafo o tiempo medio de espera para la absorción.

Al igual que los árboles y otros sistemas de representación son recursos para la resolución de problemas de probabilidad que incorporan reglas de cálculo a modo de sistema de signos menos abstractos que los requeridos en el modelo teórico[8], las reglas del valor medio de Engel (1975a) resuelven también el problema representado en el grafo (Figura 3), en ausencia del modelo teórico. El profesor de secundaria tiene así una solución teórica del problema original tanto por la vía del modelo teórico como por la vía de los sistemas de representación más concretos y sus reglas de cálculo. Ninguna de ellas es, probablemente, pertinente para sus futuros alumnos de secundaria.

La búsqueda del problema simulado se lleva a cabo de un modo similar a como se realiza con los futuros maestros. La consideración de las herramientas heurísticas y la formulación del problema simulado asociado a cada una exige de los futuros profesores una prueba de la equivalencia entre los dos problemas (ver nota 1, al final).

La simulación del problema y la solución del correspondiente problema estadístico asociado permiten que el futuro profesor sea consciente, no sin sorpresa, de que la solución del problema simulado sea muy parecida, si no la "misma", que la teórica, y que este parecido depende del número de simulaciones realizadas. El problema estadístico sobre cuántas simulaciones hay que realizar para que la solución del problema simulado sea aceptada como solución del problema original, dentro de unos márgenes de fiabilidad, tiene sentido no solo porque el futuro profesor no está predispuesto a las simulaciones con "lápiz y papel" sino porque su respuesta tiene una fuerte componente metodológica al cuestionar el uso de un software con el que realizarlas; se considera una nueva herramienta heurística, dependiendo del grado de fiabilidad que se imponga (el valor de ε) y del éxito si se repite esta experiencia con los estudiantes a lo largo del tiempo (el valor de δ en la desigualdad de Chebyschev). Así se desarrolla una de sus competencias con las nuevas tecnologías, elaborar programas en Matlab o en Excel, por ejemplo.

COMENTARIOS FINALES

En la formación de maestros la manera de resolver problemas por simulación tiene por intención, entre otras, que los estudiantes transiten desde un razonamiento basado en la subjetividad hacia otro que incluya información más objetiva, producto de la simulación, en busca de una modelización de los problemas. En cambio, en la formación de profesores el tránsito tiene lugar en sentido inverso, desde el razonamiento basado modelos teóricos hacia un razonamiento que incluye información objetiva, fruto de la simulación, no exenta en de cierta subjetividad e incluso de subjetividad completa. En general, cuando el futuro profesor enfrenta ambas maneras de resolver un problema de probabilidad, basada en el modelo teórico o en la simulación, es reacio a otorgar el mismo peso a ambos y siente cierto sesgo hacia el modelo teórico. Esto puede tener ciertas consecuencias fatales para muchos problemas de probabilidad, como el que hemos usado para mostrar uno de los aspectos de nuestra manera de formar maestros y profesores, pues muchos de los modelos teóricos, como las cadenas de Markov, no están al alcance ni de futuros maestros ni de futuros profesores[9]. ¿Supone esto que muchos problemas reales, contexto ideal para mostrar lo que son las matemáticas como decía Freudenthal[10] (1973), no pueden considerarse en la formación de maestros y profesores por no estar el modelo teórico al alcance de éstos? La respuesta es que, precisamente por esto, deberían estar. La manera de resolverlos por simulación es el punto en el que se encuentran ambos colectivos y estos con sus estudiantes.

Entendemos la simulación, y así la hemos usado, en un doble sentido: como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico y como un paso más en el método. Tal vez en esto último es en donde coincidamos con la mayoría de trabajos en los que la simulación está presente, muy numerosos por cierto, cubriendo un amplio catálogo de objetivos: para tratar con la naturaleza empírica de la probabilidad, en procesos de modelización, como herramienta en la formación de maestros y profesores, etc. Si en algo tiene sentido considerar la simulación es como un método para la resolución de problemas de probabilidad con el que, no sin dificultades de diferente índole, pueden convivir estudiantes de primaria, secundaria, maestros y profesores para un problema dado. El que hemos mostrado aquí ha sido propuesto a todos esos colectivos mediante el mismo enunciado y la misma propuesta de resolución, habiendo diferentes gestiones de un mismo proceso con diferentes reacciones por parte de los resolutores.

A veces se dice que la simulación elimina las “matemáticas” que resuelven un problema de probabilidad. No podemos estar más en desacuerdo con esta afirmación. De hecho, la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación es como mejor interpretamos la afirmación de Freudenthal (1973). Pero además, entendemos la resolución de problemas de probabilidad como un proceso en la búsqueda de información requerida para tomar una decisión en situaciones de incertidumbre, decisión continuamente revisable en virtud de la actualización de dicha información. En esto estamos próximos a Borovcnik (2011) y su idea del tipo de información disponible “objetiva” y “subjetiva” que da lugar a las diferentes naturalezas del concepto de probabilidad: objetiva y subjetiva. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación facilita el uso de ambos tipos de información y solamente al resolutor compete usar una u otra para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Cuando un estudiante para maestro y profesor resuelve un problema por simulación, el estado anímico en el que se encuentra al finalizarlo es de cierta incredulidad. Por su trayectoria y experiencia “matemática” el futuro maestro entiende que la solución que está dando al problema original por la vía del problema simulado puede estar bien o puede estar mal, casi al mismo tiempo. Ha estado en contacto con el azar, con lo aleatorio, con la incertidumbre. Es algo así como que necesita de una respuesta basada en un modelo teórico para validar la suya. Aún sin entender el modelo teórico del que procede, si se le dice que en el problema de los pasteles la solución teórica es 14.7 pasteles el número esperado que hay que comprar es más fiable que la suya, y ésta tanto más cuanto más cerca está de la proporcionada por el modelo teórico desconocido. En el caso del futuro profesor de secundaria, para quien la solución teórica es lo primero que obtiene y comprende su origen, la sorpresa le asalta al resolver el problema por simulación y observar que la solución obtenida por esta vía es “muy parecida” a la obtenida teóricamente. En algunos casos, no se da crédito a que ambas soluciones estén tan próximas. Algo así se provoca al proponer a los futuros maestros y profesores la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica. No es fácil, pero vale la pena intentarlo.

REFERENCIAS

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C.

Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 71-83). Nueva York: Springer.

Bryan, B. (1986). Using simulation to model real world problems. *Proceedings of the ICOTS-2 conference*, pp. 86-90. Recuperado de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php

Capella, J. (2013). *La simulació en l'aprenentatge de la probabilitat en Primària*. Trabajo de Fin de Grado. Universitat de Valencia. Recuperado de http://roderic.uv.es

Capella, J. (2014). *La simulació i la resolució de problemes de probabilitat. Estudi sobre la influència en la probabilitat subjectiva en alumnes de 13 i 14 anys*. Tesis de Máster. Universitat de València.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Chaput, B., Girard, J.C.y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 85-95). Nueva York: Springer.

DeGroot, M. H. (1975). *Probability and Statistics*. Menlo Park, CA: Addison Wesley.

Diaz, C. y De la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian Reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128-143.

Engel, A (1975a). The probabilistic abacus. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(1), 1-22.

Engel, A. (1975b). *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. París: CEDIC.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordretch, Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 75-86.

Huerta, M. P. (2015, abril). *La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación*. Ponencia invitada en las 2ª Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria. Recuperado de www.jvdiesproyco.es.

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 415-424). Salamanca: SEIEM.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, M. A. y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 807-817). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów

Kahneman, D. (2014). *Pensar rápido, pensar despacio*. Sant Llorenç d'Hortons: Debolsillo.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Santos, M. (2012). El papel de la resolución de problemas en el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 7*(10), 151-163.

Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R. W. Sholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350). Amsterdam: Elsevier.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Nueva York: Macmillan.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Ed.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp.153-160. Cambridge, MA: Cambridge Academic Press.

---

[1] Si al problema original se le puede asociar un modelo teórico que lo resuelve, diremos que el problema simulado converge estocásticamente al problema original si las frecuencias relativas convergen en probabilidad hacia las probabilidades teóricas y los valores medios de las variables estadísticas cuantitativas convergen en probabilidad a las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias correspondientes. Recíprocamente, las probabilidades teóricas y las esperanzas matemáticas del problema original pueden interpretarse como frecuencias relativas o valores promedios en el problema simulado.

[2] Incluso un esquema tan complejo como este no refleja fielmente todo el trabajo que hay que hacer cuando se aborda la resolución de un problema de esta manera.

[3] Un recurso alternativo para este problema es el ábaco probabilístico de Engel (1975a). ¡Un algoritmo determinista resolviendo una situación aleatoria! Sugerimos al lector que resuelva el problema como le apetezca, bien considerándolo como una cadena de Markov o bien considerándolo como "un paseo aleatorio" en el ábaco de Engel. Si no es así, tampoco pasa nada, pues la lectura de este trabajo no depende de ello. Tal vez le apetecería simularlo para hacerse una ligera idea de "por dónde van los tiros" o incluso ir más allá, hacia una solución razonable y fiable, o incluso más allá, al modelo teórico. Una vez formulado, el problema pertenece solamente al resolutor.

[4] El número es ilustrativo e intencionado, proporcionado por el profesor.

[5] Sea p la probabilidad teórica de un suceso S. Sea fr_n la frecuencia relativa asociada a ese suceso en n pruebas de un experimento aleatorio que lo simula. La versión fuerte de la ley de los grandes números establece la convergencia estocástica de las frecuencias hacia las probabilidades en los siguientes términos: $P(fr_n \to p) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

[6] Si se requiere aproximar un valor esperado por un valor promedio dependiendo del número de simulaciones, hay que tomar la desigualdad de Chebyschev correspondiente.

[7] Para cualquier ε y δ que se considere, esta función alcanza un máximo para p=1/2. El número máximo de simulaciones dependerá de estos valores y se puede estimar por $n_0 = \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\delta)}$.

[8] Una discusión sobre esto puede verse en Huerta (2002).

[9] En el pasado, el Grupo Cero apostó por resolver problemas como estos en un proyecto curricular basado en la resolución de problemas. También lo hizo Engel (1975a, 1975b). Hoy se rescatan aquí.

[10] "*To explain to people what mathematics really means, one finds the most convincing examples in probability*" (p. 583).

Comunicaciones

PERFILES DE ESTUDIANTES EN LA COMPRENSIÓN DE LA APROXIMACIÓN AL ÁREA DE UNA SUPERFICIE BAJO UNA CURVA

Students' profiles related to the understanding of the approximation to the surface area under a curve

Aranda, C.[a], y Callejo, M. L.[b]

[a]I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar perfiles de estudiantes en la forma en que aproximan el área de la superficie bajo una curva. Los estudiantes participaron en un experimento de enseñanza dirigido a la construcción del concepto de integral definida partiendo de la idea de aproximación al área de una superficie. Las tareas fueron diseñadas atendiendo a una trayectoria hipotética de aprendizaje considerando las fases de construcción de un concepto apoyadas en la abstracción reflexiva. El análisis de las respuestas, teniendo en cuenta los distintos momentos del proceso de abstracción reflexiva, permitió identificar tres perfiles en la comprensión de la aproximación al área de una superficie bajo una curva.

Palabras clave: *aproximación al área, integral definida, trayectoria hipotética de aprendizaje, experimento de enseñanza*

Abstract

The aim of this study is to identify profiles of students related to the way they approach to the surface area under a curve. Students participated in a teaching experiment focused on building the concept of definite integral from the idea of approaching to the area of a surface. Tasks were designed taking into account a hypothetical learning trajectory considering the phases of the construction of a concept supported by reflective abstraction. The analysis of students' responses taking into account the different phases of the process of reflective abstraction, lets to identify three profiles of students' understanding of the approximation to the surface area under a curve.

Keywords: *approximation to the area, definite integral, hypothetical learning trajectory, teaching experiment*

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han identificado las dificultades de los estudiantes para comprender la integral definida como límite de una suma, debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; González y Aldana, 2010; Orton, 1983). Cuando se introduce la integral mediante las sumas de Riemann, McDonald, Mathews y Strobel (2000) consideran que es importante que los estudiantes vean la sucesión de las sumas inferiores/superiores no solo como un listado de números sino como una función cuyo dominio pertenece al conjunto de los números naturales.

Las investigaciones indican que el primer encuentro de los estudiantes con la concepción de límite de una función es a través de la idea de aproximación (Cornu, 1991) mediante la concepción dinámica del límite: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a [...] si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2015). *Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva*. En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: SEIEM.

$f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada" (Blázquez y Ortega, 2002, p. 79). Esta manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica. Algunas investigaciones señalan que la dificultad de los estudiantes para construir la definición formal de límite es el resultado de una comprensión insuficiente de la concepción dinámica del mismo (Cottrill et al., 1996; Pons, Valls y Llinares, 2012).

Por otra parte, se sugiere la necesidad de usar múltiples representaciones para presentar el concepto de integral y de enfatizar las conexiones entre ellas (Ferrini-Mundi y Graham, 1994; Fernández-Plaza et al., 2012). En esta línea Ferrara, Pratt y Robutti (2006) proponen usar la tecnología para tratar la integral, primero a nivel numérico y gráfico, como sumas de rectángulos de base cada vez más pequeña, y después a nivel simbólico. Camacho, Depool y Santos-Trigo (2010) han puesto de manifiesto que actividades programadas con las utilidades que ofrecen las tecnologías permiten progresar en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida.

Por último, algunos autores consideran que en la secuencia de enseñanza del concepto de integral debe primar su génesis histórica, que responde al problema del cálculo del área de la superficie bajo una curva, porque está más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Turégano, 1998). En el contexto de introducir el concepto de integral definida partiendo del cálculo del área de la superficie bajo una curva, el objetivo de esta investigación es:

> Identificar distintas formas en que los estudiantes de Bachillerato construyen la aproximación del área de la superficie bajo una curva en el contexto de un experimento de enseñanza utilizando *applets*.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico es el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon et al., 2004) que trata de describir la construcción de un nuevo concepto intentando hacer operativa la "transposición a un plano superior" y la "reconstrucción" a las que hace referencia Piaget para explicar el proceso de abstracción. Este marco ofrece "lentes teóricas" con el fin de analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes y cómo los utilizan para construir nuevos conceptos.

Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la elaboración de un nuevo concepto: la fase *de participación*, entendida como el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido, y la fase *de anticipación* que se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas a las que se llevó a cabo la abstracción. Roig (2008) ha identificado tres momentos en la fase de participación: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, en el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros, y en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares. Roig considera, en términos del mecanismo de *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que "las acciones propias de la fase de *proyección* están anidadas en la coordinación de información que caracteriza la reflexión" (2008, p. 228) pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

Desde este marco teórico, Simon y Tzur (2004) han elaborado la idea de *trayectoria hipotética de aprendizaje* donde consideran los conceptos previos de los estudiantes, los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usan para fomentar el aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes y ahí entra en juego la manera en que se caracteriza el mecanismo de *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, porque se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que permitan favorecer la generación de *actividades* y crear el contexto para reflexionar sobre la relación entre la actividad y el efecto producido que sean la base del aprendizaje pretendido.

MÉTODO

Diseño del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se diseñó atendiendo a los Ciclos de Enseñanza de las Matemáticas descritos por Simon (1995). Estos ciclos contemplan: el conocimiento del profesor, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la evaluación del conocimiento de los estudiantes; esta evaluación proporciona nuevo conocimiento al profesor y cierra un ciclo de enseñanza.

En nuestro experimento de enseñanza: el conocimiento del profesor sirvió de apoyo para diseñar la secuencia de enseñanza y las tareas, a fin de alcanzar un objetivo de aprendizaje; se describe una trayectoria hipotética de aprendizaje que se apoya en la problemática y el marco teórico antes expuestos; por último se valoró el conocimiento de los estudiantes identificando distintos perfiles. Estos perfiles nos han aportado un nuevo conocimiento sobre cómo parece que ha funcionado el experimento de enseñanza.

El objetivo de aprendizaje del experimento de enseñanza fue que los estudiantes *construyeran* el concepto de integral definida como límite de las sumas de Riemann, a partir de la aproximación al área de la superficie bajo una curva (Turégano, 1998). Se articula de la siguiente manera:

- Cálculo del área del círculo por el método de “agotamiento”.
- Aproximación del área de superficies bajo una curva mediante suma de áreas de rectángulos.
- Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de la integral definida.
- Propiedades de la integral.
- Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

El experimento se llevó a cabo en 8 sesiones de 1 hora durante tres semanas. La secuencia de enseñanza constaba de 11 tareas con guías de trabajo que daban orientaciones y planteaban cuestiones. Los estudiantes podían responder con la ayuda de *applets* diseñados *ad hoc*. El papel de la profesora era hacer de guía durante las sesiones, aclarar dudas y moderar una puesta en común de cada sesión. Los estudiantes trabajaron por parejas o tríos de similar nivel de rendimiento académico.

En esta comunicación nos centramos en la aproximación al área de la superficie bajo una curva.

Trayectoria hipotética de aprendizaje: aproximación al área de la superficie bajo una curva

La Figura 1 muestra el proceso hipotético de construcción de la aproximación al área de la superficie bajo una curva. En el diseño de este proceso se ha tenido en cuenta: por una parte las fases de construcción de un concepto apoyadas en la abstracción reflexiva; por otra las concepciones dinámica y métrica del límite; y por último los distintos sistemas de representar la aproximación al área bajo una curva. Nuestra hipótesis es que los estudiantes *experimentarán* con los *applets* aumentando o disminuyendo con el deslizador el valor de *n* (número de subintervalos de la partición), lo que les permitirá observar el *efecto* sobre las representaciones geométricas y numéricas que aparecen en pantalla. La realización de este tipo de acciones origina el contexto para generar *registros* de la relación actividad-efecto *relacionando* el incremento del número de subintervalos de la partición con el valor de las sumas superiores e inferiores, con el recubrimiento de la superficie por rectángulos y con una cota del error de aproximación. Se espera que la *reflexión* sobre la relación actividad-efecto dé lugar a *inferir,* por una parte, que cuanto mayor sea el número de subintervalos, mejor será la aproximación del área de la superficie bajo la curva y, por otra, que el error es una cota, es decir, que dado un valor del error de la aproximación, se puede encontrar un valor de *n* a partir del cual el error es menor que el valor dado.

Estas inferencias pueden llevar a los estudiantes a realizar distintas *coordina*ciones: procesos de aproximación de una sucesión en el dominio y en el rango (concepción dinámica del límite), una cota del error y el número de subintervalos de la partición (concepción métrica del límite); y también entre sistemas de representación. La *reflexión* sobre las mismas les puede llevar, a su vez, a *coordinar* las concepciones dinámica y métrica del límite (al incrementar el valor de *n* se reduce la diferencia entre las sumas superiores e inferiores y por tanto el error de aproximación). Finalmente, tras el proceso de *reflexión* los estudiantes pueden llegar a aplicar las regularidades observadas a nuevos casos particulares, sin necesidad de experimentar porque sus reflexiones se apoyan en los significados construidos (*anticipación local*).

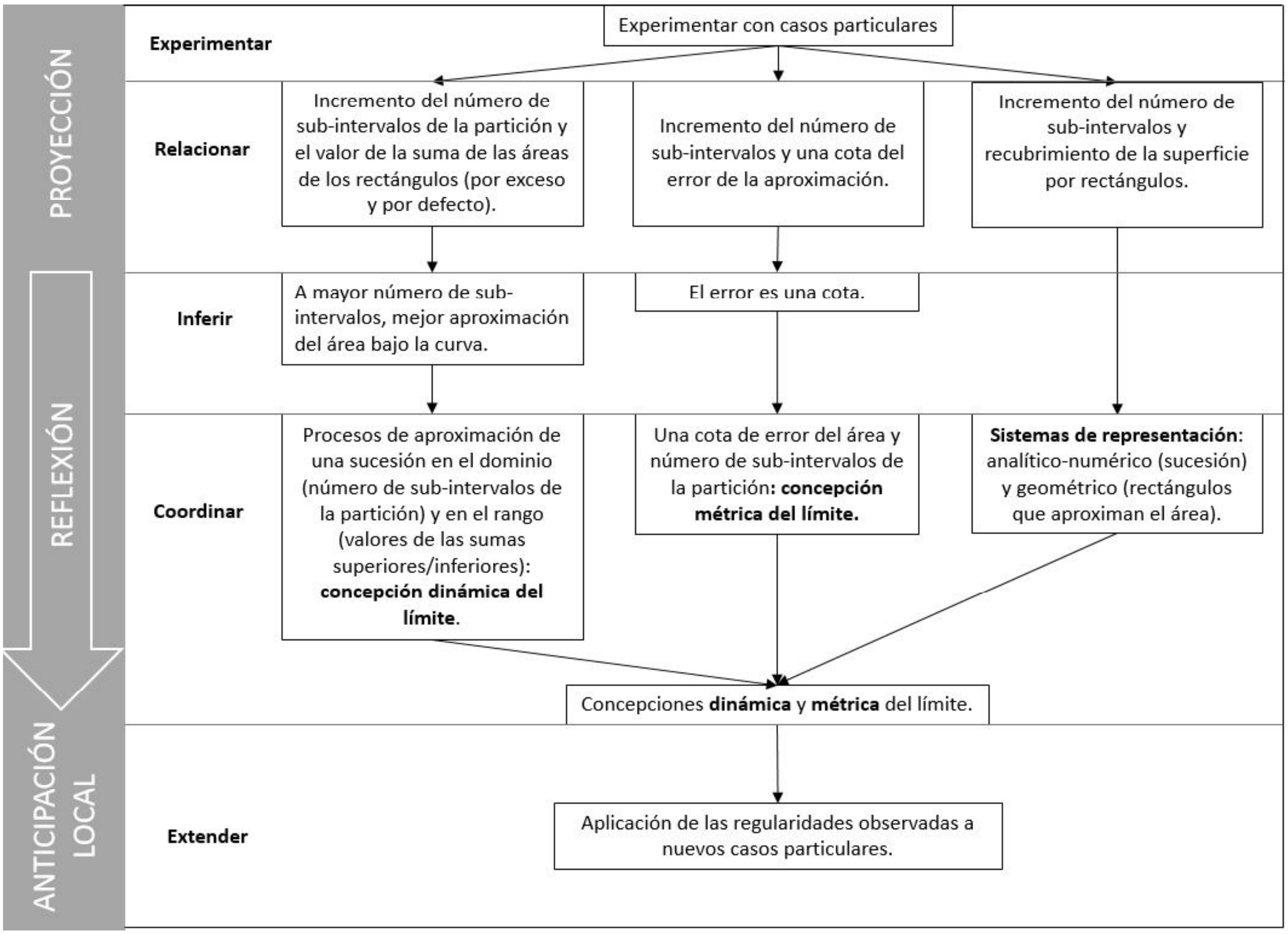


Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Tarea propuesta

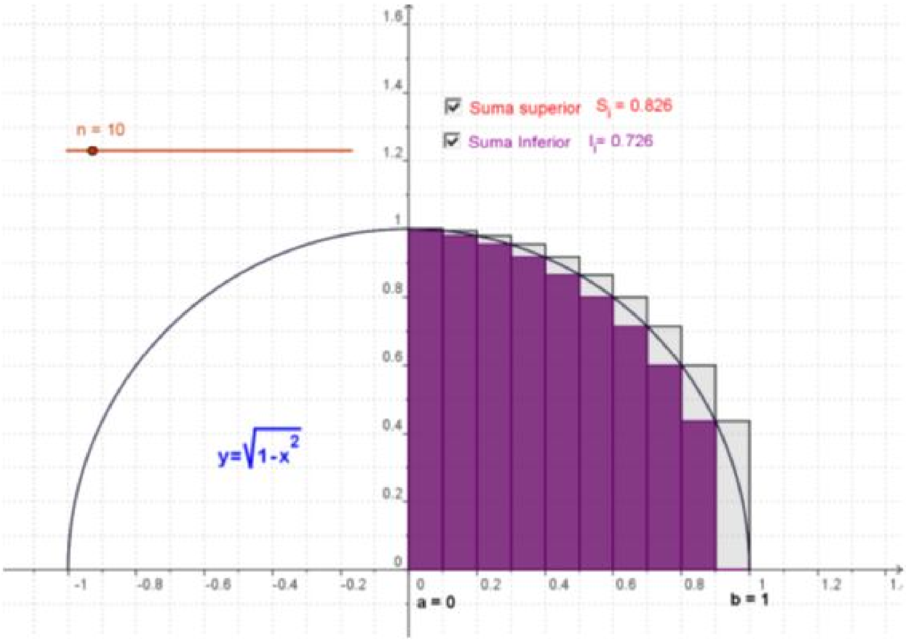
En este trabajo nos centramos en la segunda tarea del experimento de enseñanza donde se pedía aproximar el valor del área bajo la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo [0, 1] (Figura 2). El objetivo específico era que los estudiantes, apoyándose en un *applet*, generaran un conjunto de registros de experiencia sobre la relación entre una acción (modificar *n*, número de subintervalos de la partición) y el efecto producido (si *n* aumenta mejora la aproximación). El *applet* permite variar *n* de 0 a 100. En la pantalla aparecen los rectángulos que recubren la superficie por exceso y por defecto, y el valor de las sumas superiores e inferiores.

La *hipótesis sobre el proceso de aprendizaje,* apoyada en los momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva (Figura 1), es que los estudiantes, tras familiarizarse con el *applet* (cuestión I), *experimentarán* aumentando el valor de *n* y observarán lo que ocurre con los valores de *las sumas inferiores y superiores* (cuestiones II y III), *relacionarán* el incremento de *n* con el valor de las sumas superiores e inferiores, con el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos y con una cota del error de aproximación.

Tarea: Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:

a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.

Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

b. La longitud de estos subintervalos.

Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

Figura 2. Guía de la tarea de aproximación del área de la superficie bajo un arco de circunferencia

Esto les puede llevar a *inferir* que al aumentar el valor de *n* se obtiene una mejor aproximación del área del cuadrante de círculo y que el error se mantiene por debajo de un valor dado. Esto les conducirá, a su vez, a *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, (concepción dinámica del límite), y a *coordinar* los sistemas de representación numéricos y geométricos. De la cuestión IV se espera que establezcan las *coordinaciones* necesarias para construir la concepción métrica del límite. Por último de la cuestión V se espera que los estudiantes lleguen a *coordinar* las concepciones métrica y dinámica del límite.

Participantes

Los participantes fueron 15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Habían estudiado en 1er curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2º el concepto de derivada que se introdujo usando *applets*.

Recogida y análisis de datos

Los datos son las acciones con los *applets* y las declaraciones orales registrados en archivos digitales (Codes, Sierra y Raboso, 2007), y las hojas de respuesta. Primero se hizo la trascripción de las comunicaciones orales y las acciones realizadas con la escena del *applet*. Se consideró como unidad de análisis cada una de las acciones o declaraciones orales o escritas. Después se codificó cada unidad de análisis teniendo en cuenta, por una parte, las acciones realizadas por los estudiantes: experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender y, por otra, los distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva: proyección, reflexión o anticipación local (Figura 1). Dos investigadores codificaron por separado los momentos y acciones y discutieron las discrepancias. Por último se hizo la descripción de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes a través de los distintos momentos de la fase de participación y de las acciones realizadas, y se agruparon en distintos perfiles en función del momento de la fase de participación en que se encontraban los estudiantes.

RESULTADOS

Hemos identificado tres perfiles de estudiantes que se encuentran en distintos momentos de la fase de participación:

- Los del perfil 1 muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica y de aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones (momento de anticipación local).
- Los del perfil 2 muestran evidencias de construir la aproximación mediante la concepción dinámica y métrica del límite, pero no de conexión entre ambas concepciones (momento de reflexión).
- Los del perfil 3 no dan evidencias de construir una aproximación al área de la superficie bajo una curva como límite de una sucesión (momento de proyección).

Los estudiantes del perfil 3 experimentaron con el *applet* y construyeron algunos registros de experiencia estableciendo algunas relaciones que no les llevaron a hacer inferencias y a establecer las coordinaciones necesarias para construir la aproximación al área. Por ejemplo, hicieron afirmaciones como: *"al aumentar el valor de n las sumas inferiores/superiores van aumentando/disminuyendo cada vez más lentamente"*, constatando así que la sucesión es monótona y no lineal. Pero este registro de experiencia no les llevó a afirmar que si se incrementa el valor de *n* se obtiene una mejor aproximación del área bajo la curva, o a que las sucesiones de sumas inferiores y superiores convergen al mismo valor, por tanto no hemos encontrado evidencias de la concepción dinámica del límite. Una segunda característica es que los estudiantes tuvieron dificultad para entender lo que se les preguntaba cuando se les pedía el valor del área con un error menor que 0,1 (cuestión IV); dieron como respuesta el valor del área para n=100, que es el mayor valor que permitía el deslizador del *applet,* y no intentaron buscar un valor menor de *n*. Por tanto los estudiantes del perfil 3 se encuentran en el momento de *proyección* pues experimentaron e identificaron algunas relaciones, pero no llegaron a hacer inferencias que les llevará a *coordinar* procesos de aproximación.

Los estudiantes del perfil 2 construyeron la concepción dinámica y métrica del límite, pero no mostraron evidencias de que coordinaran entre sí ambas concepciones, pues no llegaron a verbalizar el hecho de que el error disminuye a medida que las sumas superiores/inferiores se aproximan al valor del área. Por ello situamos a estos estudiantes en el momento de *reflexión.*

Evidencias de la concepción dinámica es el uso de expresiones como: *"ésta* [las sumas superiores] *se va acercando desde arriba"*, que pone de relieve la coordinación entre representaciones geométricas (desde arriba) y numéricas (aproximación del valor del área), o "*la suma va aumentando a … cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… el área del cuadrante"* (Tabla 1). La utilización del verbo "acercar" es propio de la concepción dinámica de límite.

Tabla 1. Evidencias de la comprensión dinámica del límite. Protocolo pareja K-MA del perfil 2

II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Lo que hacen con el *applet*	Lo que dicen
Van moviendo el deslizador: n=6, 2, 1, 95, 56 Dejan marcada la casilla de las sumas inferiores	[16] MA: La suma de los... de los rectángulos, cuando más aumenta n se acerca más al área real de este trozo, de… o sea del sector circular.
Obtienen una aproximación con la calculadora del valor del área del cuadrante de círculo ($\pi/4$).	[26] K: Pues eso que la suma va aumentando a… cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante, ¿no?

Una evidencia de la concepción métrica es darse cuenta de que a partir de un valor de *n* se mantiene la aproximación (Tabla 2).

Tabla 2. Evidencias de la comprensión métrica el límite. Protocolo pareja K-MA del perfil 2

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior?

Lo que hacen con el *applet*	Lo que dicen
n=100 Señalan en la pantalla Si=0,790 Ii=0,780 Mueven el deslizador a n=47, n=28, n=30, n=100	[44] MA: Tiene que acercarse a esto [se refieren a 0,78] con menos de una décima de diferencia. [45] K: O sea, más de 0,68 y menos de 0,88,
Mueven el deslizador n=1, 7, 6; Señalan que para n=6: Si=0,849; Ii=0,682 Para n=5 ; Si=0,859, Ii=0,659	[46] K: Pues a partir de n=6 ¿no?

Los estudiantes del perfil 1, además de mostrar evidencias de la concepción dinámica y métrica del límite y de coordinar los significados de ambas concepciones, no necesitaron experimentar con el *applet* cuando se les preguntó por la relación entre la aproximaciones y el error de éstas, lo que sitúa a estos estudiantes en el momento de anticipación local. Un ejemplo de evidencia de la concepción dinámica del límite es la siguiente expresión: *"…su área se aproxima por arriba cada vez más a π/4 […]. O sea de más a menos. Siempre superiormente"*, donde utilizan el verbo "aproximar"; otra evidencia es la constatación de que las dos sucesiones (sumas superiores e inferiores) convergen, pues refiriéndose a las sumas superiores usaron expresiones como: *"pero igualmente se está aproximando a π/4"*, donde entendemos que "igualmente" alude al caso de las sumas inferiores. Una evidencia de la concepción métrica del límite es que, cuando se les pidió el valor de *n* para aproximar el área con un error menor que 0,1 se dieron cuenta de que a partir de un valor de *n* el error seguía siendo menor que 0,1, lo que una pareja expresó diciendo *"le podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor que una décima"*. La tercera característica es la coordinación de las concepciones dinámica y métrica del límite, lo que se puso en evidencia con afirmaciones del tipo: *"las aproximaciones cada vez van aumentando poco a poco… y el error se reduce porque se aproxima cada vez más a la integral"*. La no utilización del recurso tecnológico por parte de los estudiantes para hacer la afirmación anterior se puede interpretar como que apoyaron su reflexión sobre los significados construidos y fueron capaces de *extenderlos*, por ello consideramos que los estudiantes de este perfil se encuentran en el momento de *anticipación local*.

CONCLUSIÓN

Este estudio nos ha permitido identificar tres perfiles de estudiantes relativos a la manera en la que construyen los significados de la aproximación al área de la superficie bajo una curva en un caso particular, donde la función es monótona y los estudiantes conocen el valor del área buscada. Cada uno de estos perfiles está en distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva: proyección, reflexión y anticipación local. Estos resultados nos permiten inferir algunos de los saltos cognitivos que se producen para pasar de un momento a otro.

El primer salto cognitivo se produce del momento de proyección al de reflexión, cuando los estudiantes son capaces, por una parte de *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y una cota del error del área y el número de subintervalos. El siguiente salto cognitivo se produce dentro del momento de reflexión, cuando los estudiantes son capaces de *coordinar* los significados de las dos concepciones del límite, la dinámica y la métrica, constatando la relación entre el aumento del valor de *n*, las aproximaciones y el error de esta aproximación. Camacho, Depool y Socas (2010) han señalado la dificultad de los estudiantes para diferenciar entre el "error de la aproximación" y una "cota del error". El salto del momento de reflexión al de anticipación local se produce cuando los estudiantes son capaces de *extender* las regularidades observadas a nuevas situaciones sin necesidad de experimentar, apoyando su reflexión sobre los significados construidos.

Los logros y dificultades identificados en este ciclo del experimento de enseñanza, nos permitirá diseñar nuevos ciclos de enseñanza. Asimismo es preciso realizar otros estudios en los que se aproxime el área de la superficie bajo una curva en funciones no monótonas o donde no se conozca el valor del área buscada, que permitirán confirmar, matizar o discutir los resultados aquí presentados.

REFERENCIAS

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática, 30*, 67-82.

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (3), 129–158.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 35-67.

Camacho, M., Depool, R. y Socas, M. (2010). La integral de Riemann. Interpretación de los errores de aproximación utilizando CAS. En A. Contreras y L. Ordoñez, *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 62-78). Baeza, España: SEIEM.
Recuperado el 7 de febrero de 2015 de:
http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Codes, M., Sierra, M., y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). Tenerife, España: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu., M. C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229-237). Baeza, España: SEIEM.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. En E. Dubinsky y J.J. Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 31-45). Washington D.C.: MAA.

González, M. T., y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez, *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). Baeza: SEIEM. Recuperado el 7 de febrero de 2015 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

McDonald, M. A., Mathews, D. y Strobel, K. (2000), Understanding sequences: a tale of two objects. En. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 77-102). Providence: American Mathematical Society.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 1-18.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu., M. C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza, España: SEIEM.

Roig, A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (5), 305-329.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 287-304.

¿QUÉ ANOTAN LOS ESTUDIANTES DURANTE UNA PRESENTACIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE? RELACIÓN CON EL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO

What notes are taken by the students during an intuitive presentation of the limit concept? Relationship with the meaning of the concept

Arce, M. y Ortega, T.

Universidad de Valladolid

Resumen

Se presenta un estudio donde hemos analizado las notas que los alumnos toman en sus cuadernos durante la introducción del concepto de límite de una función en cuatro aulas de 1º de Bachillerato. Las exposiciones de los docentes han sido personales y de naturaleza intuitiva. Examinamos qué elementos deciden anotar los alumnos, cómo y qué aspectos del significado del concepto de límite quedan reflejados, usando el marco de Rico y dos descomposiciones genéticas del concepto. Hemos detectado una transcripción mucho mayor de los ejemplos en aulas donde no hay una definición general intuitiva del concepto, así como bastantes anotaciones centradas en una única variable y que sólo inducen un movimiento, sin especificar la aproximación ni la tendencia a ningún valor. Finalizamos con algunas reflexiones sobre la influencia potencial de estas notas en su aprendizaje del concepto.

Palabras clave: *límite de una función, significado, sistemas de representación, anotaciones verbales, bachillerato.*

Abstract

Here we present a study in which we have analyzed the notes taken by the students in their notebooks during the introduction of the concept of limit of a function, in four classrooms of Grade 11. The explanations of the teachers are personal and have an intuitive nature. By using Rico's framework and two genetic decompositions of this concept, we have examined what elements the students have decided to write down and in what way, and what aspects of the meaning of the limit concept have been reflected in. We have detected much more transcription of examples in classrooms in which there has not been an intuitive general definition of the concept. Besides, there are some annotations focusing only in one variable and inducing just a movement, without specifying the approach or the tendency to any value. Finally, we have done some reflections about the potential influence of these notes in the learning of the concept.

Keywords: *limit of a function, meaning, systems of representation, verbal notes, high school students.*

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

El concepto de límite (CL) y los procesos de paso al límite tienen una importancia central en matemáticas. A partir de él se definen números relevantes o se establecen conceptos como los de continuidad, derivada o integral. Sin embargo, a pesar de la amplia presencia de la idea de límite, hasta el S. XIX (Weierstrass) no se contó con una definición ε-δ similar a las usadas hoy en día (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009). Los problemas en la evolución histórica del CL muestran sus dificultades inherentes (Blázquez y Ortega, 2002), también detectadas en alumnos (Cornu, 1991). En 1º de Bachillerato, intentando sortear parte de esas dificultades, tanto el currículo como muchos

Arce, M. y Ortega, T. (2015). ¿Qué anotan los estudiantes durante una presentación intuitiva del concepto de límite? Relación con el significado del concepto. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 133-141). Alicante: SEIEM.

libros de texto y docentes optan por presentar una idea intuitiva del CL de una función, basada en aproximaciones dinámicas de las variables, pasando a tratar técnicas rutinarias de cálculo de límites basadas en la manipulación de expresiones (Claros, Sánchez y Coriat, 2014; Cornu, 1991; Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2013; Lacasta y Wilhelmi, 2010).

Tall y Vinner (1981) distinguen entre el *concepto definición* (conjunto de palabras usadas por un individuo o comunidad para especificar un concepto) y el *concepto imagen* (estructura conceptual que un individuo asocia a un concepto). En el caso del CL, el uso y significado cotidiano de términos como *límite*, *aproximar* o *tender* influye en las concepciones espontáneas que presentan los alumnos (Cornu, 1991). Una presentación intuitiva del CL, basada en descripciones dinámicas de aproximaciones, arbitrarias o subjetivas, y/o el desarrollo de ejemplos donde todo "funciona" hacen que el *concepto imagen* abarque un conjunto muy diverso de imágenes mentales, a veces contradictorias, frente a un *concepto definición* débil y poco operativo; conflicto extendido a conceptos como el de asíntota (Kidron, 2011). Además, los alumnos dan significados muy diversos a los términos clave (Fernández-Plaza et al., 2013) e identifican usualmente aproximar y tender.

La situación anterior se mantiene si la definición formal se introduce sin mostrar su necesidad ni dotarla de significado. Przenioslo (2004) revela la gran diversidad de concepciones sobre el CL de una función en un punto, muchas incompletas o erróneas, en estudiantes universitarios. Blázquez y Ortega (2002) crean una definición del CL que mantiene el rigor de la definición ε-δ, pero evita su excesivo formalismo, y que fue matizada en Blázquez et al. (2009): "El límite de la función f en $x=a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K" (p. 161). Creemos que su uso ayuda a los alumnos a desarrollar una *definición conceptual* del CL más significativa, facilitando el paso de lo que Claros et al. (2014) llaman fenómenos del ámbito intuitivo (conjeturar el valor del límite de función) a los fenómenos del ámbito formal (construcción de entornos para validar la conjetura).

Muchas investigaciones se centran en la comprensión del CL (ver Valls, Pons y Llinares, 2011), pero no hemos hallado estudios sobre las notas que toman los alumnos en una presentación del concepto. Pimm (1990, p. 195), en sus líneas abiertas de investigación sobre la escritura en el aula de matemáticas, plantea lo siguiente: ¿Qué les parece a los alumnos digno de anotar (en un contexto determinado)? Nuestro contexto son varias aulas de 1º de Bachillerato donde el CL se presenta intuitivamente a los alumnos. Los objetivos de esta investigación son:

- Detectar qué elementos son considerados por los alumnos como relevantes en una presentación intuitiva del CL, basándonos en su decisión de registrarlos o no.
- Analizar y clasificar qué anotaciones o marcas relacionadas con el significado del CL son registradas por los alumnos, con especial atención a las anotaciones verbales.
- Reflexionar sobre algunas situaciones detectadas en estos registros que pueden influir en el aprendizaje del CL.

MARCO TEÓRICO

Consideramos las tres componentes del marco de Rico (2012) para analizar los significados del CL reflejados en las anotaciones hechas por los alumnos:

- La *estructura conceptual*, sistema organizado de definiciones del concepto y de relaciones entre ellas, propiedades, proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, compuesta por situaciones, contextos o problemas que están en el origen del concepto y le dotan de sentido.
- Los *sistemas de representación*, definido por los signos y gráficos que hacen presente un concepto matemático y permiten su relación con otros.

Nuestro estudio se centrará tanto en los aspectos de la estructura conceptual que los estudiantes deciden anotar como en los sistemas de representación usados para ello.

Las notas de los alumnos no nos permiten inferir una comprensión real. No obstante, para caracterizar el nivel de desarrollo del CL que pueden reflejar sus anotaciones, utilizaremos las *descomposiciones genéticas* (DG, secuencias hipotéticas que describen el desarrollo de la comprensión, marco APOE, Arnon et al., 2014) obtenidas por Cottrill et al. (1996) y Valls et al. (2011) para el CL, que se comparan en la Tabla 1.

Tabla 1. DG para el CL de una función *f* en un punto *a*

Cottrill et al. (1996)	Valls et al. (2011)
1. Acción de evaluar *f* en un punto	
2. Acción de evaluar *f* en varios puntos que se aproximan a *a* 3. Construcción de esquema de coordinación: a. Proceso en el que *x* se aproxima a *a* b. Proceso en el que *y* se aproxima a *L* c. Coordinación de a y b vía *f*	2. Idea de aproximación en dominio y rango: a. *x* se aproxima a *a* b. *f(x)* se aproxima a *L* 3. Coordinación en la concepción dinámica vía *f*: cuando *x* se aproxima a *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L*
4. Encapsulación de 3.: objeto límite 5. Reconstrucción de 3c en términos de intervalos y desigualdades	4. Coordinación en la concepción métrica: encontrar en cada caso un x *suficientemente cerca de a* tal que el valor de f(x) sea *lo suficientemente próximo a L*
6. Cuantificación de 5.: obtención de definición ε-δ 7. Aplicación de la definición ε-δ	5. Consciencia sobre la existencia del límite L: escritura simbólica

La sucesión 1, 1'9, 1'99, 1'999,… se aproxima a 3; pero no tiende a 3. La diferenciación entre aproximación y tendencia es clave: en la tendencia se mejora cualquier aproximación fijada (Blázquez y Ortega, 2002). Las dos propuestas utilizan el término "aproximaciones" en la concepción dinámica. Sólo Valls et al. (2011) parecen aludir a tendencias en el punto 4.

CONTEXTO Y MÉTODO

En esta investigación participan cuatro aulas de 1º de Bachillerato, en Valladolid, elegidas por disposición. Dos pertenecen a un centro privado-concertado (una de Ciencias y otra de Sociales), con un mismo docente de matemáticas, que llamaremos DOC1. Las otras dos son de un instituto público: una de Ciencias, con un profesor[i] DOC2, y otra de Sociales, con un docente DOC3. El número de alumnos por aula es bajo, participando todos los que siguen la asignatura. Nos referiremos a cada estudiante con una "E" seguida de un número: de E1 a E10 son los del aula de Ciencias del DOC1, de E11 a E21 los del aula de Sociales del mismo docente, de E22 a E30 los del aula del DOC2 y de E31 a E37 los del DOC3.

Introducción del CL en las cuatro aulas

El equipo investigador no dio directrices a los profesores sobre cómo desarrollar su docencia. Los tres introdujeron el CL de una función a través de una presentación expositiva personal (no basada en el libro de texto), de tipo intuitivo y combinando el discurso oral con la pizarra de tiza.

La presentación del DOC1 fue similar en sus dos aulas. El docente partió de la representación gráfica (RG) de una función y presentó el CL desarrollando seis ejemplos de límites en ella, explicando la notación simbólica y el resultado obtenido. La estructura y los "modelos" de ejemplos fueron iguales en ambas aulas (marcado carácter *ostensivo*, Lacasta y Wilhelmi, 2010). La introducción de límites en el infinito por DOC3 fue similar: siete ejemplos, pero con una RG diferente en cada uno, añadiendo la idea del límite infinito cuando se puede superar cualquier cota.

Para el CL en un punto hizo dos ejemplos en funciones dadas algebraicamente, explicó su cálculo y lo completó con su RG. Sólo el DOC2 introdujo una definición intuitiva del CL: "A lo que tienden las imágenes de la función, f(x), cuando la variable independiente, x, tiende a algo", definiendo "tender" como "estar cada vez más cerca de" (confusión entre aproximación monótona y tendencia). Tras esto, explicó con detalle la notación simbólica asociada a los límites en un punto y en el infinito, y realizó cuatro ejemplos en funciones algebraicas, añadiendo la RG en dos de ellos.

Ningún docente usó funciones definidas numéricamente para introducir el CL ni fenomenología que le dote de sentido. El resto del tema se dedicó a un cálculo de límites sin referencia al significado del CL.

Análisis de los datos

Los datos principales son los cuadernos de los alumnos con las notas tomadas durante la presentación del CL, apoyados por información contextual: diarios de clase creados por los docentes (a petición nuestra), notas de campo y entrevistas a varios alumnos sobre su uso del cuaderno.

Sobre las anotaciones registradas por cada estudiante se ha desarrollado un *análisis de contenido* descriptivo-interpretativo (Cohen, Manion y Morrison, 2011), basado en las herramientas del marco teórico. Se ha dividido cada registro en *partes* de la presentación: cada ejemplo, definiciones generales del CL o explicaciones de la notación. Ilustramos este análisis a través de un fragmento del registro de E10 (ver Figura 1), con tres ejemplos de la presentación del DOC1.

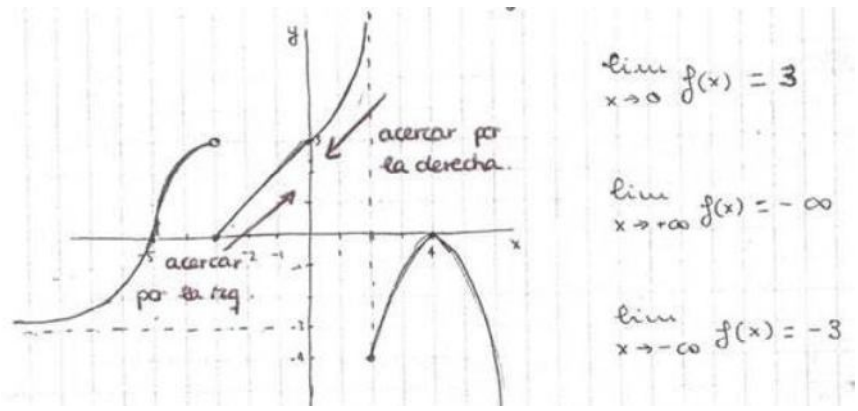


Figura 1. Registro de tres *partes* de la presentación (tres ejemplos) (E10)

Primero hemos estudiado qué *partes* deciden registrar y con qué sistemas de representación. Aquí, E10 toma la RG de la función, que es común a todos los ejemplos, la representación simbólica de los tres límites y sólo anota signos verbales en un límite ($x \to 0$).

Después analizamos qué aspectos de la estructura conceptual del CL quedan registrados en las notas del alumno, con la ayuda de las DG de la Tabla 1. En el caso de E10, no hay anotaciones relacionadas con la estructura conceptual en los límites cuando $x \to \pm\infty$, tan sólo la notación simbólica del CL y una marca en la RG sobre la existencia de asíntota en un caso. Sí las hay en el límite cuando $x \to 0$. Sus anotaciones verbales ("acercar por la izquierda/derecha") muestran un proceso dinámico (PD) de aproximación en la x (3a. en DG de Cottrill et al., 1996), aunque sin especificar a qué valor ni mencionar a la variable dependiente (VD). Éstas se complementan con dos flechas en la RG que pudieran indicar una aproximación recorriendo la propia gráfica, sin explicitar la aproximación en cada variable ni su coordinación.

RESULTADOS

Partes de la presentación registradas y sistemas de representación

La Tabla 2 muestra el número de *partes* anotadas por alumno de la presentación de cada docente y el sistema de representación utilizado. En la primera fila se indica el total por docente.

Tabla 2. Número de *partes* (P) anotadas por estudiante (Est) y sistemas de representación: verbal (RV), simbólico (RS) o gráfico (RG)

Aula DOC1 Cie (6P: 6RV, 6RS, 1RG)		**Aula DOC1 Soc** (6P: 6RV, 6RS, 1RG)		**Aula DOC2 Cie** (7P: 7RV, 7RS, 2RG)		**Aula DOC3 Soc** (9P: 9RV, 9RS, 9RG)	
Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)	Est	P (RV/RS/RG)
E1	6P (1 / 6 / 1)	E11	6P (1 / 6 / 1)	E22	1P (1 / 1 / 0)	E31	8P (0 / 8 / 6)
E2	6P (1 / 6 / 1)	E12	6P (4 / 6 / 1)	E23	0P	E32	0P
E3	6P (5 / 6 / 1)	E13	6P (6 / 6 / 1)	E24	6P (2 / 6 / 1)	E33	9P (2 / 8 / 9)
E4	6P (0 / 6 / 1)	E14	6P (4 / 6 / 1)	E25	3P (2 / 3 / 0)	E34	9P (1 / 8 / 9)
E5	6P (4 / 6 / 1)	E15	6P (1 / 6 / 0)	E26	7P (2 / 7 / 0)	E35	8P (0 / 8 / 7)
E6	6P (4 / 6 / 1)	E16	5P (4 / 5 / 1)	E27	5P (2 / 5 / 0)	E36	5P (1 / 5 / 3)
E7	6P (0 / 6 / 1)	E17	6P (0 / 6 / 1)	E28	0P	E37	9P (1 / 8 / 9)
E8	6P (5 / 6 / 1)	E18	6P (0 / 6 / 0)	E29	1P (1 / 1 / 0)		
E9	0P	E19	6P (2 / 6 / 1)	E30	5P (3 / 5 / 1)		
E10	6P (2 / 6 / 1)	E20	6P (0 / 6 / 1)				
		E21	6P (0 / 6 / 1)				
Tot	54P (22/54/9)	Tot	65P (22/65/9)	Tot	28P (13/28/2)	Tot	48P (5/45/43)

Cuatro alumnos no anotaron nada. De ellos, E23 indica en una entrevista su preferencia por estudiar la teoría a través del libro de texto (aunque difiera de la presentación del docente), lo que explica la ausencia.

En las tres aulas donde la introducción del CL se hizo sólo con ejemplos particulares (DOC3 y las dos del DOC1), la transcripción de estos ejemplos por los alumnos fue mucho mayor (media del 88’4%) que en el aula del DOC2 (33’3%), donde los ejemplos ilustraban la “definición” intuitiva previa. Así, cuando la presentación se basó exclusivamente en ejemplos “modelo” los alumnos han mostrado mayor necesidad de anotarlos todos. Los alumnos del DOC2 se comportan al revés: E22 y E29 sólo anotan la definición intuitiva del CL, E27 no la escribe pero recoge tres de los cuatro ejemplos.

El papel de las RG provoca diferencias en su registro. Éste es mucho mayor en funciones definidas gráficamente, al ser requisito indispensable para poder dotar de significado las notas tomadas (sólo E15 y E18 transcriben límites sin graficar la función, lo que les imposibilita esa dotación). Sin embargo, hay menos transcripciones cuando la función se presenta algebraicamente y la RG es un complemento (caso del DOC2), que parece no ser valorado por muchos alumnos.

Con respecto a las representaciones verbales, en el aula del DOC3 son muy reducidas y la mayoría se limitan a indicar que no existe el límite en $+\infty$ en una función oscilante. En las aulas del DOC1 existe un alto contraste entre alumnos sobre la cantidad de notas tomadas. Las notas verbales de los alumnos del DOC2 se centran en la definición intuitiva de CL y en los límites laterales en un punto.

Dos hechos destacables más: Sólo tres alumnos del DOC3 registran el ejemplo de límite que no existe en $+\infty$ (función oscilante), lo que manifiesta cierta resistencia en los alumnos a aceptar esta situación (anómala para ellos). Otro alumno, E36, registra los límites en $+\infty$ pero no en $-\infty$, lo que pudiera reflejar un comportamiento selectivo al transcribir los ejemplos (Arce, Conejo y Ortega, 2014).

Aspectos de la estructura conceptual del CL reflejados en las notas de los alumnos

Por motivos de espacio, del análisis sobre qué aspectos de la estructura conceptual del CL han reflejado los alumnos en sus registros, sólo detallamos los resultados para las anotaciones verbales. Hemos detectado cinco tipos de anotaciones que reflejan progresivamente un significado más cercano al CL, y un grupo adicional con otras anotaciones.

- Anotaciones que indican el *nombre* de elementos o *cómo se lee* una notación (ver Figura 2), pero sin mencionar su significado.

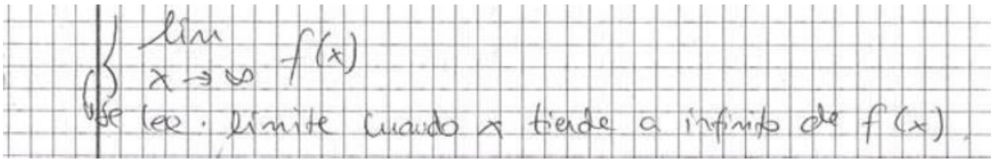


Figura 2. Nota con lectura de notación (E16)

- Anotaciones de *hechos concretos* o *convenios* sobre el límite sin explicar ni justificar. Ejemplo 1: la mera escritura de la no existencia de un límite (Figura 3). Ejemplo 2: "Un límite existe cuando es un número", de E27, un convenio introducido por su docente.

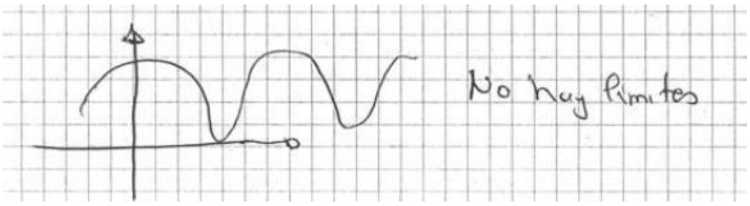


Figura 3. Indicación verbal, sin justificar, de la no existencia de límite en $+\infty$ (E37)

- Anotaciones que aluden a un *PD tan sólo en la* x (3a. en DG de Cottrill et al., 1996; 2a. en Valls et al., 2011), sin referencias ni a la imagen ni a la VD. Algunas, de forma más o menos explícita, sólo reflejan un movimiento monótono en los valores de x (Figuras 4 y 1, aquí ligado a las flechas en la RG), otras sí que precisan a qué valor concreto "se acerca" (Figura 5).

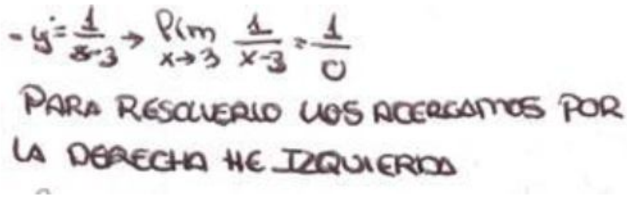


Figura 4. Anotación dinámica en "x" sin indicar a dónde "se acerca" (E27)

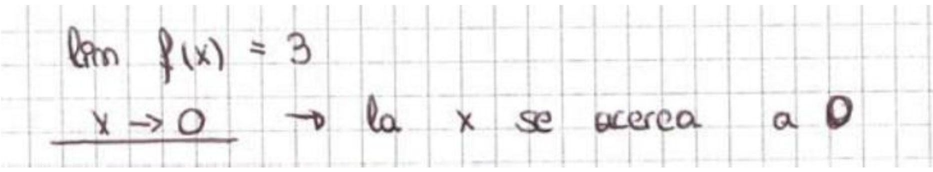


Figura 5. Anotación dinámica en "x" indicando dónde "se acerca" (E5)

- Anotaciones que aluden a un *PD tan sólo en la VD*, sin referencias a la variable independiente (3b. en DG de Cottrill et al., 1996; 2b. en Valls et al., 2011). Se detecta la misma diferencia que en el caso anterior. Destaca la nota de E33, que refleja la superación de cualquier cota en un límite infinito (más cercano al concepto de tendencia), pero sin mencionar los valores de x (Figura 6).

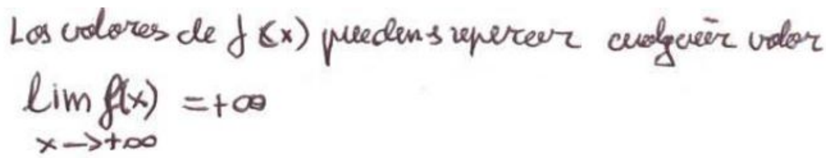

Los valores de f(x) pueden superar cualquier valor
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Figura 6. Idea registrada de superación de cualquier cota (E33)

- Anotaciones que aluden a un *PD en ambas variables*, mostrando incipientes coordinaciones entre variables (3c. en DG de Cottrill et al., 1996; 3. en Valls et al., 2011). Incluimos aquí las transcripciones de la definición intuitiva del CL de seis alumnos del DOC2, enfatizando los términos clave (subrayado, Figura 7). Sólo cuatro alumnos más han escrito notas verbales con este significado, aunque poco precisas, sin explicitar claramente las variables o a qué valor se "acercan". Dos ejemplos, en límites en $+\infty$, son: "Estas imágenes son cada vez más grandes según avanzas la x" (E16) o "Cuanto mayor es la x, más baja" (E6).

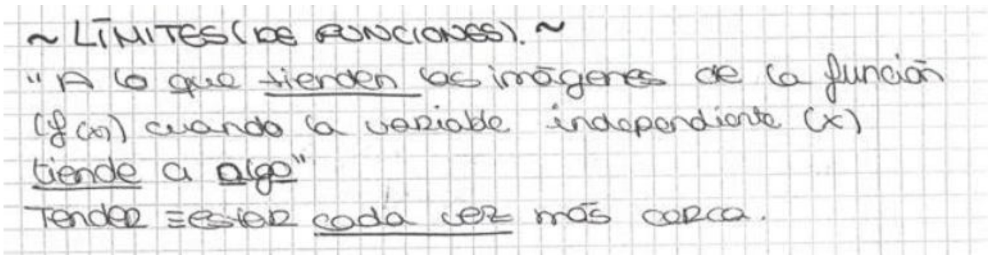

~ LÍMITES (DE FUNCIONES). ~
"A lo que tienden las imágenes de la función (f(x)) cuando la variable independiente (x) tiende a algo"
TENDER = ESTAR cada vez más cerca.

Figura 7. Transcripción de definición intuitiva del CL (E26)

- *Otras anotaciones* relacionadas con el significado del CL, como las que explican la no existencia de límite en un punto si no coinciden los límites laterales (alguna con justificación errónea, como la de E19: "No existe porque recorre dos funciones"). También hay una anotación importante de E16, aunque poco clara, que pretende indicar la no relación entre el límite y el valor de la función en un punto (Figura 8).

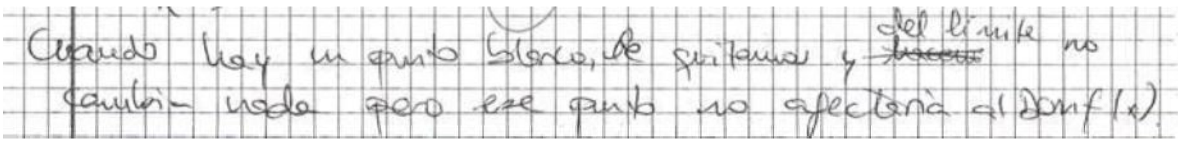

Cuando hay un punto blanco, de saltarlo y del límite no cambia nada pero ese punto no afectaría al Dom f(x)

Figura 8. Nota sobre la no influencia en el límite del valor de la función en el punto (E16)

Hay alguna nota verbal aislada más, con características concretas de ejemplos (como la existencia de un comportamiento asintótico) o aclaraciones personales.

El uso de la representación simbólica se reduce al registro de la notación del límite o de algún cálculo analítico en ejemplos, sin marcas que muestren aspectos de la estructura conceptual del CL. En las RG sí que existen algunas marcas, que podemos clasificar en: marcas que destacan elementos de la gráfica (punto donde se calcula el límite y/o sus coordenadas), trazado de asíntotas horizontales o verticales (si ha lugar, ver Figura 1) y flechas en la RG que inducen un "sentido de recorrido" (Figura 1). La RG que muestra más aspectos relacionados con la estructura conceptual del CL es la tomada por E37 en el $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (Figura 9). En ella, el alumno sitúa una cota "K" en el eje de ordenadas y marca su superación por la función: punto con imagen mayor y sus coordenadas. La RG deja entrever el significado de tendencia y una concepción métrica del CL, pero no se acompaña de anotaciones verbales o simbólicas.

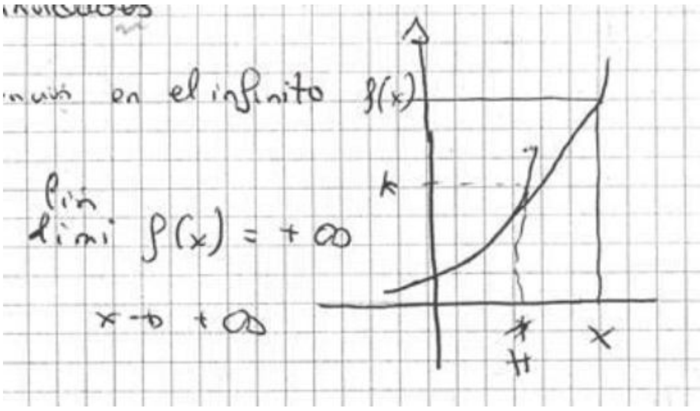


Figura 9. RG que refleja la superación de una cota (E37)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sobre el primer objetivo, hemos detectado un porcentaje de transcripción de los ejemplos mucho mayor en las tres aulas con presentación *ostensiva* del CL, basada en el desarrollo de ejemplos "modelo" y sin definición general; frente al aula del DOC2, que comenzó enunciando una definición intuitiva. Los alumnos parecen juzgar como muy relevantes los ejemplos en la primera situación, lo que atribuimos a una mayor necesidad de fortalecer su *concepto imagen* del CL, con ejemplos que abarquen diferentes situaciones, ante la ausencia de un *concepto definición*.

La importancia y relevancia de las anotaciones verbales parece diferir mucho de unos alumnos a otros, puesto que hay muchas diferencias entre ellas. Este tipo de notas son las que, principalmente, han mostrado aspectos relacionados con la estructura conceptual del CL (segundo objetivo), frente a representaciones de otro tipo. El análisis y clasificación en diferentes niveles de las notas verbales registradas ha permitido detectar un hecho no presente en las DG tomadas como referencia: la existencia de anotaciones que manifiestan tan sólo un movimiento en una o en las dos variables, pero sin explicitar el valor de aproximación (mayor énfasis en el proceso, algo ya detectado por Kidron, 2011). Además, bastantes anotaciones verbales sólo aluden al proceso dinámico de aproximación en una de las dos variables. Muy pocas coordinan ambos procesos de aproximación. La ausencia de representaciones numéricas de funciones al introducir el CL en las cuatro aulas puede justificar este hecho, al ser éstas facilitadoras de la relación entre las dos variables y la coordinación de las aproximaciones (Valls et al., 2011).

Sobre el tercer objetivo, la falta de anotaciones sobre el doble proceso de aproximación en dominio y rango, y su coordinación, puede provocar un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica del CL, que dificulte el desarrollo de aprendizajes posteriores, como el paso a la concepción métrica (Cottrill et al., 1996) y la necesidad de ésta. Como muestra, sólo el DOC3 ha presentado la idea de superación de cualquier cota en el eje de ordenadas en un límite infinito, aspecto que únicamente es tomado por dos alumnos (E33 y E37).

El análisis de las notas de los alumnos no nos da información suficiente sobre su comprensión del CL, pero sí pueden revelar errores de comprensión (como la anterior nota verbal de E19). No obstante, sus decisiones sobre qué aspectos registrar (o no) nos permiten conjeturar qué idea del CL están plasmando y pueden inferir los alumnos de sus notas. Por ejemplo, la tercera parte de los alumnos no han considerado relevante registrar ningún aspecto asociado a la estructura conceptual del CL, pero sí que han enfatizado el cálculo del límite en funciones expresadas algebraicamente o el punto donde se calcula el límite o sus coordenadas en las RG. La combinación de ambas circunstancias puede suponer un obstáculo para el aprendizaje del CL. Registros tan escuetos sólo permitirían inducir una idea muy simple, aunque errónea y frecuente (Przenioslo, 2004), del CL: la combinación de la acción de sustituir la función en el punto (si existe) con la de recorrer la gráfica para obtener el límite cuando dicho valor no existe o hay un salto.

Todos estos hechos son de especial importancia en un contexto como el aquí presentado, donde los alumnos señalan el cuaderno y sus notas como su principal instrumento de estudio, argumentando que contiene "lo que más se acerca a lo que el profesor quiere". Así, la responsabilidad del alumno al tomar notas es alta. Las diferencias evidenciadas en el registro de anotaciones relacionadas con el significado del CL en una presentación intuitiva y su nivel de desarrollo pueden condicionar fuertemente el *concepto imagen* que de él desarrolla el alumno.

Agradecimiento

El primer autor es becario FPU (AP2012-2241, MECD).

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de Bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30*, 67-82.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic. D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710.

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(6), 1261-1279.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, *1*(1), 39-63.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

---

[i] No se considera la variable género: uso genérico del masculino.

LAS PROGRESIONES COMO INDICADOR DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ALUMNOS DE SEGUNDO CICLO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Progressions as an indicator of understanding of numerical sequence concept in secondary school students

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G., Gavilán Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla.

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que aborda la compresión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de secundaria. La perspectiva proporcionada por la obra de Piaget y García en relación con el desarrollo de un esquema a través de varios niveles (intra, inter y trans), nos proporciona la prueba empírica de cómo el uso de las progresiones por parte de los estudiantes en la resolución de una tarea, proporciona información del desarrollo de la comprensión. Este uso nos permite profundizar sobre los niveles en el desarrollo del concepto sucesión numérica.

Palabras clave: *Estudiantes de Secundaria, Esquema, Sucesiones Numéricas, Progresiones.*

Abstract

The present paper is part of research that addresses the understanding of the concept of numerical sequence by secondary school students. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a scheme through several levels (intra, inter and trans) provides empirical evidence of how students' use of the progressions when solving a task provides information of the development of understanding. This use allows us to deepen on the stages in the development of numerical sequence concept.

Keywords: *Secondary School Students, Scheme, Numerical Sequences, Progressions.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática. Camacho (2011) resalta la relevancia en esta problemática de las investigaciones sobre conceptos de análisis matemático. En este campo, el análisis de la comprensión del concepto de sucesión ha sido abordado por diferentes investigadores desde diferentes perspectivas teóricas (Cañadas, 2007; González, Medina, Vilanova y Astiz, 2011; McDonald, David, y Strobel, 2000; Przenioslo, 2006). McDonald et al. (2000) encontraron que los estudiantes construían dos objetos cognitivos diferentes en relación con el concepto de sucesión. Por una parte, un objeto como listado de números que denominaba *Seqlist* y por otra parte, otro objeto como función cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales, que llamó *Seqfun*. McDonald et al. (2000) y Mamona (1990) consideran que la mayoría de estudiantes de secundaria comprenden el concepto de sucesión como lista numérica, como un proceso más que como un objeto.

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). Alicante: SEIEM.

Przenioslo (2006) también ha identificado, esencialmente, dos formas de concebir las sucesiones en estudiantes. Sucesiones como lista numérica en estudiantes de secundaria (16-18 años) y sucesiones como función en estudiantes de enseñanza no obligatoria (18-19 años). Además para Przenioslo el concepto de sucesión numérica requiere el manejo del mismo en diferentes modos de representación. Para esta autora la concepción como lista numérica del concepto de sucesión es especialmente interesante por la diversidad de concepciones identificadas en su investigación.

Sierpinska (1990) identificó diferentes concepciones sobre las sucesiones numéricas. Consideró por una parte una concepción de sucesión numérica como lista que se vincula con la existencia de una fórmula que permite obtener los términos, y por otra parte una concepción de sucesión como una lista larga de números (una secuencia infinita). Por otro lado, Mor, Noss, Hoyles, Kahn y Simpson (2006) observaron que las intuiciones de los estudiantes en relación a las secuencias numéricas son intuitivamente recursivas (es decir, entre valores sucesivos de la secuencia, más que como una relación entre los valores y su posición).

En este trabajo nos centramos en caracterizar la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en alumnos de segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), en concreto, en determinar el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica) en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

MARCO TEÓRICO

Una manera de caracterizar la construcción de la comprensión de un concepto matemático es a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Arnon, et al., 2014; Dubinsky, 1991). Estos autores señalan que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones percibidas de problemas matemáticos por medio de la reflexión sobre los problemas y sus soluciones a través de la (re-)construcción de acciones matemáticas, procesos y objetos y de la organización de éstos en esquemas usados al tratar con las situaciones. En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1983) permite abordar la cuestión de caracterizar la comprensión de conceptos matemáticos (Ariza y Llinares, 2009; Vals, Pons y Llinares, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008).

Desde esta perspectiva, un esquema puede considerarse “la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas” (Piaget e Inhelder, 1978, pp. 20). Un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado “abstracción reflexiva” (Piaget y García, 1983, pp. 10). Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) caracterizan los niveles del desarrollo de un esquema a través de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que llegan a establecer entre ellos cuando los estudiantes resuelven una tarea:

INTRA: no se establecen relaciones lógicas, y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizaran con errores. Los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).

INTER: los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica y relacionando sólo elementos matemáticos que se encuentren en el mismo modo de representación. El estudiante es capaz de usar más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.

TRANS: aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, implicaciones: directa, inversa, recíproca, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre diferentes elementos matemáticos. En este nivel se produce la síntesis de los modos de representación que lleva a la construcción de la estructura matemática. La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información en distintos modos de representación. Es decir, usar información procedente de varios sistemas de representación para considerarla conjuntamente y obtener una información que no se conocía. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica para tomar una decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra.

Las investigaciones llevadas a cabo sobre el concepto de sucesión numérica, citadas en la introducción de este trabajo, nos han permitido disponer de información sobre determinadas características de la comprensión de dicho concepto en los estudiantes de secundaria. Por ello nos hemos planteado como objetivo en este trabajo determinar el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica) en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes en esta investigación son 75 estudiantes de segundo ciclo de ESO (14-16 años). A dichos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica según figura en el currículo oficial (BOE, 2007; BOJA 2007). Para nuestra investigación no es relevante la manera de introducir el concepto en los estudiantes, por lo que se les pasó el cuestionario a distintos grupos de clase y con profesores diferentes. Es en este ciclo de ESO donde aparece por primera vez este concepto en el currículo, motivo por el cual se enmarca este trabajo en este nivel educativo.

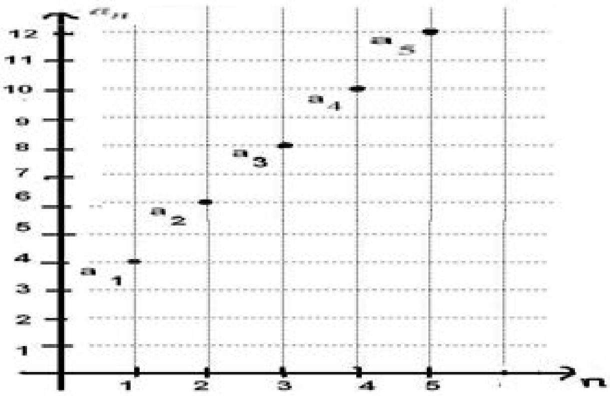
Instrumentos de recogida de datos

A partir del análisis de libros de texto de diferentes niveles educativos (ESO, Bachillerato y Universidad), y de diferentes investigaciones sobre el concepto de sucesión numérica, identificamos los distintos elementos matemáticos que constituyen dicho concepto y dispusimos de una batería de tareas para realizar la investigación. Tras un análisis (Sánchez-Matamoros, 2004) se seleccionaron, ocho tareas, y se diseñó el cuestionario. Para el objetivo de este trabajo se escogieron las dos tareas que se describen más adelante. Este cuestionario fue contestado por los estudiantes en su horario de clase. Posteriormente se revisaron las respuestas dadas y elaboramos un segundo cuestionario personalizado, con el fin de indagar en aquellas respuestas que o no habían sido respondidas completamente o no estaban lo suficientemente justificadas. Para responder a este segundo cuestionario, los estudiantes tenían a su disposición el primer cuestionario contestado. Este segundo cuestionario fue respondido en horario de clase, un par de semanas después de la realización del primero.

A continuación describimos dos de las tareas del primer cuestionario, en las que nos centramos en este trabajo (figura 1), ya que permiten mostrar el papel que desempeñan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas vinculados a las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica. La tarea 1, dada en modo gráfico, es similar a la utilizada por González et al. (2011). La tarea 2, dada en modos numérico y algebraico es similar al problema 1 de la investigación de Przenioslo (2006), en la que hemos suprimido aquellos apartados relacionados con las sucesiones como funciones.

TAREA 1

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:



a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, a(2)? , ¿Y el cuarto a(4)? ¿Y el sexto a(6)?

b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas

TAREA 2

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

a) $a(n)=\dfrac{1}{5-n}$ b) $a(n)=\dfrac{1}{n^2+1}$ c) $a(n)=\sqrt{1-n}$

d) $a(n)=3n-2$ *e*) $a_1=1, a_2=3$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ f) 16, 8, 4, 2, 1,...

Figura 1. Tareas 1 y 2 del cuestionario

La resolución de ambas tareas conlleva el uso de los elementos matemáticos que aparecen en la figura 2, vinculados a los diferentes modos de representación (numérico, gráfico y algebraico).

ELEMENTOS DE SUCESIONES.

E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.
E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
E3 Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por "a_n" (con n perteneciente a los naturales)
E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
E5 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.
E6 Sucesión Recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.

Figura 2. Elementos matemáticos vinculados a las tareas 1 y 2 del cuestionario

Procedimiento de análisis

El análisis llevado a cabo por el grupo de investigadores se centró en identificar los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se ponían de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas. Los resultados que presentamos en este trabajo proceden del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestados por cada uno de los estudiantes. A continuación mostramos cómo hemos realizado este procedimiento a través de un ejemplo.

El estudiante 3b13 en la resolución del apartado b) de la tarea 2 (figura 1) en el primer cuestionario consideraba que a_n no era sucesión porque establecía una relación de equivalencia entre sucesión numérica y progresión (E1, E4 y E5), poniéndose de manifiesto un uso incorrecto de la implicación recíproca (no progresión implica no sucesión), como puede verse en la figura 3. Se pone de manifiesto cuando el estudiante 3b13 escribe que "*no sería una sucesión… no se van sumando, multiplicando, restando o dividiendo por un número fijo*", esta afirmación que hace el estudiante pone de manifiesto que identifica sucesión con progresión, ya que es en este tipo de sucesiones donde el término general se obtiene de la forma que indica el estudiante.

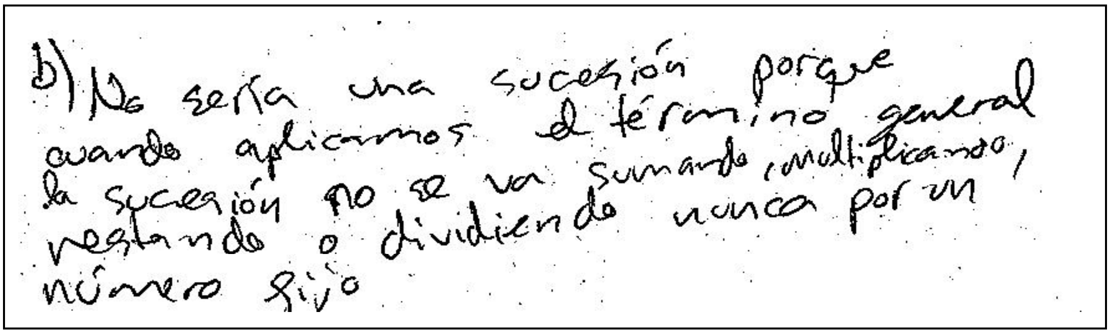
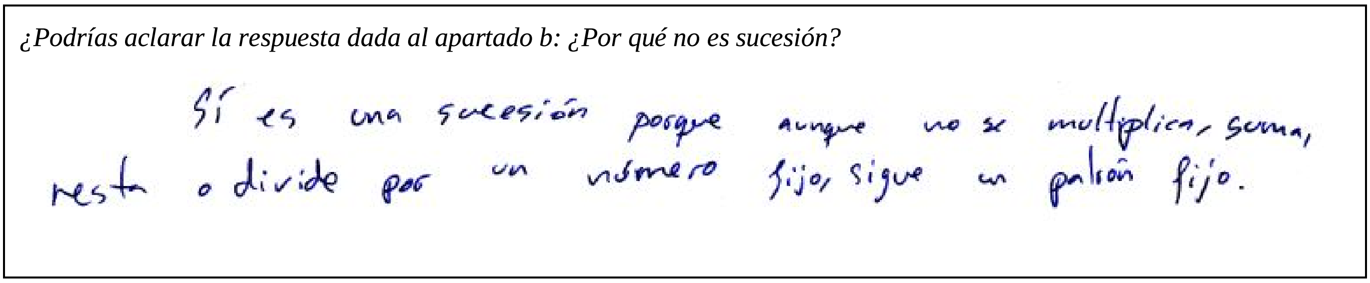

b) No sería una sucesión porque cuando aplicamos el término general la sucesión no se va sumando, multiplicando, restando o dividiendo nunca por un número fijo

Figura 3. Respuesta del estudiante 3b13 al apartado b de la tarea 2 del primer cuestionario

Sin embargo, cuando le preguntamos por ello en el segundo cuestionario reflexiona y hace uso del término general (E3) que le proporciona el enunciado para responder de forma correcta en el sentido de que a pesar de no ser una progresión (ni aritmética, ni geométrica, "*no se multiplique, sume, reste o divida por un número fijo*"*),* si es una sucesión numérica porque *"sigue un patrón fijo"* (refiriéndose al término general de la sucesión proporcionado en el enunciado) (figura 4). Con esta afirmación por parte del estudiante se pone de manifiesto el uso correcto de que existen sucesiones que no son progresiones, es decir, no hace uso incorrecto de la implicación recíproca.


¿Podrías aclarar la respuesta dada al apartado b: ¿Por qué no es sucesión?

Sí es una sucesión porque aunque no se multiplica, suma, resta o divide por un número fijo, sigue un patrón fijo.

Figura 4. Respuesta del estudiante 3b13 al apartado b de la tarea 2 del segundo cuestionario

Del análisis conjunto de los dos cuestionarios podemos concluir que el estudiante 3b13 hace uso correcto de los elementos matemáticos relacionados con las progresiones y término general de una sucesión y de la relación que se establece entre progresiones y sucesiones.

RESULTADOS

La forma en la que los estudiantes hacen uso de los elementos matemáticos vinculados a las progresiones cuando resuelven las tareas, la hemos considerado un indicador del nivel de comprensión del concepto de sucesión numérica y de la manera en la que los estudiantes reorganizan y reconstruyen el conocimiento para formar nuevas estructuras.

Esta sección de resultados la hemos organizado en dos apartados, un primer apartado en el que mostramos el trabajo de un estudiante que hace un uso incorrecto de las relaciones entre progresión y sucesión numérica cuando resuelve las tareas 1 y 2 (figura 1). Y un segundo apartado en el que mostramos el trabajo de otro estudiante que hace uso correcto de dichas relaciones. Estas evidencias ponen de manifiesto como el uso de los elementos matemáticos y las relaciones vinculadas a las progresiones son un indicador del nivel de comprensión del estudiante sobre el concepto de sucesión numérica.

Uso incorrecto de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas

El estudiante 3b2, en los apartados a) y b) de la tarea 1 del primer cuestionario para resolver la tarea se traslada del modo de representación gráfico al modo algebraico. A partir de los términos a_1 y a_2 calcula la diferencia y obtiene el término general de la progresión aritmética y sustituyendo calcula a_6 (figura 5) (E2, E3 y E4).

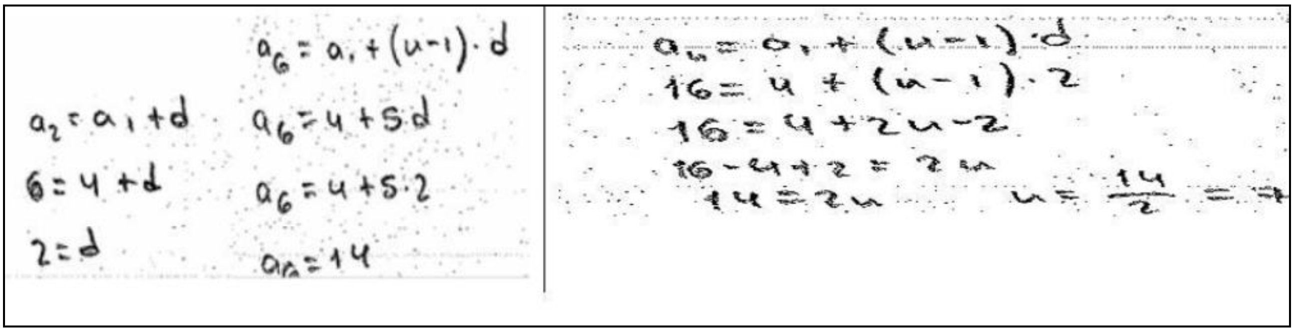


Figura 5. Respuesta del estudiante 3b2 de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante ha hecho uso correcto de los elementos matemáticos progresión aritmética (E4) y término general (E3) para resolver los apartados anteriores.

Para responder al apartado b) donde se le pregunta si algún término vale 16 o 13, hace uso correcto del término general de la progresión aritmética obteniendo el lugar que ocupa el término 16 (figura 5) y que no existe ningún término cuyo valor sea 13 (E2 y E3).

> 3b2: El término séptimo vale 16. No hay ningún término que valga 13 ya que la sucesión es de números pares.

Este mismo estudiante, en el apartado b) de la tarea 2 en el primer cuestionario, hace uso correcto del elemento matemático término general de una sucesión (E3) para hallar los tres primeros términos a través de la expresión algebraica. Pero no identifica que es una sucesión (E1), ya que establece una relación de equivalencia entre sucesión numérica y progresión.

> 3b2: No es una sucesión ya que la razón de la progresión o la diferencia según sea una PA (progresión aritmética) o una PG (progresión geométrica) no es la misma ya que cambia al hallar el siguiente término.

Para indagar sobre esta respuesta nos apoyamos en el segundo cuestionario, donde le pedimos que nos aclare dicha respuesta, en relación a que significa razón o diferencia:

> Pregunta: ¿Qué significa que no encuentras la razón o la diferencia en el apartado b)?

> 3b2: Como del primero al segundo la diferencia es 0,3 y del segundo al tercero es 0,1, la diferencia cambia por lo que no hay ninguna razón o diferencia que cumpla esa progresión.

Por la forma de responder 3b2, se infiere que no establece de forma correcta las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a sucesiones y progresiones, ya que identifica las sucesiones con las progresiones, es decir, para este estudiante no existen sucesiones que no sean progresiones.

El estudiante 3b2 por la forma en que responde a las tareas 1 y 2 nos indica que si la demanda de la tarea sólo exige el uso de elementos matemáticos y relaciones vinculados a progresiones, es capaz de resolver de forma correcta la tarea poniendo de manifiesto además del uso correcto de elementos matemáticos y relaciones lógicas, la traslación entre los diferentes modos de representación. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando la tarea requiere el uso de elementos matemáticos vinculados a sucesiones numéricas que no son progresiones, ya que identifica las progresiones con las sucesiones, no considerando que existan sucesiones que no sean progresiones, es decir, no es capaz de reorganizar ni reconstruir el conocimiento vinculado a las sucesiones.

Uso correcto de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas

El estudiante 3b14, en los apartados a) y b) de la tarea 1 del primer cuestionario, para resolver de forma correcta la tarea hace uso de los elementos matemáticos en el modo de representación gráfico identificando los puntos (1, 4), (2, 6) y en general (n, a_n) para encontrar los términos de la sucesión (E2, E3), respondiendo en el apartado a) a_2=6,… y en el apartado b) pone de manifiesto que identifica la sucesión del enunciado como una progresión aritmética de diferencia 2 (E4) (figura 6), de lo que se puede inferir que este estudiante considera que las progresiones son un tipo de sucesiones numéricas.

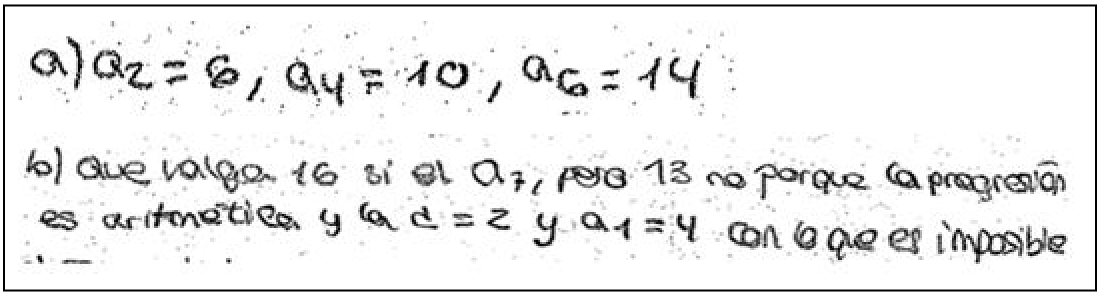


Figura *6*. Respuesta del estudiante 3b14 de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante 3b14, en el apartado b) de la tarea 2 del primer cuestionario, hace uso correcto de los elementos matemáticos de progresión y sucesión numérica (E1 y E4) y de la relación entre ellos. Para ello ha obtenido los ocho primeros términos de la sucesión (E1, E2 y E3) (figura 7).

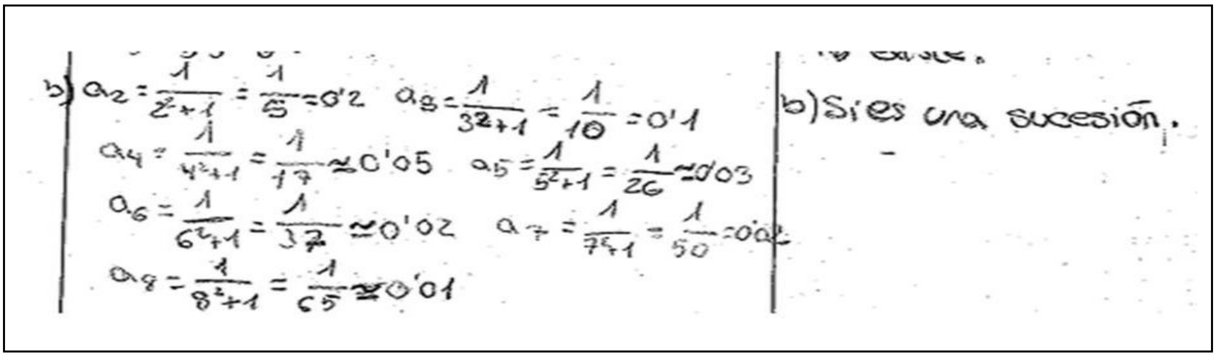


Figura 7. Respuesta del estudiante 3b14 al apartado b) de la tarea 2 del primer cuestionario

De las respuestas se puede inferir que este estudiante considera las progresiones como un caso particular de sucesiones, ya que a veces se refiere a sucesión (tarea 2) y otras veces a progresión (tarea 1). Para indagar sobre esta cuestión, y confirmar la inferencia anterior, preguntamos en el segundo cuestionario explícitamente sobre ello:

Pregunta: Explica la diferencia entre sucesión y progresión

3b14: Una progresión es una secuencia de números en el que para hallar sus términos hay que sumar o multiplicar, en cambio una sucesión sigue una regla por la que se averiguan sus términos.

Por la forma de responder 3b14, se infiere que establece de forma correcta las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a sucesiones y progresiones, es decir, las progresiones son un caso particular de sucesiones (tarea 1), pero existen sucesiones que no son progresiones (tarea 2), poniendo de manifiesto la reorganización y reconstrucción del conocimiento vinculado a las progresiones y sucesiones.

La forma en que el estudiante 3b14 responde a las tareas 1 y 2 nos indica que, independientemente de la demanda de la tarea y de los modos de representación, es capaz de diferenciar entre sucesiones y progresiones haciendo uso correcto de los elementos matemáticos y de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas.

De la caracterización de los niveles descritos en el marco teórico, se deduce que el estudiante 3b2 está en el nivel INTER y el estudiante 3b14 en el nivel TRANS, ya que el primero no utiliza correctamente todas las relaciones entre elementos matemáticos vinculados a progresiones y sucesiones y el segundo si hace uso correcto de las mismas.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es determinar el papel que desempeña la idea de progresión en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica. Los resultados obtenidos, nos permiten concluir que las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a progresiones y sucesiones, ponen de manifiesto el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión numérica por parte de los estudiantes de secundaria, y por tanto podemos considerarlo como un indicador del nivel de desarrollo de la comprensión de dicho esquema. El uso correcto de la relación lógica directa entre progresión y sucesión, y el no uso incorrecto de la relación recíproca son la manifestación explícita de este indicador, vinculado al nivel TRANS de desarrollo del esquema del concepto de sucesión numérica.

Los resultados muestran también como los modos de representación pueden jugar un papel relevante para caracterizar el desarrollo de la comprensión de las sucesiones numéricas. Así los dos estudiantes considerados utilizan de forma diferente los modos de representación para ambas tareas. Mientras que uno de ellos se traslada de modo gráfico al modo algebraico y trabaja en este modo para resolver la tarea (nivel INTER), el otro estudiante, resuelve las tareas indistintamente en un modo o en el otro (nivel TRANS).

Terminamos este trabajo con una consideración de tipo metodológico, la imposibilidad de obtener información complementaria al primer cuestionario a través de una entrevista individualizada nos llevó a la realización de un segundo cuestionario personalizado que nos aportará dicha información complementaria. Esta manera de trabajar nos ha permitido tener ese segundo cuestionario personalizado de la totalidad de la población (75 estudiantes).

REFERENCIAS

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121-136.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education.* New York: Springer.

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Universidad de Granada.

Camacho, M. (2011). Investigación en Didácticas de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros años de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). Ciudad Real: SEIEM.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrech, Los Países Bajos: Kluwer.

González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática, 26*, 1-19.

Mamona, J. (1990). Sequences and series–Sequences and functions: Students' confusions, International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 333–337.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 77–102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Mor Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. y Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(2), 65-78.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI Editores.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). *Psicología del niño.* Madrid: Ediciones Morata.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805–823.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME), 11*, 267–296.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24–36.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Analysis of the cognitive demand of geometric patterns problems

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

El modelo de la demanda cognitiva es un instrumento para valorar el esfuerzo cognitivo que deben realizar los estudiantes al resolver problemas de matemáticas. Analizamos dicho modelo, lo mejoramos y lo adaptamos a los problemas de patrones geométricos. Ejemplificamos la aplicación del modelo valorando las demandas cognitivas experimentadas por varios estudiantes con alto talento matemático al resolver un problema de patrones geométricos. Otros investigadores valoran la demanda cognitiva de los problemas a partir de sus enunciados, pero este texto muestra una aplicación novedosa del modelo analizando también las respuestas de estudiantes.

Palabras clave: *Demanda cognitiva, patrones geométricos, números triangulares, talento matemático*

Abstract

The model of cognitive demand is a tool to assess the cognitive effort students have to do to solve mathematical problems. We analyse this model, improve it, and adapt it to the geometric patterns problems. We exemplify the application of the model by assessing the cognitive demand several mathematically talented students experienced to solve a geometric pattern problem. Other researchers assess the cognitive demand of problems just analysing their statements, but this paper shows a novel application of the cognitive demand model by analysing also students' answers.

Keywords: *Cognitive demand, geometric patterns, triangular numbers, mathematical talent*

INTRODUCCIÓN

Plantear problemas a un grupo de estudiantes no es fácil, ya que sus diferentes conocimientos, capacidades, motivaciones, etc. hacen que un problema sea fácil para unos estudiantes, un poco difícil para otros y muy difícil para el resto del grupo. Esta situación es más problemática cuando en el aula hay estudiantes con un alto talento matemático. Numerosas publicaciones, algunas en simposios de la SEIEM, se han centrado en la identificación de estudiantes con talento matemático (Reyes-Santander y Karg, 2009) o en analizar determinados rasgos de su forma de razonamiento (Ramírez, Flores y Castro, 2010; Gutiérrez y Jaime, 2013; Gutiérrez, Jaime y Alba, 2014), pero muy pocas han analizado cómo valorar la dificultad de un problema para estos estudiantes.

Para valorar la idoneidad de los problemas que planteamos a nuestros alumnos, en particular aquellos con mucho talento matemático, resulta útil disponer de un modelo teórico que permita evaluar la dificultad que la resolución de un problema plantea a los estudiantes. El modelo de la *demanda cognitiva* de Smith y Stein (1998) surgió con ese fin y ha sido utilizado con éxito en numerosas investigaciones para valorar el esfuerzo intelectual que deben realizar los estudiantes para resolver una actividad matemática. Diversos investigadores han realizado análisis a priori de problemas examinando sus enunciados (Smith y Stein, 1998), o estudiando la influencia de factores como los conocimientos del alumnado, la actuación del profesor o el tiempo disponible (Stein,

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Engle, Smith y Hughes, 2008). Las aplicaciones de este modelo presentan dos limitaciones: i) su formulación está validada en problemas de aritmética, los utilizados en la mayoría de esos estudios, pero hay otros tipos de problema a los que no se ajusta el modelo. ii) El modelo se ha utilizado para determinar la demanda cognitiva que supone para los estudiantes resolver un problema analizando el enunciado del problema, pero no analizando las resoluciones de los estudiantes.

Unas actividades pre-algebraicas eficaces para enseñar a generalizar y a usar el lenguaje algebraico son las actividades basadas en patrones geométricos (Rivera, 2010 y 2013). Estas actividades presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia.

En este texto presentamos resultados de una investigación centrada en el análisis, desarrollo y uso del modelo de la demanda cognitiva, entre cuyos objetivos están:

-Reformular y estructurar el modelo de la demanda cognitiva de Smith y Stein (1998) para adecuarlo a problemas de patrones geométricos.

-Emplear las resoluciones de estudiantes, además de los enunciados de los problemas, para valorar la demanda cognitiva que exigen de los estudiantes los problemas de patrones geométricos.

MARCO TEÓRICO

El modelo de la demanda cognitiva

NCTM (2014) ha enfatizado la importancia, para mejorar la calidad de la enseñanza, de plantear actividades que requieran razonamiento avanzado y en la validez del modelo de la demanda cognitiva para el análisis de las actividades y la identificación del tipo de razonamiento que requieren de los estudiantes. Esto es particularmente relevante para los estudiantes con altas capacidades matemáticas, ya que resolviendo este tipo de actividades pueden desarrollar mejor sus capacidades.

Para Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009, p. 1), la *demanda cognitiva* de una tarea es "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito." Estos autores elaboraron unos criterios teóricos para identificar el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver problemas o ejercicios planteados en los libros de texto, que se conocen como el modelo de la demanda cognitiva. Este modelo identifica cuatro niveles de demanda cognitiva de las tareas, evaluando la reflexión y el razonamiento requeridos para que el estudiante pueda resolverlas con éxito. Dichos niveles son: *memorización*, que corresponde a las tareas de menor demanda cognitiva, es decir que sólo requieren razonamientos simples; *algoritmos sin conexiones*; *algoritmos con conexiones*; y *hacer matemáticas*, en el que se ubican las tareas de mayor demanda cognitiva, es decir, que requieren razonamiento complejo. Smith y Stein (1998) caracterizaron cada nivel mediante unos criterios que permiten asociar cada tarea a uno de los niveles.

Modificación del modelo de la demanda cognitiva

Los investigadores que han utilizado el modelo de demanda cognitiva se han centrado en analizar tipos de problemas aritméticos o algebraicos específicos, bastante simples, por lo que los criterios teóricos de identificación de los niveles de demanda se encuentran completamente adaptados a las características de estos tipos. En nuestras investigaciones experimentales, hemos observado que su uso presenta dificultades para analizar actividades complejas, pues éstas tienen características ligadas a varios niveles, lo cual sugiere la posibilidad de que existan niveles intermedios o situaciones de transición entre niveles. Además, las definiciones de algunas características de los niveles son ambiguas y no se adaptan a actividades complejas diferentes de las utilizadas por los autores citados, por ejemplo a actividades geométricas. Estas dificultades nos han llevado a tratar de adaptar la caracterización del modelo existente (Smith y Stein, 1998) a actividades de patrones geométricos. Para ello, hemos analizado cada una de las características que definen los niveles de demanda cognitiva y hemos identificado seis categorías de forma que cada característica de un nivel se ajusta, por su objetivo, a alguna de estas categorías. Las seis categorías, que son una aportación original de este texto, son: El *procedimiento de resolución* que requiere la actividad; la *finalidad* con la que se propone la actividad; el *esfuerzo cognitivo* necesario para llevar a cabo su resolución; los *contenidos matemáticos implícitos* en su resolución; el tipo de *explicaciones* requeridas de los estudiantes; y las formas de *representación de la solución.*

Estructurar los niveles de demanda cognitiva mediante estas categorías, nos ha permitido organizar las características de cada nivel, localizar lagunas en algunos niveles, completar la caracterización de los niveles proponiendo descripciones más precisas, y hacer la clasificación de actividades más fiable y menos costosa, ya que facilita el trabajo de análisis y clasificación de actividades.

Respecto al primer objetivo, la Tabla 1 muestra las características de los niveles de demanda cognitiva, organizadas en las seis categorías y particularizadas para las actividades de patrones geométricos. Para elaborar la Tabla 1 hemos seguido un proceso cíclico de modificación de las características de los niveles y de análisis de actividades y respuestas de estudiantes, haciendo cambios adecuados según los resultados obtenidos, ya que las respuestas de los estudiantes han permitido identificar detalles no perceptibles en el análisis previo.

Tabla 1. Análisis teórico de la demanda cognitiva de actividades de patrones geométricos

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
BAJO Memorización	*Recuento directo*	Procedimiento de resolución	(1.2) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Finalidad	(1.1) Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo requerido	(1.3) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
		Contenidos implícitos	(1.4) No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones	(1.5) No requieren explicaciones.
		Representación de la solución	(1.6) El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato* *Término próximo*	Procedimiento de resolución	(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Finalidad	(2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo requerido	(2.2) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
		Explicaciones	(2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
		Representación de la solución	(2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.
MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	*Término próximo Término lejano*	Procedimiento de resolución	(3.2) Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
		Finalidad	(3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que les llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO Hacer Matemáticas	*Término general*	Procedimiento de resolución	(4.1) Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
		Finalidad	(4.2) Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(4.6) Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. (4.3) Requieren de los estudiantes auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos.
		Contenidos implícitos	(4.4) Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.
		Explicaciones	(4.7) Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
		Representación de la solución	(4.8) En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE ACTIVIDADES MEDIANTE LAS RESOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES

No conocemos trabajos que analicen la demanda cognitiva de un problema a partir de respuestas de estudiantes, a pesar de que éstas son un indicador clave del esfuerzo cognitivo realizado en la resolución. Como ejemplo de aplicación del modelo de la demanda cognitiva modificado, mostramos el doble análisis de una actividad de patrones geométricos que lleva a identificar la demanda cognitiva de la actividad basada en sus características teóricas y la demanda cognitiva de basada en respuestas reales de estudiantes. Finalmente, comparamos ambos análisis.

Metodología, participantes y contexto

La actividad se utilizó en tres talleres extraescolares con niños superdotados de los cursos 5º de Educación Primaria (14 niños), 6º de Educación Primaria (8 niños) y de 1º de ESO (7 niños) respectivamente. En este texto analizamos las respuestas de los niños de 1º de ESO. Emplearon aproximadamente 30 minutos para resolver la actividad. Los niños se organizaron en grupos, dos parejas y un trío. Para la recogida de datos utilizamos las resoluciones en papel de los alumnos, que nos proporcionaron las conclusiones y respuestas de cada grupo, y las grabaciones en audio de sus conversaciones, que nos permitieron comprender las estrategias y razonamientos usados por cada grupo durante la resolución de la actividad. Aquí analizamos una actividad, pero en la investigación que estamos realizando hemos analizado diversas actividades de patrones geométricos y respuestas de estudiantes para identificar las características propias de cada nivel de demanda cognitiva en las actividades y los niveles de demanda cognitiva de las resoluciones de los estudiantes.

La actividad

Las actividades típicas de patrones geométricos constan de varias cuestiones de generalización, de manera que cada cuestión supone un incremento del grado de abstracción y, en consecuencia, de la demanda cognitiva necesaria para su resolución correcta. Ello permite plantear estas actividades a alumnos con diferentes conocimientos o capacidades matemáticas, pudiendo atender al mismo tiempo las necesidades de todos ellos. La Figura 1 muestra una de las actividades usadas en nuestro estudio y en la que basamos el análisis presentado en este texto.

ACTIVIDAD: Números Triangulares
Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos...

1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición?
2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?
3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.
4. ¿Y para la *n*-ésima figura?

Figura 1. Texto de la actividad analizada

Las cuestiones de esta actividad se basan en analizar los elementos del patrón dados y las respuestas a las cuestiones precedentes, para calcular los números triangulares de diversas posiciones y el término general. Al aumentar la distancia entre los datos y la posición pedida, aumenta la demanda cognitiva, pues los alumnos necesitan usar con más perfección y abstracción la estructura del patrón. Para resolver las primeras cuestiones, solo hace falta tener ciertos conocimientos aritméticos, que los alumnos de 1º de ESO dominan, pero la última cuestión supone un alto nivel de demanda cognitiva para los alumnos de este curso cuando todavía no han sido introducidos en el álgebra.

Análisis de la demanda cognitiva de la actividad

Presentamos el análisis teórico de las cuestiones que integran esta actividad (Tablas 2.1 a 2.4), basándonos en la interpretación del modelo de la demanda cognitiva ofrecida en la Tabla 1. Para cada cuestión de la actividad, identificamos sus características y asignamos el nivel o niveles de demanda cognitiva. Esta actividad no tiene ninguna cuestión que pregunte por los términos dados en el enunciado, por lo que no hay cuestiones de nivel bajo de demanda cognitiva.

Tabla 2.1. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 1

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato* (*n* = 5)	Procedimiento de resolución	(2.1) Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para construir el siguiente triángulo y contar su cantidad de puntos. La pregunta se contesta mediante un algoritmo consistente en continuar los triángulos del enunciado.
		Finalidad	(2.4) Se pretende que el alumno se familiarice con el patrón operando con un caso concreto pequeño, que puede calcular fácilmente. El objetivo de esta pregunta no es la comprensión del algoritmo, sino la obtención de un resultado correcto.
		Esfuerzo requerido	(2.2) Su resolución con éxito requiere una demanda cognitiva limitada. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que el alumno debe encontrar el patrón para dibujar el caso pedido y dar con la solución.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe una conexión implícita entre los conceptos subyacentes y el algoritmo usado ya que, de manera implícita, se suman los primeros cinco números naturales. No obstante, para calcular este término geométricamente, el estudiante no necesita percatarse de dicha conexión. Si hace el cálculo aritméticamente, puede llegar, ahora o más tarde, a darse cuenta de que la respuesta es la suma de los números 1 a 5.
		Explicaciones	(2.5) Basta con describir cómo se ha dibujado el triángulo.
		Representación de la solución	(2.6) En su resolución se pueden utilizar las representaciones geométrica y aritmética, pero los estudiantes utilizan la representación geométrica por ser la más evidente y sencilla.

La cuestión 1 tiene nivel bajo-medio de demanda cognitiva ya que en ella se pide calcular la cantidad de puntos del triángulo en la quinta posición de la secuencia y los estudiantes pueden encontrarla fácilmente dibujando el triángulo correspondiente y contando. Este procedimiento de obtener la solución es algorítmico y no requiere que los estudiantes utilicen ningún conocimiento matemático, sino solo que observen el patrón visual de cambio de un término de la serie al siguiente y lo apliquen directamente. Por ello, esta cuestión es adecuada para todos los estudiantes del grupo de clase, independientemente de sus conocimientos matemáticos o su talento matemático.

En la cuestión 2, la actividad incrementa su dificultad al aumentar la posición del término en la serie, porque se espera que los estudiantes establezcan relaciones (Tabla 2.2). Quienes no son capaces de establecerlas usan la representación y el algoritmo geométricos para contestar, con una demanda cognitiva baja-media. Aquellos que sí establecen relaciones entre los términos de la serie usan la representación y el algoritmo aritméticos (sumar los números 1 a 20), con una demanda cognitiva media-alta. Por tanto, la demanda cognitiva de la cuestión varía con el camino seguido.

Tabla 2.2. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 2

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
BAJO-MEDIO / MEDIO-ALTO Algoritmos Sin / Con Conexiones	*Término próximo* (*n* = 20)	Procedimiento de resolución	(2.1) Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para calcular los términos próximos. La resolución es algorítmica (dibujar los sucesivos triángulos hasta el 20º). (3.2) Al ser una posición más distante, el enunciado de esta cuestión sugiere de modo implícito considerar las relaciones entre algoritmo y conceptos subyacentes. La resolución aritmética (sumar los primeros 20 números) necesita esas relaciones.

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
		Finalidad	El objetivo de la cuestión es que los estudiantes, observando casos concretos, descubran las relaciones entre el patrón y el algoritmo aritmético de cálculo de los números triangulares, con el objetivo de profundizar en la comprensión del algoritmo general. No obstante: (2.4) Puede ser resuelta mediante el algoritmo geométrico sin identificar dichas relaciones y obtener el resultado correcto. (3.1) Puede ser resuelta mediante el algoritmo aritmético, si los estudiantes inician la comprensión de las relaciones subyacentes en el patrón.
		Esfuerzo requerido	(2.2) La resolución geométrica con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo dibujar los números triangulares y calcular el resultado. (3.4) La resolución aritmética con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo y atención para encontrar la relación subyacente entre el algoritmo y la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(2.3) En la resolución geométrica, el estudiante no necesita percatarse de los contenidos implícitos (la relación entre los términos de la serie) para llegar a la respuesta correcta. (3.5) En la resolución aritmética, el estudiante necesita considerar conscientemente la relación entre los términos de la serie subyacente al algoritmo aritmético (sumar los 20 primeros números).
		Explicaciones	(2.5) Explicación enfocada solo a describir el algoritmo usado. (3.6) Explicación que hace referencia a las relaciones aritmética entre un número triangular y su posición en la serie y entre los sucesivos términos de la serie.
		Representación de la solución	(2.6) Se suele utilizar la representación geométrica por ser la que resulta de mayor ayuda para resolver la cuestión. (3.3) Se pueden usar la representación aritmética o una combinación de esta y la geométrica, dando lugar a una representación más general.

La Tabla 2.3 presenta el análisis de la demanda cognitiva asociada a la resolución de la cuestión 3. Esta cuestión pide calcular un término lejano, con el fin de que los estudiantes necesiten establecer relaciones para encontrar la respuesta.

Tabla 2.3. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 3

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	*Término lejano* *($n = 100$)*	Procedimiento de resolución	(3.2) Las respuestas a las cuestiones anteriores sirven como sugerencia implícita de la vía a seguir para identificar el algoritmo general para calcular este término concreto y las relaciones subyacentes entre el algoritmo y la serie.
		Finalidad	(4.2) Que el alumno explore y comprenda la naturaleza de los números triangulares y las relaciones entre estos números, la posición que ocupan y el paso de uno a otro.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
		Esfuerzo requerido	Dependiendo de la resolución de la cuestión anterior: (3.4) Han logrado enunciar una relación para resolver el caso n = 20 y la aplican, mejorándola, al resolver el caso n = 100, lo que requerirá un esfuerzo cognitivo medio-alto. (4.6) Si no han logrado enunciar un relación para resolver el caso n = 20, deberán encontrar una estrategia de resolución no implícita, requiriendo un alto esfuerzo cognitivo.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes, apoyándose en el conocimiento ganado en las cuestiones anteriores, necesitan considerar consciente-mente relaciones de la serie subyacente al algoritmo.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que, utilizando casos concretos, hacen referencia a las relaciones subyacentes en la serie de los números triangulares empleadas para calcular el término 100º.
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta las representaciones geométrica, aritmética y, tal vez, algebraica para expresar la solución de una manera más abstracta.

La necesidad de establecer relaciones situa la actividad cognitiva de los estudiantes en los niveles de demanda medio-alto y alto. Para resolver correctamente esta cuestión, los estudiantes deben descubrir un algoritmo general de cálculo, aunque todavía no necesitan usar su expresión algebraica. La dificultad de esta cuestión dependerá de las resoluciones realizadas en las cuestiones anteriores.

Tabla 2.4. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 4

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
ALTO Haciendo matemáticas	*Término general (n-ésima posición)*	Procedimiento de resolución	(4.1) La generalización para el término n-ésimo requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Los estudiantes analizan la estructura de la serie y el proceso de obtención de los números triangulares (posición y número de puntos), para poder obtener una fórmula general.
		Finalidad	(4.2) Analizar, comprender y enunciar la relación general entre la cantidad de puntos de un número triangular y su posición, de manera que lleguen a calcular el término general.
		Esfuerzo requerido	(4.6) Requiere un considerable esfuerzo cognitivo ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación existente sino que deben saber verbalizarla.
		Contenidos implícitos	(4.4) Se pretende que los estudiantes recurran a su experiencia en la cuestión anterior para expresar en lenguaje algebraico las ideas que antes deben haber expresado de forma verbal.
		Explicaciones	(4.7) Explicación y demostración de la expresión de cálculo del término general.
		Representación de la solución	(4.8) La resolución se basa en la representación algebraica del algoritmo de cálculo del término general de la serie. Puede estar acompañada de representaciones geométricas o aritméticas de casos concretos o genéricos.

Esta cuestión pide expresar de forma algebraica (para n) el algoritmo de cálculo de los números triangulares, obteniéndose así un caso general que requerirá explorar las relaciones matemáticas implícitas en la serie, para lo cual se exige del estudiante una demanda cognitiva de nivel alto.

Análisis de respuestas de estudiantes

Analizando las resoluciones de los diferentes grupos de alumnos, hemos encontrado respuestas a la misma cuestión que han usado diferentes niveles de demanda cognitiva. Esto confirma que el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver correctamente un problema no es único y que un factor clave para analizar la dificultad de un problema son las resoluciones. El análisis de las respuestas de los alumnos de nuestra muestra nos permite diferenciar tres tipos de respuestas.

GRUPO 1. No identificaron una relación correcta. Su conversación en la cuestión 2 pone de relieve sus dificultades para hallar el término inmediato, ya que formularon diversas relaciones numéricas sin dibujar el triángulo ni comprobar si sus relaciones se verificaban en los datos conocidos:

Grupo 1: [n=20] *La quinta posición eran 15, ya que 3·5=15 y la 20 será 60, 20·3=60.*

No detectaron que la cantidad de puntos de los triángulos es la suma de los primeros números naturales. Se limitaron a responder las cuestiones 1 y 2 con nivel bajo de demanda cognitiva, lo cual les impidió responder las cuestiones 3 y 4. El nivel de demanda cognitiva de este grupo es inferior al esperado pues, a pesar de que la cuestión 2 es una oportunidad para relacionar ideas, los alumnos se limitaron a aplicar una relación errónea obtenida en el apartado anterior para el caso de $n = 20$.

GRUPO 2. Identificaron el patrón numérica y algebraicamente y supieron calcular los términos inmediato y próximo sumando los números consecutivos. Observaron que había que sumar desde el 1 hasta el número de la posición del término buscado, pero no fueron capaces de encontrar una expresión general que les permitiese calcular el término general. Una vez calculado el término $n = 20$, pasaron directamente a generalizar su resultando olvidado responder al caso de $n = 100$:

Grupo 2: [n=20] *1 +2+3+4... +19+20=210, se suma desde el 1 hasta el número de la posición.*

Grupo 2: [caso general] *Sumamos los números entre 1 y n.*

Aunque no respondió adecuadamente la cuestión 4, el grupo 2 llegó al nivel medio-alto de demanda cognitiva, ya que entendió la relación entre cada número triangular y su posición. Comenzó en el nivel bajo-medio, continuó entre los niveles medios y terminó en el nivel medio-alto.

GRUPO 3. Después de hallar el término inmediato mediante un procedimiento algorítmico, los alumnos encontraron una relación numérica que les permitía calcular el término 20º sin recurrir a la suma de los 20 primeros términos: observaron que siempre se multiplica la posición por un número y dicho número se incrementa 0.5 cada vez. Para el término lejano, formalizaron dicha relación convirtiendo el incremento de 0.5 en una división entre 2, y obtuvieron una fórmula que les permitió calcular sin dificultades el caso $n = 100$ y el término general:

Grupo 3: [n=20] *El número 6 por 3.5. Cada número subiendo del 6 añade 0.5 al 3.5. Será 20·10.5=210.*

Grupo 3: [n=100] *100·[(100+1)/2].*

Grupo 3: [caso general] *x·[(x+1)/2].*

El grupo 3 empleó más demanda cognitiva de lo esperado, usando el nivel medio-alto al resolver el caso $n = 20$, y el nivel alto al calcular una fórmula tanto para $n = 100$ como para el caso general.

Conclusiones

Como aportaciones de esta investigación, hemos modificado la caracterización de Smith y Stein (1998) del modelo de demanda cognitiva, para mejorar su organización y la discriminación entre los niveles; hemos adaptado el modelo general modificado a los problemas de patrones geométricos; lo hemos aplicado al análisis de una actividad específica basada en los números triangulares.

La Figura 2 sintetiza los resultados del estudio presentado. La resolución correcta de cada cuestión requiere de los estudiantes, teóricamente, cierto nivel de demanda cognitiva, cada vez mayor a lo largo de la actividad. Pero, en la práctica, encontramos resoluciones en las que los estudiantes han empleado niveles diferentes de los previstos, unas veces inferiores y otras superiores.

	BAJO		BAJO-MEDIO		MEDIO-ALTO	ALTO
Análisis Teórico			n = 5	n = 20	n = 100	Caso general
Grupo 1	n = 5	n = 20				
Grupo 2			n = 5	n = 20	Caso general	
Grupo 3			n = 5		n = 20	n = 100 Caso general

Figura 2. Comparación de los análisis de la actividad y de las respuestas de los estudiantes

Agradecimientos

Esta investigación es parte del proyecto *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de Primaria y ESO en contextos de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259).

Referencias

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Gutiérrrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: Una experiencia docente. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

Reyes-Santander, P. y Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school. Psychological and pedagogical considerations.* Nueva York: Springer.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* Nueva York: Teachers College Press.

ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS EN SECUNDARIA

Mathematical literacy through project based learning at secondary school

Benjumeda, F. J.[a], Romero, I.[b] y López-Martín, M. M.[c]

[a]IES El Parador (Almería), [b]Universidad de Almería, [c]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo presenta una investigación-acción en secundaria en la que se utiliza la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) para promover la alfabetización matemática de los estudiantes. Se muestra la evaluación de un proyecto, para la que se consideran las producciones finales de los equipos de estudiantes, el trabajo colaborativo, las pruebas escritas individuales y la opinión de los alumnos sobre esta metodología. Los resultados muestran el potencial de la actividad matemática en torno al proyecto para desarrollar los procesos de alfabetización matemática, especialmente los relacionados con la aplicación de contenidos y la modelización, así como las dificultades que se presentan en el proceso de validación e interpretación de resultados, el andamiaje del proyecto, las exigencias del producto final y el trabajo colaborativo.

Palabras clave: *Aprendizaje basado en proyectos, matemáticas, alfabetización matemática, investigación-acción, secundaria*

Abstract

This work presents an action research at secondary level in which a Project Based Learning (PBL) methodology is used to promote mathematical literacy in students. The assessment of a particular project is presented, including the final productions of student teams, the collaborative work, the individual exams, and the students' opinion on this methodology. The results show the potential of the mathematical activity on the project for developing the processes of mathematical literacy, especially those related to content application and modelling, as well as the difficulties that arise around the process of validation and interpretation of results, project scaffolding, the demands of the final product and the collaborative work.

Keywords: *Project based learning, mathematics, mathematical literacy, action-research, secondary level*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

El informe PISA 2012 (OCDE, 2012) define la alfabetización o competencia matemática como una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos; aquí se incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta definición establece un esquema a seguir a la hora de trasladar una situación real a un problema matemático, resolverlo y devolver los resultados al contexto de partida (Figura 1). Además, se crea un vínculo con las capacidades matemáticas fundamentales (Comunicación, Matematización, Representación, Razonamiento y Argumentación, Diseño de estrategias para resolver problemas, Utilización de operaciones y lenguaje formal y técnico y la Utilización de herramientas matemáticas) y cómo estas pueden desarrollarse a partir de los procesos establecidos.

Benjumeda, F. J., Romero, I. y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 163-172). Alicante: SEIEM.

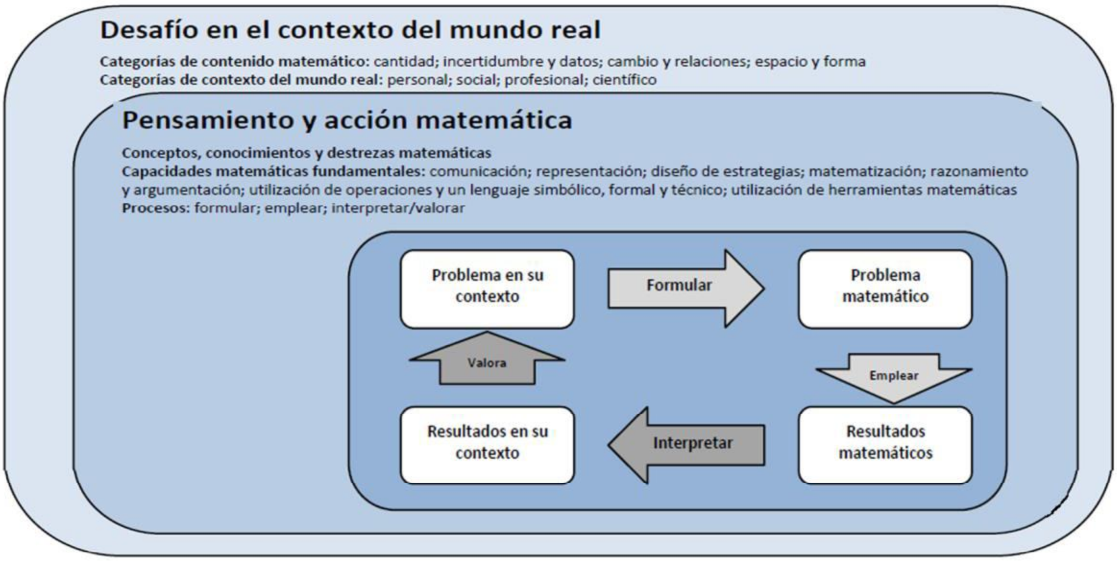


Figura 1. Modelo de alfabetización o competencia matemática en PISA 2012

La inclusión de las competencias clave (LOMCE) como referentes en la enseñanza secundaria obligatoria, y "la vinculación de la evaluación PISA y los indicadores de calidad del sistema educativo español" (Rico, 2011, p. 3) requieren transformaciones en la metodología y evaluación de las clases de matemáticas. Así, para promover la transferibilidad de los aprendizajes y el trabajo por competencias en el aula, se propone al profesorado de matemáticas de secundaria utilizar "metodologías activas y contextualizadas [...] que faciliten la participación e implicación del alumnado y la adquisición y uso de conocimientos en situaciones reales." (MECD, Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, p. 7003), lo cual demanda "estrategias e instrumentos para evaluar al alumnado de acuerdo con sus desempeños en la resolución de problemas que simulen contextos reales, movilizando sus conocimientos, destrezas, valores y actitudes." (MECD, 2015, p. 6990).

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre establece que "La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas." Aunque el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es un método de enseñanza-aprendizaje en cuya concepción intervienen varios factores, hay rasgos que lo convierten en una estrategia metodológica que puede favorecer el desarrollo de la alfabetización matemática:

- Un proyecto supone una estrategia central de enseñanza gracias a la cual los/as estudiantes aprenden y ponen en práctica los conocimientos, habilidades y competencias necesarias para responder a preguntas complejas y auténticas, o para elaborar un producto final cuidadosamente diseñado (Mettas y Constantinou, 2007).
- Suelen incluir tareas abiertas complejas que implican la investigación, la construcción de situaciones, la resolución de problemas reales auténticos, el diseño de estrategias y/o experimentos, la recogida de datos, el debate, la reflexión, la comunicación de ideas y el uso de las TIC (Blumenfeld et al., 1991; Moursund, 1999).
- Otorgan al alumnado bastante libertad de elección, tiempo de trabajo sin supervisión y un grado mucho más significativo de autonomía y responsabilidad que la enseñanza tradicional (Jones, Rasmussen y Moffitt, 1997).
- Incorporan aspectos que los hacen realistas, auténticos y desafiantes para el alumnado: la temática, el contexto, el rol que juegan los/as estudiantes, las tareas o el producto elaborado, los/as colaboradores/as, o la audiencia a la que se presentan los productos (Thomas, 2000).

En el área de matemáticas, las investigaciones sobre ABP en secundaria son escasas (Thomas, 2000). La mayoría de ellas están referidas a rendimiento, incremento de la motivación e implicación del alumnado (Pierce, 2009) o a valorar modelos utilizados para la enseñanza de las matemáticas (Batanero, 2001; Aravena, Caamaño y Giménez, 2008).

OBJETIVOS

En respuesta a las demandas anteriormente planteadas, este trabajo da cuenta de una investigación-acción que se lleva a cabo en un instituto público de secundaria, en el que en los dos primeros cursos los currículos de siete asignaturas, incluida matemáticas, se implementan mediante una metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos interdisciplinares. Nos planteamos los siguientes objetivos para esta comunicación: (1) presentar las bases del diseño de la asignatura de matemáticas y su sistema de evaluación, dentro del sistema general de ABP; (2) exponer unos primeros resultados obtenidos a partir de la evaluación de un proyecto particular en el curso 1º de ESO; y (3) realizar un primer acercamiento a la opinión del alumnado sobre esta metodología.

METODOLOGÍA

Como reivindica Kilpatrick en el Congreso Internacional "Paradigmas en la Educación Matemáticas para el Siglo XXI: Compartiendo experiencias educativas con Asia", celebrado en Valencia en 2009, el papel de los profesores es determinante para impulsar mejoras duraderas en la enseñanza de las matemáticas. Además, su perspectiva es un factor central para generar comprensión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases (Doerr y Tinto, 2000). Este potencial sale a la luz cuando los profesores se convierten en investigadores, lo cual, unido a la colaboración con personal investigador universitario, permite comprender mejor la viabilidad del conocimiento didáctico aplicado a los problemas de la práctica. Por estas razones, hemos planteado una investigación-acción colaborativa entre un profesor de secundaria y dos profesoras universitarias.

Las diferentes tradiciones de investigación-acción comparten, a pesar de sus diferencias, acuerdos amplios sobre su naturaleza y la manera de llevarla a cabo. De forma genérica, podemos decir que esta se desarrolla siguiendo un modelo en espiral de ciclos sucesivos, con las siguientes etapas: (1) reconocimiento del problema y establecimiento de un plan general de acción; (2) implementación en la práctica y observación; (3) reflexión sobre los resultados obtenidos, y (4) revisión de la planificación inicial, que da lugar a un nuevo ciclo (Kemmis y McTaggart, 1988). En lo que sigue, describiremos cada una de las etapas del primer ciclo de nuestra investigación-acción.

PLANIFICACIÓN

El trabajo desarrollado en la asignatura de matemáticas en el IES El Parador (Almería) en los dos primeros cursos de ESO, se integra dentro del sistema interdisciplinar de ABP del centro. Cada proyecto gira en torno a una temática global y lleva asociado la elaboración por parte del alumnado, durante varias semanas, de un producto final cuyo resultado suele ser expuesto ante una audiencia amplia o ante expertos. Además, incorpora otras tareas de diferente tipología que requieren el uso de las TIC y otorgan al alumnado elevado grado de autonomía e iniciativa. El aula se organiza en diferentes equipos colaborativos de entre tres y cinco alumnos cada proyecto, configurados por el profesorado con alumnado heterogéneo en rendimiento aunque con buenas relaciones sociales.

Esta metodología de trabajo requiere una evaluación integral del alumnado, continua y formativa, que se adapte a los objetivos de la propuesta. Así, la calificación deriva, no sólo de los resultados de una prueba escrita (20%) y de su trabajo individual (30%) para cada asignatura, sino que tiene en cuenta aspectos esenciales del ABP como el producto final (30%) y el trabajo colaborativo (20%). Estas dos últimas calificaciones son consensuadas por el profesorado de las diferentes materias según el resultado del trabajo realizado y del funcionamiento de los grupos con carácter general.

Los resultados recogidos en la memoria de autoevaluación del centro durante el primer año de su implantación han arrojado unos buenos datos en cuanto a rendimiento académico, reducción del fracaso escolar y mejora del estado de la convivencia en los niveles en los que ha sido implantada.

Los aspectos metodológicos más relevantes dentro de la asignatura de matemáticas se ilustran, a continuación, con el proyecto denominado "El Agua", cuyo producto final consiste en la creación de una revista digital donde se tratan temáticas relacionadas con el agua.

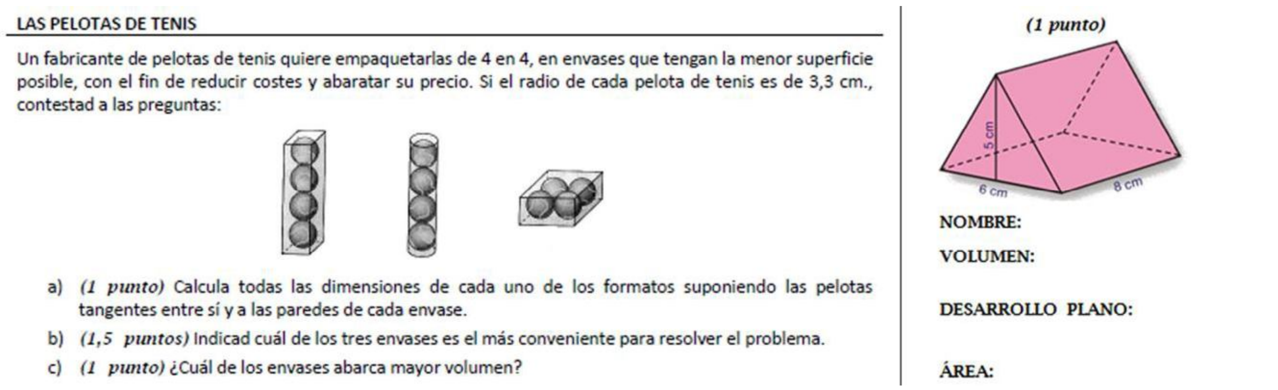
En la asignatura de matemáticas, se intercalan tres tipos de tareas dentro del proyecto con las explicaciones de los conocimientos matemáticos necesarios para realizarlas: la tarea central del producto final, otros problemas contextualizados, y tareas procedimentales rutinarias. Durante el trabajo en el aula, el profesor asume un papel de observador favoreciendo la autonomía e interacción dentro de los equipos, aprovechando estas sesiones también para reforzar y apoyar al alumnado que lo requiere, y facilitando el debate, la puesta en común y la discusión de resultados.

La tarea central del producto final se desarrolla a lo largo de todo el proyecto y consiste en una tarea abierta y compleja que debe ser realizada por equipos. Tanto su duración como su envergadura requieren una graduación adecuada en el nivel de dificultad y una realimentación frecuente. En el proyecto "El Agua", esta tarea consiste en la elaboración de un reportaje en el que se pretende que el alumnado sea consciente del gasto de agua que se genera en su vivienda y en su municipio, y adopte posibles medidas de ahorro, concienciando a los lectores de la escasez existente en países del tercer mundo. Está dividida en tres etapas:

(1) Tras un debate en clase, se delimitan los aspectos para conocer el gasto de agua diario que se produce en una vivienda (lugares, frecuencia de uso, número de personas, etc.). Luego cada alumno realiza las mediciones correspondientes para intentar calcular dicho gasto en su vivienda utilizando conceptos y procedimientos relativos al volumen de cuerpos geométricos y la proporcionalidad, entre otros. Tras una primera corrección de los trabajos individuales, cada aportación se contrasta con las del resto del equipo para decidir, justificadamente, cuál de los métodos utilizados es más apropiado y qué parámetros estadísticos son más representativos para el gasto de agua o la frecuencia de uso. El trabajo se va refinando con revisiones del profesor hasta su edición definitiva.

(2) Realizado el estudio inicial, se genera un nuevo debate en clase a partir del cual, y mediante las aportaciones de cada equipo, se elabora una encuesta para realizar un estudio estadístico más amplio sobre los hábitos de consumo en las viviendas del barrio.

(3) Recogidos los datos de 200 encuestas, y tras el recuento de respuestas, se elaboran, en una hoja de cálculo, tablas de frecuencias necesarias para recopilar la información. A partir de éstas, cada equipo decide qué información desea trasladar a su reportaje y elige las tablas y gráficos adecuados, combinando sus mediciones y los parámetros estadísticos hallados. El trabajo debe finalizar con unas conclusiones relacionando su estudio con alguna problemática mundial vinculada con el agua.


LAS PELOTAS DE TENIS

Un fabricante de pelotas de tenis quiere empaquetarlas de 4 en 4, en envases que tengan la menor superficie posible, con el fin de reducir costes y abaratar su precio. Si el radio de cada pelota de tenis es de 3,3 cm., contestad a las preguntas:

a) *(1 punto)* Calcula todas las dimensiones de cada uno de los formatos suponiendo las pelotas tangentes entre sí y a las paredes de cada envase.

b) *(1,5 puntos)* Indicad cuál de los tres envases es el más conveniente para resolver el problema.

c) *(1 punto)* ¿Cuál de los envases abarca mayor volumen?

(1 punto)

NOMBRE:

VOLUMEN:

DESARROLLO PLANO:

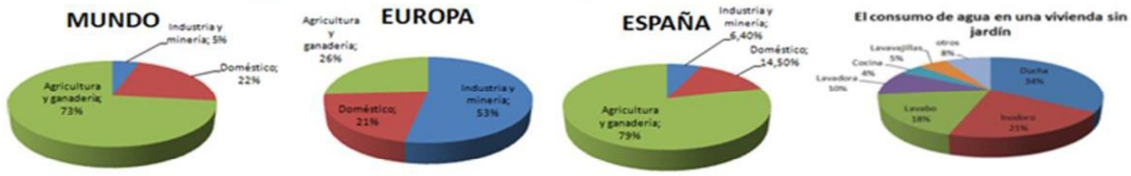
ÁREA:

Figura 2. Modelos de un problema contextualizado y de un ejercicio de una tarea individual

Los mismos equipos, en otras sesiones, resuelven problemas realistas más concretos y estructurados cuya finalidad es trabajar directamente los contenidos del proyecto, que se afianzan de manera individual en cada estudiante mediante tareas rutinarias en las que se trabajan conceptos, procedimientos y fórmulas. Un ejemplo de cada una puede verse en la figura 2.

La calificación de la asignatura de matemáticas deriva de la realización de una prueba escrita, elaborada a partir de los criterios de evaluación programados (figura 3), y de las tareas individuales y por equipos que incluye la elaboración del producto final. Para ello, se tienen en cuenta rúbricas creadas para cada tarea, la aportación de cada estudiante, su responsabilidad, liderazgo y trabajo dentro del equipo, y la coevaluación realizada por el propio alumnado.

1) Observa los siguientes diagramas respecto al uso del agua y contesta las siguientes cuestiones:



a) *(1 punto)* Explica las principales diferencias y similitudes entre el uso que se hace del agua en España, Europa, y el mundo, resaltando los aspectos más destacados de cada uno.

b) Completa las siguientes frases referentes a los diagramas anteriores:

- *(0,5 puntos)* En España, más de las ¾ partes del agua se dedican a ________________, mientras que en Europa este sector supone poco más de un ______.
- *(0,5 puntos)* El sector en el que se usa un porcentaje de agua semejante tanto en España como en Europa y el mundo es el de _______________.
- *(0,5 puntos)* El gasto de agua en los hogares sin jardín viene propiciado principalmente por la consumida en el cuarto de baño (ducha, inodoro, lavabo), con un porcentaje de un _______ del gasto total.

Figura 3. Modelo de pregunta incluida en la prueba escrita

IMPLEMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN

El proyecto que sirve de ejemplo en esta comunicación se desarrolla durante el segundo trimestre del curso con un grupo de 1º de ESO (12-13 años) formado por 26 alumnos/as. Se trata de un grupo con un importante desnivel educativo ya que casi un 30% de la clase tiene importantes carencias a nivel cognitivo y de hábitos de trabajo, lo cual hace necesario adoptar importantes medidas de atención a la diversidad y genera dificultades en la constitución de los equipos y su funcionamiento.

Los instrumentos de observación para este estudio son: una parrilla elaborada para valorar la tarea central del producto; las calificaciones del producto final y la prueba escrita; dos cuestionarios de opinión del alumnado y una entrevista al grupo según resultados de los cuestionarios.

La parrilla de valoración (Figura 4) permite valorar las tareas centrales abiertas que se desarrollan en la asignatura de matemáticas. En primer lugar, ofrece una panorámica de la riqueza de la tarea al vincular los procesos matemáticos con las capacidades establecidas por PISA 2012. En segundo lugar, permite al profesorado obtener una visión general sobre los resultados obtenidos por el grupo clase en los distintos indicadores establecidos, lo que posibilita comprobar qué procesos o qué parte de los mismos no se han desarrollado adecuadamente y qué capacidades deben reforzarse en tareas posteriores. Por último, es útil para evaluar el trabajo de los equipos en la tarea, ya que relaciona los aspectos matemáticos requeridos para su realización con los procesos de alfabetización matemática mediante indicadores valorados de 0 a 2 según el nivel de consecución de cada uno. De esta manera se establece una necesaria relación entre los criterios de evaluación establecidos para este nivel y el grado de desarrollo de los procesos y capacidades de la alfabetización o competencia matemática.

PROCESOS		INDICADORES			CAPACIDADES							EQUIPOS					
					C	M	R	A	RP	O	T	E1	E2	E3	E4	E5	E6
Formulación matemática de las situaciones	Paso de situación real a modelo o esquema	Justificación de la elección del método para calcular el agua consumida en cada una de las situaciones acordadas en grupo clase	0	No da razones													
			1	Razones no matemáticas	X	X		X				0	2	1	0	0	0
			2	Razones matemáticas													
		Explicación de cómo se utiliza el agua en el caso elegido (esquema) e identificación de limitaciones y supuestos de cada uno	0	Predominio de esquemas incompletos o inadecuados													
			1	Esquemas incompletos o inadecuados para algunas situaciones	X	X		X	X			2	2	1	1	2	2
			2	Esquemas adecuados y razonables													
		Reconocimiento de los aspectos necesarios para el estudio estadístico (preguntas de la encuesta)	0	Se contemplan muy pocos aspectos de los necesarios													
			1	Falta algún/os aspectos importantes	X	X		X	X			2	2	1	0	1	2
			2	Se consideran todos los aspectos necesarios													
	Modelo o formulación matemática	Variedad de modelos empleados para medir el gasto de agua en las distintas situaciones	0	Siempre el mismo método													
			1	Utilizan dos métodos diferentes		X			X			1	2	2	0	1	2
			2	Utilizan tres o más métodos diferentes o combinan métodos													
		Adecuación del modelo o modelos elegidos para medir el gasto de agua en las distintas situaciones	0	No crean modelos o todos son inadecuados													
			1	Algunos modelos poco adecuados		X			X			2	2	2	1	1	2
			2	Predominio de modelos adecuados													
		Reconocimiento de los parámetros estadísticos representativos para cada hábito (gasto y frecuencia)	0	No calculan parámetros estadísticos en ningún caso													
			1	Reconocen parámetros para el gasto o la frecuencia	X	X		X	X			2	2	2	1	0	2
			2	Reconocen parámetros para ambos casos													
Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos		Representación de cuerpos geométricos que modelizan recipientes	0	Algunas representaciones o modelos no adecuados													
			1	Sólo modelos o representaciones adecuadas simples		X	X					1	1	1	1	1	2
			2	Modelos o representaciones adecuadas más complejas													
		Utilización de las fórmulas adecuadas y toma de medidas correspondientes para calcular los volúmenes utilizados	0	Algunas medidas erróneas o no se usan correctamente													
			1	Algún error en las medidas o en la aplicación de fórmulas		X				X		2	2	2	2	2	2
			2	Las medidas y aplicación de fórmulas son adecuadas													
		Relación correcta entre las unidades de volumen y capacidad	0	No se trasladan correctamente algunas unidades													
			1	Proceso de cambio de unidades incompleto		X			X	X		2	2	2	2	0	2
			2	Todas las unidades se trasladan correctamente													
		Utilización de la proporcionalidad directa para calcular el gasto	0	No se utiliza o se utiliza inadecuadamente													
			1	Se utiliza de forma adecuada		X			X	X		2	1	2	0	1	2
			2	Se combina con otros elementos matemáticos													
		Cálculos correspondientes de otras estrategias diseñadas	0	No se aplican otras estrategias													
			1	Se aplican otras estrategias con errores en los cálculos					X	X		2	2	2	0	2	2
			2	Se aplican otras estrategias con cálculos correctos													
		Utilización de la hoja de cálculo para tratar los datos (tablas frecuencia), calcular porcentajes y elaborar los gráficos	0	No se utilizan las tablas adecuadas o errores en la hoja de cálculo													
			1	Se utilizan las tablas y gráficos adecuados pero no se utilizan las funciones			X			X	X	1	1	2	0	1	2
			2	Se crean tablas y gráficos apropiados y se utilizan las funciones de la hoja													
Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos	Validar soluciones	Determinación de un gasto estándar para cada situación a nivel de equipo razonando su obtención y aplicándolos al estudio	0	Consideran muy pocos datos													
			1	Consideran varios datos pero no contrastan ni aplican	X	X		X	X			1	1	1	0	0	1
			2	Contrastan la razonabilidad de los datos y aplican los parámetros													
		Contraste de los datos obtenidos en el estudio con los derivados de la encuesta u otros estudios estadísticos	0	No contrastan													
			1	Contrastan con la encuesta o con otros estudios	X			X				0	0	0	0	0	1
			2	Contrastan con ambos													
	Exponer conclusión del estudio	Realización de una tabla con el total de gasto y total de ahorro separado por cada situación	0	No la hacen													
			1	Sólo calculan la diferencia con el gasto por hábito		X	X		X	X		1	1	1	0	1	1
			2	Utilizan los parámetros estadísticos para calcular el gasto													
		Utilización de los parámetros y valores, así como las gráficas y/o diagramas más adecuados para exponer cada situación	0	No utilizan gráficas ni parámetros adecuados													
			1	Utilizan gráficas adecuadas aunque no porcentajes o parámetros	X	X	X	X				2	2	2	0	1	2
			2	Utilizan gráficas adecuadas y porcentajes o parámetros													
		Establecen conclusiones del estudio	0	No sacan conclusiones o son muy escasas													
			1	Sacan conclusiones poco relacionadas con su estudio	X			X				1	2	1	0	0	2
			2	Sacan conclusiones que vinculan su estudio con otras situaciones													

Figura 4. Instrumento de evaluación de la alfabetización matemática

Para analizar las opiniones del alumnado respecto a esta metodología de trabajo se utilizaron dos cuestionarios de opinión. El primero de ellos se realizó a los tres meses del inicio del curso. En él se trataban aspectos clave del ABP con carácter general y de manera interdisciplinar (trabajo en grupo, uso de las TIC, motivación, o contraste con la metodología tradicional). El segundo de ellos, cuatro meses después, incidió de nuevo en aspectos generales como el aprendizaje colaborativo o el uso de las TIC, y otros aspectos concretos en la asignatura de matemáticas (implicación del alumnado, utilidad de las tareas, aprendizaje de la materia, grado de autonomía, dificultades encontradas, etc.) Este cuestionario precedió una entrevista grabada en video que mantuvieron las investigadoras con el grupo clase para tratar algunos de estos aspectos.

RESULTADOS

A continuación se exponen los resultados obtenidos tras el análisis de los datos respecto a los procesos de alfabetización matemática, las dificultades que aparecen y la opinión del alumnado sobre esta metodología.

Procesos de alfabetización matemática

El análisis de la parrilla de observación de la tarea central del proyecto muestra, en primer lugar, la riqueza y complejidad de dicha tarea al trabajar, a través de los distintos procesos, todas las capacidades matemáticas establecidas por PISA, con especial énfasis en las de matematización y diseño de estrategias para la resolución de problemas.

Un análisis horizontal de los resultados permite comprobar que los procesos de formulación matemática de situaciones y empleo de herramientas y procedimientos matemáticos han sido conducidos por el grupo clase de manera satisfactoria. Esto puede deberse, por una parte, al apoyo que proporcionan los problemas y tareas resueltos en grupos e individualmente durante el desarrollo del proyecto y, por otra, a la alimentación continua del profesor durante la fase de formulación matemática de situaciones. Dicha fase presenta dificultades, ya que los datos no son explícitos y el alumnado debe reconocer los aspectos para la matematización. A la hora de contrastar aportaciones y justificar una elección, solo el equipo 2 utiliza argumentos matemáticos para elegir el método adecuado de medición del agua con expresiones como "es más fiable", "más original" o "ha dado lugar a resultados semejantes". También resulta problemático el paso de la situación real al modelo o esquema matemático, aunque se llega a resultados óptimos con el intercambio de información entre los equipos y el profesor. Inicialmente algunos equipos asemejaban el fregadero o la bañera con un paralelepípedo para calcular su capacidad y determinar el gasto de agua al fregar los platos o ducharse. Otros, aunque hacían una medición correcta del gasto, no explicaban el procedimiento seguido a la hora de usar el agua, utilizando frases como "me lavo los dientes normal". Con sucesivas revisiones consiguieron llegar a esquemas más concisos como el de la Figura 5:

1. Abrir el grifo para mojarme y cerrarlo
2. Enjabonarme el cuerpo
3. Abrir el grifo para enjuagarme y volver a cerrarlo
4. Enjabonar con champú la cabeza
5. Volver a abrir el grifo para enjuagarme completamente

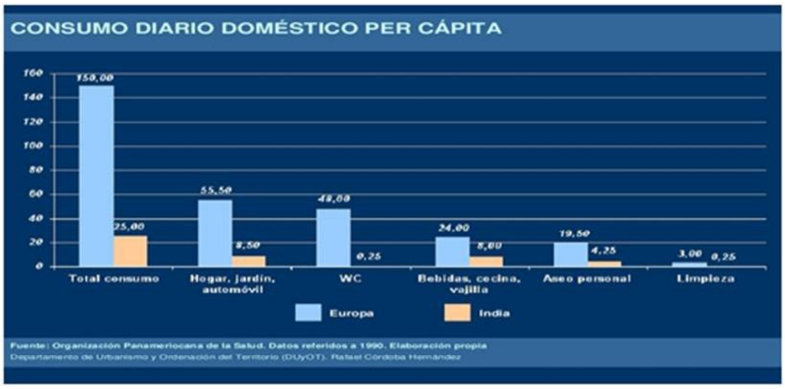
1. He cogido un vaso de 0,25 litros y he medido el tiempo que tarda en llenarse con el grifo de la ducha, que han sido 5 segundos.
2. Me he duchado y he calculado el tiempo que ha estado el grifo abierto: 6 minutos.
3. Finalmente, he planteado una relación de proporcionalidad directa y resuelto mediante una regla de tres:

CAPACIDAD	TIEMPO
0,25 litros	5 segundos
X	6 minutos = 360 segundos

$$X = \frac{360 \cdot 0{,}25}{5} = \frac{90}{5} = 18\ litros$$

Figura 5. Esquema de uso y cálculo del agua gastada en la ducha en modo ahorrativo del equipo 1

En el proceso de devolución de los datos matemáticos a la situación real es, sin duda, donde se observan mayores deficiencias. A la complejidad que presenta para el alumnado la validación de resultados, el contraste de ideas y la comunicación en este sentido, reflejada también en estudios precedentes (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014), hay que sumarle falta de tiempo para realizar una realimentación sistemática por parte del profesor al final del proyecto. En los indicadores correspondientes a esta fase del proyecto los equipos tienen valoraciones muy bajas, y sólo dos de ellos (2 y 6) presentan unos resultados apropiados de su estudio estadístico y una conclusión del trabajo comparándolos con gráficas o situaciones en países subdesarrollados (Figura 6).



Como se observa, en la India se gasta mucho menos agua que en Europa, ya que India es un país subdesarrollado y donde éste bien escasea.

No obstante, y a la vista del gráfico podemos observar que los datos analizados anteriormente para nuestro municipio coinciden con los resultados para Europa. Donde más agua se gasta en Europa es en el hogar y el jardín y también es así en la India, aunque la diferencia en litros es muy grande.

Figura 6. Conclusiones del equipo 6 relacionando su estudio con el gasto en Europa e India

Por último, una lectura vertical de la parrilla nos permite evaluar el trabajo de los grupos mediante el nivel de logro de los indicadores establecidos para la tarea. En este sentido, el trabajo de los equipos 2 y 6 han sido calificados con un 8, los equipos 1 y 3 han obtenido un 7 y los equipos 4 y 5, con muchas carencias o errores, han obtenido 2.5 y 4 respectivamente. Las mejores calificaciones en el trabajo colaborativo han sido para el alumnado con mayor implicación y trabajo, que es, a su vez, el que obtiene mejores calificaciones en la prueba escrita. No obstante, se observa una leve mejoría en las calificaciones del alumnado con mayores dificultades que ha formado parte de equipos más cohesionados en el trabajo del producto final.

Opinión del alumnado

De la triangulación de los instrumentos empleados para recabar las opiniones del alumnado sobre esta metodología se obtuvieron los siguientes resultados:

En los dos cuestionarios realizados, más del 60% del alumnado dice preferir el aprendizaje por proyectos a las clases convencionales y lo considera más divertido, si bien demandan más tiempo para cada proyecto y mayor flexibilidad para elaborar su producto final. Dicho producto, a pesar de ser un eje fundamental del proyecto, no está resultando un aliciente debido a la desigual implicación del alumnado. A los/as más responsables esto les genera una gran inquietud e impide que puedan disfrutar del trabajo, necesitando dedicar mucho tiempo extra para cumplir con los requerimientos.

La opinión respecto al trabajo colaborativo redunda en esta cuestión. Así, aunque más del 80% considera que el trabajo en equipo puede funcionar muy bien si hay suficiente implicación por parte de todos sus miembros, el porcentaje que prefiere el trabajo por equipos ha disminuido casi a la mitad entre el cuestionario inicial y el final. Además, en sus opiniones, muchos de ellos lo consideran una ventaja y a la vez un inconveniente. Reconocen como positivo el poder ayudar y ser ayudados por los compañeros, o que les servirá para su futuro laboral, pero encuentran grandes dificultades cuando algunos miembros no se implican y su trabajo recae sólo sobre unos pocos. Es necesario realizar un análisis más profundo de esta dimensión para encontrar soluciones que permitan resolver estos inconvenientes.

Respecto al aprendizaje de las matemáticas, la mayoría reconoce en todos los cuestionarios la utilidad de los aprendizajes adquiridos y que las tareas son más prácticas y contextualizadas. Como indica uno de ellos, "[...] en matemáticas, el año pasado, estudiábamos cosas que yo pensaba que no servían para nada [...] Dábamos cosas raras que yo... pues no las utilizaba mucho, pero ahora... las utilizamos mejor". Sin embargo, aunque muchos afirman que este tipo de tareas les obligan más a pensar y reflexionar, también consideran que no están aprendiendo suficientes matemáticas, puesto que vinculan el aprendizaje matemático a los contenidos tradicionales del libro de texto. En palabras de uno de ellos, "parece que el nivel del instituto [...] ha bajado, porque recuerdo que en sexto estábamos dando potencias y raíces".

Este aspecto está relacionado, por otro lado, con la percepción, también mayoritaria, de que es difícil organizarse con este tipo de aprendizaje. Pasar de la facilidad con la que se encuentra la información en los libros de texto y la realización de ejercicios "tipo" al final de cada lección, a este tipo de tareas, hace que sea necesario una estructura o andamiaje que les permita organizarse o tener un esquema más claro de los pasos a seguir y de las herramientas que están utilizando.

Finalmente, uno de los aspectos mejor valorados por el alumnado es el uso de las nuevas tecnologías en el aula. Casi un 73% de la clase lo reconoce como una herramienta útil y motivadora, independientemente de la metodología con la que se implemente su uso.

CONCLUSIONES

Se ha presentado el diseño del trabajo matemático dentro de un proyecto interdisciplinar en secundaria que pretende fomentar la alfabetización matemática según los principios en PISA 2012 y las directrices curriculares. Además, se ha presentado un sistema de evaluación del que destacamos el instrumento para valorar las tareas abiertas del proyecto en base a los procesos y capacidades que definen la alfabetización matemática. Por último, se ha hecho una valoración cualitativa de esta metodología para encontrar aspectos a mejorar en los ciclos sucesivos de la investigación-acción.

Los resultados de esta investigación, más que un conjunto de hallazgos, reflejan los dilemas que los profesores pueden afrontar cuando se trata de poner en práctica metodologías activas y contextualizadas como el ABP.

Se ha probado el potencial de esta metodología para promover los procesos de alfabetización, especialmente los relacionados con la aplicación de conocimiento matemático y la modelización. Pero también se ha puesto de manifiesto la dificultad que supone para el alumnado la creación de un esquema que permita matematizar una situación real, así como el contraste, la reflexión y la aplicación de los resultados matemáticos a dicha situación. Coincidimos con Planas (2011) en que el trabajo por proyectos en matemáticas tiene que incluir demandas explícitas de procedimientos y procesos por parte del profesorado para que, manteniendo la autonomía del alumnado, puedan trabajarse los aspectos matemáticos deseados, incluyendo un orden y esquema en los procesos de resolución de problemas. Un andamiaje cuidado, en lo que concierne a los procesos de matematización horizontal y a la comunicación en el aula, será objeto de atención en el próximo ciclo. Dicho andamiaje puede contribuir a establecer indicadores que puedan compartirse con el alumnado, adaptando la parrilla de valoración de las tareas abiertas para que pueda ayudarles a autoevaluarse y organizarse conociendo las rutas de trabajo de la tarea. Ello contribuiría a hacerles conscientes de su aprendizaje matemático, mitigando sus inquietudes en este sentido.

Será objeto prioritario de atención en los próximos diseños la búsqueda de estrategias para mejorar la calidad del trabajo colaborativo y la implicación de todo el alumnado, aspecto que se ha revelado clave para afrontar con la motivación necesaria las exigencias cognitivas de este tipo de trabajo.

Referencias

Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 49-92.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2001). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Blumenfeld, P. C., Soloway, E., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Guzdial, M. y Palincsar, A. (1991). Motivating project-based learning: Sustaining the doing, supporting the learning. *Educational Psychologist*, 26(3-4), 369-398.

Doerr, H. M. y Tinto, P. P. (2000). Paradigms for teacher-centered classroom-based research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 403-427). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM

Jones, B. F., Rasmussen, C. M. y Moffitt, M. C. (1997). *Real-life problem solving: A collaborative approach to interdisciplinary learning.* Washington DC: American Psychological Association.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.

Mettas, A. C. y Constantinou, C. C. (2007). The technology fair: A project-based learning approach for enhancing problem solving skills and interest in design and technology education. *International Journal of Technology and Design Education, 18*, 79-100.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria y el Bachillerato*. BOE, 3, 169-546.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria y el bachillerato*. BOE, 25, 6986-7003.

Moursund, D. (1999). *Project-based learning using information technology.* Eugene, OR: International Society for Technology in Education.

OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. París: OECD.

Pierce, L. (2009) Project based instruction in a sixth grade mathematics classroom: A case of roller coasters. *Summative Projects for MA Degree.* http://digitalcommons.unl.edu/mathmidsummative/1

Planas, N. (2011). Innovación y buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En V. Font, J. D. Godino, J. M. Goñi y N. Planas (Eds.), *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 57-160). Barcelona: Graó.

Rico, L. (2011). El estudio PISA y la evaluación de la competencia matemática. *Matematicalia, 7*(1), 1-12.

Thomas, J. W. (2000). *A review of research on project-based learning.* Los Angeles: The Autodesk Foundation.

INFLUENCIA DE LA AUTOCONFIANZA Y EL PERFIL MOTIVACIONAL EN EL "FLUJO" EN MATEMÁTICAS

Influence of self-confidence and motivational profile in "flow" in mathematics

Berenguel, E., Gil, F., Montoro, A. B. y Moreno, M. F.

Departamento de Educación, Universidad de Almería

Resumen

Varios autores consideran que la motivación y el afecto son fundamentales en el aprendizaje de matemáticas, por su influencia en el rendimiento académico de los estudiantes y en su elección de actividades matemáticas. El flujo está asociado a la motivación intrínseca, y se produce cuando los sujetos experimentan alta concentración y disfrute con la actividad que están realizando. La variable afectiva autoconfianza es la creencia sobre la propia competencia matemática. El perfil motivacional se caracteriza mediante la combinación de distintas metas académicas. En este estudio se analiza, a través de cuestionarios, la influencia de la autoconfianza y del perfil motivacional en experiencias de flujo en matemáticas. La muestra está integrada por 161 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.

Palabras clave: *experiencia de flujo, motivación en matemáticas, autoconfianza, perfil motivacional, estudiantes universitarios*

Abstract

Some authors consider that motivation and affect are fundamental in mathematics learning, because of their influence in students' academic performance and choice of mathematics activities. Flow is related to intrinsic motivation, and it is produced when individuals feel high concentration and enjoyment with the activity they are doing. Self-confidence, an affective variable, is self-competence belief in mathematics. Motivational profile is characterized for a combination of different academic goals. The aim of this study is to analyze the influence of self-confidence and motivational profile in flow experiences in mathematics. For this purpose, the research uses some questionnaires. The sample is made up of 161 pre-service elementary teachers.

Keywords: *flow experience, mathematics motivation, self-confidence, motivational profile, University students*

INTRODUCCIÓN

Las reacciones de los estudiantes en resolución de problemas o tareas matemáticas no se pueden explicar sólo desde lo cognitivo (Gómez-Chacón, 2010), sino que es necesario atender a aspectos afectivos y motivacionales. Dichos aspectos juegan un papel importante en el rendimiento académico de los estudiantes (Pekrun, Elliot y Maier, 2009) y, por tanto, cobra especial relevancia analizarlos en el caso de los maestros en formación, ya que sus creencias, actitudes y emociones hacia las matemáticas influirán en las de sus futuros alumnos, así como en el rendimiento académico de éstos cuando se enfrenten a tareas matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero, 2009).

Siguiendo a Gómez-Chacón (2010), se admiten cuatro categorías de afecto: emociones; actitudes; creencias; y, valores éticos y morales. Esta autora resalta la necesidad de describir las relaciones entre las creencias de los estudiantes y su comportamiento en el aprendizaje. Precisamente la autoconfianza, o creencia en las propias habilidades para resolver una tarea, ha sido uno de los aspectos más estudiados en las teorías motivacionales, en concreto, en la Teoría de la Autoeficacia (Bandura, 1997) y en la Teoría de la Autodeterminación (Deci y Ryan, 1985). Esta última distingue

Berenguel, E., Gil, F., Montoro, A. B. y Moreno, M. F. (2015). Influencia de la autoconfianza y el perfil motivacional en el "flujo" en matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 173-181). Alicante: SEIEM.

entre dos tipos de motivación: extrínseca, cuando los motivos por los que se realiza la acción son externos a ella; e intrínseca, cuando se lleva a cabo una actividad por el placer que produce realizarla. En este sentido, la motivación intrínseca está asociada a la necesidad de sentirse competente, de poder elegir y de relacionarse con los demás.

Según Hannula (2006), las metas académicas del estudiante, entendiendo éstas como las razones de los estudiantes para aprender y hacer matemáticas (Phelps, 2010), influyen en las emociones. Este autor indica que pueden surgir emociones negativas durante la resolución de problemas por la aparición de un conflicto entre dos de las metas de un sujeto.

Teniendo en cuenta que la motivación intrínseca, relacionada con emociones y actitudes positivas, es la más intensa y duradera, nuestro trabajo pretende conocer mejor los aspectos que facilitan su aparición. La teoría de flujo, introducida por Csikszentmihalyi en 1975, analiza las condiciones en las que aparece la motivación intrínseca, incorporando explícitamente el afecto en el estudio de la motivación (Schweinle, Meyer y Turner, 2006). En definitiva, motivación y afecto son constructos estrechamente relacionados.

Las experiencias de flujo, es decir, estados de alta concentración y disfrute con la tarea que se está realizando, influyen en el rendimiento académico (Whalen, 1998) y en la motivación intrínseca (Larson, 1998). Además, las experiencias de flujo de profesores y alumnos están relacionadas (Gray, 2003), y de ahí el interés por conocer los aspectos que las potencian. Así se podrán manejar experiencias de aprendizaje que promuevan estados de flujo y, en consecuencia, desarrollar la motivación intrínseca y el rendimiento de ambos colectivos.

MARCO TEÓRICO

La aparición del flujo depende de la persona, la tarea y el entorno donde se realiza. Un aspecto clave para fluir es el equilibrio entre la percepción del nivel de desafío propuesto por la tarea y su capacidad para enfrentarse a ella (Csikszentmihalyi, 2003). Tal percepción es un aspecto subjetivo, que podría estar relacionado con la autoconfianza de cada sujeto. En un estudio con profesores de secundaria, Rodríguez, Salanova, Cifre y Schaufeli (2011) observaron que la autoconfianza de una persona en su habilidad es un facilitador para la experiencia de flujo.

Dentro del campo de la educación matemática, Pérez-Tyteca (2012) considera que la autoconfianza es una variable afectiva que influye en la decisión sobre la elección de carreras cuyo currículo incluye matemáticas. Se han detectado diferencias, en cuanto al papel de los desafíos, entre estudiantes con talento y estudiantes con habilidades en torno a la media o bajas (Schweinle *et al.*, 2006). Posiblemente, los estudiantes que tienen confianza en su habilidad para resolver problemas matemáticos buscan tareas matemáticas más desafiantes que aquéllos que no poseen tal confianza, por lo que experimentarían sentimientos de autonomía y competencia más fuertes, ambos sentimientos precursores de la motivación intrínseca (Reeve, 1994). De ahí que nos planteemos ver cómo influye la autoconfianza en el nivel de flujo.

Para el propósito de esta investigación, y atendiendo a la relación del sujeto con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se adoptará el término autoconfianza como la creencia sobre la propia competencia matemática (McLeod, 1992), que consiste en la confianza que un sujeto tiene en su habilidad para aprender y desempeñar satisfactoriamente tareas matemáticas (Fennema y Sherman, 1976).

Por otro lado, la relación entre la motivación y el rendimiento académico ha sido estudiada desde diferentes perspectivas, entre las que se encuentra el enfoque en las metas académicas (Pekrun *et al.*, 2009). Existen diferentes matizaciones conceptuales referidas a las metas académicas, pero en todos los casos hay una orientación motivacional de carácter intrínseco, en la que las metas se denominan de aprendizaje y se enfocan en incrementar la competencia, y otra de carácter extrínseco, en la que las metas se llaman de rendimiento y se centran en demostrar la competencia

(Gaeta, 2009). Además, esta autora considera una clasificación de estas últimas en dos tipos: meta de rendimiento de aproximación (o simplemente de rendimiento) que se centra en querer mostrar una mayor competencia con respecto a otros y meta de rendimiento de evitación de la tarea (o sencillamente de evitación) que busca evitar parecer incompetente o menos competente que otros, completando el trabajo con el mínimo esfuerzo.

Las metas académicas no son totalmente excluyentes entre sí (Inglés, Martínez-Monteagudo, García-Fernández, Valle y Castejón, 2015), sino que los estudiantes pueden trabajar considerando varios tipos de metas al mismo tiempo (Hannula, 2006). El perfil motivacional surge de distintas combinaciones de metas y queda caracterizado en función del mayor o menor predominio de cada una de ellas. No obstante, dependiendo del colectivo de estudiantes la composición de perfiles puede variar (Inglés *et al.*, 2015).

En este trabajo pretendemos conocer la influencia del perfil motivacional en el flujo, y si la aparición de éste depende también de la tarea. Puesto que nuestro estudio se desarrolla en el contexto de la actividad matemática de los estudiantes para maestro del grado de Primaria, siguiendo a Blanco (1997), admitimos tres tipos de tareas para formación de maestros: actividades matemáticas, que generan y desarrollan conocimiento matemático; actividades sobre currículo escolar y/o relacionadas con teoría sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que generan y desarrollan conocimiento matemático escolar y sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas; y tareas didácticas contextualizadas y personalizadas, que generan y desarrollan conocimiento didáctico del contenido.

OBJETIVOS

Nuestro propósito general es contrastar y mejorar el modelo de flujo propuesto por Montoro (2014), centrado en las características de la tarea, introduciendo nuevas variables como la autoconfianza y el perfil motivacional de los estudiantes (Figura 1). Para ello, en el contexto de estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Almería, nos planteamos analizar la influencia de:

- Las creencias de autoconfianza de los estudiantes en sus experiencias de flujo al realizar diferentes tareas matemáticas para formación de maestros (O1).
- Los distintos perfiles motivacionales, como facilitadores y/o inhibidores de los procesos de flujo (O2).

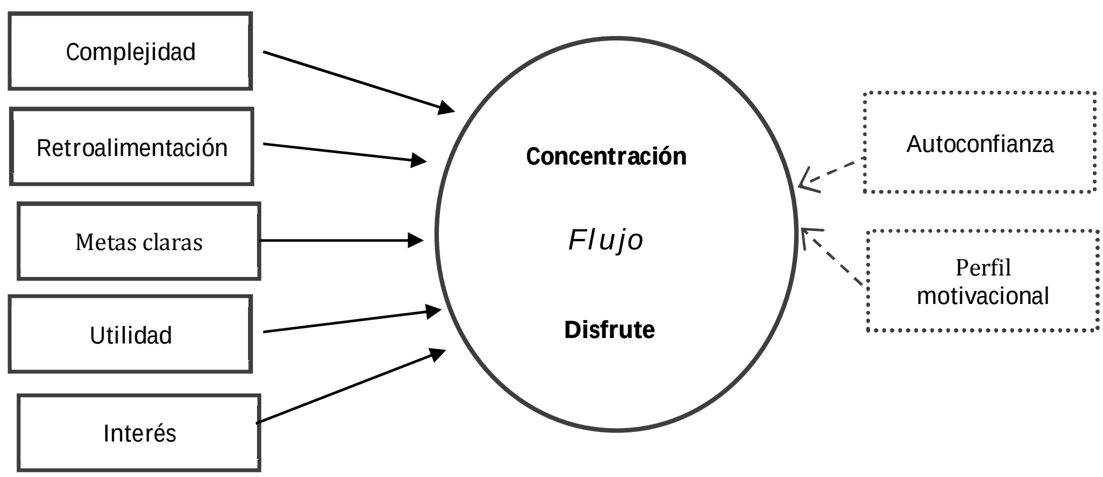


Figura 1. Modificación inicial del modelo, introduciendo autoconfianza y perfil motivacional

METODOLOGÍA

Para dar respuesta a estos objetivos, se realizó un estudio descriptivo de tipo exploratorio e interpretativo. La información se obtuvo mediante cuestionarios aplicados en diferentes momentos. Para estudiar el flujo experimentado por los estudiantes, maestros en formación, durante la realización de seis tareas matemáticas, se aplicó un cuestionario cerrado de flujo al finalizar cada una de las tareas. Con la intención de determinar el perfil motivacional y las creencias de autoconfianza de cada individuo, se emplearon dos cuestionarios cerrados que se aplicaron conjuntamente y por una sola vez.

Participantes

Por razones de disponibilidad, el estudio se llevó a cabo con los estudiantes de 3º curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Almería. Se recogió información de 161 estudiantes, que colaboraron de forma voluntaria, contestando los citados cuestionarios. Estos estudiantes realizaron seis tareas distintas, en clases prácticas durante un período aproximado de dos meses, de la asignatura *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética, la Estadística y el Azar*, con las que se pretende que trabajen distintos materiales y recursos para la enseñanza de la Aritmética, que exploren y profundicen en algunos de los usos de los números, así como que se familiaricen con diferentes modelos de enseñanza del número. Destacamos la tarea 2, que es una tarea didáctica contextualizada y personalizada, enfocada al conocimiento didáctico del contenido, en concreto de los materiales para la enseñanza de los primeros números; y la tarea 4, que es una tarea sobre currículo escolar, cuya finalidad es que los alumnos se familiaricen con el funcionamiento de la calculadora escolar.

Variables e instrumentos de recogida de información

Las variables en las que se centra este trabajo son el flujo, la autoconfianza y el perfil motivacional.

El flujo experimentado en cada una de las seis tareas se obtuvo a través de la aplicación de un cuestionario cerrado, diseñado y validado por Montoro (2014). Dicho cuestionario consta de 18 ítems, pero en este estudio sólo se consideraron las respuestas de los 2 ítems relativos a la concentración (Ej. "Mi concentración era interrumpida por cualquier cosa") y los 4 de disfrute (Ej. "Me he divertido con la actividad"), formulados por parejas en positivo y negativo.

La autoconfianza se midió con el cuestionario cerrado, adaptado al castellano y validado por Pérez-Tyteca (2012), de la escala de autoconfianza de Fennema y Sherman (1976). Está integrado por 12 ítems (Ej. "Me siento muy seguro cuando se trata de matemáticas"), de los cuales 6 están enunciados en positivo y 6 en negativo.

Los perfiles motivacionales se obtuvieron como combinación de tres metas académicas: metas de aprendizaje, metas de rendimiento y metas de evitación. Éstas se identificaron con la aplicación de un cuestionario cerrado que es una adaptación para matemáticas del *Cuestionario Personal de Orientación a Metas de Logro,* propuesto y validado por Gaeta (2009). El cuestionario está compuesto por 14 ítems, de los que 5 se refieren a metas de aprendizaje, 5 a metas de rendimiento y 4 a metas de evitación. Ejemplos de ítems adaptados son: "Una de mis metas en este curso es aprender todo lo que pueda en matemáticas" (*Una de mis metas en este curso es aprender todo lo que pueda*); "Para mí es importante que me consideren listo comparado con los demás en matemáticas" (*Es importante para mí que me consideren listo comparado con los demás en clase*); "Una de mis metas es evitar que los demás piensen que no soy listo en clase de matemáticas" (*Una de mis metas es evitar que los demás piensen que no soy listo en clase*).

Todos los cuestionarios usan una escala de valoración tipo Likert, de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo).

Análisis de datos

En primer lugar, tras recodificar las valoraciones de los ítems negativos de los cuestionarios, se calculó la puntuación media de los ítems correspondientes a cada una de las escalas (concentración, disfrute, autoconfianza, metas de aprendizaje, metas de rendimiento y metas de evitación). El flujo de cada sujeto se halló como la media geométrica de la concentración y el disfrute. Se analizaron las puntuaciones medias de flujo correspondientes a las seis tareas, para comprobar si existían o no diferencias significativas entre ellas (*Lambda de Wilks*).

Se procedió a analizar la influencia en el flujo de las variables incluidas en este estudio (autoconfianza y perfil motivacional). Los datos obtenidos no se distribuyen según una normal, salvo los referentes a la autoconfianza, por lo que se han aplicado pruebas no paramétricas. En concreto, se utilizaron la prueba U de Mann-Whitney y la prueba de Kruskal-Wallis, ambas contenidas en el paquete estadístico SPSS, para determinar el nivel de significación de las diferencias entre las puntuaciones medias que obtienen las variables, fijando un nivel de significación de ,05. Se calculó el tamaño del efecto mediante la fórmula de Cohen (Morales, 2012), para establecer la relevancia de las diferencias, considerando que los efectos menores que ,25 son pequeños, los comprendidos entre ,25 y ,5 son moderados y los mayores de ,5 son grandes.

Para estudiar la posible influencia de la autoconfianza en el flujo de cada tarea, y más en detalle en el disfrute y en la concentración, se realizó una clasificación de los sujetos en tres grupos, en función de su autoconfianza: baja (AB), cuando es menor de 2,5; media (AM), cuando está entre 2,5 y 3,49; alta (AA), cuando es mayor o igual a 3,5 (Pérez-Tyteca, 2012).

Una vez estandarizadas las puntuaciones directas en la medida de las metas (Inglés *et al.*, 2015), se llevó a cabo una clasificación de los participantes en función de sus perfiles motivacionales a partir de distintas combinaciones de tres tipos de metas académicas (metas de aprendizaje, metas de rendimiento y metas de evitación). Para determinar los perfiles motivacionales se realizó un análisis de conglomerados (*k medias*), con la intención de establecer el mayor número posible de grupos con diferentes combinaciones de metas (Inglés *et al.*, 2015), identificándose cuatro perfiles distintos.

RESULTADOS

Flujo en las tareas

Existen diferencias significativas (λ_{Wilks}=,821; p=,000) entre las puntuaciones medias de la variable flujo de cada una de las seis tareas. La más elevada se alcanzó en la tarea 2 (*Materiales para los primeros números*) y la más baja se obtuvo en la tarea 4 (*Uso de la calculadora II*).

Relación de la autoconfianza con el flujo

De los análisis anteriormente mencionados se ha obtenido que la autoconfianza establece diferencias significativas (p< ,05) en las medias de flujo, disfrute y concentración únicamente en la tarea 2. Estas diferencias son relevantes en el flujo del grupo con autoconfianza alta con respecto al de autoconfianza media, en el disfrute del grupo con autoconfianza alta con respecto a los otros dos grupos, y en la concentración del grupo con autoconfianza media con respecto a los otros dos, con un tamaño del efecto moderado (TE> ,25). Se puede ver en la Tabla 1 que el grupo con autoconfianza alta obtiene las medias de flujo y de disfrute más elevadas, y el grupo con autoconfianza baja alcanza la media de concentración más alta.

Tabla 1. Por grupos de autoconfianza, tamaño del efecto y estadísticos descriptivos en las variables flujo, disfrute y concentración de la tarea 2

	Flujo (p= ,013)				Disfrute (p= ,019)				Concentración (p= ,013)			
	TE		*M*	*DT*	*TE*		*M*	*DT*	*TE*		*M*	*DT*
	AB	AM			AB	AM			AB	AM		
AB (*n*=25)	-		4,33	,81	-		4,19	,86	-		4,48	,82
AM (*n*=69)	,23	-	4,15	,56	,07	-	4,13	,69	,32	-	4,21	,64
AA (*n*=35)	,13	,38	4,43	,51	,33	,42	4,48	,52	,08	,25	4,41	,68

Nota. AB = autoconfianza baja, AM = autoconfianza media, AA = autoconfianza alta

Relación de los perfiles motivacionales con el flujo

En referencia a la clasificación de los sujetos en función de la combinación de tres metas académicas, los resultados muestran que el modelo de cuatro clústeres cumple con el criterio de convergencia antes de las diez iteraciones.

Las cuatro agrupaciones (Figura 2) que se obtienen son: MR/ME, de 42 participantes (26,1% del total), con predominio de metas de rendimiento y metas de evitación (clúster 1); MMA, de 10 participantes (6,2% del total), con puntuaciones elevadas en las tres metas (clúster 2); MMB, integrado por 24 participantes (14,9% del total), con puntuaciones bajas en las tres metas (clúster 3); y MA, de 85 participantes (52,8% del total), con predominio de metas de aprendizaje (clúster 4).

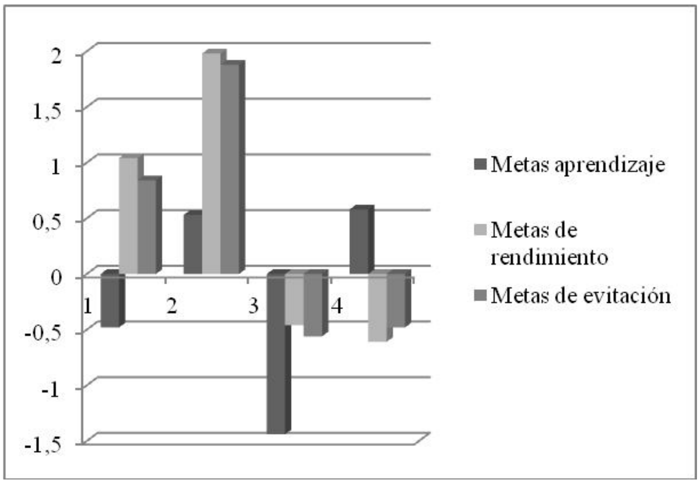


Figura 2. Representación gráfica del modelo de cuatro clústeres

Los datos indican que los cuatro perfiles motivacionales presentan diferencias significativas en el nivel de flujo de las seis tareas.

Como se observa en la Figura 3, el grupo MMA tiene variaciones bruscas en el nivel de flujo en función de la tarea, y el grupo MA alcanza medias de flujo similares en todas las tareas. En general, las medias de flujo inferiores corresponden al grupo MMB, seguido del grupo MR/ME.

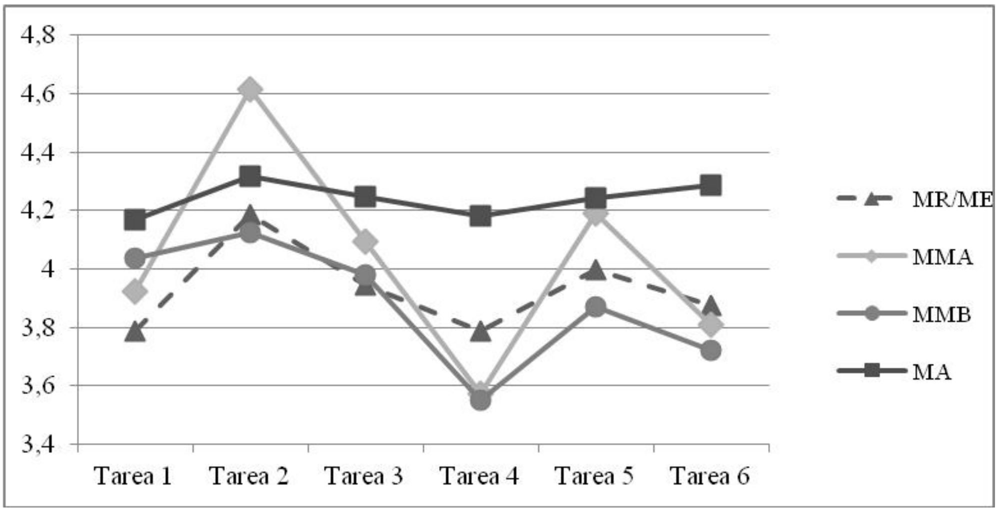


Figura 3. Representación gráfica del nivel de cada perfil motivacional en la media de flujo por tarea

La Tabla 2 es un ejemplo de comparación de medias de flujo entre los perfiles motivacionales, donde se ve que las diferencias más relevantes corresponden al grupo MA.

Tabla 2. Por perfiles motivacionales, tamaño del efecto y comparación de medias de flujo en la tarea 4

Flujo (*p*= ,000)	*TE*	*DM*	*TE*	*DM*	*TE*	*DM*	*M*	*DT*
	MR/ME		MMA		MMB			
MR/ME (*n*=31)	-						3,79	,57
MMA (*n*=9)	,26	,21	-				3,57	,89
MMB (*n*=23)	,29	,24	,03	,02	-		3,55	,74
MA (*n*=80)	,50	,40	,74	,61	,78	,61	4,18	,63

Nota. MR/ME = predominio de metas de rendimiento y de evitación, MMA = múltiples metas altas, MMB = múltiples metas bajas, MA = predominio de metas de aprendizaje

Los resultados revelan diferencias estadísticamente significativas entre los perfiles obtenidos con respecto a la concentración de cinco de las tareas (todas, excepto la 2), y con respecto al disfrute de cuatro de ellas (2, 4, 5 y 6). En referencia al disfrute, las medias más elevadas corresponden al grupo MA, y las más pequeñas, al grupo MMB. En cuanto a la concentración, el grupo MA alcanza las medias más altas, mientras que las más bajas las obtienen, según la tarea, el grupo MMB o el grupo MR/ME, y las medias de concentración del grupo MMA difieren dependiendo de la tarea.

DISCUSIÓN Y POSIBLES VÍAS DE CONTINUACIÓN

Nuestros resultados siguen la línea sugerida por Montoro (2014): la experiencia de flujo depende de la tarea, lo cual enfatiza la necesidad de diseñar tareas que faciliten los estados de flujo. Resaltamos que la puntuación de flujo más alta se alcanzó en una tarea didáctica contextualizada y personalizada, en la que los estudiantes tenían que diseñar una tarea utilizando materiales para la enseñanza de los primeros números.

Como respuesta al primer objetivo, se ha visto que la autoconfianza de los sujetos influye en el flujo de una de las tareas, siendo el grupo con autoconfianza alta el que alcanza la media de flujo más elevada. Por ello, habría que estimular la confianza del alumnado en sus habilidades matemáticas, tanto verbalmente como proponiendo tareas con nivel de complejidad adecuado a su capacidad.

Por otra parte, para responder al segundo objetivo, se han diferenciado cuatro grupos caracterizados por distintas combinaciones de metas, que han dado lugar a otros tantos perfiles motivacionales. El grupo mayoritario (52,8%) está constituido por estudiantes con predominio de metas de aprendizaje. Asimismo, las medias más altas de disfrute corresponden al perfil motivacional con predominio de metas de aprendizaje. Estos resultados confirman que los alumnos universitarios se enfocan menos a evaluaciones externas y que la orientación al aprendizaje correlaciona positivamente con el disfrute durante la realización de la tarea (Gaeta, 2009). Además, los cuatro perfiles motivacionales distintos establecen diferencias significativas en el flujo de todas las tareas, siendo el perfil MA el que parece facilitar los procesos de flujo, mientras que los perfiles MMB y MR/ME parecen ser inhibidores. El grupo MMA presenta variaciones bruscas en el nivel de flujo en función de la tarea, posiblemente debido a que las múltiples metas entran en conflicto y generan emociones negativas en algunos casos (Hannula, 2006). Por tanto, sería conveniente promover un ambiente de clase con orientación al aprendizaje.

Es decir, no sólo es importante el diseño de tareas adecuadas, sino que también se deben tener en cuenta aspectos personales de los estudiantes, como sus creencias sobre su propia competencia matemática y su perfil motivacional de metas académicas.

En posteriores estudios, habría que profundizar en las características de las tareas que facilitan los procesos de flujo, así como introducir otras variables como la experiencia previa de los estudiantes en matemáticas.

Referencias

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behaviour change. *Psychological Review*, 84, 191-215.

Blanco, L. (1997). Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido. En L. Rico y M. Sierra, (Eds.), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 34-40). Zamora: SEIEM.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2009). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradigma, 29*(2), 157-171.

Csikszentmihalyi, M. (2003). *Aprender a fluir* (A. Colodrón, Trad.) (3 ed.). Barcelona: Kairós. (Trabajo original publicado en 1997).

Deci, E. L. y Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Nueva York: Plenum.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6*(31), 324-326.

Gaeta, M. L. (2009). *La autorregulación del aprendizaje: la estructura del aula, la orientación a metas y las estrategias volitivas y metacognitivas en escolares adolescentes*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.

Gray, P. (2003). *Analysis of teachers' flow experiences as they relate to principal classroom walk-throughs. Datos no publicados del informe para Shawnee Mission School Board*. Shawnee Mission, Kansas.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165-178.

Inglés, C. J., Martínez-Monteagudo, M. C., García-Fernández, J. M., Valle, A. y Castejón, J. L. (2015). Perfiles de orientaciones de metas y autoconcepto de estudiantes de Educación Secundaria. *Revista de Psicodidáctica, 20*(1), 99-116.

Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi, *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

Montoro, A. B. (2014). *Motivación y matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de Maestro de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Almería.

Morales, P. (2012). *El tamaño del efecto (effectsize): análisis complementarios al contraste de medias*. Disponible en http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oDelEfecto.pdf

Pekrun, R., Elliot, A. J. y Maier, M. A. (2009). Achievement Goals and Achievement Emotions: Testing a Model of Their Joint Relations with Academic Performance. *Journal of Educational Psychology, 101*(1), 115-135.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Phelps, C. M. (2010). Factors that pre-service elementary teachers perceive as affecting their motivational profiles in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 293-309.

Reeve, J. (1994). *Motivación y emoción* (A.M. Lastra, Trad.). Madrid: McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1992).

Rodríguez, A., Salanova, M., Cifre, E. y Schaufeli, W.B. (2011). When good is good: A virtuous circle of self-efficacy and flow at work among teachers. *Revista de Psicología Social, 26*(3), 427-441.

Schweinle, A., Meyer, D. K. y Turner, J. C. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*, *99*(5), 271-294.

Whalen, S. P. (1998). Flow and the engagement of talent: Implications for secondary schooling. *NASSP Bulletin*, *82*, 22-37.

EL PERFIL AFECTIVO/MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA

The affective/mathematical profile of students of science and engineering

Boigues, F. J., Estruch, V. y Vidal, A.

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

Resumen

En la investigación en educación matemática, el rendimiento se ha estudiado desde diferentes ópticas: cognitiva, social y emocional, entre otras. Este estudio analiza las creencias y actitudes de estudiantes de ingeniería y de ciencias a través de una metodología basada en la lógica fuzzy. Los resultados muestran, que a los de ingeniería les gustan más las matemáticas, presentan mayor autoestima matemática y creen que las matemáticas son importantes de un modo significativamente mayor que para los estudiantes de ciencias. No obstante, todos son conscientes de su responsabilidad en el aprendizaje de las matemáticas, y coinciden en valorar el papel del profesor, aunque no se considere un elemento influyente a nivel emocional.

Palabras clave: *Actitudes, creencias, fuzzy, rendimiento, matemáticas*

Abstract

In the research area of mathematics education, the performance has been studied from different perspectives: cognitive, social and emotional, among others. This study examines the beliefs and attitudes of engineering and science students through a methodology based on the fuzzy theory. The comparative results show that the engineering students like more the mathematics, they present a higher mathematical self-esteem and they believe that mathematics are more important with respect to the science students. However, all of them are aware of their responsibility in the learning of mathematics and they recognize the role of the teacher, although such role is not considered influential on the emotional level.

Keywords: *Attitudes, beliefs, fuzzy, performance, mathematics*

INTRODUCCIÓN

En años recientes, la universidad ha experimentado reformas que han llevado a una incorporación masiva de estudiantes, que algunos han denominado "democratización de la enseñanza universitaria". En la valoración del nivel matemático de los estudiantes que acceden a primer curso de ingeniería o ciencias, una opinión generalizada entre el profesorado suele ser que los alumnos presentan un nivel bajo. ¿Qué significa esto? ¿Que no se saben conceptos? ¿Que no se saben ciertos cálculos? ¿Que se sabe hacer algo que es insuficiente? Estas valoraciones son difusas, quedan en el terreno de lo especulativo y no influyen en el diseño de programas universitarios de matemáticas. A veces con cursos propedéuticos se intenta que los estudiantes alcancen el nivel "exigible".

Para afrontar los obstáculos que aparecen en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario, es necesario un conocimiento detallado de la secundaria ya que un tema en este nivel puede exigir conocimientos previos que los alumnos no poseen, ni tienen por qué poseer. Por otra parte, los resultados de pruebas de nivel realizadas a los alumnos constatan que una mayoría usan técnicas algorítmicas o rutinas sin base teórica. Asocian lo matemático a lo algebraico y se sienten incómodos en la resolución de problemas no estandarizados (Boigues, 2010). En línea con Rico

Boigues, F. J., Estruch V. y Vidal A. (2015). El perfil afectivo/matemático de estudiantes de Ciencias e Ingeniería. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp.183-190). Alicante: SEIEM.

(1995), los alumnos, en general, no aprenden de los errores, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no interiorizan el significado de conceptos, reglas o símbolos matemáticos.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática influyen otros factores además de los cognitivos. Un factor importante es el estado afectivo del estudiante, que determinará su actitud hacia el quehacer matemático (Bhowmik y Banearjee, 2013; Blanco y otros, 2010; Ma y Kishor, 1997; Nohd, Mahmood y Ismail, 2011). Esto obliga a los investigadores a penetrar en un nivel más íntimo del alumno: el afectivo/emocional. Según Gómez-Chacón (2009), al evocar relatos de matemáticos, descubrimos que el aprendizaje de las matemáticas trasciende la imagen racional y fría, ofreciendo horizontes donde el razonamiento se sitúa en un entresijo de afectos y emociones.

La lógica fuzzy aporta una herramienta para valorar aspectos del dominio afectivo/emocional de los alumnos. Técnicas fuzzy, basadas principalmente en métricas fuzzy, aparecen en algunos trabajos como herramientas para valorar aspectos del perfil afectivo/emocional del estudiante (Bhowmik, 2013). No obstante la bibliografía científica que recurre a la lógica fuzzy para abordar aspectos emocionales del alumno es escasa, limitando, en general, las técnicas fuzzy a la evaluación del aprendizaje (Bai y Chen, 2008; Saleh y Kim, 2009).

El objetivo fundamental de este trabajo es analizar las creencias y actitudes de estudiantes de ingeniería y de ciencias que acceden a un primer curso de grado para establecer si existen diferencias entre las dos poblaciones. Los resultados permitirán un mejor diseño de las asignaturas de matemáticas de primero en función del origen de los alumnos. Para el análisis se desarrolla una metodología, basada en la lógica fuzzy, que ofrece resultados fácilmente interpretables.

MARCO TEÓRICO

El trabajo se ha centrado en establecer aspectos característicos de la dimensión afectiva/emocional del estudiante que ha accedido a un primer curso de grado. Por otra parte, se ha recurrido a la potencia de la lógica fuzzy para desarrollar una herramienta metodológica que permita valorar dimensiones tan mediatizadas por la subjetividad y la incertidumbre como son aquellas relacionadas con aspectos afectivos y emocionales.

Dimensión afectiva y emocional del estudiante frente a las matemáticas

Numerosos trabajos han abordado el perfil afectivo/emocional de los estudiantes, además de explicar las posibles consecuencias a nivel cognitivo, en lo que respecta a las matemáticas. En Blanco (2010) y Gil (2005) podemos obtener una visión precisa del estado del arte. No obstante nuestro objetivo se concreta aportar una metodología sencilla que permita una aproximación al perfil afectivo-emocional de los alumnos que acceden a primer curso de grado de ingeniería o ciencias. Aunque hay varias aproximaciones a los descriptores del perfil, destacamos los descriptores básicos propuestos en McLeod (1989b), creencias, actitudes y emociones, que aportan una descripción simple pero muy clarificadora.

Las creencias matemáticas son una de las componentes del conocimiento del individuo y se basan en la experiencia en cuanto a su enseñanza y aprendizaje. Hay creencias conscientes distintas de las creencias básicas, que son a menudo inconscientes, cuya componente afectiva es más clara (Gil et al., 2005). Se distinguen dos grandes categorías de creencias en los estudiantes de matemáticas (Bermejo, 1996): Creencias sobre las matemáticas en sí mismas y creencias en relación con las matemáticas, las cuales dependerían más de los afectos (como el autoconcepto, la confianza, etc.).

Las actitudes hacia las matemáticas se ponen de manifiesto en la forma en que los alumnos se acercan a las tareas: confianza, deseo de explorar caminos alternativos, perseverancia, interés, etc. (Gil et al., 2005; Miñano y Castejón, 2011; Sakiz, Pape y Hoy, 2012). Las actitudes dependen de las características personales del estudiante, relacionadas con su autoconcepto académico y en la motivación de logro. Distinguiremos entre actitudes hacia la matemática, que van referidas al aprecio y al interés por la materia y su aprendizaje, donde prevalece más lo afectivo que lo cognitivo y actitudes matemáticas, que tienen un carácter principalmente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales, que son importantes en el quehacer matemático.

En cuanto a las emociones, su diagnóstico presenta gran dificultad, no es sencillo disponer de instrumentos adecuados para cuantificarlas por su variabilidad y es complicado establecer un marco teórico. Las emociones son respuestas afectivas fuertes que no son sólo automáticas o resultado de activaciones fisiológicas; se relacionan con el aprendizaje, la influencia social y su interpretación.

Lógica fuzzy

Zadeh (1965) definió el concepto de conjunto fuzzy. Este concepto relativiza la idea de pertenencia a un conjunto y permite modelar muchos fenómenos reales en los que no se puede establecer un criterio claro de pertenencia a un grupo o conjunto.

Dado un conjunto *X*, un conjunto fuzzy *A* de *X* es un conjunto de pares ordenados, $A=\{(x,\ \mu_A(x)) : x\in X\}$, formado por cada elemento $x\in X$ y su grado de pertenencia al conjunto *A*, $\mu_A(x)$. El grado de pertenencia se establece mediante una aplicación que asocia a cada elemento de X un valor entre 0 y 1.

Si $A=\{(x,\ \mu_A(x)) : x\in X\}$ y $B=\{(x,\ \mu_B(x)) : x\in X\}$ son dos conjuntos fuzzy, entonces operaciones y elementos elementales son:

La unión (conjunción disyuntiva inclusiva):

$$A\cup B=\{(x,\ \mu_{A\cup B}(x)) : x\in X \wedge \mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\}$$

La intersección (conjunción copulativa):

$$A\cap B=\{(x,\ \mu_{A\cup B}(x)) : x\in X \wedge\ \mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\}$$

El complementario de un conjunto *A*:

$$\overline{A}=\{(x,\ \mu_{\overline{A}}(x)) : x\in X \wedge \mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)\}$$

Dada una proposición, *P*, el grado de verdad de *P*, V_P, desde la lógica fuzzy, será un valor en el intervalo $[0,1]$. Dadas dos proposiciones *P* y *Q*, con grados de verdad V_P y V_Q, respectivamente, la proposición "*P* y *Q*" tendrá un grado de verdad $V_{P\cap Q}=\min(V_P,V_Q)$; la proposición "*P* ó *Q*" tendrá un grado de verdad $V_{P\cup Q}=\max(V_P,V_Q)$ y la proposición "no *P*", tendrá un grado de verdad $V_{\bar{P}}=1-V_P$

La lógica fuzzy abre la posibilidad de reinterpretar cualitativa y cuantitativamente la respuesta a una cuestión, reformulando la pregunta como una proposición a la que se le asigna un grado de verdad según la respuesta. Este estudio parte de una conjetura previa, fruto de la experiencia y observación durante años, que se pretende validar: Los alumnos de primero de Ciencias presentan un mayor rechazo afectivo frente a las matemáticas que los alumnos de grados tecnológicos. Dar una respuesta a esta conjetura es importante para adaptar las asignaturas al perfil de los alumnos sin olvidar las competencias específicas exigibles. Por ello, uno de los objetivos de este trabajo es establecer, en caso de haberlas, las diferencias a nivel de perfil afectivo-emocional entre alumnos que acceden a un primer curso de grado de ciencias y los que acceden a estudios de ingeniería.

METODO Y CONTEXTO

Participantes

Para esta investigación se seleccionaron dos muestras: 44 alumnos de primero del grado en Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen (GSTSI) y 35 alumnos del grado en Ciencias Ambientales (GCCAA), del curso 2012-2013, en la Escuela Politécnica Superior de Gandia de la

Universitat Politècnica de València. En cada caso, se pasó un cuestionario durante una de las clases de la asignatura de matemáticas en el segundo semestre del curso.

Cuestionario

En primer lugar se fijaron las componentes actitudinales a considerar en el estudio siguiendo a Hidalgo (2005) y matizadas con las aportaciones de Alemany y Lara (2010). Cada componente se describe mediante una o varias proposiciones. A continuación se enumeran las componentes y, entrecomilladas, las proposiciones que las describen:

- Componente 1, de atribución de causalidad: *"Mis resultados en matemáticas se deben a mí mismo"*.
- Componente 2, de gusto por las matemáticas: *"Realmente me gustan las matemáticas"*.
- Componente 3, de autoconcepto matemático: *"Me considero bueno en matemáticas"*.
- Componente 4, de actitudes y creencias matemáticas:
  4.1 *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"*.
  4.2 *"Las matemáticas son útiles"*.
- Componente 5, sobre las creencias que el estudiante tiene sobre el profesor:
  5.1 *"Que te gusten las matemáticas depende del profesor"*.
  5.2 *"Mi entorno considera importantes las matemáticas"*.

El cuestionario constaba de 22 ítems, y cada uno de ellos se describe mediante una proposición. Cada ítem está vinculado a una de las componentes actitudinales. Los ítems son de respuesta cerrada, estableciéndose una escala Likert para algunas respuestas. La Tabla 1 resume los ítems que corresponden a cada componente afectiva.

Tabla 1. Ítems asociados a cada componente actitudinal

CREENCIAS/ACTITUDES	Nº DE ITEM
C1: *"Mis resultados en matemáticas se deben a mí mismo"*	1, 2 y 3
C2: *"Realmente me gustan las matemáticas"*	4, 5 y 6
C3: *"Me considero bueno en matemáticas"*	7, 8, 9, 10, 11 y 12
C4.1: *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"*	13 y 14
C4.2: *"Las matemáticas son útiles"*	15 y 16
C5.1: *"Que te gusten las matemáticas depende del profesor"*	17, 18, 19 y 20
C5.2: *"Mi entorno considera importantes las matemáticas"*	21 y 22

Método de valoración de las componentes

Se asignó una valoración entre 0 y 1 a la respuesta de cada ítem. Se unen mediante conexiones lógicas los ítems asociados a una determinada componente y, mediante reglas de lógica fuzzy, se valora la componente actitudinal. Por ejemplo, la componente C2 asociada a la proposición *"Realmente me gustan las matemáticas"*, se valoró a partir de tres cuestiones:

- *¿Te gustan las matemáticas?,* con las posibles respuestas 1.Sí y 2.No, reformulada mediante la proposición *"Me gustan las matemáticas"*, con el grado de verdad, V_A, con valor 0.9 si la respuesta es Sí y 0.1 si es No.
- *Si el próximo curso no tuvieras una asignatura de matemáticas:* 1. Te alegrarías, 2. Te disgustaría, 3. Te da igual. Esta cuestión se reformula mediante la proposición *"Me siento a gusto estudiando matemáticas"* con el grado de verdad, V_B, que toma el valor 0.9 si la respuesta es 1, 0.5 si la respuesta es 3 y 0.1 si se ha elegido la respuesta 2.
- *La presencia de las matemáticas te ha hecho rechazar un determinado tipo de estudio (bachillerato, universitario...)* con las opciones 1. Sí y 2. No, reformulada mediante la

proposición *"No me molesta que en mis estudios aparezcan asignaturas de matemáticas"* con el grado de verdad V_C que toma el valor 0.1 si se ha contestado Sí y 0.9 si es No.

La regla de valoración de la componente *"Realmente me gustan las matemáticas"* se obtiene a partir de la regla lógica: *("Me gustan las matemáticas" y ("Me siento a gusto estudiando matemáticas" ó "No me molesta que en mis estudios aparezcan asignaturas de matemáticas"))*, cuyo grado de verdad sería $V = \min(V_A, \max(V_B, V_C))$. En este contexto, las respuestas de los alumnos son procesadas teniendo en cuenta reglas lógicas fuzzy, lo cual nos proporcionará valores de verdad para las proposiciones que describen las creencias/actitudes descritas en la Tabla 1.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Se distinguen el análisis univariante y el multivariante. En el univariante se recurre a la técnica del ANOVA simple, que es un procedimiento robusto que ofrece aproximaciones aún en el caso que las premisas del modelo no se cumplan rigurosamente; un análisis previo justifica utilizar dicha técnica. Mediante ANOVA simple se determina si hay diferencias estadísticamente significativas entre titulaciones considerando creencias y actitudes. En el análisis multivariante, se calculan los índices de correlación de Spearman para determinar el grado de asociación entre componentes.

Análisis univariante

El ANOVA permite establecer la existencia o no de diferencias estadísticamente significativas entre las medias de las valoraciones de las distintas proposiciones al 95% de nivel de confianza (Tabla 2). Para la componente de atribución de causalidad, *"Mis resultados en matemáticas se deben a mí mismo"*, no se pueden establecer diferencias estadísticamente significativas entre las dos titulaciones. El promedio en ambos casos está cerca de 0.5, es decir que, para cada titulación, no hay un mayor número de alumnos que asuman la responsabilidad a nivel personal de sus resultados en matemáticas, pero tampoco predominan claramente los que no la asumen.

Por su parte, al analizar la componente de gusto por las matemáticas, *"Realmente me gustan las matemáticas"*, se observan diferencias estadísticamente significativas en la media para el GCCAA y el GSTSI. En el primer caso el promedio es 0.32 y en el segundo 0.75, lo que significa que el gusto por las matemáticas es bajo y significativamente menor entre los alumnos de GCCAA respecto a los de GSTSI, que asumirían como verdadera dicha proposición con un nivel alto.

Tabla 2. Tabla ANOVA

Comp./Actit.	Titulación	Promedio	Desv.Estándar	Razón-F	P-Valor
C1	GCCAA [a]	0.44	0.36	0.37	0.5472
	GSTSI [a]	0.49	0.34		
C2	GCCAA [a]	0.32	0.33	36.53	0.0000
	GSTSI [b]	0.75	0.30		
C3	GCCAA [a]	0.16	0.00	7.00	0.0099
	GSTSI [b]	0.30	0.38		
C4.1	GCCAA [a]	0.10	0.00	17.65	0.0001
	GSTSI [b]	0.37	0.38		
C4.2	GCCAA [a]	0.74	0.32	10.72	0.0016
	GSTSI [b]	0.90	0.00		
C5.1	GCCAA [a]	0.89	0.03	0.93	0.3377
	GSTSI [a]	0.88	0.09		
C5.2	GCCAA [a]	0.77	0.19	0.31	0.5772
	GSTSI [a]	0.80	0.21		

La componente de autoconcepto matemático, *"Me considero bueno en matemáticas"*, tiene un valor bajo en ambas titulaciones aunque existen diferencias estadísticamente significativas entre la media de GCCAA (0.16) y la que corresponde al GSTSI (0.30).

La componente de actitudes y creencias matemáticas se ha tratado considerando dos proposiciones. La primera, *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"* que tiene una mayor componente emocional que la segunda, *"Las matemáticas son útiles"*. La valoración de la primera proposición es baja para ambas titulaciones, aunque también existen diferencias estadísticamente significativas entre el GCCAA (0.10) y el GSTSI (0.37). Para la proposición *"Las matemáticas son útiles"*, la valoración es alta en ambas titulaciones, pero también se detectan diferencias significativas entre la media correspondiente al GCCAA (0.74) y la que corresponde al GSTSI (0.90).

La componente actitudinal sobre el profesor, descrita por la proposición *"Que te gusten las matemáticas depende del profesor"*, obtiene una valoración alta para ambas titulaciones, sin que existan diferencias significativas entre las mismas.

Por último, la componente sobre el entorno, representada por la proposición *"Mi entorno considera importantes las matemáticas"*, también presenta una valoración alta para ambas titulaciones, sin que tampoco existan diferencias estadísticamente significativas entre las mismas.

Análisis multivariante

En el estudio multivariante, se han calculado los índices de correlación de Spearman para verificar el grado de asociación entre variables (Tabla 3). Valores-*P* menores de 0.05 indican correlaciones significativas desde el punto de vista estadístico, con un nivel de confianza del 95%.

Tabla 3. Por casilla: correlación rango de Spearman, tamaño de muestra y valor-p

	C1	C2	C3	C4.1	C4.2	C5.1	C5.2
C1		0.2180 (79) 0.0542	-0.1208 (79) 0.2860	<u>0.3120</u> (79) 0.0059	0.0167 (79) 0.8826	0.0450 (79) 0.6907	0.1846 (79) 0.1030
C2	0.2180 (79) 0.0542		<u>0.3180</u> (79) 0.0050	<u>0.4111</u> (79) 0.0003	<u>0.2788</u> (79) 0.0138	0.1554 (79) 0.1701	0.1826 (79) 0.1068
C3	-0.1208 (79) 0.2860	0.3180 (79) 0.0050		<u>0.3365</u> (79) 0.0030	0.1850 (79) 0.1022	0.1370 (79) 0.2263	0.0455 (79) 0.6875
C4.1	0.3120 (79) 0.0059	0.4111 (79) 0.0003	0.3365 (79) 0.0030		0.1510 (79) 0.1825	0.1118 (79) 0.3236	0.1900 (79) 0.0933
C4.2	0.0167 (79) 0.8826	0.2788 (79) 0.0138	0.1850 (79) 0.1022	0.1510 (79) 0.1825		-0.0720 (79) 0.5249	0.2170 (79) 0.0553
C5.1	0.0450 (79) 0.6907	0.1554 (79) 0.1701	0.1370 (79) 0.2263	0.1118 (79) 0.3236	-0.0720 (79) 0.5249		-0.0001 (79) 0.9991
C5.2	0.1846 (79) 0.1030	0.1826 (79) 0.1068	0.0455 (79) 0.6875	0.1900 (79) 0.0933	0.2170 (79) 0.0553	-0.0001 (79) 0.9991	

Los siguientes pares de proposiciones presentan cierto nivel de asociación, estadísticamente significativo, (P-valor<0.05) (Tabla 3):

- *"Mis resultados en matemáticas se deben a mí mismo"* y *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"* (0.3120).

- *"Realmente me gustan las matemáticas"* y *"Me considero bueno en matemáticas"* (0.3180).
- *"Realmente me gustan las matemáticas"* y *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"* (0.4111)
- *"Realmente me gustan las matemáticas"* y *"Las matemáticas son útiles"* (0.2788)
- *"Me considero bueno en Matemáticas"* y *"Mi actitud hacia las matemáticas es positiva"* (0.3365)

Se situaría en el límite del nivel de confianza prefijado la relación entre *Mis resultados en matemáticas se deben a mí mismo" y "Realmente me gustan las matemáticas"* (0.2180, p-valor=0.0542). Por otra parte, no existe grado de asociación entre las proposiciones *"Que te gusten las matemáticas depende del profesor"* y *"Mi entorno considera importantes las matemáticas"* ni entre éstas con el resto de las proposiciones.

CONCLUSIONES

La utilización de la lógica fuzzy ha permitido describir la dimensión afectiva mediante proposiciones asociadas directamente a las preguntas del cuestionario y valorar dichas proposiciones. Consecuentemente se pueden analizar las creencias y actitudes frente a las matemáticas de manera más precisa ya que otras técnicas usuales como el análisis factorial difuminan el significado de las dimensiones.

Para las poblaciones estudiadas, en general los alumnos no tienen demasiado claro que sus resultados en matemáticas se deban principalmente a ellos mismos. Creen que el profesor influye en el gusto por las matemáticas, materia que consideran en general útil. Además, el entorno familiar o de amistades considera importantes las matemáticas.

A los alumnos del GCCAA no les gustan las matemáticas, ni se consideran buenos en dicha materia. Su actitud hacia las matemáticas no es positiva. A los alumnos del GSTSI les gustan las matemáticas aunque no se consideran buenos en la materia. Su actitud hacia las matemáticas tampoco destaca como positiva, aunque lo es más en comparación con los alumnos del GCCAA.

Los resultados obtenidos muestran, cuantitativamente mediante niveles de verdad, que a los alumnos que acceden al Grado en Ingeniería les gustan más las matemáticas, presentan mayor autoestima matemática y creen (ellos y su entorno) que las matemáticas son importantes en una medida significativamente mayor que la que se da para los alumnos de ciencias. No obstante todos los alumnos eran conscientes de la propia responsabilidad frente al aprendizaje de las matemáticas, y coinciden en la valoración de la importancia del papel del profesor en dicho aprendizaje, aunque el profesor no sea considerado como un elemento influyente a nivel emocional.

Referencias

Alemany, I. y Lara A. I. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: Un instrumento para su medición. *Publicaciones, 40*, 49-71.

Bai, S. M. y Chen, S. M. (2008). Automatically constructing grade membership functions of fuzzy rules for students' evaluation. *Expert Systems with Applications, 35*(3), 1408-1414.

Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la Instrucción, 1*, 256-279.

Bhowmik, M. y Banerjee, B., (2013). Fuzzy measure of secondary students' attitude toward mathematics. *International Journal of Research Studies in Education, 2*(2), 21-30.

Blanco, L. J., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El dominio afectivo de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de las investigaciones locales. *Campo Abierto, 29*(1), 13-31.

Boigues F. J., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza: Un análisis a través de la lógica fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 255-282.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática, 17*, 89-116.

Ma, X. y Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 27-47.

McLeod, D. B. (1989a). The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 20-36). Nueva York: Springer-Verlag.

McLeod, D. B. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: New view of affect in mathematics education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. (pp. 245-258). Nueva York: Springer-Verlag.

Miñano, P. y Castejón, J. L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas. *Revista de Psicodidáctica, 16*(2), 203-230.

Mohd, N., Mahmood, T. y Ismail, M. (2011). Factors that influence students in mathematics achievement. *International Journal of Academic Research, 3*(3), 49-54.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Saleh, I. y Kim, S. (2009). A fuzzy system for evaluating students' learning achievement. *Expert Systems with Applications, 36*(3 part 2), 6236-6243.

Sakiz, G., Pape S. J. y Hoy A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics classrooms? *Journal of School Psychology, 50*, 235-255.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy sets. *Inform. Control, 8*, 338-353.

CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS Y LA COMPETENCIA DE RECONOCER EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO *UP AND DOWN* EN LOS ESTUDIANTES

Mathematical knowledge and the competence to recognize students' development of reasoning up and down

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro (EPM) cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Nuestro estudio se centra en el razonamiento up and down que es una de las componentes que facilitan el desarrollo del razonamiento proporcional. 92 EPM resolvieron una tarea en la que tenían que interpretar las respuestas de estudiantes de educación primaria a un problema que implicaba el razonamiento up and down. Identificamos tres perfiles de EPM caracterizados por la relación entre el conocimiento de matemáticas y la competencia de reconocer el desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes.

Palabras clave: *Mirada profesional, razonamiento "up and down", conocimiento del profesor*

Abstract

This study examines the role played by prospective teachers' mathematical knowledge when thinking about primary school students' mathematics learning. Our study is focused on one of the proportional reasoning components: reasoning up and down. 92 prospective teachers solved a task in which they had to interpret primary students' answers to a problem that implies the reasoning up and down. We identified three prospective teachers' profiles characterized by the relationship between mathematical knowledge and the competence to recognize the development of reasoning up and down in primary students.

Keywords: *Professional noticing, reasoning up and down, teachers' knowledge*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones recientes indican que los estudiantes para maestro conocen de manera limitada las componentes que constituyen el razonamiento proporcional. En particular, los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar situaciones no proporcionales y en manejar el significado multiplicativo de la idea de operador y la idea de razón (Buforn y Fernández, 2014), en el uso del concepto de razón en un contexto de escalas (Livy y Vale, 2011), en el reconocimiento de la relación funcional entre las cantidades y la falta de argumentos para establecer la relación entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón (Valverde y Castro, 2009), y en la interpretación de las razones en situaciones de comparación (Gómez y García, 2014). Por otra parte, el conocimiento limitado de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad les lleva a interpretar de manera no apropiada las respuestas de alumnos de primaria (Rivas, Godino y Castro, 2012). La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta realizar tareas profesionales de los profesores como interpretar respuestas de estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes.

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Conocimiento de matemáticas y la competencia de reconocer el desarrollo del razonamiento *up and down* en los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 191-199). Alicante: SEIEM.

Nuestro estudio se sitúa en este ámbito de investigación y nos planteamos examinar la relación entre el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y cómo interpretan respuestas de estudiantes en tareas relacionadas con el razonamiento proporcional.

La fracción como unidad iterativa en el desarrollo del razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente), las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y proceso *unitizing*) y la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Lamon, 2005, 2007; Pitta-Pantazi y Christou 2011). En esta comunicación nos centraremos en una de estas componentes, el razonamiento *up and down,* entendida como la capacidad de reconstruir la unidad a partir de la representación de una fracción y representar posteriormente otra parte (fracción) de esta unidad (Steffe y Olive, 2012). Luego, las tareas que implican un razonamiento *up and down* requieren dos procesos: en primer lugar, ir desde la representación de una fracción hasta la unidad (reconstrucción de la unidad), y después, desde la unidad hasta la representación de otra fracción. Un ejemplo de esta actividad es la siguiente: *La parte sombreada de esta figura representa* 3+2/3 *¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?* (Lamon, 2005, p. 73) (Figura 1). En este caso, la unidad (reconstrucción de la unidad) sería 3 rectángulos pequeños ya que la parte sombreada la podemos ver como 3 veces 3 rectángulos pequeños (3 unidades) y 2/3 que serían los dos restantes. Una vez obtenida la unidad, podemos ver que 4 rectángulos pequeños equivale a 1 unidad más 1/3 (representación de la fracción pedida).

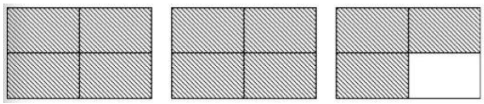


Figura 1. Tarea que implica un razonamiento *up and down*

Para interpretar las evidencias de la progresión conceptual de los estudiantes, los EPM deben ser capaces de poder reconocer el papel que desempeñan los procesos de reconstruir la unidad y representar otras fracciones que constituyen el razonamiento *up and down.* La manera en la que los EPM puedan identificar estos procesos les permitirá estar en mejores condiciones de interpretar las respuestas de los estudiantes a este tipo de problemas.

Conocimiento de matemáticas y ser capaz de interpretar respuestas de los estudiantes

Investigaciones recientes indican que la competencia docente *mirar profesionalmente* la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en que los profesores sean capaces de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas (Fortuny y Rodriguez, 2012; Mason, 2002). Un aspecto particular de esta competencia docente es ser capaz de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos para tomar decisiones de enseñanza pertinentes (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Estas investigaciones han mostrado que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos le permite estar en mejores condiciones para reconocer el desarrollo conceptual de los estudiantes. Estos estudios subrayan, por tanto, la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

Considerando estos aspectos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué elementos matemáticos identifican los EPM como importantes en las tareas que implican un razonamiento *up and down?*

- ¿Qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocen los EPM en las respuestas de estudiantes de primaria?
- ¿Qué tipo de tareas proponen los EPM para apoyar el desarrollo del razonamiento *up and down* en los estudiantes de primaria?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 92 estudiantes para maestro de educación Primaria (EPM) que en el momento de la recogida de datos estaban cursando una asignatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Los contenidos de esta asignatura son las características del aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y de la enseñanza en diferentes dominios matemáticos. Los datos fueron recogidos después de haber estudiado el bloque de números y operaciones, donde está incluido el tópico del razonamiento proporcional.

En relación al tema de razonamiento proporcional, los estudiantes para maestro habían resuelto y analizado una serie de problemas que indicaban las componentes del razonamiento proporcional y habían analizado respuestas de estudiantes de primaria utilizando información teórica sobre el desarrollo y características del razonamiento proporcional (Fernández, 2009; Lamon, 2005).

Instrumento

Los estudiantes para maestro contestaron a un cuestionario con 12 tareas. Cada tarea consistía en (i) un problema relativo a una de las componentes del razonamiento proporcional, (ii) tres respuestas de estudiantes de primaria que mostraban distintas características del desarrollo de esa componente del razonamiento proporcional y (iii) cuatro cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje:

a) ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver este problema? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas de los estudiantes? Justifica tu respuesta.

c) Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.

d) Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.

Las dos primeras cuestiones pedían a los estudiantes para maestro identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema y justificar cómo consideraban que las respuestas de los alumnos de primaria reflejaban alguna característica de su comprensión. En las otras dos cuestiones se les pedía modificar el problema para ayudar al estudiante a mejorar su comprensión. La figura 2 muestra las tres respuestas de los estudiantes al problema relativo al razonamiento *up and down* cuya resolución implicaba reconstruir la unidad y representar fracciones.

Las respuestas de los estudiantes de primaria a este problema reflejaban distintas características. La respuesta 1 es de un alumno que no identifica la unidad como 3 rectángulos pequeños al confundir la unidad con toda la figura (los tres rectángulos grandes), es decir, no identifica la fracción unitaria 1/3 que ha sido iterada para representar 11/3 en la figura; de ahí que este alumno no reconstruya la unidad. En la respuesta 2, el alumno identifica la fracción 1/3 en la figura como parte de iterar 11 veces 1/3, lo que le permite identificar la unidad (iterando 3 veces 1/3). Sin embargo tiene dificultades en nombrar como fracción lo que representa un rectángulo (la figura formada por 4 rectángulos pequeños). Este estudiante solo reconstruye la unidad, pero no representa la fracción impropia. Finalmente, en la respuesta 3, el alumno de primaria identifica que tres rectángulos pequeños son la unidad al reconocer una representación para la fracción unitaria 1/3, e iterarla 3 veces para representar la unidad. Después, representa la fracción indicada a partir de esta unidad y nombra a los 4 rectángulos pequeños como 1+1/3 (4 veces 1/3). En esta respuesta se observa la coordinación de los dos procesos, la reconstrucción de la unidad y la representación de fracciones.

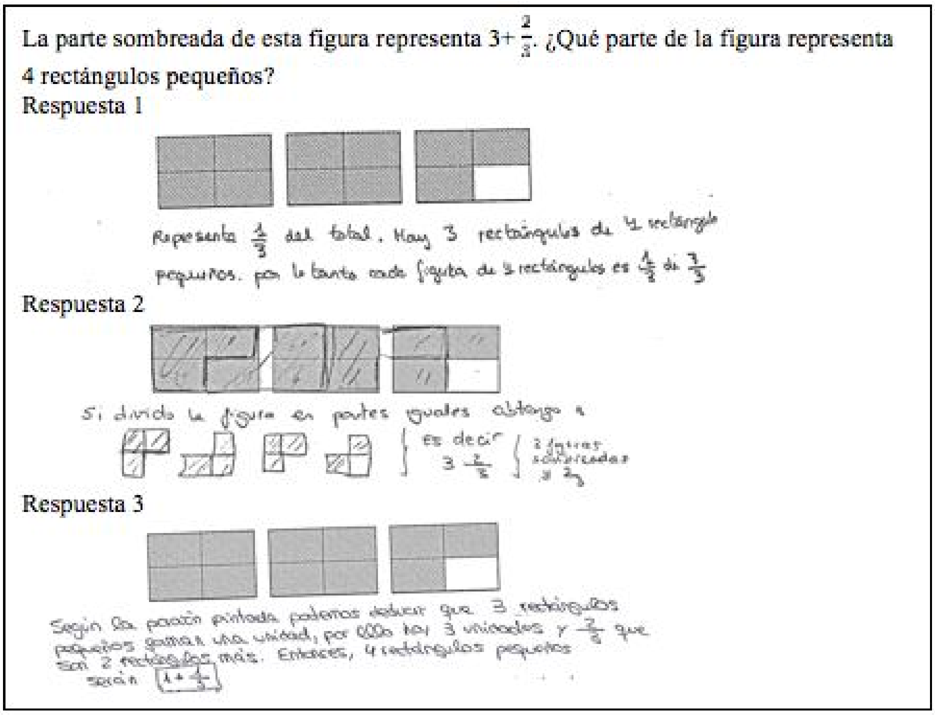


Figura 2. Problema sobre la componente razonamiento *up and down* y respuestas de estudiantes

Análisis de los datos

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los EPM a las cuatro cuestiones planteadas en el problema de la Figura 2. En primer lugar, identificamos los conceptos matemáticos que los estudiantes para maestro identificaban en el problema propuesto (cuestión a). La identificación de estos conceptos está relacionado con la manera en la que estos estudiantes para maestro consideraban que el problema propuesto se resolvía usando un razonamiento *up and down*. Con este procedimiento pudimos identificar dos grupos: estudiantes para maestro que reconocían la coordinación de los dos procesos del razonamiento *up and down* (la reconstrucción de la unidad y la representación de una fracción), y los estudiantes para maestro que no identificaban esta idea y simplemente comentaban conceptos como parte-todo, fracción unitaria, etc., sin explicar los procesos específicos necesarios para resolver la tarea.

En segundo lugar, consideramos qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocían los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes (cuestión b). Este análisis se realizó de manera inductiva por tres investigadores generando tres grupos:

- EPM que dieron argumentos generales (por ejemplo basados en la corrección o no de la respuesta)
- EPM que describían las respuestas de los estudiantes
- EPM que reconocieron evidencias de los procesos de reconstrucción de la unidad y de representación de una fracción en las respuestas de los estudiantes (procesos implicados en el razonamiento *up and down*)

La consideración conjunta del resultado del análisis de las respuestas a las cuestiones a y b, permitió identificar perfiles de estudiantes para maestro considerando las relaciones entre el reconocimiento de los procesos implicados en el razonamiento *up and down* y la capacidad de reconocer esos procesos en las repuestas de los estudiantes que describimos en la sección de resultados.

Las respuestas a las cuestiones c) y d) fueron analizadas identificando categorías que se iban refinando a medida que se realizaba el análisis. Estas categorías se muestran en la sección siguiente.

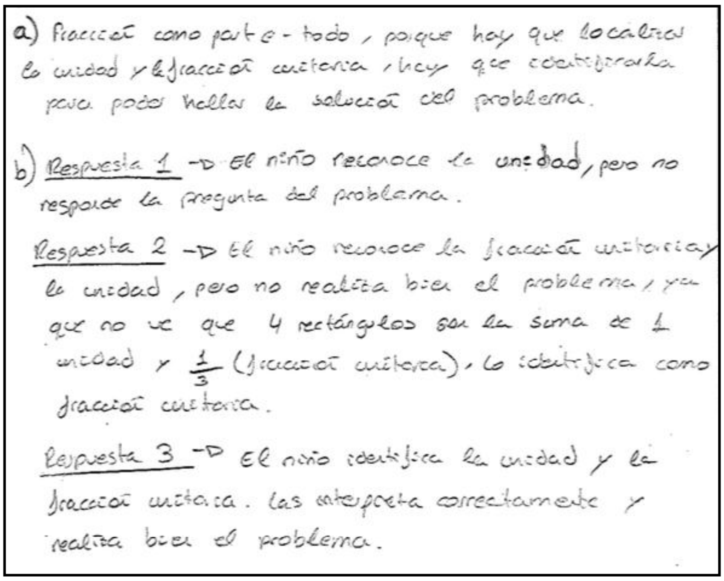
RESULTADOS

Se identificaron cuatro perfiles de estudiantes para maestro considerando las relaciones entre el conocimiento de los procesos implicados en el razonamiento *up and down* y la capacidad de reconocer esos procesos en las repuestas de los estudiantes (Tabla 1).

Tabla 1. Perfiles de los estudiantes para maestro

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Reconocimiento del razonamiento up and down</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="4">Reconocimiento de los elementos matemáticos</td><td rowspan="2">Identifican los procesos implicados en el razonamiento up and down</td><td>Reconocen evidencias de los procesos en las respuestas de los estudiantes (CI)</td><td>27</td><td rowspan="2">38</td></tr>
<tr><td>Proporcionan comentarios generales (CG)</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No identifican los procesos implicados en el razonamiento up and down</td><td>Describen las respuestas de los estudiantes (OD)</td><td>5</td><td rowspan="2">31</td></tr>
<tr><td>Proporcionan comentarios generales (OG)</td><td>26</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Respuesta sin sentido (IG)</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">En blanco</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

27 EPM identificaron los procesos de reconstrucción de la unidad y la representación de fracciones como conceptos matemáticos de la tarea y reconocieron estos procesos en las respuestas de los estudiantes (CI). Como por ejemplo, el siguiente EPM (Figura 3) identificó estos dos procesos y reconoció que en la respuesta 2, el estudiante no identifica la fracción unitaria y por lo tanto no reconstruye la unidad, en la respuesta 1 el estudiante reconstruye la unidad pero no representa la fracción pedida, y en la respuesta 3, el estudiante coordina los dos procesos identificando la unidad y representando la fracción.


a) Fracción como parte-todo, porque hay que localizar la unidad y la fracción unitaria, hay que construirla para poder hallar la solución del problema.

b) Respuesta 1 -> El niño reconoce la unidad, pero no responde la pregunta del problema.

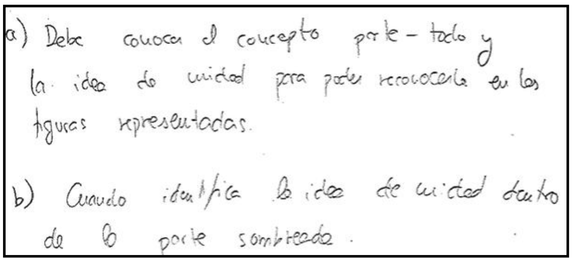
Respuesta 2 -> El niño reconoce la fracción unitaria y la unidad, pero no realiza bien el problema, ya que no ve que 4 rectángulos son la suma de 1 unidad y $\frac{1}{3}$ (fracción unitaria), lo identifica como fracción unitaria.

Respuesta 3 -> El niño identifica la unidad y la fracción unitaria. Las interpreta correctamente y realiza bien el problema.

Figura 3. Respuesta de EPM perteneciente al grupo CI

11 EPM, a pesar de haber identificado los elementos matemáticos implicados en el problema, realizaron comentarios generales (CG). El siguiente ejemplo (Figura 4) muestra un EPM que

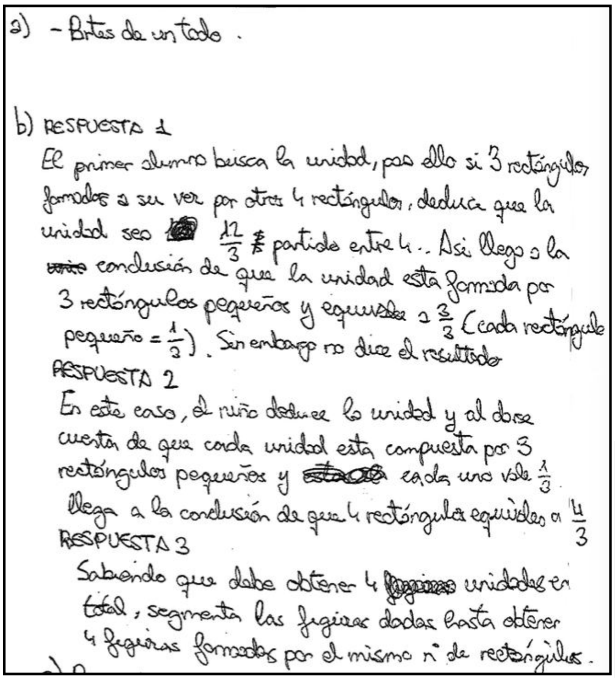
identificó los procesos implicados en el razonamiento *up and down* al reconocer "*la idea de unidad para poder reconocerla en las figuras representadas*", sin embargo no aporta evidencias del reconocimiento de estos procesos en las respuestas de los estudiantes ya que no comenta para cada una de las respuestas los procesos implicados (en la respuesta 1 no identifica el todo, en la respuesta 2 reconoce el todo pero no representa la fracción, y en la respuesta 3 no identifica que se dan los dos procesos, reconocer el todo y representar la fracción).


a) Debe conocer el concepto parte - todo y la idea de unidad para poder reconocerla en las figuras representadas.

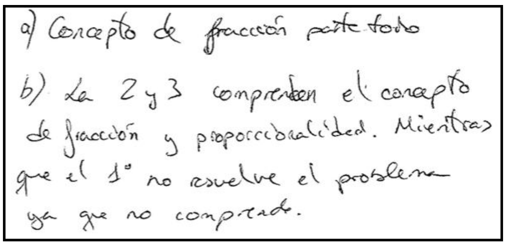
b) Cuando identifica la idea de unidad dentro de la parte sombreada.

Figura 4. Respuesta de EPM perteneciente al grupo CG

Ningún estudiante para maestro que no identificó el razonamiento *up and down* como el proceso que implica reconstruir la unidad y representar fracciones, reconoció evidencias de estos procesos en las respuestas de estudiantes. Los EPM en este grupo describieron las respuestas de los estudiantes (OD) o dieron comentarios generales (OG). El siguiente EPM (Figura 5-a) no identificó los procesos implicados; solo comenta la idea de parte-todo, describiendo la respuesta según lo que observa. La Figura 5-b es de un EPM que además de no identificar los procesos implicados en el razonamiento *up and down* proporciona un comentario general basado en la corrección.


a) - Partes de un todo.

b) RESPUESTA 1
El primer alumno busca la unidad, para ello si 3 rectángulos formados a su vez por otros 4 rectángulos, deduce que la unidad sea $\frac{12}{3}$ partido entre 4. Así llega a la conclusión de que la unidad esta formada por 3 rectángulos pequeños y equivale a $\frac{3}{3}$ (cada rectángulo pequeño = $\frac{1}{3}$). Sin embargo no dice el resultado
RESPUESTA 2
En este caso, el niño deduce la unidad y al darse cuenta de que cada unidad esta compuesta por 3 rectángulos pequeños y cada uno vale $\frac{1}{3}$. llega a la conclusión de que 4 rectángulos equivalen a $\frac{4}{3}$
RESPUESTA 3
Sabiendo que debe obtener 4 unidades en total, segmenta las figuras dadas hasta obtener 4 figuras formadas por el mismo nº de rectángulos.


a) Concepto de fracción parte todo

b) La 2 y 3 comprenden el concepto de fracción y proporcionalidad. Mientras que el 1º no resuelve el problema ya que no comprende.

Figura 5-a y 5-b. Respuestas de EPM pertenecientes al grupo OD y al grupo CG

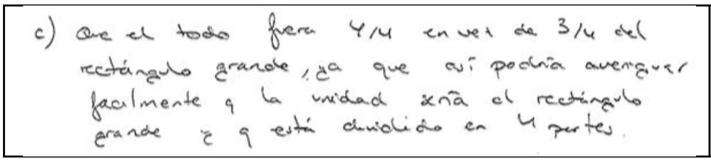
Decisiones de acción

La Tabla 2 muestra el tipo de modificaciones del problema proporcionadas por los EPM para ayudar a los estudiantes que no han desarrollado el razonamiento *up and down*.

Tabla 2. Modificaciones del problema para ayudar a los estudiantes con el razonamiento *up and down*

Cuestión c	CI	CG	OD	OG	IG
Que las particiones coincidan con el todo	16	6	3	12	
Indicar la fracción unitaria // pedir la fracción unitaria	2			1	
Contexto discreto	3			1	1
Material manipulativo	1		1	2	
Explicar contenido	1			1	
Sin usar la notación mixta				1	
En blanco // no cambia el nivel // sin sentido	5	5	2	8	2

Los EPM proporcionan modificaciones basadas en que el todo coincida con la figura que se presenta (Figura 6-a), que se indique la fracción unitaria (Figura 6-b) o el cambio a un contexto discreto. Los estudiantes para maestro que dieron comentarios generales tienen más tendencia a proporcionar respuestas sin sentido o dejarlas en blanco.


c) Que el todo fuera 4/4 en vez de 3/4 del rectángulo grande, ya que así podría averiguar fácilmente q la unidad sería el rectángulo grande y q está dividido en 4 partes.

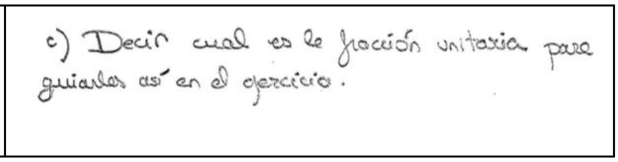

c) Decir cual es la fracción unitaria para guiarlos así en el ejercicio.

Figura 6. Ejemplos de modificaciones para ayudar a los estudiantes con el razonamiento *up and down*

La Tabla 3 muestra las modificaciones del problema proporcionadas por los EPM para ayudar a progresar en el desarrollo del razonamiento *up and down*.

Tabla 3. Modificaciones del problema para progresar en el desarrollo del razonamiento *up and down*

Cuestión d	CI	CG	OD	OG	IG
Representar una fracción mayor o menor	6			1	
Necesidad de nueva división para poder representar	8	2	2	5	1
Contexto discreto	5		1	3	
Otra figura geométrica // más rectángulos			2	4	
En blanco // no cambia el nivel // sin sentido	9	9	1	13	2

En este caso la modificación que predomina en todos los grupos es la idea de que exista la necesidad de realizar una nueva partición después de encontrar la unidad para poder representar la nueva fracción, por ejemplo pidiendo una fracción con denominador diferente al dado (Figura 7).

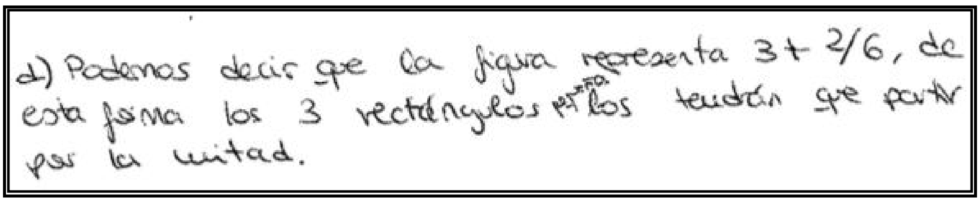

d) Podemos decir que la figura representa 3+ 2/6, de esta forma los 3 rectángulos enteros tendrán que partir por la mitad.

Figura 7. Ejemplo de modificación del problema para progresar en el razonamiento *up and down*

Los resultados muestran que un número elevado de EPM (n=34) dieron respuestas sin sentido o la dejaron en blanco. Además, esta frecuencia es más elevada que en la cuestión (c) (n=22), por lo que se deduce que a los EPM les resultaba más difícil proponer tareas que ayuden a los estudiantes a potenciar el desarrollo del razonamiento *up and down* cuando ya habían reconocido evidencias en las respuestas de los estudiantes, que proponer tareas para iniciar el razonamiento.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del estudio es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Nuestro estudio se centra en el razonamiento *up and down,* que es una de las componentes que facilitan el desarrollo del razonamiento proporcional (Lamon, 2005).

Los resultados muestran que cuando los EPM son capaces de identificar los procesos implicados en el razonamiento *up and down* como conceptos matemáticos que demanda el problema propuesto (conocimiento de matemáticas), más de la mitad de ellos también son capaces de interpretar las respuestas de los estudiantes aportando evidencias de cómo los estudiantes de primaria coordinan o no estos procesos implicados (reconstrucción de la unidad y representación de una fracción) y aportando decisiones de acción pertinentes para ayudar a los estudiantes en el desarrollo del razonamiento *up and down* o hacerles progresar en su desarrollo. Sin embargo, cuando no son capaces de identificar estos procesos, la mayoría de ellos interpretan las respuestas de los estudiantes proporcionando argumentos generales basados en la corrección de las respuestas. Esto les lleva a proporcionar decisiones de acción con menos fundamento (sin sentido o en blanco).

Por otro lado, los resultados obtenidos indican que la tarea de reconocer evidencias de la comprensión de un tópico matemático no es una tarea fácil para los EPM, aun habiendo identificado los conceptos matemáticos que implican el problema (conocimiento de matemáticas). Esto se evidencia en los grupos de EPM que habiendo identificado los procesos de reconstrucción de la unidad y representación de una fracción, proporcionan argumentos generales o describen. Este resultado indica que el conocimiento de matemáticas no es sinónimo del conocimiento de matemáticas y de los estudiantes, apoyando la diferenciación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de matemáticas para la enseñanza.

Por otra parte, que algunos EPM identificaran los procesos de reconstrucción de la unidad y representación de una fracción y proporcionaran argumentos generales se podría interpretar también desde las creencias mantenidas por estos EPM, en el sentido de que estos EPM podrían tener la creencia de que las respuestas de los estudiantes "son correctas o incorrectas" (es decir, o se comprende o no se comprende) (Copes, 1982) aunque ellos tengan el conocimiento de matemáticas adecuado para resolver el problema propuesto y reconocer de manera implícita los elementos matemáticos que dan forma a su resolución.

Nosotros pensamos que estos resultados aportan información relevante para los programas de formación inicial en el sentido de que nuestro instrumento puede ofrecer oportunidades a los EPM para desarrollar la competencia profesional de interpretar respuestas de estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Buforn, À. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema, 28*(48), 21-41.

Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A metaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 38-44.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria.* València: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM-Mathematics Education, 44,* 747-759.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: Facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 23-37.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routledge Falmer.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education,* DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y.

Steffe, L. y Olive, J. (2012). *Childrens' fractional knowledge*. Londres: Springer.

Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-532). Santander: SEIEM.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS AUTÉNTICAS PROPUESTAS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Authentic Problematic Situations posed by preservice teachers

Cáceres, M.J.[a], Chamoso, J.M.[b] y Cárdenas, J.A.[a]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

En un contexto de formación inicial de maestros de matemáticas en Primaria, se analizó la autenticidad de situaciones problemáticas (SP) que estudiantes para maestro propusieron, en grupo, a partir de un contexto elegido por ellos mismos, y las mejoras posteriores de dichas propuestas cuando intentaron convertirlas en tareas auténticas. Después de analizar la autenticidad de las propuestas iniciales y finales a partir de las dimensiones consideradas, los resultados mostraron que se mejoraron muchas de las propuestas iniciales, pero no todas, lo que abre un camino a futura investigación con objetivos similares.

Palabras clave: *formación inicial de docentes, resolución de problemas, problemas auténticos, revisión del propio trabajo, enseñanza de matemáticas*

Abstract

In a context of initial training of primary mathematics teachers, the authenticity of problematic situations (SP) proposed by student teachers, in groups, from a real context chosen by them, and subsequent improvements of those proposals when they tried to turn them into authentic tasks, was analyzed. After analyzing the authenticity of the initial and final proposals according to the different dimensions considered, the results showed that many of the initial proposals were improved, but not all; this opens a path to future research with similar objectives.

Keywords: *initial training teachers, problem solving, authentic problems, revision of the own work, mathematics teaching*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas debe ser la base de muchas tareas que se proponen en el aula de matemáticas (Schoenfeld, 2013). Por ello, los maestros deben ser buenos resolutores de problemas, pero también deben valorar críticamente la calidad de las actividades matemáticas, y ser capaces de crearlas y modificarlas para desarrollar tareas adecuadas al objetivo que se persiga. En concreto, la creación de problemas debe ser esencial en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (Blanco y Cárdenas, 2013; Kilpatrick, 1987; NCTM, 1991; Singer y Voica, 2013).

En otro sentido, la conexión de la resolución de problemas con la vida cotidiana ha sido objeto de interés en los últimos años. Por ejemplo, en el sistema educativo español actual se realiza una prueba de evaluación individualizada al terminar el tercer curso de Educación Primaria para medir el grado de adquisición de la competencia matemática, entendida como "la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas" (MECD, 2015, p. 63).En el marco teórico de PISA (OCDE, 2012), la competencia matemática se desarrolla en el contexto de un desafío o problema que se presenta en el mundo real.

Este trabajo se contextualiza en una propuesta de formación inicial de maestros de matemáticas en Primaria. Se pretende una enseñanza que consiga un aprendizaje práctico, que los estudiantes desarrollen competencias en diversos sentidos tanto de conocimiento matemático como de

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201-210). Alicante: SEIEM.

conocimiento especializado del contenido. En concreto se quiere que los maestros sean capaces de enfrentarse a una clase, reflexionar sobre su trabajo y proponer tareas en diferentes sentidos (Hill, Ball y Schilling, 2008).En este contexto se considera que, para la formación inicial de futuros docentes de matemáticas de Primaria, además de un conocimiento teórico (saber), son necesarias destrezas para impartir los contenidos (saber hacer), lo que puede organizarse en competencias matemáticas y profesionales (ver Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010).

Para el desarrollo de esas competencias hay que tener en cuenta diferentes aspectos. Por ejemplo, de acuerdo con Hiebert y Grouws (2007), la naturaleza de la enseñanza en el aula afecta significativamente a la naturaleza y al nivel del aprendizaje de los estudiantes. Para ello el profesor debe proporcionar oportunidades mediante tareas que permitan desarrollar potencialidades en los estudiantes así como mayor flexibilidad mental (Bonotto, 2013, Stevens y Grymes, 1993). En ese sentido, las tareas que se desarrollan en el aula de matemáticas son el medio con el que los estudiantes construyen el aprendizaje matemático, de manera que el tipo de tarea que se propone influye en la naturaleza del aprendizaje de los estudiantes (Christiansen y Walther, 1986; Hiebert y Wearne, 1997; Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Una tarea recomendable en la formación inicial de docentes es la de crear tareas y examinarlas didácticamente (Malaspina, 2015). Por otro lado, la revisión del propio trabajo es fundamental para la formación de docentes (Chamoso y Cáceres, 2009; Cáceres et al., 2010).Una posibilidad es conjugar ambos aspectos a partir del planteamiento de tareas auténticas, entendidas como aquellas que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable (ver Chamoso, Vicente, Manchado y Múñez, 2013 y Palm, 2008).

Para determinar la autenticidad de las tareas se han establecido diversas dimensiones, entre otras, la proximidad del *evento* planteado con relación a la posibilidad de encontrarlo en la vida cotidiana, la adecuación de la *pregunta* realizada al evento propuesto, la concordancia de la *información* que se ofrece con la pregunta planteada, la presencia explícita en el contexto figurativo del *propósito* para el que se debe dar respuesta y la *especificidad en los datos* de la situación propuesta (Chamoso et al, 2013; Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010; Palm, 2008).

Los pocos estudios encontrados sobre la autenticidad de las tareas, se centran, en su mayor parte, en los problemas planteados en libros de texto o en pruebas de evaluación. Concretamente Palm y Burman (2004) analizaron la autenticidad de las tareas planteadas en los test nacionales de evaluación de la competencia matemática de Finlandia y Suecia. Los resultados mostraron que el único aspecto simulado en más del 90% de los ítems fue *evento*, mientras que los demás se simulaban en menos del 50% de los ítems. Depaepe et al. (2010) analizaron los problemas resueltos por dos maestros de 6º de Primaria en una escuela de Flandes a lo largo de 7 meses y los resultados mostraron que, además de *evento*, la *especificidad de los datos* estaba bien simulada. Chamoso et al. (2013) estudiaron 8373 problemas, de los libros de texto y cuadernillos trimestrales de los 6 cursos de Educación Primaria de una editorial conocida en España y Latinoamérica, y sólo el 2,33% eran problemas auténticos aunque el 26,14% serían fácilmente convertibles en auténticos. Además, percibieron que la cantidad de problemas auténticos disminuía a medida en que el curso en que se proponía era más elevado.

OBJETIVO Y METODOLOGÍA

Este trabajo pretende analizar qué sucede cuando se propone a estudiantes para maestro una tarea de profundización de competencias profesionales para enseñar matemáticas en Primaria en el sentido de Cáceres et al. (2010), en concreto, cuando se les pide diseñar situaciones problemáticas (en adelante SP) cercanas al contexto del alumno de Educación Primaria y mejorarlas con un criterio establecido. En definitiva, el objetivo de este trabajo es analizar las modificaciones realizadas por estudiantes para maestro en las SP propuestas inicialmente por ellos mismos atendiendo a su autenticidad.

La experimentación fue realizada con 73 estudiantes de 3º curso, 36 del Grado de Maestro en Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca y 37 del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Extremadura, en las asignaturas Matemáticas y su Didáctica II y Didáctica de las Matemáticas II, respectivamente, ambas de 6 créditos, durante el curso 2014-15 (ver Chamoso y Cáceres, 2015). Los estudiantes no tenían formación previa en diseñar tareas, pero habían tenido dos sesiones formativas, cada una de 2 horas, relativas a la distinción entre ejercicio, problema e investigación (Chamoso y Rawson, 2001) y de resolución de problemas donde se habían considerado determinados tipos de problemas como abiertos, auténticos y realistas (Chamoso et al., 2013).

En una sesión de clase de 2 horas de duración los estudiantes, en cada centro, se organizaron en grupos de 3-4 personas. En total participaron 23 grupos. Cada grupo debía:

1. Seleccionar tres contextos cercanos a un alumno de Primaria (en grupos, 5 minutos).
2. Elegir uno de esos contextos y proponer tres SP que se pudieran plantear a un alumno de Primaria (en grupos, 15 minutos).
3. Analizarlas tres SP a partir de las categorías de autenticidad de la Tabla 1 (en grupos, 15 minutos).
4. Exponer, oralmente, algunas SP para, entre todos, proponer sugerencias de mejora (toda la clase, 30 minutos).
5. Modificar las SP iniciales (en adelante SPI), atendiendo a las dimensiones consideradas en el análisis, para proponer una nueva SP final (en adelante SPF) con mayor grado de autenticidad (en grupos, 30 minutos).

Tabla 1. Dimensiones para el análisis de la autenticidad de las actividades

Dimensiones	**Valoración**	**Indicadores**
Principales		
Evento	1	La situación planteada es factible en la vida real fuera de la escuela
	0	La situación planteada es imaginaria aunque se intente relacionar con situaciones propias del mundo real (cuentakilómetros que miden en distintas unidades según la hora del día), se podría dar en la vida real pero de forma anecdótica o poco usual (granjeros con invernaderos de grandes dimensiones que se riegan con regaderas de uso doméstico) o puramente matemático (niños que dibujan el reflejo de notas musicales en un espejo)
Pregunta	1	Se formularía de manera habitual para el evento descrito y cuya respuesta tiene un valor práctico o es interesante para otros que no estén muy interesados en las matemáticas
	0	No se formularía así en el mundo real y, si se formulara, no se correspondería con el evento descrito.
Información	1	Los datos coinciden con los reales
	0	Los datos no coinciden con los reales o esta información sólo es accesible mediante competencias diferentes a las requeridas en la situación simulada (p.e., medias o desviaciones típicas)

Dimensiones	Valoración	Indicadores
Secundarias		
Propósito	1	Cuando se menciona explícitamente y está en concordancia con el de la situación real
	0	Cuando no está claro o la tarea se describe sin aludir a ninguna situación concreta, de manera que podría ajustarse a muchas situaciones y propósitos para resolverla
Especificidad de datos	1	Los personajes tienen nombre propio, los objetos están definidos o son familiares y los lugares son específicos, el problema está formulado en 1ª o 2ª persona o se menciona la procedencia de los gráficos. O bien, la situación no es específica pero sí lo son, al menos, los elementos objeto de tratamiento matemático aunque no se aporte su nombre pero sí su papel
	0	La situación es general sin especificar objetos y sujetos, o se aporta el nombre de los personajes pero no su papel, lo que hace que no puedan valorarse otros aspectos como el realismo de los datos (no es lo mismo que Ángel recoja 100 kg de patatas si es un agricultor que si no lo es pero tiene un huerto a la vuelta de su casa)

Los estudiantes conocían que la actividad debía incluirse en el portafolio de aprendizaje que desarrollaban durante el curso, y que se valoraba como correcta cuando la SPF era auténtica (ver Tabla 2), suficiente si se mejoraba al menos una de las dimensiones de estudio y mejorable si no se mejoraba ninguna.

Los datos fueron las SPI valoradas como no auténticas por los estudiantes y las correspondientes SPF. En total fueron consideradas 35 SPI de las 69 que propusieron y sus respectivas35 SPF.

Para establecer la autenticidad de cada propuesta de los estudiantes, el sistema de categorías consideró las dimensiones mencionadas anteriormente, divididas en principales y secundarias (Tabla 1). La valoración de estas dimensiones permitió valorar la autenticidad de las tareas propuestas en el siguiente sentido (Tabla 2).

Tabla 2. Categorización de las actividades según los valores de las dimensiones principales y secundarias

Autenticidad	Valores de la matriz (Evento, pregunta, Información, Propósito, Especificidad)
Auténticas	(1,1,1,1,1)
Verosímiles	(1,1,1,0,1) (1,1,1,1,0) (1,1,1,0,0)
Ficticias	(1,1,0,_,_) (1,0,1,_,_) (0,1,1,_,_) (1,0,0,_,_) (0,1,0,_,_) (0,0,1,_,_) (0,0,0,_,_)

Los datos se organizaron en tablas, tanto en valores absolutos como en porcentajes, y se compararon teniendo en cuenta las categorías consideradas.

RESULTADOS

Los contextos seleccionados por los estudiantes para maestro para proponer las SP fueron muy variados: colegio (usualmente el patio), excursión de fin de curso, mercado, museo, parque, juegos de mesa o azar, supermercado, disfraces de carnaval o Halloween, cumpleaños, fiestas, vacaciones, deportes (como el atletismo o baloncesto) y habitación.

La participación en la puesta en común fue intensa y los estudiantes aportaron ideas para posibles modificaciones. Por ejemplo uno de los grupos propuso, como SP inicial: *Si el campo de baloncesto tiene forma rectangular y sus lados miden 15 y 28 metros, ¿cuántos centímetros miden en total todos sus lados?* Aunque la propuesta partía de un contexto cercano, al presentarla en gran grupo e intentar conseguir un propósito para calcular el perímetro del campo de baloncesto, se recibieron sugerencias como que, por ejemplo, podría ser para poner vallas publicitarias para recaudar dinero para el tratamiento que necesita un niño de la población que tiene una enfermedad degenerativa. Ello se podría aprovechar para enlazar los contenidos de medida con los del sistema monetario.

Un estudio descriptivo de los datos mostró que la mayor parte de las SP iniciales fueron ficticias (63%). A pesar de la mejora de las SPF propuestas por los grupos de estudiantes, donde ya más de la mitad eran auténticas (Figura 1), seguía manteniéndose un alto porcentaje de ficticias, es decir, algunos grupos no fueron capaces de identificar, al analizar su propuesta inicial, algunas deficiencias en las diversas dimensiones consideradas.

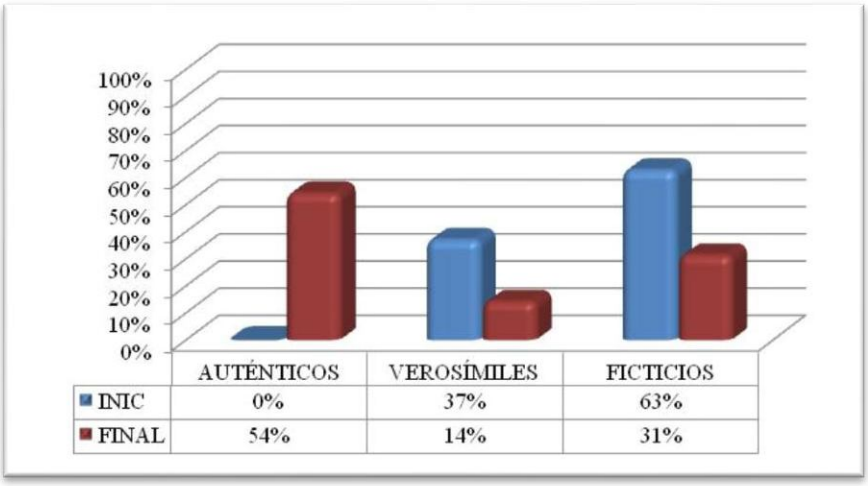


Figura 1. Porcentaje de SPI y SPF en cada una de las categorías Auténticas, Verosímiles y Ficticias

Las diversas dimensiones tuvieron un tratamiento diferente por parte de los grupos (Figura 2). Las mayores dificultades surgieron en las secundarias, sobre todo en la especificación de un *propósito* para afrontar la SP (solo lo hicieron en el 14% de las SPI, que pasó a ser el 66% en las SPF). La falta de *especificidad* de los datos tuvo influencia en las SPF al considerarse inicialmente en el 40% de los casos y pasar a tenerse en cuenta en casi la totalidad de las tareas modificadas (94%). En cuanto a las dimensiones principales, las SPI las consideraron en todos los casos en más del 60% y, en las SPF, superaron el 80%.

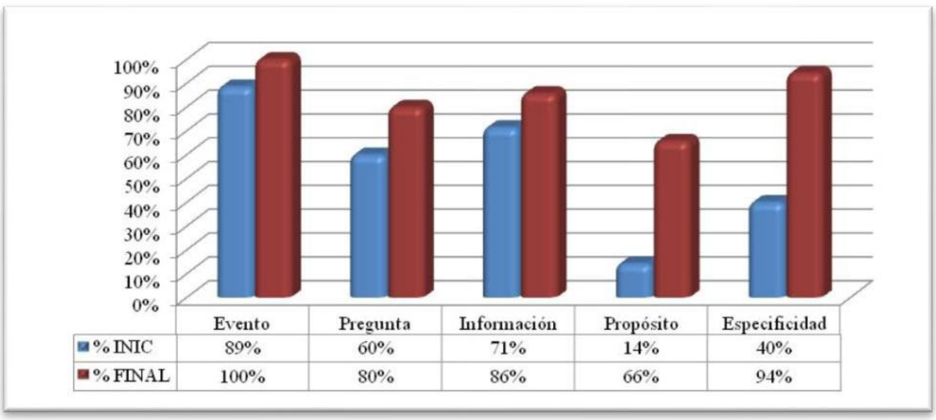
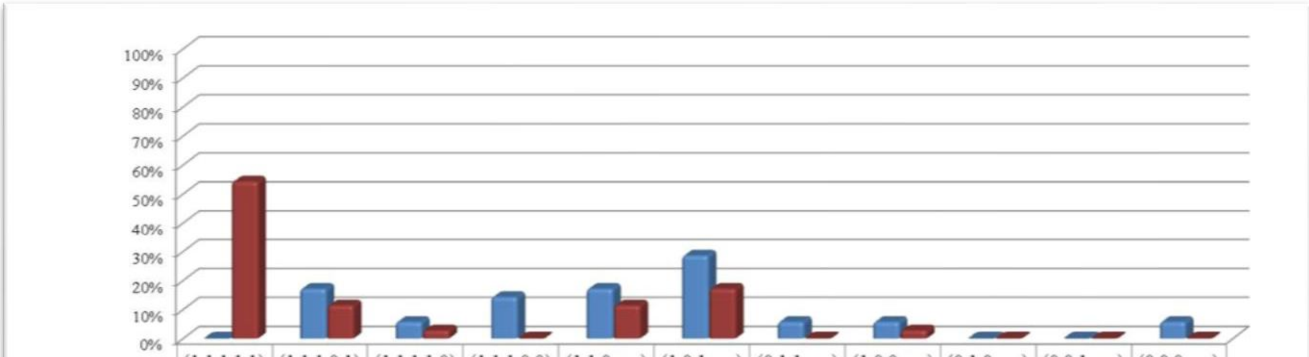


Figura 2. Porcentaje de SPI y SPF que fueron valoradas con 1 en cada una de las dimensiones utilizadas para la categorización de tareas auténticas

Profundizando en las SPI propuestas por los grupos de estudiantes, fueron principalmente tareas ficticias donde, en la mayoría de ellas, la *pregunta* no se realizaría así para el evento planteado o los datos no coincidían con los reales (41%) y, en un porcentaje menor, descuidaron la *información* (29%). En las SPF estos dos aspectos fueron revisados y disminuyeron hasta el 17% en el primer caso y el 14% en el segundo (Figura 3).



	Auténticos	Verosímiles			Ficticios						
	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,0,0)	(1,1,0,_,_)	(1,0,1,_,_)	(0,1,1,_,_)	(1,0,0,_,_)	(0,1,0,_,_)	(0,0,1,_,_)	(0,0,0,_,_)
% INIC	0%	17%	6%	14%	17%	29%	6%	6%	0%	0%	6%
% FINAL	54%	11%	3%	0%	11%	17%	0%	3%	0%	0%	0%

Figura 3. Porcentaje de SPI y SPF para cada una de las posibilidades consideradas en la matriz (Evento, Pregunta, Información, Propósito y Especificidad de datos)

Un análisis más pormenorizado de los datos muestra que todas las tareas verosímiles en las que solo una dimensión principal fue valorada con cero, fueron modificadas hasta convertirlas en auténticas pero, cuando las dos dimensiones secundarias fueron valoradas con cero, los estudiantes modificaron solo una de ellas y consiguieron transformar únicamente el 20% de las mismas en auténticas. En el caso de las tareas ficticias, la transformación de las SPI en auténticas tuvo un desarrollo más variado y complejo.

Los ejemplos 1 y 2 muestran SPI ficticias (Figuras 4 y 7) que se transformaron en auténticas (Figuras 6 y 8). El ejemplo 3 muestra una SPI ficticia que no fue transformada en auténtica (Figuras 9 y 10).

Ejemplo 1:

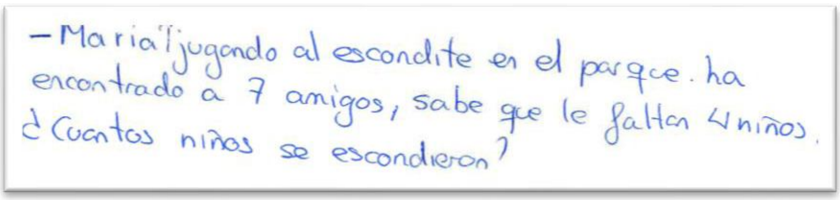


Figura 4.SPI (1,0,1,0,0)

SPF: La modificación se hizo en dos pasos (Figuras 5 y 6).

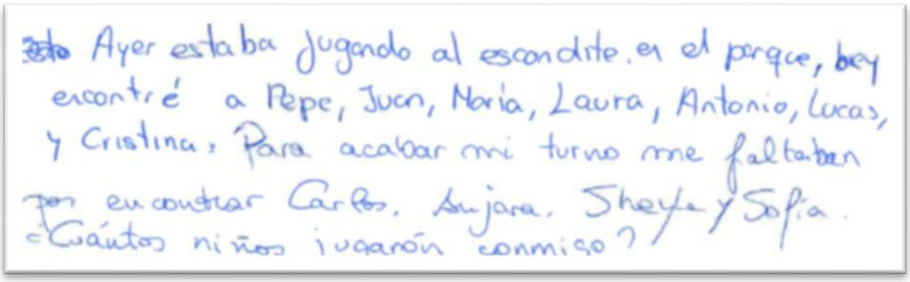


Figura 5. Primera propuesta de SPF (1,1,1,0,1)

Parece que los estudiantes, en su grupo, se dieron cuenta de que habían mejorado la *pregunta* y la *especificidad de los datos* pero no el *propósito* y, por ello, decidieron realizar un nuevo planteamiento (Figura 6).

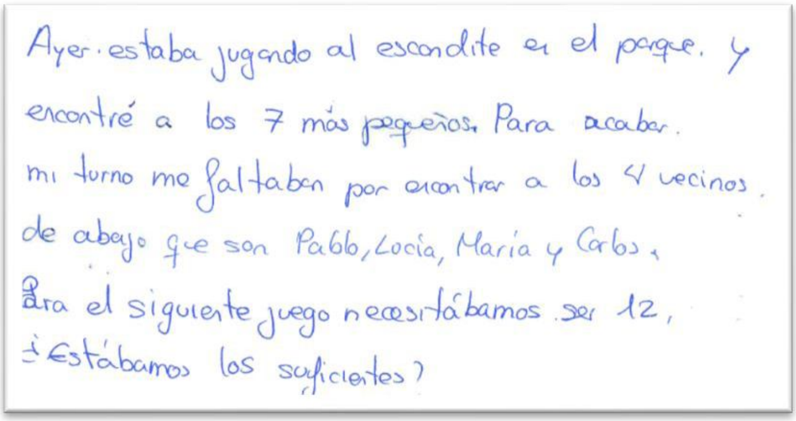

Ayer estaba jugando al escondite en el parque, y encontré a los 7 más pequeños. Para acabar mi turno me faltaban por encontrar a los 4 vecinos de abajo que son Pablo, Lucía, María y Carlos. Para el siguiente juego necesitábamos ser 12, ¿Estábamos los suficientes?

Figura 6.SPF (1,1,1,1,1)

Ejemplo 2:

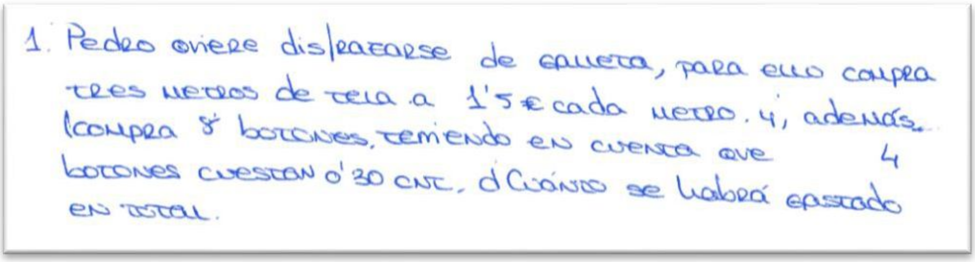
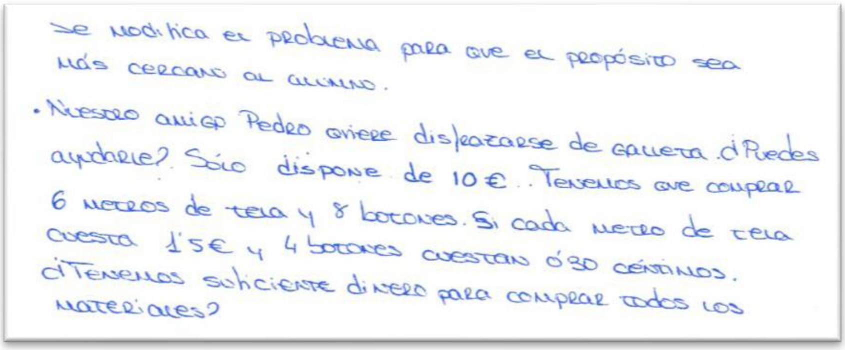

1. Pedro quiere disfrazarse de galleta, para ello compra tres metros de tela a 1'5 € cada metro. Y, además, compra 8 botones, teniendo en cuenta que 4 botones cuestan 0'30 cnt. ¿Cuánto se habrá gastado en total.

Figura 7.SPI (1,1,1,0,0)

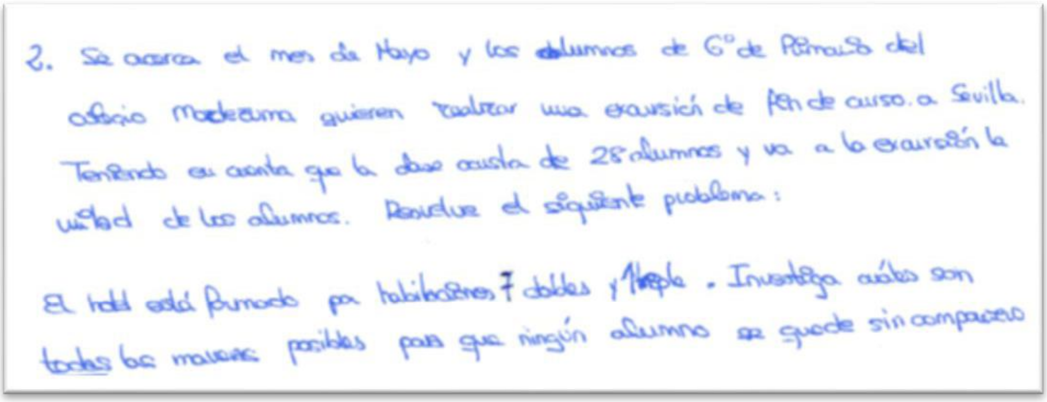

Se modifica el problema para que el propósito sea más cercano al alumno.

• Nuestro amigo Pedro quiere disfrazarse de galleta ¿Puedes ayudarle? Sólo dispone de 10 €. Tenemos que comprar 6 metros de tela y 8 botones. Si cada metro de tela cuesta 1'5€ y 4 botones cuestan 0'30 céntimos. ¿Tenemos suficiente dinero para comprar todos los materiales?

Figura 8. SPF (1,1,1,1,1)

En este caso los estudiantes valoraronla SPIcomo (1,1,1,0,1), es decir, sólo percibieron carencias en el propósito (de hecho, comenzaron su modificación con la frase: *Se modifica el problema para que el propósito sea más cercano al alumno*). Sin embargo se observa que, además de precisar un propósito para realizar el cálculo y saber si el protagonista tendrá suficiente dinero para poder disfrazarse, se involucraba al alumno mejorando la especificidad de los datos al precisar que el desconocido Pedro de la primera propuesta era un amigo que solicitaba ayuda de manera que, en cierto sentido, todos participábamos de su compra.

Ejemplo 3: SPI ficticia que no se convirtió en auténtica.

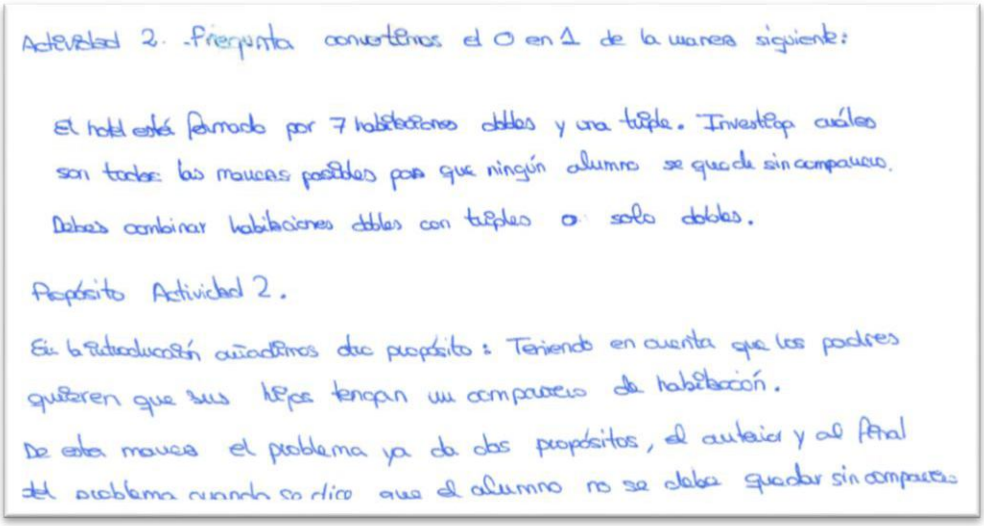


2. Se acerca el mes de Mayo y los alumnos de 6º de Primaria del colegio Madrearma quieren realizar una excursión de fin de curso a Sevilla. Teniendo en cuenta que la clase consta de 28 alumnos y va a la excursión la mitad de los alumnos. Resuelve el siguiente problema:

El hotel está formado por habitaciones 7 dobles y 1 triple. Investiga cuáles son todas las maneras posibles para que ningún alumno se quede sin compañero

Figura 9. SPI (1,0,1,0,1)

Para hacer el proceso de cambio más visible, se presenta en la Figura 10 el texto original que entregaron los estudiantes para elaborar su planteamiento revisado. Los estudiantes, en su grupo, se dieron cuenta de que la *pregunta* no se realizaría así en la realidad, lo que podría provocar desinterés en su realización, y, además, no había ningún *propósito* que mostrase la necesidad de resolverlo. Sin embargo, en la SPF, aunque se añadió un requerimiento de los padres para asistir a la excursión que podría dar sentido a la necesidad de realizar el problema, la *pregunta* seguía sin formularse como podría hacerse en la realidad.



Actividad 2. Pregunta convertimos el 0 en 1 de la manera siguiente:

El hotel está formado por 7 habitaciones dobles y una triple. Investiga cuáles son todas las maneras posibles para que ningún alumno se quede sin compañero. Debes combinar habitaciones dobles con triples o solo dobles.

Propósito Actividad 2.

En la introducción añadimos dos propósito: Teniendo en cuenta que los padres quieren que sus hijos tengan un compañero de habitación.
De esta manera el problema ya da dos propósitos, al anterior y al final del problema cuando se dice que el alumno no se debe quedar sin compañero

Figura 10. Proceso descrito para SPF (1,1,0,1,1)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En un contexto de formación inicial de maestros se trabajó con portafolio de aprendizaje donde uno de los aspectos más importantes era la revisión del estudiante de su propio trabajo. Con ese objetivo se experimentó una actividad, diseñar una tarea matemática para Primaria cercana al contexto del estudiante para, posteriormente, mejorarla para convertirla en auténtica (Cáceres et al., 2010).

El hecho de realizar actividades diferentes a las que los estudiantes para maestro estaban acostumbrados consiguió que se mostraran motivados e involucrados. Manifestaron su convencimiento de que la conexión de lo que se trabaja en el aula con contextos reales próximos favorece la motivación para afrontar tareas matemáticas y, como consecuencia, el aprendizaje de esta materia, lo cual podría ser objeto de futura investigación.

Existen pocos estudios sobre las revisiones que estudiantes para maestro hacen de su propio trabajo y sobre tareas auténticas por lo que este trabajo supone un avance en ese sentido. Si bien, como perspectiva de futuro, sería conveniente profundizar con los estudiantes, en la justificación de la utilización de esa categorización y de las cinco dimensiones que se consideran para determinar tareas auténticas porque se detectaron dificultades en la valoración de las algunas dimensiones de autenticidad. Esto implica que el docente debería reconsiderar la preparación del desarrollo de una actividad de este tipo. Para ello, por ejemplo, se podría proponer una actividad similar a partir de una SP donde todas las dimensiones se valoraran con cero y trabajar la modificación de cada aspecto de forma aislada para, finalmente, tratar de conseguir una tarea auténtica. En otro sentido, también se podría trabajar en el estudio de la autenticidad de problemas propuestos en los libros de texto y en las modificaciones que los estudiantes para maestro hacen de su propio trabajo en el sentido de, por ejemplo, Cáceres et al. (2010). Finalmente, proponer tareas auténticas y mejorarlas en el aula de Primaria también puede ser objetivo de futura investigación.

Referencias

Blanco, L.J y Cárdenas, J.A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Revista Campo Abierto, 32*(1), 137-156.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37-55.

Cáceres, M. J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education 26*, 5, 1186-1195.

Chamoso, J. M. y Cáceres, M. J. (2009).Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 198-206. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1214/591

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2015 mayo). Diseño e implementación de una asignatura de formación de docentes reflexivos de matemáticas que considera los contenidos globalizados. Presentado en *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Tutxla Gutiérrez, Chiapas, México.

Chamoso, J. M., y Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas. *Suma, 36*, 33-41.

Chamoso, J. M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2013, noviembre). Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿son solo problemas para el aula? (pp. 1-17*). Presentado en I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (*I CEMACYC)*, Santo Domingo, República Dominicana. Disponible en http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/Conferencia_paralela,_Chamoso.pdf

Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.*), Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Dordrecht, Los Países Bajos: D. Reidel.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education, 26*, 152-160.

Hiebert, J. y Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*, 2, 393-425.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 4, 372-400.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: LEA.

Malaspina, U. (2015, mayo). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Presentado en *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Tutxla Gutiérrez, Chiapas, México. Disponible en http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1485/607

MECD (2015).*Marco General de la evaluación de 3er curso de Educación Primaria*. MECD. INEE

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Autor.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 37–58.

Palm, T. y Burman, L. (2004). Reality in Mathematics Assessment: An analysis of task-reality concordance in Finnish and Swedish National Assessments. *Nordic Studies in MathematicsEducation, 9*(3), 1-33

OCDE (2012). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* MECD. INEE.

Schoenfeld, A.H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *Montana Mathematics Enthusiast, 10*(1/2), 9-34.

Singer. F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 9-26.

Stevens, F. y Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Functional thinking in first-year primary teacher students: An exploratory study

Cañadas, M. C.[a] y Fuentes, S.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez

Resumen

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia sobre el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria en España. Presentamos parte de los resultados de un estudio exploratorio desarrollado con estudiantes de primer curso (seis-siete años). Mostramos los sistemas de representación y las estrategias que utilizan los estudiantes en la realización de una tarea que involucra la relación funcional f(x)=5x. Los resultados evidencian una variedad de estrategias empleadas por los estudiantes que incluyen la identificación de diferentes relaciones funcionales (adecuadas o no a la tarea) y la utilización de distintos sistemas de representación, con predominio del pictórico.

Palabras clave: *estrategias, pensamiento funcional, relaciones funcionales, sistemas de representación.*

Abstract

This work is developed within a wider investigation about Spanish elementary students´ functional thinking. We present part of the results of an exploratory study developed with students of year 1 (six -seven years old). We show the representation systems and strategies used by the students when solving a task which involves the functional relationship f(x)=5x. The results evidence a variety of strategies used by the students that includes the identification of different functional relationships (adequate or not to the task) and the used of distinct representation systems, with predominance of the pictorial one.

Keywords: *functional relationships, functional thinking, strategies, representation systems.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Desde la propuesta curricular *early algebra* recomiendan introducir el pensamiento algebraico en educación primaria e incluso en educación infantil, aprovechando diferentes contenidos curriculares previos a la educación secundaria (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015; Kaput, 2008; Molina, 2009). No se trata de adelantar de curso los contenidos que actualmente se trabajan en educación secundaria, si no de dar un enfoque diferente a los contenidos que ya existen o incluso incluir nuevos contenidos que faciliten la aproximación de los estudiantes al álgebra. Uno de los enfoques para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria es el pensamiento funcional. Dentro de este enfoque, Usiskin (1999) propone que el álgebra acompañe a

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

los contenidos de educación infantil y primaria con conceptos algebraicos que relacionen los valores de dos variables, para que los niños puedan establecer relaciones funcionales de forma intuitiva.

Los estudiantes de educación primaria son capaces de identificar relaciones funcionales entre dos variables, representar esas relaciones de diferentes formas (incluyendo el simbolismo algebraico), generalizar relaciones entre dos variables y utilizar relaciones funcionales para interpretar problemas (e.g., Brizuela y Earnest, 2008; Cañadas, Brizuela y Blanton, en revisión; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Merino, Cañadas y Molina, 2013a, 2013b). A nivel internacional, los investigadores abordan el pensamiento funcional en educación primaria a través de tareas que involucran relaciones funcionales lineales. Blanton y Kaput (2004) muestran cómo los niños descubrieron, gradualmente, propiedades en la relación, como la paridad, la relación aditiva o multiplicativa entre las variables. Finalmente, los niños llegaron a introducir el simbolismo algebraico en sus respuestas.

En un proyecto de investigación de Estados Unidos se indaga sobre el pensamiento funcional de los estudiantes de los dos últimos cursos de educación infantil y dos primeros cursos de educación primaria. Con la información recogida en diferentes centros, se logran resultados sobre las estrategias, los sistemas de representación y las relaciones funcionales que usan los estudiantes en la resolución de tareas. Brizuela et al. (2015) llegan a introducir el simbolismo algebraico en primero de educación primaria, con la intención de indagar si utilizan letras para expresar la generalización a partir de la introducción de parejas de datos en una tabla. Algunos de los errores identificados apuntan a la conexión que establecen los estudiantes entre las letras y el orden de las mismas dentro del abecedario. Los estudiantes evidencian su comprensión de las letras como variables, pero no desechan el uso de valores específicos para cada una de las situaciones planteadas. Cañadas et al. (en revisión) analizan la correlación que establecen estudiantes de segundo de educación primaria al trabajar con situaciones que involucran funciones lineales. Entre los resultados, destacan las diferentes estrategias utilizadas para relacionar las dos variables. Por ejemplo, hay niños que utilizan el doble como la suma de un número consigo mismo y otros que utilizan la suma de dos en dos (con base en la relación de recursividad, que les dificulta llegar a la generalización). Las autoras destacan la capacidad de los estudiantes para cambiar del contexto presentado en la situación al matemático, y viceversa.

A pesar de las repercusiones positivas que parece tener el pensamiento funcional en los niños de educación primaria, en España existe una necesidad de investigaciones que lo aborden (Fuentes, 2014; Merino, et al., 2013a, 2013b). Nuestro problema de investigación surge del interés por potenciar el pensamiento algebraico a través de la introducción del pensamiento funcional en edades tempranas. En este trabajo indagamos sobre las relaciones funcionales que establecen los estudiantes de primer curso de educación primaria, las estrategias que usan para resolver tares que involucran estas relaciones y los sistemas de representación que emplean.

MARCO CONCEPTUAL

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se pone de manifiesto al construir, describir y razonar con y sobre las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011) y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones que conciernen a las funciones (Rico, 2006). El pensamiento funcional aborda las ideas de cambio, relaciones entre esos cambios, y utilizar esas relaciones para resolver problemas (Warren y Cooper, 2005). Este tipo de pensamiento tiene por objeto establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que están inmersos en una situación cotidiana para el estudiante. El pensamiento funcional demanda descubrir otras parejas de datos involucradas en esa situación y la generalización de la relación que se establece entre esos conjuntos de datos.

El simbolismo algebraico es fundamental en temas relacionados con las funciones. Sin embargo, los investigadores sobre el pensamiento funcional consideran que dicho pensamiento incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos (e.g., Radford, 2011). La utilización del sistema de representación verbal u otros como el pictórico resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla general o generalización. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la recursividad, se llega a la generalización. Para llegar a la generalización es necesario ir más allá de una relación recurrente entre los valores de una variable.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo abordamos los siguientes objetivos de investigación, relacionados con el pensamiento funcional.

- Identificar y describir estrategias que utilizan los estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales lineales.
- Describir los sistemas de representación que utilizan los estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales lineales.

MÉTODO

Este trabajo es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se trata de un estudio transversal realizado con una muestra intencional de 32 estudiantes de primero de educación primaria (seis-siete años). Estos niños asistían a un centro concertado de Granada (España) y no habían trabajado previamente los contenidos ni el tipo de tareas previstos para esta investigación. En particular, no habían trabajado la multiplicación. Sí habían abordado la identificación de patrones geométricos, conteos de uno en uno y de dos en dos con su maestra, sin asociarlos a ningún contexto.

Las autoras recogimos la información analizada en este trabajo en una sesión de clase a través de una prueba individual escrita. En la prueba hay una situación descrita, que también explicamos oralmente. Esta situación involucra una relación funcional lineal con dos variables y con dominio los números naturales. La relación se establece entre número de niños y número de globos que deben comprarse para una fiesta de cumpleaños: 5 globos para cada niño (la función involucrada es $f(x)=5x$). Las variables de tarea para los apartados de la tarea son: (a) tamaño de los números implicados, (b) sistemas de representación empleados en el enunciado, (c) sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta y (d) preguntas sobre casos particulares consecutivos o no consecutivos.

En primer lugar comentamos en gran grupo los casos particulares de 1 y 2 niños y el número de globos que necesitan. A continuación presentamos los apartados que los alumnos debían contestar en la prueba y explicar lo mejor posible.

- A. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?
- B. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?
- C. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?
- D. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?
- E. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?
- F. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?
- G. Explícale a la mamá de Lola cuántos globos tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.

Con base en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) y nuestros objetivos de investigación, realizamos varias revisiones de datos y elaboramos diferentes categorías hasta llegar a las categorías definitivas para analizar la información: (a) responde (sí/no), (b) corrección (sí/no), (c) sistemas de representación (simbólico, pictórico, verbal, tabular, etc.) y (d) estrategias (conteo de dibujos, respuesta directa, asociación de elementos en grupos, cambia el número de niños en la relación u otra estrategia). Los valores correspondientes a sistemas de representación no son disjuntos, pues los estudiantes podían emplear varios en un mismo apartado.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este apartado describimos el trabajo de los estudiantes en cada apartado de la tarea. En las tablas 1 y 2 recogemos el resumen de resultados del número de estudiantes para cada una de las categorías descritas. En la tabla 1 recogemos la información relativa a la respuesta, su corrección y los sistemas de representación que emplean los estudiantes en cada apartado.

Tabla 1. Respuestas y sistemas de representación

		Sistema de representación			
			Simbólico		
Responden	Responden correctamente	Pictórico	N	O	Verbal
		Apartado A			
32	10	14	20	3	3
		Apartado B			
32	10	14	20	3	3
		Apartado C			
30	7	16	15	2	3
		Apartado D			
30	4	16	15	2	3

Tabla 1. Respuestas y sistemas de representación

		Sistema de representación			
			Simbólico		
Responden	Responden correctamente	Pictórico	N	O	Verbal
Apartado E					
29	3	16	14	2	3
Apartado F					
28	0	14	13	2	4
Apartado G					
22	1	2	11	1	19

Nota. N = numérico; O = operaciones.

Como se observa en la tabla 1, en los primeros apartados (casos particulares consecutivos), casi la totalidad de los estudiantes contestan (A, B, C). En apartados relativos a casos particulares no consecutivos (D, E, F), observamos que el número de estudiantes que responden cada apartado va disminuyendo, llegando a 22 en el apartado G, sobre la generalización de la relación.

En todos los apartados, el número de estudiantes que contestan correctamente es menor a un tercio. Ese número también va disminuyendo según avanzamos en los apartados, conforme aumenta el nivel de complejidad. En los dos primeros apartados, 10 estudiantes contestan correctamente, pero esta cifra decae progresivamente hasta llegar a ningún y un estudiante en los apartados F y G, respectivamente.

Los estudiantes utilizaron varios sistemas de representación simultáneamente en todos los apartados. Alrededor de la mitad de los estudiantes realizaron dibujos (sistema de representación pictórico) en todos los apartados menos en el G. La mayoría de estos estudiantes combinaron los dibujos con números en sus respuestas (sistemas de representación pictórico y numérico). Por otro lado, dos o tres estudiantes utilizaron operaciones para dar respuesta a todos los apartados de la tarea. Tres o cuatro estudiantes dieron su respuesta verbalmente a todos los apartados excepto el G. En el último apartado de la tarea aumenta significativamente el número de estudiantes que responden verbalmente (19) ya que en él se pidió que explicaran su respuesta. De ahí también el bajo número de estudiantes que utilizan el sistema de representación pictórico (2).

En cuanto a las estrategias utilizadas, identificamos tres: (a) conteo de dibujos, (b) respuesta directa y (c) asociación de elementos en grupos de cinco. A continuación describimos cada estrategia y diferentes formas de emplearlas.

Conteo de dibujos. Hacen dibujos de globos y los cuentan.

- Relación 1-5. Dibujan cinco globos por cada niño.
- Sin relación. Dibujan globos pero no hay relación entre estos y el número de niños dado.

Respuesta directa. Presentan un número de globos como respuesta, sin explicaciones.

- Relación 1-5. El número de globos es cinco veces el número de niños.
- Relación 1-1. El número de globos coincide con el número de niños.

- Relación n+5. El número de globos es igual al número de niños más cinco.
- Sin relación. El número de globos no tiene relación aparente con el número de niños dado.

Asociación de elementos en grupos. Presentan varios grupos de globos.

- Todos los grupos correctos. Hacen grupos de cinco globos o con números cinco y todos los grupos tienen cinco elementos.
- Algunos incorrectos. Hacen grupos de cinco globos y algunos de los grupos tienen más o menos de cinco elementos.

Cambia el número de niños de la relación. Responden considerando un número de niños diferente al dado.

Otra estrategia. Hay una estrategia diferente de las anteriores que no ayuda a responder el apartado.

En la tabla 2 presentamos el número de estudiantes que utilizó cada una de las estrategias descritas.

Tabla 2. Estrategias

Conteo de dibujos			Respuesta directa				Asociación en grupos			
R 1-5	R 1-1	SR	R 1-5	R 1-1	R n+5	SR	TC	AI	CNNR	OE
Apartado A										
5	3	4	4	1	3	8	3	0	0	1
Apartado B										
3	4	3	4	1	1	9	4	0	2	1
Apartado C										
1	10	1	2	1	1	9	3	0	1	1
Apartado D										
1	10	1	1	1	1	10	3	0	2	1
Apartado E										
1	10	1	1	1	1	9	2	0	3	1
Apartado F										
0	5	6	0	1	1	9	1	1	3	1
Apartado G										
0	0	2	0	12	2	5	1	0	0	0

Nota. R 1-5 = relación 1-5; R 1-1 = relación 1-1; R n+5 = relación n+5; SR = sin relación; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

En la tabla 2 se observa que entre 10 y 12 estudiantes dibujaron los globos y los contaron en cada apartado. Entre 12 y 19 estudiantes dieron una respuesta directa a cada apartado. El número de estudiantes que contaron los globos siempre fue menor o igual al número de estudiantes que respondieron directamente en todos los apartados. La asociación en grupos la utilizaron entre uno y tres niños según el apartado, siendo la estrategia empleada con menor frecuencia en todos los apartados.

Identificamos la relación 1-1 en nueve y siete estudiantes en los apartados A y B, respectivamente. Hasta 11 estudiantes utilizan la relación 1-1 en tres apartados (C, D y E). Hasta 10 estudiantes no identificaron relación en un apartado. La mayoría de estudiantes que no identifican la relación se corresponden con respuestas directas.

Hasta cuatro estudiantes asociaron los globos en grupos en un apartado (el B). Tres estudiantes utilizaron esta estrategia en todos los apartados. Hay un estudiante que establece grupos y considera alguno de ellos con el tamaño incorrecto, dando una respuesta errónea.

Observamos que cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común cuando los casos particulares no son consecutivos. Algunos estudiantes continúan la secuencia según un patrón, sin tener en cuenta la relación establecida con el número de niños.

Un estudiante evidencia otra estrategia que no le permite resolver los apartados correctamente. En la figura 1 mostramos un ejemplo de esto en el apartado D.

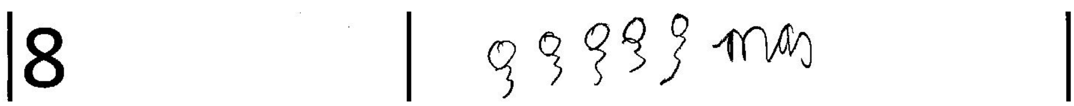


Figura 1. Ejemplo de otra estrategia (estudiante 27, apartado D)

A continuación, mostramos ejemplos del trabajo que realizaron los estudiantes en algunos apartados y que dan muestra de los sistemas de representación utilizados y de las estrategias.

Seis estudiantes usaron la relación 1-5 en el apartado C (ver tabla 2). De ellos, dos a través de una respuesta directa, uno con dibujos y tres hicieron grupos. En la figura 2 mostramos la respuesta de uno de estos tres estudiantes. Observamos que los globos dibujados se encuentran distribuidos en grupos de cinco y que hay tantos grupos como niños hay (5). Once estudiantes identificaron la relación 1-1, de los cuales uno dio una respuesta directa y los 10 restantes dibujaron los globos.

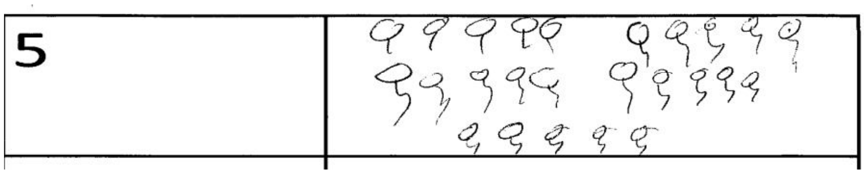


Figura 2. Ejemplo de creación de grupos(estudiante 26, apartado C)

En cuanto a las estrategias que utilizaron los estudiantes en el apartado E, tres estudiantes identificaron la relación 1-5. Uno de ellos mediante dibujos (ver figura 3), utilizando los sistemas de presentación pictórico y simbólico. Como observamos, presenta el 50 como respuesta y dibuja los 50 globos.

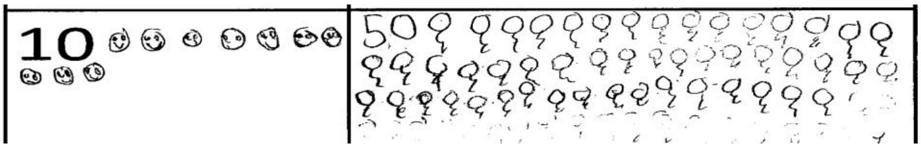


Figura 3. Ejemplo de conteo de dibujos en relación 1-5(estudiante 15, apartado E)

En el apartado G, un estudiante identificó la relación 1-5 a través de la conformación de grupos y 12 identificaron la relación 1-1 en su respuesta directa. Como en el apartado se pide que expliquen su respuesta, un elevado número de estudiantes utilizan el sistema de representación verbal. Hay siete estudiantes que hacen explícita la relación funcional que establecen. Analizamos la respuesta del estudiante 4, quien expresó: “ai sien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100” (hay cien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100). En esta respuesta se evidencia la utilización de una serie de 5 hasta llegar a 100. La relación más común fue la 1-1 y en algunos casos establecieron la relación n+5. Otro estudiante utilizó la serie numérica en la que incluyó tantos cincos como niños, aunque se equivocó en la cantidad de cincos en el apartado D.

Algunos estudiantes siguieron la misma estrategia en todos los apartados pero no siempre fue así. Por ejemplo, el estudiante 7 contestó correctamente a los apartados A, B, C, identificando la relación 1-5. Sin embargo, para los apartados D, E, F, entrega un número sin relación aparente y en el apartado G utilizó la relación n+5. Otro ejemplo lo observamos en el estudiante 15, quien contestó correctamente los apartados A, B, C, D, E, pero dio una respuesta incorrecta al apartado F. En el apartado G utilizó la relación n+5. Esto pone de manifiesto que el estudiante respondió a los primeros apartados mediante una relación de recurrencia y no llegó a detectar el patrón de forma general.

CONCLUSIONES

Con este trabajo contribuimos a la investigación que se está llevando a cabo sobre *early algebra* y, específicamente, sobre el pensamiento funcional en edades tempranas. Esta investigación es innovadora porque contribuye a una línea de actualidad que ha recibido poco tratamiento en España. Parte de la originalidad de esta investigación radica, a nivel internacional, en el trabajo con estudiantes de primero de educación primaria, donde son escasos los trabajos desarrollados.

Para dar respuesta a los objetivos de investigación, hemos analizado las producciones escritas de 32 estudiantes de primero de educación primaria en la realización de una tarea que involucra una relación funcional del tipo f(x)=5x. El sistema de categorías desarrollado para este trabajo puede ser útil para futuras investigaciones en este u otros niveles educativos para tareas similares.

El sistema de representación más frecuentemente utilizado por los estudiantes fue el pictórico, a excepción del apartado sobre generalización donde, como era de esperar, el sistema de representación verbal fue el predominante. El pictórico apareció usualmente vinculado con el sistema de representación simbólico (números). Algunos estudiantes llegaron a la expresión numérica final mediante el conteo o mediante la expresión de operaciones entre números que anotaban. Además, hubo estudiantes que utilizaron el sistema de representación verbal, a través del cual explicaron su respuesta. Debemos destacar que su vocabulario era muy pobre y, en ocasiones, esto dificultaba su explicación. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta su edad y que la mayoría de ellos eran lectores y/o escritores principiantes.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los estudiantes, destacamos las relaciones entre las variables implicadas que los estudiantes detectan. La relación 1-5, que es la correcta, la hemos encontrado tanto en respuestas de estudiantes que realizan dibujos de niños y globos y realizan el recuento sobre los mismos; como en casos en los que dan una respuesta directa. Entre las relaciones que dan lugar a una respuesta inadecuada para la situación planteada en la tarea, los estudiantes utilizan la relación 1-1 y n+5 para dar soluciones a la tarea. En el primer caso, los estudiantes consideran que necesitan el mismo número de globos que niños haya, por lo que no están considerando el contexto (no matemático) de la tarea. También es posible que estos estudiantes hayan utilizado la relación funcional de una tarea previa que involucraba la relación identidad. En el otro caso, parece ser una confusión entre la estructura multiplicativa del problema (que se correspondería con una expresión del tipo 5n) y la estructura aditiva que ellos tienen en cuenta (n+5). Esto puede deberse a que en este curso están trabajando fundamentalmente con la estructura aditiva. En este sentido, algunos estudiantes utilizan la asociación de elementos en grupos, una vía habitual de la introducción de la estructura multiplicativa. Entre los estudiantes que hacen grupos de cinco globos, se presenta un error que consiste en considerar algún grupo que no tiene cinco globos.

Los resultados enriquecen los antecedentes internacionales citados. Además, desde el punto de vista nacional, presentamos una primera aproximación a la descripción del pensamiento funcional de los estudiantes de primero de educación primaria. Es viable la incorporación de tareas relacionadas con este pensamiento en este curso. Los estudiantes son capaces de desarrollar estrategias y de identificar patrones de forma general, más de lo que cabía esperar en un comienzo dados sus conocimientos previos. Este trabajo nos proporciona información para lograr profundizar en un futuro en otros cursos de educación primaria y educación infantil.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the ―best deal‖ problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. M. y Gardiner, A. (2015b). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (en revisión). Second graders articulating ideas about linear functional relationships.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37,* 87-115.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1). 3-21.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México, DF: McGraw Hill.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, Blanton y Kaput (2004) NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013a). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013b). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in mathematics education monograph series* (pp. 303-322). Nueva York, NJ: Springer.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y VALOR POSICIONAL[i]

Basic mathematical knowledge in a university degree on Primary Education: decimal numbering system and place value

Castro, Á., Gorgorió, N. y Prat, M.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos un estudio con futuros maestros sobre su conocimiento conceptual del sistema de numeración decimal (SND) y valor posicional (VP). En primer lugar, establecemos el conocimiento conceptual del SND y de la noción de VP como Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) para iniciar la didáctica de la adición y la substracción. A continuación, presentamos parte de un instrumento para evaluar la comprensión conceptual del SND y del VP en base a dos dimensiones: el conocimiento de los principios generales y el conocimiento subyacente a los procedimientos. Al aplicarlo a 135 estudiantes del Grado de Educación Primaria observamos que, en su mayoría, ponen de manifiesto una comprensión fragmentada, incompleta y mecánica del SND y del VP.

Palabras clave: *Conocimiento matemático fundamental, formación de maestros, conocimiento conceptual, sistema de numeración decimal y valor posicional*

Abstract

We present a study of future teachers' conceptual knowledge of the decimal numbering system (DNS) and place value (PV). First, we establish the conceptual knowledge of the DNS and place value as Basic Mathematical Knowledge (BMK) to start the study of teaching and learning of addition and subtraction. Next, we introduce part of a research tool that we have designed to assess the conceptual understanding of the DNS and PV based on two dimensions: namely knowledge of general principles, and knowledge of principles underlying the procedures. When applying the assessment tool to 135 students in a university degree on Primary Education we observe that most of them show a fragmented, incomplete and mechanical understanding of the DNS and PV.

Keywords: *Basic mathematical knowledge, teacher education, conceptual knowledge, decimal numbering system, and place value*

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes del Grado de Educación Primaria (GEP) necesitan, al iniciar su formación, ciertos conocimientos matemáticos que incluyen elementos conceptuales y procedimentales. Así, en Castro et al. (2014), tras revisar las diferentes teorías del conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas, se establece el concepto de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF). Entendiendo el CMF como el conocimiento disciplinar básico en matemáticas, necesario para que el estudiante para maestro pueda construir con éxito el conocimiento pedagógico del contenido. Éste incluye el conocimiento de los conceptos, procedimientos y procesos de resolución de problemas que los alumnos del GEP han aprendido durante su etapa de escolarización y que necesitan al iniciar su formación.

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2015). Conocimiento Matemático Fundamental en el Grado de Educación Primaria: Sistema de numeración decimal y valor posicional. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 221-228). Alicante: SEIEM.

La aritmética es una componente básica de las matemáticas en la escuela primaria, por lo que también debiera serlo en la formación matemática de los futuros maestros. Queremos determinar el CMF, en su aspecto conceptual, relativo a la adición y la substracción para establecer hasta qué punto los estudiantes del GEP poseen dicho conocimiento al iniciar su didáctica.

Los datos presentados son la primera parte de un estudio en desarrollo para definir perfiles de conocimiento conceptual aditivo en los alumnos del GEP. En esta comunicación: (i) Establecemos el conocimiento conceptual del SND y de la noción de VP como CMF para iniciar la didáctica de la adición y la substracción. (ii) Analizamos cualitativamente las respuestas de 135 alumnos del GEP a 2 de las 4 preguntas que evalúan este conocimiento, sin entrar a explicar los elementos que pueden influir en dicho conocimiento conceptual.

Como Crooks y Alibali (2014), entendemos el conocimiento conceptual cómo: a) conocimiento de los principios generales, que observamos a través la evaluación de tareas en las que se pide reconocer ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios; y b) conocimiento subyacente a los procedimientos, que observamos a partir de la aplicación y justificación de tareas de procedimiento.

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL EN MATEMÁTICAS

Investigaciones en el área destacan la importancia del conocimiento conceptual para el aprendizaje de las matemáticas pero no parece haber un consenso ni en su definición ni en la mejor manera de cuantificarlo (Star, 2005; Baroody, Feil y Johnson, 2007; Crooks y Alibali, 2014). Diferentes caracterizaciones del término sugieren que es equiparable a un conocimiento profundo, flexible y asociado a conocimiento significativo. En esta línea, una de las más reconocidas y utilizadas es la de Hiebert y Lefevre (1986); quienes lo describen como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información –saber qué o porqué. Este conocimiento es flexible, no está vinculado a problemas específicos y es generalizable, siendo o no verbalizable. Visión recogida e interpretada a través de los años por autores como Carpenter (1986), Rittle-Johnson y Alibali (1999) o Rittle- Johnson, Siegler y Alibali (2001).

De las diferentes caracterizaciones del conocimiento conceptual recogemos la propuesta de Crooks y Alibali (2014) que lo organizan en: (i) conocimiento de los principios generales, incluyendo reglas, definiciones, conexiones y aspectos de la estructura del dominio; y (ii) conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, cómo saber porqué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso, sus conexiones y sus fundamentos conceptuales. A pesar que no está claro de qué forma se puede medir el conocimiento conceptual independientemente del conocimiento procedimental con un grado suficiente de validez, se usan diferentes tipos de tareas para evaluarlo, que incluyen tanto indicadores de conocimiento conceptual explícito como implícito.

Partimos de Crooks y Alibali (2014) para evaluar el conocimiento conceptual, tomando como indicadores cuatro tipos de tareas. Para la evaluación del conocimiento de los principios generales consideramos: (1) las tareas de explicación de concepto (definiciones, explicaciones de los elementos de la estructura de un dominio y normas o reglas); y (2) la evaluación de las tareas de ejemplo (ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios). Para evaluar el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, consideramos: (3) la aplicación y justificación de tareas de procedimiento; y (4) la evaluación de tareas de procedimiento, evaluándolas como correctas o incorrectas y juzgando si son apropiados en ciertas situaciones.

CMF CONCEPTUAL DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y DEL VALOR POSICIONAL

La numeración y el cálculo son componentes esenciales para el desarrollo del conocimiento matemático. Desde la perspectiva de la matemática escolar, se destaca la importancia del desarrollo del sentido numérico en los niños, señalando el papel clave que desempeñan los maestros en su desarrollo (Yang, 2007; NTCM, 2000). Un sólido desarrollo del sentido numérico, involucra entre otros componentes, el conocimiento profundo del SND y del VP (Castañeda, 2000; Godino, Font, Konic y Wilhelmi, 2009; NTCM, 2000; Yang, 2007). Entre otros aspectos, estos conceptos son la base para la comprensión de las operaciones fundamentales con números, fracciones y decimales (Nataraj y Thomas, 2009). No obstante, la comprensión del SND y del VP suele representar una gran dificultad, tanto para los estudiantes de primaria, como para los futuros maestros.

Coincidimos con Salinas (2007) que al impartir las asignaturas de matemáticas y su didáctica, uno de los temas en los se detectan más errores conceptuales son los relacionados con el SND y el VP. Estudios que han abordado esta problemática en el contexto de la formación de maestros (McClain, 2003; Salinas, 2007; Ortiz, González y Gallardo, 2013; Montes et al., 2015), señalan que éstos inician su formación con un dominio técnico limitado en la comprensión de estos conceptos. Desde la perspectiva del CMF, el conocimiento disciplinar de partida permitirá construir con éxito el conocimiento pedagógico del contenido. Los futuros maestros deben propiciar espacios de aprendizaje para desarrollar la comprensión de estos conceptos fundamentales en los niños. Estarán difícilmente en condiciones de hacerlo si no cuentan con un conocimiento matemático sólido.

Ante esta situación, considerando algunas de las investigaciones realizadas en el área, tanto las ya mencionadas en el contexto de formación maestros como las desarrolladas con niños (Bedoya y Orozco, 1991; Nunes y Bryant, 2003; Nataraj y Thomas, 2009) y en relación a los libros de texto (Ruesga y Guimaraes, 2011; 2012), establecemos algunos aspectos de índole conceptual que consideramos fundamentales para una correcta compresión del SND y del VP.

Entre los aspectos de carácter conceptual relacionados con los principios generales consideramos:

- la estructura recursiva multiplicativa en base 10 del SND.
- la escritura basada 10 dígitos.
- el significado del valor relativo y del VP de cada dígito.

Consideramos el conocimiento conceptual de los principios que subyacen a procedimientos como:

- Representar cantidades y números.
- Leer y escribir un número en letras y cifras.
- Comparar y ordenar números.
- Identificar el valor de los dígitos de un número.
- Contar hacia delante y hacia atrás, de 2 en 2, de 10 en 10, de 100 en 100…
- Redondear números.
- Componer, descomponer, combinar, transformar cantidades estructuradas.
- Reconocer y completar particiones y reagrupar números.
- Aplicar el conocimiento de VP para realizar cálculos.

EL ESTUDIO

Se trata de un estudio cualitativo de carácter interpretativo desarrollado con 135 estudiantes del GEP cuyo objetivo es determinar el CMF en su aspecto conceptual, que poseen los alumnos al iniciar la didáctica de la adición y la substracción. En particular, esta comunicación se centra en el CMF relativo al SND y al VP.

Instrumento

Elaboramos dos cuestionarios, que evalúan los cuatro componentes del CMF aditivo. El primero incluye los bloques temáticos del SND y VP, y el bloque de los significados de la adición y la sustracción. Para cada bloque se elaboran cuatro tipos de preguntas considerando: (i) el contenido a evaluar; (ii) el tipo de conocimiento conceptual que involucra; y (iii) los indicadores de conocimiento conceptual. Un grupo de expertos validaron los bloques de preguntas de los cuestionarios, que fueron distribuidas estratégicamente, antes de fijar su versión final. Cada cuestionario contenía preguntas de bloques que se complementaban entre sí, a fin de triangular las respuestas de los alumnos, para descartar una incorrecta interpretación del enunciado.

Los cuestionarios fueron distribuidos en dos sesiones distintas, con un tiempo de 1 hora para responder cada una de ellas Las preguntas se respondían individualmente, sin calculadora, y efectuando todos los cálculos en el propio cuestionario.

Tabla 1. Preguntas para evaluar el CMF en su aspecto conceptual del SND y valor posicional

Pregunta	Contenido a evaluar	Conocimiento Conceptual e indicadores
1) Completa y explica por qué. Forma 1: a) 5 centenas son ___ unidades = miles. b) 7 miles son ___ decenas = unidades. Forma 2: a) 50 centenas son ___ unidades= ___ miles. b) 70 miles son ___ decenas = ___ unidades.	Compresión de la estructura recursiva multiplicativa de la base 10 del SND	Principios que subyacen a los procedimientos Aplicación y justificación de las tareas de procedimiento
2) Escribe la decena más próxima de los siguientes números y explica porqué lo es: a) 43 b) 36 c) 68 d) 65	Redondeo de números para la parte del valor más cercano. Contar hacia delante y hacia atrás en las partes del VP. Valor relativo y de posición. Leer y escribir un número en letras y cifras.	
3) ¿Cuántas centenas hay en el número 130.025? ¿Cómo se escribe en palabras el número 130.025?		
4) ¿Cuál (es) de las siguientes descomposiciones corresponde (n) al número 342? Enciérrala (s) en un círculo. a) 3C + 4D + 2U b) 30D + 42U c) 2C + 14D + 2U d) 1C + 2D + 42U e) 34D + 2U	Comparar cantidades estructuradas. Reconocimiento y uso de representaciones equivalentes del mismo número. Componer, descomponer, combinar y transformar cantidades estructuradas.	Principios generales Evaluación de tareas de ejemplo

ANALISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de datos se organizaron las respuestas de los 135 alumnos en una hoja de cálculo–Excel considerando tanto el contenido a evaluar, el tipo de conocimiento conceptual y sus indicadores. Para describir el conocimiento sobre cada uno de los aspectos evaluados, organizamos las respuestas en 3 categorías dependiendo de la dificultad de la pregunta.

De manera general, observamos que el 64,8 % de los alumnos posee un conocimiento incompleto, y en gran medida insuficiente o inexistente (47,4 %) del SND y del VP. Presentamos el análisis y los resultados de 2 de las 4 preguntas de la Tabla 1 (preguntas 1 y 4), pues son las que poseen un mayor número de los componentes fundamentales a observar.

Análisis y resultados de la Pregunta 1: "Completar transformaciones y explicar por qué"

Esta pregunta evalúa la compresión de la estructura del SND a través del conocimiento de los principios que subyacen a los procedimientos. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la aplicación y justificación de tareas de procedimiento (Tabla 1), preguntando por 8 tipos de transformaciones entre unidades del SND, distribuidas de dos formas en el cuestionario. La primera de ellas, administrada a 60 alumnos, incluye transformaciones exclusivamente con números naturales y decimales (5C son __ unidades = __ miles); la segunda administrada a 75 alumnos sólo incluye transformaciones con números naturales (50C son __ unidades= __ miles).

Organizamos las respuestas de los alumnos según el número de transformaciones que realizan correctamente, tal como se muestra en la Tabla 2. Establecemos cuatro categorías: sin conocimiento (SC) cuando no contestan o no realizan ninguna transformación correcta; insuficiente (IS) cuando realizan 1 o 2 transformaciones; incompleto (IC) cuando realizan 3; y adecuado (AD) cuando hacen 4. Para contrastar las categorías establecidas en base a las respuestas correctas, analizamos los argumentos de los alumnos para justificar sus procedimientos, organizándolos en torno a 4 categorías: (1) no argumenta; (2) evidencia incomprensión ("*No sabemos cuántas unidades y miles hay*"); (3) su argumento se limita a añadir o quitar ceros (*"Debes correr la coma o poner ceros"*); y (4) establece relaciones de equivalencia (*"1 mil son 1000 unidades y 100 centenas".)*

Tabla 2.Transformaciones correctas en la pregunta 1 y tipos de argumento

Tipo cuestionario	Número transf. correctas	Tipo de argumento: No argumenta		Evidencia incomprensión		Se limita a añadir o quitar ceros		Establece relaciones equivalencia		Nivel Global			Nivel por tipo de cuestionario
		Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%		Nº AL.	%	%
Sólo números naturales	N/C	9	6,7	2	1,5	*	*	*	*	SC	19	14,1	25,3
	0	3	2,2	5	3,7	*	*	*	*				
	1	3	2,2	*	*	1	0,7	*	*	IS	6	4,4	8
	2	*	*	*	*	1	0,7	1	0,7				
	3	3	2,2	*	*	4	3	5	3,7	IC	12	8,9	16
	4	4	3	*	*	4	3	30	22,2	AD	38	28,2	50,7
Números naturales y decimales	N/C	4	3	2	1,5	*	*	*	*	SC	11	8,2	18,3
	0	1	0,7	2	1,5	2	1,5	*	*				
	1	4	3	2	1,5	1	0,7	*	*	IS	13	9,6	21,7
	2	4	3	*	*	2	1,5	*	*				
	3	5	3,7	4	3	4	3	2	1,5	IC	15	11,1	25
	4	6	4,4	*	*	6	4,4	9	6,7	AD	21	15,5	35
Totales		46	34,1	17	12,6	25	18,5	47	34,8		135	100	

Dependiendo si las preguntas involucran sólo números naturales, o naturales y decimales, vemos que se obtiene un mayor número de respuestas adecuadas cuando se trabaja sólo con naturales (50,7%) que cuando se incluyen decimales (35%).

Considerando las respuestas de los alumnos globalmente, tanto si aparecen naturales como decimales, tenemos:

- El 22,3% no demuestra conocimiento de este principio (SC). 17 no contestan. Los 13 que no realizan correctamente ninguna transformación parecen no ser capaces de transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del sistema y confunden el valor relativo con el VP. Sus argumentos evidencian esta falta de compresión al señalar, por ejemplo: "No sabemos cuántas unidades y miles hay, y no sabemos cuántas decenas y miles hay"; o reflejan la idea de un procedimiento mecánico carente de significado para ellos: "Se suman o se restan 0 dependiendo si van a la derecha o la izquierda".

- El 14% muestra un conocimiento incompleto o fragmentado. Los 19 alumnos que realizan correctamente 1 o 2 transformaciones, demuestran un conocimiento insuficiente (IS), ya sea manifestando una falta de compresión al aceptar como válida cualquier solución (7M = 0.007U; 7M = 7U; 7M = 700000U); evidenciando una concepción errónea "No hay unidades ni decenas ni centenas"; o, una mala ejecución de un proceso mecanizado sin comprensión "Debes correr la coma tantos lugares como colocan en = ".

- El 20% muestra un conocimiento incompleto (IC). Logran establecer 3 transformaciones, pero evidencian dificultades cuando éstas se establecen en términos de unidades mayores que la unidad dada (50C = 0.5M; 5C = 50M; 5C = 0.05M). Este conocimiento fragmentado se asocia a un proceso mecánico de trasladar comas a la derecha o a la izquierda: "Colocamos 5 centenas en el C y luego tenemos que ir añadiendo 0 hasta llegar a la unidad que piden"; o al establecimiento de relaciones erróneas de equivalencia entre unidades del sistema: "Mil son 1000 unidades, por tanto es un cero menos en las decenas".

- 43.7% parece demostrar una comprensión adecuada (AD), respondiendo correctamente las 4 transformaciones. Sin embargo, al observar sus argumentos vemos que 10 de ellos no argumentan y sólo 39 (30 de los cuales operaron sólo con números naturales) parecen tener una comprensión real al establecer relaciones de equivalencia entre las diferentes unidades del sistema: "1 centena son 100 unidades y 0.1 milésimas, y 1000 son 100 decenas y 1000 unidades". Los 10 alumnos restantes parecen seguir con éxito un procedimiento mecánico: "Divides por 10 cuando bajas o multiplicas por 10 si subes".

Análisis y resultados de la Pregunta 4: "Descomposiciones del 342"

Esta pregunta estudia el reconocimiento y uso de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición y descomposición de números mediante la evaluación del conocimiento de los principios generales. Como indicador de conocimiento conceptual, se evalúan tareas de ejemplo. Todos los alumnos analizan 5 opciones (ver Tabla 1), determinando cuál o cuáles de ellas corresponden a descomposiciones del número 342.

Las respuestas de los alumnos se organizan en 4 categorías, según el número de descomposiciones que identifican. Sin conocimiento (SC) cuando no contestan; insuficiente (IS) cuando identifican 1 o 2 descomposiciones; incompleto (IC) cuando identifican 3; y adecuado (AD) cuando identifican 4. Sólo 36 alumnos (26,7%) reconocen todas las descomposiciones; 20 (14,8%) identifican 3 de las 4; 74 alumnos (54,8 %) reconocen 1 o 2; y 5 alumnos (3,7%) no contestan. En concreto:

- Ninguno de los alumnos que identifica alguna descomposición considera la alternativa incorrecta como válida, 1C+2D+42U.

- 59 de los 60 que reconocen 1 descomposición eligen la más tradicional 3C + 4D + 2U. Éstos decodifican los números del VP en su estricto orden, rechazando la idea de codificar centenas, decenas y unidades partiendo de valores que no se correspondan con el dígito que está en el VP.

- Los 14 que reconocen 2 descomposiciones, identifican 3C + 4D + 2U, pero no reconocen 2C + 14D + 2U como válida. Sin embargo, aceptan como válidas las opciones que no expresan el numeral en términos de centenas, decenas y unidades, eligiendo 30D + 42U ó 34D + 2U como segunda opción. Esto explicaría por qué no eligen la opción incorrecta al estar expresada en los mismos términos. Interpretamos la elección de los alumnos debida a que las opciones 30D + 42U y 34D + 2U son visualmente similares a la opción 3C + 4D + 2U, mientras que 2C + 14D + 2U y 1C+2D+42U, al ser descomposiciones más complejas, tienen números distintos. Otra interpretación sería que los que eligen 34D + 2U serían capaces de decodificar correctamente el número de decenas, pero sólo entenderían la unidad en términos de su VP (ven 2 como unidad, pero no 42 como unidad). Los que escogen 30D + 42U, no parecen asociar 34D con 340 unidades, por lo que no la consideran como opción.

- Los 20 que reconocen 3 descomposiciones identifican 3C + 4D + 2U, pero sus siguientes elecciones parecen variar en función de si interpretan los números del VP en su estricto orden. Esto los lleva a elegir como segunda y tercera opción 30D + 42U y 34D + 2U (17 alumnos). Mientras que los 3 que escogen 2C + 14D + 2U y 34D + 2U parece que no necesitan seguir el orden estricto para decodificar un número. No obstante su conocimiento no parece completo, reconocen 2 como unidad, pero no el número 42 como 42 unidades.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio coinciden con estudios similares sobre la observación de la práctica en la formación de maestros. Nuestros hallazgos sugieren que, tal como señalan Salinas (2007) y Montes et al. (2015), los futuros maestros presentan deficiencias en relación al SND y VP. No poseen una comprensión sólida de estos conceptos, presentando lagunas de conocimiento y errores conceptuales en estos contenidos que muchas veces se presumen sabidos al inicio de su formación.

Esta comprensión fragmentada, incompleta o mecánica del SND y del VP, queda reflejada en los argumentos que utilizan al justificar sus procedimientos en los cambios de unidades. También se observa en las diferentes soluciones que aceptan como válidas para estas transformaciones, así como para las representaciones equivalentes de un mismo número. Probablemente se deba a que tradicionalmente el concepto de VP se enseña sólo a partir de la base 10, en vez de ser introducido, como proponen Nataraj y Thomas (2009), como un caso particular de un concepto más general de la notación posicional. Por otra parte, observamos una diferencia importante en las respuestas según se deba operar sólo con números naturales o si aparecen también números racionales. Posiblemente esto es debido a que una comprensión deficiente o incompleta del SND repercute en la comprensión de los números racionales. Esto sugiere que para estudios similares al desarrollado sea interesante incluir tanto números naturales como números racionales, ya que trabajar sólo con números naturales podría disfrazar una comprensión incompleta.

El análisis realizado obliga a reconocer la dificultad que encierra para los futuros maestros el manejo del SND y de la idea de VP. Las “recetas” que en muchos casos encontramos en las aulas de Primaria aparecen en los argumentos de los futuros maestros en nuestra investigación. Esto lleva a plantear la necesidad de profundizar en su estudio durante su formación. Desafortunadamente la escuela parece ignorar esta complejidad y la reemplaza por un manejo mecánico del VP (Bedoya y Orozco, 1991). La profundización en el estudio del SND y del VP podría contribuir a evitar la transmisión de esta idea mecánica comúnmente asociada a su manejo en la escuela. Esperamos que el instrumento elaborado ad hoc para este estudio sea útil para otros investigadores en el proceso de identificación de los componentes del conocimiento conceptual de los futuros maestros.

Referencias

Baroody, A., Feil, Y. y Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131.

Bedoya, E. y Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 3*(11-12), 55-62.

Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as foundation for procedural knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.113-132). Hillsdale, MI: Lawrence.

Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números, 43*, 267-270.

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Crooks, N. y Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Godino, J., Font, V., Konic, P. y Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido Numérico*, (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Universidad de Granada.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, MI: Lawrence Associates.

Montes, M., Contreras, L. C., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros: debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*, 36-62.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nataraj, M. y Thomas, M. (2009). Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 96-115.

Nunes, T. y Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Ruesga, P. y Guimaraes, G. (2011). Sistema de numeración decimal: un instrumento para seleccionar libros de texto de los tres primeros años de enseñanza. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Recife, Brasil. http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/399.pdf

Ruesga, M. y Lisbôa, G. (2012). Los aspectos didácticos básicos del sistema de numeración decimal en los libros de texto. *Revista Eletrônica de Educação*, *6*(1), 104-128.

Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. y Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362.

Salinas, M. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 381- 390). La Laguna: SEIEM.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Yang, D. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics, 107*(7), 293-301.

[i] Trabajo al amparo del proyecto Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: Matemáticas para maestros (EDU2013-4683-R). Las autoras son miembros del Grupo Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM) (2014SGR 00723).

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y NIVELES DE LECTURA PROPUESTOS EN TEXTOS CHILENOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Statistical graphs and reading levels suggested in Chilean primary school textbooks

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se analizan los tipos de gráficos estadísticos y los niveles de lectura de los mismos en dos series de libros de texto (12 textos) de Educación Primaria en Chile. En el estudio se ha seguido una metodología cualitativa, mediante el análisis de contenido. Los resultados evidencian un predominio de los gráficos de barras y pictogramas, y del nivel de lectura "leer dentro de los datos". El trabajo de los gráficos se considera adecuado para este nivel, pues se siguen las directrices curriculares y se trabaja de forma gradual, con la necesidad de aumentar las actividades con niveles de lectura "leer más allá de los datos" y "leer detrás de los datos" en los cursos finales.

Palabras clave: *libros de texto, gráficos estadísticos, niveles de lectura, Educación Primaria.*

Abstract

In this paper we analyze the statistical graphs and the reading levels of those in two series of Primary education textbooks in Chile (12 books). We followed a qualitative method based on content analysis. Results suggest a predominance of bar graphs and pictograms and the "reading between data" level. The work with the graphics is adequate for primary education as the textbooks follows the curricular guidelines and introduces the topic gradually, with the need to increase activities with reading levels "read beyond the data" and "read behind the data" in the final courses.

Keywords: *textbooks, statistical graphs, reading levels, Primary education.*

INTRODUCCIÓN

El desenvolverse adecuadamente en la sociedad actual conlleva varias competencias como, por ejemplo, la lectura, interpretación y evaluación de la información a la que se tiene acceso. Batanero (2001) señala que las capacidades que se ponen en juego en estas situaciones permiten que los ciudadanos puedan comprender y valorar el rol fundamental de la estadística en su la vida cotidiana. Mucha de esta información es organizada, resumida y presentada por medio de gráficos estadísticos, por lo que hemos centrado la investigación en este tema.

Nos centramos además en los libros de texto, que son un recurso básico y fundamental para las diferentes áreas del currículo, pues ayudan al profesor en la preparación de sus clases y, con frecuencia, regulan las acciones de enseñanza y aprendizaje en el aula (Cordero y Flores, 2007). Para Reys, Reys y Chavez (2004) los ejemplos y contextos que se utilizan en los libros de texto pueden servir para apreciar las aplicaciones de la matemática. Mediante su estudio se puede observar la adaptación que se realizan de los contenidos matemáticos para ser enseñados, lo que Chevallard (1991) ha denominado *transposición didáctica*.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

El objetivo de este trabajo es analizar el tipo de gráfico y los niveles de lectura incluidos en los libros de texto de 1º a 6º año de Educación Primaria en Chile. Para ello hemos revisado las directrices curriculares establecidas por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012, p. 42-44), que presentamos en la Tabla 1. En ella observamos una introducción gradual y constante de los gráficos estadísticos, que deben trabajarse mediante contextos cercanos, experimentos, juegos y/o encuestas sencillas; donde los estudiantes participen activamente y se sientan motivados.

Tabla 1. Objetivos de aprendizajes sobre gráficos estadísticos en la Educación Primaria chilena

Curso	Objetivo de aprendizaje
1º	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. Construir, leer e interpretar pictogramas
2º	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple
3º	Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada. Representar datos usando diagramas de puntos
4º	Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones
5º	Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias
6º	Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones

Marco Teórico

Numerosos autores han investigado los gráficos estadísticos, entendiéndolos como objetos semióticos, ya que se requiere el dominio de elementos matemáticos para su lectura y construcción (Arteaga y Batanero, 2010; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010). Algunos de ellos indican que para leer y construir gráficos estadísticos necesitamos identificar y comprender cada uno de los siguientes elementos que lo constituyen (Curcio, 1987):

- *Palabras o expresiones.* Son útiles para comprender la información y el contexto que se ha representado en el gráfico (título, etiquetas en ejes y escalas).
- *Contenido matemático subyacente.* Relacionado con el conjunto numérico utilizado (y operaciones asociadas), conceptos geométricos (como área en el histograma, coordenadas cartesianas en un diagrama de dispersión, longitud en el diagrama de barras), proporcionalidad, etc.
- *Convenios específicos de construcción.* Son propios de de cada tipo de gráfico, por ejemplo la proporcionalidad entre la frecuencia y el sector circular en el diagrama de sectores.

La necesidad de comprensión simultánea de estos componentes convierte a la lectura de los gráficos estadísticos en una actividad compleja. Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001) han establecido los siguientes niveles según la dificultad requerida para la lectura de la información en el gráfico:

- *Leer los datos.* Se refiere a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico. Un ejemplo de ello sería identificar la variable representada en el eje X.
- *Leer dentro de los datos.* Se refiere a la lectura de algo que no está explícitamente en el gráfico, implicando la aplicación de procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.). Un ejemplo de este nivel sería encontrar el rango de los datos, pues requiere calcular la diferencia entre el valor máximo y mínimo.
- *Leer más allá de los datos.* Se refiere a obtener una información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones. Un ejemplo para este nivel es predecir un dato o alguna tendencia.
- *Leer detrás de los datos.* Se refiere a la valoración crítica de las conclusiones, la recogida y de organización de datos. Este nivel supone un amplio conocimiento matemático y del contexto.

Antecedentes

Los antecedentes de nuestro trabajo son dobles. Por un lado, nos basamos en otros estudios de libros de texto sobre temas de estadística y, por otro, en investigaciones sobre gráficos estadísticos.

Las investigaciones sobre los libros de texto son ya tradicionales en matemática y otras disciplinas del currículo, no así en Estadística donde encontramos ejemplos como los Díaz-Levicoy y Arteaga (2014), Espinoza y Roa (2014), Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2013) y Ortiz (2014).

Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras (2014) analizan los gráficos asociados al tema de correlación y regresión en ocho libros españoles de Bachillerato, concluyendo que se usan diagramas de dispersión para proponer ejercicios en que el estudiante analiza el tipo y grado de relación lineal. Igualmente se detecta la presencia de diagramas de barras, histogramas tridimensionales y gráficos de burbuja.

Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) investigan el lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto de Educación Primaria en España. Su estudio evidencia un amplio uso de representaciones tabulares y gráficas (gráfico de barras, sectores, pictograma e histograma). Los autores se limitan a observar su presencia en los libros de texto, sin estudiar su distribución o las variables.

Nuestro estudio se apoya y motiva en investigaciones previas, las que siguen las ideas de Arteaga (2011). Dentro de estos trabajos identificamos el desarrollado por Méndez y Ortiz (2012), quienes analizan la producción de tablas y gráficos estadísticos en tesis de la carrera Licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional de México en el periodo 2005 a 2011, observando un predomino del nivel de lectura *"leer dentro de los datos"* y de los gráficos de barras y de sectores para representar los datos. Mingorance (2014), al estudiar las pruebas de diagnóstico en Andalucía (para niños de 10 años), observa que aproximadamente un cuarto de las preguntas propuestas contienen gráficos estadísticos; además identifica el predominio de los contextos sociales y personales en estas actividades. Díaz-Levicoy (2014) estudio los gráficos estadísticos en una muestra de 18 libros de texto de Educación Primaria española, encontrado que los gráficos más frecuentes son los gráficos de barras, y el nivel de lectura *"leer dentro de los datos"*. También observa el cumplimento de las directrices curriculares y una introducción progresiva de los diferentes tipos de gráficos de acuerdo a su dificultad y al curso.

Respecto a la comprensión de los gráficos por niños, Silva (2012) investiga cómo los estudiantes de Primaria brasileña (3º y 5º año) realizan cambios de representación, conjugando tablas, gráficos y lenguaje verbal. La autora propone 8 actividades, cuatro de construcción de tablas (dos a partir de gráficos de barras y dos a partir de lenguaje verbal) y otras cuatro de construir gráficos (dos con la información presentada en tablas y dos a partir de lenguaje verbal). Sus resultados no evidencian diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes al cambiar de representación.

Nuestra investigación busca complementar las anteriores con el estudio de los gráficos estadísticos en libros de texto chilenos, país en que la investigación sobre Educación Estadística es escasa y más aún sobre gráficos estadísticos.

METODOLOGÍA

En el trabajo seguimos una metodología cualitativa, mediante análisis de contenido (Zapico, 2006). La muestra estuvo formada por 12 libros de texto, de 1º a 6º de Educación Primaria (dos por nivel), que están editados según las directrices curriculares establecidas por el MINEDUC (2012). Seis de estos libros son editados para el MINEDUC, mediante concurso público, y son entregadas gratuitamente a estudiantes de colegios municipales y subvencionados; los otros seis textos son editados por Santillana y se accede a ellos por medio del comercio. La lista de estos textos se presenta como anexo y se identifican con el código [M]: MINEDUC y [S]: Santillana. Las variables que se consideran, para este artículo, son las siguientes:

- *Tipo de gráfico.* Considerando los gráficos establecidos en las directrices curriculares (MINEDUC, 2012) e investigaciones previas (Díaz-Levicoy, 2014; Mingorance, 2014) consideramos los siguientes: gráfico de barras, líneas, puntos, sectores, tallo y hojas, pictograma y otros (que se presentan en forma esporádica o que piden al estudiante seleccionar el gráfico o combinación de gráficos).
- *Niveles de lectura.* Se consideran los descritos por Curcio (1989) y Friel et al. (2001): (1) leer los datos; (2) leer dentro de los datos; (3) leer más allá de los datos; (4) leer detrás de los datos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Gráficos considerados

En la figura 1 se presenta la distribución de las 421 actividades analizadas, de las que 202 corresponden a los textos del MINEDUC y 219 a los de Santillana. Se observa, a modo general, un predominio de los gráficos de barras (con un mayor porcentaje en los textos de Santillana) y pictogramas. Con menor frecuencia aparecen los gráfico de puntos, diagramas de líneas, tallo y hojas, y sectores aunque estos últimos con algunas modificaciones de orden, según la editorial. Estos resultados evidencian una similitud entre ambas editoriales, presentando un porcentaje importante de gráficos que resultan de fácil comprensión para los niños de estos niveles educativos.

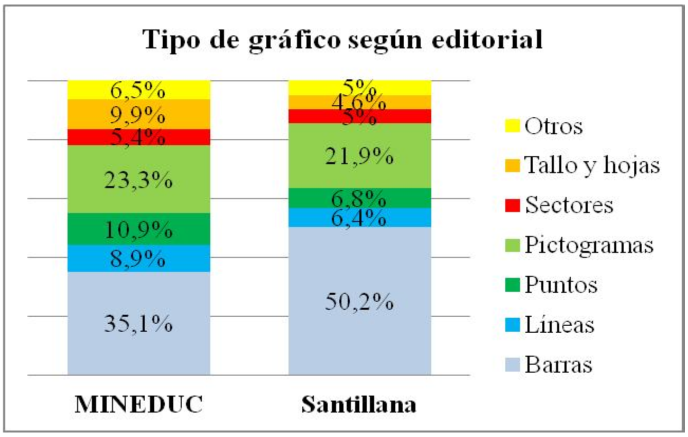


Figura 1. Tipo de gráficos estadísticos según la editorial

En la figura 2 se muestra la distribución de los gráficos encontrados según el nivel educativo en que se proponen. Para los dos primeros cursos se sugieren actividades con diagramas de barras y pictogramas, que son los explicitados en las directrices curriculares. A los gráficos anteriores se agrega el de puntos en el tercer nivel. En el cuarto nivel se trabajan los pictogramas y gráficos de barras, aunque la mayoría de las actividades hacen alusión a este último tipo de gráficos. En el quinto curso se observan los gráficos de barras, líneas (incluyendo de líneas múltiples) y de tallo y hojas que también se indican en el currículo, así como otros que no se mencionan: sectores y dispersión (incluidos en “otros” por su escasa presencia). En el último nivel encontramos los gráficos explicitados en el currículo: barras (incluido los sencillos y de barras dobles), sectores, puntos y tallo y hojas; es el nivel que presenta mayor variedad de gráficos. Nuestro análisis evidencia que en la elaboración de los libros de texto se siguen lo establecido en el currículo sobre el trabajo con gráficos estadísticos.

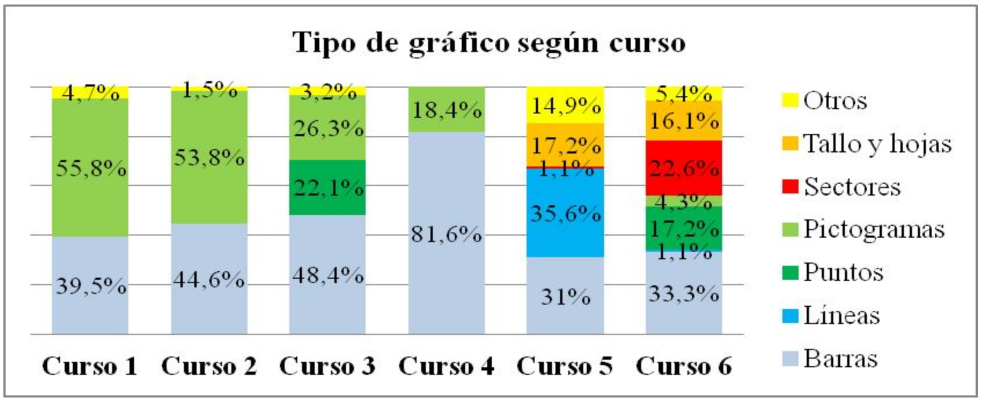


Figura 2. Tipo de gráficos estadísticos según curso (nivel educativo)

En la figura 3 vemos la distribución del tipo de gráfico según la editorial y el curso. En ella vemos, por ejemplo, que los libros de 5º y 6º del MINEDUC presentan mayor variedad de gráficos que los de Santillana; los textos de Santillana presentan mayor porcentaje de gráficos de barras; los textos de 1º y 2º del MINEDUC muestran gran énfasis en los pictogramas, en cambio los de Santillana conjugan pictogramas y gráficos de barras.

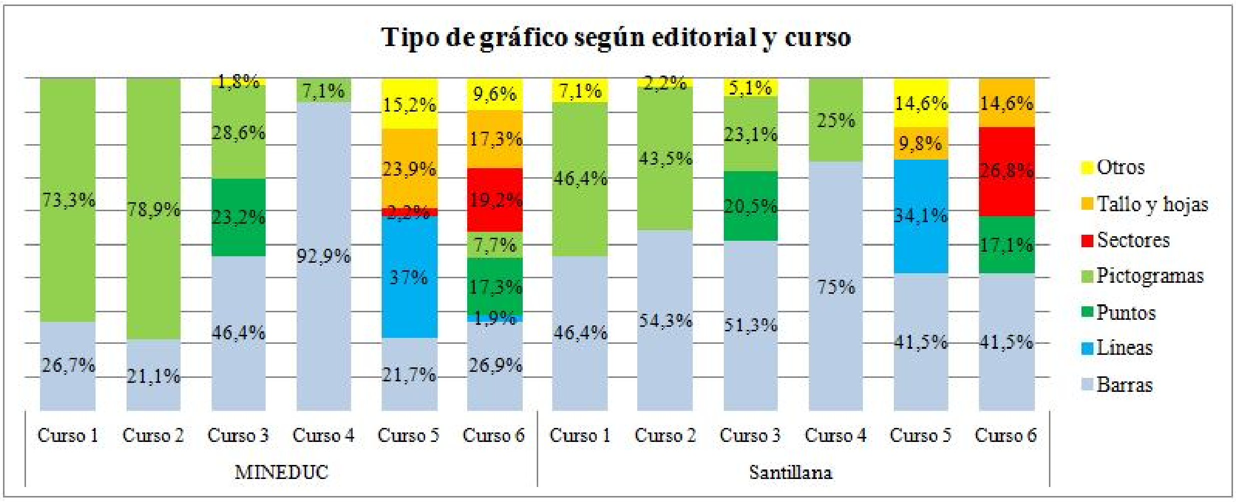
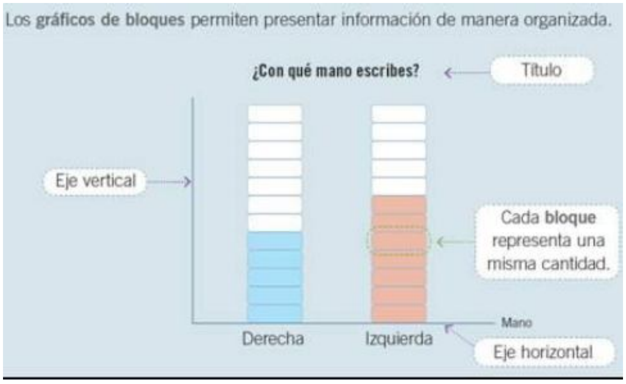


Figura 3. Tipo de gráficos estadísticos según editorial y curso (nivel educativo)

Nivel de lectura

En segundo lugar estudiamos los niveles de lectura que ha definido Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Ejemplos de los niveles 1 y 2 se presentan en la figura 4. En la actividad de la izquierda (nivel 1), el estudiante puede identificar los elementos del gráfico mediante la lectura literal de la información presentada en él, sin desarrollar cálculos, propio del primer nivel de lectura. En la actividad de la derecha, ejemplo del segundo nivel de lectura, los niños deben comparar los porcentajes para determinar una jerarquía en las preferencias y calcular la cantidad de personas que prefieren futbol y voleibol, pues el gráfico viene expresado en porcentajes y los alumnos deben pasar a frecuencias absolutas.



Nivel 1. Fuente: [S1], p. 269

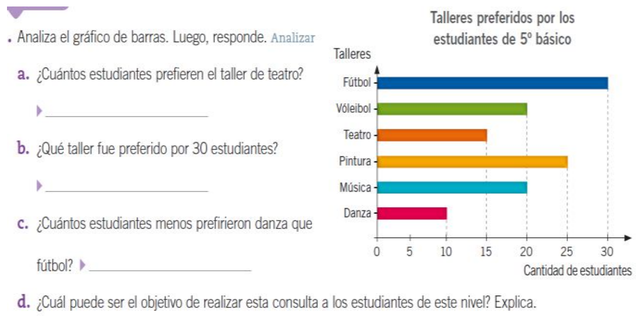
Nivel 2. Fuente:[S6], p. 317

Figura 4. Ejemplos de niveles de lectura 1 y 2.

En la figura 5 observamos ejemplos de los niveles 3 y 4. El tercer nivel se ejemplifica en la actividad de la izquierda, donde se pide que el niño conjeture sobre la tendencia que presentará el gráfico estadístico si entre los 7 y 10 km los corriera cuesta arriba. Dicha tendencia no está directamente representada en el gráfico; el alumno ha de observar el gráfico globalmente e imaginar su comportamiento si se extienden los valores en el eje *X*.

El último nivel de lectura (ver ejemplo en la parte derecha de la figura 4) pide, entre otras cosas, analizar de manera crítica la información y el contexto que se representa en el gráfico. En concreto se pide al estudiante señalar y justificar el posible objetivo de la encuesta, lo que requiere un conocimiento que va más allá de la lectura de los datos.

Nivel 3. Fuente: [M5], p. 262



Nivel 4. Fuente:[S5], p. 269

Figura 5. Ejemplos de niveles de lectura 3 y 4.

En la figura 6 mostramos la clasificación de las actividades en cada una de las dos editoriales según su nivel de lectura, donde se evidencia que sobre el 90% de las actividades involucran lectura de tipo literal (nivel 1) o bien lectura que involucre cálculos sencillos (nivel 2). Estos son niveles de lectura adecuados para los cursos estudiados, aunque en los últimos cursos hay carencia de actividades donde se pida la predicción y la lectura crítica de la información. Los resultados son similares si comparamos las actividades según editorial.

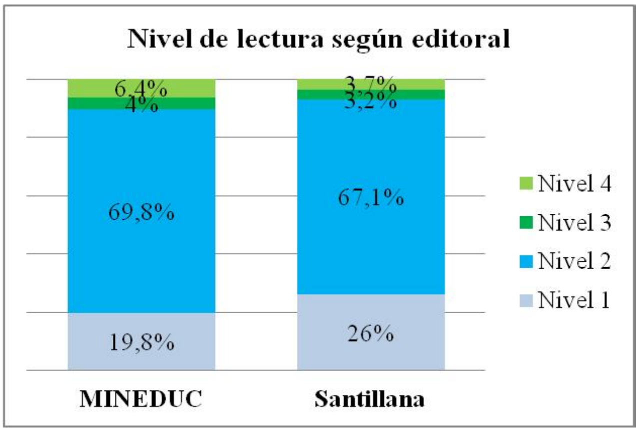


Figura 6. Niveles de lectura por editorial

En la figura 7 se muestra la distribución de los niveles de lectura de los gráficos por editorial y curso. En el vemos un amplio dominio del nivel 2 (leer dentro de los datos); el nivel 1 (leer los datos) es más frecuente en los textos de Santillana en los primeros cursos. También se observa, que los niveles 3 y 4 (leer más allá de los datos y detrás de los datos) aparecen esporádicamente y son una progresión gradual, es más, en el texto de Santillana de 6º no aparecen actividades en las que intervengan estos niveles.

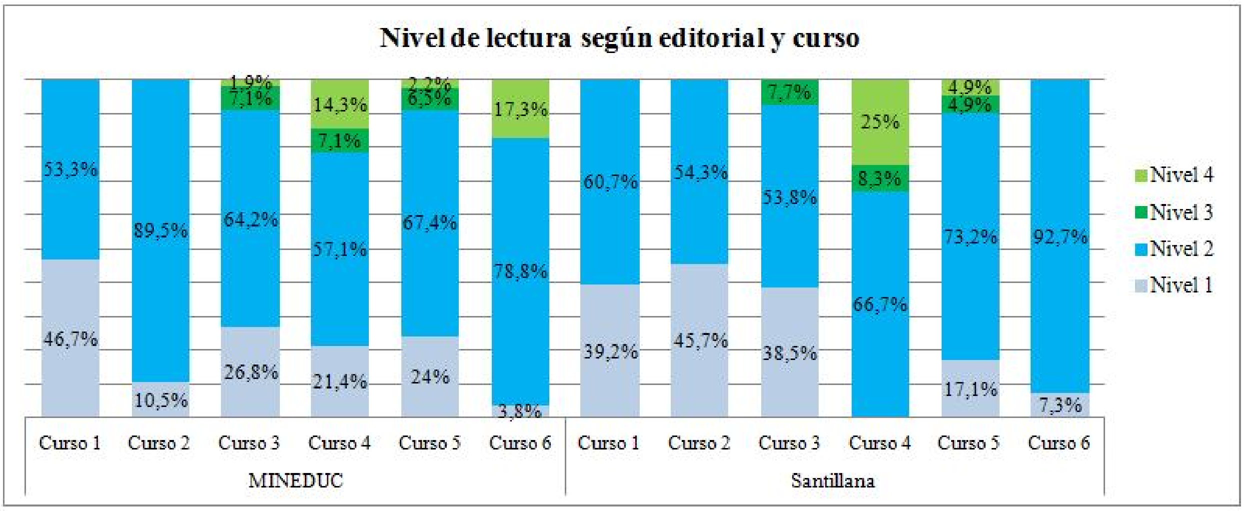


Figura 7. Niveles de lectura según editorial y curso (nivel educativo)

CONCLUSIONES

Con esta investigación hemos confirmado la importancia y tradición de los libros de texto en el proceso de instrucción matemática, y en el área de estadística, ya que es herramienta pedagógica-didáctica adaptada a los estudiantes que va dirigido y siguiendo el currículo nacional actual.

Dado que las series de libros de texto presentan resultados similares en las variables estudiadas, podemos señalar que, sobre el tema de gráficos estadísticos, los niños y niñas de sectores de vulnerables, que reciben los libros que entrega el MINEDUC, pueden acceder a una formación similar de quienes se desenvuelven en sectores más favorecidos de la sociedad (en lo que concierne al libro de texto); colaborando de esta forma en la superación de la desigualdad y no en promoverla.

El número de actividades encontradas y analizadas es importante (202 para los textos del MINEDUC y 219 para los de Santillana), con un promedio de 35 actividades por curso; aunque en algunos cursos queda a decisión del profesor cuales se trabajarán ya que pueden llegar a ser excesivas y es muy poco probable que aborden todas ellas, así como en un par de cursos las actividades superan las 50 (máximo 59). La presencia de los gráficos estadísticos se realiza en función de lo estipulado en los Planes y Programas (directrices curriculares) para cada nivel, con un predominio del gráfico estadístico de barras y coincidiendo con los resultados de Díaz-Levicoy (2014) y Mingorance (2014) en sus respectivos estudios. Además, se incluyen otros gráficos no mencionados en las directrices para ciertos niveles (por ejemplo el gráfico de barras en el primer curso).

El nivel de lectura más frecuente es “leer dentro de los datos”, coincidiendo con los resultados de Díaz-Levicoy (2014) y Díaz-Levicoy y Arteaga (2014) con libros de texto españoles y chilenos de séptimo de primaria, respectivamente. Frente a esta situación creemos necesaria que los últimos cursos analizados deberían tener un mayor número de actividades donde el nivel de lectura sea 3 y 4, para que los niños puedan valorar críticamente la información estadística que les rodea.

Con esta investigación aportamos algunos elementos que son de utilidad para los formadores de profesores pues presentan dificultades a trabajar con estas representaciones (González, Espinel y Ainley, 2011), y son quienes tiene la responsabilidad de capacitar a sus estudiantes para que dominen los contenidos que deben enseñar, es decir, aquellos que se plasman en el currículo y en los libros de texto; situación similar a lo que ocurre con los profesores en ejercicio, pues son los encargados de definir las actividades que los niños desarrollaran en las clases. También entrega información de utilidad para autores y editores de libros de texto, ya que se muestran elementos que se pueden considerar para su mejora.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT PFCHA 72150306.

REFERENCIAS

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: NCTM.

Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española.* Trabajo fin de Máster, Universidad de Granada. Granada, España.

Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en Chile. *Revista Electrónica Diálogos Educativos, 14*(28), 21-40.

Espinoza, J. y Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 277-286). Salamanca: SEIEM.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA*, 76, 37-45.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM.

Gómez, E., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 35, 75-91.

González, M. T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 187–197). New York: Springer.

Méndez, M. y Ortiz, M. (2012). *Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional*. Tesis de Licenciatura. Universidad Pedagógica Nacional Ajusco, México D.F.

MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Autor.

Mingorance, C. (2014). *La estadística en las pruebas de diagnostico andaluzas.* Trabajo fin de grado, Universidad de Granada. Granada, España.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61-66.

Silva, D. B. (2012). *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*. Tesis de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Zapico, M. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares* (pp. 149-155). Santiago: Ministerio de Educación.

Anexo: libros texto analizados

Editados para el MINEDUC

[M1]. Salazar, R. y Sprovera, M. (2014). *Matemática 1º Básico. Texto del Estudiante*. Santiago: Fe y Alegría.

[M2]. Ho Kheong, F., Ramakrishnan, C., Pui Wah, B. L. y Choo, M. (2014). *Mi Matemática. Texto del Estudiante 2°*. Santiago: Marshall Cavendish Education

[M3]. Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Ramirez, A., Sammons, K., Schielack, J., Tate, W. y Van de Walle, J. (2014). *Matemática 3º Educación Básica. Texto del estudiante*. Santiago: Pearson.

[M4]. Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014a). *Matemática 4º Básico. Texto del estudiante*. Santiago: Galileo.

[M5]. Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014b). *Matemática 5º Básico. Texto del estudiante*. Santiago: Galileo.

[M6]. Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014c). *Matemática 6º Básico. Texto del estudiante*. Santiago: Galileo.

Editados por Santillana: Proyecto "Casa del Saber"

[S1]. Baeza, A., López, F., Sandoval, M. y Urra, A. (2013). *Matemática 1º Básico. Tomo II.* Santiago: Santillana.

[S2]. Baeza, A., Blajtrach, P., Kükenshöner, C. y Sandoval, M. (2013). *Matemática 2º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

[S3]. Véliz, C. (2013). *Matemática 3º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

[S4]. Batarce, Y., Cáceres, B. y Kükenshöner, C. (2013). *Matemática 4º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

[S5]. Ávila, J., Fuenzalida, C., Jiménez, M. y Ramírez, P. (2013). *Matemática 5º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

[S6]. Ávila, J., Castro, C., Merino, R. y Ramírez, P. (2013). *Matemática 6º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

CONSTRUCCIÓN DE UNA ESCALA DE ACTITUDES HACIA LA PROBABILIDAD Y SU ENSEÑANZA PARA PROFESORES

Building an Attitudes towards Probability and its Teaching Scale for Teachers

Estrada, A.[a] y Batanero, C.[b]

[a]Universidad de Lleida, [b]Universidad de Granada

Resumen

En la actualidad hay numerosas escalas de medición de actitudes, pero ninguna para medir las actitudes hacia la probabilidad dirigida al profesorado. La medición de dichas actitudes es importante para organizar acciones formativas, al ser la probabilidad un tema nuevo en la educación primaria. En este trabajo se describen los primeros pasos en la construcción de dicha escala, que tiene componentes específicos de las actitudes hacia la probabilidad y hacia su enseñanza. Se describe el contenido semántico del instrumento, la selección de ítems a partir de juicio de expertos y se presenta el instrumento piloto.

Palabras clave: *actitudes, escala de evaluación, probabilidad, formación de profesores.*

Abstract

Even when today there are various instruments to measure attitudes towards statistics, there is no available scale to measure the attitudes towards probability directed to teachers. The assessment of these attitudes is important to organize formative actions, since probability is a new topic in primary education. In this paper we describe the first steps in building such a scale, which takes into account specific components of attitudes towards probability and towards its teaching. We describe the semantic content of the instrument, the selection of items from expert's judgement and present the pilot instrument.

Keywords: *attitudes, measurement scale, probability, training teachers.*

INTRODUCCIÓN

Aunque la enseñanza de la probabilidad tiene una tradición consolidada en la educación secundaria, su inclusión en la educación primaria es reciente y asistimos a un cambio en el enfoque, privilegiándose el frecuencial, basado en la simulación y la experimentación, con la finalidad de proporcionar a los niños una experiencia estocástica (Batanero, 2013).

Debido a estos cambios, algunos profesores y estudiantes para profesor de educación primaria pueden sentirse inseguros al enseñar la probabilidad a los niños, por no haber recibido suficiente formación sobre didáctica de la probabilidad o no tener experiencia en su enseñanza (Batanero y Díaz, 2012). Asimismo, la necesidad de la formación en probabilidad de los niños podría no ser percibida, no dándose valor a la materia o su enseñanza. Será importante, entonces, valorar y reforzar la componente emocional en su formación, pues si un profesor no valora un tema, le parece que no está preparado para impartirlo o le disgusta, no logrará un aprendizaje efectivo por parte de los alumnos.

Aunque se dispone de instrumentos de medición de actitudes hacia la matemática y hacia la estadística (Carmona, 2004), no existe uno adecuado para evaluar las correspondientes a la

Estrada, A. y Batanero. C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.

probabilidad. Además, puesto que nuestro objetivo es el profesorado, el instrumento en cuestión deberá recoger también las actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad.

Motivadas por esta necesidad, hemos iniciado un proyecto de investigación orientado a la construcción de un instrumento válido y fiable que cubra esta necesidad y, posteriormente, a la realización de un estudio de evaluación de actitudes de futuros profesores. En este trabajo se describen los primero pasos en la construcción del instrumento, que comprenden la definición semántica de la variable objeto de medición, la construcción de un banco de ítems y la selección de ítems, mediante juicio de expertos.

MARCO TEÓRICO: ACTITUDES Y SU MEDICIÓN

McLeod (1992) inicia una corriente en educación matemática que reconoce la importancia de las cuestiones afectivas en el aprendizaje. El autor indicó la dificultad de evaluar las actitudes, pues no son directamente observables, sino que se infieren de los comportamientos de los sujetos. Un marco general para los constructos afectivos en educación matemática se inicia en 2003 con el grupo de trabajo del tercer Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME3) (Hannula, Opt'Eynde, Schlöglmann y Wedege, 2007).

Encontramos diversas definiciones de las actitudes. Gal y Garfield (1997) las conciben como "una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio" (p. 40). Gómez-Chacón (2000) como "una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento" (p. 23). Phillip (2007) las describe como formas de actuar, sentir o pensar que muestran la disposición u opinión de una persona.

Las actitudes suelen ser estables, se pueden graduar según su intensidad, ser positivas o negativas y, en ocasiones, expresan sentimientos vinculados a elementos que no son estrictamente parte de la materia (como el profesor). Surgen pronto, y aunque tienden a ser favorables en un principio, pueden evolucionar en forma negativa (Estrada, 2010). Inicialmente se consideraban como un constructo unidimensional, pero progresivamente se han utilizado modelos multidimensionales por autores como Gil (1999) o Gómez-Chacón (2000).

Diversos estudios analizados en Carmona (2004) y Estrada, Batanero y Lancaster (2011) indican que el origen de las actitudes hacia una materia proviene de:

- El conocimiento del tema adquirido en la vida cotidiana.
- Las experiencias previas de aprendizaje.
- La vinculación que hacen los sujetos de la materia con otra.

La medición y evaluación de actitudes es central para la investigación científica y la práctica educativa, por lo que hay grandes esfuerzos para mejorar los enfoques metodológicos para configurar nuevos y más precisos instrumentos de medición.

Un instrumento privilegiado es la escala de medición de actitudes, que sirve para determinar diferencias de grado o intensidad respecto a algún objeto actitudinal y analizar sus componentes. Sin olvidar la complementariedad de otras técnicas (ver, por ejemplo, Martins, Nascimento y Estrada, 2012), las escalas son procedimientos más objetivos. En nuestro trabajo utilizaremos una Escala de Likert, que proporciona puntuaciones graduadas a una serie de enunciados. Los sujetos deben responder a cada uno de los mismos con un valor (entre 1 y 5 en nuestro caso) que matiza su grado de acuerdo (1=total desacuerdo hasta 5=total acuerdo). Al sumar las puntuaciones en todas las preguntas de la escala se obtiene la puntuación de la actitud del individuo. Igualmente se puede diferenciar las puntuaciones por componentes u obtener la distribución de puntuaciones de un grupo de sujetos.

ESCALA DE ACTITUDES HACIA LA PROBABILIDAD Y SU ENSEÑANZA PARA PROFESORES. DEFINICIÓN SEMÁNTICA

Al ser la actitud un constructo inobservable, su evaluación ha de hacerse a partir de indicadores empíricos (McDonald, 2013); en nuestro caso las respuestas a los ítems de una escala. El primer paso en su construcción es la definición semántica detallada del constructo. La variable objeto de medición está conformada por otras variables, por lo que hay que comprender y analizar estas relaciones especificándolas de antemano; posteriormente esta definición permitirá estudiar la validez del instrumento (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2009).

Para abordar este primer paso, y puesto que se espera una relación entre las actitudes hacia la probabilidad y la estadística, se examinaron escalas de actitudes hacia la estadística y sus componentes. Igualmente se estudiaron las características de cada escala (por ejemplo, el tipo de sujetos a que van dirigidas o si tratan de medir cambio o actitud estable). Estas escalas fueron:

- Inventario de actitudes hacia la estadística (SAS) (Roberts y Bilderback, 1980), dirigido a estudiantes universitarios (como son los futuros profesores). Es unidimensional.
- Escala de actitudes hacia la estadística (ATS) (Wise, 1985) que mide el cambio actitudinal en estudiantes. Tiene dos dominios diferenciados: actitudes hacia el curso que están realizando y actitudes hacia su uso futuro.
- Escala de Auzmendi (1992): contempla la realidad española y considera las actitudes hacia las matemáticas y hacia la estadística a la vez. Considera cinco factores básicos (utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación).
- Escala de actitudes hacia la estadística (SATS) de Schau, Stevens, Dauphine y Del Vecchio, (1995) con cuatro dimensiones o componentes: afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad y su versión posterior (Schau, 2003).
- Escala de Actitudes hacia la Estadística (EAEE) (Estrada, 2002), específica para docentes, que considera diferentes aspectos didácticos de las actitudes. Incluye componentes pedagógicos (afectivo, cognitivo y comportamental) y antropológicos(social , educativo e instrumental)

Todas son escalas Likert con 5 o 7 grados de respuesta, han sido validadas con estudiantes universitarios o escolares y tienen fiabilidad probada; sólo la de Estrada (2002) ha sido utilizada con profesores; en ninguna se contempla la actitud hacia la enseñanza de la materia, que es uno de nuestros objetivos.

Especificación de componentes de la escala

En nuestro trabajo las actitudes se estructuran en componentes relacionados con la probabilidad o con su enseñanza. Los primeros han sido determinados al analizar las escalas citadas y los segundos tratan de ampliar los primeros, a la actividad docente. Después de un proceso cíclico de revisión de la literatura y depuración, se han fijado tres componentes de la actitud hacia la probabilidad:

- *Componente afectivo hacia la probabilidad, AP*: Trata de valorar los sentimientos del sujeto positivos o negativos hacia la probabilidad. Por ejemplo, el agrado-desagrado hacia esta materia, interés-desinterés por el tema, posible rechazo o ansiedad. Se ha incluido al ser frecuentemente tenido en cuenta en las escalas de medición de actitudes hacia la estadística (ej., Auzmendi, 1992; Gil, 1999; Schau y cols., 1995; Estrada, 2010) y por su relevancia.
- *Competencia cognitiva apreciada hacia la probabilidad, CCP*. Incluso cuando una materia guste a un sujeto, es posible que la encuentre difícil o piense que tiene poca capacidad para la misma. Es importante que un profesor tenga una buena percepción de su propia capacidad para una materia dada. Debido a ello se ha incluido este componente que valora la percepción del

sujeto de su capacidad, conocimientos y habilidades intelectuales en probabilidad. Ha sido tenida en cuenta, entre escalas de actitudes hacia la estadística, en las de Schau y cols. (1995) y Estrada (2010).

- *Componente comportamental hacia la probabilidad, CP*: Evalúa la tendencia a utilizar la probabilidad, cuando sea conveniente, y ha sido incluida en algunas escalas de actitudes hacia la estadística (Auzmendi, 1992; Gil, 1999; Schau y cols., 1995, Estrada, 2010). Valora la tendencia a la acción, la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros y el uso que se hace de la probabilidad.

Al estar la escala dirigida a profesores se valora la actitud hacia los aspectos didácticos de la probabilidad, considerando otros tres componentes:

- *Componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad, AE*. Trata de valora los sentimientos personales hacia la enseñanza de la probabilidad, que pueden variar (aunque estarán relacionados) con el componente afectivo hacia el tema: agrado-desagrado, miedo-confianza, interés-desinterés, por enseñar probabilidad.
- *Componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad, CDE*: Aunque el profesor pueda pensar que tiene facilidad para aprender un tema, puede sentirse capacitado o no para enseñarlo. Este componente evalúa la percepción del profesor de la propia capacidad para enseñar probabilidad, resolver dificultades de los estudiantes, proponer buenas tareas, buscar recursos, etc.
- *Componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad, CE*. Valora la tendencia a la acción didáctica: si el profesor trata o ha tratado o no de enseñar probabilidad, si le da prioridad sobre otros temas, si piensa que debería posponerse en general.

Finalmente hemos incluido un componente de valoración de la materia y su enseñanza. Aunque hemos encontrado componentes de valor, por ejemplo, en Schau y cols. (1995, 2003), ninguna de las escalas analizadas contempla el valor que se da a su enseñanza.

- *Componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza, VPE*: Mediante este componente tratamos de evaluar el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema.

CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE ÍTEMS

Una vez definidos los componentes de la escala se inició un proceso de recopilación y depuración de posibles ítems para valorar cada uno de los componentes citados. Para ello, se listaron y clasificaron todos los ítems de las escalas de medición de actitudes mencionadas.

Seguidamente se adaptaron (a la probabilidad o su enseñanza) los ítems que podrían ser utilizados para la valoración de alguno de los componentes. Para los nuevos componentes sobre actitudes hacia la enseñanza, se redactaron nuevos enunciados que expresasen diferentes ideas relacionadas con el componente a evaluar. Por ejemplo, para el componente afectivo hacia la enseñanza, se redactaron enunciados de ítems parecidos a los utilizados en el componente afectivo hacia la probabilidad, cambiando situaciones o contextos por otros de enseñanza. Mediante un proceso cíclico, típico de una fase cualitativa de la investigación, se revisaron los ítems con ayuda de compañeros del grupo de investigación.

Con este procedimiento se elaboró un primer listado de ítems, clasificados de acuerdo a los componentes de la escala, dando un peso (en cuanto a número de ítems) equivalente a cada componente. En la redacción de los enunciados provisionales de los ítems se siguieron las recomendaciones para desarrollos de ítems de una prueba (McDonald, 2013). El formato de los ítems consta del enunciado a que hemos hecho referencia y una escala de 5 puntos, que valoran las respuestas desde “muy en desacuerdo” (1 punto) hasta “muy de acuerdo” (5 puntos).

Seguidamente se varió el vocabulario empleado, utilizando diferentes aspectos de cada componente o contexto. Se incluyeron ítems redactados en forma afirmativa (“La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy”) y negativa (“Me siento intimidado ante datos probabilísticos”) para evitar el problema de la aquiescencia (Morales, Urosa y Blanco, 2003). Puesto que el número final de ítems que se incluirían en el instrumento sería 28 (4 ítems por componentes) se preparó el doble (56) para posteriormente descartar la mitad con ayuda de los expertos.

Como ejemplo, mostramos en la Tabla 1 los enunciados provisionales en esta fase para el componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad, donde los ítems 2, 4 y 8 están redactados en forma negativa y el resto en forma positiva. Se incluyen sentimientos de agrado (1, 7), seguridad (2), nerviosismo (3 y 6), preocupación (4), tranquilidad (5) e interés (8). Aunque todos en contexto de enseñanza, se menciona también actividades como la respuesta de preguntas (2), motivación (4) y resolución de problemas (6). En forma semejante se procedió con el resto de componentes.

SELECCIÓN DE ÍTEMS A PARTIR DE JUICIO DE EXPERTOS

Este listado de 56 enunciados, se sometió a un juicio de expertos, procedimiento habitual en la selección de ítems de una prueba. Actuaron como expertos 14 investigadores en enseñanza de la probabilidad, todos ellos doctores en didáctica de la matemática o psicología y con diferentes perfiles profesionales (profesores de didáctica de la matemática, de estadística o de psicometría). A estos expertos se mandó un cuestionario. Para cada componente de la escala se incluyó en primer lugar una descripción de dicho componente y lo que se pretendía evaluar.

A continuación de esta descripción, se incluyeron los 8 ítems provisionales, junto con una tabla en donde se les pidió valorar en una escala de 1 a 5 la importancia, claridad y pertinencia de cada ítem para el componente. También se pidió al experto añadir sus comentarios o sugerencias de mejora de los ítems.

Los expertos colaboraron con gran interés, lo cual les agradecemos. Recogidos los cuestionarios, se realizó un análisis estadístico de las puntuaciones. En la Tabla 1 se muestra, como ejemplo, los resúmenes estadísticos de los ítems correspondientes al componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad, que obtienen valores medios altos y desviación típica pequeña.

Además de valorar los ítems, realizaron numerosas observaciones que ayudaron a mejorar los enunciados. Algunos ejemplos respecto a los ítems incluidos en la Tabla 1 son:

- Sugiero, en general, formular los enunciados como expectativa para futuros docentes, no como realidad de su profesión, puesto que el cuestionario podría utilizarse con futuros profesores (Experto 2)
- Algunos ítems no parecen apropiados si no hay un imperativo como la obligatoriedad derivada de la presencia de la probabilidad en el currículum; se debiera añadir algo como “si aparece en el currículo” (Experto 8)
- El ítem 4 debiera incluirse en la componente de probabilidad, y no en la componente de la enseñanza de la probabilidad (Experto 10).
- El ítem 3 y 5 son similares, expresados en positivo o negativo (relajado o nervioso), incluso se parecen al ítem 2 que considero mejor”.

Tabla 1. Primera selección de ítems y resumen estadístico de puntuaciones de expertos a los ítems del componente afectivo hacia la enseñanza AE

Ítem	Importancia	Claridad	Pertinencia
1. Me gusta enseñar probabilidad	$\bar{x}$ = 4,5 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,9	$\bar{x}$ = 3,67 Me = 4,5 Mo = 5 σ = 1,6	$\bar{x}$ = 4,3 Me = 5 Mo= 5 σ = 1,1
2. Me produce inseguridad responder una pregunta de probabilidad que me haga un escolar	$\bar{x}$ = 4,3 Me = 4,5 Mo = 5 σ = 0,7	$\bar{x}$ =4,25 Me = 4,5 Mo = 5 σ = 0,9	$\bar{x}$ = 4,58 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,9
3. Aunque me lo prepare muy bien me pongo nervioso al enseñar probabilidad.	$\bar{x}$ = 4,3 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,9	$\bar{x}$ = 4,2 Me = 5 Mo = 5 σ = 1,2	$\bar{x}$ = 4,7 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,6
4. Me preocupa ser capaz de motivar a mis alumnos para que aprendan probabilidad	$\bar{x}$ = 4,1 Me = 5 Mo = 5 σ = 1,3	$\bar{x}$ = 4,3 Me = 5 Mo = 5 σ = 1,2	$\bar{x}$ = 3,9 Me= 5 Mo = 5 σ = 1,5
5. Como profesor, me sentiré relajado explicando probabilidad	$\bar{x}$ = 3,7 Me = 4 Mo = 5 σ = 1,4	$\bar{x}$ = 3,9 Me= 5 Mo = 5 σ = 1,5	$\bar{x}$ = 3,6 Me = 4,5 Mo = 5 σ = 1,6
6. Creo que no me pondré nervioso al enseñar a resolver problemas de probabilidad en la escuela.	$\bar{x}$ = 4,1 Me = 4,5 Mo = 5 σ = 1,2	$\bar{x}$ = 4,2 Me = 5 Mo = 5 σ = 1,2	$\bar{x}$ = 4,2 Me = 5 Mo = 5 σ = 1,2
7. Pienso que me gustará enseñar probabilidad en la escuela	$\bar{x}$ = 4,6 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,7	$\bar{x}$ = 4,7 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,6	$\bar{x}$ = 4,7 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,6
8. No tengo mucho interés en enseñar probabilidad	$\bar{x}$ = 4,33 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,8	$\bar{x}$ = 4,6 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,8	$\bar{x}$ = 4,6 Me = 5 Mo = 5 σ = 0,6

A partir de estas puntuaciones y valoraciones se finaliza el cuestionario piloto con el siguiente método:

a. Se tienen en cuenta las observaciones de los expertos en relación al hecho de que algunos ítems parecen duplicar el contenido (caso citado de los ítems 3 y 5). En este caso se elimina el peor valorado de ellos.

b. De los restantes ítems se eligen los mejor valorado y con menor dispersión en los aspectos citados. Si alguno está poco valorado en claridad, se procede a revisar el enunciado.

La versión piloto de la escala de actitudes consta de 28 ítems, 14 con enunciados positivos y 14 con enunciados negativos, y 4 ítems valorando cada componente. Se presenta en anexo.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE ESTUDIO

Aunque todavía no se dispone de una prueba piloto de la escala, pensamos que es de interés presentar en este foro los avances de nuestro trabajo, pues la conceptualización de la definición semántica de la variable puede ser útil para la construcción de otras escalas dirigidas al profesorado. La metodología utilizada en la elaboración y selección de ítems podría ser igualmente aplicable.

Actualmente se inicia la recogida de datos con la escala piloto, en una muestra de futuros profesores de tamaño moderado, y esperamos tener datos disponibles durante el simposio de la SEIEM. El siguiente paso sería comparar las puntuaciones por componentes y analizar si están claramente delimitados, utilizando el análisis factorial que nos permitirá indicar si hay evidencias de multidimensionalidad de la escala, tal y como fue propuesta en su elaboración.

En una segunda fase se podría estudiar su utilidad para analizar las actitudes de los profesores en activo o profesores y futuros profesores de secundaria, puesto que no especificamos el nivel escolar, o en estudios transnacionales.

Finalmente resaltamos el interés del estudio de las actitudes hacia la probabilidad en los profesores y futuros profesores, si queremos que los cambios curriculares en esta materia sean efectivos. La formación y cambio de actitudes es un proceso largo y costoso, debido precisamente a la multidimensionalidad del constructo, por lo que es importante actuar sobre las mismas desde la formación de los profesores. Los beneficios asociados a unas actitudes positivas, traerán como consecuencia alumnos más motivados por una educación verdaderamente global de la probabilidad, destinada a formar a la persona tanto en el ámbito individual como social y de conocimiento.

Agradecimientos: Trabajo apoyado por el Proyecto EDU 2013-41141-P

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Bilbao, España: Mensajero.

Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Heidelberg, Alemania: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics 3*(1), 3-13.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 5-28.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2010). Instrumentos de medición de actitudes hacia la Estadística: la escala EAEE para profesores. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 233-253). Lleida: SEIEM.

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 173-174). New York: Springer.

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal, & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg, Los Países Bajos: IOS, Press.

Gil, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea, Madrid.

Hannula, M. S., Opt'Eynde, P., Schlöglmann, W. y Wedege, T. (2007). Affect and mathematical thinking. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V. Proceedings of the Fifht Congress of The European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 202-208). Nicosia, Chipre: University of Cyprus.

Martins, J. A., Nascimento, M.M. y Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: a qualitative analysis of portuguese teachers ‘attitudes towards statistics *Statistics Education Research Journal*, *11*(2), 26-44.

McDonald, R. P. (2013). *Test theory: A unified treatment*. Sussex, UK: Psychology Press.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan and National Council of Teachers of Mathematics.

Morales, P., Urosa, B. y Blanco, A. (2003). Construcciones de escalas de actitudes tipo likert: una guía práctica. Madrid: La Muralla.

Muñiz, J. y Fonseca-Pedrero, E. (2009). Construcción de instrumentos de medida para la evaluación universitaria. *Revista de Investigación en Educación, 5,* 13-25.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers’ beliefs and affects. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing y National Council of Teachers of Mathematics.

Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of statistics attitudes survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.

Schau, C. (2003, agosto). Students’ attitudes: the other important outcome in statistics education. Presentado en the *Join Statistical Meeting of the American Statistical Association*, San Francisco.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *45*, 401-405.

ANEXO

Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza

1. Me divierto en las clases en las que se explica probabilidad
2. Me siento intimidado ante datos probabilísticos
3. Me gusta la probabilidad; es un tema que siempre me ha interesado
4. No me agrada resolver problemas de probabilidad
5. La probabilidad sólo la entienden la gente de ciencias
6. La probabilidad es fácil
7. Domino los principales contenidos de probabilidad
8. No me siento preparado para resolver cualquier problema básico de probabilidad
9. Uso la probabilidad en la vida cotidiana
10. Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad (en prospectos de medicamentos, etc.)
11. Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones
12. Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas
13. Me preocupa saber responder preguntas de probabilidad de los alumnos
14. Como profesor creo que me sentiré cómodo al enseñar probabilidad
15. Pienso que no me gustará enseñar probabilidad en la escuela
16. No tengo mucho interés en enseñar probabilidad aunque aparezca en el curriculum
17. Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos

con la probabilidad
18. Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para la clase de probabilidad
19. Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación de la probabilidad
20. Será difícil para mí enseñar probabilidad
21. Cuando sea pertinente, utilizaré la probabilidad en otras materia que enseño
22. Sólo enseñaré probabilidad si me queda tiempo después de los otros temas
23. Se debería enseñar probabilidad en los primeros niveles de enseñanza
24. Si pudiera eliminar alguna materia, sería la probabilidad
25. La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy
26. La probabilidad sólo sirve para los juegos de azar
27. Los conocimientos sobre probabilidad, ayudan a los alumnos a razonar críticamente
28. La probabilidad no tiene tanto valor como otras ramas de las matemáticas

¿CÓMO ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS COMPRENDEN EL APRENDIZAJE DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN?

How do prospective teachers understand students' learning progression related to the limit of a function?

Fernández, C.[a], Sánchez-Matamoros, G.[b], Callejo, M. L.[a] y Moreno, M.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

En este estudio presentamos una investigación que tiene como objetivo generar información sobre cómo estudiantes para profesor de educación secundaria (EPS) comprenden el proceso de aprendizaje de las matemáticas. El contexto que hemos utilizado es la actividad de anticipar respuestas de los estudiantes de Bachillerato que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual de la comprensión del concepto de límite de una función, como una actividad relevante vinculada a la competencia docente. Los resultados muestran dos formas distintas de considerar la comprensión del concepto de límite por parte de los EPS que tienen implicación sobre cómo anticipan las respuestas de los estudiantes y sobre las características de los problemas que plantean para apoyar el aprendizaje de la concepción dinámica de límite de los estudiantes.

Palabras clave: *Aprendizaje del estudiante para profesor, conocimiento sobre el aprendizaje matemático, competencia docente, mirar profesionalmente, concepto de límite funcional*

Abstract

In this study we present a research focused on generating information about how prospective secondary school teachers understand the process of learning mathematics. The context is a task in which prospective teachers have to anticipate responses of high school students that reflect different levels of conceptual understanding of the concept of limit of a function. This task could be considered a relevant activity related to teaching competence. Results show two different ways of considering students' understanding of the limit concept that have implications on how prospective teachers anticipate the responses of students and on the characteristics of the problems proposed by them to support students' learning of the dynamic conception of the limit.

Keywords: *Prospective secondary school mathematics teachers' learning, knowledge of mathematics learning, teaching skill, professional noticing, functional limit concept*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones centradas en la formación de futuros profesores de matemáticas destacan la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014; Imre y Akkoç, 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Ball, Thames y Phelps (2008) cuando caracterizaron el conocimiento de matemáticas para la enseñanza (MKT) expusieron que:

> Los profesores deben anticipar lo que los estudiantes probablemente piensen y aquello en que tengan dificultades. Cuando escojan un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes pueden considerar interesante y motivador. Cuando escojan una tarea, los profesores necesitan anticipar lo que los estudiantes harán y si ellos encontrarán la tarea fácil o difícil. […]. Cada una de

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). Alicante: SEIEM.

> estas tareas requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y la familiaridad con el estudiante y su pensamiento matemático (p. 401).

Esta caracterización subraya la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para poder ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011). La habilidad del profesor de anticipar posibles respuestas de los estudiantes a los problemas reflejando diferentes niveles de desarrollo conceptual, es una característica de la competencia docente (Ball et al., 2008; Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008). Este reconocimiento ha hecho que se convierta en un objetivo de investigación en la formación de profesores. Desde la perspectiva del aprendizaje de los estudiantes para profesor, esta situación plantea cuestiones relativas a la relación entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de ESO y Bachillerato.

En este estudio, nos centraremos en caracterizar esta competencia docente en relación al concepto de límite de una función. Luego nuestro estudio se apoya por una parte en las investigaciones sobre el conocimiento necesario para la enseñanza (Ball et al., 2008) y por otra parte en la comprensión del concepto de límite. Nuestra hipótesis de trabajo es que no es suficiente conocer las matemáticas que configuran la idea de límite para ser capaz de reconocer diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del límite. En otras palabras, esta investigación intenta aportar evidencias de la necesaria consideración del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (Knowledge of Content and Students, KCS) como un dominio del conocimiento de matemáticas para enseñar (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball et al., 2008).

Una síntesis de las características de la comprensión del concepto de límite

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de bachillerato (Tall, 1992). Diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil, y que muchas veces la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con este concepto a través de la noción dinámica de límite (Cornu, 1991). La concepción dinámica (Blázquez y Ortega, 2002) puede ser definida como: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada"

Está manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 \text{ tal que } \forall x,\ 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Cottrill y sus colegas (1996) indican que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición métrica del límite puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica. Estos autores indican que relacionar la coordinación de los dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la concepción métrica hace el concepto de límite difícil para muchos estudiantes. Desde este punto de vista, para que los estudiantes superen esta insuficiencia, deben coordinar un proceso de aproximación en el dominio con un proceso de aproximación en el rango a través de la función considerando diferentes modos de representación.

En este estudio nos centramos en caracterizar cómo los estudiantes para profesor de secundaria anticipan respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre el límite de una función reflejando distintos niveles de desarrollo conceptual de este concepto. La pregunta a investigar es:

> ¿Cómo los estudiantes para profesor de secundaria (EPS) anticipan posibles respuestas de los estudiantes de bachillerato a cuestiones sobre el límite de una función presentados en distintos modos de representación que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual de este concepto?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron 25 EPS matriculados en el Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria con una sólida formación matemática (matemáticos, físicos, ingenieros y arquitectos). Los EPS estaban matriculados en una asignatura que tenía como un objetivo: aprender a identificar evidencias de la comprensión de estudiantes de educación secundaria. Uno de los tópicos fue el concepto de límite. Como tarea inicial para centrar la reflexión sobre la relación entre conocimiento de matemáticas y conocimiento de matemáticas de los estudiantes de bachillerato, como componentes del conocimiento de matemáticas para enseñar (MKT), se pidió a los EPS una tarea de anticipación de respuestas de estudiantes a tres problemas sobre el límite de funciones.

La tarea

La tarea constaba de 3 problemas relacionados con el concepto de límite de una función en un punto, tomados de libros de texto de bachillerato, y tres preguntas para reflexionar sobre la comprensión de los estudiantes (Figura 1).

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2
Sean las tablas

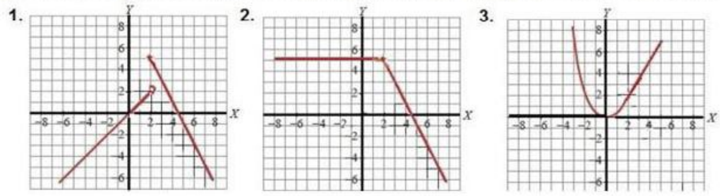
x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3
Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas



a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

A) Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1° de Bachillerato, en cada problema, para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

B) Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1° de Bachillerato, en cada problema, para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

*C) Como profesor de estos alumnos **propón tareas concretas:***
- *para **confirmar** que María **ha alcanzado el objetivo de aprendizaje** pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
- *para **que** Pedro **alcance el objetivo de aprendizaje** pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*

Figura 1. Tarea propuesta a los EPS

El objetivo de las preguntas A y B era que los EPS generaran respuestas hipotéticas que reflejaran diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes de primero de Bachillerato. El objetivo de la pregunta C era que los estudiantes para profesor propusieran nuevos problemas que ayudaran a los estudiantes de Bachillerato a avanzar en su comprensión. Para la resolución de la tarea se les proporcionó un documento teórico con la definición de la concepción dinámica de límite y los elementos matemáticos que la conforman (Pons, Valls y Llinares, 2012): (i) Función, (ii) Aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) Coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico). Los datos de esta investigación son las respuestas que los EPS, distribuidos en cinco grupos, dieron a las preguntas A, B y C planteadas en la tarea.

Análisis

Mediante un proceso inductivo, generamos semejanzas y diferencias en la manera en la que los cinco grupos de EPS concebían lo que podían ser evidencias de diferentes niveles de comprensión del concepto del límite en estudiantes de Bachillerato lo que nos permitió inferir información sobre cómo los futuros profesores consideraban que los estudiantes de primero de Bachillerato comprendían el concepto de límite de una función en un punto.

RESULTADOS

La sección de resultados está organizada en dos apartados que muestran dos formas distintas de considerar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto por parte de los EPS: la comprensión como una dicotomía “todo o nada” y la comprensión como progresión.

La comprensión como dicotomía: todo/nada

Algunos EPS consideraban que los estudiantes de bachillerato comprendían el concepto de límite si eran capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango, tanto si eran coincidentes como si no, en los distintos modos de representación. Por otra parte, consideraban que cuando los alumnos de bachillerato no comprendían adecuadamente el concepto de límite de una función en un punto solo eran capaces de considerar aproximaciones laterales si la función estaba definida en el punto, sin utilizar la idea de coordinación. Las respuestas eran resoluciones incorrectas en todos los modos de representación. En esta categoría incluimos a los grupos G2, G3 y G5.

Por ejemplo, los EPS del grupo G2 consideraron como evidencia de la comprensión del límite de una función en un punto que los estudiantes de bachillerato fueran capaces de coordinar los valores de la x en los distintos intervalos de definición y los valores de la $f(x)$. Esta coordinación se manifestaba en el modo algebraico y gráfico a través del reconocimiento de las ramas de la función en los distintos intervalos y el establecimiento del límite de la función por coincidencia o no de los límites laterales (Figura 2). La respuesta que anticipan a los problemas 1 y 3 la justifican con los elementos matemáticos que forman parte de la concepción dinámica de límite diciendo:

> [María] Demuestra tener el concepto de función al utilizarlo correctamente a lo largo del ejercicio. Entenderíamos que no comprende el concepto si en el ejemplo eligiese siempre la misma rama o equivocadas. La idea de aproximación lateral en el dominio se corresponde con el hecho que selecciona adecuadamente la rama de la función. La idea de aproximación en el rango se demuestra cuando sustituye en el límite por la aproximación de la variable independiente. Demuestra coordinar cuando es capaz de establecer según la rama el valor del límite. Finalmente demuestra que entiende el concepto de límite y su existencia si comprueba la coincidencia de las aproximaciones calculadas en el rango.

En esta respuesta los EPS del grupo G2 subrayan el papel de la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango en los puntos en los que cambia la definición de la función (algebraico en el P1 y gráfico en el P3).

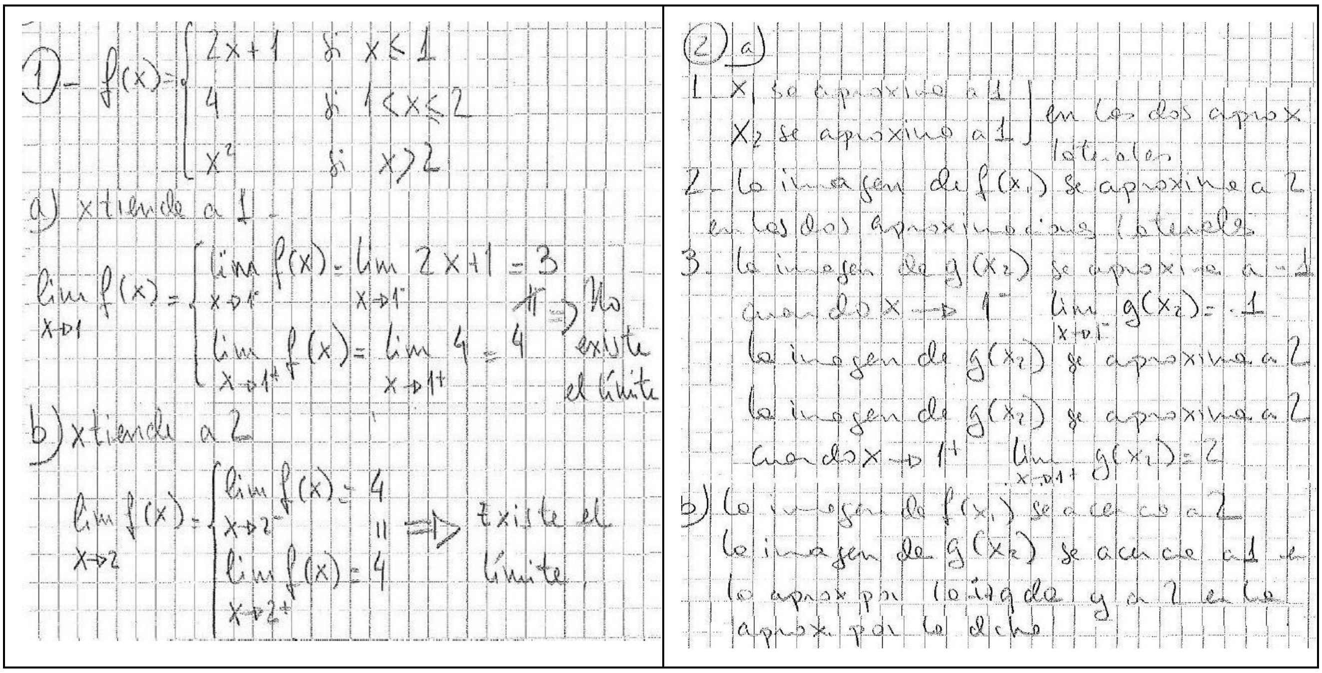


Figura 2. Respuesta anticipada de G2 al problema 1 y 2 para un estudiante que evidencia comprender el concepto de límite de una función

Esta característica de la manera de entender la comprensión del concepto de límite viene apoyada por la forma en la que consideran la idea de aproximación en el modo numérico. La respuesta anticipada en modo numérico (problema 2, Figura 2) la justifican indicando:

> [María] Demuestra que entiende la idea de función si asocia correctamente cada dominio de las dos funciones presentes con su rango y entiende que la función viene representada numéricamente en forma de tabla y sabe superar la dificultad del orden que se utiliza en el enunciado. Entendemos que presenta una idea correcta de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda porque resuelve correctamente el apartado 2a1 y en el rango cuando resuelve satisfactoriamente el apartado 2a3.

Para estos EPS la coordinación en los tres modos de representación es esencial para la comprensión del concepto de límite, de ahí que sus decisiones de acción incidan en ello. Así, en sus propuestas de problemas dirigidos a ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión de este concepto, consideran los mismos problemas propuestos (problemas 1 y 3) pero añadiendo un apartado que conlleva un cambio de modo de representación, pasar del algebraico al gráfico (en el problema 1) y pasar del gráfico al algebraico (en el problema 3):

> Como tarea adicional se le pedirá que representen la gráfica como pendiente a la función por partes compuestas por tramos de funciones elementales (afín, parábola) y señale dónde se encuentran los límites pedidos si existen de esta forma. Le proponemos que cambie el método de representación.

De manera coherente, estos EPS del grupo G2 consideraban que los estudiantes de Bachillerato que no comprendían el concepto de límite de una función en un punto, sólo realizaban aproximaciones laterales donde estaba definida la función en el punto, como se pone de manifiesto cuando dicen: "no entiende que la variable independiente se aproxima a un punto pero que nunca se alcanza", y asociaban el límite al valor de la función en el punto. Y, en modo numérico, que el estudiante de Bachillerato no fuera capaz de establecer las aproximaciones laterales (no las calcula). En consecuencia, las decisiones de acción que proponen están encaminadas a que los estudiantes establezcan aproximaciones para llegar a coordinar y resolver los problemas de forma correcta:

> Que realicen una tabla para que perciban el salto entre las ramas de la función definida por partes y con ello entiendan el concepto de aproximación lateral.

Los grupos de EPS incluidos en esta categoría asociaban la idea de comprender el concepto de límite a realizar correctamente las actividades previstas y la no comprensión a no usar los elementos matemáticos relevantes de aproximaciones laterales y coordinación en los distintos modos de representación.

La comprensión como progresión

Otros grupos de EPS, los grupos G1 y G4, consideraron que la comprensión del concepto del límite de una función en un punto por parte de los estudiantes de bachillerato era progresiva, y que el estudiante que comprendía la concepción dinámica era capaz de usar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva, distinta de las planteadas en las actividades iniciales. Asimismo, el alumno que no tenía una comprensión adecuada era capaz de coordinar en uno de los modos de representación aunque tenía dificultades en alguno de los otros modos de representación. Por ejemplo, el grupo G1 consideraba que los estudiantes de bachillerato que comprendían el concepto de límite de una función en un punto podían coordinar las aproximaciones a la x en los distintos intervalos con los valores de la función $f(x)$, en el modo algebraico y gráfico, reconociendo las ramas de la función en los distintos intervalos; y en el modo numérico realizando las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango (Figura 3). Por ejemplo, lo justifican en el modo gráfico, indicando:

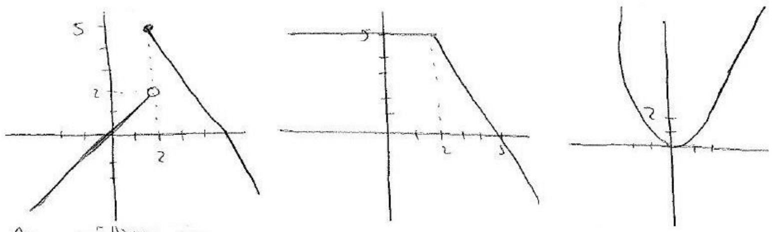
> [María] Comprende la idea de función ya que sabe extraer de la representación gráfica toda la información. Al acercarse a 2 por ambos lados demuestra la idea de aproximación lateral (dominio) y al ver su valor en el rango. Por último, los coordina perfectamente ya que ha explicado correctamente su relación.

Estos EPS consideran que como consecuencia se les deberían proponer tareas que supusieran hacer uso de la coordinación en el dominio y en el rango en situaciones nuevas para ellos. Esta idea se pone de manifiesto en los dos problemas que proponen (Figura 4). En una tarea se les pedía que a partir de ciertas condiciones analíticas vinculadas con la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, encontraran la gráfica de la función (propuesta 2). Para resolver esta tarea el estudiante de bachillerato debe invertir los procesos realizados para construir el significado de límite y atender a todos los datos para hacer la representación gráfica pedida. En el otro problema (propuesta 1) los EPS introducen una función definida a trozos con salto infinito (Figura 4).

Este grupo de EPS vinculan la no comprensión a que los estudiantes de bachillerato coordinen las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango en modo numérico, pero no sean capaces de realizarlas en modo algebraico y gráfico. De esta manera, en el problema propuesto para ayudarles a progresar en su comprensión señalan una gradación para determinar el límite de una función en modo gráfico, pidiendo a los estudiantes que hagan en primer lugar una tabla de valores que les permita hacer la gráfica de la función, y a partir de ella determinen a qué valor se acerca $f(x)$ indicando explícitamente cuando x se aproxima por la derecha y por la izquierda (Figura 5).

La manera en la que los EPS anticipan lo que podrían ser evidencias de diferentes niveles de desarrollo conceptual de la idea de limite, y las tareas que sugieren para apoyar este desarrollo, subrayan aspectos que ponen de manifiesto la progresión paulatina en la trayectoria de lo que significa llegar a comprender la concepción dinámica de límite. En particular esta visión se concreta cuando admiten que los estudiantes podrían ser capaces de realizar correctamente algunas actividades aunque no en todos los modos de representación (reflejando la posibilidad de realizar coordinaciones de las aproximaciones en algún modo de representación particular), y cuando sugieren usar actividades que introduzcan los saltos infinitos o actividades en las que los estudiantes deben que inferir información sobre la gráfica de la función a partir de la información del límite dada en forma analítica, lo que desde nuestro punto de vista supone un nuevo paso en la consolidación de la comprensión del límite de una función en un punto.

3



Relaciono las gráficas con

a) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ c) $\nexists \lim_{x \to 2}$

Cada gráfica representa una función distinta, y observamos que en la 1ª gráfica hay un salto cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda, por lo que concluimos que no existe el límite de la función cuando $x=2$.

Ahora comprobamos qué sucede en las otras dos gráficas cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda y observamos su valor en cada caso.

La segunda el valor de la función es 5 por ambos lados por lo que el límite es 5.

Por descarte la última su límite es 2 cuando $x=2$ y lo comprobamos.

Figura 3. Respuesta anticipada de G1 al problema 3 para un estudiante que ha alcanzado el objetivo

*Propuesta 1

Dada la siguiente función a trozos,

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < -2 \\ 0, & -2 < x \leq 0 \\ 1/x, & x > 0. \end{cases}$$

Calcula el límite cuando $x=-2$ y $x=0$

*Propuesta 2

Dados los siguientes casos, realiza la gráfica correspondiente a cada uno de ellos.

a) No existe el límite cuando $x=2$

b) Su límite cuando $x=2$ es 14.

Figura 4. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por el grupo G1 para el estudiante que ha alcanzado el objetivo de aprendizaje

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Haz una tabla de valores para x y $f(x)$, por ejemplo:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

b) Represéntalo gráficamente.

c) ¿A qué valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a 0 por la derecha y por la izquierda?

(Pista: fíjate en la tabla y en la gráfica).

Figura 5. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por el grupo G1 para el estudiante que no ha alcanzado el objetivo de aprendizaje

CONCLUSIONES

En este estudio presentamos una investigación que tiene como objetivo generar información sobre cómo estudiantes para profesor de educación secundaria comprenden el proceso de aprendizaje de las matemáticas. El contexto utilizado es el de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, para lo cual hemos propuesto a los EPS una actividad de anticipar respuestas de los estudiantes de bachillerato que reflejen distintos niveles de desarrollo conceptual de la comprensión de dicho concepto, como actividad relevante vinculada a la competencia docente. Los resultados muestran dos formas de considerar la comprensión del concepto de límite por parte de los EPS.

Tres grupos de EPS consideraron que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto estaba relacionada con el hecho de ser capaz de realizar aproximaciones en el dominio y en el rango, y coordinaciones en los diferentes modos de representación. Lo que también se puso de manifiesto en las características de los problemas que proponían para consolidar la comprensión del estudiante (Pedro). Además, estos EPS vincularon una comprensión no adecuada de la concepción dinámica de límite con ser capaz de realizar aproximaciones laterales únicamente por la derecha o por la izquierda (en la rama donde estaba definido el valor de la función en el punto). Por lo tanto, esta manera de concebir el aprendizaje del concepto de límite de una función se vincula, por una parte, con la idea de ser capaz de resolver los problemas propuestos de manera adecuada y, consolidar el conocimiento mediante la realización de problemas que inciden en los mismos elementos y relaciones. Mientras que, una comprensión inadecuada del concepto de límite, se vinculaba a no resolver correctamente los problemas planteados en los diferentes modos de representación. Los EPS evidenciaban una manera de comprender el aprendizaje del límite que consideramos dicotómica (“todo o nada") que se refleja en las actividades de anticipar respuestas de los estudiantes de bachillerato y en las actividades planteadas para proponer nuevos problemas que apoyen el aprendizaje de sus alumnos, las cuales evidencian diferente desarrollo conceptual.

Por otra parte, dos grupos de EPS consideraron que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto es progresiva. Esta idea se evidencia cuando: (i) consideran que la consolidación de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de usar la idea de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva para el estudiante y (ii) vinculan una comprensión no adecuada de la concepción dinámica de límite con ser capaz de realizar aproximaciones laterales y coordinaciones en algún modo de representación. Esta manera de comprender el aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de limite les permitía proponer problemas para apoyar el aprendizaje de los alumnos que reflejaban, en cierta medida, el potencial de considerar la manera en la que los estudiantes podían ir estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos que definen el concepto de manera paulatina, en diferentes modos de representación. Además, se subraya la manera en la que los estudiantes pueden llegar a construir el significado del concepto cuando es usado en nuevos contextos que pueden exigir la reflexión de los estudiantes sobre las acciones de coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango a través de la función.

Estas dos maneras de comprender el aprendizaje ponen de manifiesto las concepciones de los EPS que nos indicarían el valor otorgado al conocimiento sobre el aprendizaje que es el contenido del programa de formación. En este sentido, la manera de comprender el aprendizaje como "todo-o-nada" y "como un proceso progresivo" ponen de manifiesto las referencias a través de las cuales se desarrolla el proceso de aprendizaje de los EPS. Los resultados de esta investigación subrayan el desafío al que nos enfrentamos los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que permitan a los EPS superar ciertas concepciones sobre el aprendizaje, por ejemplo, del tipo “todo o nada”, al mismo tiempo que aprenden lo relativo al "conocimiento de matemáticas y los estudiantes".

Reconocimientos

El estudio ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: Recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 57-79.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67–83.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Imre, S. y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 207-226.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R. A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa y otros (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, doi: 10.1007/s10763-014-9544-y.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). Nueva York: Macmillan.

FASES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LA DERIVADA: COMPRENSIÓN EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Phases in the Thematization Derivative Schema: Understanding in University Students

Fuentealba, C.[a], Badillo, E.[b], Sánchez-Matamoros, G.[c]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Autónoma de Barcelona, [c]Universidad de Sevilla

Resumen

El estudio que presentamos es parte de una investigación más extensa que aborda la comprensión del concepto de derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. En particular, nos centramos en el análisis de la tematización del esquema de la derivada. Para ello se utilizan los niveles de comprensión de un esquema intra-inter-trans (propuestos por Piaget y García) ajustados al concepto de derivada en términos de elementos matemáticos, relaciones lógicas y modos de representación utilizados por los estudiantes a la hora de resolver una determinada tarea.

Palabras clave: *derivada, esquema de derivada, nivel de comprensión, tematización*

Abstract

The present paper is part of a larger research study that addresses the understanding of the concept of derivative by college students with prior instruction in differential calculus. In particular, in this work we focus on the analysis of the thematization derivative schema. With this aim, we use the understanding levels of intra-inter-trans schema (proposed by Piaget and Garcia) adjusted to the concept of derivative in terms of mathematical elements, logical relations and modes of representation used by students when solving a task.

Keywords: *derivative, derivative schema, understanding level, thematization*

INTRODUCCIÓN

El cálculo es, sin lugar a dudas, uno de los mayores logros del intelecto humano. Sin embargo, a pesar de su gran importancia, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales del curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional y en particular la universitaria, aún si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Esta práctica ha afectado de forma especial al cálculo diferencial, y específicamente al concepto de derivada que corresponde a uno de los puntos centrales del currículum obligatorio de la gran mayoría de los estudiantes universitarios de matemáticas y ciencias.

Dada la importancia del concepto y las dificultades presentes en su comprensión, se han realizado numerosas investigaciones que abordan la problemática desde diversos enfoques teóricos (Asiala et al, 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Azcárate,1990; Badillo, Font y Azcárate, 2011; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Clark et al., 1997; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Font, 1999; Font, Badillo, Trigueros y Rubio, 2012; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006, 2007; Starf, 1992; Tall, 1989; Zandieh, 2000). Dichos estudios según Sánchez-

Fuentealba C., Badillo E. y Sánchez-Matamoros G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 259-268). Alicante: SEIEM.

Matamoros, García y Llinares (2008) aportan información sobre aspectos muy importantes como son:

- Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada.
- Relación entre razón de cambio y cociente incremental.
- Los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas
- La relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$.
- El desarrollo del *esquema* de derivada.
- La aplicación del concepto: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

Los resultados de estas investigaciones, sin duda, han tenido implicaciones directas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada; sin embargo, es necesario ahondar en la comprensión del concepto considerando la multidimensionalidad que lo configura. Es por ello que nos planteamos como objetivo caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada con el propósito de observar posibles diferencias o fases.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo empírico se basa en el marco de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997). El cual, aporta elementos teóricos y analíticos para describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de *acciones*. Las *acciones* se interiorizan para formar *procesos* que se encapsulan para formar *objetos*. Finalmente, las *acciones*, los *procesos* y los *objetos* se pueden organizar en *esquemas* (Dubinsky, 1991). Los cuales, según Asiala et al. (1997) corresponden a una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas* que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. En este sentido Trigueros (2005) indica que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema matemático evoca un *esquema* para abordar su resolución. Ante un mismo problema diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. Al considerar esas relaciones, es posible identificar en las acciones de los estudiantes que resuelven un mismo problema, *esquemas* con distinto grado de comprensión. Piaget y García (1983, 1989) definen estos grados de comprensión en tres niveles: *intra-inter-trans*, que denominan triada. Estos niveles suceden siguiendo un orden fijo, y se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto.

Con respecto a la derivada Sánchez-Matamoros et al. (2006) plantean que el concepto posee elementos matemáticos estructurantes de distinta naturaleza, caracterizados por los modos de representación (analítico/grafico) y el carácter de dichos elementos (puntual/global). De esta forma, para caracterizar el *esquema* de la derivada es necesario considerar: los elementos matemáticos, los modos de representación y las relaciones lógicas que se establecen entre dichos elementos.

En relación a la *tematización* de un *esquema,* Trigueros (2005) indica que implica la coherencia del *esquema*; es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el *esquema* y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el *esquema* y cuál no. Esta coherencia se observa en la capacidad del estudiante de desagrupar o reagrupar las partes que componen el *esquema* llegando incluso a realizar acciones sobre el *esquema*; es decir, utilizarlo como *objeto* en la solución de nuevos problemas.

Por otra parte, consideramos relevantes los aportes realizados por García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que indican que la *tematización* del esquema de la derivada se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f'') y así sucesivamente; es decir, el estudiante toma conciencia que el operador derivada corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

El presente estudio es cualitativo con carácter descriptivo. Participaron 25 estudiantes universitarios de la provincia de Barcelona, de los cuales, 17 eran estudiantes del tercer curso de Ingeniería en Organización Industrial de una universidad privada y 8 del primer curso del grado de Matemáticas y Física de una universidad pública. Es importante señalar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en cálculo diferencial.

Instrumentos de recolección de datos

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada; dichas tareas tenían como base investigaciones previas realizadas (Baker et al., 2000; García et al., 2011). La resolución de las tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos que configuran el concepto.

En la tarea N°1 (Figura 1) se proporciona información analítica de la función f en términos de f' y f''. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones que asocian: el signo de f' con la monotonía de f, el signo de f'' con la convexidad de f y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretendía observar si los estudiantes eran capaces de apreciar las contradicciones presentes en las condiciones entregadas y plantear una modificación que les permitiera dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de elementos matemáticos.

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua

b) $f(2)=0$

c) $f'(3)=f'(5)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$

e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$

f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$

g) $f'(x)>0$ cuando $x<5$

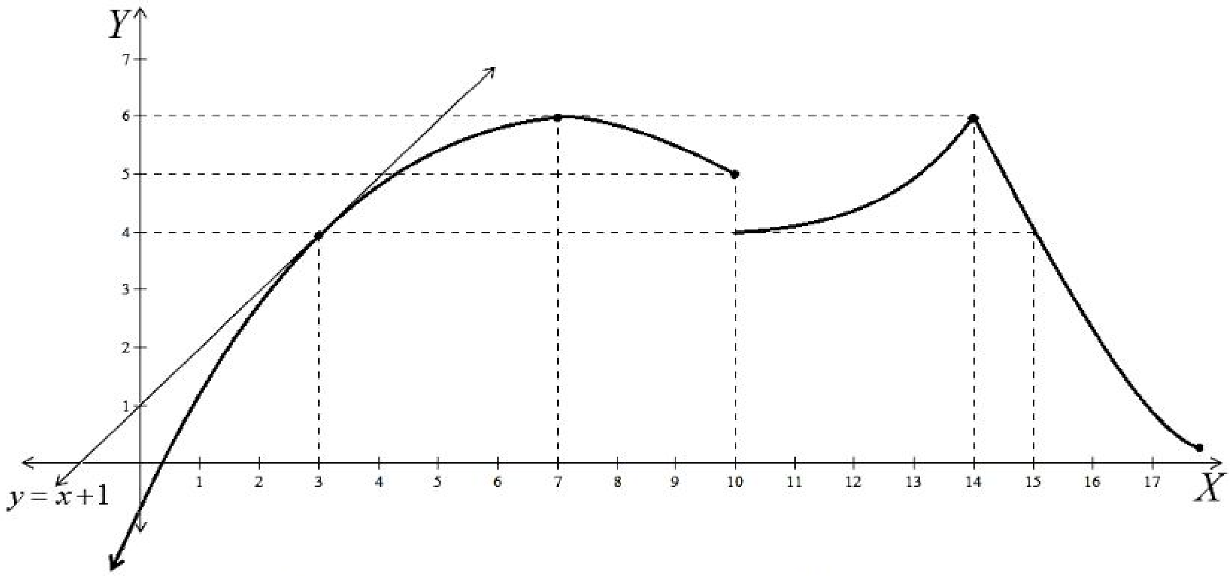
h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$

i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$

Figura 1. Enunciado Tarea N°1

La tarea N°2 (Figura 2), presentada en modo gráfico, poseía dos partes. La primera se centraba en comportamiento local de la función f. El objetivo de esta primera parte, fue observar si los estudiantes eran capaces de calcular la derivada en puntos con distintos comportamientos. En la segunda parte se les solicitó esbozar el gráfico de f' a partir del gráfico de f. En este caso pretendíamos observar si los estudiantes manejaban los elementos matemáticos que surgen de la implicaciones contrarias a las utilizadas en la Tarea N°1.

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Figura 2. Enunciado Tarea N°2

En la tarea N°3 (Figura 3), presentada en modo gráfico, se les solicitó a los estudiantes construir el gráfico de f a partir de la gráfica de f'. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones lógicas que vinculan: el crecimiento de f' con la convexidad de f, el signo de f' con la monotonía de f, los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f.

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.

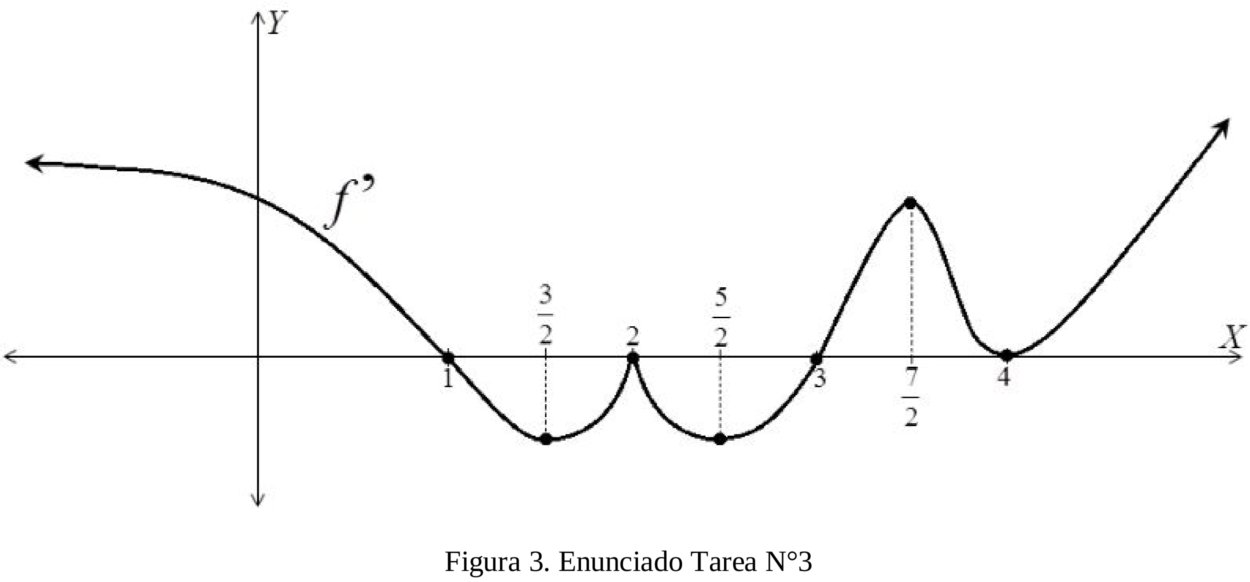
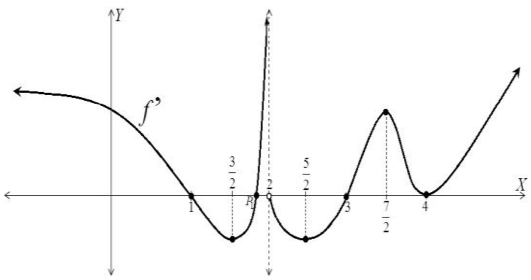


Figura 3. Enunciado Tarea N°3

El primer instrumento nos permitió, a través del análisis de los protocolos de resolución, clasificar a los estudiantes en los distintos niveles de comprensión del *esquema* de la derivada y nos sirvió como insumo para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes asignados a nivel de comprensión *trans* del *esquema*. Este segundo instrumento correspondió a una entrevista clínica que tenía dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas e (ii) indagar en la *tematización* del *esquema* de la derivada. Para esto último, realizamos modificaciones a las condiciones de las tareas del cuestionario (Tabla 1) con el propósito de identificar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, a una situación nueva.

Tabla 1. Modificaciones de las tareas del cuestionario

Tarea	Modificación	Pregunta
1	Eliminamos la condición c.	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de si eliminamos la condición c?
2	Suponiendo que la gráfica corresponde a f'.	Si la gráfica corresponde a f' ¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos de abscisas $x=7$ y $x=14$?
3	Modificamos la gráfica de f' 	¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos P_1 y $x=2$, si sabemos que f es continua?

La información obtenida en la entrevista clínica nos permitió ahondar en la caracterización del nivel de comprensión *trans* del *esquema* de la derivada y además, nos aportó información referente a la *tematización*. Sin embargo, para profundizar en la caracterización de la *tematización* del *esquema* de la derivada y la posible manifestación de fases de *tematización*, construimos una segunda entrevista clínica tomando como insumo la información aportada por los dos instrumentos anteriores. Este último instrumento fue aplicado a los estudiantes que identificamos que habían *tematizado* el e*squema*. Algunas de las interrogantes planteadas en la segunda entrevista se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Algunas interrogantes planteadas en la 2ª entrevista

Tarea	Pregunta
1	Atendiendo los elementos matemáticos del enunciado, me podrías ampliar en que te basas cuando consideras que $f'(3)\neq 0$. Y cómo influye esto con las otras condiciones de la tarea.
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función qué pasa en los puntos $x=7$, $x=10$ y $x=14$.
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f' , f'' y f''') en $x=1$, $x=3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 correspondía a un punto de inflexión de f')

ANÁLISIS

En una primera etapa realizamos el análisis de los protocolos de resolución de los 25 estudiantes considerando como criterio de valoración, la completitud de las tareas y del cuestionario en general. A partir del análisis redujimos el número de sujetos a solo nueve casos y utilizando como referencia los niveles de comprensión del *esquema* de la derivada descritos por Sánchez-Matamoros et al.

(2006) clasificamos a los estudiantes. Luego, nos centramos en los tres estudiantes (A1, A3 y A4) asignados al nivel de desarrollo *trans* para aplicar el segundo instrumento (Tabla 1) y confirmar que estos estudiantes ponían de manifiesto en sus respuestas, características del nivel comprensión *trans* y la *tematización*. En particular, para el análisis de la *tematización* consideramos dos propuestas: (i) la primera planteada por García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que indican que la *tematización* del *esquema* se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f'') y así sucesivamente; y, (ii) la propuesta planteada por Baker et al. (2000) y Trigueros (2005) que se relaciona con la modificación de alguna condición de las tareas planteadas. Según estas investigadoras, un estudiante que ha *tematizado* el *esquema* es capaz de desagrupar el *esquema* para utilizar las partes que lo componen cuando esto es necesario y reagrupar, nuevamente las partes que se necesitan en la solución de un problema, es decir, que puede movilizar las partes que requiere del *esquema* para dar respuesta a una nueva situación. Posteriormente, tras confirmar que estos estudiantes tenían *tematizado* el *esquema* de derivada, aplicamos un tercer instrumento (Tabla 2) que correspondió a una nueva entrevista para profundizar en la posible existencia de fases de *tematización* del *esquema*.

RESULTADOS

Presentamos la sección de resultados en dos apartados, en un primer apartado mostramos evidencia de la *tematización* del e*squema* y en el segundo mostramos las diferentes fases de la *tematización* del *esquema*, puesta de manifiesto por los estudiantes en el tercer instrumento.

Tematización del esquema de derivada

Una característica común en los estudiantes que habían *tematizado* el *esquema* se relaciona con la capacidad de coordinación de los elementos matemáticos puntuales y globales entregados en la Tarea N°1, lo cual les permitió apreciar la contradicción presente en las condiciones y modificar la tarea con el propósito de resolverla correctamente. Lo anterior, es un indicador de la coordinación de los elementos matemáticos correspondientes a un segundo nivel, es decir, al par $f' - f''$. Esto es un elemento diferenciador de los estudiantes con el *esquema tematizado*, pues el coordinar solo los elementos matemáticos puntuales y globales en un primer nivel correspondiente al par $f - f'$ también podía llevar a la resolución correcta de la tarea. Para ilustrar lo anterior se presenta, a modo de ejemplo, un fragmento de la tercera entrevista del estudiante A1.

E: ¿Qué es creciente por $x < 3$?

A1: La derivada primera. Es creciente por $x < 3$ porque f'' es estrictamente positiva. Es estrictamente creciente. Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x = 3$) tiene un máximo en $x = 3$, que estará por aquí.

E: ¿Quién tiene un máximo en $x = 3$?

A1: La derivada primera tiene un máximo en $x = 3$.

E: Ah, vale.

A1: Porque f'' cambia de signo, de positivo a negativo. Por lo tanto, pasa de crecer a decrecer.

E: ¿Y éste es el argumento que tú utilizas para decir que no puede ser $f'(3) = 0$?

A1: Sí porque, por aquí es positiva y va creciendo (indicando a la izquierda $x = 3$). Por lo tanto, no puede cortar aquí, o sea no es posible.

Como se observa, el estudiante A1 establece conexiones entre los elementos matemáticos que vinculan el signo de f'' con la monotonía de f'. De esta forma, es capaz de observar la contradicción entre los elementos matemáticos.

Fases de la tematización del esquema

En relación al estado de *tematización* manifestado por los estudiantes, logramos observar variadas evidencias relacionadas con la identificación de la contradicción y la resolución correcta tanto de las tareas como de las modificaciones del cuestionario. Sin embargo, observamos diferencias en el uso que los estudiantes hacían de las derivadas sucesivas mostrando matices en cuanto a la forma de establecer y argumentar dichas relaciones. De esta forma, los datos nos permiten definir tres fases de la *tematización* del e*squema* relacionados con el establecimiento de dichas relaciones (Tabla 3) y que hemos denominado como: inicial, intermedia y avanzada.

Tabla 3. Fases de la *tematización* del *esquema*

Inicial	Intermedia	Avanzada
Presenta dificultades al establecer conexiones entre los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas	Establece las conexiones que vinculan los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas, utilizando funciones auxiliares para establecer dichas relaciones	Establece directamente las conexiones entre los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas

A modo de ejemplo, en los siguientes párrafos se muestran fragmentos de la segunda entrevista que dan cuenta de las distintas fases de *tematización*. En una fase inicial se encontraría el estudiante A3 que, tal y como se muestra en el siguiente fragmento de la segunda entrevista, presenta dificultades y dudas al referirse a las derivadas sucesivas en el análisis de un punto de inflexión de la primera derivada.

E: El signo o el valor numérico, si puedes establecerlo.

A3: A ver, en uno, $f'(1)=0$ claramente, f'' va ser un valor negativo porque es como la pendiente de esta función y no lo sé, para saberlo [...]

E: Bueno pero ¿qué signo tendría $f''(1)$?

A3: Negativo

E: ¿Por qué?

A3: Decrece entonces es negativo.

E: ¿Y $f'''(1)$?

A3: $f'''(1)$, a ver si mi punto de inflexión está en $x=1$, entonces claro aquí hay un cambio de pasar de creciente a decreciente con lo que la $f'''(1)$ será cero, supongo. Tenemos un cambio de sentido de f'' (indicando cambio de signo).

E: ¿Y en $x=3$?

A3: En $x=3$ pasa lo mismo, porque tenemos un..., primero es cóncava después convexa, cambia de sentido, cambia de... no sé cuánto, no estoy muy segura de esto, f'''... está muy lejos.

Esta evidencia pone de manifiesto que para algunos estudiantes que han *tematizado* el *esquema* de derivada, no siempre les es posible establecer las conexiones necesarias entre las derivadas sucesivas para justificar, en la entrevista, las respuestas de una resolución correcta de la tarea realizada.

Por su parte el estudiante A4 logra establecer las relaciones entre f', f'' y otras derivadas sucesivas considerando una nueva función F. Esto nos indica que este estudiante, para poder hacer uso de las relaciones $f''- f'''$, ha debido utilizar una función auxiliar F que se correspondiera con f', con lo cual F'' se corresponde con f''' y, por tanto, el análisis del punto de inflexión de f' lo realiza a través de F'', no siendo capaz de resolver el problema directamente. Esta evidencia corresponde a una manifestación de un nivel intermedio de *tematización* del *esquema* como se muestra en el siguiente fragmento de la segunda entrevista del estudiante A4.

E: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de f', porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a f'' o f'''?

A4: Ah, si cogemos la función ésta como la función normal digamos […].

E: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que ésta…

A4: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.

E: La estás llamando F, ok.

A4: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la f'' será cero.

E: ¿Pero tú f'' sería…?

A4: La f'''.

E: ¿Sería la f'''?

A4: Sí, si yo digo que F, digamos f' la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

Por otro lado, el estudiante A1 para responder a las interrogantes relativas a las derivadas sucesivas, no necesita considerar esta función auxiliar, tal y como le sucedía al estudiante A4. Este hecho muestra una manifestación distinta de la *tematización* del *esquema* de derivada relacionada con establecimientos de vínculos directos entre las derivadas sucesivas, lo cual puede observarse en el siguiente fragmento de la segunda entrevista del estudiante A1.

E: Ya ¿y cuál sería su valor o cuánto valdría f'…, f'' en x_0?

A1: La f'', está creciendo por lo que también es positiva. La f''' ya estaría anulada.

E: ¿Y por qué estaría anulada?

A1: Porque hay un punto de cambio de concavidad.

E: Ah, ok. O sea tú lo que estás haciendo es trasladar relaciones que…

A1: En cambio de mirar lo, lo…, la f'' en función de la…, o sea, en cambio de mirar la f'' en función de la primera función, veo la f''' en función de f'.

CONCLUSIONES

Los objetivos de este trabajo estaban enfocados en caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada con el propósito de observar posibles diferencias o matices. Hemos encontrado evidencia que los estudiantes que han *tematizado* muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos que asocian la función con f' y f'', tanto en las relaciones directas como contrarias pudiendo, además, extrapolar dichas relaciones a otros pares de derivadas sucesivas. Sin embargo, logramos identificar diferencias en cuanto al establecimiento de estas conexiones y a la forma en que se usan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas en la *tematización* del *esquema* de derivada por parte de los estudiantes, ya que un estudiante presenta dificultades al establecer las relaciones entre f', f'' y f''', otro es capaz de hacer uso directo de estas relaciones, mientras que un tercer estudiante necesita referirse a una función auxiliar F que hace corresponder con f' y partir de las relaciones entre F, F' y F'' resuelve las tareas y traslada sus respuestas a f', f'' o f'''.

Finalmente, los resultados indican que la *tematización* del *esquema* de la derivada no es fácil de alcanzar, lo que queda de manifiesto en que, de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial, solo tres habían logrado *tematizar* el *esquema*.

Agradecimientos: Al Ministerio de Economía y Competitividad, por la financiación del Proyecto EDU2012-31464 y al equipo de GIPEAM–Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia 2014 SGR 972 de la Generalitat de Catalunya. Igualmente, a la Dra. Carmen Azcárate Giménez por su implicación y asesoría.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin, Alemania: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37–54.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(4), 345-364.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. En J. J. Kaput *y* E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-46). Washington, D. C.: The Mathematical Association of America.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Actas del XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 239-247). Jaen, España: SEIEM.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 229-238). La Laguna, España: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(2), 267–296.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification-the case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (Volumen XXV, pp. 59-84). Washinton, D.C: Mathematical Association of America.

Tall D. (1989). Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37-42.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5–31.

Zandieth M., (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. H. Shoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education*, *8,* 103-127.

UNA HERRAMIENTA PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MODELOS PRODUCIDOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI

A tool for characterization of models produced in the resolution of Fermi problems

Gallart, C.[a], Ferrando, I.[b], García-Raffi, L. M.[c], Albarracín, L.[d], y Gorgorió N.[d]

[a]Universidad Cardenal Herrera-CEU, Valencia, [b]Universitat de València, [c]Universitat Politècnica de València, [d]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo presentamos una herramienta de caracterización de los modelos matemáticos que producen los alumnos de Educación Secundaria. En concreto, utilizamos esta herramienta para analizar las producciones de los estudiantes de 16 años de dos centros diferentes al resolver Problemas de Estimación de Grandes cantidades, que son un tipo de problemas de Fermi. Los resultados muestran que la herramienta propuesta permite distinguir aspectos diferenciadores entre los modelos producidos por alumnos sin experiencia modelizadora, de los producidos por alumnos con experiencia previa.

Palabras clave: *tareas de modelización, problemas de Fermi, educación secundaria*

Abstract

In this work we present a tool for characterizing mathematical models produced by secondary students. We use this tool to analyze the productions of 16 years students of two different centers in Problems of Estimation of Big Quantities, a sort of Fermi problems. The results show that the proposed tool is useful to distinguish aspects between the models produced by students without modelling experience and those produced by students with prior experience.

Keywords: *modelling tasks, Fermi problems, Secondary School*

INTRODUCCIÓN

Cada vez existen más propuestas a nivel internacional que se centran en el uso de las matemáticas en situaciones contextualizadas, véanse los recientes estudios PISA (OECD, 2014), por ejemplo. El currículo de Educación Secundaria Obligatoria en España ha incluido recientemente de forma explícita la práctica de procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

En trabajos previos hemos observado que los Problemas de Estimación de Grandes Cantidades (PEGC) son un tipo concreto de problemas de Fermi y que, por su naturaleza, son problemas contextualizados que los alumnos pueden resolver introduciendo elementos de modelización (Albarracín y Gorgorió, 2013). En este trabajo utilizamos problemas que se centran en realizar estimaciones de cantidades de personas u objetos en un determinado plano, como puede ser la estimación de la cantidad de personas en un recinto acotado.

Nuestros datos provienen de dos experiencias de aula realizadas en paralelo y con alumnos de 16 años que resuelven una misma secuencia de PEGC. Las producciones de los alumnos al resolver este tipo de tareas de respuesta abierta son diversas y presentan una gran variedad de estrategias de resolución (Albarracín y Gorgorió, 2014). Este hecho supone un reto para la gestión de aula por parte del profesor (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015a) ya que cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos contextualizados en los que se plantean

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2015). Una herramienta para la caracterización de modelos producidos en la resolución de Problemas de Fermi. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 269-278). Alicante: SEIEM.

interrogantes relacionados con fenómenos o situaciones reales "todas las competencias matemáticas se activan durante el proceso de modelización" (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015b, p. 101).

Por ello, presentamos una herramienta para caracterizar los modelos matemáticos que elaboran los alumnos, con el objetivo de poder evaluarlos o crear una guía de posibles resoluciones que permita preparar la fase de anticipación de las actividades que involucren este tipo de tareas. La secuencia de problemas diseñada ha sido utilizada con alumnos en dos centros diferentes: en uno de ellos los alumnos tenían experiencia previa en modelización ya que, durante el curso anterior trabajaron por grupos problemas de modelización cuya resolución presentaron y discutieron en clase; los alumnos del otro centro carecían de experiencia en resolución de problemas de modelización. En este trabajo utilizamos la herramienta de análisis propuesta con el propósito de determinar las diferencias en los modelos elaborados por los alumnos de ambos centros.

SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En este estudio tomamos la siguiente definición de modelo matemático propuesta por Lesh y Harel (2003):

> Los modelos son sistemas conceptuales que tienden a expresarse usando diversos medios de representación que interactúan entre ellos. Pueden implicar símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos generados por ordenador, diagramas en papel o metáforas basadas en la experiencia. Su propósito es construir, describir o explicar otros sistema(s).
>
> Los modelos incluyen: (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos pertinentes, así como las relaciones, acciones, patrones y regularidades que se atribuyen a la situación; y (b) los procedimientos para generar construcciones útiles y realizar predicciones. (p. 159)

A partir de esta definición, entendemos que la elaboración y creación de modelos matemáticos destinados a describir o representar de forma abstracta un determinado fenómeno o realidad es un proceso complejo. En efecto, en un modelo matemático tienen cabida diferentes elementos que le dan forma, como pueden ser conceptos matemáticos, representaciones simbólicas de la realidad o esquemas, así como los procedimientos, matemáticos o no, asociados a su uso.

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos matemáticos para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri, 2006) aunque, en general, se acepta que los procesos de modelización tienen una naturaleza cíclica. El recorrido del ciclo de modelización no es lineal (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014), los alumnos tratan de resolver los problemas en un proceso que pasa por las diferentes fases y vuelve a comenzar para tratar de encontrar una representación matemática que describa el fenómeno estudiado o permita responder a las preguntas formuladas de la forma más adecuada posible. De esta forma, el proceso se repite en diferentes iteraciones en las que se mejoran los modelos y soluciones encontradas, adaptándose a las necesidades que marca el enunciado en cada momento (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Siguiendo a Blum (2003), los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales: 1) simplificar el problema real a un modelo real; 2) matematizar el modelo real, pasando a un modelo matemático; 3) buscar una solución a partir del modelo matemático; 4) interpretar la solución del modelo matemático; y 5) validar la solución matemática interpretándola en el contexto del problema real.

SOBRE LOS PROBLEMAS DE FERMI

Una estimación es un juicio del valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias y necesidades de la persona que emite ese juicio (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989). En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que una estimación es la forma más adecuada de dar respuesta a una pregunta, ya sea porque no disponemos de los medios para responderla de forma precisa, porque no dispongamos de toda la información necesaria o porque el esfuerzo para ofrecer una respuesta exacta es excesivo o simplemente innecesario. Un caso concreto de actividades que requieren un proceso de simplificación y matematización de una realidad son los denominados problemas de Fermi. La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck (2009) es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations. (p. 331)

Efthimiou y Llewellyn (2007) caracterizan los problemas de Fermi a partir de su particular formulación, ya que siempre parecen difusos, ofreciendo poca información concreta o pocos aspectos relevantes para enfocar el proceso de resolución. Es a partir de un análisis detallado de la situación presentada en el enunciado que se puede descomponer en problemas más sencillos que permitan llegar a la solución de la pregunta original. Por su naturaleza, los problemas de Fermi permiten estrategias de resolución más sencillas que las tareas abiertas de modelización, aunque en ambos casos los alumnos ponen en juego varias competencias con interrelaciones complejas. De esta forma observamos que existe una fuerte conexión entre los procesos de resolución de los problemas de Fermi y trabajo desarrollado durante el ciclo de modelización para la elaboración de un modelo matemático (Ärlebäck, 2009; Borromeo Ferri, 2006) sobre todo en las primeras experiencias de los alumnos. Por este motivo consideramos que los problemas de Fermi, y los PEGC en concreto, representan una oportunidad para estudiar la competencia modelizadora de los alumnos, tanto si han seguido una enseñanza tradicional como si han trabajado de forma específica la resolución de tareas de modelización.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

En este artículo estudiamos el trabajo de aula de alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (16 años) al resolver dos problemas de estimación de grandes cantidades. Los dos problemas han sido diseñados como parte de una secuencia con la intención de proporcionar a los alumnos situaciones que les permitan desarrollar sus propios modelos matemáticos y adaptarlos a nuevas situaciones, con diferentes niveles de complejidad. De esta forma, los objetivos de nuestro estudio son los siguientes:

1. Analizar los modelos matemáticos producidos por los alumnos durante la secuencia de PEGC utilizando una nueva propuesta de herramienta de caracterización de modelos.

2. Identificar los elementos diferenciadores de los modelos producidos entre alumnos con experiencia previa en actividades de modelización y los que no la tienen.

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos en este documento se basa en los datos recogidos en dos centros diferentes relacionados con la resolución de una secuencia de PEGC. Este tipo de problemas permiten el trabajo en el aula relacionado con la generación y uso de modelos matemáticos en su resolución (Albarrracín y Gorgorió, 2013). Los PEGC no son habituales en las aulas, por lo que los alumnos no conocen métodos específicos para resolverlos. Al tratar con grandes cantidades no resulta eficiente realizar aproximaciones simplistas a la solución, como utilizar recuentos exhaustivos de objetos, con lo que este tipo de problemas provoca la necesidad en los alumnos generar estrategias matemáticamente ricas que incluyan elementos matemáticos para representar la realidad estudiada (Albarracín y Gorgorió, 2014).

Para orientar el diseño de la secuencia de problemas utilizada se han considerado los aspectos que configuran las actividades que promueven la modelización o *modelling-eliciting activities* (Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000). Siguiendo las recomendaciones de Wessels (2014), hemos tratado que las actividades sean complejas, alejadas de los problemas convencionales asociados a procedimientos de resolución definidos y que incluyan diferentes contextos reales.

De esta forma, la secuencia de PEGC utilizada consta de una serie de problemas de Fermi que tratan una misma problemática ─desde el sentido estrictamente matemático─ ya que todos los problemas piden a los alumnos una estimación del número de personas u objetos que se pueden colocar en una determinada superficie. El diseño de la actividad se basa en un primer problema que permite el trabajo de campo en el propio centro educativo de forma que los alumnos puedan desarrollar métodos de resolución que puedan ejecutar in situ. Posteriormente, se plantea a los alumnos la resolución de un grupo de problemas que no pueden resolverse experimentalmente en un entorno accesible, con lo que se genera la necesidad de transferir las estrategias de resolución del primer problema a otros contextos. En este estudio nos centramos en el análisis de las producciones de los alumnos para dos de los problemas, el problema A que resuelven experimentalmente en el patio del centro y el problema B que resuelven posteriormente dentro del aula. Los enunciados de estos problemas son los siguientes:

Problema A: ¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?

Problema B: ¿Cuántos árboles hay en Central Park?

El trabajo en el aula se estructura esencialmente en grupos heterogéneos. Los alumnos trabajan en grupos de 3 o 4 personas durante diversas sesiones. En la primera sesión los alumnos resuelven el problema A y presentan su trabajo a los otros grupos en una puesta en común. Las siguientes sesiones se dedican al trabajo en el resto de problemas, entre los que se encuentra el problema B.

La experiencia que presentamos se ha realizado con dos grupos, uno de 24 alumnos de 4º de ESO de un centro de Valencia (que llamaremos grupo E1), distribuidos en 7 equipos de trabajo, y otro (que llamaremos E2) formado por 22 alumnos, distribuidos en 6 equipos del mismo nivel educativo de un centro de la provincia de Barcelona. Los alumnos del grupo E1 tenían experiencia previa trabajando en actividades de modelización. En total tenemos las resoluciones escritas de los problemas A y B de 6 equipos de trabajo de alumnos sin experiencia en modelización y 7 equipos con esa experiencia.

PROCESO DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para analizar los modelos matemáticos generados por los alumnos proponemos a continuación una herramienta que nos permita caracterizar cualitativamente los aspectos esenciales que los definen y que puedan proporcionarnos una idea objetiva de la complejidad con la que representan la situación estudiada.

Tabla 1. Elementos de caracterización de modelos matemáticos

Elementos	Concreciones
Sistemas conceptuales	Uso de diversos objetos matemáticos
	Relaciones entre los diferentes objetos matemáticos para obtener resultados-conclusiones
	Observación de patrones y/o regularidades en los datos
Procedimientos	Utilización de uno o diversos procedimientos para llegar a resultados/conclusiones
Lenguajes	Utilización de lenguaje simbólico
	Utilización de lenguaje oral
	Utilización de lenguaje escrito
	Realización de esquemas o diagramas

Siguiendo a Lesh y Harel (2003), consideramos que un modelo matemático está formado por conceptos y procedimientos de forma interrelacionada. Al mismo tiempo, en el momento de comunicar el modelo producido intervienen símbolos, gráficos y lenguajes que pueden complementar la carga conceptual del modelo, como podría ser el uso de metáforas (Presmeg, 1997). Estos elementos para la caracterización de los modelos matemáticos generados por los alumnos se muestran en la Tabla 1. Hemos utilizado esta herramienta de análisis para caracterizar los modelos propuestos por los alumnos de los dos grupos experimentales al enfrentarse a los problemas A y B.

En lo relativo a los **sistemas conceptuales** en ambos problemas se han identificado dos conceptos fundamentales: la noción de *densidad de población* entendida como el número de elementos en un espacio determinado y la *iteración de la unidad*, que se basa en determinar la superficie ocupada por un número determinado de elementos. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos en el análisis de los sistemas conceptuales propuestos. Debemos señalar que uno de los equipos del grupo E2 no resolvió el problema B y que otro equipo de E2 utiliza un sistema conceptual diferente para resolver el problema A, en el que se plantean una distribución de personas en cuadrícula.

Tabla 2. Sistemas conceptuales detectados

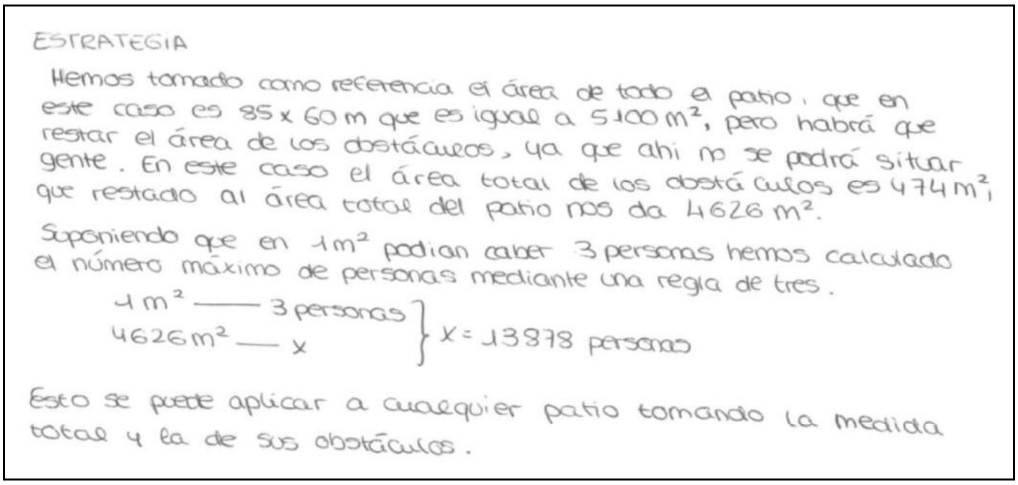
Problema	Densidad		Iteración de la unidad		Cuadrícula	
	E1	E2	E1	E2	E1	E2
A	6	3	1	2	0	1
B	3	3	4	2	0	0

La tabla 3 muestra número de equipos de trabajo que han considerado un tipo de elemento que añade complejidad a los modelos producidos como es la consideración de espacios no hábiles.

Tabla 3. Elementos de complejidad detectados

Problema	Espacio no hábil		No considera espacio no hábil	
	E1	E2	E1	E2
A	7	2	0	5
B	5	1	2	4

Observamos que los alumnos del grupo E1 al enfrentarse al problema A utilizan mayoritariamente la noción de densidad, averiguando el número de personas que caben en un espacio determinado, mientras que esos mismos alumnos no usan el mismo concepto en el problema B al tratar de estimar la cantidad de árboles (véase Figura 1).

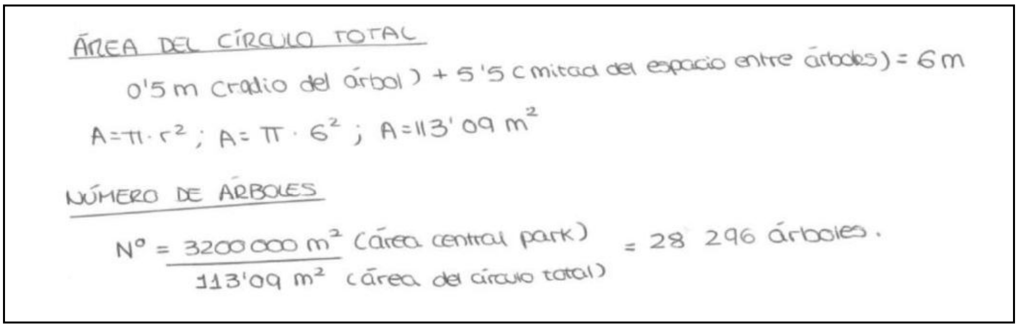

ESTRATEGIA

Hemos tomado como referencia el área de todo el patio, que en este caso es 85 x 60 m que es igual a 5100 m², pero habrá que restar el área de los obstáculos, ya que ahí no se podrá situar gente. En este caso el área total de los obstáculos es 474 m², que restado al área total del patio nos da 4626 m².

Suponiendo que en 1m² podían caber 3 personas hemos calculado el número máximo de personas mediante una regla de tres.

1 m² —— 3 personas
4626 m² —— x } x = 13878 personas

Esto se puede aplicar a cualquier patio tomando la medida total y la de sus obstáculos.



ÁREA DEL CÍRCULO TOTAL

0'5 m (radio del árbol) + 5'5 (mitad del espacio entre árboles) = 6 m

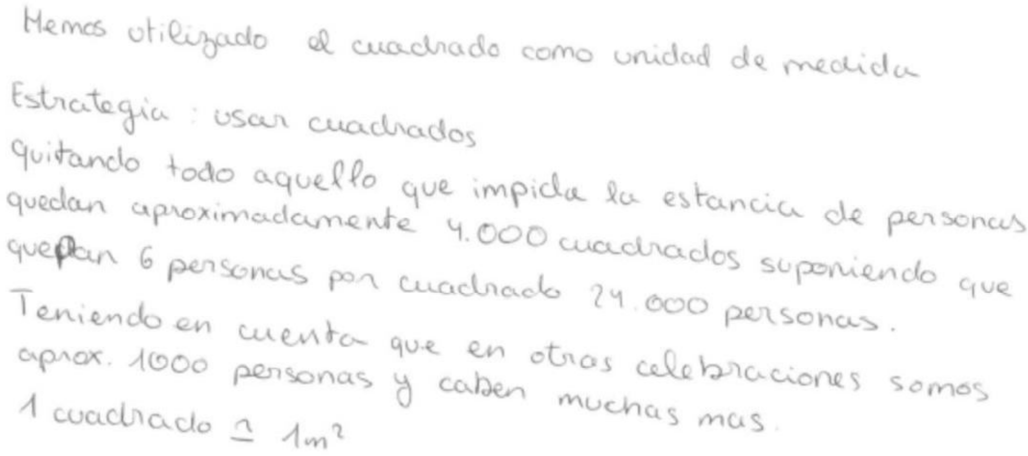
$A = \pi \cdot r^2$; $A = \pi \cdot 6^2$; $A = 113'09\ m^2$

NÚMERO DE ÁRBOLES

$N^o = \dfrac{3200000\ m^2 \text{ (área central park)}}{113'09\ m^2 \text{ (área del círculo total)}} = 28\ 296$ árboles.

Figura 1. Resoluciones a los problemas A y B realizadas por un mismo equipo del grupo E1

Encontramos también un equipo del grupo E1 que utiliza la densidad a través de unidades no estandarizadas: utilizan las baldosas del patio como unidad de área y suponen que en una baldosa caben 6 personas (véase Figura 2).



Hemos utilizado el cuadrado como unidad de medida

Estrategia: usar cuadrados

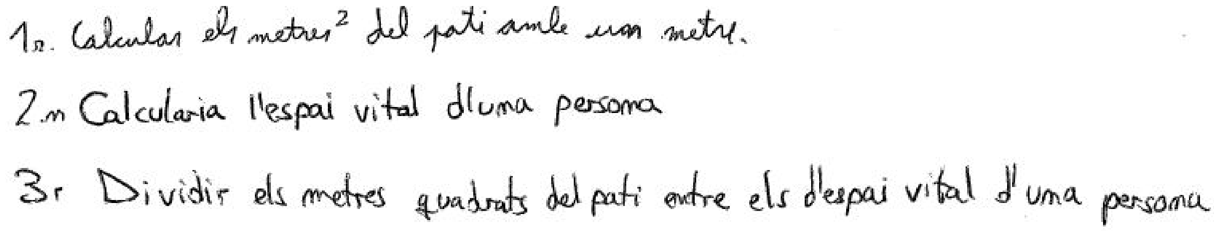
quitando todo aquello que impida la estancia de personas quedan aproximadamente 4.000 cuadrados suponiendo que quepan 6 personas por cuadrado 24.000 personas.

Teniendo en cuenta que en otras celebraciones somos aprox. 1000 personas y caben muchas mas.

1 cuadrado $\simeq 1 m^2$

Figura 2. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E1

Las resoluciones del grupo E1 al primer problema contrastan significativamente con las del grupo E2 ya que éstos usaron menos la noción de densidad en ambas tareas y solo dos equipos consideraron el espacio hábil (comparar Figura 1 y Figura 3).



1r. Calcular els metres² del pati amb un metre.

2.n Calcularia l'espai vital d'una persona

3r Dividir els metres quadrats del pati entre els d'espai vital d'una persona

Figura 3. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E2

Respecto a los **procedimientos,** los más utilizados son los de cálculo de áreas. Estos pueden realizarse a partir de mediciones (experimentales in situ o mediante herramientas digitales como google maps), a partir de descomposiciones en figuras geométricas simples para usar después fórmulas conocidas, las estimaciones -como estimar el área de una baldosa o la proporción de área inhábil-, y las operaciones aritméticas necesarias para transformar los datos recogidos en resultados. Las mediciones in situ aparecen solo en la resolución del problema A pero es interesante apreciar las diferencias entre las resoluciones de ambos grupos: todos los equipos del grupo E1 realizan sus mediciones con metro salvo uno de ellos que averigua el área a partir del recuento de baldosas (Figura 2). Sin embargo, en el grupo E2 encontramos dos ejemplos de procedimientos alternativos:

uno de los equipos obvia el cálculo del área ya que distribuyen a los asistentes en la vertical y en la horizontal del patio y otro propone aproximar el área del patio usando sus pasos.

En el problema B el cálculo del área se realiza en todos los casos a partir de mediciones realizadas con las herramientas de Google Earth. En la resolución de este problema encontramos procedimientos distintos para hallar el área de la zona arbolada: mientras que algunos equipos calculan el área no ocupada por árboles (Figura 6), otros hacen estimaciones como la que observamos en la Figura 4.

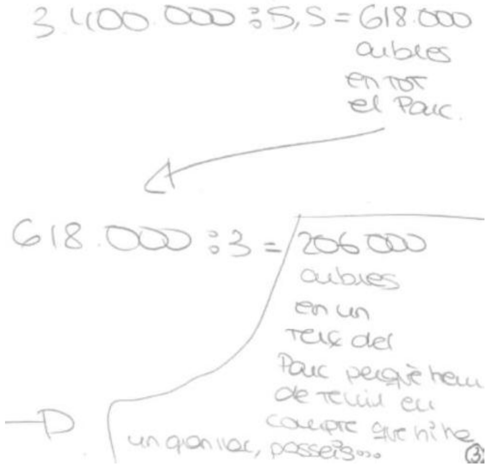


Figura. 4. Resolución del problema B hecha por un equipo del grupo E2

Hemos encontrado diferencias en los procedimientos aritméticos utilizados por equipos con sistemas conceptuales equivalentes. En concreto, algunos de los alumnos que razonan a partir de la densidad hallan el número de personas (problema A) o de árboles (problema B) multiplicando ésta por el área útil (Figura 5).

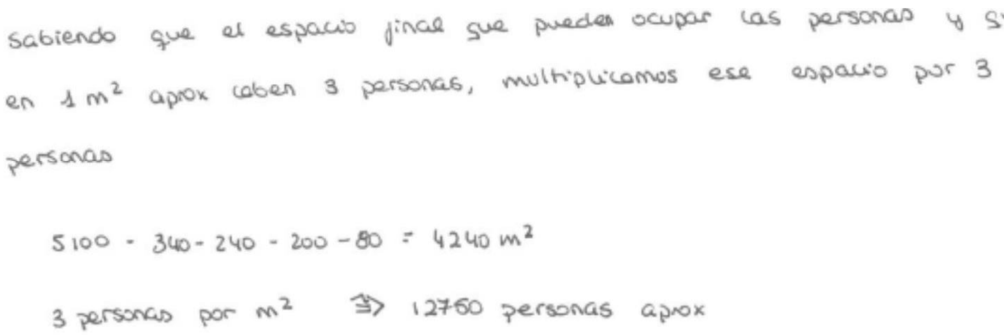


Figura 5. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E1

Este procedimiento es utilizado por 4 de los 7 equipos del grupo E1 en el problema A pero sólo lo utilizan 2 de los 6 equipos del grupo E2. Otro procedimiento para hallar el número total partir de la densidad es el uso de reglas de tres o el razonamiento a partir de la equivalencia de fracciones, ambos son minoritarios en el problema A (sólo un equipo del grupo E1, Figura 1) y aparecen en 3 resoluciones del problema B (Figura 6).

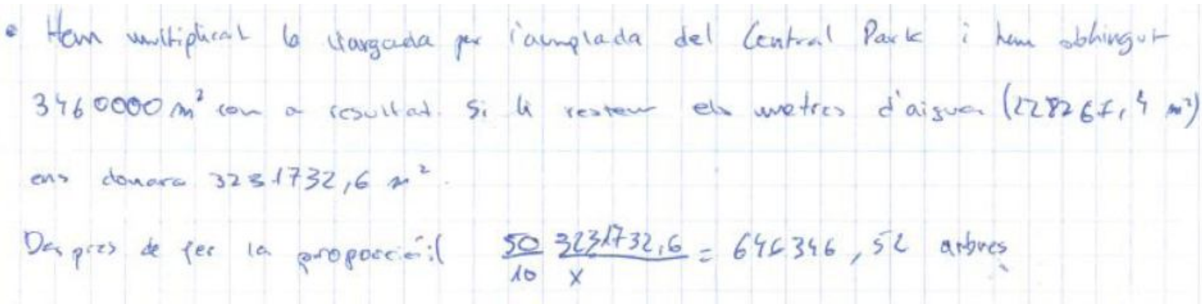


Figura 6. Resolución al problema B realizada por un equipo del grupo E2

Los alumnos que utilizan sistemas conceptuales relativos a iteraciones de la unidad razonan a partir de área ocupada por una persona o por un árbol y obtienen la cantidad total dividiendo el área del recinto por el área de la unidad (Figura 3).

Al fijarnos en los **lenguajes** utilizados por unos y otros en los dos problemas observamos las diferencias más importantes entre ambos grupos: algunos alumnos del grupo E1 (que, recordemos, ya tenían experiencia en la resolución de problemas de modelización) usan notación pre-algebraica que les permite obtener fórmulas que pueden ser generalizables (2 de los 7 equipos del grupo E1 en el problema A, Figura 8). Sin embargo, en el grupo E2 no encontramos lenguaje pre-algebraico de este tipo (aunque sí usan lenguaje algebraico para razonar, por ejemplo, a través de la equivalencia de fracciones, como en la Figura 6).

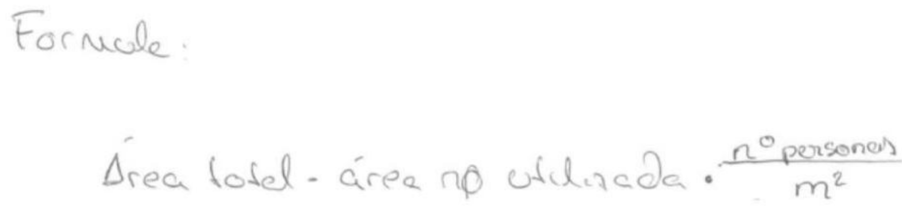


Figura 8. Resolución al problema A realizada por un equipo del grupo E1

El lenguaje literal es utilizado por todos los equipos en las resoluciones de ambos problemas pero se utiliza de forma exclusiva en 5 de las 12 resoluciones del problema B mientras que sólo uno de los equipos del grupo E1 resuelve el problema A usando únicamente lenguaje literal (véase Figura 2). En el resto de resoluciones combinan el lenguaje literal con el aritmético y, en algunos casos, con el gráfico.

La Tabla 4 muestra el tipo de lenguajes detectados para cada problema. Los números indicados con asterisco en esta tabla corresponden a un uso del lenguaje algebraico que no permite generalizaciones.

Tabla 4. Resumen de los lenguajes utilizados en las resoluciones

	Literal (exclusivo)		Uso de gráficos		Lenguaje aritmético		Lenguaje (pre-) algebraico	
	E1	E2	E1	E2	E1	E2	E1	E2
A	1	0	3	2	4	6	2	0
B	4	1	2	0	3	4	2*	2*

Se observan dos tipos de gráficos en las resoluciones: los que sirven solo para recoger los datos de mediciones –con distintos niveles de detalle– (Figura 9a) y los que ayudan a entender cómo se está midiendo (Figura 9b) o calculando.

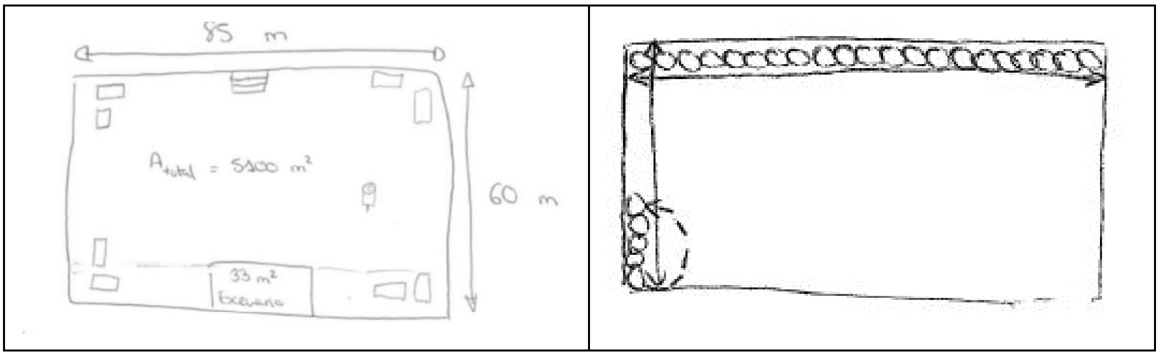


Figura 9. (a) Resolución al problema A realizado por un equipo del grupo E1, (b) Resolución al problema A realizado por un equipo del grupo E2

CONCLUSIONES

Tal y como se estudia en Gallart et al. (2015b) el ciclo de modelización proporciona una herramienta para evaluar la actuación de los estudiantes al enfrentarse a una tarea de modelización identificando las competencias que se activan en cada una de las fases durante el proceso de resolución. La herramienta de caracterización que aportamos en este estudio, elaborada a partir de la definición de modelo matemático de Lesh y Harel (2003) y basada en determinar los sistemas conceptuales, procedimientos y tipos de lenguaje usados por los alumnos, *complementa la anterior ya* que puede permitir al profesor evaluar los conceptos, procedimientos y lenguajes utilizados para resolver los PEGC, como ejemplo de tarea de modelización.

A partir del análisis realizado podemos observar que la resolución de los problemas de Fermi exige a los alumnos la elaboración de modelos que contienen un alto nivel de detalle. Consideramos que la herramienta presentada puede ser útil en otro tipo de actividades de modelización y que puede establecer un punto de partida para elaborar pautas de evaluación de modelos matemáticos producidos por los alumnos o para establecer una pauta para preparar la fase de anticipación de la actividad por parte del profesorado.

Al analizar la caracterización de los modelos matemáticos recogidos en nuestras experiencias de aula observamos diferencias que pueden relacionarse con el aprendizaje de los procesos de modelización. En estudios previos hemos analizado las propuestas de resolución de PEGC (Albarracín y Gorgorió, 2013; 2014). La herramienta propuesta en esta comunicación supone un paso más en la dirección de caracterizar, no solo las estrategias iniciales, sino los productos finales de la resolución. En concreto, el nivel de descripción alcanzado nos permite detectar diferencias que muestran que los alumnos con experiencia en modelización tienden a plantear modelos basados en conceptos más complejos, utilizando procesos de medida más rigurosos y lenguajes matemáticamente más elaborados, como son las representaciones algebraicas que permiten la generalización de los modelos. Observamos también que hay diferencias entre las resoluciones de ambos problemas en lo referente a los sistemas conceptuales utilizados, esto pude deberse a que el concepto de densidad es más natural al trabajar con una masa de personas que se desplazan que no con una masa estática de árboles. Aún así, consideramos que la herramienta propuesta tiene un margen de mejora, especialmente en lo referido a los gráficos y lenguajes utilizados y que las producciones gráficas de los alumnos merecen una visión más concreta de la que hemos desarrollado en este estudio.

Agradecimientos

Este artículo es fruto de una investigación llevada a cabo en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-35638 y EDU2013-4683-R que han recibido soporte económico del Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME), 16*(3), 289–315.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79–96.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Blum, W. (2003). Icme study 14: Applications and modelling in mathematics education—discussion document. *Educational studies in mathematics, 51,* 149–171.

Blum, W. y Borromeo Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95.

Efthimiou, C. J. y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education, 42*(3), 253–261.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L. M. (2015a). El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria. *SUMA,* en prensa.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L. M. (2015b). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números, 88,* 93-103.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2), 157–189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V)*. Paris, Francia: OECD Publishing.

Presmeg, N. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. En L. D. English, (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp. 267–279). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida.* Madrid, España: Síntesis.

Wessels, H. M. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(9), 22–40.

LA APREHENSIÓN COGNITIVA EN PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES LINEALES

Cognitive apprehension in linear pattern generalization problems

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo del estudio es examinar qué tipo de aprehensiones cognitivas utilizan alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal. 81 alumnos de 5º y 6º curso resolvieron dos problemas de generalización lineal que diferían en la configuración de la sucesión de figuras dadas (mesas cuadradas o mesas en forma de trapecio). Los resultados indican que la configuración de la sucesión de figuras condiciona el tipo de aprehensión utilizada por los alumnos; en algunos casos tienen dificultades para cambiar de aprehensión.

Palabras clave: *Generalización de patrones, aprehensión cognitiva, patrones lineales, estudiantes de primaria*

Abstract

The aim of this study is to examine the type of cognitive apprehension that primary school students use when solving linear generalization problems. 81 primary school students solved two linear generalization problems which differed on the configuration of the succession of figures provided (squared tables or trapeze-shaped tables). Results showed that the configuration of the succession of figures provided influences the type of apprehension used by students showing, in some cases, difficulties for changing the apprehension.

Keywords: *Pattern generalization, cognitive apprehension, linear patterns, primary school students*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, un objetivo importante de la investigación ha sido proporcionar información sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza. Esta línea de investigación denominada "Álgebra temprana", considera que el pensamiento algebraico debe tener un lugar en el currículum de Educación Primaria (Cai y Knuth, 2011; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Socas, 2011; Vergel, 2015) y propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas tratando de que haya una continuidad entre ambas.

La generalización de patrones es uno de los contextos en los que es posible empezar a desarrollar formas de pensamiento algebraico en la Educación Primaria. Investigaciones recientes han mostrado que los estudiantes de los primeros cursos son capaces de comprender algunos aspectos de la generalización de patrones antes de ser introducidos el álgebra formal (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011; Rivera y Becker, 2011; Vergel, 2015). Estos estudios muestran la importancia de centrar la atención de los estudiantes de los primeros niveles en comprender patrones, relaciones funcionales, y usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones entre cantidades.

Una propuesta en esta línea es trabajar con problemas de generalización de patrones lineales con figuras (Radford, 2011), donde se pide a los alumnos describir y extender la sucesión y predecir

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

términos lejanos. En este contexto el objetivo de este trabajo es identificar los tipos de aprehensiones cognitivas que utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras.

PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Zapatera y Callejo (2011) definen los problemas de identificación de patrones lineales como:

> "aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos f(1), f(2), f(3),… de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular f(n) para n "pequeño" y para n "grande" y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín" (p. 600)

En estos problemas Stacey (1989) distingue dos tipos de cuestiones: las que piden la búsqueda del siguiente término u otro término al cual se pueda llegar mediante recuento, una tabla o un dibujo (generalización cercana); y las cuestiones en que los procedimientos anteriores resultan laboriosos y es necesario la identificación de un patrón o regla general (generalización lejana). Se han identificado tres tipos de estrategias de estudiantes en la resolución de problemas de generalización lineal (Stacey, 1989): 1) estrategia recursiva, donde el estudiante observa que cada término aumenta con una diferencia constante y calcula un término apoyándose en el anterior; 2) estrategia funcional, en la que el estudiante identifica la relación funcional entre la posición (término) y el número de elementos que lo componen siendo capaz de hallar un término específico –generalización local– o un término cualquiera –generalización global–; 3) razonamiento proporcional, donde el estudiante utiliza multiplicaciones o reglas de tres, a veces de forma errónea, para hallar un término. También se ha identificado el uso de una representación gráfica, reproduciendo el término que se pide y contando sus elementos (Radford, 2011; Zapatera y Callejo, 2011).

En unos casos los estudiantes responden a las cuestiones de generalización lejana haciendo consideraciones de tipo numérico, por ejemplo elaborando una tabla y observando regularidades, mientras que en otros casos responden apoyándose en las figuras. La segunda forma de proceder implica un proceso de visualización denominado *aprehensión cognitiva*.

FORMAS DE APREHENSIÓN COGNITIVA

La acción de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una *aprehensión cognitiva*. Esta acción no es unívoca, pues hay diferentes formas de "ver" un dibujo o de interpretar un estímulo visual. Duval (1993) distingue cuatro formas de aprehensión cognitiva (Figura 1):

- *Aprehensión perceptiva*. Se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. En esta forma de aprehensión se pueden percibir varias sub-configuraciones. Por ejemplo la configuración mostrada en la Figura 1 se puede ver como cuadrados consecutivos rodeados de arcos de circunferencia, como la decoración de un mantel, etc.

- *Aprehensión secuencial*. Se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas. Por ejemplo en la Figura 1 la aprehensión secuencial puede emerger de reconocer que la construcción (mental o física) del término siguiente requiere introducir un cuadrado y dos arcos.

- *Aprehensión discursiva*. Se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades…) que determinan el objeto representado. Por ejemplo a la configuración De la Figura 1 se le puede asociar la expresión "4 cuadrados están rodeados de 2 x 4 arcos arriba y abajo, más 2 arcos en los extremos, en total 10 arcos."

- *Aprehensión operativa*. Se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos. Por ejemplo podemos modificar la configuración inicial de la Figura 1, separando un cuadrado del extremo izquierdo y los arcos que lo rodean, y añadiéndole un arco del extremo derecho.

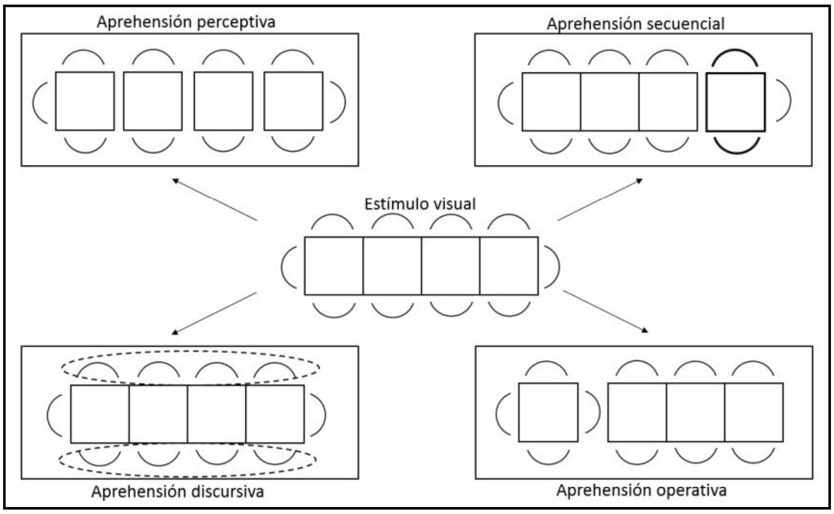


Figura 1. Ejemplos de aprehensiones. Adaptado de Samson y Schäfer (2011, p. 39)

En el contexto de los problemas de generalización lineal, cuando el resolutor se apoya en las figuras para responder a las cuestiones, podemos asociar las estrategias antes expuestas a distintas formas de aprehensión cognitiva:

- El uso de una representación gráfica se apoya en una aprehensión perceptiva, pues el resolutor se limita a identificar la configuración presentada y a reproducir la que se pide, sin asociarle explícitamente afirmación matemática alguna.
- La estrategia recursiva se apoya en la aprehensión secuencial, pues el resolutor identifica un orden en la sucesión de figuras y el patrón de crecimiento; se apoya en un término para construir el siguiente.
- La estrategia funcional se apoya en aprehensión discursiva o en la operativa, pues el resolutor asocia las configuraciones a expresiones matemáticas para identificar el número de elementos de términos específicos o del término general. Si descompone la figura en partes se apoya en una aprehensión discursiva, y si la transforma en una aprehensión operativa.

En general, los estudiantes que utilizan la estrategia proporcional no suelen apoyarse en la figura, sino que identifican una regularidad, la relación de proporcionalidad, que no siempre es correcta.

Tomando estudios previos y la importancia de analizar características del pensamiento algebraico de los alumnos de Educación Primaria en problemas de generalización lineal, nos preguntamos: ¿Qué tipo de aprehensiones utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras?

MÉTODOS

Participaron 81 alumnos de educación primaria (35 de quinto curso y 46 de sexto), quienes no habían recibido formación explícita sobre resolución de problemas de generalización lineal.

Para la recogida de datos, diseñamos un cuestionario con dos problemas de generalización lineal. En el primero se presenta una sucesión de figuras formadas por mesas cuadradas alineadas (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008); el segundo es una variante del primero con una sucesión de figuras formadas por mesas en forma de trapecio (Figura 2). En ambos casos se muestran los tres primeros términos de una sucesión de forma gráfica y se plantean cinco cuestiones: las cuestiones 1 y 2 corresponden a la generalización cercana, la 3 a la generalización lejana, la 4 a la inversión y la 5 a la regla general.

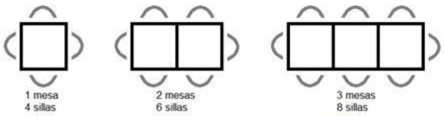
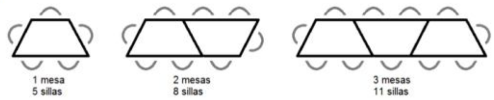
Problema 1. Mesas cuadradas	Problema 2. Mesas en forma de trapecio
Actividad 1: En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos.  1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas? 2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas? 3. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado. 4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado. 5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.	**Actividad 2:** Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. Como puedes ver, alrededor de una mesa hemos colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 11 sillas.  1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas? 2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas? 3. En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado. 4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 56 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado. 5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Figura 2. Problemas propuestos

Para responder las cuestiones 2 a 5 de estas tareas se puede centrar la atención en el patrón de crecimiento cuantitativo (por cada mesa que se añade el número de sillas aumenta en 2 o en 3) estableciendo así una relación recursiva (aprehensión secuencial), o apoyarse en la aprehensión discursiva u operativa de las figuras, para expresar una relación funcional que relaciona el número de mesas con el de sillas. En este último caso se pueden percibir diferentes sub-configuraciones en la disposición de las sillas, como los ejemplos que se muestran en la Figura 3 para el problema 1.

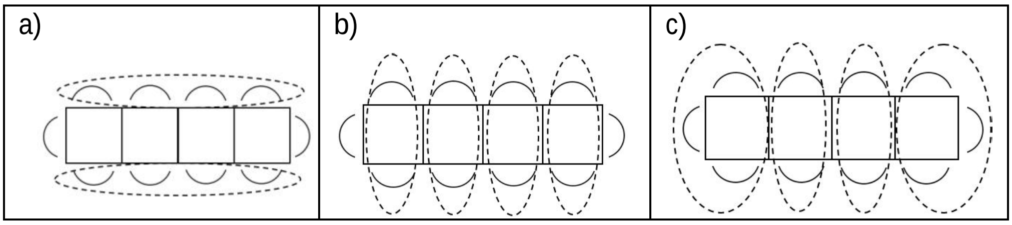


Figura 3. Sub-configuraciones posibles en el problema 1 como apoyo a una aprehensión discursiva

Esto conduce a una asociación de las sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas o aprehensión discursiva, del siguiente modo: (a) “en la fila de arriba hay tantas sillas como mesas, en la fila de abajo hay tantas sillas como mesas y hay 2 sillas en los extremos”, (n+n+2); (b) “cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos” (2n+2); (c) “cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas” (2(n-2) + 2x3).

En el problema 2 si el número de mesas es par hay el mismo número de sillas en la fila de arriba que en la de abajo, pero si el número de mesas es impar hay una silla más en una de las filas. Además la relación entre el número de mesas y de sillas en cada caso no es tan fácil de establecer como en el problema 1. Por ello las sub-configuraciones que conducen más directamente a una aprehensión discursiva no se apoyan en las filas de arriba y de abajo, sino el número de sillas que rodean cada mesa (ejemplos de la Figura 4).

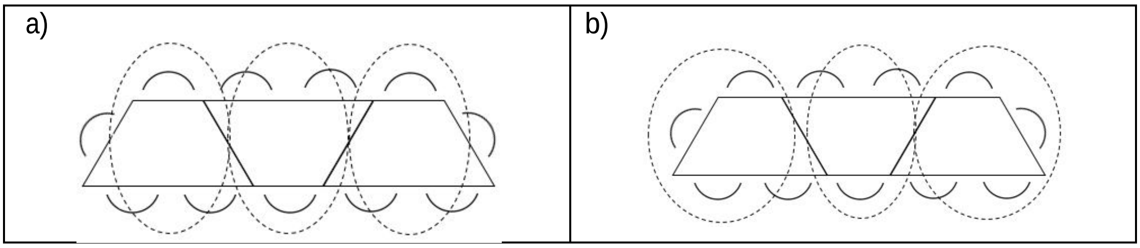


Figura 4. Sub-configuraciones posibles en el Problema 2 propias de la aprehensión discursiva

En el primer caso (a) “cada mesa tiene 3 sillas arriba o abajo y hay 2 en los extremos” (3n+2); en el segundo (b) “cada mesa tiene 3 sillas, menos las de los extremos que tienen 4 sillas” (3(n-2) + 2x4).

El objetivo de introducir configuraciones distintas en la sucesión de figuras (cuadrado y trapecio) era ver el modo de proceder de los alumnos cuando la sub-configuración utilizada como apoyo de la aprehensión discursiva en el problema 1 (filas de arriba, filas de abajo y extremos) no era útil en el problema 2.

En esta comunicación se presentan resultados del análisis de la cuestión de generalización lejana (cuestión 3). El análisis se realizó en dos fases: en la primera se identificaron los niveles de éxito de los estudiantes en dicha cuestión en los dos problemas y en la segunda identificamos las estrategias utilizadas por los estudiantes para la resolución de cada uno de los problemas en relación a las aprehensiones cognitivas (perceptiva, secuencial, discursiva y operativa).

RESULTADOS

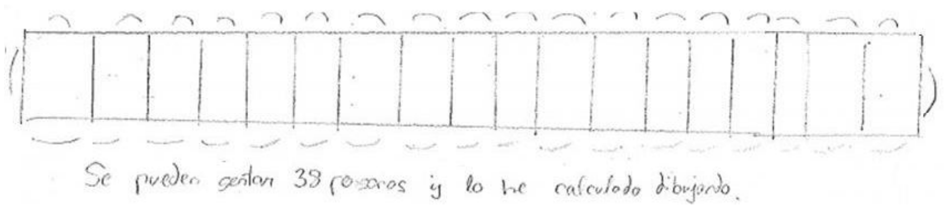
Los niveles de éxito en la cuestión de generalización lejana en el problema 1 han sido mayores que en el problema 2 tanto en 5º (51.43% y 31.43%, respectivamente) como en 6º curso (73.91% y 43.48%, respectivamente).

Identificamos cinco grupos de estrategias: el uso de una representación gráfica, la estrategia recursiva, la funcional, la proporcional y otras. La representación gráfica (aprehensión perceptiva) ha sido menos utilizada en el problema 2 que en el problema 1 tanto en 5º como en 6º curso (Tabla 1). La estrategia recursiva (aprehensión secuencial) la han utilizado solo unos pocos estudiantes de 6º curso. Respecto a la estrategia funcional (aprehensión operativa – discursiva) su uso se incrementa en 6º curso y en el problema 2. Por último la estrategia proporcional, incorrecta en todos los casos, se ha utilizado más en el problema 2 que en el 1 y más en 5º que en 6º curso. Estos datos indican que algunos estudiantes han cambiado de estrategia en función del problema lo que muestra que estos estudiantes han sido flexibles en el uso de estrategias.

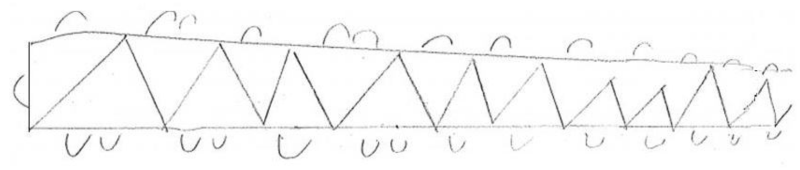
Tabla 1. Estrategias y aprehensiones utilizadas en la generalización lejana

Aprehensiones/ Estrategias en generalización lejana	**5º Problema 1 (N=35)**	**5º Problema 2 (N=35)**	**6º Problema 1 (N=46)**	**6º Problema 2 (N=46)**
Perceptiva/ Representación gráfica	45,71%	28,57%	45,65%	26,09%
Secuencial /Recursiva	0,00%	0,00%	2,17%	4,35%
Operativa-Discursiva/Funcional	28,57%	31,43%	34,78%	43,48%
Proporcional	14,29%	22,86%	13,04%	17,38%
Otras	11,43%	17,14%	4,36%	8,70%

Estudiantes, tanto de 5º como de 6º curso, que se apoyaron en una aprehensión perceptiva en el problema 1 cambiaron de estrategia para responder a la misma cuestión en el problema 2 (Tabla 1), ante la dificultad que suponía para ellos utilizarla en este último problema. Esta dificultad se observa en la Figura 5 que muestra la respuesta de un estudiante de 5º curso que empleó la representación gráfica sin éxito en el problema 2.



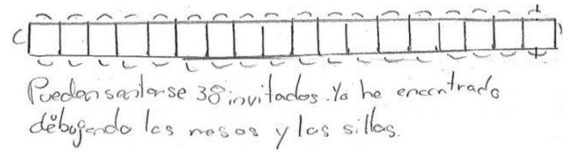
Respuesta Problema 1



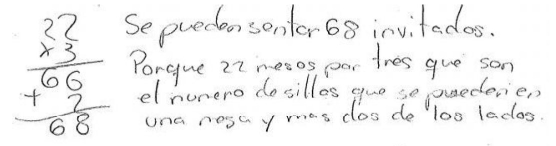
Respuesta Problema 2

Figura 5. Alumno de 5º que continuó apoyándose en una aprehensión perceptiva en el problema 2 sin éxito

Hubo estudiantes que en el problema 1 se apoyaron en una aprehensión perceptiva y en el problema 2 en una aprehensión discursiva (Figura 6), (Tabla 1) o en una aprehensión secuencial (Figura 7).

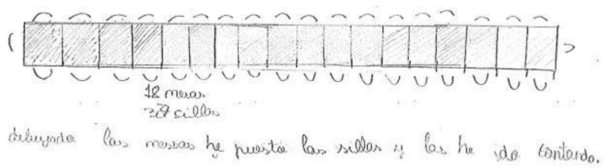


Respuesta Problema 1

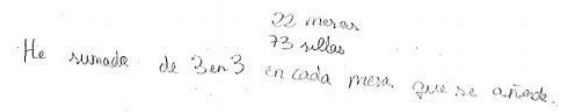


Respuesta Problema 2

Figura 6. Estudiante de 5º curso que cambió de apoyarse en una aprehensión perceptiva (problema 1) a una discursiva (problema 2)



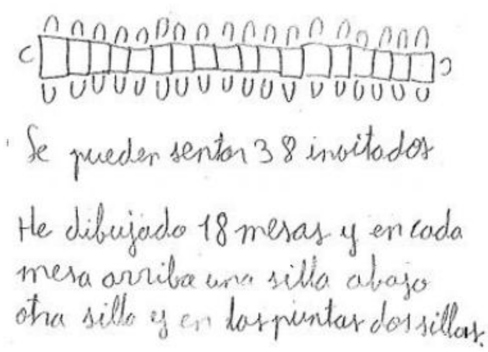
Respuesta Problema 1



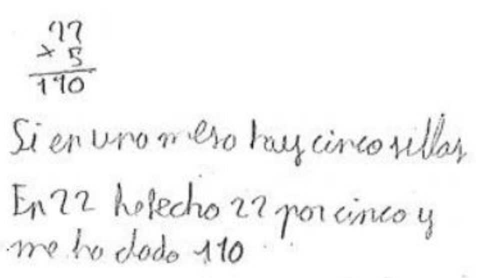
Respuesta Problema 2

Figura 7. Alumno de 6º que pasó de apoyarse en una aprehensión perceptiva a una secuencial

Sin embargo, otros cambiaron de apoyarse en una aprehensión perceptiva a identificar una relación de proporcionalidad, o a otras estrategias sin sentido en el problema 2. Así la Figura 8 muestra un estudiante de 5º curso que cambió de una representación gráfica a una estrategia proporcional.



Respuesta Problema 1



Respuesta Problema 2

Figura 8. Alumno de 5º que pasó de apoyarse en una aprehensión perceptiva a una estrategia proporcional

Estos datos evidencian que algunos estudiantes han cambiado de aprehensión para responder al mismo tipo de cuestión en una situación diferente, pasando de apoyarse en una aprehensión perceptual a una aprehensión discursiva. Pero los resultados muestran también que no siempre eligieron la estrategia correcta, por ejemplo los que cambiaron a una estrategia proporcional.

Por último, la mayoría de los estudiantes que habían utilizado una estrategia funcional en el problema 1 apoyada en algunas de las sub-configuraciones de la aprehensión discursiva u operativa, continuaron usando esta estrategia y el mismo tipo de subconfiguración en el problema, 2. Sin embargo, los que en el primer problema se apoyaron en la subconfiguración "fila de arriba, fila de abajo y 2 sillas de los extremos" (Figura 3.a) tuvieron dificultad para adaptarla en el problema 2.

Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional apoyada en la subconfiguración: "cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos", se apoyaron en la misma subconfiguración en el problema 2, como el estudiante de la Figura 9.

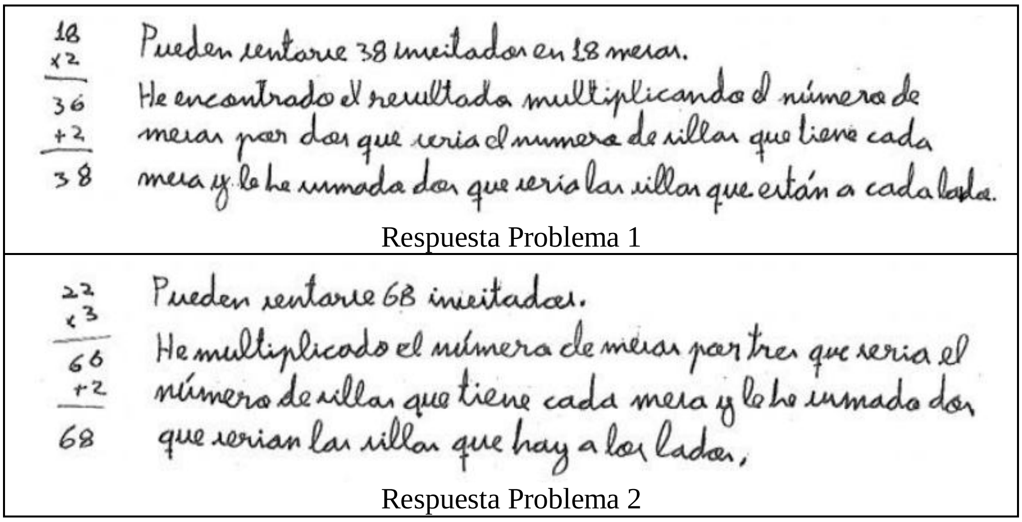


Figura 9. Alumno de 5º que adaptó la sub-configuración de la aprehensión discursiva en el problema 1 "cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos" al problema 2

Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional basada en la sub-configuración: "cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas" también se apoyaron en la misma sub-configuración en el problema 2, como el estudiante de la Figura 10.

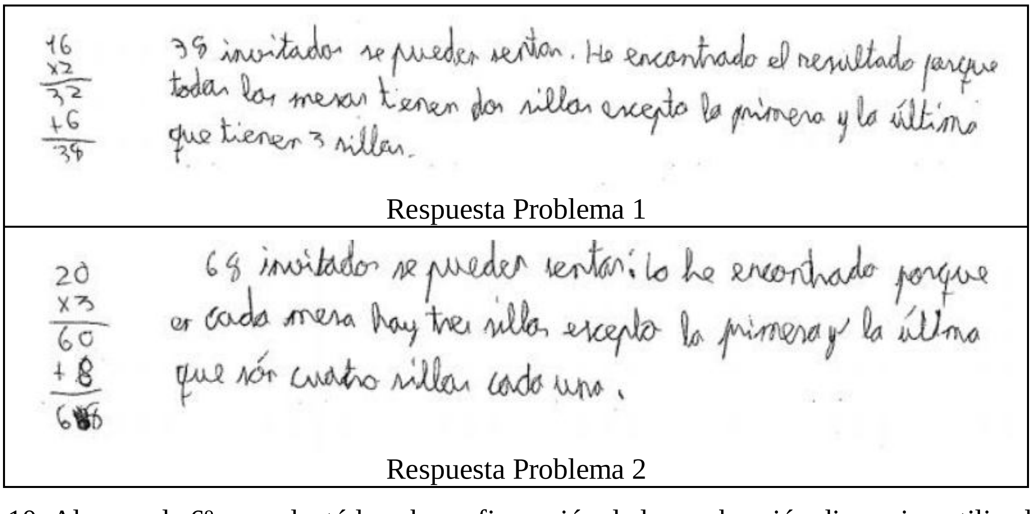
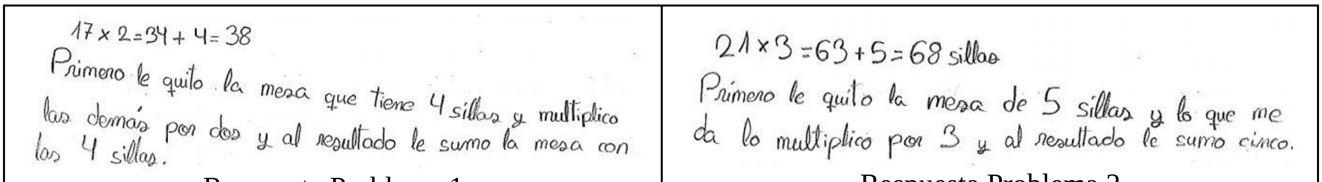


Figura 10. Alumno de 6º que adaptó la sub-configuración de la aprehensión discursiva utilizada en el problema 1 "cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas" al problema 2

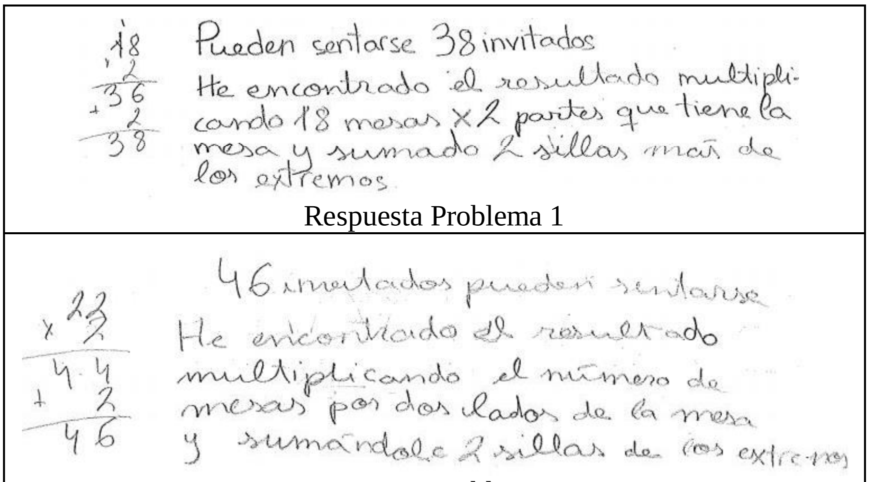
Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional basada en considerar “todas las mesas menos 1 con 2 sillas y una mesa de 4 sillas” (aprehensión operativa), también se apoyaron en esta subconfiguración problema 2, como el estudiante de la Figura 11.



Respuesta Problema 1 | Respuesta Problema 2

Figura 11. Alumno de 6º que adaptó la aprehensión discursiva utilizada en el problema 1 apoyada en la subconfiguración “una mesa menos con 2 sillas y una mesa de 4 sillas” al problema 2

Algunos estudiantes que en el problema 1 se apoyaron en la sub-configuración “fila de arriba, fila de abajo y 2 sillas de los extremos” no tuvieron éxito en el problema 2, como el ejemplo del estudiante de la Figura 12.

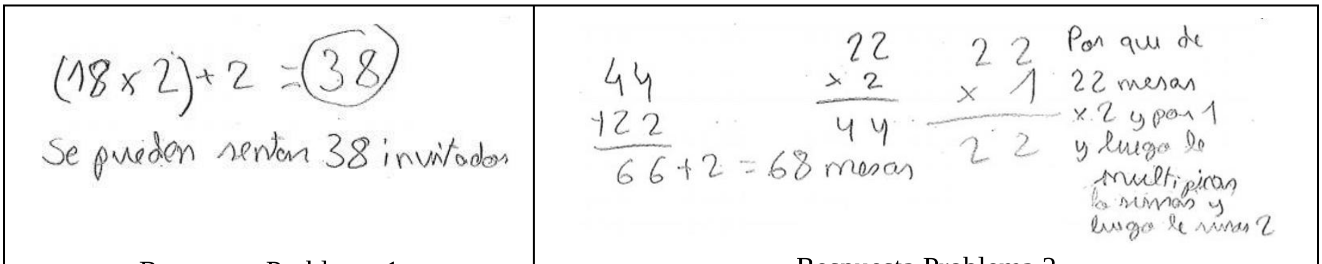


Respuesta Problema 1

Respuesta Problema 2

Figura 12. Alumno de 6º con dificultades en adaptar la sub-configuración de la aprehensión discursiva

Pero algunos estudiantes que utilizaron esta última subconfiguración en el problema 1 fueron capaces de adaptarla al problema 2 (Figura 13).



Respuesta Problema 1 | Respuesta Problema 2

Figura 13. Alumno de 6º que adaptó la sub-configuración “fila de arriba, fila de abajo y sillas en los extremos” al problema 2

Los alumnos tienden a apoyarse en las sub-configuraciones utilizadas en la resolución del problema 1 para resolver el 2. Algunas se aplicaban fácilmente en ambos problemas (configuraciones *b* y *c* del problema 1 -Figura 3- que se corresponden con la *a* y *b* del problema 2 -Figura 4) y otras no (configuración *a* del problema 1); en este último caso hubo quienes modificaron la idea de sumar las sillas de las filas de arriba y de abajo para emplearla en el problema 2 (Figura 13).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestra pregunta de investigación es: ¿Qué tipo de aprehensiones utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras? Los resultados muestran que la configuración de la sucesión de figuras ha condicionado el tipo de aprehensión utilizado por los alumnos. En el problema 1 usaron preferentemente la aprehensión perceptual, ya que la estrategia más común fue la representación gráfica, y en el problema 2 la aprehensión discursiva o la operativa, ya que la estrategia más empleada fue la funcional. Esto pudo deberse a que era más fácil hacer un dibujo con mesas cuadradas que con mesas en forma de trapecio, donde la orientación de las mesas se alterna al formar las filas. Para salvar esta dificultad algunos alumnos cambiaron a una aprehensión discursiva o a una operativa, y otros a una aprehensión secuencial. Cuando cambiaron a una aprehensión discursiva u operativa se apoyaron en sub-configuraciones de un término específico de la sucesión, descomponiéndolo en partes o transformándolo. Cuando cambiaron a una aprehensión secuencial se apoyaron en cómo se construía el término siguiente de la sucesión. En estos casos los alumnos se han mostrado flexibles para cambiar de una aprehensión perceptual a otro tipo de aprehensión. En otros casos, al cambiar las configuraciones de las figuras de mesas cuadradas a mesas en forma de trapecio, adaptaron la sub-configuración en que se apoyaron en la aprehensión discursiva.

Sin embargo no todos los estudiantes tuvieron éxito en un cambio de aprehensión, es decir hubo estudiantes que no supieron apoyarse en un tipo de aprehensión que les condujera a una estrategia adecuada, como aquellos que utilizaron la estrategia proporcional.

Por último destacamos la importancia de que los profesores lleguen a conocer esta información como parte del conocimiento necesario para enseñar, concretamente para identificar los obstáculos de los estudiantes en el proceso de generalización y el papel que desempeña la flexibilidad para favorecer los cambios de aprehensión cognitiva.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Cai, J. y Knuth, E. (2011) (Ed.). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín: Springer-Verlag.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education, 40,* 3-22.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer-Verlag.

Duval, R. (1993). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and símbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F. D. y Becker, J.S. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323-366). Berlín: Springer-Verlag.

Samson, S. y Schäfer, M. (2011). Enactivism, figural apprehension and knowledge objectivation: An exploration of figural pattern generalization. *For the Learning of Mathematics, 31*(1), 37-43.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números 77,* 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164

Vergel, R. (2015). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO, 68*, 9-17.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). Ciudad Real: SEIEM.

MEDICIÓN INFORMAL DEL P-VALOR MEDIANTE SIMULACIÓN

Informal p-value through simulation

García, V. N. y Sánchez, E.

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

Existe un creciente reconocimiento de la importancia de desarrollar el razonamiento inferencial informal (RII) antes de aprender los conceptos formalmente. No obstante todavía hay poca investigación sobre su desarrollo en el aula en el nivel bachillerato (15-18 años). En situaciones informales, la principal dificultad es medir el p-valor de un estadístico, debido que no se tiene la noción de distribución muestral de forma natural. En el presente estudio se analiza el razonamiento de estudiantes de bachillerato para medir el p-valor de un estadístico al usar una aplicación dinámica que crea una distribución muestral empírica mediante la simulación computarizada. Se encuentra que la mayoría de los estudiantes miden el p-valor adecuadamente con ayuda de la simulación, lo que representa un cambio significativo en el RII.

Palabras clave: *Razonamiento inferencial informal, prueba de significación, distribución muestral, p-valor*

Abstract

There is growing recognition of the importance of developing the informal inferential reasoning (RII) before learning concepts formally. However there is still little research on its development in the classroom at the high school level (15-18 years). In informal situations, the main difficulty is to measure the p-value of a statistic because students don't have the sampling distribution concept naturally. Reasoning of high school students is analyzed while measuring the p-value using a dynamic applet that creates an empirical sampling distribution by computer simulation. It is found that most students measure the p-value properly when using simulation, which represents a significant change in the RII.

Keywords: *Informal inferential reasoning, significance test, sampling distribution, p-value*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, las personas se ven en la necesidad de saber interpretar y comprender información sobre una gran diversidad de temas para tomar decisiones. Los medios de comunicación generalmente contienen información numérica, ya sea en forma de tablas, diagramas o gráficas. El estudio de la estadística proporciona a las personas las herramientas y las ideas para enfrentarse inteligentemente a la información numérica que emerge del mundo cotidiano (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Dentro de la estadística, la herramienta principal es la inferencia estadística, pues capacita para leer, entender e interpretar de manera objetiva las conclusiones derivadas de los análisis de datos. La habilidad con el manejo de datos disponibles para observar más allá de ellos y hacer estimaciones acerca de un fenómeno o población desconocida es el corazón de la estadística (Makar, Bakker y Ben-Zvi, 2011).

De la literatura sobre la inferencia estadística formal (Castro-Sotos, Vanhoof, Van den Noorgate y Onghena, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008) se concluye que la inferencia es un tema difícil de aprender, los resultados de muchos estudios empíricos informan que estudiantes, profesores e

García, V. N. y Sánchez, E. (2015). Medición informal del p-valor mediante simulación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 289-297). Alicante: SEIEM.

incluso profesionales persistentemente cometen errores conceptuales. Una de las razones puede provenir del hecho de que el tratamiento de la inferencia en los cursos de estadística del bachillerato y primer curso universitario, se enfoca hacia el aprendizaje de procedimientos rutinarios (recetas) y/o la reproducción de la exposición formal y no ofrece a los estudiantes la oportunidad de discutir y entender las ideas fundamentales subyacentes en los procedimientos inferenciales antes de formalizarlas con los conceptos matemáticos correspondientes.

Esto ha motivado el interés por estudiar la Inferencia Estadística Informal (IEI) y el Razonamiento Inferencial Informal (RII) como lo confirma la publicación de un número especial de *Statistics Education Research Journal* (Pratt y Ainley, 2008) y *Mathematical Thinking and Learning* (Makar y Ben-Zvi, 2011), con los objetivos de: 1) descubrir y describir formas en que sea posible que los estudiantes desarrollen ideas fundamentales de la inferencia estadística sin utilizar el aparato matemático que las fundamenta, y 2) crear un repertorio de problemas y actividades que jueguen un papel de antecedente o sustrato en el aprendizaje de los estudiantes sobre el cual puedan construir los conocimientos formales de la inferencia estadística. Investigadores han visto a la tecnología, en particular las simulaciones como una opción idónea para llevar acabo los objetivos anteriores. Sin embargo, se han realizado pocos estudios para el nivel bachillerato (15-18 años).

Importantes dificultades que suelen tener los estudiantes para hacer inferencias informales se relacionan con su carencia de la idea de distribución muestral y, por tanto, de la imposibilidad de su uso en la inferencia estadística (por ejemplo, Chance, delMas y Garfield, 2004). Esta idea es empleada para medir el p-valor del estadístico (estadístico significativo o no), algo difícil de hacer de forma natural por los estudiantes ya sea por falta de percepción de la variación (García y Sánchez, 2015) o por falta de consideración de los datos (García-Ríos, 2013). El presente estudio pretende mostrar cómo el diseño de una aplicación dinámica e interactiva que simula una distribución muestral empírica tiene el potencial para desarrollar informalmente esta idea fundamental. Se espera que los resultados sirvan para elaborar una estrategia de enseñanza en temas de inferencia estadística enmarcados en el RII. La aplicación está creada en Fathom (Finzer, 2014); un software dinámico y animado creado especialmente para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Permite explorar libremente y creativamente ideas matemáticas y estadísticas. Diseñado para realizar tareas y procesos estadísticos como crear tablas, gráficas, obtener muestras, definir y calcular estadísticos y crear simulaciones animadas. Una característica importante es que un conjunto de datos se puede representar al mismo tiempo en una tabla y en una gráfica y al cambiar en alguna de ellas un dato, la otra representación se actualiza automáticamente, así como todas las funciones y procedimientos que hayan sido definidos con el conjunto inicial de datos.

El objetivo principal del estudio es analizar el razonamiento de estudiantes de bachillerato para medir el p-valor del estadístico de una muestra al usar una aplicación dinámica que crea una distribución muestral empírica mediante la simulación computarizada y determinar de qué forma contribuye la simulación a desarrollar el RII. Las preguntas de investigación que ayudaran a lograr el objetivo son: ¿Cuál es el razonamiento para hacer inferencias estadísticas informales con el uso de la simulación que llevan a cabo estudiantes de bachillerato? ¿Qué errores y dificultades persisten en el razonamiento para hacer inferencias estadísticas informales con el uso de la simulación?

ANTECEDENTES

Varios trabajos en los últimos años aluden a los conceptos de IEI y RII; sin embargo, todavía no hay consenso sobre qué significan estos términos. En un intento de combinar distintas perspectivas, Zieffler, Garfield, delMas y Reading (2008) definen RII como "la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas para sustentar las inferencias sobre la población desconocida" (p.44). Estos autores, también proponen un marco conceptual para caracterizar el RII y apoyar el desarrollo de tareas que permitan examinar el RII natural de los estudiantes, así como el desarrollo de tal razonamiento.

Las investigaciones sobre RII se pueden dividir en dos enfoques, a saber, una que contiene estudios sobre la naturaleza del RII y otra que incluye estudios que se refieren al desarrollo del RII. Se analizan trabajos con ambos enfoques, comenzando con los estudios de la naturaleza del RII.

En García-Ríos (2013) se informa que los estudiantes no pueden medir la significatividad del estadístico de la muestra adecuadamente, debido a dos posibles causas: a) Razonan de forma determinista al medir la significatividad del estadístico de la muestra, en el sentido de que el estadístico debe coincidir exactamente con el parámetro poblacional (personal). b) Comparan el estadístico con un modelo probabilístico inapropiado de la población (hipótesis nula), creado por el estudiante con base en sus conocimientos. Además, utilizan muchos prejuicios y creencias en sus argumentos y no reflejan grados de incertidumbre en sus inferencias. García y Sánchez (2014) han observado que la concepción de Fisher de las pruebas de significación es algo natural para los estudiantes, pues establecen una hipótesis nula (modelo personal de la población) para comparar la muestra y medir intuitivamente su significatividad (aunque de manera inapropiada). Consideran que es importante que los estudiantes trabajen con los datos y ubiquen en un segundo plano sus conocimientos informales personales sin descartarlos por completo. Se concluye que para desarrollar inferencias apropiadas antes de su formalización, es crucial que los estudiantes cuenten con un método informal para determinar un criterio numérico para saber cuándo rechazar o aceptar la hipótesis. La simulación es un recurso que suministra dicho método.

Con respecto a los estudios para desarrollar el RII, Rossman (2008) sugiere una introducción informal siguiendo los pasos siguientes: (a) Partir de una hipótesis dada acerca de los datos (b) Uso de la simulación para concluir que los datos observados son muy poco probables si el modelo fuera cierto (cálculo intuitivo de un p-valor), y (c) Rechazar la hipótesis inicial basado en el p-valor muy pequeño. Este proceso de razonamiento, parece natural para los estudiantes, y de hecho sigue la concepción de Fisher de pruebas de significación.

Pfannkuch (2005) considera que el enfoque de “re-muestreo” tiene el potencial de hacer una fuerte conexión entre la probabilidad y el análisis de datos, pues está más en sintonía con una conceptualización de un p-valor, y Fathom permite este enfoque. Hofmann, Maxara, Meyfarth y Prommel (2014) ven en Fathom un gran potencial didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la estadística con simulaciones. Ellos proponen que que para tener éxito en la enseñanza con Fathom es necesario diseñar tareas adecuadas, contar con fases de familiarización de la tarea, de presentación, de trabajo de los estudiantes y de discusión.

Lane y Pres (2006) muestran que incluso una simulación bien diseñada es poco probable que sea una herramienta de enseñanza eficaz a menos que la interacción de los estudiantes con ella se estructure cuidadosamente. Recomiendan evitar el uso de simulaciones que haga de los estudiantes observadores pasivos. Lipson, Kokonis, y Francis (2003) afirman que es necesario que en una actividad de simulación vaya acompañada de preguntas que garanticen que los estudiantes presten atención y entiendan todos los componentes de la pantalla, los quecambian y los que no durante el muestreo. Recomiendan alentar la formación del concepto de distribución muestral y facilitar la formación de enlaces de dicho concepto con los contrastes de hipótesis y la estimación.

MARCO CONCEPTUAL

En este trabajo, se entiende por marco conceptual a una red de conceptos o categorías relacionados entre sí que en conjunto proporcionan una comprensión global de un fenómeno o fenómenos (Jabareen, 2009). Es posible construir un marco conceptual a partir de los datos del estudio mediante la metodología teoría fundamentada (Birks y Mills, 2011).

Pruebas de significación

Dentro de la inferencia estadística hay dos concepciones sobre los contrastes de hipótesis: (a) las pruebas de significación, que fueron introducidas por Fisher y (b) los contrastes como reglas de decisión entre dos hipótesis, que fue la concepción de Neyman y Pearson. La enseñanza ignora estas diferencias y presenta los contrastes de hipótesis como si se tratase de una única metodología (Batanero, 2000). En el razonamiento de una prueba de significación de Fisher se mide la fuerza de la evidencia proporcionada por los datos observados en contra de una hipótesis llamada nula. Esta fuerza de la evidencia es capturado en el p-valor, que mide la probabilidad de haber obtenido los datos observados (o más extremos) si la hipótesis nula fuera verdadera. Se empleará esta concepción para introducir el contraste de hipótesis.

Razonamiento inferencial informal

La inferencia estadística informal (IEI) es una generalización probabilística de los patrones que son revelados por los datos disponibles, y esta generalización es el producto final de un razonamiento inferencial informal (RII) (Makar et al., 2011). Una IEI se representa mediante un enunciado, mientras que el RII es el proceso mediante el cual se descubren y establecen dichos enunciados. Es decir, la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos para hacer y sustentar inferencias estadísticas sobre una población desconocida basadas en muestras observadas y sin utilizar los métodos o técnicas formales de la estadística inferencial, como el uso de distribución muestral teórica, desviación estándar, puntuación estándar, etc.

La tecnología en la enseñanza de la estadística

La tecnología ha ampliado la gama de técnicas gráficas y de procedimientos para proporcionar nuevas y poderosas formas de ayudar a los estudiantes en el análisis de datos, lo que les permite centrarse en la interpretación de los resultados, en la comprensión y utilidad de conceptos e ideas estadísticas fundamentales, y no en la mecánica computacional. Erickson (2006) cree que los conceptos difíciles y el proceso del contraste de hipótesis se hacen más visibles y comprensibles al simular con Fathom, ya que la velocidad de la computadora hace que sea posible hacer muchos más ensayos y permite centrarse en la distribución muestral, ayudando a elevar el nivel de abstracción. Además, estudiante puede variar parámetros y describir y explicar el comportamiento que observan en lugar de confiar exclusivamente en las discusiones teóricas de probabilidad, pues estas, a menudo son contrarias a la intuición de los estudiantes (delMas, Garfield y Chance, 1999). El entorno visual, interactivo y dinámico de las aplicaciones ayuda a lograr estos objetivos (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007).

Sin embargo, la tecnología tiene un gran impacto sólo si se usa apropiadamente, por esta razón es importante enfocarse en buscar formas eficientes de usar la herramienta tecnológica en el salón de clase. Sugerencias para el uso de la herramienta es el empleo del aprendizaje colaborativo y facilitar la interacción y la accesibilidad a la tecnología, manteniendo el enfoque en los conceptos estadísticos en lugar de la herramienta (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar, 2013).

METODOLOGIA

El acopio de datos se llevó a cabo en una sesión mediante un problema de prueba de hipótesis de proporciones con cuatro preguntas, aplicado a 19 parejas de estudiantes de nivel bachillerato (16 y 17 años) en una escuela pública, los cuales no han llevado curso de estadística. Los estudiantes respondieron las preguntas en el ordenador con la posibilidad de usar la aplicación.

Antes de aplicar el problema se dio una sesión de introducción a la aplicación para explicar su funcionamiento con un problema introductorio (fase de familiarización y presentación). Además se contó con hojas de trabajo orientadas a los procesos y se trabajó en un aprendizaje cooperativo con 2 estudiantes por computadora. Esta sesión fue de una hora y la llevo a cabo uno de los autores de la comunicación. Después de la sesión introductoria se les presentó el problema y se dio un tiempo de una hora para responder las preguntas. Durante el cuestionario los estudiantes podían comentar sus dudas con el profesor (fase de trabajo con estudiantes) y discutir entre ellos.

El problema para la recogida de los datos contiene cuatro preguntas: “Propaganda de la Coca Cola presume que el 90% de la población de México prefiere su refresco que Pepsi. Para comprobarlo se les dieron dos vasos de refresco (uno con Coca y otro con Pepsi) a 200 personas escogidas al azar y decidían cuál le gustaba más. De los 200 participantes 188 personas prefirieron Coca Cola. ¿El resultado del experimento es suficiente para decir que el 90% de la población de México prefiere Coca cola? ¿Por qué? ¿Será posible que la conclusión sea incorrecta aun haciendo bien todo el proceso? ¿Por qué?”. En este trabajo presentamos resultados relativos a las dos primeras preguntas.

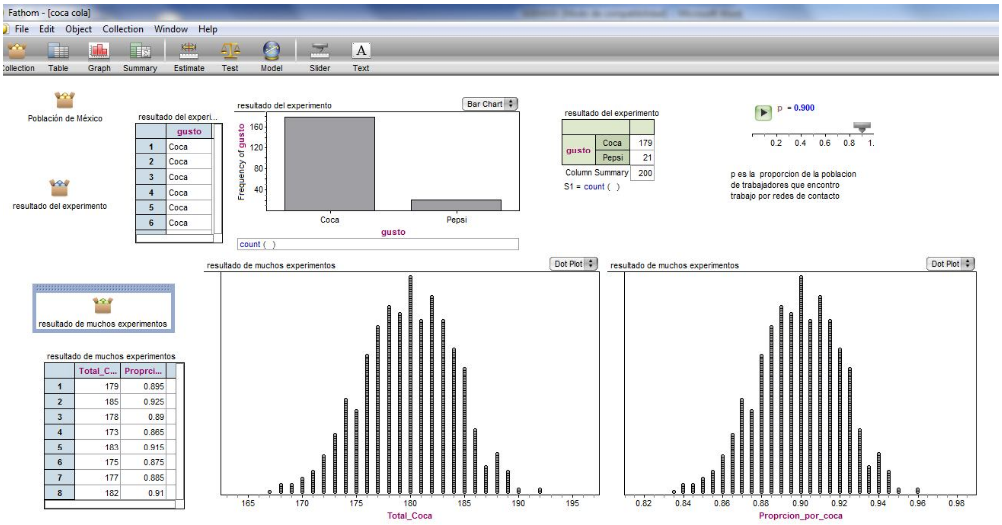


Figura1. Aplicación interactiva para la prueba de significación

La aplicación utilizada (Figura 1) simula encuestas de 200 personas tomadas de una población hipotética, en este caso el parámetro de la población era de 90%. El parámetro de la población hipotética es manejado por un deslizador, ayudando a los estudiantes a observar efectos al mover parámetros y con ello construir conceptos y justificar conclusiones. Las muestras de tamaño 200 se representan en una gráfica de barras y una tabla. La simulación es usada para generar una distribución muestral empírica y poder medir la probabilidad de los datos observados con el método frecuencial (empírico), esto es, el cálculo informal de un p-valor mediante frecuencias (Rossman, 2008). La distribución muestral se exhibe en una tabla y en dos gráficas de puntos, tanto en valores absolutos como en proporciones.

El diseño de la aplicación pretende ser accesible y facilitar la interacción con los estudiantes, tratando de mantenerlos enfocados en los conceptos estadísticos, sin que la elaboración de la herramienta (aplicación) los perturbe. La animación hace que el estudiante observe todo el proceso de re-muestreo simultáneamente, a saber: obtener una muestra, obtener el valor del estadístico de la muestra y graficar.

RESULTADOS

Ante la pregunta, ¿El resultado del experimento es suficiente para decir que el 90% de la población de México prefiere Coca Cola?, primero debe surgir la pregunta de si 188 de 200 bajo la hipótesis de p = 0.9 es un resultado plausible o raro. Luego se debe inspeccionar en la distribución muestral empírica la posición 188 y ver que tantos valores (considerando sus frecuencias) de la distribución están por arriba de ese valor. Debe calcularse la frecuencia relativa acumulada de los valores que están por arriba de 188 (p-valor) y compararlo con 0.05. Si el resultado es menor o igual a este valor (resultado raro) se rechaza la hipótesis; si es mayor (resultado normal) no se rechaza.

La metodología teoría fundamentada (Birks y Mills, 2011) establece que es posible elaborar categorías con base en los datos que se recopilan y analizan sistemáticamente y exhaustivamente a través de una variedad de estrategias. Las categorías de análisis emergentes en el presente estudio que explican el RII de los estudiantes se presentan en la tabla 1 y son: Simulación, datos y creencias. Las respuestas se pueden dividir en dos conjuntos: Hay 12 parejas que se basan en la aplicación y 7 parejas que no la utilizan. Estos últimos probablemente no ven relaciones entre el funcionamiento de la aplicación y el problema que se les plantea. Los códigos empleados para identificar a las parejas se denotan con la letra E y un número, así, E4 significa la pareja número 4.

Tabla 1. Categorías de análisis

Medición del p-valor	Argumentación	Conclusión
Simulación 12 (de 19 parejas)	Muestra rara	Rechazar hipótesis
	Muestra común	No rechazar hipótesis
Datos 4 (de 19 parejas)	Proporción diferente a la hipótesis (mayor o menor)	Rechazar hipótesis
		No rechazar hipótesis
Creencias 3 (de 19 parejas)	Población y publicidad	Rechazar hipótesis
		No rechazar hipótesis

<u>Simulación</u>. En esta categoría se clasifican las respuestas de los estudiantes que utilizan la simulación y cuentan las frecuencias en las que se obtienen los datos para medir informalmente un p-valor y determinar si los datos son resultados normales o raros suponiendo una población donde 90% prefiere Coca Cola.

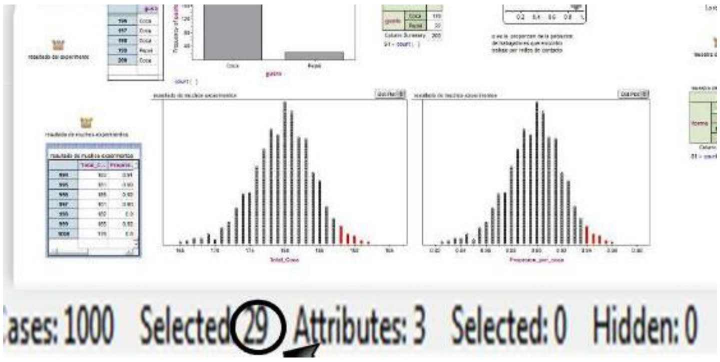


Figura 1. Distribución muestral empírica de E12

La Tabla 1 muestra una mayoría de estudiantes utilizando la simulación para medir el p-valor (12 de 19 parejas) y determinar si la muestra es rara o no. Un ejemplo de respuesta en esta categoría corresponde al equipo E12, quienes argumentan "Como ha ocurrido un resultado raro suponiendo que el 90% de la población prefirió la coca cola, concluimos que la suposición es muy rara y que el resultado de la encuesta se debió a algo raro" y agregan la imagen que se muestra en la Figura 1.

Otro ejemplo en esta categoría es la respuesta de E9, donde explican "el resultado de la encuesta nos dice que son 37 de 1000, por lo cual nos da a entender que es un resultado raro", y presenta la Figura 2 en su respuesta donde señalan las frecuencias.

La pareja E14 es otro ejemplo en esta categoría. Responden "por cada 1000 por lo menos debe de haber 50 casos, concluimos que como en esta encuesta fue 28 por cada 1000, es un resultado poco probable y que por lo tanto tampoco se representa el 90% de la población", y presentan la Figura 3.

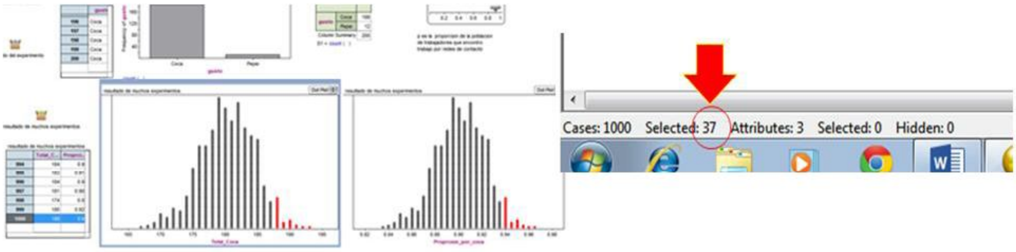


Figura 2. Distribución muestral empírica de E9

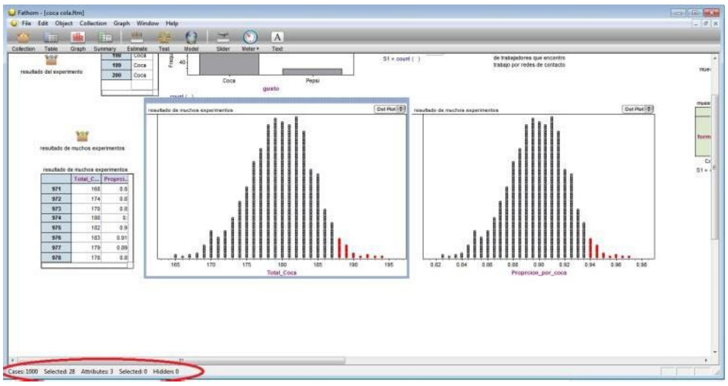


Figura 3. Distribución muestral empírica de E14

A pesar de que la mayoría utiliza la simulación hay otros que se basan en sus creencias o no van más allá de los datos (García-Ríos, 2013). Estos dos tipos de razonamiento son considerados como intuitivos (García y Sánchez, 2015) y es necesario desarrollar la noción de distribución muestral de una manera informal para alcanzar un nivel mayor en el RII. Estas respuestas se clasificaron en “Datos” y “Creencias” respectivamente.

Datos. Dentro de esta categoría se ubican las respuestas donde el razonamiento se basa en los datos de las muestras y no consideran que hay variación del estadístico de muestra a muestra; así, si la proporción de la muestra es mayor que la hipótesis entonces concluyen que es más del 90% y rechazan la hipótesis. E8 responde “porque el 90% de 200 es 180 por lo tanto la mayoría de las personas prefieren coca porque esta superior que la Pepsi según los participante de la encuesta”.

Creencias. En esta categoría se clasifican las respuestas que no consideran los datos para argumentar su conclusión. E2 responde “Coca Cola es una empresa mundial y por lo cual tiene mayor publicidad, mayor calidad probablemente”. Una respuesta por demás interesante es la dada por E6 “Porque los resultados son al azar, entonces alguna otra parte de la población que no fue tomada en la encuesta prefiere Pepsi, así que los porcentajes cambian y no se puede saber con seguridad”. Se tiene presente la variación, sin embargo en un grado excesivo, al no considerar que una muestra pueda ser representativa.

DISCUSIÓN

Como parte de la discusión se dará respuesta a las preguntas de investigación planteadas en la introducción y comentarios sobre los resultados encontrados.

¿Cuál es el razonamiento para hacer inferencias estadísticas informales con el uso de la simulación que llevan a cabo estudiantes de bachillerato? Los resultados muestran que varios estudiantes comprenden el proceso de construcción de la distribución muestral por medio de la simulación y que pueden determinar el p-valor del estadístico de la muestra comparándola con la distribución muestral empírica (12 de 19 parejas). Este resultado es importante pues se ha documentado que los estudiantes tienen mucha dificultad para medir la significatividad del estadístico (p-valor) y lo hacen de forma intuitiva: si el estadístico es diferente a la hipótesis entonces se rechaza la hipótesis

(García y Sánchez, 2015). Otros estudiantes requieren que la muestra esté extremadamente lejos para rechazar la hipótesis (García-Ríos, 2013). En nuestra opinión, la dificultad principal que enfrentan los estudiantes para rechazar o no una hipótesis de manera intuitiva es la de carecer de un criterio para determinar las fronteras de la zona crítica; por lo que resulta conveniente que desarrollen un método informal que les permita hacerlo.

Se han observado otras limitaciones en la forma intuitiva de razonar de los estudiantes. Una consiste en la búsqueda de la respuesta en los datos pero sin tener un modelo de probabilidad (simulación), es decir, solo se enfocan en el estadístico de la muestra y lo comparan con el parámetro de la población (García y Sánchez, 2015). La otra limitación consiste en ofrecer argumentaciones con base en conocimientos o creencias personales acerca del contexto, sin llevar a cabo procedimientos que utilicen los datos. Aunque el papel del contexto en las inferencias es delicado (en ciertos momentos del análisis se debe ignorar y en otros se ha de tener en cuenta) la consideración de los datos es una necesidad.

¿Qué errores y dificultades persisten en el razonamiento para hacer inferencias estadísticas informales con el uso de la simulación? Una primera dificultad en el razonamiento es: No tomar en cuenta la distribución muestral empírica ya sea por basarse en creencias para explicar los datos o solo enfocarse en el estadístico de la muestra sin un modelo de probabilidad. También es posible que no se comprendiera el proceso de construcción de la distribución muestral empírica, provocando la falta de percepción de la variación natural de las muestras y su representatividad.

Un dato que no se analiza en esta comunicación es que a pesar de que varios estudiantes parecen comprender el proceso de construcción de la distribución muestral por medio de la simulación y que pueden determinar el p-valor del estadístico, algunos llegan a diferentes conclusiones. Estudiantes que encuentran una muestra normal rechazan la hipótesis cuando no debían; es posible que algunas consideraciones sobre el contexto de la situación influyan en esa decisión. Esta inconsistencia muestra que no son suficientes los resultados de la simulación (Lipson et al., 2003) y que es necesario que los estudiantes desarrollen un esquema general de cómo funcionan las inferencias.

Un posible camino para atacar estas dificultades es proponer más actividades bien diseñadas con variantes en los parámetros y discusiones finales en cada actividad para hacer notar por qué algunos argumentos no son adecuados. Lo presentado aquí es solo una parte de una actividad entre varias actividades que se han planeado para investigar en el tema. Además, se ha centrado en un solo componente del proceso del contraste de hipótesis (muestreo, variación, incertidumbre, lenguaje, conclusión, etc.) pero los resultados aquí obtenidos aportan información para refinar las actividades previstas y para construir un modelo de desarrollo del RII.

Referencias

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick y A. Y. L. Leung (Eds.), *Third international handbook on mathematics education* (pp. 643-689). Nueva York: Springer

Birks, M. y Mills, J. (2011). *Grounded theory: A practical guide*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Noorgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2*, 98-113.

Chance, B. L., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning. *Technology Innovations in Statistics Education*, *1*(1), 1-26.

Chance, B., delMas, R. C. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295-323). Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.

delMas, R., Garfield, J. y Chance, B. (1999). A model of classroom research in action: Developing simulation activities to improve student's statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 7*(3), http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n3/delmas.cfm

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inferences. *International Conference on Teaching Statistics, 7*, 1-6, https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7G2_ERIC.pdf

Finzer, W. (2014). *Fathom Dynamic Data Software* (Version 2.2) [Software], http://concord.org/fathom-dynamic-data-softwa

García-Ríos, N. (2013). Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 343-357). Granada: Universidad de Granada.

García, V. N. y Sánchez, E. (2014). Razonamiento inferencial informal: El caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 345-357). Salamanca: SEIEM.

García V. N. y Sánchez E. (2015). Dificultades en el razonamiento inferencial intuitivo. En J. M. Contreras y otros (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 207-214). Granada: Universidad de Granada.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing student's statistical reasoning*. Nueva York: Springer.

Hofmann, T., Maxara, C., Meyfarth, T. y Prömmel, A. (2014). Using the Software FATHOM for learning and teaching statistics in Germany –A review on the research activities of Rolf Biehler's working group over the past ten years. En T. Wassong y otros (Eds.), *Using tools for learning mathematics and statistics* (pp. 283-304). Wiesbaden, Alemania: Springer.

Jabareen, Y. (2009). Building conceptual framework: Philosophy, definitions and procedure. *International Journal of Qualitative Method, 8*(4), 49-62.

Lane, D. M. y Peres, S.C. (2006). Interactive simulations in the teaching of statistics: Promise and pitfalls. En A. Rossman y B. Chance (Eds). *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Lipson, K., Kokonis, S. y Francis, G. (2003). Investigation of statistics students experiences with a web-based computer simulation. En L. Weldon y J. Engel (Eds.). *Proceedings of the International Association of Statistical Education Satellite Conference on Statistics Education*, https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/6/Lipson.pdf

Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 152-173.

Makar, K. y Ben-Zvi, D. (2011). The role of context in developing reasoning about informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 1-4.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). Nueva York: Springer.

Pratt, D. y Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inference. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE REFERENCIA EN EL ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN LIBROS DE TEXTO: EL CASO DEL NÚMERO EN LA ESCUELA INFANTIL

Epistemological reference models in the analysis of the mathematical activity in textbooks: The case of numbers in Early Childhood Education

García, F. J.[a] y Sierra, T. Á.[b]

[a]Universidad de Jaén, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

El análisis de los procesos de transposición didáctica es un importante dominio de investigación en didáctica de las matemáticas. En este artículo planteamos la necesidad del investigador de elaborar sus propios modelos epistemológicos de referencia cuando aborda el análisis de procesos transpositivos. En particular, nos centramos en la enseñanza y el aprendizaje del "número" en la Educación Infantil. Proponemos un modelo epistemológico alternativo del número en dicha institución, que utilizamos para el análisis de manuales escolares, identificando algunos problemas y fenómenos didácticos.

Palabras clave: *Transposición didáctica, modelos epistemológicos de referencia, número y numeración, Educación Infantil*

Abstract

The analysis of the didactic transposition processes is an important research domain in the didactics of mathematics. In this paper we reflect on the researcher's need of creating their own epistemological reference models when tackling didactic transposition analyses. Specifically, we focus on the teaching and learning of "numbers" in Early Childhood Education. Within it, we propose an alternative epistemological model, which it is applied to analyse school textbooks, resulting in the identification of some didactic problems and phenomena.

Keywords: *Didactic transposition, epistemological reference model, number and numbering, Early Childhood Education*

INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Transposición Didáctica puso en evidencia la necesaria transformación y adaptación de los saberes en su tránsito entre diferentes instituciones, y supuso una visión diferente de la Didáctica de las Matemáticas, dando lugar a un nuevo paradigma de investigación y a la emergencia y desarrollo de nuevos marcos teóricos (Bosch y Gascón, 2007).

Sin embargo, el análisis de los procesos transpositivos no ha estado siempre acompañado de la necesaria coherencia con el marco teórico de referencia ni del rigor metodológico necesario. Es por ello que consideramos necesario revisar las últimas aportaciones en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) con el fin de clarificar el papel crucial que deben desempeñar los *modelos epistemológicos de referencia* en todo análisis de procesos transpositivos.

Para ejemplificar nuestra propuesta, y como parte de nuestra investigación, nos centraremos en el aprendizaje y la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos en la institución Educación Infantil. Se trata de un dominio interesante para analizar procesos transpositivos, ya que la aparente simplicidad de dichos conocimientos, parece hacer innecesario su cuestionamiento más profundo.

García, F. J. y Sierra, T. Á. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 299-307). Alicante: SEIEM.

LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE REFERENCIA EN LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La consideración de los procesos transpositivos supuso una importante ampliación del campo de estudio de la Didáctica, haciendo posible la formulación de fenómenos didácticos que tienen un componente epistemológico y/o institucional esencial (Bosch y Gascón, 2007).

La transposición didáctica puso en evidencia la necesidad de llevar ahondar en lo epistemológico, como base para entender los factores que posibilitan, condicionan, e incluso a veces impiden, la construcción de ciertos saberes en una institución determinada, así como las formas que se proponen para la construcción de dichos saberes (*saber a enseñar*), y las construcciones efectivas que se llevan a cabo (*saber enseñado* y *saber aprendido*).

Todo análisis de un proceso de transposición didáctica implica un cuestionamiento serio y profundo de la epistemología de los saberes puestos en juego.

> La emancipación epistemológica constituye un aspecto particular, un primer paso esencial, de la emancipación institucional que podría definirse, en general, como la liberación de la sujeción a la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, esto es, la emancipación no sólo del provincianismo epistemológico, sino también de todo provincianismo didáctico, pedagógico y cultural (Gascón, 2014, p. 100).

Este punto de vista *externo* a las instituciones escolares objeto de análisis, que el didáctica debe de construir como parte de su investigación, es el que denominamos *modelo epistemológico de referencia* (MER), entendido como modelo teórico básico para el investigador a la hora de analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones (Figura 1).

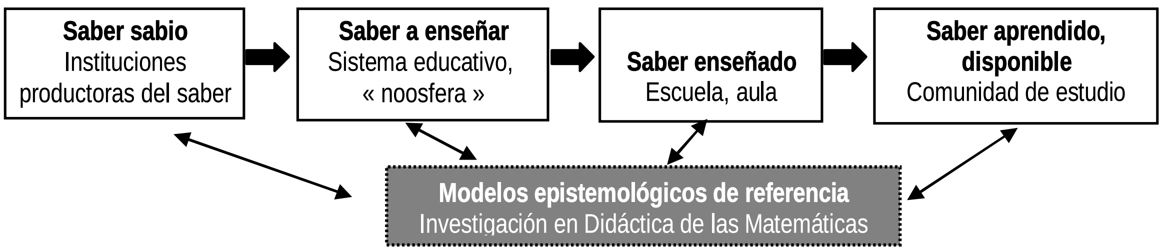


Figura 1. Papel de los modelos epistemológicos de referencia en los procesos transpositivos (Bosch y Gascón, 2007, p. 394)

Los MER desempeñan una función fenomenotécnica en la ciencia didáctica, permitiendo: (1) fijar la amplitud del ámbito matemático en torno al que se formulará el problema de investigación, (2) identificar fenómenos didácticos que hasta el momento habían permanecido más o menos invisibles, y (3) elaborar explicaciones tentativas y tipos de soluciones (teóricas o prácticas) que se consideren apropiadas (Gascón, 2014).

Los MER no sólo surgen como propuestas alternativas a los modelos epistemológicos dominantes de cierto ámbito del saber enseñado en una institución determinada, sino que también ayudan a construir modelos didácticos alternativos, en la medida en que los modelos epistemológicos dominantes no sólo determinan como se interpreta el conocimiento matemático, sino también en gran medida cómo se organiza su estudio en la institución considerada (Gascón, 2014).

Todo MER tiene un carácter relativo y provisional (Chevallard y Bosch, 2014). Éstos deben ser considerados como hipótesis a contrastar empíricamente, en la medida en que cumplan con su función fenomenotécnica, debiendo ser revisados, e incluso modificados si es necesario.

PROPUESTA DE UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA DEL NÚMERO EN LA EDUCACIÓN INFANTIL

En la matemática sabia, la noción de número natural como cardinal, no fue formalizada hasta el siglo XIX (Deiser, 2010). La construcción praxeológica del número natural propuesta por Cantor, Frege y Russell se fundamenta teóricamente en la teoría de conjuntos. A partir de ella, se define el número como la propiedad común a los conjuntos finitos que son coordinables entre sí.

Este modelo epistemológico ha actuado como referencia tanto para la organización del estudio del número natural en la Educación Infantil (Ruiz-Higueras, 2005), como para su estudio en la formación del profesorado.

Desde esta perspectiva, el número es ese "algo", esa "propiedad respecto a la cantidad", que comparten los conjuntos finitos. El conteo es la técnica privilegiada para acceder a dicha propiedad, que se representa por escrito mediante símbolos como, por ejemplo, los numerales indoarábigos y se comunica oralmente a través de un conjunto cultural de palabras-número.

Sin embargo, otros autores hablan de "medida" al referirse a los números naturales en la institución escolar. Es el caso, por ejemplo, de Ruiz-Higueras (2005) quien considera que una de las funciones esenciales del número y de la numeración es la de "medida de una colección". Margolinas y Wozniak (2012) se refieren al número como magnitud, y lo conectan con la noción de medida:

> Le premier chapitre est consacré au nombre comme représentant de la quantité abordée comme une grandeur. Il introduit le dénombrement comme processus qui associe à la quantité sa mesure c'est-à-dire le « nombre cardinal » (Margolinas y Wozniak, 2012, p. 10).

Chamorro y Belmonte (1988), en su libro sobre la magnitudes y su medida, se centran en la construcción de las magnitudes continuas. No obstante, incluyen un apartado al final que titulan "el número natural como magnitud", especificando que:

> El lector se habrá percatado sin duda de la similitud, lo que a nivel intuitivo justifica el poder hablar de los números naturales como magnitud. El número natural es la respuesta a la pregunta ¿cuántos?, que uno se hace ante una colección finita. Contar (…) es en realidad medir esa colección, es decir, encontrar lo que llamamos su cardinal (Chamorro y Belmonte, 1988, p. 121).

Se abre así una vía de entrada a lo que consideramos un posible MER alternativo del número natural, en el que el componente teórico no esté determinado por la *teoría de conjuntos*, sino por la *teoría de las magnitudes y su medida*, y que en principio formulamos como una hipótesis de partida. Para ello, esbozaremos primero un posible MER para las magnitudes y su medida, que usaremos para construir nuestra propuesta alternativa.

Dentro del modelo epistemológico general propuesto por la TAD, las matemáticas se interpretan como una actividad humana en torno a campos de problemas, modelizada mediante la noción de praxeología (Chevallard, 1999). Los MER se describen como procesos de construcción de praxeologías de complejidad creciente, que parten de cuestiones problemáticas con suficiente poder generador (Sierra, 2006).

Un modelo epistemológico de referencia para las magnitudes y su medida

En el caso de las magnitudes lineales, Brousseau (2002) considera que es en el mundo de los objetos donde comienza su construcción. En éste se establece un protocolo experimental para su comparación, combinación, recorte y transformación, que permite definir, por un lado, una aplicación m entre el conjunto de objetos y un conjunto de números, por otro lado, una aplicación g entre el conjunto de objetos y un nuevo conjunto, que son las cantidades de magnitud, y una biyección μ entre el conjunto de estas cantidades de magnitud y el conjunto numérico, de manera que $m=\mu\circ g$. La aplicación g no depende más que del protocolo experimental, mientras que las aplicaciones m y μ dependen del objeto elegido como patrón, que es tomado como unidad de medida (Figura 2).

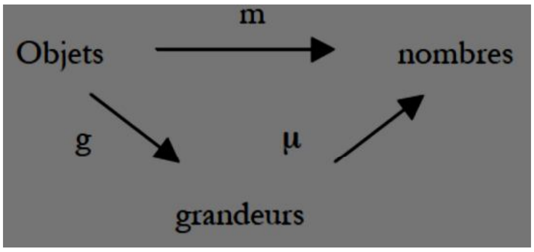


Figura 2. Esquema para la construcción de una magnitud (Brousseau, 2002, p. 335)

En el marco de la TAD, esta idea fue reformulada dado lugar a la construcción de un modelo epistemológico de referencia (Sierra, 2006) para la construcción de las magnitudes y su medida en un proceso de ampliación praxeológica. Se trata de un proceso amplio que aquí sólo podemos esbozar. El MER de las magnitudes surge de tareas de comparación de objetos concretos respecto de una determinada cualidad, mediante técnicas basadas en su manipulación efectiva. Se empieza así a construir la noción de cantidad de magnitud, en la medida en que los objetos pueden coincidir respecto de una determinada cualidad, dando lugar a una *organización matemática inicial*. Las limitaciones de estas técnicas dan lugar a una doble ampliación praxeológica (organización matemática *intermedia* y *final*), que a través de la introducción de un conjunto finito de cantidades de magnitud que actúen como una "sistema de generadores", desembocaba en la construcción de la aplicación medida tomando como unidad cualquier cantidad de magnitud.

Un modelo epistemológico de referencia para la número natural y la numeración

Como en el sub-apartado anterior, y por limitaciones de espacio, sólo podremos describir los rasgos más importantes de nuestra propuesta.

Un primer paso en la construcción del número como medida de magnitudes discretas está en determinar la naturaleza de los "objetos soporte" de dichas magnitudes. En este caso, este conjunto estará formado por conjuntos finitos, que sirven de soporte a la *cualidad* de la *cantidad* o de la *numerosidad*). En lo que sigue, usaremos la notación C_i para referirnos a cualquier conjunto finito genérico, esto es, sin importar la naturaleza de sus elementos.

La praxeología u organización matemática de partida (que denotaremos por OM_1) estará constituida por los "objetos soporte" de la magnitud y por una actividad matemática caracterizada por la acción concreta sobre los mismos.

De acuerdo con el MER para las magnitudes, la génesis de la praxeología u organización matemática *inicial* (OM_1) se sitúa en tareas de comparación directa de objetos soporte, respecto a la cualidad que define la magnitud. Será este el primer tipo de tareas:

> π_1 : dados dos conjuntos discretos C_1 y C_2 , determinar cuál de ellos es menor, mayor, o si son iguales, atendiendo a la *cualidad cantidad*.

Esta tarea, en principio sencilla, puede llegar a ser muy compleja, según las características físicas de las colecciones involucradas, su ubicación espacial, la posibilidad de acceder a ellas y manipularlas, etc. Si además estamos pensando en un MER que permita describir la actividad matemática en la Educación Infantil, parece coherente limitar el tipo de tareas introduciendo ciertas limitaciones, en la línea de los trabajos seminales elaborados en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (véase Sierra y Rodríguez, 2012) .Asumimos como primera condición que los conjuntos C_1 y C_2 están espacialmente cercanos, visibles simultáneamente, y que son manipulables, o accesibles mediante gestos.

La técnica inicial τ_1 que permite resolver con éxito este tipo de problemas, ligada al carácter concreto y cercano de los conjuntos, consiste en establecer una biyección, bien señalando simultáneamente los elementos de ambos conjuntos, bien desplazándolos formando parejas. Otras técnicas de éxito (Ruiz-Higueras, 2005) serían: τ_2 , el establecimiento biyecciones por subconjuntos (de pares, de tripletas) o τ_3 , por estimación visual, si bien esta última es poco fiable.

Bajo estas mismas condiciones, estas técnicas también permiten resolver con éxito un segundo tipo de tareas:

> π_2 : Dado un conjunto discreto C_1 , construir otro conjunto C_2 que coincida con C_1 respecto a la *cualidad cantidad*, estando C_1 presente y siendo manipulable, o al menos accesible mediante gestos.

En la construcción del número en la Escuela Infantil, la técnica de la biyección (τ_1) jugará un papel fundamental, ya que permite la entrada a la magnitud discreta, contribuyendo a tomar conciencia de las diferentes cantidades de magnitud. En esta organización matemática *inicial*, la aplicación medida no está aún construida. Las condiciones impuestas sobre los tipos de tareas no la hacen necesaria. Será precisamente a través de la modificación de estas condiciones que las técnicas anteriores se irán mostrando ineficaces, provocando así una ampliación praxeológica sucesiva.

En efecto, consideremos una variante de los problemas anteriores, formulados en los mismos términos, pero suponiendo ahora que los conjuntos involucrados están alejados y no son visibles ni accesibles simultáneamente. Los notaremos por π'_1 y π'_2.

Ahora la técnica τ_1 de la biyección, tal cual, fracasa. Necesita ser adaptada, mediante la consideración de una colección intermedia y la aplicación de la propiedad de transitividad. Llamaremos τ_4 a esta versión evolucionada de la técnica anterior, que admite diferentes realizaciones concretas:

- τ_4^1: construcción de una colección intermedia de “objetos”, (dedos de la mano, fichas…).
- τ_4^2: construcción de una colección intermedia de símbolos (analógicos o icónicos).
- τ_4^3: construcción de una colección intermedia de palabras (por ejemplo, los nombres de los niños, si tienen que coger un vaso y sólo uno para cada niño de su mesa).
- τ_4^4: uso de la serie numérica.

Cuando el niño usa las técnicas τ_4^i, es la primera vez que empieza a representar la *cualidad cantidad* del conjunto soporte a través de símbolos o de palabras. Es en este momento cuando empieza a emerger una *numeración*. En particular, la técnica τ_4^2 supone la primera codificación por escrito de la *cualidad cantidad* de un conjunto (*numeraciones icónico-analógicas* e *icónico-simbólicas*).

Se configura así una organización matemática intermedia OM_2. En ella, cualquier recitado de palabras, incluso de la serie numérica en orden no estable, permite resolver con éxito las tareas, siempre que el recitado sea el mismo. Sin embargo, cuando el tamaño de las colecciones aumenta, el control de recitado de palabras arbitrarias se hace más costoso, dando lugar a numerosos errores.

El uso de la serie numérica verbal hace que la técnica τ_4^4 sea muy fiable. No entraremos aquí a discutir cómo los niños aprenden y dominan el recitado de la serie numérica, ya que éste es un ámbito que ha sido ampliamente estudiado (véase, por ejemplo, Clements y Sarama, 2007).

La evolución de OM_2 surgirá, de nuevo, ante una ampliación del campo de problemas, que dé lugar a un necesaria modificación de las técnicas. De acuerdo con los trabajos citados en el marco de la TSD, optamos por introducir la comunicación como germen de esta evolución:

π_3 dado un conjunto discreto C_1, pedir por escrito (π_3^1), o pedir oralmente (π_3^2), los objetos necesarios para construir otro conjunto C_2 que coincida con C_1 respecto a la *cualidad cantidad*, estando C_1 alejado y no visible ni accesible en el momento de construir C_2.

En principio, sigue siendo válida la técnica τ_4^2, para π_3^1, así como la técnica τ_4^4 (e incluso la τ_4^3), para el tipo de problema π_3^2. Incluso es usual encontrar, en los problemas de comunicación escrita, híbridos entre ambas técnicas: cuando el niño recita la serie de palabras-número (técnica τ_4^4) pero, ante la necesidad de producir un mensaje escrito, usa como signos los de los numerales (por ejemplo, para pedir cinco objetos, escribe: *1 2 3 4 5*). Llamaremos a esta técnica τ_4^5.

La evolución de las técnicas τ_4^2 y τ_4^4 se producirá ante la convención social de que la última palabra-número recitada es suficiente para aprehender y comunicar la *cualidad cantidad* de un conjunto. En efecto, se trata de una convención social, basada en el común acuerdo de que todas las palabras-número anteriores se suponen sabidas por ambas partes. Se trataría de la información mínima a suministrar para que la otra persona pueda reconstruir con éxito la técnica τ_4^4.

Esta convención social es bien conocida en la literatura especializada como el *principio cardinal*, lo que nos permite enunciar la técnica τ_5 del conteo: recitado de la serie de palabras-número, en orden estable, estableciendo una biyección entre éstas y el conjunto de elementos del conjunto considerado. La última palabra-número recitada (τ_5^1), o el numeral de la última palabra recitada (τ_5^2), representa la *cualidad cantidad* del conjunto finito considerado.

La técnica τ_5 constituye la construcción de la aplicación medida, al establecer una correspondencia entre cualquier objeto soporte (conjunto finito) y un conjunto de palabras {*uno, dos, tres*, ...} o de símbolos {1, 2, 3, ...}, de manera que la *cualidad cantidad* de dicho conjunto queda unívocamente representada mediante éstos. Se construye así una organización matemática OM_3, que integra a las anteriores, y en la que la magnitud discreta y la aplicación medida han quedado construidas. En ocasiones, es posible medir una colección de forma súbita, dependiendo de su tamaño y disposición espacial. Llamaremos τ_5^0 a esta técnica, conocida como subitización (Clements y Sarama, 2007).

Es posible continuar con el proceso de ampliación praxeológica, cuestionando la necesidad de disponer de un repertorio finito de símbolos y palabras, lo que proyecta la actividad matemática hacia los sistemas de numeración (Sierra, 2006).

LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN TORNO AL NÚMERO EN TEXTOS DE EDUCACIÓN INFANTIL

En el curso de nuestra investigación, diversos manuales escolares de la etapa de Educación Infantil han sido analizados: proyecto "trébole" (Edelvives), "chiribitas" y "el viaje de Suso" (ambos de Santillana). Por limitaciones de espacio, esbozaremos los fenómenos más importantes identificados.

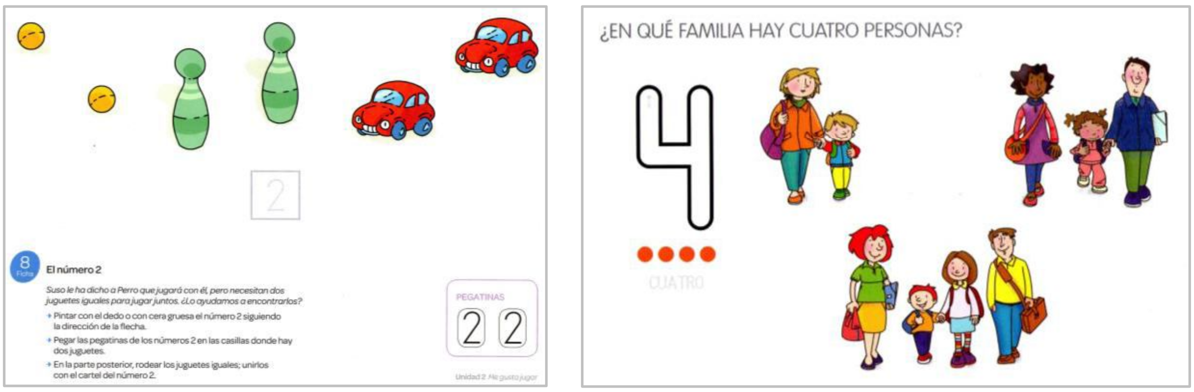


Figura 3. Introducción ostensiva del número, como "propiedad" de los conjuntos, en libros de texto ("el viaje de Suso", Santillana)

En primer lugar, el modelo epistemológico del “número natural” como propiedad común de los conjuntos finitos es dominante. Esto se observa de manera nítida cuando se introduce ostensivamente cada “número”, acompañado de su expresión escrita (numeral) (Figura 3).

La presentación simultánea de los conjuntos y las designaciones escritas de la cantidad permite afirmar que no existe verdadera construcción de las cantidades de magnitud discreta, ni una evolución de los campos de problemas que lleven a la necesidad de construir la aplicación medida y las designaciones orales y escritas para expresar la cantidad, sino una introducción directa del resultado de medir las colecciones, junto con designación cultural de dicha medida.

En segundo lugar, aunque es posible encontrar problemas de comparación y de construcción de colecciones equipotentes, estos se restringen a los tipos π_1 y π_2, al tratarse de fichas impresas (Figura 4).

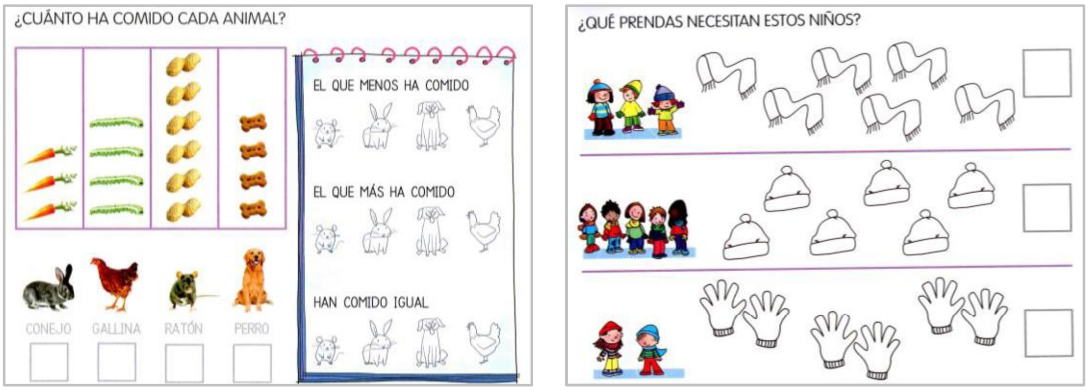


Figura 4. Problemas de comparación (π_1) y producción de colecciones (π_2) (“el viaje de Suso”, Santillana)

No es posible afirmar con rotundidad si se persigue o no la construcción de OM_1, y en particular de la biyección (τ_1). No obstante, en muchos casos se señala expresamente que hay que contar, esto es, se impone la técnica del conteo como la técnica institucional única posible.

Los problemas del tipo π_3 están completamente ausentes en los libros analizados. Estos problemas son cruciales ya que son los que realmente dan sentido a la necesidad de medir una colección y de representar dicha medida mediante algún tipo de código (oral o escrito). Ante la ausencia del situaciones de comunicación, los niños se ven sometidos a una actividad “gratuita” de medida (cardinación), en las que medir conjuntos y expresar dicha medida es un fin en sí mismo, y no un medio para resolver situaciones problemáticas (Figura 5).

Figura 5. Fichas para la medida de colecciones (“chiribitas”, Santillana y “trébole”, Edelvives)

De esta forma, es posible interpretar que en ausencia de una construcción progresiva de técnicas, mediante la ampliación del campo de problemas, el conteo (τ_5) se introduce de forma ostensiva como técnica dominante y se impone su rutinización, pues permite, de manera acrítica, resolver con éxito todos los tipos de tarea propuestos.

Postulamos que, de la misma manera que Chamorro (1997) identificó un fenómeno de evitación de las magnitudes en la Educación Primaria y de su construcción, que se evidenciaba con una introducción directa y temprana de las unidades legales de medida y de los instrumentos de medida asociados, también en la transposición didáctica del número natural en los libros de texto de la Educación Infantil existe un fenómeno de evitación de la magnitud discreta, evidenciado por una introducción temprana, directa y acrítica de la aplicación medida, y de los códigos y palabras culturales que representan el resultado de dicha medida.

CONCLUSIONES

En este artículo hemos abordado dos objetivos conectados: (1) reflexionar sobre la necesidad que tiene el investigador de tomar un punto de vista "externo" cuando analiza procesos de transposición didáctica, que se concreta en la construcción explícita de modelos epistemológicos de referencia (MER) del ámbito matemático abordado; (2) analizar cómo se transponen los primeros conocimientos numéricos en libros de texto de la Educación Infantil, para lo que ha sido necesario la construcción previa de un MER respecto al número y la numeración.

Hemos formulado un MER alternativo que sitúa el número en el ámbito de las magnitudes, lo que implica la necesidad de construir tanto las cantidades de magnitud como la aplicación medida.

Finalmente, hemos analizado varios libros de texto. El uso del MER construido, nos ha permitido identificar cómo se realiza una introducción temprana, directa y acrítica de la aplicación medida (el conteo) que (1) impide a los niños de Educación Infantil la construcción de la magnitud discreta y (2) les oculta una de las razones de ser del número, al prescindir de las situaciones de comunicación (tipo π_3) y convertir las tareas de medida de conjuntos en un fin en sí mismo.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-39312-C03-02 "La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en matemáticas y ciencias naturales" del Plan Nacional de I+D+I, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarite obligatoire. En J. L. Dorier y otros (Eds.), *Actes de la XIème École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 331-348). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chamorro, M. C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170-174). Dordrecht, Holanda: Springer.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Charlotte, NC: IAP.

Deiser, O. (2010). On the development of the notion of a cardinal number. *History and Philosophy of Logic, 31*, 123-143.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, Número* E, 99-123.

Margolinas, C. y Wozniak F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruselas: De Boeck.

Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 181-220). Madrid: Pearson.

Sierra, T. Á. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Sierra, T. A. y Rodríguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números, 80,* 25-52.

REPRESENTACIONES Y FENÓMENOS QUE ORGANIZAN LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA. UN ESTUDIO EXPERIMENTAL CON MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA BÁSICA

Representations and phenomena that organize the equivalence relation. An experimental study with pre-service teachers in the context of basic geometry

González-Ruiz, I.[a] y Molina, M.[b]

[a]Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria
[b]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

Habida cuenta de su amplitud, a la hora de explorar el constructo pensamiento relacional, nos centramos en la noción de relación de equivalencia. Caracterizamos los fenómenos y representaciones a los que recurren maestros en formación inicial para determinar el carácter, o no, de relación de equivalencia de las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas. El estudio realizado advierte de la preferencia por simultanear, coherentemente, representaciones de tipo verbal y gráfico, resultando las últimas irrelevantes en la construcción de sus argumentos. Asimismo, además de considerar fenómenos que guardan relación directa con las relaciones propuestas, recurren a otros, propios de la geometría básica, vinculados a las representaciones gráficas que proponen al elaborar sus argumentos.

***Palabras clave**: Formación de maestros, paralelismo, pensamiento relacional, perpendicularidad, relación de equivalencia, ser concéntricas*

Abstract

In this paper we study the aspects that organize pre-service teachers' relational thinking at working with basic geometry topics. We explore their relational thinking through the idea of equivalence relation by characterizing the phenomena and representations used to determine if the binary relations, parallelism, perpendicularity and to be concentric are, or not, equivalence relations. The analysis reveals the preference to combine verbal and graphical representations, although the last ones are irrelevant in order to construct the arguments that propose. Besides appealing to phenomena directly linked to the relations considered, pre-service primary school teachers also resort to using phenomena related to basic geometry ideas, specially connected to the graphic representations that propose when arguing.

***Keywords**: Teacher education, parallelism, relational thinking, perpendicularity, equivalence relation, to be concentric*

INTRODUCCIÓN

En la literatura sobre fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra se manifiestan distintas perspectivas o formas de concebir el álgebra escolar, entre ellas el estudio de patrones y generalización de la aritmética y el estudio de relaciones funcionales (o estudio del cambio) (Drijvers, Goddijn y Kindt, 2011; Kaput, Carraher y Blanton, 2008; Molina, 2012). En ambas concepciones las relaciones son foco de atención del pensamiento algebraico, dando lugar a

González-Ruiz, I. y Molina, M. (2015). Representaciones y fenómenos que organizan la relación de equivalencia. Un estudio experimental con maestros en formación inicial en el contexto de la geometría básica. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 309-316). Alicante: SEIEM.

la distinción del constructo pensamiento relacional, entendido ampliamente como el pensamiento sobre relaciones, o conceptos basados en relaciones.

Si bien los estudios previos que han atendido a este tipo de pensamiento (Mason, 2006) se han centrado en contextos aritméticos o algebraicos, la ubiquidad de las relaciones en matemáticas hace que este constructo sea también aplicable a otros contextos, entre ellos el geométrico.

En este trabajo focalizamos nuestro interés en la figura del profesor de primaria, encargado de la formación matemática de los estudiantes en las primeras etapas, y nos preguntamos por las representaciones y fenómenos que organizan su pensamiento relacional, interesándonos, en particular, por su caracterización. Cabe decir que sendos elementos resultan fundamentales en la configuración del significado de los conceptos matemáticos escolares (Gómez, 2007; Rico, 2012).

El constructo pensamiento relacional es ciertamente amplio, por ello, para llevar a cabo dicha caracterización nos centramos en el trabajo con relaciones binarias y, en particular, en el estudio de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En este sentido, se trata de caracterizar las representaciones y fenómenos en base a los cuales, los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria. Para proceder con nuestra labor, consideramos relaciones planteadas en el ámbito de la geometría escolar. En base a estos planteamientos formulamos los siguientes objetivos de investigación.

O.1. Caracterizar el tipo de sistemas de representación en torno a los cuales los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico.

O.2. Caracterizar los fenómenos en torno a los cuales los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico.

Entendemos que nuestra investigación resulta de interés por su carácter complementario con respecto a otras y por su vocación de relacionar el pensamiento relacional con las ideas geométricas. La mayor parte de las investigaciones previas que estudian el pensamiento relacional versan sobre la relación de igualdad y requieren de la aplicación de propiedades de las operaciones aritméticas. Este es el caso de los trabajos de Carpenter, Frankle y Levi (2003), Carpenter, Levi, Loef y Koehler (2005), Empson, Levi y Carpenter (2001), Molina (2006, 2007), Molina y Castro (2005) y Stephens (2006). En todas ellas se atiende a la relación de igualdad como relación de equivalencia; no siendo ésta la relación que considerados en nuestra investigación. Además, difieren de nuestra propuesta en que sus sujetos de investigación son escolares.

MARCO TEÓRICO

Articulamos el marco teórico en torno a varias ideas clave: la noción de pensamiento relacional y relación de equivalencia, los sistemas de representación y la fenomenología asociada a los conceptos matemáticos.

Noción de pensamiento relacional y relación de equivalencia

El pensamiento relacional es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo (Molina, 2006, p. 65). El hecho de adoptar esta definición nos advierte que cuando un sujeto piensa relacionalmente, o usa pensamiento relacional, no sólo observa o detecta determinadas relaciones existentes entre los objetos matemáticos que configuran la noción de relación de equivalencia, sino que estas relaciones pasan a ser consideradas objeto de pensamiento para lograr un objetivo determinado. Dicho objetivo puede ser resolver una tarea planteada, adoptar una manera de proceder o profundizar más en los conceptos involucrados. En suma, las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del sujeto.

En nuestro trabajo la relación foco de estudio es la relación de equivalencia. Si bien, no tiene presencia explícita en los currículos escolares ni en la formación matemática actual de maestros, es un concepto matemático clave e implícito en las matemáticas escolares. Por ejemplo, la comprensión de la relación de igualdad entre cualesquiera objetos matemáticos requiere de un conocimiento de las propiedades que caracterizan las relaciones de equivalencia.

Sistemas de representación

Entendemos por representación cualquier modo de hacer presente un objeto. Castro y Castro (1997) sostienen que todo tipo de conocimiento, conceptual o procedimental, se hace presente mediante distintos tipos de símbolos gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.

Arcavi (2003) sostiene que las representaciones juegan un papel crucial a la hora de visualizar un concepto, destacando su interés en las primeras etapas escolares. Las representaciones permiten acceder e interactuar con el conocimiento matemático (Rico, 2012), siendo la comprensión de un concepto matemático más completa cuanto mayor sea el conocimiento que dispongamos de sus sistemas de representación, de la equivalencia entre ellos y de las propiedades del concepto que cada representación explicita (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Fenomenología

El análisis fenomenológico tiene como principal característica profundizar en el carácter funcional del conocimiento matemático. La idea central de la fenomenología subyace en que los fenómenos son la fuente del pensamiento matemático. Puede decirse que las estructuras matemáticas son abstracciones y el producto de la organización de fenómenos de diversa procedencia. En este sentido Rico et al. (2008) sostienen que la ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han construido por grupos humanos y se han desarrollado a lo largo de la historia, como herramientas para entender y organizar el mundo de los fenómenos y poder trabajar sobre ellos.

Bajo estas ideas, el significado de los conceptos matemáticos toma sentido mostrando su conexión con el mundo real, es decir, con los fenómenos en los que se implica el conocimiento matemático; poniendo el foco en el uso y aplicación de mismos, así como en los medios y en los modos en que se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO Y DE LA MUESTRA

La investigación realizada es de naturaleza exploratoria y descriptiva ya que se dispone de escasa información procedente de estudios previos en conexión con la noción de relación de equivalencia y su trabajo en la formación inicial de maestros. Se trata de una investigación transversal y es de carácter cualitativo, de acuerdo con los objetivos planteados, ya que se realiza un análisis detallado de las manifestaciones los sujetos.

Se consideró una muestra de 19 estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada, matriculados en la asignatura *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria*, de segundo año, en el curso académico 2013-2014. La selección de los mismos fue intencional, atendiendo a la disponibilidad y la facilidad de acceso a ellos para llevar a cabo esta investigación. Todos han cursado la asignatura *Bases Matemáticas Para la Educación Primaria* de primer curso del Grado en Educación Primaria, dedicada al estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos en los bloques de matemáticas de Educación Primaria, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos, utilizando materiales y recursos (Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2014). En relación a la geometría se destaca lo siguiente en la guía docente:

> *Elementos fundamentales, del plano y del espacio: relaciones y propiedades. Figuras en el plano (polígonos y círculos) y cuerpos en el espacio (poliedros y cuerpos de revolución): elementos y propiedades.*

Diseño de la recogida de datos

Nuestra propuesta se fundamenta en la elaboración de una prueba escrita individual, a modo de cuestionario, mediante el cual se busca caracterizar el tipo de representaciones y fenómenos, de los que los futuros maestros se sirven parar determinar el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico escolar. Se consideran las relaciones de *paralelismo* (Tabla 1), *perpendicularidad* (Tabla 2) y ser *concéntrico* (Tabla 3). Para ello, se plantean tres ítems que versan, respectivamente, sobre cada una de las relaciones anteriores. Cada ítem se compone de tres cuestiones relativas a las propiedades transitiva, reflexiva y simétrica (en este orden). Mientras que la primera y tercera son relaciones de equivalencia, la relación de perpendicularidad no lo es.

En todas las cuestiones se indica a los sujetos la posibilidad de acompañar sus explicaciones con el tipo de representación que precisen.

Tabla 1. Ítem 1: Estudio de la relación de paralelismo

Consideramos en un plano las rectas r, s y t que cumplen las siguientes propiedades. *La recta r es paralela a la recta s. La recta s es paralela a la recta t.*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la recta r y la recta t? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la recta r, ¿Es r paralela a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la recta r es paralela a la recta s, ¿es la recta s paralela a la recta r? Justifica tu respuesta.

Tabla 2. Ítem 2: Estudio de la relación de perpendicularidad

Consideramos en un plano las rectas r, s y t que cumplen las siguientes propiedades. *La recta r es perpendicular a la recta s. La recta s es perpendicular a la recta t.*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la recta r y la recta t? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la recta r, ¿es r perpendicular a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la recta r es perpendicular a la recta s, ¿es la recta s perpendicular a la recta r? Justifica tu respuesta.

Tabla 3. Ítem 3: Estudio de la relación de ser concéntricas

Se dice que dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro. Sean $C_{1,}$ C_2 y C_3 tres circunferencias distintas del plano que cumplen las siguientes propiedades. *C_1 es concéntrica a $C_{2.}$ C_2 es concéntrica a $C_{3.}$*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la circunferencia C_1 y la circunferencia C_3? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la circunferencia $C_{1,}$ ¿Es la circunferencia C_1 concéntrica a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la circunferencia C_1 es concéntrica a la circunferencia C_2, ¿Es la circunferencia C_2 concéntrica a la circunferencia C_1? Justifica tu respuesta.

ANALISIS Y RESULTADOS

Abordamos el análisis de los resultados obtenidos en el cuestionario tras describir las categorías de análisis utilizadas.

Categorías de análisis

Estructuramos en cuatro bloques las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los estudiantes (Tabla 4). El Bloque Identificación aglutina el conjunto de categorías destinadas a distinguir el tipo de concepción que los sujetos manifiestan sobre las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. El Bloque Representaciones se compone de categorías que indican el tipo de representación empleada en las justificaciones. El Bloque Gráfica-Justificación acoge al conjunto de categorías que valoran el papel de las representaciones gráficas respeto de la verbal en las respuestas dadas por los futuros maestros. Por último, el Bloque Fenómenos se centra en caracterizar el tipo de fenómenos, contextos o situaciones de los que se valen para argumentan la veracidad, o no, de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Estos bloques, salvo el correspondiente a Representaciones, están compuestos por categorías excluyentes.

Tabla 4. Categorías de análisis

Categorías	Definición
	Bloque Identificación
Clara	Se manifiesta una concepción clara de la propiedad.
Condicionada	La veracidad de la propiedad se condiciona a algún fenómeno.
Confusa/Nula	Se manifiesta una concepción confusa o nula de la propiedad.
	Bloque Representaciones
Verbal	Se emplea la representación verbal.
Simbólica	Se emplea la representación simbólica.
Gráfica	Se emplea la representación gráfica.
	Bloque Gráfica-Justificación
Pertinente-Complementaria	Es complemento de la representación verbal.
Pertinente-Integradora	Es necesaria y articula a la representación verbal.
Confusa/Nula	No ayuda o es ajena a la representación verbal.
	Bloque Fenómenos
Convergente-coincidente	Uso de los mismos fenómenos planteados en el enunciado
Convergente-paralelo	Se abstrae la situación planteada reformulando otra con fenómenos distintos a los planteados. Se contribuye al buen desarrollo de los argumentos.
Divergente	Uso de fenómenos ajenos a los planteados. No se contribuye al buen desarrollo de los argumentos.

Resultados de la prueba escrita y discusión

Analizamos conjuntamente, para las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas, la identificación que los sujetos de investigación han realizado sobre las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (Tabla 5).

Tabla 5. Detección de las propiedades en la relación de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas

Propiedades	Identificación		
	Clara	Condicionada	Confusa/Nula
	Paralelismo		
Reflexiva	8	4	7
Simétrica	16	1	2
Transitiva	16	2	1
TOTAL	40	7	10
	Perpendicularidad		
Reflexiva	8	7	4
Simétrica	13	3	3
Transitiva	10		9
TOTAL	31	10	16
	Ser concéntricas		
Reflexiva	13		6
Simétrica	18		1
Transitiva	15		4
TOTAL	46	0	11

Las propiedades de la relación de paralelismo han sido mayoritariamente identificadas por los sujetos (40/57, Tabla 5). La propiedad reflexiva es la que cuenta con una menor frecuencia de detección (8/19) (Ej. Identificación confusa/nula: *"Una recta sola no puede ser paralela a sí misma. Para que exista paralelismo debe haber dos rectas, ya que no se pueden cortar paralelamente"*).

De igual modo, la mayoría de los sujetos identificó las propiedades que se verifican para la relación de perpendicularidad (31/57). De entre ellas, destaca que 7 de los 19 sujetos no llegan a identificar con claridad la propiedad reflexiva, frente a los 8 que sí lo hacen (Ej. Identificación correcta: "… para ser perpendicular tiene que cortarse en un solo punto formando cuatro ángulos de 90º y r coincide consigo misma en todos los puntos, no sólo en uno."). Mayor contraste se percibe en la propiedad transitiva, donde de los 19 sujetos 10 la identifican correctamente, frente a 9 que no (Tabla 5) (Ej. Identificación confusa/nula: "Sí, da igual el orden en cómo se digan, las dos son perpendiculares entre sí.")

De la relación ser concéntricas señalamos que las propiedades fueron identificadas por la mayoría de los sujetos (46/57, Tabla 5). De entre ellas, la propiedad reflexiva es la que cuenta con mayor frecuencia de error (Ej. Identificación condicionada: "Sí, porque tienen el mismo centro pero sería necesario que tuviesen el mismo radio."). Este hecho radica en que los sujetos organizan sus argumentos, como se ve en sus representaciones, en torno al fenómeno "tener radios distintos".

En resumen, la mayoría de los sujetos identifica correctamente las propiedades; los errores que manifiestan son fruto de concepciones erróneas o inadecuadas de las relaciones planteadas, o bien de asumir la veracidad de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva en todas ellas. Por ejemplo, varios sujetos identifican el comportamiento de las propiedades de la relación de perpendicularidad con las de paralelismo.

Respecto a las representaciones empleadas, la totalidad de los sujetos recurre a la representación verbal al elaborar sus justificaciones. Se observa también que, en general, simultanean las anteriores con representaciones gráficas (Tabla 6), siendo más frecuentes en la relación paralelismo y menos en la relación ser concéntricas. Es nula la presencia de la representación simbólica.

Tabla 6. Tipología de representaciones para cada relación

Relaciones	Representación		
	Verbal	Simbólica	Gráfica
Paralelismo	19		17
Perpendicularidad	19		15
Ser concéntricas	19		13

Cuando hacen uso de la representación gráfica, ésta suele tener una función complementaria a la verbal (Figura 1), siendo pertinente en tanto que no es ajena a la relación a la que atienden.

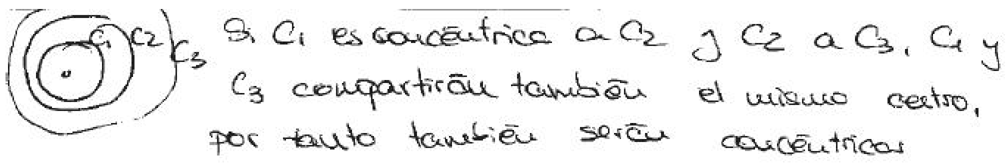


Figura 1. Representación pertinente-complementaria

Mayoritariamente condicionan el desarrollo de sus argumentos a las representaciones gráficas que proponen para cada una de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; al igual que los fenómenos a los que aluden (Figura 2).

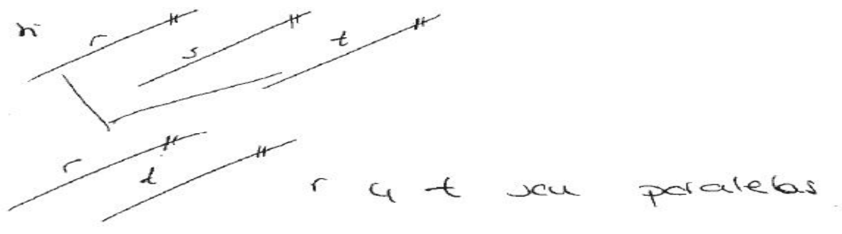


Figura 2. Representación pertinente-integradora

Tabla 7. Adecuación de la representación gráfica a la justificación propuesta

Representación gráfica-Justificación			
Relaciones	Pertinente		Confusa/Nula
	Complementaria	Integradora	
Paralelismo	13	2	2
Perpendicularidad	12		3
Ser concéntricas	11		2

En resumen, el tipo de representación mayoritaria en las justificaciones es la de tipo verbal; si bien, un amplio número de sujetos la combina con la representación gráfica. Destacamos el carácter pertinente, pero claramente complementario de las representaciones gráficas; son coherentes con la representación verbal pero no aportan más información. Se observa además que, en general, el tipo de fenómenos que aportan está íntimamente ligado a la representación gráfica que proponen. Más aún, la representación gráfica que aportan, que obedece a una situación concreta, vertebra su justificación; lo cual es significativo. Más allá de los fenómenos de tipo convergente-coincidente presentes en sus argumentos, cabe destacar los de tipo convergente-paralelo. En este sentido, notamos para la relación de paralelismo *ser iguales* (Ej. "Entonces se tiene que r y t son iguales."), *coincidir* (Ej. "Que las rectas coinciden."), *ser equidistantes* (Ej. "Hay la misma distancia de s a t.") y *no cortarse* (Ej. "Sólo puede ocurrir que las rectas no se cortan."); para la relación de perpendicularidad destacamos *cortarse* (Ej. "Las rectas r y t se cortan."), *formar 90º* (Ej. "Que forman entre sí 90º."), *ser paralelas* (Ej. "La única posibilidad es que r y t sean paralelas.") y *formar un ángulo recto* (Ej. "Se tiene que entre las dos rectas se forma un ángulo recto."). Por último, para la relación ser concéntricas proponen *coincidir* (Ej. "Las dos circunferencias tienen que coincidir entres sí.") y *tener el mismo centro* (Ej. "La relación entre las dos es que tienen el mismo centro, es decir, sus centros son iguales.").

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en la investigación así como de los objetivos planteados al inicio de la misma se concluye lo siguiente.

En relación al objetivo número uno, cabe destacar que el contexto geométrico se caracteriza por el dominio de representaciones gráficas que alternan con las de tipo verbal. Sobre esto último observamos que la mayoría de las representaciones que proponen son *pertinentes* de tipo *complementario*, ya que no aportan información extra a la conseguida por medio de la representación verbal; si bien, son coherentes con los planteamientos. Además parten de una representación de este tipo para vertebrar la representación verbal que proponen. En menor medida optan por las de tipo *pertinente integrador*.

En relación al segundo objetivo, en el contexto geométrico construyen los argumentos de sus justificaciones a partir de fenómenos convergentes de tipo coincidente. Sin embargo, en menor medida, también tienen presencia los fenómenos convergentes de tipo paralelo. En este sentido, destacan para la relación de paralelismo *ser iguales, coincidir, ser equidistantes* y *no cortarse*; para la relación de perpendicularidad recurren a fenómenos como *cortarse, formar 90º, ser paralelas* y *formar un ángulo recto*; por último, para la relación ser concéntricas proponen *coincidir* y *tener el mismo centro.* Entendemos que esta última tipología de fenómenos tiene su origen en las concepciones erróneas asociadas a las relaciones anteriormente citadas. Si bien, resulta significativo desde el punto de vista matemático, no desmerecer el vínculo que establecen entre las relaciones propuestas y la tipología de fenómenos que aluden.

A la luz de los resultados obtenidos, entendemos que nuestra investigación puede tomar vías de continuación complementarias, sobre las que trabajamos en la actualidad. En este sentido, destacamos la caracterización de las representaciones y fenómenos sobre los que los futuros maestros justifican el carácter de relación de equivalencia, o no, de una relación binaria planteada en otros contextos matemáticos, como el aritmético-algebraico, o más aún, en contextos generales, ajenos al anterior; de forma que sea posible vislumbrar la influencia que se confiere al contexto, sobre el que se plantean las distintas relaciones, en los argumentos propuestos.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Carpenter, T., Frankle, M. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Loef, M. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *ZDM-Mathematics Education, 37*(1), 21-55.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2014). *Guía docente de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria.* Granada: Universidad de Granada.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam: Sense Publishers.

Empson, S., Levi, L. y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín: Springer-Verlag.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Londres: Routlege.

Mason, J. (2006). *Role and use of mental imagery in teaching mathematics.* Seminario celebrado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y compresión del signo igual por alumnos de tercero de primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en Educación Primaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53-69). La Laguna: SEIEM.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2057

Molina, M. y Castro, E. (2005). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* IX (pp. 205-213). Córdoba: SEIEM.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58,* 7-23.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278.

EXPLORANDO EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL MEDIANTE UN AMBIENTE COMPUTACIONAL EN UN CURSO INTRODUCTORIO DE ESTADÍSTICA

Exploring the Covariational Reasoning through a Computer Environment in an Introductory Statistics Course

Inzunsa, S.[a] y Ward, S. E. [b]

[a]Universidad Autónoma de Sinaloa, [b]Universidad Pedagógica de Sinaloa

Resumen

Se reportan resultados de un estudio con 34 estudiantes universitarios que tomaban un curso introductorio de estadística en el cual se utilizó un ambiente computacional para la enseñanza de la covariación. Los resultados muestran que los estudiantes lograron identificar con éxito la dirección de la relación entre variables y desarrollaron un buen sentido de la intensidad al interpretar diagramas de dispersión y el coeficiente de correlación, pero concedieron menos importancia a la forma, agrupamientos y puntos extremos. La interpretación de los coeficientes de la ecuación de regresión y el coeficiente de determinación les resultó complicada a muchos estudiantes y algunos tuvieron dificultades para identificar la variable explicativa y de respuesta.

Palabras clave: *correlación, regresión, razonamiento covariacional, tecnología computacional*

Abstract

Results of a study with 34 university students taking an introductory statistics course in which a computer environment for the teaching of covariation was used are reported. The results show that students were able to successfully identify the direction of the relationship between variables and developed a good sense of intensity to interpret scatterplots and correlation coefficient, but gave less importance at the clusters and outliers. The interpretation of the coefficients of the regression equation and the coefficient of determination were difficult to many students and some had difficulty to identify the explanatory and response variable.

Keywords: *correlation, regression, covariational reasoning, computer technology.*

INTRODUCCIÓN

El razonamiento que se involucra en la interpretación y aplicación de la correlación y la regresión se denomina razonamiento covariacional o razonamiento sobre datos bivariados. El razonamiento sobre datos bivariados involucra saber cómo juzgar e interpretar una relación entre dos variables. En el caso de variables cuantitativas ─situación a la que se hace referencia en este estudio─, la relación es representada comúnmente mediante un diagrama de dispersión, el cálculo del coeficiente de correlación y la recta de regresión cuando el ajuste de los puntos es factible.

Una comprensión profunda de la covariación requiere del dominio de diversas ideas y conceptos, tales como la estructura de una relación bivariada, su rol en la construcción de modelos y en la predicción de eventos; por lo que no debe sorprender que los estudiantes tengan dificultades para comprender los conceptos involucrados en la covariación (Garfield, Joan y Ben-Zvi, 2008). En este sentido, las nociones estadísticas de correlación y regresión resultan de gran ayuda en cuanto a discernir si dos variables se relacionan, con qué intensidad o en qué sentido lo hacen; y cuando sea

Inzunsa, S. y Ward, S. E. (2015). Explorando el razonamiento covariacional mediante un ambiente computacional en un curso introductorio de estadística. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 317-325). Alicante: SEIEM.

posible, construir un modelo para predecir una variable con base en la información de otras variables.

La tecnología computacional ofrece un gran potencial de cálculo para realizar los procesos de análisis de datos que tradicionalmente han caracterizado a la estadística. En el caso de la covariación, el cálculo del coeficiente de correlación y la determinación de la línea de regresión ─dos de los procedimientos más laboriosos de un análisis de datos─ no sólo pueden ser realizados de forma automática y precisa con la tecnología, sino que también pueden ser visualizados en forma dinámica mediante diversas representaciones y explorar su comportamiento cuando algún dato o parámetro de interés es modificado. En este contexto, en el presente trabajo nos hemos planteado las siguientes preguntas: ¿qué estrategias y recursos del ambiente computacional ponen en juego los estudiantes para dar sentido a la información de datos bivariados?, ¿qué factores influyen en el desarrollo del razonamiento covariacional en un ambiente computacional con representaciones dinámicas de los datos?

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En la literatura se reportan estudios sobre los conceptos que se involucran en la covariación desde el nivel elemental hasta el universitario. En este contexto destacan los trabajos de los investigadores españoles, quienes han estudiado la covariación de forma consistente desde hace varios años, analizado el significado que le atribuye la institución de los autores de libros de texto de secundaria, bachillerato y universitarios (e. g., Sánchez Cobo, 1999; Gea, Batanero, Cañadas y Contreras, 2013). Los resultados de estas investigaciones han servido de punto de partida para el diseño de secuencias de aprendizaje por parte de investigadores que se proponen mejorar la enseñanza del tema y profundizar en las dificultades de comprensión que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El efecto de la tecnología computacional en las estrategias utilizadas por estudiantes y profesores, así como la comprensión de los diversos conceptos que se involucran en la covariación ha sido objeto de estudio en algunos de estos trabajos (e.g., Estepa, 1993; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Batanero, Gea, Díaz y Cañadas, 2014). Entre los resultados obtenidos es importante destacar el uso de estrategias incorrectas para estimar la correlación y concepciones erróneas sobre algunos conceptos que se involucran en la covariación, como es el caso de la concepción unidireccional de la correlación, la cual consiste en percibir la relación entre variables cuando sólo cuando es positiva. Otra concepción recurrente fue considerar que la correlación entre dos variables implica causalidad. Destaca también la dificultad de muchos sujetos de estudio para distinguir entre variable de respuesta y variable explicativa y para razonar con relaciones que son negativas.

Zieffler (2006) realizó un estudio longitudinal durante un semestre para analizar el efecto de dos secuencias de enseñanza con apoyo de tecnología y con diferente orden en el tema de datos bivariados (antes y después de la inferencia estadística) en el desarrollo del razonamiento sobre covariación en un curso introductorio de estadística con estudiantes universitarios en los Estados Unidos. Los resultados muestran que la secuenciación de datos bivariados dentro del curso parece no estar asociada a los cambios en el desarrollo del razonamiento. El mayor cambio en el desarrollo del razonamiento ocurrió entre la primera y segunda evaluación de las cuatro realizadas a lo largo del semestre, justo antes de que los datos bivariados fueran enseñados por métodos formales, lo que podría significar que el razonamiento sobre datos bivariados está cercanamente relacionado al razonamiento sobre datos univariados, y que no se requiere una enseñanza formal del tema para su comprensión.

Fitzallen (2012) en su investigación con estudiantes de primaria y secundaria australianos, explora el pensamiento y el razonamiento de los estudiantes acerca de la covariación y la influencia del software Tinkerplots para determinar relaciones entre variables e identificar tendencias mediante recursos gráficos como el diagrama de dispersión. Los resultados muestran que Tinkerplots proporciona un poderoso ambiente de aprendizaje para apoyar a los estudiantes en la comprensión de la covariación desde niveles tempranos.

MARCO TEÓRICO

El tipo de representaciones utilizadas en el análisis de datos incorporan elementos que resultan complejos de interpretar por muchos estudiantes. En este sentido, Ben-Zvi y Arcavi (2001) señalan que el análisis requiere poner en juego visiones locales y globales de los datos; una comprensión local de los datos significa enfocarse en algún valor individual (o en algunos) dentro de un conjunto de datos (por ejemplo, la entrada de una tabla o un punto de una gráfica), mientras que la comprensión global requiere de habilidades para buscar, reconocer, describir y explicar patrones generales en un conjunto de datos (por ejemplo, tendencias, variabilidad, forma) ya sea a través de la visualización o por medio del cálculo de medidas estadísticas. El razonamiento covariacional como un caso específico del razonamiento estadístico tiene una liga muy importante con la interpretación de tablas, gráficas y expresiones que expresan la relación entre datos bivariados.

En el análisis del razonamiento estadístico sobre un tema en particular resulta útil establecer categorías jerárquicas que tengan en cuenta la cantidad de conceptos y la forma como los estudiantes establecen relaciones entre ellos y el contexto, al hacer argumentaciones basadas en datos. Un modelo que se utiliza con frecuencia en educación estadística para establecer jerarquías de razonamiento o niveles de comprensión es el modelo SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs y Collis (1982). El modelo consta de los niveles preestructural, univariado, multivariado, relacional y abstracto extendido, los cuales van en orden ascendente de complejidad en el razonamiento.

La tecnología computacional en el análisis de datos no solo representa un recurso amplificador de la capacidad de cálculo y construcción de representaciones gráficas, sino que constituye a su vez un recurso con potencial reorganizador de la mente de los usuarios, con capacidad para provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo a través de la organización y transformación de las diversas representaciones de los datos y la visualización de patrones que emergen al realizar cambios en algunas de las componentes de dichas representaciones o en los datos mismos. Lo anterior le otorga a la tecnología computacional un estatus de herramienta cognitiva en el sentido establecido por Pea (1987, p.91), quien la define como “cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas”.

Se han propuesto modelos para el diseño de ambientes de aprendizaje que promueven el desarrollo del razonamiento estadístico, en los cuales la tecnología computacional es un importante elemento de articulación. Ejemplo de ello es el modelo propuesto por Cobb y McClain (2004) cuyos principios instruccionales se resumen a continuación:

- Enfocarse en el desarrollo de ideas estadísticas centrales en lugar del énfasis en procedimientos de cálculo.
- Utilizar datos reales y motivadores para comprometer a que los estudiantes realicen y prueben conjeturas.
- Utilizar actividades en el salón de clases para apoyar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.
- Integrar el uso apropiado de herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes probar sus conjeturas, explorar y analizar datos y desarrollar su razonamiento estadístico.

- Promover un discurso en el salón de clases que incluya argumentos estadísticos e intercambios que se enfoquen en ideas estadísticas significativas.

METODOLOGÍA

Los sujetos de estudio fueron 34 estudiantes (18-19 años) que tomaban un curso introductorio de estadística en el primer grado de la carrera de Informática. Sus antecedentes sobre el tema eran prácticamente nulos, lo cual quedó de manifiesto en un cuestionario diagnóstico aplicado antes de las sesiones de enseñanza. La investigación tuvo lugar en un aula de cómputo con 35 computadoras durante 6 sesiones de una hora en la parte final del bloque de análisis de datos, por lo que los estudiantes recién habían visto el análisis de datos univariados donde utilizaron el software Fathom para el cálculo de medidas descriptivas y construcción de gráficas.

En el diseño de las actividades de enseñanza se utilizó un paquete de diapositivas que el profesor investigador preparó con los conceptos que se contemplan en la covariación y siguiendo los principios instruccionales sugeridos por Cobb y McClain (2004). Las actividades contemplaban conjuntos de datos reales multivariados que se tomaron de algunos sitios de internet, y se pedía a los estudiantes que exploraran pares de variables para analizar las características de la relación (forma, dirección, intensidad, datos extremos, agrupamientos). Como punto de partida del análisis se construyeron diagramas de dispersión y se enfocó la atención de los estudiantes a visualizar sus características, posteriormente se calcularon coeficientes de correlación buscando conectar su valor con las características del diagrama. Finalmente, se introdujo la recta de regresión para ajustar la tendencia de los puntos y su ecuación, con el valor del coeficiente de determinación que por omisión proporciona el software.

Los datos fueron recogidos en la actividad final de la secuencia de enseñanza, pero previamente los estudiantes habían resuelto una actividad de estimación del coeficiente de correlación utilizando un applet que proporcionaba un diagrama de dispersión como punto de partida, en el cual hacían la estimación y luego verificaban el resultado con la opción de cálculo que el mismo applet proporcionaba. La otra actividad fue muy similar a la que se presenta en este artículo, en un contexto de variables medidas a un conjunto de tablets. Decidimos reportar los datos de la última actividad porque fue la que más conceptos contemplaba y era la más completa de las tres.

En el análisis de la información generada al resolver cada actividad se tuvieron en cuenta el uso de representaciones y las características de la relación entre variables identificadas visualmente de un diagrama de dispersión, así como medidas numéricas como los coeficientes de correlación y de determinación. Para la interpretación de diagramas se definieron niveles de razonamiento basados en el modelo SOLO.

RESULTADOS Y DISCUSION

El propósito de esta actividad era explorar diversos aspectos del razonamiento covariacional que habían desarrollado los estudiantes. Los datos analizados provenían de diversas variables que fueron medidas a 80 automóviles compactos que se vendieron en el mercado mexicano en 2014 (ver Figura 1). Las unidades del rendimiento están dadas en kilómetros por litro de gasolina, la emisión de CO_2 en gramos por kilómetro, el gasto en pesos por año, la potencia en caballos de fuerza y el precio está expresado en pesos.

1. Con las variables que se muestran construye dos diagramas con relación negativa y otros dos con relación positiva. Interpreta cada uno de ellos.

La construcción de los diagramas de dispersión fue realizada con éxito por todos los estudiantes, sin embargo no todos utilizaron las mismas representaciones y estrategias para resolver la tarea, algunos se basaron sólo en la tendencia de la nube de puntos, otros agregaron la recta de regresión para tener mayor certeza del signo y la intensidad de la relación y otros más recurrieron al cálculo del coeficiente de correlación (ver Tabla 1).

	MARCA	MODELO	RENDIMIENTO_CIUDAD	EMISION_CO2	GASTO_ESTIMADO_COMBUSTIBLE	POTENCIA	PRECIO
1	HONDA	CIVIC HÍB...	23.8	119	8700	90	266900
2	MAZDA	MAZDA3...	15.4	159	13400	153	236900
3	MAZDA	MAZDA3...	15.7	157	13200	153	236900
4	MAZDA	MAZDA3...	15	162	13800	153	258900
5	MAZDA	MAZDA3...	15.7	158	13200	153	258900
6	HONDA	CITY LX ...	13.2	182	15700	118	219000

Figura 1. Variables de 80 modelos de vehículos compactos vendidos en México en 2014

Tabla 1. Representaciones utilizadas para resolver la tarea

Tipo de representación	**Frecuencia**
Diagrama de dispersión	20
Diagrama de dispersión y recta de mínimos cuadrados	5
Diagrama de dispersión y coeficiente de correlación	9
Total	**34**

Con base las representaciones y las características de la relación entre variables que fueron utilizadas, clasificamos la interpretación de los diagramas de dispersión en tres categorías del modelo SOLO como se describe a continuación (ver Tabla 2).

Tabla 2. Niveles del modelo SOLO en la interpretación de diagrama de dispersión

Niveles de interpretación	**Frecuencia**
Uniestructural	18
Multiestructural	15
Relacional	1
Total	**34**

Nivel uniestructural: Se emplea una sola característica del diagrama de dispersión para describir la relación entre las dos variables. Aun cuando agregan o calculan algún elemento adicional al diagrama (por ejemplo la recta de regresión y el coeficiente de correlación), solo dependen de una representación para el análisis.

Nivel multiestructural: Se emplea más de una propiedad del diagrama de dispersión para describir la relación entre las dos variables. Se apoyan en el diagrama y algún elemento o cálculo adicional para la interpretación.

Nivel relacional: Se emplean múltiples propiedades del diagrama de dispersión para describir la relación entre las dos variables. Se apoyan en el diagrama y elementos o cálculos adicionales para la interpretación. Además hacen referencia a otros elementos o al contexto para describir o justificar la relación.

La única respuesta ubicada en el nivel relacional fue proporcionada por Jesús Enrique (ver Figura 2): "en este diagrama observamos una asociación negativa con una relación lineal fuerte que se ve a simple vista, se puede observar un dato atípico en la parte más baja de la emisión de CO2, esta gráfica nos muestra que entre mayor sea el rendimiento del automóvil la emisión de CO2 será menor".

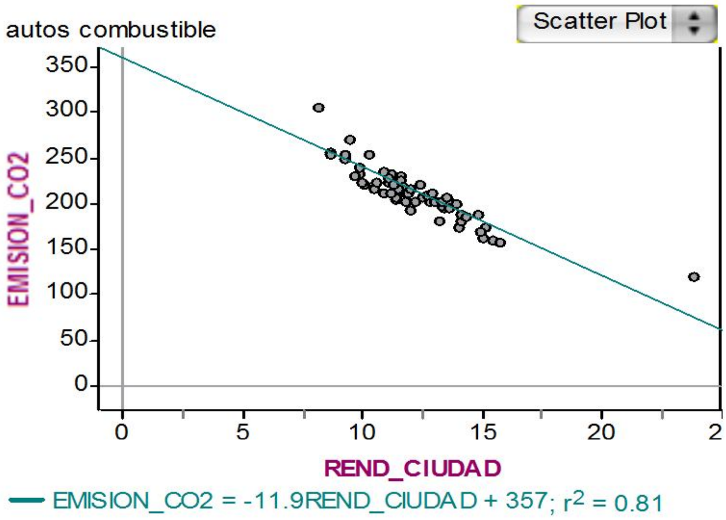


Figura 2. Diagrama de dispersión con recta de regresión construido por Jesús Enrique

2. Considera la variable precio como variable de respuesta y a las demás variables como variables explicativas. Determina la variable que tiene mayor influencia o relación con el precio. Explica las razones de tu elección.

Un total de 32 estudiantes establecieron correctamente que la potencia era la variable que estaba más relacionada con el precio. La principal estrategia consistió en construir los cuatro diagramas de dispersión, pero se observaron varias variantes como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver la tarea

Tipo de representación	Frecuencia
Diagrama de dispersión	22
Diagrama de dispersión con recta de mínimos cuadrados	6
Diagrama de dispersión y coeficiente de correlación	6
Total	**34**

Los estudiantes dependieron más de estrategias visuales que de estrategias de cálculo para responder la tarea; tal fue el caso de quienes utilizaron sólo el diagrama de dispersión o combinado con la recta de regresión. Estos estudiantes observaron las cuatro nubes de puntos y seleccionaron la que les parecía que tenía una mayor relación con el precio, no dependieron de ningún cálculo aun cuando la recta de recta de regresión estaba ligada con valor del coeficiente de determinación r^2. Un caso representativo de estos estudiantes es José Efraín (ver Figura 3) quien argumenta: “los datos de la potencia son los que están más agrupados en relación con el precio ya que la línea de regresión pasa por mayor cantidad de datos que las demás gráficas que se encuentran más dispersos en relación al precio”. El estudiante relaciona el agrupamiento de datos alrededor de la línea de regresión con la intensidad de la relación, pero no hace referencia al coeficiente de determinación que aparece en la parte inferior del diagrama; también hace referencia a que la línea de regresión pasa por la mayor cantidad de puntos, lo cual no es condición obligada de la recta de regresión.

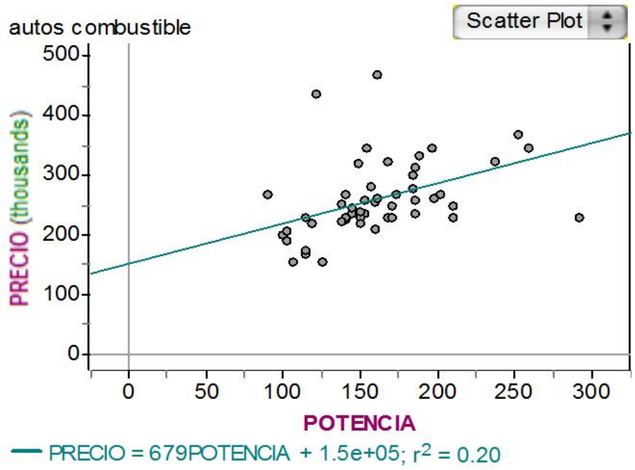


Figura 3. Diagrama de dispersión construido por José Efraín

En sus justificaciones 21 estudiantes se basaron en la dirección de la nube de puntos, señalando sólo que a mayor potencia el precio era mayor, lo que los ubica en un nivel de razonamiento uniestructural. Otros 13 estudiantes además de la dirección, complementaron sus justificaciones con otras propiedades como la intensidad (ver Tabla 4) por lo que fueron ubicados en un nivel multiestructural.

Tabla 4. Niveles del modelo SOLO en la determinación de la variable de mayor influencia

Niveles de interpretación	Frecuencia
Uniestructural	21
Multiestructural	13
Relacional	0
Total	**34**

3. Considera el rendimiento como variable explicativa y la emisión de CO2 como variable de respuesta. Construye un diagrama de dispersión y construye la recta de regresión.

a) Explica un poco sobre la precisión de la recta para la predicción de valores de CO2.

La mitad de los estudiantes dieron explicaciones sobre la relación entre precisión y predicción en las que mostraron una comprensión intuitiva de la relación entre estos conceptos, atendiendo principalmente a criterios visuales que les proporcionaban los diagramas de dispersión. Por ejemplo, Hugo responde: "la precisión de la recta es bastante acertada, la mayoría de los puntos están cerca de la recta, sólo un punto está bastante alejado de los demás, la predicción sobre los valores sería algo acertada porque para un próximo valor de la gráfica se pudiera saber qué es lo que seguiría". La otra mitad emitió argumentos más bien relacionados con la interpretación del diagrama y no sobre lo que se les preguntaba. Adicionalmente se observó que 7 estudiantes tuvieron dificultades para ubicar correctamente la variable explicativa y la variable de respuesta en los ejes correspondientes.

b) Explica qué representa en el contexto del problema el valor de -11.9 que aparece en la expresión matemática de la recta de regresión de la parte inferior de la gráfica (ver Figura 2).

Este inciso fue el más complicado de todos, pues sólo 16 estudiantes señalan correctamente que representa la pendiente de la recta, pero no dan una explicación de su significado en el contexto de los datos, es decir, que por cada kilómetro por litro que se incrementa el rendimiento, la emisión de CO2 disminuirá -11.9 gramos. Otros 11 estudiantes dejaron en blanco el inciso, y el resto respondieron que se trataba del coeficiente de correlación o el error.

CONCLUSIONES

Los estudiantes utilizaron estrategias que privilegiaban el uso de representaciones gráficas sobre las representaciones simbólicas, no obstante lo sencillo que resultaba calcular con el software el coeficiente de correlación y de determinación. La aparente sencillez de un diagrama de dispersión queda en entredicho con las respuestas que han dado los estudiantes, pues sólo uno de ellos logró ubicarse en el nivel relacional del modelo SOLO en dos preguntas que involucraban la construcción e interpretación de un diagrama de dispersión. Si bien, la dirección y la intensidad fueron características que los estudiantes identificaron y estimaron bastante bien, dejaron de lado características importantes como los datos extremos y la forma del diagrama. Además hizo falta conectarlas con el contexto, dando cuenta con ello de una visión más local que global de los datos.

En cuanto a la regresión, algunos estudiantes tuvieron dificultades para distinguir la variable de respuesta de la variable explicativa, lo cual concuerda con otros estudios como el realizado por Estepa (1993). Las respuestas de algunos estudiantes muestran que lograron apreciar en forma intuitiva la relación entre la variación y la precisión de una estimación en la variable de respuesta, pero faltó relacionarla con la suma de cuadrados y el coeficiente de determinación. Las mayores dificultades las tuvieron al interpretar los coeficientes de la ecuación de regresión en el contexto de los datos y en valorar la bondad del ajuste.

No obstante el reducido tiempo del estudio y su carácter exploratorio, el presente trabajo aporta algunos elementos para considerar que el amplio recurso representacional dinámico e interactivo de los ambientes computacionales como Fathom, son un factor importante en el diseño de secuencias para el aprendizaje de la covariación. A conclusiones similares han llegado otros estudios como el realizado por Fitzallen (2012), quien ha utilizado un ambiente computacional con características similares en el estudio de la covariacion con estudiantes de nivel medio.

Los factores que parecen tener mayor influencia en el desarrollo del razonamiento covariacional en un ambiente computacional, son el dinamismo de las representaciones y su simultaneidad en la pantalla, la interactividad que permite manipular de forma directa las representaciones o alguna parte de ellas, así como el contexto de los datos utilizados que motiva el interés de los estudiantes para explorar sus relaciones.

Referencias

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics: Proceedings of the 1996 IASE Roundtable Conference*. (pp. 198-212). Voorburg, Los Países Bajos: International Statistical Institute.

Batanero, C., Gea, M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2014). Building high school pre-service teachers´ knowledge to teach correlation and regression. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.). *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Voorburg, Los Países Bajos: International Statistical Institute.

Ben-Zvi, D. y Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, *45*(1), 35-65.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Cobb, P. y McClain, K. (2004). Principles of Instructional Design for Supporting the Development of Students' Statistical Reasoning. En Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp. 375–396). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Fitzallen, N. (2012). *Reasoning about covariation with Tinkerplots*. Tesis Doctoral. Universidad de Tasmania.

Garfield, J., Joan, B. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice.* Dordrecht, Los Países Bajos: Springer.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 89-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Zieffler, S. A. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. University of Minnesota. Consultado en Diciembre de 2014, http://iase-web.org/documents/dissertations/06.Zieffler.Dissertation.pdf

EVOLUCIÓN DE LOS NIVELES DE ÉXITO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Evolution of the levels of success in solving multiplicative structure problems along Primary Education

Ivars, P. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio se centra en examinar la evolución en los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa por estudiantes de Educación Primaria (desde 1º a 6º curso, alumnos de 6 a 12 años). Los resultados indican que, en función de las categorías, los problemas de producto de medida fueron los más difíciles en todos los cursos y los problemas de isomorfismos de medida los más fáciles, mientras que los de comparación multiplicativa se mantuvieron entre ambos. Por el contrario, la evolución de los niveles de éxito en función de la clase de problema, no fue uniforme a lo largo de la educación primaria para los problemas de isomorfismo de medida pero sí en las otras dos categorías.

Palabras clave: *Problemas de estructura multiplicativa, niveles de éxito, educación primaria*

Abstract

This study focuses on examining the evolution of the levels of success in solving multiplicative structure problems by primary school students (from 1st to 6th grade, 6 to 12 year-old students). Results indicate that product of measures problems were the most difficult in all grades and isomorphism of measures the easiest whereas multiplicative comparison problems were between both. By contrast, the evolution of the level of success depending on the type of problem was not uniform throughout primary education for isomorphism of measures problems but it was uniform in the other two categories.

Keywords: *Multiplicative structure problems, level of success, primary school education*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas del siglo XX se generó un gran florecimiento en cuanto a investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales. Mientras que para los problemas de estructura aditiva se consiguieron alcanzar importantes avances, como el establecimiento de categorías semánticas consensuado por la comunidad científica, para los problemas de estructura multiplicativa estos avances no fueron tan relevantes ni adquirieron la misma repercusión (Castro, 2008; Greer, 1992; Ramírez y de Castro, 2014).

En el campo de la estructura multiplicativa, Vergnaud (1983 y 1997) identifica tres tipos de problemas: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas (comparación multiplicativa) y producto de medidas. Nesher (1992) estableció que para alumnos de tercero a sexto curso los problemas de isomorfismo de medidas eran los más fáciles mientras que los de producto de medidas (a los que denomina de producto cartesiano) eran los más difíciles y los de comparación multiplicativa se hallarían entre ambos. Con un foco particular sobre los problemas de isomorfismo de medidas con alumnos de 11 a 16 años, Hart (1981) indicó que era más difícil identificar un

Ivars, P. y Fernández, C. (2015). Evolución de los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 327-334). Alicante: SEIEM.

problema de multiplicación que uno de división, mientras que Bell, Fischbein y Greer (1984) indicaron que eran más difíciles los problemas de división medida que los de división partitiva. Estos niveles de dificultad entre los problemas de isomorfismo de medida se reproducen con estudiantes de 5 a 7 años (Kornilaki y Nunes, 1997), y entre estudiantes de 5 a 8 años (Squire y Bryant, 2002). Sin embargo, Kinda (2013) en un estudio con alumnos de 8 a 10 años de Japón no encontró diferencias significativas en la resolución de problemas de división medida y partitiva en alumnos de 3º, 4º y 5º curso aunque a partir de 6º curso los problemas de división partitiva resultaban más fáciles para este alumnado lo que mantiene el patrón relativo al nivel de dificultad.

En los demás tipos de problemas ha habido menos investigaciones. Para problemas de comparación (un solo espacio de medidas), Castro (1995), en un estudio con alumnos de 5º y 6º curso, mostró que era más sencillo resolver los problemas en los que se busca la cantidad comparada que en los que se debe hallar la cantidad referente o el escalar (factor de comparación). Para problemas de producto cartesiano, se ha llegado a un consenso en establecer esta categoría de problemas como la más difícil para el alumnado de Educación Primaria (Mulligan y Mitchellmore, 1997; Nesher, 1992)

Aunque estas investigaciones han mostrado los niveles de éxito en la resolución de problemas en las categorías de problemas particulares, no tenemos información sobre la evolución de los niveles de éxito en las distintas categorías en el periodo de Educación Primaria (alumnos de 6 a 12 años).

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

En esta investigación hemos adoptado la terminología de Vergnaud en relación a los tipos de problemas multiplicativos: i) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; ii) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra "veces" y iii) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

En los problemas de isomorfismo de medida existe una relación entre cuatro cantidades, dos cantidades son medidas de un cierto tipo y el resto son medidas de otro tipo (Vergnaud, 1997). Vergnaud (1983) distingue cuatro tipos de problemas dentro de los problemas de isomorfismo de medidas: multiplicación, división partitiva, división medida y problemas de reglas de tres. Estos últimos no se estudiarán en el presente trabajo ya que implica una generalización de esta situación al caso en el que las cuatro cantidades son diferentes de 1.

En los problemas de multiplicación se debe trasladar la relación entre *1* y *a* a la relación entre *b* y *x* para encontrar la incógnita (que es el total de objetos). En los problemas de división partitiva, hay que encontrar el valor de la unidad (o número de objetos por grupo). En los problemas de división medida, la incógnita es el número de grupos que se forman (Figura 1).

M1	M2
1	a
b	x

Problemas tipo multiplicación

M1	M2
1	x
a	b

Problemas tipo división partitiva

M1	M2
1	a
x	b

Problemas tipo división medida

Figura 1. Estructura general de los problemas de isomorfismo de medida (Vergnaud, 1997)

En los problemas denominados de un único espacio de medidas (Vergnaud, 1997) o de comparación multiplicativa (Nesher, 1992), aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar que normalmente viene designado por la expresión lingüística “veces”. Una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado y la comparación entre ambas se realiza mediante un escalar (b).

La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita, se presenta en la Figura 2, y la dirección de la comparación puede ser “veces más que” y “veces menos que”. En los problemas de multiplicación de esta categoría, la incógnita X es una medida (la cantidad comparada). En los problemas de división, la incógnita X es una medida (la cantidad referente) o un escalar (Figura 2) (las veces que se repite la cantidad referente para igualar la cantidad comparada).

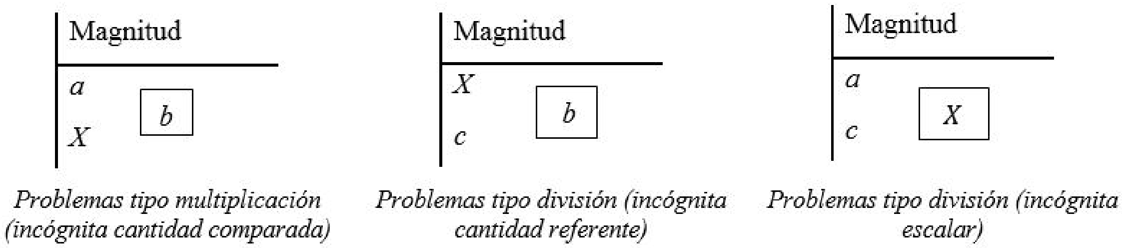


Figura 2. Estructura general de los problemas de un único espacio de medida

La categoría producto de medidas está formada por la relación multiplicativa entre dos medidas elementales (M1 y M2) que da como resultado la creación de una nueva medida producto (M3). Se distinguen dos tipos de problema: los de multiplicación en los que se conocen las dos medidas iniciales (*a*, *b*) y se busca la medida producto *X* y los de división en los que se conoce la medida producto *c* y una de las dos medidas iniciales y se busca la otra medida *X* (Figura 3).

Figura 3. Estructura general de los problemas de producto de medidas

Estos problemas han sido reclasificados por otros autores (Greer, 1992), aunque en este trabajo vamos a adoptar la terminología de Vergnaud y considerar las categorías descritas en la Tabla 1.

El objetivo de nuestro estudio es examinar la evolución a lo largo de la Educación Primaria de los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa considerando las tres categorías de problemas anteriores.

Tabla 1. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Categoría	Clases	Incógnita
Isomorfismo de medidas	Multiplicación División Partitiva División medida	Total de objetos Número de objetos por grupo Número de grupos
Comparación multiplicativa Un único espacio de medidas	Multiplicación División División	Una medida (comparado) Una medida (referente) Un escalar
Producto de medidas	Multiplicación División	Medida Producto (cantidad compuesta. Se conocen las 2 medidas elementales o componentes) Una medida elemental (uno de los componentes)

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron 273 estudiantes de Educación Primaria. 42 estudiantes de primer curso, 44 estudiantes de segundo curso, 47 estudiantes de tercer curso, 47 estudiantes de cuarto curso, 52 estudiantes de quinto curso y 41 estudiantes de sexto curso. Los participantes contestaron a un cuestionario formado por 8 problemas, uno de cada clase de los descritos en la Tabla 1.

Instrumento

Se diseñaron tres modelos de cuestionario, uno para los alumnos de 1º y 2º curso, otro para el 3º y 4º y otro para 5º y 6º curso, diferenciándolos por el tamaño de los números usados. Para los cursos 1º y 2º se emplearon números enteros menores de 20, para 3º y 4º, números menores de 50 y para 5º y 6º curso, números menores de 200. En la redacción de los problemas se procuró usar frases simples y reflejando la estructura de las cantidades consideradas manteniendo contextos familiares para los estudiantes. En la Figura 4 se presentan los enunciados propuestos para el 1º y 2º curso.

Análisis

Categoría	Clases	Problema
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	En el patio del colegio hay 4 farolas. Si en cada farola hay 3 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?
	División Partitiva	Juan tiene 10 caramelos que quiere repartir en partes iguales entre sus 5 mejores amigas. ¿Cuántos caramelos les dará a cada una de ellas?
	División medida	Ana quiere repartir 8 caramelos entre sus amigas. Si le da 2 caramelos a cada una de ellas, ¿cuántas amigas tiene Ana?
Comparación multiplicativa	Multiplicación	La clase de 1º A para confeccionar sus disfraces de superhéroes ha utilizado 8 metros de tela. La clase de 5º B ha utilizado 3 veces más de tela que la de 1º A. ¿Cuánta tela ha empleado la clase de 5ºB?
	División	Este año los alumnos de 5º B para realizar un mural han utilizado 2 veces más de papel continuo que utilizaron el año pasado. Si este año se han utilizado 8 metros de papel. ¿Cuántos metros de papel se utilizó el año pasado?
	División	Julián tiene 12 años y Marta tiene 6. ¿Cuántas veces más años tiene Julián que Marta?
Producto de medidas	Multiplicación	El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?
	División	La empresa escolar combinando los primeros y los segundos platos ofrece 24 menús diferentes. Si hay 6 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos hay?

Figura 4. Problemas del cuestionario para 1º y 2º curso

Las respuestas de los estudiantes fueron consideradas correctas e incorrectas en cada tipo de problema (nivel de éxito). Se asignó el valor 1 a los problemas correctos y 0 para los incorrectos. Para la determinación de los problemas correctos no se tuvieron en cuenta las respuestas erróneas a causa de errores de cálculo. También se analizaron y categorizaron las estrategias usadas por los estudiantes en cada tipo de problema y cómo iban evolucionando estas estrategias a lo largo de los 6 años de educación primaria. Esta última parte de la investigación no se describirá aquí.

RESULTADOS

Presentamos los resultados en dos apartados. En el primero, la evolución de los niveles de éxito en las diferentes clases de problemas a lo largo de la Educación Primaria y, en el segundo, una clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad.

Evolución de los niveles de éxito en los diferentes problemas en Educación Primaria

La Tabla 2 muestra los niveles de éxito de los estudiantes en cada clase de problemas por curso.

Tabla 2. Niveles de éxito en cada una de las clases de problemas por curso

	Isomorfismo de Medidas			**Comparación multiplicativa**			**Producto de Medidas**		
CURSO	**Multiplica.**	**División Partitiva**	**División Medida**	**Multiplica. Incóg. Comp.**	**División Incóg. Refer**	**División Incóg.Esc**	**Multiplica.**	**División**	**Total**
1º	36%	19%	26%	0%	0%	0%	0%	0%	**10%**
2º	50%	20%	30%	7%	9%	0%	0%	0%	**14%**
3º	72%	68%	55%	51%	15%	15%	17%	15%	**39%**
4º	81%	89%	87%	72%	43%	21%	21%	26%	**55%**
5º	87%	98%	77%	92%	65%	23%	19%	31%	**62%**
6º	93%	100%	95%	88%	61%	49%	24%	34%	**68%**

Considerando los resultados globalmente (Tabla 2) hubo un aumento progresivo del nivel de éxito en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, desde un 10% en 1º curso hasta el 68% en 6º curso; la progresión no fue uniforme en las diferentes categorías consideradas, ni en las diferentes clases de problemas dentro de cada categoría. Por otra parte, los porcentajes de éxito en 5º y 6º curso (62% y 68% respectivamente) se consideran relativamente bajos y muestran las dificultades en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria.

Haciendo el análisis por cursos, para los alumnos de primer curso los problemas más fáciles fueron los de isomorfismo de medidas que son los únicos que pudieron resolver (36% multiplicación, 19% división partitiva y 26% división medida). En segundo curso, los problemas más fáciles fueron, al igual que en primer curso, los de isomorfismo de medidas (50% multiplicación, 20% división partitiva y 30% división medida), seguidos de los de comparación multiplicativa (7% multiplicación con incógnita el comparado y 9% multiplicación con incógnita el referente) y los de producto de medidas. Ningún estudiante de 2º curso fue capaz de resolver correctamente los problemas de esta última clase. A partir de tercer curso, los alumnos muestran capacidad para resolver con éxito problemas de todas las categorías y clases presentadas y siguen el mismo patrón de dificultad en cuanto a tipología de problemas: los problemas más fáciles son los de isomorfismo de medidas, seguidos de los de comparación multiplicativa y por último los de producto de medidas (con un 24% de éxito en el de multiplicación en 6º curso y un 34% en el división en 6º curso).

Si analizamos la evolución en el nivel de éxito a lo largo de Educación Primaria de las categorías de problemas, en la categoría isomorfismo de medidas para los tres primeros cursos, los problemas de multiplicación alcanzan el mayor nivel de éxito (frente a los dos tipos de división), siendo los problemas de división medida más fáciles en primer y segundo curso y los de división partitiva más fáciles en tercer curso. Esta tendencia se invierte en los tres últimos cursos siendo los problemas de división partitiva los más fáciles, seguidos de los de división medida y los de multiplicación (a excepción de 5º curso donde disminuye el porcentaje de éxito en los de división medida).

En relación a la evolución del nivel de éxito en los problemas de comparación multiplicativa se mantiene el mismo patrón a partir de tercer curso (en segundo el porcentaje de éxito fue muy bajo), los problemas de multiplicación fueron los más fáciles en todos los cursos mientras que entre los problemas que implicaban una división, los problemas con incógnita el escalar eran más difíciles que los problemas con la incógnita el referente.

Por último, en la evolución del nivel de éxito de los problemas de producto de medidas se produce un cambio en cuarto curso. Los problemas de multiplicación fueron más fáciles en tercero pero a partir de cuarto curso los problemas más fáciles en esta categoría fueron los de división.

Clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad

Por otra parte, si analizamos cómo de rápido crecieron los niveles de éxito a lo largo de Educación Primaria, los resultados muestran que el problema que más rápidamente creció fue el de división partitiva (pasando de 0-25% en 1º ciclo a 76-100% en 2º ciclo) y el de isomorfismo de medida de multiplicación (pasando de 26-50% en 1º ciclo a 76-100% en 2º ciclo). Continúan el problema de división medida (pasando de 26-50% en 1º ciclo a 76-100% en 3º ciclo) y el de comparación de multiplicación (pasando de 0-25% en 1º ciclo a 51-75% en 2º ciclo y 76-100% en 3º ciclo). Por último el problema de comparación de división con incógnita el referente que llega a 51-75% en 3º ciclo. Los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división alcanzan un 26-50% en 3º ciclo y los de producto de medidas de multiplicación se quedan en 0-25% en 3º ciclo.

Considerando cómo de rápido crecieron los niveles de éxito a lo largo de la educación primaria por ciclos educativos (6-8 años; 9-10 años; 11-12 años) podemos establecer una jerarquía en cuanto al nivel de dificultad de los problemas de estructura multiplicativa (Tabla 3).

Tabla 3. Niveles de dificultad de los problemas por ciclo

CICLO / PORCENTAJE	0-25%	26-50%	51-75%	76-100%
1º	Is. Med. Div. Partitiva Comp.Incóg Comp. (Mult.) Comp.Incóg.Referen (Div.)	Is. Med. Multiplic. Is. Med. Div. Medida		
2º	Comp.Incóg.Escalar (Div) Prod. Med. Multiplic Prod. Med. Div	Comp.Incóg.Referen (Div.)	Is. Med. Div. Medida Comp.Incóg Comp. (Mult.)	Is. Med. Multiplicación Is. Med. Div. Partitiva
3º	Prod. Med. Multiplic	Comp.Incóg.Escalar (Div) Prod. Med. Div	Comp.Incóg.Referen (Div.)	Is. Med. Multiplicación Is. Med. Div. Partitiva Is. Med. Div. Medida Comp.Incóg Comp. (Mult.)

Las evidencias sugieren que en un primer nivel estarían los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y de división partitiva (que alcanzan en segundo ciclo entre un 75 y un 100% de éxito). En un segundo nivel estarían los problemas de división medida y los de comparación de multiplicación (que alcanzan en segundo ciclo entre un 51 y un 75% de éxito). En un tercer nivel estarían los problemas de comparación de división con incógnita el referente (que alcanza en segundo ciclo entre un 26% y un 50% de éxito y en tercer ciclo entre un 51% y un 75%) de éxito. En un cuarto nivel estarían los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división (que solo alcanzan entre un 26% y un 50% de éxito en segundo ciclo). Por último en un quinto nivel estarían los problemas de producto de medidas de multiplicación (alcanzando entre un 0% y un 25% de éxito en tercer ciclo).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es examinar la evolución de los niveles de éxito de los estudiantes en la resolución de problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria (desde primero a sexto curso). Los resultados nos han permitido examinar cómo evolucionan los niveles de éxito a lo largo de la Educación Primaria en cada una de las clases de problemas y realizar una clasificación de los problemas en función del nivel de dificultad.

Observando cómo van evolucionando los porcentajes de éxito por clase de problema y curso, nuestros resultados muestran que los estudiantes presentaron un mayor porcentaje de éxito en los problemas de isomorfismo de medidas seguidos de los problemas de comparación multiplicativa. La categoría de problemas de producto cartesiano son los que presentan mayor dificultad a lo largo de toda la Educación Primaria. Este resultado confirma el obtenido por Nesher (1992) con alumnos de 5º y 6º curso y lo amplia desde 1º a 6º curso.

En la categoría de problemas de isomorfismo de medidas, nuestros resultados complementan los estudios con estudiantes de 11 a 16 años de Hart (1981) que afirmaba que los alumnos identifican más fácilmente un problema de división que uno de multiplicación, y de Bell et al. (1984) que defendían que son más difíciles los problemas de división medida que los de división partitiva. En nuestro caso a partir de 4º curso (9 años) los resultados, en esta clase de problema, coinciden con estos autores. Sin embargo los alumnos entre 6 y 9 años tuvieron más éxito en la identificación de los problemas de multiplicación que los de división y obtuvieron un porcentaje mayor en los problemas de división medida que en los de división partitiva. Este cambio en el patrón de evolución del nivel de éxito en esta edad genera la cuestión de indagar desde una perspectiva más cualitativa las razones de este cambio (posiblemente a través de entrevistas clínicas). Por lo que respecta a la categoría de problemas de comparación multiplicativa se confirma: que son más sencillos los problemas en los que la incógnita es la cantidad comparada (multiplicación) que en los que se busca la cantidad referente o escalar (ambos de división) (Castro, 1995). En esta categoría los problemas de división en los que se busca el escalar son tan difíciles como los de producto de medidas. En cuanto a la categoría de producto de medidas, el análisis nos muestra que resulta más sencillo resolver los problemas de división (en los que la incógnita es uno de las medidas elementales) que los de multiplicación (en los que se busca la medida producto).

Los resultados relativos a la evolución del éxito por problema y curso proporcionan información sobre los cambios de curso a curso en los patrones de los niveles de éxito. Nuestros datos indican que cuando miramos las categorías de problemas globalmente, el patrón de nivel de éxito se mantiene. Es decir, los problemas que resultan más fáciles en el primer ciclo son los más fáciles en tercer ciclo, y lo mismo con los problemas más difíciles. El patrón en la evolución de éxito no se mantiene cuando miramos dentro de las categorías. Los problemas que crecen más rápido en cuanto al nivel de éxito a lo largo de la educación primaria fueron el de división partitiva y el de isomorfismo de medida de multiplicación (primer nivel). Continúan el problema de división medida y el de comparación de multiplicación (segundo nivel) y después el problema de comparación de división con incógnita el referente (tercer nivel). Por último los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división (cuarto nivel) y el problema de producto de medidas de multiplicación (quinto nivel). Estos resultados han llevado a clasificar los problemas según su nivel de dificultad estableciendo 5 niveles.

Aunque nuestra muestra es pequeña, nos ha permitido identificar aspectos que necesitan mayor investigación y patrones en los que se necesitaría realizar un estudio estadístico que mostrara si hay diferencias significativas. Nuestros resultados dan un paso más en cuanto a la evolución del nivel de éxito en los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de educación primaria.

Referencias

Bell, A., Fischbein, E. y Greer, G. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 129-148

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-240). Badajoz: SEIEM.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Nueva York: Macmillan.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16. A report of concepts in secondary mathematics and science*. Londres: John Murray.

Kinda, S. (2013). Generating scenarios of division as sharing and grouping: A study of Japanese elementary and university students. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 190-200.

Kornilaki, E. y Nunes, T. (1997). What do young children understand about division? En E. Pehkonen (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 243). Lahti, Finlandia: PME.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ramírez, M. y de Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Didácticas Específicas, 11,* 40-66.

Squire, S. y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*(1), 1-43.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M.Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México DF: Trillas.

CONOCIMIENTO SOBRE LA RECTA DE UNA MAESTRA DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Knowledge about straight line of a third grade primary teacher

Liñán, M. M.[a] , Montes, M. Á.[b] y Contreras, L. C.[b]

[a]Universidad de Sevilla, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, [b]Universidad de Huelva

Resumen

En el contexto de una investigación doctoral, presentamos el análisis de tres episodios en la observación de una maestra de tercer ciclo de educación primaria cuando enseña geometría. Basándonos en el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), analizamos el conocimiento de los contenidos no explícitos en los conceptos recta, semirrecta y segmento que muestra la maestra y las consecuencias que estos tienen en el aula. Mostramos cómo el sustento epistemológico del conocimiento sobre estas nociones, pese a ser implícito, genera en el conocimiento explícito de la maestra dificultades y faltas de precisión que transmite a sus alumnos.

Palabras clave: *MTSK, Conocimiento Profesional, Geometría, Recta, Semirrecta, Segmento, Infinito.*

Abstract

In a PhD research context, we present the analysis of the three episodes in the observation of a teacher in third cycle of primary education when teaching geometry. Based on the analytical model about mathematics teachers' specialised knowledge (MTSK) knowledge, we analyse the knowledge of non-explicit content in the concepts of straight line, ray and segment shown by the teacher and the consequences it has in the classroom. We show how epistemological foundations of the knowledge about these concepts, despite being implicit, generates in the teacher's explicit knowledge obstacles and inaccuracies that she transmits to her students.

Keywords: *MTSK, Professional Knowledge, Geometry, Straigth Line, Ray, Segment, Infinite.*

INTRODUCCIÓN

Nuestro sistema educativo no ha conseguido aún enfocar la enseñanza desde un punto de vista globalizador, generando compartimentos estancos de conocimiento con dificultad para ser relacionados entre sí. Esto es especialmente relevante en matemáticas, donde los conceptos están imbricados profundamente unos con otros, directamente o a través de relaciones conceptuales complejas.

En el desarrollo de una tesis doctoral sobre el conocimiento especializado en geometría, las observaciones en el aula nos han permitido constatar cómo la informante lidia con un constructo que emerge al comenzar la geometría con sus alumnos: el concepto de infinito, al tratar las nociones de recta, semirrecta y segmento. Esto nos ha llevado a reflexionar sobre cuál ha de ser el conocimiento matemático que debe tener un maestro sobre los temas a enseñar y cuál sería el efecto que produciría una insuficiente construcción de un concepto que podría parecer irrelevante en el

Liñán, M. M., Montes, M. A. y Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

desarrollo de los otros, pero que tiene profundas relaciones, así como los errores futuros que su enseñanza podría generar en sus estudiantes.

Siguiendo a Ma (1999), consideramos que los maestros deben tener un conocimiento profundo de la matemática fundamental, pero no tenemos respuesta desde la investigación en educación matemática sobre la delimitación de ese conocimiento; este límite guía nuestra reflexión.

MARCO TEÓRICO

Partiendo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008), el grupo SIDM[i] de la Universidad de Huelva (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013) ha propuesto un modelo analítico del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK), basado en la especialización como eje del conocimiento del profesor de matemáticas.

El modelo MTSK conserva la dicotomía propuesta por Shulman (1986), y posteriormente refinada por Ball y cols. entre conocimiento didáctico del contenido ─PCK─ y conocimiento del contenido ─SMK─, este último renombrado como Conocimiento Matemático ─MK─. En el modelo desarrollado se proponen seis subdominios, tres de ellos referentes al MK:

- *Conocimiento de los Temas* (KoT), que contempla un conocimiento profundo y razonado de cada tema propio de la matemática escolar, integrando no solo el conocimiento escolar, sino sus fundamentos, propiedades, definiciones o su fenomenología (Montes et al., 2015, Liñán y Contreras, 2013).
- *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM), que abarca el conocimiento matemático desde la perspectiva que permite al profesor conectar unos conceptos con otros, integrándolos en un sistema de conexiones. Esto permitirá comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.
- *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que incluye el conocimiento sintáctico (Schwab, 1978) de las matemáticas, relativo a diferentes formas de definir, argumentar, demostrar y pensar en matemáticas, así como diferentes tipos de razonamientos heurísticos.

Los otros tres subdominios están referidos al PCK:

- *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM), que incluye el conocimiento de cómo aprenden los alumnos el contenido matemático, así como el conocimiento de las características de ese proceso o de los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto.
- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), que supone conocer distintas estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo de las capacidades, conocer recursos que ayuden a los alumnos a construir conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar su intuición respecto de algunos conceptos, es decir, el conocimiento de cómo producir aprendizaje.
- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS), que además del conocimiento del currículo institucional, supone conocer producciones de las distintas investigaciones en educación matemática respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa, o referentes estandarizados de distinta índole que indiquen qué y cómo debe aprenderse el contenido.

Puesto que el interés de esta investigación se centra en el conocimiento sobre geometría que muestra una maestra de 5º de primaria, tomamos como referencia de conocimiento mínimo que esperamos encontrar en un maestro el que figura en el currículum vigente para primaria.

MÉTODO

Al igual que otros modelos que exploran el conocimiento del profesor, la observación de la práctica y su análisis compartido son los elementos básicos con los que accedemos a la información desde MTSK. Nos situamos en un paradigma interpretativo (Bassey, 1995), y planteamos el estudio de caso de tipo instrumental como diseño metodológico. Mostraremos el análisis de un episodio de clase en la observación directa de una maestra cuando enseña geometría en 5º de primaria, apoyada con entrevistas semi-estructuradas cuya finalidad es aclarar algunas de las observaciones. La clase está ubicada en un colegio público de Sevilla y la maestra atesora más de 30 años de experiencia en educación primaria, y toma como apoyo fundamental el libro de texto para diseñar sus clases, utilizando lecturas de divulgación matemática para provocar reflexión en el aula.

El episodio analizado se registró en vídeo, con el consentimiento todos los implicados. Posteriormente se realizó una transcripción literal del mismo y se utilizó un instrumento de análisis basado en el modelo analítico MTSK, que nos permitió identificar los subdominios y categorías de conocimiento puestas en juego, además de reconocer posibilidades de análisis (Flores, Escudero y Aguilar, 2013) que son planteadas a la maestra posteriormente, cuando no quedan claros en la propia transcripción, en la entrevista semi-estructurada.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los episodios tratados corresponden a la primera clase de 5º curso de primaria sobre el primer tema de geometría: sobre rectas y ángulos. Nos centramos en las definiciones de recta, semirrecta y segmento, pues de ellas han emergido otros conocimientos que en sí mismos no están incluidos en el currículum de primaria.

Al comenzar la clase, la maestra presenta el primer concepto que aparece en el libro de texto: la recta, para lo que utiliza un dibujo en la pizarra. Plantea un ejemplo que le parece que permite distinguir entre línea recta y curva, añadiendo después la observación planteada por un alumno para clarificar e intentar mejorar su propio ejemplo.

Define después la semirrecta, partiendo del mismo dibujo de la recta que aparece en la pizarra, señalando un punto en ella. Para afianzar el hecho de que puede tratarse de cualquier punto el que defina las dos semirrectas, dibuja otra recta en la pizarra con un punto ubicado en un lugar diferente al primero, lo que provoca una reacción en el alumnado sobre la igualdad o no de las dos semirrectas generadas. Emerge el concepto de *infinitud de la recta*, apareciendo así la primera conexión importante con este contenido.

Finalmente, en el último episodio aparece la definición de segmento, para lo que utiliza las rectas de la pizarra señalando dos puntos. Emerge aquí la *densidad de la recta*, es decir, dados dos puntos cualesquiera, siempre hay infinitos puntos entre ellos; se muestra así la segunda conexión entre elementos matemáticos.

En todos los casos comienza con una representación, pasando después a la ejemplificación y terminando con la definición dada por el libro (M: Maestra; A: alumnos).

1. M: (dibuja un segmento rectilíneo paralelo a la horizontal con inicio y fin, marcando los puntos) Esto no es (borra los puntos marcados) No tiene principio ni fin (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos indicando que continuaría por ambos lados de la pizarra). No sabemos ni dónde empieza ni dónde acaba, no tiene curvas ni ángulos. Es como cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba.
2. A1: La carretera también.
3. M: Bueno las carreteras tienen curvas. Si tienen curvas ya no es una recta. Bueno, pues vamos a poner en el cuaderno: recta, y ponemos las características: es una línea de puntos que no tiene ni principio ni fin y que no tiene líneas curvas ni ángulos.

Observamos cómo la profesora usa su KMT al proponer un ejemplo sobre cuya adecuación podría no haber reflexionado: los cables de la luz. En el momento que lo plantea parece darse cuenta del equívoco que puede generar en sus alumnos (KFLM) y rectifica (1): "*no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos*".

Refiriéndonos al MK de la profesora, vemos que usa la representación gráfica de la recta, siendo consciente de que no puede tener límites, así que lo hace de extremo a extremo de la pizarra, considerando que, con su lenguaje no verbal, muestra la ausencia de inicio y fin, apareciendo de forma implícita la idea de infinitud. La maestra define recta como lo hace el libro de texto, usando dos conceptos que no han tratado previamente: línea y punto (noción a la que, en el currículum vigente, no se hace referencia, ni si quiera de forma intuitiva). Podemos observar también un indicio de KPM, ya que la profesora establece condiciones para dar significado y definir la idea de recta como una construcción sin principio ni fin, pese a no dar elementos, más allá de los meramente visuales, que permitan diferenciar una línea recta de una curva.

4. M: Ahora vamos a ver lo que es una semirrecta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, la cortamos y tenemos dos semirrectas. Según esto, ¿qué será una semirrecta?
5. A1: Un punto que divide a la recta en dos partes iguales.
6. M: Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto aquí (dibuja una recta en la pizarra y un punto, que borra y luego vuelve a pintar en otro lugar). Como es infinita, pues una semirrecta estaría aquí (señala) y la otra desde el punto hasta el infinito, las dos semirrectas. Definiríamos un punto y las dos semirrectas, que son infinitas.

   (Nota: el libro dice, en la definición de semirrecta: "un punto divide a una recta en dos partes iguales, llamadas semirrectas, con principio pero sin fin", y la maestra la lee y la escribe. Obvia, al volver a dibujarla en la pizarra la afirmación "dos partes iguales".)
7. M: Pues así, aquí empieza esta semirrecta y aquí la otra.
8. A2: Pero una es más larga que la otra, ¿no?
9. M: Bueno, es que son infinitas, y el infinito….Por eso he puesto yo distintos puntos, me da igual dónde esté el punto, son infinitas…

La maestra define la semirrecta partiendo del concepto anterior establecido sobre la recta y de una de sus características o propiedades, aunque existe una cuestión subyacente a su argumentación: la recta infinita se divide en dos semirrectas desde el punto señalado hasta el infinito. Podríamos tener aquí una conexión transversal (KSM). Otra posible conexión se presenta al hablar de dos elementos, recta y semirrecta, que son infinitos en ambos casos, con la diferencia de estar acotada la semirrecta en uno de los sentidos. Creemos interesante profundizar en cómo la maestra articula estos conceptos relacionados unos con otros, mostrando una conexión ligada a la complejización de contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2014).

Cuando la maestra decide dibujar una nueva recta, señalar un primer punto aproximadamente en la mitad de la pizarra para luego borrarlo y marcar otro claramente alejado del centro, se muestra un posible conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje (KFLM), pues parece forzar la pregunta del alumno (8), además de generar un posible debate sobre la definición que muestra el libro (KPM). Vemos también una dificultad en la práctica ligada a la Matemática en general, pues la forma en la que está expresada la primera definición genera una incongruencia (5) de la que nadie parece hacerse consciente; idéntico comentario cabría en la definición que aparece en el libro y que todos dan como válida (*"…dos partes iguales"*).

10. M: Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es el segmento?

11. A3: Es el trozo de recta limitado por dos puntos.

12. M: Pues ahora tenemos el segmento, igual que antes tenemos la recta (dibuja en la pizarra una recta y señala dos puntos de la misma) y esto es el segmento. ¿Qué dice el libro, P., por favor?

13. A4: Es la parte de la recta delimitada por dos puntos.

14. M: Pero los dos puntos no son contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque si no, no tenemos segmento. Los puntos se llaman extremos.

15. M: Los extremos (escribe la palabra "extremo" en cada uno de los puntos que ha dibujado en la recta y que delimitan el segmento) Estos extremos delimitan la recta infinita, cortada dos veces, entonces sale un segmento.

Nuevamente observamos KoT, pues la maestra parte de la representación de la recta y construye la definición de segmento partiendo de sus propiedades. Al pedirle al alumno que lea la definición del libro, la maestra incluye un comentario que evidencia una debilidad en su conocimiento acerca de la densidad de la recta, apareciendo además una conexión de complejización (KSM) en la relación con los números reales, emergiendo el concepto de infinito en un conjunto acotado.

Observando transversalmente los tres episodios aparece, subyacente al conocimiento de la maestra, la idea de que la recta y la semirrecta son infinitas, aunque el segmento no. Emerge, de nuevo, conocimiento relacionado con el infinito entendido como cardinal y los diferentes cardinales de conjuntos infinitos numerables y no numerables.

Para profundizar en la explicitación de esta idea, se planteó, en una sesión de entrevista a la maestra, una pregunta relacionada (E: entrevistador; M: maestra):

E: ¿Habéis trabajado alguna vez el concepto de infinito?

M: Cuando hemos dado los números… los números son infinitos, ahí sí que puede ser que hayamos trabajado la cantidad como infinitas cosas. Para ellos es algo que es muy grande muy grande o muy largo muy largo, que no lo pueden abarcar con el pensamiento, ni con la vista ni con las manos… No lo han vivido como un problema, no sé si porque tienen el concepto de número… porque hemos intentado ver números y hemos escrito en la pizarra, que hemos intentado verlos, agruparlos, que seguíamos y seguíamos y no tenía fin, no terminábamos nunca… o el espacio, que ellos saben que es infinito, que se escapa de nuestro conocimiento. Yo creo que no les cuesta, el aproximado a lo que creemos los adultos que es infinito, no creo que les cueste a ellos. De hecho nunca han planteado dificultad cuando se trata el infinito.

La maestra da a los números la propiedad de infinitud, sin reflexionar sobre qué conjunto numérico es infinito, o de qué forma lo es (acotación o cardinal). Asimismo, defiende que sus estudiantes generen el significado de 'muy grande' asociado al infinito pero, en su propia descripción de ese significado, incluye la imposibilidad de abarcarlo y el hecho de que escape del conocimiento, relacionado con un modelo de indefinición al pensar sobre el infinito (Belmonte, 2009). Esta reflexión nos muestra que la profesora posee conocimiento de las características de aprendizaje, KFLM, relacionado con el infinito, si bien coincidimos con Montes (2015) en que gran parte de este conocimiento se basa en cierto nivel de reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje del concepto, ya que ella misma se incluye como parte de las reflexiones sobre sus estudiantes.

EL CONOCIMIENTO DEL INFINITO SUBYACENTE A LA REFLEXIÓN DE LA MAESTRA

En los episodios analizados aparece tanto el concepto actual como potencial del infinito (Moreno y Waldegg, 1991), pues la maestra reconoce, en las entrevistas mantenidas posteriormente, que nunca se ha tratado el concepto infinito más allá de la generación de números (Montes, 2015), donde ella misma parece confundir lo *muy grande* con *lo infinito.*

Cuando la maestra presenta en modo gráfico la recta es consciente de que no puede simbolizar ese "*sin principio ni fin*" (3), así que hace un gesto para remarcar esa falta, que asume como infinitud de la recta. Emerge, más allá de la aparición del concepto infinito, un aspecto de un conocimiento profundo de la matemática: ¿en qué sentido es infinita la recta?, ¿en longitud?, ¿cantidad de puntos?

En el primer caso, infinita en longitud, concepto subyacente tanto en los libros de texto como en este episodio, genera un error conceptual. Una cantidad de magnitud no puede ser infinita por las propias definiciones de magnitud y de medida, una magnitud es un atributo susceptible de aumentar o disminuir, sobre el que se puede definir la igualdad y la suma sobre los números reales positivos (Fiol y Fortuny, 1990), por lo que "infinito" no puede ser una cantidad de una magnitud (Gardiner, 1985); por otro lado, la función *medida* está definida en el intervalo [ ).

¿Está entonces esa *infinitud* de la recta (*línea de puntos sin curvas ni ángulos que no tiene principio ni fin*) referida a su cantidad de puntos? En caso afirmativo, podríamos colocar en idéntica situación a la semirrecta y al segmento; es decir, la profesora usa objetos matemáticos en los que aparece el infinito en conjuntos acotados, aunque parece que sin consciencia de ello.

El uso de este concepto de forma errónea se repite en la respuesta a la cuestión que plantea la alumna "*Pero una es más larga que la otra, ¿no?*" (8) cuando la maestra define semirrecta y señala dos puntos diferentes para mostrar lo que supone distintas semirrectas. Su respuesta incluye nuevamente la referencia al infinito (9), así como en la propia definición del libro (6), subyaciendo la idea de que, sabiendo que cualquier conjunto infinito I tiene la propiedad de poder definir una aplicación inyectiva de I sobre un subconjunto de I, esto puede contradecir el principio holístico "*el todo es mayor que la parte*".

El nombre "semirrecta" puede evocar "mitad" en el sentido matemático de partes iguales, lo que implica la pregunta ¿en qué sentido se da dicha igualdad? Por otro lado, se presenta un nuevo problema didáctico y de concepto con la definición: en la recta aparece la expresión "*sin principio ni fin*" (3) y en la semirrecta "*con principio pero sin fin*" (6). Así, un conjunto *infinito* puede no tener inicio ni fin o solo no tener fin, pero ¿podría tener fin y no inicio? La imprecisión en el uso del lenguaje matemático, tanto del libro como de la maestra, genera obstáculos didácticos que impiden una correcta comprensión de ciertos conceptos que han de construirse por no ser evidentes.

CONCLUSIONES

Autores como Gardiner (1985) plantean que los procesos infinitos son cuestiones que no se tratan explícitamente en la escuela primaria y cuyos fundamentos se dan por hechos al tratar el concepto posteriormente en la educación secundaria. Surgen conexiones estructurales (KSM) entre la geometría y los procesos infinitos que no son abordados, por lo que pueden aparecer problemas entre el infinito matemático (actual o potencial) y el infinito psicológico. Este mismo autor identifica distintos procesos infinitos que surgen de forma natural y que no son tratados como contenido.

¿Qué debería conocer la maestra sobre el infinito? Emerge la necesidad de establecer una conexión entre la recta real y la recta, semirrecta y segmento para identificar esa infinitud con la cantidad de puntos y no con su longitud y, lo que es igualmente importante, la concepción de la densidad de los números reales genera la conexión que permite decir que no existen puntos contiguos en una recta, que es localmente medible pero no globalmente.

Es destacable el conjunto de errores, tanto conceptuales (KoT), como de conexiones (KSM) y procedimiento matemático (KPM), que transmite el libro de texto, y sobre los que la maestra no se cuestiona: "*un punto divide a la recta en dos partes iguales* ─aquí emerge la posibilidad de preguntarse por la naturaleza de esta igualdad (KPM)─ *llamadas semirrectas con principio pero sin fin*"─ en esta expresión, el significado y sentido del principio y fin, podría ser objeto de reflexión a un nivel epistemológico (KoT)─; *"una recta es una línea de puntos, sin curvas ni ángulos,[…]*" ─aquí cabe cuestionar la naturaleza de los elementos que se usan para definir, y su presencia en cursos anteriores (KFLM), ya que contiene definiciones basadas en otros conceptos que nunca se han tratado antes─; *"un segmento es un trozo de recta limitado por dos puntos*"─ esta definición muestra un lenguaje lejano al lenguaje matemático, por lo que cabría preguntarse cómo expresarlo de forma más precisa (KoT, KPM), o si el tipo de lenguaje usado tiene la intencionalidad de fomentar el aprendizaje de los alumnos (KMT, KFLM).

Para terminar, destacamos que MTSK nos ha permitido obtener una visión precisa y detallada de las distintas tipologías de conocimiento emergentes en la discusión de la maestra con sus alumnos en el tratamiento de conceptos como la recta, semirrecta y segmento, consiguiendo una visión más amplia del conocimiento especializado implicado. Más allá de detectar el conocimiento matemático o didáctico, hemos podido identificar elementos que nos hacen pensar en la necesidad de un conocimiento profundo de la matemática escolar, no sólo en términos de conocer "más", sino de conocer "mejor" los contenidos geométricos. Es en este sentido donde observamos ciertas relaciones entre los distintos tipos de conocimiento. Un conocimiento de los temas (KoT) superficial sobre geometría puede bastar para seguir el libro de texto sin cuestionamientos profundos. Sin embargo, para plantear dichos cuestionamientos, entran en juego el conocimiento de la estructura matemática (KSM), para establecer la coherencia de las construcciones matemáticas realizadas, o el conocimiento de la práctica matemática (KPM), al reflexionar sobre la consistencia de definir ciertos conceptos como la recta, sin haber definido previamente los elementos usados en la definición.

Agradecimientos

Los autores son miembros del proyecto de investigación "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013─44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Agradecemos su colaboración al Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Bassey, M. (1995). *Creating education through research*. Edimburgo, Escocia: British Educational Research Association.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del Cerme 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Fiol, M. L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad geométrica. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Gardiner, A. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical gazette, 69*(448), 77-87.

Liñán, M. M., y Contreras, L.C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Tópicos Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawence Erlbaum.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Huelva: Universidad de Huelva.

Montes, M., Contreras, L.C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367,* 36-62.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2014). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del Cerme 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía.

Moreno, L., y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics, 22*(5) 211-231.

Schwab, J. J. (1978). *Education and the structure of the disciplines.* En I. Westbury y N.J. Wilkof (Ed.). *Science, curriculum and liberal education,* (pp. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

[i] Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática

LA INFLUENCIA DEL ENUNCIADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE M.C.D. Y M.C.M. DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO

The influence of the statement on the solving of g.c.d. and l.c.m. problems by preservice elementary teachers

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A.

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados de una investigación con estudiantes para maestro sobre la resolución de problemas verbales ligados a los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m). Los principales objetivos de la investigación eran evaluar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y analizar la influencia en el proceso de resolución de la presencia en el enunciado de palabras clave. La comunicación se centra en una dificultad que presentan los estudiantes a la hora de decidir entre el m.c.d. y el m.c.m. en la resolución de problemas verbales. En este sentido, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, apuntan a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes no involucran las ideas de múltiplo y divisor en la resolución, sino que se guían por las palabras clave del enunciado para desencadenar el cálculo algorítmico del m.c.d. o del m.c.m.

Palabras clave: *Mínimo común múltiplo, máximo común divisor, formación inicial de profesores, problemas verbales, educación primaria*

Abstract

This paper presents results from a study with preservice elementary teachers on solving word problems related to the concepts of greatest common divisor (g.c.d.) and least common multiple (l.c.m.). The main objectives of the research were to evaluate the students' competence in the resolution of such problems and analyse the influence of the presence of key words in the problem statement on the process of resolution. The paper is focused on a difficulty which the students present when deciding between the g.c.d. and the l.c.m. in solving word problems. In this sense, both quantitative and qualitative results suggest that the origin of the difficulty might be that students do not involve notions of multiple and divider in the resolution but they are guided by the keywords of the statement to continue with the algorithmic calculation of the g.c.d. or the l.c.m.

Keywords: *Least common multiple, great common multiple, initial educational practice, word problems, primary school education*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor (m.c.d) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). En esta línea, Zazkis y Campbell (1996) realizaron un estudio en estudiantes para maestros (en adelante, EPM), centrado en el concepto de divisibilidad y su relación con la división, multiplicación, números primos y compuestos, factorización y reglas de la divisibilidad. Sus resultados señalaban que la instrucción recibida por los participantes no había facilitado la compresión de estos conceptos.

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350). Alicante: SEIEM.

Además, el estudio atestiguó una tendencia entre los participantes a aplicar un razonamiento procedimental, incluso en situaciones donde los EPM evidenciaban comprensión conceptual.

Otras investigaciones subrayan la importancia en la compresión de la divisibilidad de aspectos como las representaciones decimal y factorial de los números (Zazkis y Campbell, 1996; Zazkis y Liljedahl, 2004) o las relaciones entre conceptos (Bodí, Valls y Llinares, 2007).

Dentro del estudio de la divisibilidad, existen dos conceptos particularmente dificiles de comprender y utilizar por parte de los alumnos: el m.c.d. y el m.c.m. Así, Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (en prensa) caracterizaron el conocimiento matemático sobre números y operaciones de EPM españoles a partir de los resultados del estudio internacional TEDS-M, acreditando un conocimiento matemático insuficiente de las propiedades del m.c.d. y m.c.m.

En esta misma línea y dentro de una investigación más amplia, Bodí (2006) estudió cómo estudiantes de secundaria resolvían problemas verbales que implicaban el uso del m.c.m. o del m.c.d. La realización de entrevistas clínicas le permitió observar que algunos de estos estudiantes actúan de forma mecánica cuando emplean el algoritmo de buscar en la descomposición factorial los factores no comunes y comunes de mayor exponente para el cálculo del m.cm. Así, aunque son capaces de usar el algoritmo adecuadamente para el cálculo del m.c.m., muestran desconocer el significado del número obtenido por este método.

Los resultados de Bodí (2006) respaldaban los señalados por Brown, Thomas y Tolias (2002), quienes habían estudiado la comprensión de la divisibilidad y, en particular, la idea de múltiplo común en un grupo de EPM. En dicho estudio también se observó que, a pesar de la facilidad con que los estudiantes aplicaban el algoritmo basado en la factorización en números primos para la obtención del m.c.m., pocos de ellos eran capaces de explicar el porqué este procedimiento daba lugar al m.c.m. e incluso, no eran capaces de reconocer la implicación de m.c.m. en problemas verbales si no se mencionaba explícitamente la expresión “mínimo común múltiplo” en el enunciado. Del mismo modo que sucede con el m.c.m., el conocimiento sobre el m.c.d. es limitado para los estudiantes en general y para los EPM en particular, lo que provoca graves dificultades en la creación y resolución de problemas de m.c.d. (Noblet, 2013).

Las investigaciones existentes apuntan a que los conocimientos sobre estos conceptos suelen estar basados en reglas que carecen de explicaciones intuitivas para los alumnos (Dias, 2005). Zazkis y Gadowsky (2001) consideran que esto es debido a que las prácticas docentes actuales se centran en el aprendizaje de los cálculos en lugar de la estructura y propiedades de los números.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

Esta investigación se enmarca dentro de la línea de investigación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual constituye una evolución del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Dentro de este marco, esta comunicación se ubica en el subdominio del conocimiento de los temas (KOT) al centrarse en el conocimiento matemático de EPM. Se planteó una investigación con los objetivos: 1) analizar la competencia de EPM en la resolución algorítmica de problemas verbales en situaciones de divisibilidad que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. y 2) evaluar la influencia de palabras clave del enunciado de un problema verbal que involucra los conceptos m.c.d. y m.c.m. en las resoluciones algorítmicas de EPM.

En esta comunicación se presentarán resultados preliminares de esta investigación, prestando atención a un conjunto de actuaciones en las que EPM acreditaron dificultades para resolver un tipo de problemas verbales determinado. En particular, estos EPM denotaron una incapacidad para elegir adecuadamente si usar el m.c.m. o el m.c.d. durante la resolución algorítmica de un problema verbal. Los planteamientos de los EPM señalaron que éstos, en vez de apoyarse en las nociones de múltiplo y divisor, se veían influenciados por términos claves del enunciado a la hora de determinar si la solución del problema vendría dada por el m.c.m. o por el m.c.d.

METODOLOGÍA

Para abordar los objetivos propuestos, se diseñó una investigación con dos etapas, una cuantitativa y otra cualitativa. En el estudio cuantitativo participaron 129 EPM de Educación Primaria. Todos los participantes habían cursado ya la asignatura relacionada con números y su didáctica en años anteriores. De este modo, es plausible interpretar que las cogniciones reflejadas durante la investigación, podrían ser las que presentarían al inicio de su ejercicio profesional como docentes.

En esta fase de la investigación los participantes debían resolver una prueba escrita compuesta por cuatro problemas verbales. Estos problemas podrían catalogarse como problemas típicos de m.c.d. y m.c.m. pues, de hecho, están inspirados en problemas presentes en unidades de libros de texto donde se explican los conceptos de m.c.d. y m.c.m. Con antelación a la realización de la prueba escrita, se recordó brevemente los algoritmos de cálculo del m.c.d. y del m.c.m. Aunque este hecho pueda condicionar la toma de decisiones e inducir a la utilización de los algoritmos en la resolución, se encuentra alineado con el propósito de la investigación de estudiar la toma de decisiones de los EPM en resoluciones algorítmicas. Dicha explicación se realizó en una situación totalmente descontextualizada, no ligada a problema verbal alguno, en la que se presentaban tres números naturales y se calculaban su m.c.d. y su m.c.m. a partir de la descomposición de los números en factores primos. Esta explicación pretendía que, durante la resolución de la prueba escrita, las actuaciones de los estudiantes no estuvieran influenciadas por la dificultad de calcular el m.c.d. o el m.c.m. o que cálculos erróneos del m.c.d. o del m.c.m. pudieran hacer que el estudiante modificara sus planteamientos al no dar sentido a la solución en el contexto del problema. Tras esta explicación, se entregaba la prueba escrita a los estudiantes y se les concedía un tiempo de 40 minutos para su resolución. Para evitar que los problemas fueran resueltos en un orden fijo por todos los participantes, se emplearon diferentes versiones de la misma prueba escrita, las cuales sólo diferían en el orden de aparición de los problemas.

Los cuatro problemas se caracterizan por ser problemas verbales en los que hay dos cantidades conocidas y la solución es el m.c.d. o el m.c.m. de los dos únicos datos dados en el enunciado. En concreto, dos problemas tenían como solución el m.c.d. y otros dos como solución el m.cm. A su vez, cada pareja de problemas (de m.c.d. o de m.c.m.) presentaba entre sí la diferencia de contener en su enunciado diferentes palabras clave: *máximo* o *mínimo*. Así, el instrumento empleado en el estudio cuantitativo combina dos factores: 1) problemas cuya solución es el m.c.d. o el m.c.m. y 2) problemas en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo* o la palabra clave *mínimo*. De la combinación de estos dos factores se obtienen los cuatro problemas empleados en la prueba escrita. Por una cuestión de economía usaremos la siguiente notación a la hora de referirnos a los problemas: 1) Problema *divmax* (problema con solución el m.c.d. de los datos del problema y en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo*); 2) Problema *divmin* (solución el m.c.d. y palabra *mínimo*); 3) Problema *mulmax* (solución el m.c.m. y palabra *máximo*); y 4) Problema *mulmin* (solución el m.c.m. y palabra *mínimo*). La Figura 1 muestra los enunciados de los problemas.

El análisis de las producciones de los estudiantes en el estudio cuantitativo debía permitir, además de dar respuesta parcialmente a los objetivos de la investigación, la selección de participantes para la siguiente etapa de la investigación: un estudio cualitativo. Esta fase de la investigación consistió en un estudio de casos, en el que se grabó a parejas de estudiantes resolviendo problemas verbales como los empleados en la prueba escrita. De hecho, los problemas empleados en el estudio de casos eran estructuralmente equivalentes a los empleados en la prueba escrita. A partir de las producciones en lápiz y papel, se pretendía identificar patrones o tendencias de actuación a la hora de resolver los problemas y conformar parejas en que la que ambos miembros ofrecieran líneas de actuación similares. Así, el estudio de casos podría ofrecer información sobre los orígenes de las dificultades o tendencias de los estudiantes durante la resolución individual en lápiz y papel.

Problema Las cuerdas (divmax)

Dos cuerdas, de 18 cm y 24 cm respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. Calcula el tamaño máximo de estos trozos.

Problema Los cables (divmin)

Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿Cuál será la longitud de los trozos?

Problema Felipe y Alberto (mulmax)

Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?

Problema El faro (mulmin)

Un faro se enciende cada 12 segundos y otro cada 18 segundos. Si se acaban de encender a la vez en este momento, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir.

Figura 1. Enunciados de los problemas de la prueba escrita

RESULTADOS

Resultados desde el estudio cuantitativo

La Tabla 1 presenta los resultados tras la codificación de las respuestas de los estudiantes en la prueba escrita. Se muestran los resultados desglosados para cada uno de los cuatro problemas. A la hora de codificar las respuestas se han considerado tres categorías diferentes: *m.c.d*, *m.c.m* y *Otros*. La categoría *m.c.d* da cuenta de todas aquellas resoluciones en las que es evidente que el resolutor ha intentado el cálculo del m.c.d., ya sea algorítmicamente o por otro procedimiento (p. ej. mediante el uso de representaciones auxiliares). La situación es totalmente análoga para la categoría *m.c.m*. La categoría *Otros* comprendería aquellas actuaciones erróneas en las que el resolutor no ha abordado el problema o bien en que las resoluciones son erróneas y no pueden ser identificadas con el m.c.d. o con el m.c.m. de los datos del problema.

Tabla 1. Resultados prueba escrita por problema y por tipo de planteamiento

		Planteamiento		
	N	*m.c.d.*	*m.c.m.*	*Otros*
Problema divmax	129	103 (79,84%)	25 (19,38%)	1 (0,78%)
Problema divmin	129	123 (95,35%)	6 (4,65%)	0 (0%)
Problema mulmax	129	22 (17,05%)	107 (82,95%)	0 (0%)
Problema mulmin	129	43 (33,33%)	84 (65,11%)	2 (1,56%)

En consecuencia, en los problemas *divmax* y *divmin* la categoría *m.c.d.* refleja resoluciones que clasificaríamos como correctas, mientras que en los problemas *mulmax* y *mulmin* esta circunstancia se daría para la categoría denominada *m.c.m.* Por otro lado, en la tabla se ha optado por no distinguir el procedimiento por el cual se hacía el cálculo del m.c.d. o del m.c.m. dado que todos los resolutores lo hicieron de forma algorítmica. Sirva como muestra de este hecho el dato de que las 516 resoluciones recogidas, sólo cinco de ellas evidenciaron el cálculo de manera no algorítmica.

Una de las hipótesis investigadoras que motivó el diseño del instrumento se sustentaba sobre la idea de que la palabra *máximo* y la palabra *mínimo* podrían llevar al estudiante al cálculo del m.c.d. y del m.c.m., respectivamente, sin una reflexión de la situación descrita en el enunciado. Sin embargo, a la vista de los resultados obtenidos para el problema *divmin*, parece evidente que este impulso de calcular el m.c.m. ante la aparición de la palabra mínimo, en caso de producirse, no es ni mucho menos una actuación predominante entre los estudiantes para maestro. En cambio, resulta destacable los resultados obtenidos para los problemas *divmax* y *mulmin* donde se observó la existencia de estudiantes que abogaban por ofrecer como solución el m.c.d. ante enunciados con la palabra *mínimo* y como solución el m.c.m. ante enunciados con la palabra *máximo*.

Resultados desde el estudio de casos

Se procedió a la grabación de la resolución de problemas equivalentes a los de la prueba escrita por parejas de estudiantes que hubieran mostrado comportamientos de interés desde el punto de vista investigador al resolver los problemas individualmente en lápiz y papel. Concretamente, en relación con la dificultad que acabamos de presentar en el párrafo anterior, se formaron parejas que hubieran acreditado esta misma tendencia. En esta comunicación se presentarán extractos de resoluciones de la pareja Lola-Carla con el fin de ilustrar la dificultad, así como para ofrecer indicios explicativos del origen de estas actuaciones. Las Figuras 2 y 3 y 4 y 5 muestran las resoluciones de los problemas *mulmin* y *divmax* en la prueba escrita por parte de Carla y Lola, respectivamente.

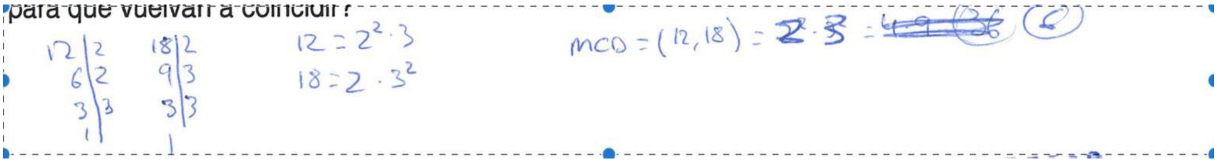


Figura 2. Resolución de Carla del problema *mulmin*

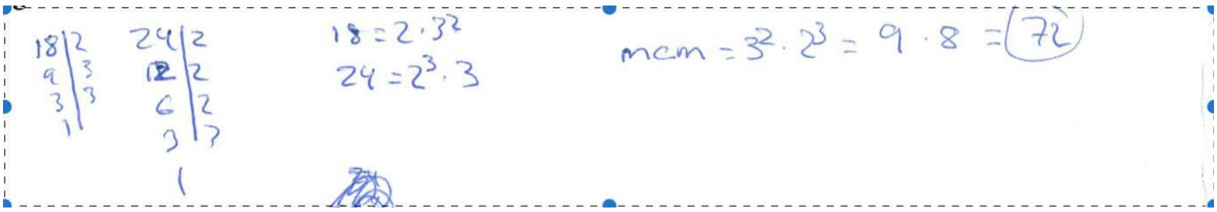


Figura 3. Resolución de Carla del problema *divmax*

Figura 4. Resolución de Lola del problema *mulmin*

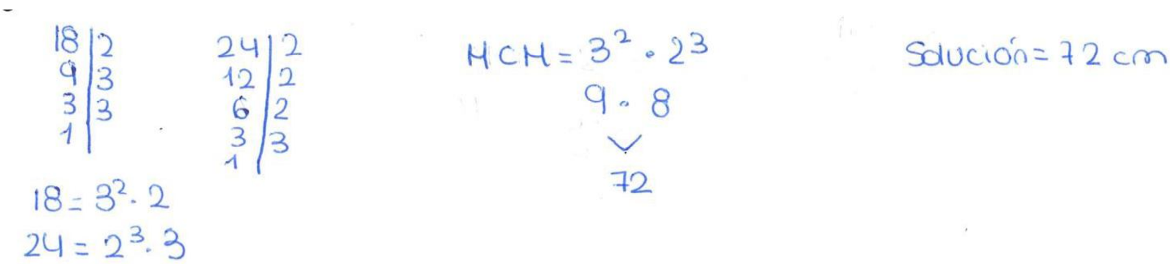


Figura 5. Resolución de Lola del problema *divmax*

Las producciones escritas muestran cómo ambas estudiantes reprodujeron los mismos planteamientos erróneas en la prueba del estudio cuantitativo. En el estudio de casos se les propuso que resolvieran en pareja dos problemas equivalentes a *divmax* y *mulmin*. Las resoluciones debían ser realizadas en la pizarra de un aula donde sólo se encontraban la pareja de alumnas y dos investigadores. El estudio de casos evidenció la tendencia a usar el m.c.d. en problemas donde aparece la palabra *mínimo* y la solución sería el m.c.m. y a usar el m.c.m en problemas donde aparece la palabra *máximo* y la solución sería el m.c.d. Por restricciones de espacio, aquí sólo se presenta un ejemplo del primero de estos casos. En concreto, se muestra un extracto de la resolución de un problema equivalente a *mulmin* por parte de la pareja Lola-Carla. El protocolo se inicia con la lectura del enunciado por parte de Carla.

1. C: Un autobús de la línea B pasa por la parada de la Plaza Mayor cada doce minutos y el de la línea A cada dieciocho minutos. Si acaban de coincidir en dicha parada, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir? A ver, cada doce minutos… El otro, dieciocho.
2. L: Dieciocho, el A.
3. L: Y nos preguntan cuándo vuelven a coincidir.
4. C: Sí.
5. L: <u>El mínimo tiempo posible para que transcurra. El mínimo tiempo para que vuelvan a coincidir. Pues sacamos... yo creo que el máximo común divisor pero…</u>
6. E: ¿Por qué?
7. L: Porque si acaban de coincidir ahora mismo, hasta que pase otra vez que vuelvan a coincidir, tiene que pasar... <u>nos tiene que dar la mínima cantidad de tiempo</u>.
8. C: Sí.

Las verbalizaciones de Lola señalan que la estudiante considera que para obtener el tiempo mínimo que ha de transcurrir para que los autobuses vuelvan a coincidir han de emplear el m.c.d. (ítems 5 y 7), con lo que Carla se muestra de acuerdo (ítem 8).

9. C: Pues descomponemos, vamos a descomponer.
10. (Inician el cálculo del m.c.d. aplicando el algoritmo para lo que factorizan los números 12 y 18.)
11. C: Dos a la dos por tres.
12. L: Y ahora ¿qué hacemos? ¿Es el máximo común divisor?
13. C: Sí, yo creo que es el máximo común divisor.
14. L: Sí.
15. C: El máximo común divisor sería 2 por 3, ¿no?
16. C: Sí, cada 6 minutos.
17. L: A los 6 minutos vuelven otra vez a coincidir.
18. E: ¿Por qué pensáis que es el máximo común divisor?
19. C: <u>Porque tenemos que encontrar el menor tiempo posible.</u>
20. E: Y el máximo común divisor decías que os da el mínimo, o sea el... si dice el mínimo tiempo posible, ¿por qué os hace pensar que es el máximo común divisor?
21. C: <u>Es que el mínimo común múltiplo no daría</u>.
22. L: <u>Daría mucho más</u>.

23. C: El mayor tiempo en que pueden volver a coincidir.

Tras el cálculo del m.c.d., la pareja expone que los autobuses coincidirían nuevamente en la parada a los seis minutos (ítems 16 y 17). Ninguna de las estudiantes parece evaluar el resultado en el contexto del problema y no parecen presentar dudas sobre la validez de la solución. Al ser cuestionadas por el entrevistador sobre cómo justificarían el uso del m.c.d., Carla incide en que mediante el m.c.d. obtienen el menor tiempo posible (ítem 19). A su vez, entre ella y su compañera justifican que si usasen el m.c.m. estarían calculando el máximo tiempo en el que los autobuses volverían a coincidir (ítems 21 a 23). Al término del estudio de casos, el entrevistador aboga por preguntar directamente a la pareja qué aspectos toman en consideración a la hora de decantarse por el m.c.m. o el m.c.d. durante la resolución de estos problemas (ítem 24):

24. E: Solamente una pregunta para acabar. Si tenéis que tomar una decisión en un tipo de problemas como éstos, para elegir entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, ¿en qué os fijaríais?

25. L: Pues primero si quieren una gran cantidad, o una cantidad más pequeña.

26. E: ¿Y si quieren una gran cantidad?

27. L: Pues coger el mínimo común múltiplo.

Las intervenciones de Lola (ítems 25 y 27) señalan que las estudiantes basan sus planteamientos en el tamaño relativo de las cantidades que obtendrán mediante el cálculo del m.c.d. o del m.c.m. En consecuencia, en situaciones donde tras la lectura del enunciado la pareja interpreta que la solución ha de ser una “gran cantidad”, optarían por calcular algorítmicamente el m.c.m. Si consideraran que la solución del problema viene dada por una cantidad más pequeña, se decantarían por el m.c.d.

CONCLUSIONES

En relación con la competencia en la resolución algorítmica de problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m, los resultados presentados señalan dificultades por parte de los EPM. Así, el estudio ha puesto de manifiesto la dificultad para decidir adecuadamente entre el m.c.d. y el m.c.m. a lo hora de resolver un problema verbal ante la presencia de determinadas palabras clave. En particular, los estudiantes han manifestado la tendencia a emplear mecánicamente el m.c.m. ante enunciados con la palabra *máximo* y, de manera análoga, a usar sistemáticamente el m.c.d. en presencia de la palabra *mínimo*. En la comunicación se han ofrecido evidencias de que este comportamiento tiene su origen en que los estudiantes basan su elección en el tamaño relativo que consideran ha de tener la solución, aspecto fuertemente influenciado por la presencia de determinadas palabras en el enunciado. Este proceder, unido a que los estudiantes recurran al cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de manera algorítmica, habilita que en ningún momento del proceso de resolución emerjan razonamientos sobre las ideas de múltiplo y divisor, conduciendo a los estudiantes a la comisión de planteamientos erróneos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis doctoral. Universitat d’Alacant.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implictive et applications: IV Rencontres internationales d'analyse statistique implicative* (pp. 99-100). Nantes, Francia: Régis Gras.

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport, CA: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 730-738.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (en prensa). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1*.

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate MAthematics Education* (pp. 219-225). Denver, CO: Sigmaa.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: Preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. y Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. En A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41–52). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186.

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS ANTE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA[i]

Strategies used by students from different years when they face compound proportion problems

Martínez Juste, S[a], Muñoz Escolano, J. M.[a] y Oller Marcén, A. M.[b]

[a]Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza,

[b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se analizan las actuaciones de alumnos desde 6.º de Educación Primaria hasta 2.º de Educación Secundaria Obligatoria (11-14 años) con distintos grados de instrucción en proporcionalidad al resolver ciertos problemas de proporcionalidad compuesta. En particular, observamos la tasa de éxito y las distintas estrategias empleadas, tanto correctas como incorrectas. Los resultados muestran un aumento progresivo de la tasa de éxito y una evolución en las estrategias utilizadas desde aquellas que hacen referencia a aspectos de razonamiento proporcional, hacia aquellas en las que prima el componente algorítmico.

Palabras clave: *proporcionalidad compuesta, análisis de estrategias, resolución de problemas, razonamiento proporcional.*

Abstract

In this work, we analyze the behavior of students from 6th to 8th grade (age 11-14) with different degrees of instruction regarding proportionality, when they solve certain compound proportionality problems. In particular, we focus on the success rate and on their strategies, both correct and incorrect. Results show a gradual increasing in the success rate and an evolution in the strategies from those involving proportional reasoning to those giving priority to algorithmic procedures.

Keywords: *compound proportion, analysis of strategies, problem solving, proportional reasoning.*

INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional es un concepto fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares ya que supone la culminación de la aritmética elemental y es la piedra angular para adquirir muchos conocimientos posteriores (Lesh, Post y Berh, 1988). Además, está presente en los currículos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) y es motivo de estudio en la formación de profesorado.

Dentro de la investigación educativa sobre proporcionalidad, una de las líneas de trabajo clásicas es la identificación y análisis de las estrategias de resolución, correctas e incorrectas, utilizadas por estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad (Tournaire y Pulos, 1985). Algunos trabajos se centran en caracterizar la evolución de los razonamientos de los estudiantes (Fernández y Llinares, 2010), incluso de aquellos que no habían recibido instrucción previa en el tema (Silvestre y Ponte, 2012). La mayor parte de estos estudios se centran en la resolución de problemas de proporcionalidad simple (PS en adelante). Sin embargo, la proporcionalidad compuesta (PC en adelante), pese a ser un contenido escolar clásico, no ha recibido la misma atención y no existen apenas trabajos con el anterior enfoque.

Martínez Juste, S., Muñoz Escolano, J. M. y Oller Marcén, A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

El objetivo principal de este trabajo es analizar las respuestas de estudiantes de distintos niveles educativos y distintos grados de instrucción sobre PS y PC al resolver ciertos problemas de PC. En particular, nos centramos en:

- Estudiar la capacidad de los estudiantes para resolver correctamente estos problemas.
- Analizar las estrategias (correctas e incorrectas) utilizadas por los estudiantes.
- Observar la evolución de los anteriores puntos según el grado de instrucción y nivel educativo.

MARCO TEÓRICO

Muchas investigaciones sobre proporcionalidad estudian las estrategias empleadas por estudiantes en la resolución de diferentes tipos de tareas y la frecuencia de estas. Uno de los trabajos de referencia es el de Cramer y Post (1993) que recoge una categorización de problemas de PS (*valor perdido*, *comparación numérica*, *predicción cualitativa* y *comparación cualitativa*) y clasifica las estrategias correctas de resolución de problemas de PS directa de valor perdido y de comparación numérica realizadas por más de 900 estudiantes de 12-14 años en cuatro categorías (*razón unitaria*, *factor de cambio*, *equivalencia de fracciones* y *algoritmo del productos cruzados*). Los autores sugieren la enseñanza de diferentes estrategias para la resolución de estos problemas fomentando las más intuitivas, como la razón unitaria y el factor de cambio, frente a la de productos cruzados, ya que al aplicarla no se deduce necesariamente que los alumnos utilicen razonamiento proporcional sino que ejecutan de manera automática un procedimiento.

En este sentido, Lamon (1993a, 1993b) estudia la influencia de la estructura semántica del problema, y distingue problemas de *medidas bien compactadas*, *parte-parte-todo*, *conjuntos asociados* y *ampliadores-reductores*, en la sofisticación de las estrategias utilizadas por 24 estudiantes de 11-12 años sin instrucción previa. Lamon (1993b) emplea una clasificación de estrategias correctas, similar a la de Cramer y Post (1993), incluyendo las estrategias *de unidad simple* y *de unidad compuesta*, parecidas a la razón unitaria y el factor de cambio. Además, incluye la estrategia llamada *construcción progresiva* o *building up*, donde el estudiante emplea razonamientos multiplicativos como el cálculo del valor unitario o el factor de cambio y luego usa razonamientos aditivos para construir la solución. Esta estrategia está presente en otros trabajos, como en el de Silvestre y Ponte (2012), en el que aparecen descritas con detalle algunas producciones de cuatro estudiantes de 11 años al resolver dos2 problemas de valor perdido y dos de comparación cuantitativa. Lamon (1993a) también determina estrategias incorrectas o no constructivas de razonamiento proporcional, como las de *evitamiento*, *aditivas y pictóricas* y *construcción de patrones* (juzgada incorrecta sin considerar el resultado obtenido).

Por otro lado, Steinthorsdottir (2006) señala que la estructura numérica de los problemas influye en la tasa de éxito y en la estrategia utilizada de manera más determinante que su estructura semántica. Respecto a la naturaleza de las magnitudes que intervienen, algunos trabajos indican que los problemas de proporcionalidad con magnitudes intensivas en el enunciado son más complicados que los que solo contienen extensivas, debido a la familiaridad que tienen los escolares con estas últimas frente a la ausencia de tratamiento que suelen recibir las primeras (Nunes, Desli y Bell, 2003). Menos consenso existe sobre la importancia de que las magnitudes sean discretas o continuas en la dificultad del problema ya que hay estudios apuntando en ambos sentidos (Spinillo y Bryan, 1999; Tournaire y Pulos, 1985).

Especialmente interesantes son las investigaciones con estudiantes sin instrucción previa donde se observan las estrategias incipientes empleadas con el propósito de potenciarlas en la instrucción. Aunque también encontramos trabajos centrados en otros colectivos de estudiantes, como maestros en formación (Rivas, Godino y Konic, 2009; Valverde y Castro, 2009) con el propósito de detectar sus posibles deficiencias. Fernández y Llinares (2010) analizan la tasa de éxito y las estrategias empleadas por una amplia muestra de estudiantes desde 4.º de E. Primaria a 4.º de E.S.O. cuando resuelven problemas de proporcionalidad y aditivos de tipo afín para caracterizar cuántos estudiantes aplican razonamientos aditivos o multiplicativos y constatar la presencia de la *ilusión de linealidad* (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007) y caracterizar su evolución.

La mayoría de los estudios anteriores tratan situaciones de PS. Sin embargo, no encontramos muchas referencias sobre el tratamiento didáctico o de las dificultades de aprendizaje para situaciones de PC. González y Gómez (2011, p. 395) caracterizan la PC dentro del ámbito de la aritmética como aquellas situaciones en las que "dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud". Otros autores (Bosch, 1994, p. 254) inciden en los aspectos funcionales definiendo un "sistema proporcional y compuesto" usando un cierto tipo de funciones homogéneas.

Las situaciones de PC aparecen incidentalmente en algún trabajo sobre proporcionalidad (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; López y Figueras, 1999). Encontramos un análisis específico sobre la PC en el trabajo de Bosch (1994, cap. 10-11) que, en el marco de la TAD y con el propósito de estudiar la proporcionalidad desde un enfoque funcional, estudia el tratamiento de la PC en textos antiguos, identifica técnicas de resolución de problemas de PC (*método de las proporciones*; *reducción a la unidad*; *reducción de la regla de tres compuesta a la simple* y *método de causas y efectos*) y analiza las estrategias utilizadas por profesores universitarios en la resolución de problemas de valor perdido de PC. Además, apunta la influencia de la capacidad del resolutor para dotar (o no) de significado al producto o el cociente de las magnitudes en el éxito y la estrategia utilizada.

Martínez, Muñoz y Oller (2014, 2015) plantean una tipología de métodos de resolución de problemas de valor perdido de PC basada en las realizadas por Bosch (1994) y Cramer y Post (1993) y estudian su presencia en cuatro libros de texto de E.S.O. Esta investigación constata que, pese a la uniformidad de los problemas presentados (todos de valor perdido y la mayoría de tres magnitudes), existe una cierta variedad en cuanto a los métodos de resolución empleados.

MÉTODO Y MUESTRA

Para abordar los objetivos planteados, elaboramos el siguiente cuestionario:

Problema 1: La máquina que pinta las líneas de la carretera necesita 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros de carretera puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día? Problema 2: Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días? Problema 3: Si abrimos 7 grifos durante 4 minutos conseguimos echar 56 litros de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo 5 grifos durante 6 minutos?

Su extensión viene motivada por la necesidad de que se pudiese completar en una sesión de clase. Los criterios para su diseño fueron:

- Los problemas involucran tres magnitudes y son de valor perdido de tipo directa-directa (Martínez et al., 2014).
- Las cantidades numéricas del enunciado son naturales menores que 100 para facilitar los cálculos. Además, han sido escogidas de forma que, si bien las razones internas no son enteras, las externas que tienen una sencilla interpretación como tasa sí lo son (Steinthorsdottir, 2006).
- El contexto y las magnitudes son familiares para el alumno. La estructura semántica es de medidas bien compactadas y de conjuntos asociados (Lamon, 1993a). La magnitud tiempo está presente en los tres enunciados. La cardinalidad es la única magnitud discreta, mientras que el resto son continuas (Spinillo y Bryan, 1999). Salvo una, todas las magnitudes son extensivas (Nunes et al., 2003).

- Los problemas se gradúan de mayor a menor facilidad para asignar significado al producto de las dos primeras magnitudes (Bosch, 1994). En el problema 1 el producto significa “tiempo total trabajado”, en el problema 2, puede interpretarse como “número total de raciones” y en el problema 3, es complicado dar significado a “grifos·minuto”.

El cuestionario fue completado por 181 estudiantes de centros públicos de la provincia de Zaragoza. La muestra es de tipo incidental o casual y estratificada en cuatro estratos (tabla 1) atendiendo al nivel educativo y a si los alumnos habían recibido o no enseñanza sobre PS y PC con anterioridad.

Tabla 1. Los grupos de estudio y el número de participantes del estudio

Grupo 1. Alumnos de 6.º de Primaria sin instrucción previa en PS.	45
Grupo 2. Alumnos de 1.º de E.S.O. sin instrucción previa en PS durante ese curso.	76
Grupo 3. Alumnos de 2.º de E.S.O. con instrucción en PS y sin instrucción en PC ese curso.	44
Grupo 4. Alumnos de 2.º de E.S.O. con instrucción en PS y PC durante ese curso	16
TOTAL	181

Utilizamos un método mixto de investigación, entendido como “un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación que implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 546). Desde un punto de vista cuantitativo, analizamos la tasa de éxito en los problemas para cada estrato. El análisis cualitativo se centra en identificar las estrategias, correctas e incorrectas, de los alumnos.

El análisis cualitativo se aborda mediante el análisis de contenido. Esta técnica de investigación presenta “gran cantidad de ventajas y posibilidades en estudios educativos y sociales” (López, 2002, p. 177). En particular, las unidades de análisis son las producciones de los alumnos y las categorías se construyen a partir de una aproximación inductiva (el análisis da lugar a las categorías) combinada con una componente deductiva sustentada en el marco teórico anterior (Berg, 2007, p. 249). La validez y fiabilidad internas mejoran con la presencia de tres investigadores actuando sobre los mismos registros (Hernández et al, 2010, p. 476).

RESULTADOS

Análisis cuantitativo de las respuestas

En esta primera fase del análisis estudiamos el porcentaje de alumnos que respondieron correcta o incorrectamente a los problemas. No tendremos en cuenta posibles errores aritméticos. En la tabla 2 se muestran los datos desglosados por estratos.

Tabla 2. Porcentaje de aciertos, errores y respuestas en blanco

	Problema 1			**Problema 2**			**Problema 3**			**Todos bien**
	Bien	*Mal*	*Blanco*	*Bien*	*Mal*	*Blanco*	*Bien*	*Mal*	*Blanco*	
G. 1	26,7 %	31,1 %	42,2 %	28,9 %	37,8 %	33,3 %	22,2 %	42,2 %	35,6 %	15,6 %
G. 2	39,5 %	43,4 %	17,1 %	46 %	38,2 %	25,8 %	43,4 %	35,5 %	21,1 %	30,2 %
G. 3	75 %	22,7 %	2,3 %	63,6 %	34,1 %	2,3 %	65,9 %	31,8 %	2,3 %	63,6 %
G. 4	75 %	25 %	0 %	75 %	25 %	0 %	68,7 %	31,2 %	0 %	68,7 %

En primer lugar, señalar que, conforme se avanza en instrucción sobre proporcionalidad la tasa de éxito, tanto global como de cada problema, aumenta y casi desaparecen las respuestas en blanco. Por otro lado, para cada estrato, se observa que la tasa de éxito en los tres problemas es similar. Entre los alumnos que no han recibido instrucción respecto a técnicas de proporcionalidad, el problema 2 tiene mayor porcentaje de acierto, mientras que para los que sí han recibido instrucción es el problema 1 el que obtiene mejores resultados.

Análisis cualitativo de las respuestas

En esta fase del análisis estudiamos las estrategias utilizadas por los alumnos. Entendemos que una estrategia es correcta en el sentido de Cramer y Post (1993). Se ha encontrado una gran variedad de estrategias en las respuestas correctas de los alumnos:

- Construcción de patrones: Consiste en buscar una relación multiplicativa que relacione los datos del problema y reproducirla con las cantidades conocidas para hallar el valor buscado.
- Amalgamación de magnitudes: Consiste en transformar el problema original manipulando adecuadamente las magnitudes implicadas en un nuevo problema de PS.

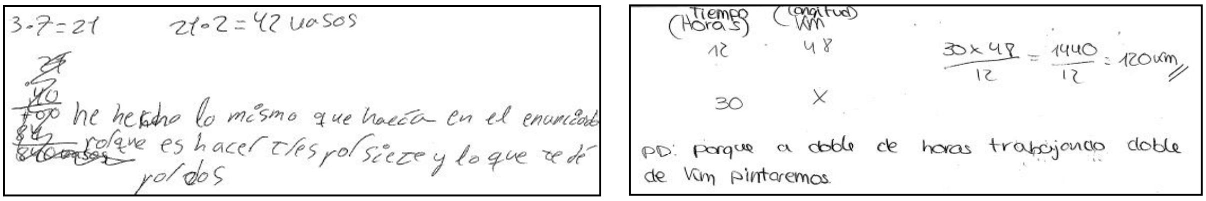


Figura 1. Construcción de patrones (izda.) y Amalgamación (dcha.)

- Paso a paso pasando por la unidad: Consiste en obtener la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de todas las demás y, a partir de ella, hallar el valor buscado con argumentos aritméticos.
- Paso a paso sin pasar por la unidad: Consiste en reducir el problema a una sucesión de problemas de valor perdido de PS en los que se fijan todas las cantidades menos dos.

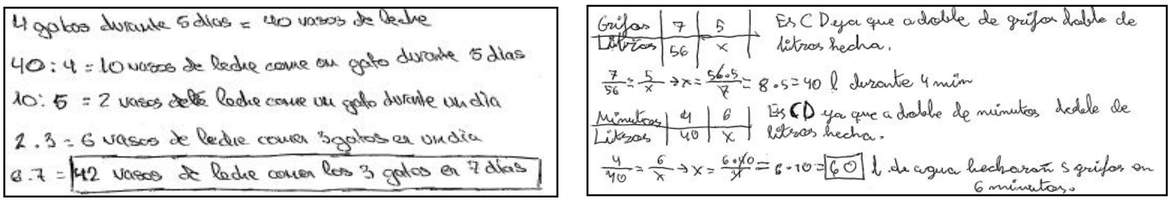


Figura 2. Paso a paso pasando por la unidad (izda.) y sin pasar por la unidad (dcha.)

- Proporciones: Consiste en plantear una proporción con los datos del problema para obtener el valor desconocido usando propiedades de las proporciones.
- Uso de una fórmula: Consiste en aplicar directamente una fórmula con los datos del problema.

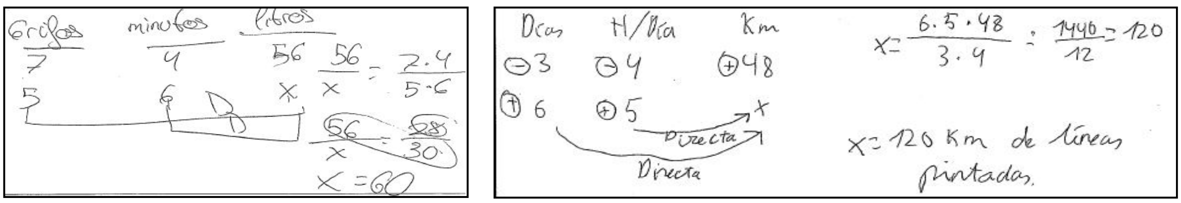


Figura 3. Uso de una fórmula (izda.) y proporciones (dcha.)

En la tabla 3 se muestra la aparición de estas estrategias según los estratos de la muestra.

Tabla 3. Estrategias correctas en los distintos estratos de la muestra

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Construcción de patrones	X	X		
Amalgamación de magnitudes		X	X	X
Paso a paso pasando por la unidad	X	X	X	X
Paso a paso sin pasar por la unidad			X	
Proporciones				X
Uso de una fórmula				X

En lo que respecta a las estrategias incorrectas detectadas, encontramos una gran variedad:

- Operaciones sin sentido: Consiste en realizar una serie de operaciones, más o menos arbitrarias, con todos o algunos de los datos del problema.
- Razonamiento aditivo: Consiste en aplicar razonamientos que implican la búsqueda de relaciones aditivas entre las magnitudes independientes y la dependiente.

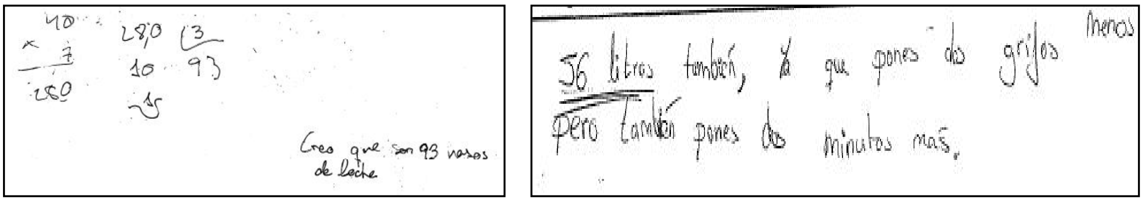


Figura 4. Operaciones sin sentido (izda.) y razonamiento aditivo (dcha.)

- Trabajo con las dos magnitudes independientes por separado: Consiste en resolver por separado dos problemas de valor perdido de PS considerando, en cada uno, sólo una de las magnitudes independientes.
- Omisión de una de las magnitudes independientes: Consiste en resolver un único problema de valor perdido de PS obviando una de las magnitudes independientes.

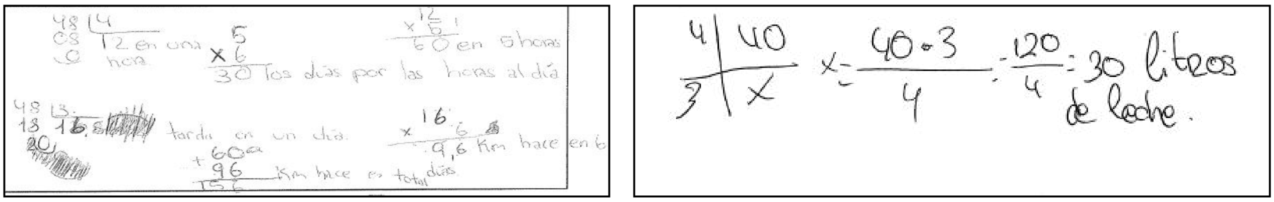


Figura 5. Trabajo con las dos magnitudes por separado (izda.) y omisión de una de las magnitudes (dcha.)

- Mal uso de una fórmula: Consiste en no aplicar correctamente la fórmula para la resolución de un problema de valor perdido de PC.

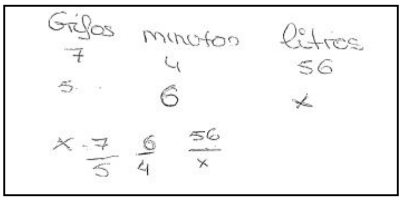


Figura 6. Ejemplo de mal uso de una fórmula

En la tabla 4 se muestra la aparición de estas estrategias según los estratos de la muestra.

Tabla 4. Estrategias incorrectas en los distintos estratos de la muestra

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Operaciones sin sentido	X	X	X	
Razonamiento aditivo	X	X		
Separación de magnitudes		X	X	
Omisión de una magnitud			X	
Mal uso de una fórmula				X

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Respecto a la tasa de éxito, una prueba Z señala que las diferencias entre los porcentajes de acierto de cada grupo para cada uno de los problemas son estadísticamente significativas al menos al 90%, excepto entre los grupos 3 y 4 para los que no se puede afirmar que haya diferencias significativas.

Se observa que los resultados mejoran con el nivel educativo y de instrucción, quizás a causa del aumento en la experiencia de los alumnos en resolución de problemas. Esto también explicaría la desaparición de las respuestas en blanco. En cualquier caso, como indican Gairín y Oller (2011), parece factible la introducción simultanea de la PC y PS en la E.S.O.

La aparición de magnitudes cuyo producto no es sencillo de interpretar no parece causar dificultades a los alumnos ya que la tasa de éxito, dentro cada estrato, es similar en cada problema. Además, observamos que, mientras en los grupos 1 y 2 la mayor tasa de éxito se da en el problema 2, en los grupos 3 y 4 es el problema 1 el de mejores resultados. Este fenómeno podría deberse a la magnitud intensiva del problema 1, que causa más dificultades a alumnos de niveles inferiores y escasa instrucción (Nunes et al., 2003). Por tanto, parece necesario trabajar con mayor énfasis las magnitudes intensivas al final de Educación Primaria.

En cuanto a la evolución de las estrategias, se observan fenómenos interesantes. Por ejemplo, en los grupos 3 y 4 desaparece la estrategia de construcción de patrones, que implica una escasa comprensión. Por su parte, debido a la instrucción en PC, aparecen en el grupo 4 las estrategias de proporciones y de uso de una fórmula que, de hecho, son mayoritarias. Su uso pone el énfasis en la parte algorítmica de la resolución, dejando de lado el significado de las manipulaciones y operaciones que se realizan como ocurre con la estrategia de productos cruzados para PS (Cramer y Post, 1993). En este sentido, aunque aporta buenos resultados, el carácter mecánico provoca errores como el de la figura 6 por no memorizar correctamente el procedimiento.

Muy pocos alumnos se preocupan por caracterizar el tipo de proporcionalidad. Incluso aquellos que tratan de justificar la relación de proporcionalidad lo hacen con argumentos incompletos del tipo “a más, más”. Este hecho es una clara influencia de la enseñanza basada en los libros de texto en donde se observa un escaso interés por la caracterización de la proporcionalidad y se favorece la aparición de ese tipo de razonamientos (Martínez et al., 2014).

La instrucción recibida también influye en la estrategia de amalgamación. Mientras los grupos 1 y 2 aplican un procedimiento de razón unitaria tras amalgamar, los grupos 3 y 4 recurren principalmente al algoritmo de productos cruzados o la aplicación de una fórmula. La estrategia de paso a paso pasando por la unidad es la única que aparece en todos los estratos. Solo un alumno (del grupo 3) utilizó la estrategia de paso a paso sin pasar por la unidad. Estos resultados apuntan a que las estrategias de tanto por uno y amalgamación pueden ser introducidas con éxito al iniciar el trabajo con la proporcionalidad (Gairín y Oller, 2011).

La mayoría de los alumnos que amalgaman magnitudes utilizan el producto entre las dos primeras. En el problema 1 el significado del producto (de días por horas al día) se interpreta fácilmente como horas totales de trabajo, aunque pocos alumnos lo explicitan. En el problema 2 el producto (de número de gatos por días) podría interpretarse como “raciones” con algo más de dificultad. La mayoría de los alumnos que utilizan amalgamación omiten el significado de la nueva magnitud, a la que siguen refiriéndose como “gatos”. Son pocos los que explicitan un significado adecuado. Por ejemplo, un alumno del grupo 4 lo interpreta como “veces come”. Esta situación se agrava en el problema 3. Este hecho constata que sería necesario un mayor trabajo con el manejo de magnitudes (Bosch, 1994).

Finalmente, se observa una influencia del nivel educativo y grado de instrucción en los errores cometidos por los alumnos. Por ejemplo, desaparecen las estrategias aditivas a partir del grupo 3. Este hecho coincide con el observado por Fernández y Llinares (2010) que señalan la influencia del currículo en esta evolución. Con la instrucción en técnicas relacionadas con la PS, como la regla de tres, aparecen errores debidos a la omisión de una magnitud para aplicar estas técnicas en el grupo 3. Además, en el grupo 4 surgen errores relacionados con la mala aplicación de algoritmos mecánicos propios de la PC.

REFERENCIAS

Berg, B. L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences*. Boston: Allyn and Bacon.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 7-40.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Nueva York: Springer.

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M. Moreno, J. Carrillo y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid, España: Pirámide.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M.P. (2010) *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Educación.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaun Associates.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, *4*, 167-179.

López, G. y Figueras, O. (1999). Qualitative reasoning in problem solving related to ratio, proportion, and proportional variation concepts. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the twenty first meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of mathematics Education* (Vol. 2, pp. 599-605). México: Cinvestav. Columbus, Ohio: ERIC.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca, España: SEIEM.

Martínez, S., Muñoz, J.M. y Oller, A. (2015, febrero). Compound proportion problems in Secondary Spanish textbooks. Póster presentado en CERME9, Praga, República Checa.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*, 651–675.

Rivas, M., Godino, J. D. y Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 453-462). Santander, España: SEIEM.

Silvestre, A. I. y da Ponte J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA, 6*(3), 73-83.

Spinillo, A. G. y Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181–197.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátkáy y N. Stehlíková. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169-176). Praga, República Checa: PME.

Tournaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

---

[i] Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

SOBRE LA RECUPERACIÓN DE LA CERTEZA

On Recovering Certainty

Martínez, B. y Rigo, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos y condiciones relacionadas con el proceso por el cual los estudiantes abandonan el estado de duda y recuperan su certeza en torno a proposiciones de contenido matemático; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza del álgebra en línea. Se argumenta que la recuperación de la certeza puede estar ligada tanto a sustentos extra-matemáticos como a los de tipo matemático y que la primera vía suele conducir a la incomprensión mientras que la segunda puede llevar a un aumento de la comprensión. Esto desvela que la duda no siempre genera condiciones necesarias para el aprendizaje. Para el análisis se recurre a una interpretación de los argumentos basada en el Modelo de Toulmin.

Palabras clave: *recuperación de la certeza, duda, sustentos matemáticos, comprensión, Modelo de Toulmin*

Abstract

The paper quantitatively examines several aspects and conditions related to the process by which students abandon the state of doubt and recover their certainty concerning propositions of mathematics content. The subjects involved in the study take part in an online diploma course on teaching algebra. The authors argue that recovering certainty may be linked to extra-mathematical backings and that the first option usually leads to incomprehension, while the second may lead to increased comprehension. This reveals that doubt does not always generate the conditions needed for learning. For the analysis, the authors resort to an interpretation of the arguments based on the Toulmin Model.

Keywords: *recovering certainty, doubt, mathematical backings, comprehension, Toulmin Model.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVO

Desde Sócrates en el Menón (1981); siglos después en la epistemología piagetiana (Piaget, 1990), y aún hoy en día, en la teoría social del conocimiento de Wenger (2001), se plantea que la contradicción y la duda representan un papel central en el proceso de aprendizaje y la construcción de conocimientos. Sin embargo, algunos investigadores del ámbito de la psicología (como Gilbert, 1991) han advertido que “no sólo parece que la duda puede ser la última operación en surgir, sino la primera en desaparecer” (p. 111) y otros, pertenecientes al terreno de la educación matemática (Inglis, Mejia-Ramos y Simpson, 2007), han insinuado que los estudiantes suelen experimentar certeza en torno a afirmaciones o argumentos de los que debieran dudar. Varias preguntas surgen entonces, específicamente en la esfera de la matemática educativa: ¿Bajo qué procesos se da el abandono de la duda y la recuperación de la certeza? ¿La duda genera siempre condiciones suficientes para el conocimiento y el aprendizaje? En este reporte se suscriben evidencias de que no siempre es así y con el fin de ofrecer una explicación inicial, se adelantan algunos elementos asociados a este fenómeno.

Martínez, B. y Rigo, M. (2015). Sobre la recuperación de la certeza. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 361-370). Alicante: SEIEM.

MARCO TEORICO

Los esquemas y estados epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2013) ha propuesto una clasificación de estos recursos de sustentación a los que llama “esquemas epistémicos”. Según la autora mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas (como las instanciaciones y los esquemas de prueba empíricos de tipo inductivo o perceptual), otros se vertebran en torno a consideraciones extra-matemáticas como los que se basan en la familiaridad (cuando alguna creencia se apoya en un aprendizaje originado por la repetición y la memoria), en la autoridad (cuando se respalda la veracidad de un enunciado matemático en la autoridad del profesor o en la de las matemáticas; en este último caso, se habla de ‘razones operatorias’), o en razones prácticas (cuando las personas orientan y justifican las resoluciones persuadidas por una actitud de facilismo). Asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, continúa la autora, los sujetos pueden experimentar “estados epistémicos” de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En este documento se usa el Modelo de Toulmin para identificar el tipo de argumentos que usan los estudiantes, la comprensión que ellos muestran en un argumento y los estados epistémicos que experimentan en torno a las proposiciones de dicho argumento.

El Modelo de Toulmin

En el Modelo de Toulmin (Toulmin, Rieke y Janik, 1984), un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D) que apoyan la afirmación, garantías (W) que pueden ser expresadas como reglas generales que actúan como un puente entre C y D, un soporte (B) que incluye una teoría general sobre la que descansa la garantía, y los calificadores (Q).

Para identificar aquí la comprensión o incomprensión se aplican criterios de la Tabla 1 (Martínez y Rigo, 2014) complementados con el Modelo de Toulmin.

Tabla 1. Criterios para identificar comprensión o incomprensión

	Descripción	Identificación del criterio en el Modelo de Toulmin
S1	Se confiere a conceptos matemáticos interpretaciones que son acordes con la acepción matemática aceptada (disciplinar o escolar); /En discordancia.	C, D, W, B en concordancia con la acepción matemática aceptada; /C, D, W, B en discordancia.
S2	Perspectiva de experto: Se consideran visiones adicionales al punto de vista; /Sesgo de exploración: Se centra la atención sólo en un punto de vista.	D suficiente, W general; /D insuficiente, W *ad hoc*.
S3	Se explicita un punto de vista; /Punto de vista implícito.	Se explicitan D, W y/o B; /Los D, W y/o B quedan implícitos.
S4	Se muestra conocimiento mayor que el promedio; /Se muestra un conocimiento menor que el promedio.	Los C, D, W o B son más frecuentemente correctos o completos en relación con sus compañeros; /Incorrectos o incompletos.

En el Modelo de Toulmin los calificadores (Q) “determinan el grado de fuerza que los datos confieren sobre la afirmación en virtud de la garantía” (p. 101). Partiendo de una perspectiva de investigación cualitativa (Corbin y Strauss, 2008) y de corte etnográfico (Berteley, 2000), conforme a la cual se trata de recuperar la voz y la participación directa del sujeto mediante el examen de sus estados epistémicos, en este escrito se consideran otro tipo de calificadores (Q) que determinan la fuerza del argumento pero que no están dados a partir de la 'estructura' argumental sino de los estados epistémicos que experimenta el sujeto cuando argumenta (en especial cuando enuncia evidencias o afirmaciones). Así entonces, aquí se habla de la fuerza que el propio sujeto (parece) conferirle al argumento. En este trabajo los calificadores indicarán los estados epistémicos que experimentan los sujetos.

Para identificar estos calificadores se recurrió al carácter etnográfico de la investigación la cual plantea una triangulación sucesiva entre las producciones de las estudiantes, la interpretación de los investigadores y estudios realizados por otros autores. En un primer momento, se inscribieron distintas producciones de los estudiantes en tablas de análisis y se identificaron los elementos léxicos que a juicio de los investigadores denotaban estados de duda o certeza. Todos los elementos fueron analizados sistemáticamente por ambos autores que trabajaron de forma independiente para asegurar que las expresiones de acuerdo al contexto correspondieran a esos estados. En un segundo momento, se revisó en la literatura una lista de los elementos léxicos que suelen usar los estudiantes para expresar duda o certeza. Hyland (1998) llamó mitigadores a los elementos léxicos que ubicó en la categoría epistémica de duda (e.g., would y should) y nombró enfatizadores a los elementos que ubicó en la categoría de certeza (e.g., will). Beke (2005) encontró que en español el morfema verbal –ía y elementos léxicos como "creo" o "puede" se ubican en la categoría epistémica de duda, mientras que el modo indicativo de los verbos y expresiones como "hay que" o "debe" se ubican en la categoría de certeza. Este proceso de triangulación se realizó sistemáticamente en varios fragmentos (y no sólo en los aquí analizados) en los que participaron las estudiantes elegidas para esta investigación (ver Martínez, 2014). Lo anterior permitió encontrar que las estudiantes utilizan de forma predominante el modo indicativo de los verbos como enfatizador y el morfema verbal –ía como mitigador.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa (Corbin y Strauss, 2008) que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso (Stake, 1999) de tipo interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994) y de corte etnográfico (Berteley, 2000). El estudio empírico se llevó a cabo en un diplomado cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Las actividades de enseñanza se desarrollaron a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle. En esa plataforma quedó registrada para su posterior análisis la interacción entre los estudiantes y un tutor quien propuso y guió las actividades relacionadas con los temas. La interacción se organizó en episodios que están conformados por todas las participaciones de los estudiantes y del tutor que giran en torno a una misma actividad iniciada por este último. Una vez que las participaciones se organizaron en episodios, éstos se dividieron en argumentos considerando las necesidades del análisis. Para este reporte se seleccionaron participaciones de dos estudiantes que en trabajos anteriores (Martínez, 2014) habían mostrado comportamientos distintos. Mientras Jeymi tendía a asociar certeza a su comprensión y duda a su incomprensión, Mariana solía asociar su certeza a una profunda incomprensión. Martínez (uno de los autores) fungió como tutor del grupo, quien instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones. La selección de los episodios que se analizan en este escrito obedece a que las estudiantes parecían transitar de la duda a la certeza. Esto permitirá averiguar las condiciones bajo las cuales se da el abandono del estado de duda y si ese estado genera condiciones suficientes para el aprendizaje. Los episodios pertenecen al momento del Diplomado en el que los estudiantes debían usar las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones lineales (esto es, ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación). Hasta ese momento todos los estudiantes sabían resolver ecuaciones lineales haciendo uso de la trasposición de términos (i.e., "cambiar de lado-cambiar de signo", ver Kieran y Filloy, 1989), la cual habían aprendido y utilizado a lo largo de su labor como asesores. Para el análisis se organizaron los argumentos de las estudiantes en tablas: la primera columna incluye un numeral para fines de organización, la segunda los argumentos textuales de las estudiantes y la tercera el análisis de cada argumento usando el Modelo de Toulmin (Tabla 1).

ANALISIS DE RESULTADOS

El caso de Mariana: La recuperación de la certeza vía razones prácticas

El tutor colocó en la plataforma la siguiente situación problemática: El río Amazonas tiene una longitud del doble de la del río Bravo más 332 km. Si la suma de la longitud de los dos ríos es de 9 434 km. ¿Cuál es la longitud de cada río? a) ¿Cuántas incógnitas tienes? b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? c) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema. La solución a la ecuación que un estudiante llamado Jesse planteó para obtener la longitud del río Bravo se muestra a continuación:

1.4 Resolviendo la ecuación: x + 2x + 332 = 9434; 3x + 332 = 9434; 3x + 332 - 332 = 9434 – 332; 3x ~~+ 332 – 332~~ = 9432 ~~-332~~; 3x = 9102; 3x/3 = 9102/3; x = 3034.

A esta respuesta, una estudiante de nombre Mariana reaccionó como se describe en la Figura 1.

<table>
<tr><td>2.1</td><td>En cuanto a tu ecuación no entiendo esa parte donde tienes 3x + 332 - 332 = 9434 – 332; 3x = 9102.</td><td rowspan="6">Argumento 2
D2 → C2
D2: a: no entiendo enredas demasiado; b: 3x+332-332 = 9434; c: 3x+-332+332=9434; d: despejamos 3x (incorrecto y explícito)
C2: 3x=9434-0 Lo demás sale sobrando (incorrecto)
W2
a: Si se tienen expresiones que enreden y no entienda se cambian por expresiones que parezcan más fáciles (incorrecto e implícito); b: expresión modificada de 1.4 (incorrecta y ad-hoc); c: propiedad conmutativa de la suma (correcto e implícito); d: trasposición de términos (correcto e implícito)
B2
a y d: Razones prácticas (referencia a la facilidad en relación a la trasposición de términos); c: Familiaridad (con la propiedad conmutativa de la suma en aritmética)</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Como que enredas demasiado (ahí)</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>porque si se (tiene) 3x + 332 - 332 = 9434</td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>yo creo que quedaría así 3x+-332+332=9434</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>despejamos 3x y nos quedaría 3x=9434-0</td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>y lo demás sale sobrando</td></tr>
</table>

Figura 1. Análisis de la primera parte de la primera participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

Desde el inicio del argumento 2 (en 2.1 y 2.2), Mariana mostró su desacuerdo con el procedimiento que empleó Jesse para resolver una ecuación, el cual involucra propiedades de la igualdad. Aun así, la estudiante intentó aplicar dicho procedimiento cuando con duda (calificador que manifiesta a través del uso de los mitigadores “creo” y “quedaría”, ver 2.4) y apoyándose en propiedades que le son familiares (posiblemente provenientes de la aritmética, ver B2c), ella acudió de forma implícita (ver W2c, *S3*) a la propiedad conmutativa de la suma (en 2.4) para obtener una expresión equivalente a 2.3. Como ya se dijo, sobre el procedimiento de Jesse, Mariana expresó explícitamente su incomprensión e incertidumbre, las que atribuyó (en 2.2) a lo “enredado” que resulta esa forma de obtener el valor de la incógnita, apelando así a una consideración extra-matemática del proceder de su compañero, en particular, a razones prácticas (ver D2a, W2a, B2a). En este proceso, la estudiante no se percató de las razones matemáticas de su incomprensión (como tampoco cayó en la cuenta de que, con un sesgo de exploración ─ver D2b, W2b, *S2*─, ella modificó, en 2.3, la expresión que usó Jesse en 1.4). Ya en 2.5, ella acudió a la trasposición de términos (cuando enunció la regla ‘despejamos 3x’ y con base en ella pasó al otro lado de la ecuación el resultado -0); con esto, recuperó su confianza que dejó ver cuando con seguridad y firmeza (que manifestó por el uso del modo indicativo de los verbos) remató su participación con la afirmación “lo demás sale sobrando” (en 2.6). En suma, para abandonar su estado de duda la estudiante redimió el método de la trasposición de términos, por la ruta de las razones extra-matemáticas (ver D2d, W2d, B2d), por ser para ella el procedimiento “que no enreda”. Pero en esa trayectoria, ella pasó por alto el hecho de que dejó de obtener un valor para la literal (ver C2, *S1*), mostrando un conocimiento menor que el promedio (S4) porque sus demás compañeros, incluso ella misma, suelen centrar sus esfuerzos en obtener un valor para la literal aunque fuese incorrecto.

2.7 2.8	De acuerdo a mi opinión yo creo que la ecuación sería. El río Amazonas tiene una longitud del doble de la del río Bravo más 332 km. Si la suma de la longitud de los dos ríos es de 9 434 Km., ¿cuál es la longitud de cada río? Y=2x+332	**Argumento 3** D3 a: Enunciado textual del problema (correcto y explícito) C3 y=2x+332 (correcto) W3 a: Relaciones entre los datos del problema (correcto e implícito) y b: Dejar de interpretar las literales que se usan para plantear la ecuación B3 a: Razones matemáticas (para obtener correctamente la ecuación) y b: Familiaridad (para traducir literalmente el enunciado del problema al lenguaje algebraico)
2.9	Y comenzamos 2x+332=9434	**Argumento 4** D4 a: y=2x+332; b: y=9434 (incorrecto e implícito) C4 2x+332=9434 (incorrecto) W4 b: Sustitución (ad-hoc, incorrecto e implícito); c: malinterpretación de la segunda relación entre los datos del problema B4 b: Esquema operatorio (para introducir una expresión sin sustento) y c: Familiaridad (para obtener una ecuación cuya forma es conocida)
2.10 2.11 2.12	esto a su vez es igual a 2x=9102 se despeja por completo x y nos queda x=9102/2=4551 Deduciendo que y=4551	**Argumento 5** D5 a: 2x+322=9434; b: 2x=9102; c: x=9102/2=4551 (incorrecto y explícito) C5 y=4551 (incorrecto) W5 b y c: Trasposición de términos (incorrecto y explícito); d: Ignora contradicción entre C5 y D4b B5 b y c: Razones prácticas (para usar la trasposición porque es más fácil); Esquema operatorio (para usar la trasposición sin sustento matemático) y Familiaridad (para memorizarla)

Figura 2. Análisis de la segunda parte de la primera participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

En los argumentos 3, 4 y 5, Mariana optó por proponer una solución propia. En el argumento 3 la estudiante comenzó por plantear, con duda (que muestra mediante el uso de los mitigadores “creo” y “sería” en 2.7), una de las ecuaciones que resuelven el problema (en 2.8), apelando a su enunciado textual. En este caso, la estudiante dejó de explicitar las razones de su vacilación, pero mostró sus dificultades algebraicas cuando dejó implícita la interpretación de las literales y la relación entre los datos (ver W3a y W3b, *S3*). En este proceso, ella apeló a la activación predominante de esquemas basados en la familiaridad, por sobre la activación de esquemas matemáticos (ver B3b). Pese a esas dificultades, Mariana comenzó a recuperar su certeza en el argumento 4 cuando obtuvo una ecuación lineal con una incógnita (en 2.9, certeza que se deja ver porque la estudiante volvió a utilizar el modo indicativo del verbo “comenzar”). Esa ecuación resultó del intento por considerar la otra condición del problema, lo cual Mariana concretó mediante la sustitución de la literal “y” (de C3) por la suma de la longitud de los ríos (9434); esto, por cierto, lo hizo sin ninguna explicación (que revela razones operatorias, ver B4b) pero muy probablemente de manera semejante a lo que había hecho antes en problemas similares a lo largo de su labor como asesora (apelando así a la familiaridad, ver B4c). Así, la estudiante comenzó otra vez a recuperar su certeza por el camino de las razones extra-matemáticas y asociada a una profunda incomprensión; ésta se hace visible porque, como ya se ha dicho, con el propósito de obtener una ecuación lineal con una incógnita, la estudiante, con un sesgo de exploración (ver W4b, *S2*), malinterpretó los datos del problema (ver W4c, *S1*) e ignoró las relaciones y condiciones que ahí se establecen, dando lugar a una ecuación incorrecta (en C4, *S1*).

Una vez que Mariana obtuvo la ecuación buscada (en 2.9, sin ser consciente de que fuese incorrecta, *S1*), en el argumento 5 recurrió a la trasposición de términos (por las razones prácticas en las que basa su razonamiento, ver W2a, B5b y c), en algunos casos anunciando el método (2.11) y en otros sólo aplicándolo (en 2.10) sin reparar en que lo hizo de forma incorrecta (*S1*); de ello obtuvo un resultado numérico (en C5), también incorrecto y contradictorio con resultados previos (a D4b). Y es que pareciera que lo que más le importaba a Mariana en ese trayecto no era tanto la trasposición de términos por sí misma, sino el hecho de que no "enreda" a los alumnos (ver W5b y c, B5b y c, *S2*). En este proceso ella recuperó su certeza (que manifestó al usar el modo indicativo de los verbos sobre todas las proposiciones de ese argumento: es, despeja, queda; ver 2.10-2.11), pero nuevamente lo consiguió mediante razones extra-matemáticas, dejándose de percatar de su propia incomprensión.

De todo lo anterior se desprende que a lo largo de su resolución Mariana tendió a soportar sus procedimientos en razones extra-matemáticas, a partir de las cuales en cada caso ella recuperó su certeza (ver B2d, B4b, B4c, B5b, B5c), y que esto no sólo la llevó sistemáticamente a conclusiones erróneas (ver C2, C4, C5) sino a la imposibilidad de incrementar sus conocimientos. Esta interpretación se constata con la respuesta que Mariana da a propósito del cuestionamiento y solicitud de rectificación por parte del tutor la cual se describe y analiza en la Figura 3.

Sé que tal vez mis planteamientos son muy cortos y algunos sienten que me falta explicar un poco más pero a mí me funcionan ya que de esta manera hago que los educandos no se enreden y desesperen debido a que el procedimiento los enreda.	**Argumento 6** D6 → C6 D6: a: Mis planteamientos son muy cortos; b: Los educandos no se enredan y desesperan C6: Mis planteamientos funcionan W6 Si los planteamientos son muy cortos y los educandos no se enredan y desesperan entonces funcionan B6 Razones prácticas

Figura 3. Análisis de la segunda participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

En esta participación, Mariana defendió su procedimiento con seguridad y de manera más contundente y definitiva (lo que se deja ver por el uso del modo indicativo de los verbos en todas las proposiciones de su argumento: enredan, funcionan) apelando nuevamente y de forma explícita a razones prácticas (ver W6, B6). Esto sólo confirma lo que antes se ha reiterado: que la confianza de Mariana en sus procedimientos se soporta en consideraciones extra-matemáticas, lo que parece llevarla a desconocer su propia incomprensión y a no considerar siempre como prioritario el contenido matemático de esos procedimientos.

En lo que sigue, se muestra y analiza un caso de otra asesora, llamada Jeymi, quien muestra un comportamiento distinto al de Mariana.

El caso de Jeymi: La recuperación de la certeza por razones matemáticas

En el episodio que se expone en este apartado, el tutor solicitó a los estudiantes que resolvieran ecuaciones en un interactivo en el que ellos debían usar las propiedades de la igualdad. La respuesta textual de una estudiante llamada Jeymi aparece en la Figura 4, que se expone en lo que sigue.

7.1	Lado izquierdo de la balanza (Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
	2x-8	=	5x-2
	Para "dejar sola a la x" realizo lo siguiente:		
7.2	1.-Sumo a ambos miembros. La ecuación nos queda:		
	2x	=	5x
7.3	2.-Sumo a los dos miembros 2.La ecuación nos queda:		
	-6	=	3x
7.4	3.-Divido a los dos miembros entre 3.La ecuación nos queda:		
	-2	=	x

Argumento 15

D15
a: 2x-8=5x-2; b: Sumo a ambos miembros: 2x=5x.; c: Sumo a los dos miembros 2: -6=3x; d: Divido a los dos miembros entre 3 (incorrecto y explícito)

C15
-2=x
(correcto)

W15
Combinación de la trasposición de términos y propiedades de la igualdad
(incorrecto e implícito)

B15
b: y c:Razones extra-matemáticas (esquemas operatorios y familiaridad) y d:Razones matemáticas (uso de propiedades de la igualdad)

Figura 4. Análisis de la primera participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

En C15 del Argumento 15 Jeymi obtuvo el valor que hace de D15a un enunciado verdadero. Para obtener ese valor, parece que la estudiante intentó conciliar la trasposición de términos (que ya conocía, y que muestra la activación de esquemas basados en la familiaridad y operatorios, ver B15b y B15c) con las propiedades de la igualdad (novedosas para ella). Pero en el proceso, ella mostró una profunda incomprensión de dichas propiedades de la igualdad al enunciar reglas incorrectas (en D15b y D15c) (*S1*) relacionadas con esas propiedades que parece haberlas construido *ad-hoc* (*S2*) con el fin de obtener el resultado, el cual muy probablemente consiguió sólo mediante la trasposición de términos (de otra forma es difícil explicar el valor correcto de la literal) que además dejó implícita (*S3*). En torno a esta respuesta, la estudiante experimentó un cierto grado de seguridad (que exhibió al usar el modo indicativo de los verbos: sumo, divido o queda, ver 7.2, 7.3 y 7.4) asociado a los esquemas operatorios y basados en la familiaridad que ella activó, pero la seguridad sólo fue relativa porque estuvo también ligada a cierta incomprensión de la que posiblemente ella tuvo cierta conciencia. En lo que sigue se revela cómo la estudiante trató de asirse a razones matemáticas cuando su participación fue cuestionada.

Como respuesta a la participación de Jeymi uno de sus compañeros le hizo ver que sus procedimientos no eran claros y le solicitó que los volviera a explicar. A la petición, la estudiante contestó reformulando su resolución, la cual aparece en la Figura 5.

8.1	Hola, hola creo que me confundí pero aquí les dejo paso a paso mi respuesta corregida 2x - 8 = 5x - 2	**Argumento 16** D16 → C16 a:2x-8=5x-2; b: Hay que pasar el -8 a la derecha y para pasarlo se suma a +8 en ambos miembros: 2x=5x+6; c: Pasamos al 5x al lado izquierdo y para hacerlo tenemos que cambiar el signo: -5x+2x=6; d: Para dejar sola la x tenemos que dividir ambos términos entre -3: -3x/-3=6/-3 (correcto y explícito) C16: -2=x (correcto) W16 b: uso de las propiedades de la igualdad para sustentar la trasposición de términos; c:trasposición de términos; d: propiedades de la igualdad. (correcto y explícito) B16 b y d:Razones matemáticas (uso de las propiedades de la igualdad) y c:Familiaridad (uso de la trasposición de términos)
8.2	primero hay que sumar ambos términos, hay que pasar el -8 al término de la derecha y para pasarlo se suma +8 en ambos miembros y se suman ambos miembros	
8.3	y nos quedaría así 2x= 5x +6	
8.4	ahora hay que poner las x en un sola lado y pasamos al 5x al lado de la izquierda y para hacerlo tenemos que cambiarlo con signo cambiando	
8.5	y nos quedaría así -5x + 2x = 6	
8.6	Y si sumamos los términos quedaría -3x=6	
8.7	Ahora para dejar sola la x tenemos que dividir ambos términos entre -3	
8.8	y nos quedaría así -3x/-3=6/-3	
8.9	y nos quedaría x=-2. Espero y estar bien.	

Figura 5. Análisis de la segunda participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

En 8.1 Jeymi explicitó la duda a la que se enfrentó (mediante la expresión mitigadora “creo que me confundí”) cuando se percató de que la salida al conflicto que propuso en su primera participación (de conciliar las propiedades de la igualdad con la trasposición de términos) era incorrecta, y en seguida mostró una nueva resolución. Pero a diferencia de la anterior, en esta nueva propuesta Jeymi encontró en las propiedades de la igualdad razones matemáticas para sustentar la trasposición de términos y conciliar ambos métodos (ver D16b, W16b, B16b). Asociada a esta salida del conflicto la estudiante aumentó su certeza (la que se manifiesta porque además de usar el modo indicativo de los verbos como “suma”, ella usó el enfatizador “hay que”) que luego también reveló en torno a las reglas pertenecientes a la trasposición de términos (en 8.4) y a las propiedades de la igualdad (en 8.7). En suma y a diferencia del caso de Mariana, Jeymi transitó de un estado de duda a uno de certeza acompañada y orientada por razones matemáticas. Esto derivó en que la estudiante, también a diferencia del caso anterior, expresara una profunda comprensión (que se deja ver al explicitar garantías generales y correctas; ver D16, W16, *S1, S2 y S3*) para obtener el resultado que hace de D16a un enunciado verdadero (ver C16, *S1*). Ella también exhibió su comprensión porque fue la única estudiante en aplicar correctamente tanto la trasposición de términos como las propiedades de la igualdad (*S4*). De todo lo anterior se puede concluir que Jeymi sostuvo, e incluso aumentó su certeza en torno a las reglas que forman parte de las propiedades de la igualdad con base en razones matemáticas (ver D16b, W16b, B16b) y que este proceso la condujo a incrementar también sus niveles de comprensión.

Pero si bien Jeymi en este pasaje experimentó un estado de certeza en torno a las reglas, ella vivenció un estado de duda en torno a su aplicación (que se desprende del uso del morfema verbal –ía en 8.3, 8.5, 8.6, 8.8, 8.9). El carácter novedoso del procedimiento en el que Jeymi enunció reglas pertenecientes tanto a la trasposición de términos como a las propiedades de la igualdad para resolver una ecuación puede explicar esa duda que la estudiante experimentó al aplicarlas.

En una semana posterior el tutor planteó una situación problemática que puede modelarse con una ecuación lineal. En la Figura 6 se encuentra el fragmento que contiene la resolución propuesta por Jeymi.

<table>
<tr><td>9.1</td><td>x+(x+7)=61</td><td rowspan="7">Argumento 17
D17
a:x+(x+7)=61
b: Sumar las x: 2x+7=61;
c:Pasar el 7 a la derecha y hacer operaciones: 2x=54 ;
d: Para dejar sola la x hay que dividir entre 2 ambos miembros (correcto y explícito)
C17
Queda x=27
(correcto)
W17
c: Trasposición de términos y d: Propiedades de la igualdad
(correcto y explícito)
B17
c y d: Razones matemáticas (propiedades de la igualdad y trasposición de términos sustentada en las propiedades de la igualdad)</td></tr>
<tr><td>9.2</td><td>Sumamos las x,</td></tr>
<tr><td>9.3</td><td>nos queda 2x+7=61;</td></tr>
<tr><td>9.4</td><td>pasemos el 7 a la derecha; se hacen cálculos</td></tr>
<tr><td>9.5</td><td>y queda 2x=54</td></tr>
<tr><td>9.6</td><td>para dejar sola la x hay que dividir entre 2…</td></tr>
<tr><td>9.7</td><td>y queda x=27.</td></tr>
</table>

Figura 6. Análisis de la tercera participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

Con el propósito de resolver la ecuación que Jeymi planteó para dar solución al problema (en 9.1), ella acudió a reglas pertenecientes tanto a la trasposición de términos (ver 9.4) como a las propiedades de la igualdad (ver 9.6); y lo hizo con seguridad (que mostró al usar el modo indicativo de los verbos y el enfatizador “hay que”). A diferencia de su intervención anterior, esta seguridad también la experimentó al aplicar esas reglas (que se manifiesta por el uso del modo indicativo del verbo “quedar”; ver 9.5 y 9.7). Lo anterior indica que la sustentación de la trasposición de términos vía las propiedades de la igualdad, y la correspondiente comprensión y certeza que ella mostró asociada a las razones por ella esgrimidas al sustentar esa trasposición (ver D16b, W16b, B16b), muy posiblemente coadyuvaron para que en esta tercera participación Jeymi pasara de la duda a la certeza y llevara a cabo una transferencia efectiva, del contexto de la balanza a la resolución de problemas, tanto de las propiedades de la igualdad como de la trasposición de términos no sólo al enunciar las reglas sino también al aplicarlas (ver D17c y D17d, W17c y W17d, B17c y B17d).

CONCLUSIONES

En la comunicación se muestra cómo la recuperación de la certeza en torno a proposiciones de contenido matemático puede estar asociada tanto a razones extra-matemáticas como a razones matemáticas. La recuperación de la certeza por el camino de las razones extra-matemáticas derivó en el caso de Mariana en una profunda incomprensión, mientras que el abandono de la duda siguiendo una trayectoria basada en razones matemáticas condujo a Jeymi a un aumento en su comprensión. Lo anterior revela que la duda no siempre genera condiciones suficientes para el conocimiento. Parece que el aprendizaje está asociado (entre otras cosas) a la coyuntura entre la duda y la recuperación de la certeza vía razones matemáticas. Es importante que esto se tome en cuenta tanto en la enseñanza de las matemáticas como en la investigación.

Referencias

Beke, R. (2005). El metadiscurso interpersonal en artículos de investigación. *Revista signos*, *38*(57), 7-18.

Berteley, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. México, D. F.: Paidós.

Corbin, J. y Strauss, A. (2008). *Basics of Qualitative Research* (3ª ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. En N. K. Denzin, y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). Thousand Oaks, CA: Sage.

Gilbert, D. T. (1991). How mental systems believe. *American psychologist*, *46*(2), 107-119.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30*, 437-455.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 229-240.

Martínez, B. (2014). *¿Certeza implica comprensión? Un estudio etnográfico con adultos en el contexto de un foro virtual*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Martínez, B. y Rigo, M. (2014). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (Pp. 445-454). Salamanca: SEIEM.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A.

Platón (1981). Menón, o de la Virtud. En F. Samaranch (Trad.), *Platón, Obras Completas*. Madrid: Aguilar.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Toulmin, S. E., Rieke, R.D. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York: Macmillan.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Ediciones Paidós América.

ESTUDIO DEL CONCEPTO MATRIZ DE CAMBIO DE BASE EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA APOE

Studying the concept of change of basis matrix within the APOS Theory

Mendoza, E.[a], Rodríguez, F. M.[a] y Roa, S.[b]

[a]Universidad Autónoma de Guerrero, [b]Universidad Industrial de Santander

Resumen

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa. El proyecto tiene como objetivo realizar una descomposición genética del concepto matriz de cambio de base, un concepto de Álgebra Lineal. En él se busca proponer una vía alternativa para la enseñanza de dicho concepto sobre la base de la teoría APOE; esta es una teoría cognitiva que describe a partir de estructuras y mecanismos cómo un individuo construye conocimiento matemático. En este documento se muestran evidencias de una prueba diagnóstico que fue aplicada a estudiantes de nivel superior, en donde se analizan y verifican los conceptos previos que se proponen como necesarios para la compresión del concepto matriz de cambio de base, además se muestran evidencia de algunas dificultades encontradas.

Palabras clave: *Descomposición genética, matriz cambio de base, estructuras mentales*

Abstract

This paper is part of a research project in field of mathematics education. The goal is to construct a genetic decomposition of the change of basis matrix concept in linear algebra. It is proposed an alternative way for teaching this concept according to the APOS Theory; this is a cognitive theory that describes structures and mechanisms for analyzing how students construct mathematical knowledge. We show evidence from a diagnostic instrument which was applied to undergraduate students of Universidad Industrial de Santander. We analyzed and validated previous concepts that are considered necessary for understanding the change-of-basis matrix concept. We also show some difficulties that were found in students around the understanding of the concept.

Keywords: *Genetic decomposition, change of basis matrix, mental structures*

INTRODUCCIÓN

En este escrito se muestran estructuras mentales que evidencian estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en la construcción del concepto Matriz de Cambio de Base (MCB), así como dificultades detectadas en el análisis de resultados de una prueba diagnóstico donde indagamos las estructuras que los estudiantes han logrado sobre conceptos que planteamos como fundamentales para construir dicha matriz. El concepto MCB se incluye en la formación de estudiantes de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas e Ingenierías generalmente en el primer año. Estos programas incluyen uno o dos cursos de álgebra lineal. Algunos investigadores, por ejemplo Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) atienden cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del álgebra lineal y el uso de diversos tipos de lenguaje como fuente de obstáculos en su aprendizaje. Estos autores analizan dificultades que presentan los estudiantes al abordar conceptos básicos de álgebra lineal; además revelan un obstáculo llamado el *obstáculo del formalismo*, que surge en algunos casos por la falta de requisitos elementales de Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática.

Mendoza, E., Rodríguez, F. M. y Roa, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 371-379). Alicante: SEIEM.

Surge entonces la pregunta: ¿cómo aprenden los estudiantes álgebra lineal? Oktaç y Trigueros (2010) muestran una recopilación de diferentes proyectos que han profundizado sobre cómo los estudiantes aprenden esta área de las matemáticas. Para ello se han construido análisis teóricos de diferentes conceptos como: espacio vectorial (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Parraguez y Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008) y sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007) , entre otros, utilizando laTteoría APOE; análisis que han sido validados a través del trabajo de los estudiantes y la aplicación del ciclo que propone este acercamiento teórico (Arnon et al., 2014). Los resultados de estas investigaciones revelan la necesidad no sólo de identificar las dificultades de los estudiantes, sino que sugieren que una *descomposición genética* constituye una herramienta eficaz para que emerjan las estructuras mentales involucradas en la construcción de los distintos conceptos de álgebra lineal, ello conlleva al diseño de actividades didácticas que pueden permitirle a una individuo una mayor compresión de los conceptos. Codes y Sierra (2006) parten de una descomposición genética del concepto serie numérica, para caracterizar los niveles intra, inter y trans a partir del trabajo de los estudiantes en una prueba piloto.

El objetivo del escrito es analizar y verificar estructuras mentales previas asociadas con el concepto MCB, además de detectar dificultades asociadas a la construcción de dicho concepto. Cabe aclarar que la MCB está definida para espacios de dimensión finita en donde se tienen dos bases ordenadas.

LA TEORÍA APOE Y SU PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se sustenta en la teoría APOE, teoría iniciada y desarrollada por Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), esta teoría se basa en una reinterpretación del constructivismo a partir del concepto de *Abstracción Reflexiva* de Piaget (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1996).

Las construcciones o estructuras mentales que propone la teoría APOE son entendidas como todas las transformaciones mentales que realizan los individuos para resolver determinadas tareas, pueden darse como reconstrucciones exactas o adaptaciones de algo previamente construido. En Asiala et al. (1996), se definen estas estructuras como *Acción*, *Proceso*, *Objeto* y Esquema, (para conocer más sobre estas estructuras mentales referimos al lector consultar Arnon et al, 2014).

La descomposición genética es la descripción específica de las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para que un individuo logre construir un concepto matemático. Resulta de aplicar el ciclo de investigación y surge de manera hipotética del Análisis Teórico, para validarse a partir del análisis de datos. Estos elementos son propuestos por la Teoría APOE en su paradigma de investigación que se fundamenta en el desarrollo de tres componentes: Análisis teórico; Diseño e implementación de enseñanza; Recolección y análisis de datos (Arnon et al, 2014).

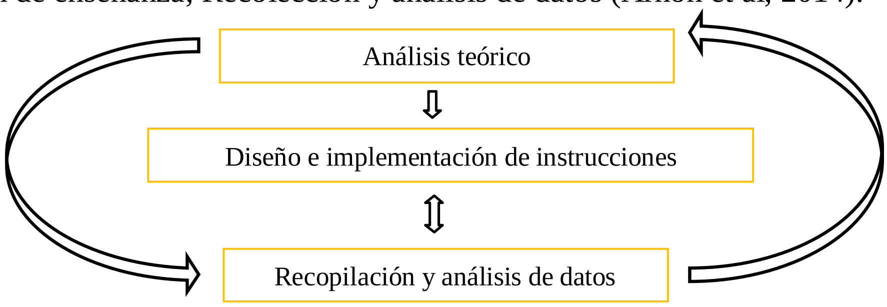


Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al., 1996, p. 5)

Como se ve en la Figura 1, el ciclo inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, lo que da lugar a una descomposición genética hipotética. Esta descomposición es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede lograr un individuo para comprender un concepto. Este análisis impulsa diseños y aplicación de modelos de enseñanza, a través de los cuales se busca promover las construcciones mentales descritas en la descomposición genética. La recopilación y análisis de datos es una componente que retroalimenta a la descomposición genética hipotética inicial y la valida.

MÉTODO EN ESTA INVESTIGACIÓN

En esta investigación desarrollamos la primera y la tercera componente del ciclo de investigación descrito en la sección anterior. La interacción mutua entre estas componentes nos permitió detallar la descomposición genética hipotética del concepto. Para la primera se realizó un análisis de los conceptos necesarios para la construcción de la MCB, los cuales posteriormente precisamos dentro de la teoría para formar un conjunto de estructuras mentales previas. Estos conceptos fueron limitados, describiendo las estructuras necesarias para la construcción del concepto MCB. Entre estos, identificamos los conceptos *base ordenada* y *coordenadas de un vector*.

Análisis teórico de las estructuras mentales previas

Para el diseño teórico, tomamos como referencia nuestra experiencia sobre el tema, así como el análisis de libros de álgebra lineal, que son usados por maestros que han impartido varias veces dicho curso. En lo sucesivo usaremos la notación $M_{\beta\to\beta'}$ para referirnos a la MCB que va de la base ordenada β a la base ordenada β'. En dichos libros analizamos cómo se presenta el concepto MCB así como sus propiedades fundamentales. Además analizamos una descomposición genética del concepto de base propuesta en Kú (2007).

Como elementos previos en este análisis teórico consideramos que un individuo debe tener una concepción proceso del concepto de base ordenada. Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo K y $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base ordenada para V. Entonces una concepción proceso de base ordenada estará determinada por la capacidad del individuo para reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base, decidir cuál será dicho orden, y establecer si un vector dado α puede escribirse como una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$ que son elementos de la base con un orden establecido. Ahora una concepción objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada dada (cuando el espacio vectorial este definido sobre el campo real) se logra si, el individuo deja de pensar en los coeficientes como las coordenadas del vector y lo ve como un elemento de $\mathbb{R}^n$ sobre el cual puede aplicar nuevas operaciones.

Tercera componente

Para la tercera componente, realizamos una prueba diagnóstico con base en el Análisis Teóricoi que tuvo por objetivos: 1) analizar y verificar el tipo de estructuras previas que un individuo debe tener para abordar la construcción del concepto MCB; 2) identificar algunas dificultades asociadas a la comprensión de la MCB.

Aplicación de la prueba diagnóstico

La investigación se desarrolló en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander UIS (Colombia). La prueba diagnóstica fue aplicada a 28 estudiantes que cursan el programa de Matemáticas o de Licenciatura en Matemáticas. Estos programas incluyen los cursos de Álgebra Lineal I y II durante el primer año. Los estudiantes participantes habían aprobado por lo menos el primer curso. La aplicación duró unos 120 minutos, en donde los estudiantes respondieron de manera escrita e individual los problemas de la prueba diagnóstico (Anexo 1).

Recopilación y análisis de los datos

Los datos obtenidos a partir del análisis de la prueba diagnóstico se analizaron con base en los requisitos previos planteados en la descomposición genética hipotética para iniciar con la construcción del concepto MCB. Para organizar los datos hemos usado abreviaciones del tipo

E10.P3.i); en donde **E10** hace referencia al estudiante 10; **P3** denota el problema 3; i) denota el inciso de cada problema.

A continuación presentamos algunos aspectos del análisis de esta prueba con base en los elementos teóricos, así como algunas imágenes que apoyan el análisis realizadas por los estudiantes.

RESULTADOS SOBRE ESTRUCTURAS MENTALES PREVIAS

La primera pregunta se propuso evidenciar qué tan familiarizados estaban los estudiantes con el concepto de coordenadas de un vector y su relación con una base ordenada. En la actividad, se propone una base ordenada β del espacio $\mathbb{R}^3$ de manera explícita. En el inciso (i) se solicita la escritura de las coordenadas de un vector en particular respecto a la base dada y el inciso (ii) es una variante del inciso anterior puesto que ahora el vector del cual se piden las coordenadas esta dado de manera general. Para la situación E2, evidencia una concepción proceso de base ordenada y una concepción objeto del vector de coordenadas; es decir el estudiante en ambos incisos es capaz de establecer el orden en la base, plantear el sistema de ecuaciones (para ambos incisos) resolverlo y encontrar las coordenadas pedidas (Figura 2). Esta forma de solución muestra evidencia de lo expuesto en la descomposición genética hipotética y predice que el estudiante tiene condiciones para iniciar un camino posible hacia la construcción del concepto MCB.

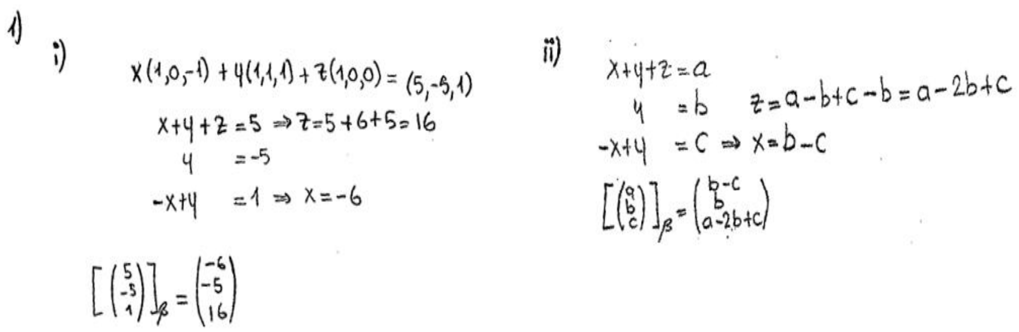


Figura 2. Procedimiento del E2.P1

También se observó que si un estudiante posee una concepción *acción* de una base ordenada, sólo será capaz de verificar o decidir si un vector en concreto puede o no ser escrito como combinación lineal de los elementos de la base. Hay evidencia de ello en la resolución del Problema 1 (Figura 3), puesto que para el caso concreto resulta relativamente sencillo. Pero para el caso que el vector está dado en forma general, sólo plantea el vector como una combinación lineal de los vectores de la base, llega a simplificar pero sin plantear el sistema de ecuaciones. Cuando el vector es dado en términos generales, es necesario haber interiorizado las acciones específicas realizadas sobre casos particulares para comprender la igualdad entre vectores, la identificación de incógnitas que debe determinar y el sistema que debe resolver de acuerdo a la expresión $(a, b, c) = (\alpha + \rho + \theta, \rho, -\alpha + \rho)$. Esto seguramente se relaciona con la necesidad de un tipo de construcción específica donde sea claro lo que varía y lo que se mantiene constante. En este caso, la necesidad de identificar cuáles son los escalares que hacen posible escribir la combinación lineal; esta es una característica propia de una estructura mental *proceso* de combinación lineal.

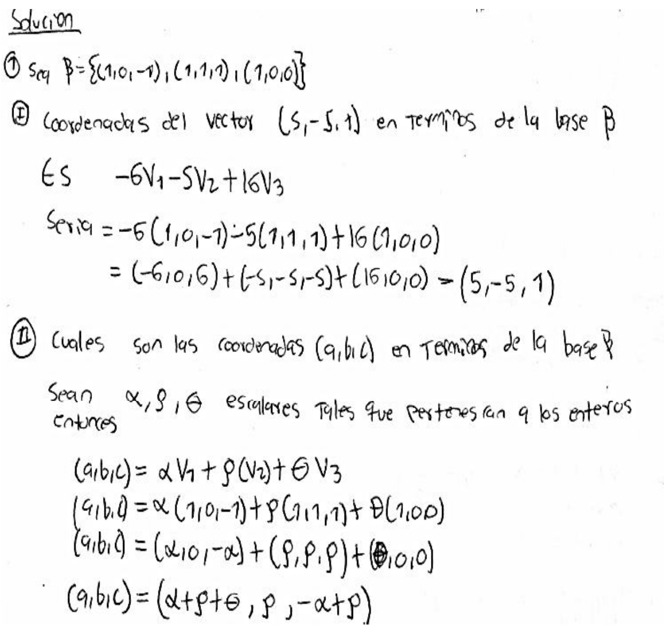


Figura 3. Procedimiento del E1.P1

RESULTATOS SOBRE DIFICULTADES ENCONTRADAS

En la pregunta dos se presentan bases ordenadas β, β' del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. El problema pide determinar las matrices de cambio de base $M_{\beta \to \beta'}$ y $M_{\beta' \to \beta}$. Este problema tiene que ver con el cálculo de dichas matrices, por ejemplo supongamos que un estudiante es capaz de escribir las coordenadas de cada vector de la base en términos de la otra base, pero puede cometer el error de confundir la base de llegada con la base de salida por así decirlo y en vez de calcular $M_{\beta \to \beta'}$ calcular $M_{\beta' \to \beta}$. Esta confusión puede llevarle a plantear mal la ecuación $[v]_{\beta'} = M_{\beta \to \beta'}[v]_{\beta}$, tomaría la ecuación $[v]_{\beta'} = M_{\beta' \to \beta}[v]_{\beta}$ como cierta y con ello dar repuestas erróneas en problemas en donde necesite de la ecuación que cumple la MCB. Una de las soluciones por parte de algunos estudiantes sigue el razonamiento expuesto de E15.P2, esta es la forma de dar solución al problema propuesto la cual aparece en la Figura 4.

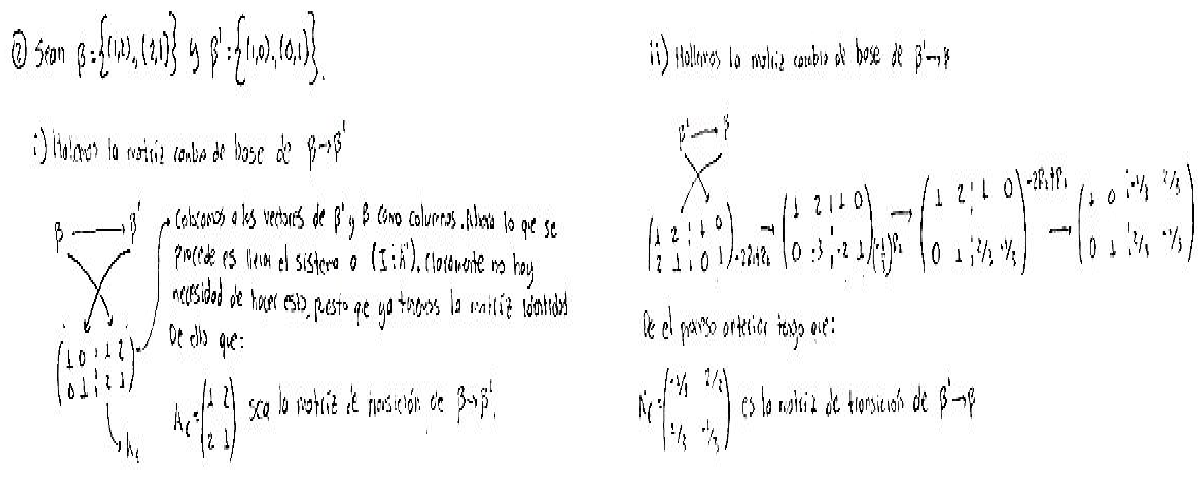


Figura 4. Procedimiento del E15.P2

Este algoritmo es una manera más global de hacer los cálculos para encontrar MCB. Esto parece de gran interés porque es una forma de proceder de los estudiantes que puede ayudar a la compresión de la MCB. Aunque esta forma de calcular dicha matriz no está exenta de la confusión entre $M_{\beta \to \beta'}$

o $M_{\beta' \to \beta}$, por ejemplo, el E22 utiliza la forma de proceder escrita anteriormente, se muestra evidencia de ello en la Figura 5. En donde calcula $M_{\beta' \to \beta}$ cuando tenía que encontrar $M_{\beta \to \beta'}$.

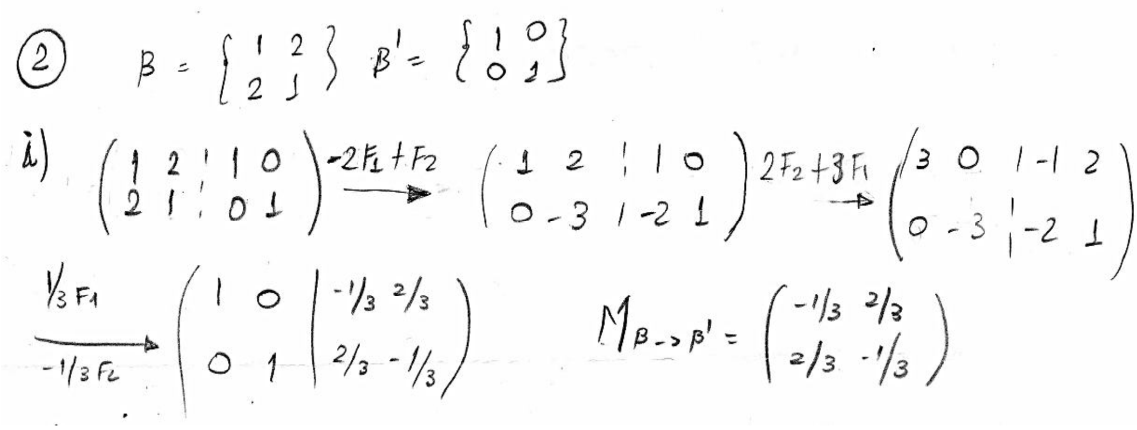


Figura 5. Procedimiento del E22.P2

Por otro lado, advertimos de la posible confusión entre la matriz $M_{\beta \to \beta'}$ y la matriz $M_{\beta' \to \beta}$. En la respuesta del E13.P2 puede verse este tipo de problema con la matriz véase la Figura 6.

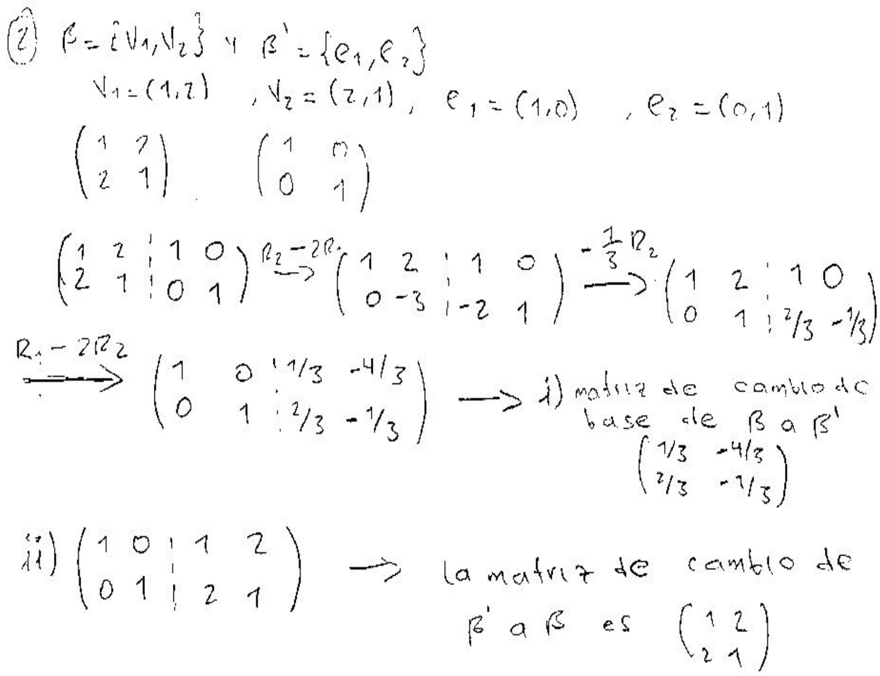


Figura 6. Procedimiento del E13.P2

En términos de nuestra perspectiva teórica decimos que este tipo de confusión se puede dar porque no sean interiorizado las acciones específicas. El estudiante no logra establecer la relación que hay entre la matriz encontrada y las columnas de dicha matriz, este es un claro ejemplo en donde se muestra *la independencia del algoritmo con una estructura mental* más sofisticada.

El estudiante E13 construye dos matrices al considerar los vectores de las bases B, β' como vectores columnas, es decir: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su algoritmo sugiere construir una matriz aumentada en donde coloque en la parte izquierda y derecha las matrices anteriores, esto es:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ el estudiante sabe que al reducir la parte izquierda a la identidad, entonces en la parte derecha tendrá una MCB. Es claro que esta forma de proceder por parte del estudiante como algoritmo está bien ejecutada. Puesto que encuentra una matriz de cambio de base. Pero no está interiorizando que las columnas de la matriz que obtiene son precisamente las coordenadas de los vectores de la base B', escrito como combinación lineal de los vectores de la base B. Por lo que lo lleva a confundir la matriz requerida.

El problema tres se diseñó para ser resuelto por dos vías, una en la que se considerara la matriz para calcular el vector solicitado y otra en donde a partir de la base se pudieran calcular el vector. Esperábamos que los estudiantes emplearan una propiedad de la MCB, $[v]_\beta = M_{\beta' \to \beta}[v]_{\beta'}$. En los procedimientos de los E2.P3, E15.P3, E16.P3, E26.P3, encontramos evidencia de que existen, tanto las estructuras mentales previas (puesto que aplican acciones específicas al vector de coordenadas) como algún tipo de concepción respecto a la MCB. Para ser más específicos podríamos decir que están reflexionando como un individuo con una concepción *objeto* del concepto MCB, puesto que ante los cálculos anteponen una reflexión de una propiedad que cumple la MCB la concibe como un todo y aplica acciones específicas sobre ella, por ejemplo en la Figura 7 aparece el trabajo del E15.

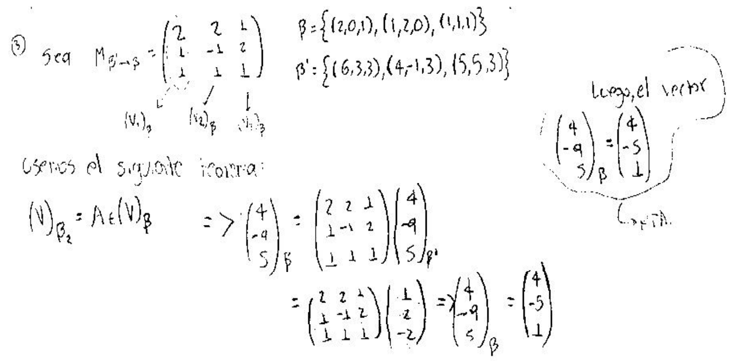


Figura 7. Procedimiento del E15.P3

En la pregunta cinco no pedimos la definición formal del concepto de estudio, pero sí pedíamos a los estudiantes que expresaran lo que entendían de dicho concepto. En las siguientes transcripciones se puede observar algunas concepciones encontradas, la concepción C3 es muy cercana a la definición formal que aparece en los libros de texto.

C1. E13.P5: "La matriz de cambio de base es aquella para la cual las matrices coinciden en su inversa"

C2. E16.P5:"La matriz de cambio de Base es la matriz inversa a la base y es la matriz que nos ayuda a encontrar las coordenadas de cierto vector como combinación de los vectores da la base dada"

C3. E26.P5: "Matriz de cambio de base, es aquella que, teniendo dos bases β' y β, me permite pasar un vector en base β a un vector en base β', es decir, esa matriz permite el cambio de las coordenadas de un vector en términos de la base ordenada β, a términos de la base ordenada β', y viceversa."

CONCLUSIONES

Después de la aplicación y la recolección de datos de la prueba diagnóstico encontramos que poco más de la mitad de los estudiantes mostró poseer las estructuras mentales necesarias y contestar adecuadamente la pregunta en la que se relacionan la concepción *proceso* de base ordenada y la concepción *objeto* del vector de coordenadas (pregunta 1 y 3) puesto que utilizan los vectores de las bases para encontrar las coordenadas del vector requerido. Referente a las demás cuestiones de la prueba diagnóstico podemos concluir que menos de la mitad de los estudiantes tienen un tipo de concepción *acción* de la MCB y que sólo algunos logran interiorizar las acciones específicas para dar paso a otra estructura mental, así pues la prueba diagnóstico revela dificultades tales como la desconexión entre una MCB y un vector dado en unas ciertas coordenadas, no se ha interiorizado qué representan las columnas de dicha matriz y en consecuencia un poco más de dos terceras partes de estudiantes no logran contestar correctamente las preguntas tres y cuatro.

Es de resaltar que en la pregunta cinco donde se cuestiona sobre qué entiende un estudiante sobre la MCB, un alto número tiene una idea errónea en comparación con la definición formal y la ausencia de respuesta a dicha pregunta se observa en más de dos terceras partes del total de los estudiantes.

Algunas estructuras que deben fortalecerse son solución de un sistema de ecuaciones y combinación lineal. Respecto a la MCB, los estudiantes deben de interiorizar qué representan las columnas de la matriz y la relación que guarda con un vector escrito en dos bases ordenadas.

Referencias

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. Nueva York: Springer.

Asiala, M., Anne, B., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, H. Shoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, 6 (pp. 1-32). Michigan: American Mathematical Society.

Codes, M. y Sierra, M. (2006). Una primera aproximación al análisis de la compresión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. En P. Bolea y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 173-186). Huesca: SEIEM.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 85–124). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva píagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24-41.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. (Tesis inedita de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría apoe. *Educación Matemática*, *20*(2), 65.89.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4), 373-385.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. En D. Hughes-Hallet, I. Vakalis y H. Arikan (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 271-272) Istanbul: John Wiley & Sons.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2112-2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoaericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l`Enseignement de l`Algèbre Linéare. *Annales de Didactique et de Scinces Cognitives*, *10*, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359-2368). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Anexo 1. Diagnóstico del concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal

Matriz de Cambio de base en Álgebra Lineal

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Escuela de Matemáticas

Nombre: ____

Carrera que cursa: ____

1. Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:
$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 0).$$
   (i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (5,-5,1) en términos de la base ordenada β?
   (ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a, b, c) en términos de la base ordenada β?

2. Sean las bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:
$$v_1 = (1,2),\ v_2 = (2,1) \text{ y } e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$$
   (i) Encuentre la matriz de cambio de base de β a β'.
   (ii) Encuentre la matriz de cambio de base de β' a β.

3. Dada la matriz de cambio de base $M_{\beta' \to \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:
$$\beta = \{(2, 0, 1),\ (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$
$$\beta' = \{(6, 3, 3), (4, -1, 3), (5, 5, 2)\}$$

Y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$.

4. Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   i) Encuentre una base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{\beta' \to \beta}$ sea la matriz de cambio de base de $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

5. ¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

---

[i] El análisis teórico que soportó el diagnóstico, consideró todas las estructuras mentales hipotéticas: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema* del concepto matriz de cambio de base.

EL FORO COMO CONTEXTO DE EXPLORACIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE MAESTROS EN ACTIVO

The forum as a context for exploring in-service teachers' professional knowledge

Montes, M.[a,c], Escudero-Ávila, D.[a,c], Flores-Medrano, E.[a,c], Muñoz-Catalán, M. C. [b,c] y Carrillo, J.[a,c]

[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de Sevilla, [c]Centro de Investigación en Didácticas Específicas e Investigación en el Aula (CIDIESIA, Universidad de Huelva)

Resumen

En el contexto del desarrollo de un curso semi-online de formación de maestros en activo diseñado con base en el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), se discute la utilidad y potencial del foro para la exploración de los conocimientos de profesores en activo. Mostraremos cómo las características asincrónica, semiótica y de apertura del foro permiten identificar subdominios de MTSK, así como localizar elementos de discusión sobre la limitación que puede suponer el foro en la investigación sobre el conocimiento del profesor.

Palabras clave: *Formación de profesores online, MTSK, foro online, conocimiento profesional*

Abstract

In the context of de development of a semi-online course of in-service primary teacher Education, based on the theoretical model of mathematic teachers' specialized knowledge, MTSK, we explore the utility of the forum for the detection of the needing of knowledge of in-service teachers. We will show how the characteristics of asynchronous, semiotic and openness of the forum allow identifying MTSK subdomains, as well as locating elements to discuss about the limitations of the forum as a tool for research in teachers' knowledge.

Keywords: *Online teacher education, MTSK, online forum, professional knowledge*

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas hemos podido observar cómo, desde varios grupos de investigación, se han desarrollado diferentes constructos teóricos (Conocimiento de *la materia y conocimiento didáctico del contenido*, Shulman, 1986; *Conocimiento matemático para la enseñanza*, Ball, Thames y Phelps, 2008; *Conocimiento didáctico-matemático*, Godino, 2009, *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) que presentan diversas interpretaciones de la estructuración del conocimiento del profesor en pos de una mayor comprensión del mismo. Cada constructo tiene sus especificidades a la hora de modelar el conocimiento del profesor, siendo común conservar, explícita o implícitamente, la separación entre conocimiento didáctico del contenido y conocimiento de la materia.

Sin embargo, los intentos por usar dichos modelos en el contexto de la formación permanente han sido bastante limitados, especialmente a la hora de diseñar programas de formación. En esta línea, consideramos que una tarea pendiente del área es la transferencia de los resultados de la investigación, especialmente los teóricos, a la realidad profesional de la enseñanza de las matemáticas (García, Maas y Wake, 2010).

Siguiendo a Roig, Llinares y Penalva (2010), los contextos online proporcionan a los formadores de profesores instrumentos para diseñar entornos de aprendizaje, en este caso, en la formación permanente. Esta investigación se contextualiza en un proyecto más amplio, donde diseñamos un

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

curso de formación permanente con base en el modelo *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, Carrillo et al., 2013). Por las características de los participantes (profesores en activo) el curso se llevó a cabo, fundamentalmente, de manera virtual con foros online (había sesiones presenciales, pero el contenido de estas no interfería con lo que se trabajaba en la plataforma). De acuerdo con Sánchez (2003), en la comunicación asincrónica, como la de los foros, las participaciones suelen mostrar un estado avanzado de reflexión, ocultando algunos pasos que llevaron al participante a plantear por escrito sus ideas. Esto llevó a pensar si era posible acceder al conocimiento especializado de los participantes en el curso, haciendo uso específicamente de sus producciones en los foros. Nuestro objetivo aquí será, por tanto, profundizar en el potencial del foro como contexto de exploración del conocimiento del profesor. Para ello, mostraremos el análisis de algunos extractos de la primera tarea del curso. Señalaremos cuál es el conocimiento que identificamos en estos y cómo el foro permitió acceder a ellos. Aunque reconocemos que existen características diferenciadoras entre la comunicación presencial y la virtual (Flores, Escudero y Aguilar, 2014), en el análisis no pretendimos enfatizar esas diferencias, sino profundizar en la utilidad que puede tener el foro como instrumento de recogida de información.

MARCO TEÓRICO

El curso se diseñó con base en el MTSK (Figura 1), el cual considera la noción de especialización derivada de la enseñanza de un área disciplinar, en este caso las matemáticas, proponiendo que el conocimiento es especializado en tanto que es necesario y específico de la enseñanza de las matemáticas (Flores, Escudero y Carrillo, 2013), frente a otros enfoques que entienden la especialización como aquello que es exclusivo de la enseñanza de las matemáticas (e.g. Ball et al., 2008). Así, el modelo MTSK (Carrillo et al., 2013) propone seis subdominios (tres recogiendo el conocimiento matemático, y otros tres el conocimiento didáctico del contenido), y el dominio de las creencias, que permea al conocimiento y su uso.

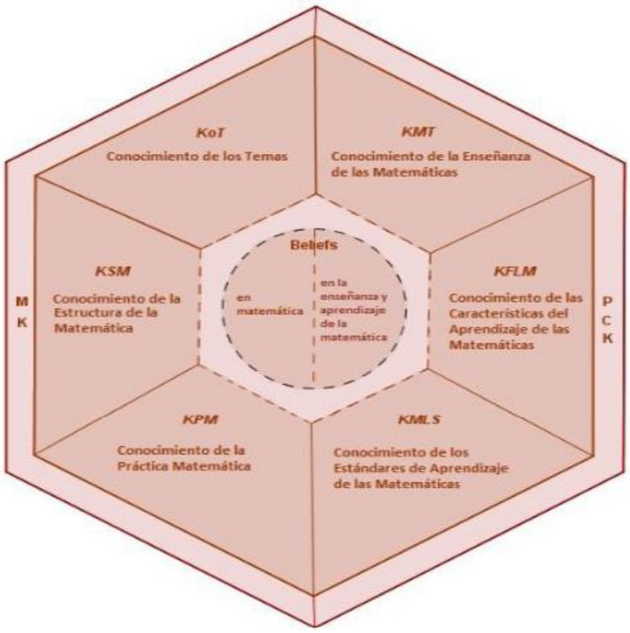


Figura 1. Representación del Modelo MTSK

Los subdominios del conocimiento matemático son *conocimiento de los temas*, KoT (conocimiento de la matemática escolar, así como sus fundamentos tanto conceptuales como operativos o su fenomenología), *conocimiento de la estructura matemática*, KSM (conocimiento de cómo se organizan y conectan los conceptos, tanto de diferentes temas -conexiones interconceptuales-, como de manera transversal en un mismo tema -conexiones de complejización y simplificación), y *conocimiento de las prácticas matemáticas*, KPM (conocimiento sintáctico -cómo se trabaja en matemáticas, cómo se crea conocimiento matemático) (Montes, Contreras y Carrillo, 2013).

El MTSK contempla también tres subdominios que permiten abarcar el conocimiento didáctico del contenido: *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, KMT (conocimiento de elementos útiles para la enseñanza de las matemáticas, pudiendo ser estos de distinta naturaleza, como materiales manipulativos, teorías sobre enseñanza, o dinámicas para trabajar cierto contenido en un aula), *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*, KFLM (conocimiento sobre cómo se produce el aprendizaje del contenido matemático, y cómo los alumnos interactúan con el mismo), y *conocimiento de los estándares de aprendizaje matemáticos*, KMLS (conocimiento de referentes sobre qué debería aprender un alumno en determinado momento de su escolarización -e.g. currículo nacional, estándares NCTM).

En esta investigación consideramos el foro como herramienta metodológica para acceder al conocimiento. El trabajo investigativo online requiere de consideraciones especiales y aporta cuestiones novedosas respecto al trabajo presencial (Flores et al., 2014). Los tipos de comunicación escrita que se generan en contextos online (foros, emails, chats…) difieren ampliamente de los de las comunicaciones verbales usadas en medios presenciales (Sánchez, 2003). En particular, el foro promueve una comunicación asincrónica: un participante puede debatir primero una idea que haya surgido con posterioridad a otra, o un tema puede ser discutido por los usuarios en diferentes momentos, ya que no se esperan respuestas inmediatas (las respuestas pueden tardar horas o días en llegar, dependiendo de la duración del foro y de la dinámica que propicie el tema en discusión). Sánchez (2003) subraya que las intervenciones de los participantes habitualmente disminuyen en cantidad pero aumentan en profundidad de contenido y análisis con respecto a lo que pasa en una comunicación en tiempo real (virtual o presencial).

METODOLOGÍA

Este trabajo forma parte de una investigación en la que pretendemos comprender qué conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas moviliza un grupo de profesores asistentes a un curso de formación permanente diseñado con base en el modelo teórico MTSK, a la vez que, como formadores de maestros, nos interesa diseñar y valorar la adecuación de los entornos formativos para promover dicho conocimiento. Bajo un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) planteamos un diseño metodológico consistente con los experimentos de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Aquí nos centramos en uno de los elementos caracterizadores del diseño formativo, el foro alojado en una plataforma virtual, con el objetivo de identificar mediante el uso del foro, como herramienta de obtención de información, qué conocimiento especializado movilizan los profesores cuando resuelven las tareas propuestas. Como hemos indicado, el foro es el contexto donde se recogen los datos de la investigación, pero también la herramienta que permite a los profesores, de manera reflexiva, desplegar su conocimiento al tener que ser precisos en la escritura y discutir las manifestaciones de los compañeros.

El experimento de enseñanza se desarrolló en el contexto de un curso de formación permanente, cuyos asistentes eran 62 maestros de primaria no generalistas, esto es, especialistas en educación musical, especial o física, con entre 0 y 20 años de experiencia. La finalidad del curso era desarrollar su reflexión acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que aplicamos el modelo de estructura tetraédrica de Rezat y Strässer (2012) para la conceptualización de tareas, que tiene en sus vértices la propia tarea, el profesor, la matemática y el estudiante (en este caso, maestros). El curso estaba orientado a que cada profesor, mediante una reflexión meditada y guiada por preguntas, tomara conciencia de todas las variables, requisitos y elementos implicados en la implementación de una determinada tarea en el aula de primaria. Se diseñaron siete tareas formativas, una orientada a reflexionar sobre la utilidad y sentido de la enseñanza de matemáticas en educación primaria y las otras seis ligadas a la resolución de problemas. En particular, aquí analizamos las reflexiones vertidas en el foro a raíz de la tarea formativa del Cuadro 1.

Problema a discutir

Tenemos una cuerda "tensada" que da la vuelta a la Tierra por el Ecuador. Si añado 10 metros a esa cuerda, y la vuelvo a tensar, ¿cabría un gato por debajo de ella?

Reflexione sobre las siguientes seis preguntas:

1.- ¿Qué debo saber acerca del tema matemático que está involucrado en esta situación? (Resuelva el problema como medio para responder a esta pregunta)

2.- ¿Con qué contenidos se relaciona esta situación? ¿Qué contenidos sustentan a los que se abordan?

3.- ¿Cómo puedo saber si lo que un alumno establece es verdad o no?

4.- ¿Cómo puedo trabajar esta situación en un aula?

5.- ¿Cómo interactuarían los alumnos con esta situación matemática?

6.- ¿Qué indican los referentes estandarizados que pueda estar relacionado con esta situación?

Cuadro 1. Una de las tareas formativas utilizada en la investigación

El problema planteado, rediseño del original de Northrop (1981), se trabajó en un curso de formación permanente en modalidad presencial. En Farfán (2012) se describen algunas de las características del problema como herramienta de reflexión para los profesores como resolutores.

En esta experiencia, agregamos a la resolución una serie de preguntas con la intención de provocar discusiones que pusieran en juego conocimientos de distintas naturalezas. Cada uno de los puntos de reflexión se corresponde con los distintos subdominio de MTSK[i].

La tarea fue colocada en un foro, que estuvo disponible durante dos meses, con la indicación de que se comentaran todas las dudas que surgieran, a la vez que se respondieran las dudas de los compañeros y se intentara ayudar a aquellos que tuvieran dificultades. Las intervenciones del moderador del foro se basaron en la mayéutica socrática, respondiendo la mayoría de las preguntas con nuevas preguntas, de manera que fueran los propios maestros los que construyeran su conocimiento. Desde el principio se recomendó el uso del foro, y, tras las primeras intervenciones, se convirtió en una fuente útil de información y aclaraciones entre ellos. No obstante, debido a la naturaleza del curso, se dio libertad para intervenir o no y en el momento en que se desease, sin que ello repercutiese en la calificación.

En el contexto general del curso, se obtuvieron 7 hilos del foro completos de discusión en la plataforma, uno por cada tarea, así como 24 memorias, algunas grupales, donde los maestros daban respuesta a cada una de las tareas planteadas. En particular, las intervenciones en el foro, por su naturaleza, nos permiten analizar algunas respuestas de forma independiente, siendo conscientes de la influencia que pueden tener intervenciones previas, o considerándolas como interacciones cuando es más evidente el impacto de intervenciones previas en las posteriores, como en secuencias de respuestas anidadas. El análisis se realiza desde una perspectiva interpretativa, entendiendo el sentido de la experiencia (Kvale, 1996) vivida por los maestros.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Los Cuadros 2, 3, 4, 5 y 6 presentan datos sobre el potencial del foro para explorar el conocimiento que los maestros despliegan en su uso. Los extractos están seleccionados de entre las 53 intervenciones del primer hilo; estas siguen un orden cronológico aunque no son consecutivas.

Intervención 1: Lourdes
[…]
Tengo varias dudas acerca del problema:
1. ¿La cuerda está unida en sus extremos?

2. Cuando dice tensamos, ¿se refiere alrededor de la circunferencia o cabe la posibilidad de que en un punto tensemos de manera perpendicular, de tal manera que queda ajustada por el resto de la tierra pero en ese punto quede levantada debido a esos metros de más que hemos añadido?; pero de esta manera no quedaría tensada de manera uniforme en la Tierra.

Cuadro 2. Primer ejemplo de extracto de intervenciones en el foro

En el Cuadro 2 vemos cómo Lourdes plantea dos dudas sobre el planteamiento del problema. Ambas preguntas son acerca del tensado de la cuerda y la forma que ésta toma. Lourdes parece pretender hacer una abstracción del enunciado, representándolo de manera figural, mostrando su conocimiento de la necesidad de más condiciones en el enunciado para que le permita matematizar la situación, pudiendo aplicar entonces las fórmulas que conoce sobre las figuras resultantes (KoT).

El foro nos permite acceder al conocimiento que Lourdes despliega, al promover la descripción de sus dudas con precisión, usando un vocabulario específico del contexto del problema: 'perpendicular', 'circunferencia', 'uniforme'. Esto supone un cambio respecto de otros contextos, en los que es posible un lenguaje gestual o por medio de dibujos.

Intervención 2: Laura

El moderador indicó que [la Tierra tiene] 40.000 km de diámetro, por lo que yo tomaré esta cifra. De todas formas eso no importa mucho, porque tomes el diámetro que tomes cambiará también la longitud de la cuerda.

[…]

Intervención 3: Alice
Creo que llevas razón, Laura.

Aparte, le he puesto este problema a una niña que cursa primero de secundaria. No se sabe la fórmula, pero se acuerda de "pi". Lo curioso es que cuando hace la multiplicación de 2 por "pi" me doy cuenta de que no sabe multiplicar decimales. He alucinado porque al intentar plasmar el problema en papel la niña identifica la tierra como esfera, y me reafirma que el gato y diez más pasan por la cuerda. Le explico lo de la longitud y lo entiende, pero no es capaz de resolverlo porque no sabe multiplicar decimales... Por falta de tiempo no lo hemos terminado pero mañana lo haremos.

Cuadro 3. Segundo ejemplo de extracto de intervenciones en el foro

La intervención de Alice, en el Cuadro 3, fue especialmente significativa, ya que esta participante dudaba de la capacidad de los alumnos de Primaria para resolver este problema, y decidió probar con una alumna de 1º de ESO (cuyo conocimiento se presume cercano al de los alumnos de primaria), con la que descubre una forma de interactuar con el problema (abstrayendo directamente la tierra como una esfera, y respondiendo intuitivamente), así como las dificultades en el cálculo de operaciones con decimales (KFLM).

Asimismo, debido al diseño del foro, vemos la diversidad de temas abordables simultáneamente en la misma intervención, dada la estructura de respuestas anidadas. En este caso, la participación de Laura, que planteaba dudas sobre la resolución del problema (pregunta 1), es respondida por Alice, añadiendo información sobre su propio método de abordar la quinta pregunta de la tarea.

En la intervención del Cuadro 4, Mª Ángeles muestra conocimiento de distintos tipos:

> *Intervención 4:* Mª Ángeles
> [...]
>
> Aún sigo dándole vueltas al problema. Aunque creo que ya voy bien encaminada. Después de pensar en cómo llevar a cabo la resolución del problema con niños de Educación Primaria, y tras realizar diferentes "simulacros" con pelotas de distintos tamaños (por lo tanto, con distinto diámetro también) para representar la Tierra, creo que la distancia al añadirle los 10 metros sería la misma, independientemente del diámetro de la circunferencia. ¿Me equivoco?

Cuadro 4. Tercer ejemplo de extracto de intervenciones en el foro

En primer lugar, muestra su KMT al proponer una metodología que permite abordar el problema en el aula: experimentación para inducir en los hipotéticos estudiantes un proceso de indagación que les llevaría a conjeturar la independencia de la distancia de separación de la cuerda con respecto al diámetro de la esfera. En su intervención escrita usa expresiones como 'creo' o '¿me equivoco?', que nos aportan información sobre su (des)conocimiento del alcance del trabajo con casos particulares para generar una prueba (KPM).

Detectamos una posible limitación emergente sobre el uso del foro como contexto de exploración del conocimiento, al ver una intervención de la cual cabría comprender cuál es el proceso que lleva a la maestra a la conclusión de la independencia de la separación de cuerda y radio de la esfera: ¿qué sucedió primero, conocer la independencia o experimentar con diferentes pelotas? Tener evidencias sobre esto nos permitiría profundizar en el conocimiento matemático que se despliega en el proceso. Asimismo, esta intervención abre la posibilidad de plantear preguntas sobre la posible complejización del problema, como el hecho de justificar matemáticamente la independencia planteada por Mª Ángeles, lo cual podría requerir conocimiento avanzado de este problema (KSM).

En la intervención del Cuadro 5, observamos cómo la maestra detecta que el problema demanda calcular la diferencia de los radios de ambas circunferencias, para lo cual previamente ha de haber modelado geométricamente el problema. Luego usa un dato del radio ecuatorial (necesario en planteamiento) y hace las operaciones necesarias para ejecutar su planteamiento.

> *Intervención 5:* María
> ¡Buenas tardes!
>
> Pensando el problema, he buscado el valor del radio ecuatorial, con el fin de poder realizar la formula P=pi x d. Con esta fórmula pretendo averiguar el perímetro de la tierra. Una vez averiguado le he sumado los 10 metros y he calculado el nuevo diámetro. Ya tengo el valor de los dos diámetros y tiene un valor de diferencia de 3.2 metros, lo he dividido entre dos, y me ha dado 1.6 metros. Considero que pasa el gato porque un gato puede tener una altura media de 30 centímetros. [...]

Cuadro 5. Cuarto ejemplo de extracto de intervenciones en el foro

Entendemos que esta maestra despliega su KoT al usar las relaciones y fórmulas para calcular perímetros, diámetros y radios. Pensamos, en particular, que una de las potencialidades del foro, la permanente visibilidad de todas las respuestas, puede llevar, en caso de que alguna de éstas sea demasiado explícita o conclusiva, a una falta de reflexión en otros compañeros, lo cual condiciona las oportunidades para explorar el conocimiento desplegado.

Finalmente, en el Cuadro 6 mostramos intervenciones en las que un maestro plantea una duda, y una compañera le aporta una respuesta:

Intervención 6: José María Entiendo que al estar tensada la cuerda alrededor de la circunferencia terrestre y añadirle 10 metros más de cuerda, al volverla a unir la cuerda quedaría suspendida a cierta distancia de la superficie terrestre. *Intervención 7:* Alice Sí, "la diferencia" de ambas longitudes al centro de la tierra es lo que tienes que averiguar. La distancia del epicentro a la superficie... que resolviéndolo te dirá si el gato pasa o no. Hay una fórmula para ello. No sé si te he sido de ayuda o te he liado más. Saludos.

Cuadro 6. Quinto ejemplo de extracto de intervenciones en el foro

Se pone en este extracto de relieve una de las principales características del foro: la posibilidad de comunicación entre pares, a través de respuestas anidadas. En estas dos intervenciones vemos cómo José María inicia el planteamiento del problema con una duda sobre cómo interpretar el enunciado del mismo, para que posteriormente Alice le proponga una forma de continuar la planificación movilizando su KoT, dejando pendiente la selección de la fórmula y la ejecución de los cálculos, permitiendo que José María pudiera explorar por sí mismo.

CONCLUSIONES

El problema planteado logra el objetivo de ser desafiante para los maestros, desde la comprensión del mismo hasta reconocer las herramientas matemáticas con las que podrían dar solución. Las preguntas correspondientes al conocimiento didáctico del contenido también impulsaron a los participantes a verter sus reflexiones. En el foro, se observaron menos respuestas con respecto al conocimiento de la práctica matemática, al de la estructura matemática y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Pensamos que esto pudo deberse a que eran las preguntas que alejaban más la discusión de la resolución del problema y de su transferencia al aula.

Al ser los maestros los que vierten directamente sus ideas en los foros y siendo estas el resultado de una reflexión previa, los datos mantienen una fidelidad con respecto a las intenciones que tenían los participantes al escribir sus intervenciones. En estas producciones escritas fue posible encontrar algunos matices que, quizá en una comunicación oral, podrían haber pasado desapercibidos (por ejemplo, en el caso de Mª Ángeles la experimentación realizada podría ser lo más llamativo, pero algunas de sus expresiones nos hicieron pensar en el papel que da al uso de casos particulares).

El análisis de los datos nos ha permitido ahondar en algunas características relevantes de éste para la investigación en conocimiento profesional, y en posibles líneas de prospectiva de investigación:

- La obligación que el propio medio impone, en cuanto a que las aportaciones han de ser por escrito, lleva a los maestros a mostrar el vocabulario que conocen relativo al tema, así como a hacer un esfuerzo por describir sus razonamientos y preguntas. Esto nos permitirá, en futuras investigaciones analizar los datos desde perspectivas ligadas al análisis discursivo (Sfard, 2000), que pueden aportarnos una óptica diferente del objeto de estudio.

- El foro favorece un trabajo dinámico sobre la tarea en el seno del curso, lo que permite explorar el conocimiento sobre una tarea en diferentes niveles de complejidad. En casos como el del Cuadro 5, podríamos explorar un subdominio específico de conocimiento.
- El diseño del foro en sí puede condicionar el tipo de respuesta obtenido, y por tanto las oportunidades para indagar en el conocimiento del profesor. Así, el planteamiento de la tarea, como un hilo único para las seis preguntas, condujo a que los maestros centraran su atención en cuestiones propias de la resolución del problema (38 de las 53 intervenciones fueron relativas a dudas y comentarios sobre la resolución del problema), prestando menos atención en sus intervenciones a elementos didácticos, y mostrando diferentes grados de inseguridad en los dominios del conocimiento matemático y del didáctico del contenido. Entendemos, por tanto, que el diseño de la tarea, del foro, y el conocimiento que podemos identificar son elementos inextricablemente relacionados.

Somos conscientes de que lo que se plasma en los foros no es información que permita acceder directamente a las reflexiones de los profesores, es solo una manifestación de esa reflexión mediada por lo que el profesor sabe, lo que lee de sus compañeros o las intervenciones del moderador y lo que cree que puede/debe o no manifestar en los foros. Por otra parte, al ser un trabajo asincrónico, puede haber profesores que no sigan el mismo ritmo o cuyas participaciones resulten repetitivas, o sesgadas por lo que leen. Asimismo, si las preguntas que se plantean en los foros no son lo suficientemente claras, pueden llevar a discusiones dispersas Sánchez (2010).

A pesar de estas limitaciones, creemos que el foro online es un contexto metodológico que nos permite profundizar en algunas características del conocimiento profesional y que el uso de plataformas online como esta debe ser estudiado como alternativa metodológica a opciones que requieren de la interacción cara a cara, dado el auge de los cursos de naturaleza no presencial.

Agradecimientos

Los autores pertenecen al proyecto 'Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas' (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad. Esta investigación también es apoyada por la Secretaría de Educación Pública de México.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Farfán, R. M. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. México DF: Gedisa.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, M. S. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 89-96). Vancouver, Canadá: PME.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J., (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

García, F. J., Maas, K. y Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 445-457). Londres: Springer.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing.* Londres: Sage.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemáticas XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Northrop, E. (1981). *Paradojas matemáticas*. México DF: UTEHA.

Rezat, S. y Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM-Mathematics Education, 44*(5), 641-651.

Roig, A. I., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Caracteristicas de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 533-543). Lleida: SEIEM.

Sánchez, M. (2003). *Un estudio sobre interacciones y comunicación en educación matemática a distancia*. Trabajo de Tesis de Maestría. México DF: Cinvestav.

Sánchez, M. (2010). *How to simulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* Tesis Doctoral. Roskilde University.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

---

[i] La relación de las preguntas con los subdominios, en su diseño, fue: 1-KoT; 2-KSM; 3-KPM; 4-KMT; 5-KFLM; 6-KMLS, si bien cada pregunta, a la hora del análisis, permitió recoger información de diferentes subdominios.

EXPLORANDO EL FLUJO QUE EXPERIMENTAN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA AL ENFRENTARSE A TAREAS EN GRUPO[i]

Exploring flow experienced by pre-service primary teachers while facing tasks working in group

Montoro, A. B. y Gil F.

Universidad de Almería

Resumen

Cuando un estudiante experimenta flujo, esto es, está plenamente concentrado en la resolución de una tarea y disfruta con ello, aumenta el rendimiento alcanzado y el deseo por continuar realizando tareas similares. Investigaciones realizadas con estudiantes con talento afirman que para experimentar flujo es necesario proponer desafíos acordes a las habilidades del estudiante, establecer metas claras y proporcionar retroalimentación inmediata. Esta investigación pretende contrastar si esta afirmación es válida en el caso de estudiantes de maestro de primaria con habilidades medias, al trabajar en grupo para resolver tareas matemáticas. Para ello, se comparó el comportamiento de dos grupos de estudiantes al resolver dos tareas matemáticas. Los resultados confirman la importancia de establecer metas claras, proporcionar retroalimentación inmediata, de que el estudiante confíe en su capacidad para superar las dificultades y se sienta útil.

Palabras clave: *experiencias de flujo, trabajo en grupo, autoconfianza, matemáticas*

Abstract

When students experience flow doing a task, it means they are deeply focused on the task and enjoy it, their performance and their engagement with similar tasks increases. Previous research carried out with talented students claim that facing challenges matched with skills, setting clear goals, providing feedback is necessary to flow. This research test whether this statement is also valid to pre-service primary teachers with medium skills while working in groups on mathematical tasks. For this purpose, the researchers compare the behavior of two groups of students solving two measurement tasks. Results confirm the importance of setting clear goals, providing feedback and students' confidence in their capacity to accomplish the task and feeling of utility, in order to flow.

Keywords: *flow experiences, work in group, self-confidence, mathematics*

INTRODUCCIÓN

Las creencias que tenemos sobre nosotros mismos y sobre las matemáticas, la actitud y motivación con la que afrontamos una tarea y las emociones que sentimos mientras la realizamos son determinantes a la hora de aprender. De ahí que, en las últimas décadas, un número importante de investigaciones en Didáctica de la Matemática se centren en estos aspectos (Gómez-Chacón, 2010).

La motivación determina la dirección, intensidad y persistencia del comportamiento humano. Cuando los motivos por los que se realiza una actividad son internos a ella (curiosidad, interés, disfrute), la atención está centrada en la actividad y la duración de la motivación es mayor, de ahí nuestro interés por potenciar este tipo de motivación (intrínseca). Un concepto íntimamente relacionado con la motivación intrínseca es el *flujo*.

Cuando una persona experimenta flujo está profundamente concentrada en la tarea que está llevando a cabo, se aísla de lo que sucede a su alrededor y pierde la noción del tiempo. Es una

Montoro, A. B. y Gil, F. (2015). Explorando el flujo que experimentan los estudiantes para maestro de primaria al enfrentarse a tareas en grupo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 391-400). Alicante: SEIEM.

experiencia intrínsecamente gratificante, que lleva a la persona a repetir la actividad para volver a experimentar esas sensaciones una y otra vez (Reeve, 1994).

Nakamura y Csikszentmihalyi (2002) sostienen que para que dicha experiencia se produzca es necesario proporcionar metas claras, retroalimentación inmediata y un equilibrio entre las habilidades del sujeto y el desafío que propone la actividad.

Más concretamente, afirman que una actividad es gratificante para un sujeto si le enfrenta a un desafío que cree que puede superar, pues si los desafíos son demasiado altos siente ansiedad, y si son bajos siente aburrimiento. La situación de flujo es ideal para el aprendizaje, ya que al afrontar los desafíos el estudiante estaría aprendiendo y, al mismo tiempo, disfrutando. De hecho, se ha mostrado su influencia en el rendimiento académico (Larson, 1998) y el compromiso con la actividad con la que se experimenta (Whalen, 1998).

Heine (1997) en su investigación llevada a cabo con estudiantes de altas capacidades, comparó el tipo de tareas matemáticas y el entorno de clase de los alumnos que aumentaron la frecuencia de experiencias de flujo en el aula, con las de aquellas que las disminuyeron, y encontró que las primeras dedicaban mayor tiempo al trabajo individual o en grupo (frente a las exposiciones del profesor) y a tareas de complejidad intermedia.

Sin embargo, investigaciones realizadas en clases de matemáticas con estudiantes con habilidades en torno a la media, encontraron que, en este entorno, los desafíos eran vistos como una amenaza a la eficacia, observándose niveles más altos de disfrute en situaciones en las que los estudiantes percibían desafíos ligeramente superiores a los que recibía normalmente, pero sentían que tenían grandes habilidades para superarlos (Schweinle, Turner y Meyer, 2008).

PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

La falta de motivación y altos niveles de ansiedad matemática experimentados por gran parte de los estudiantes de Maestro de Primaria (Pérez-Tyteca, 2012), y la necesidad de que estos profesionales transmitan seguridad y gusto por las matemáticas a sus futuros alumnos, nos llevó a centrar nuestra investigación en el estudio de los factores que facilitan la aparición de experiencias de flujo en matemáticas en este colectivo.

El presente trabajo pretende:

- Contrastar, en estudiantes para maestro de primaria con habilidades matemáticas en torno a la media, la influencia de algunos de los aspectos reconocidos en la literatura como requisitos para experimentar flujo en estudiantes con talento, esto es, proponer desafíos acordes con las habilidades de los estudiantes, establecer metas claras y proporcionar retroalimentación inmediata.
- explorar cómo contribuyen otros aspectos como el rendimiento de los estudiantes, la confianza en su capacidad para resolver las tareas y las interacciones con el grupo, en la aparición de experiencias de flujo al enfrentarse a tareas de trabajo en grupo.

METODOLOGÍA

Para alcanzar nuestros objetivos se utilizaron métodos cuantitativos y cualitativos. Por un lado, se estudió el nivel de concentración y disfrute (flujo) experimentado por 230 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Almería en nueve sesiones de trabajo en grupo de la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida en la Educación Primaria”, a través de la aplicación del cuestionario cerrado diseñado y validado en un trabajo previo (Montoro y Gil, 2012). Por otro, se grabaron en vídeo varios grupos de estudiantes resolviendo dichas tareas.

Con esta información, se seleccionó y analizaron los datos relativos a los dos grupos de estudiantes que fueron grabados durante la resolución de la tarea que produjo menor porcentaje de estudiantes en flujo (Obtención de fórmulas para la superficie) y también durante la resolución de una tareas con la que experimentó flujo más del 70% de los estudiantes (Comparación de magnitudes).

Tareas

La tarea de comparación de magnitudes propone la ordenación visual, y posterior comprobación, del volumen ocupado de distintos objetos, cuya forma es distinta pero el volumen de algunos de ellos es muy similar.

La otra tarea consiste en obtener fórmulas para el cálculo de la superficie de distintas figuras tomando como unidad de medida un triángulo equilátero de lado unidad. Para ello, los estudiantes cuentan con geoplanos triangulares y papel isométrico.

Participantes

Analizando las afirmaciones realizadas por los propios estudiantes en un cuestionario abierto de creencias y experiencia previa en matemáticas, sus calificaciones y las observaciones de los profesores, clasificamos a los estudiantes de los grupos seleccionados según su rendimiento, autoconfianza, motivación y perseverancia en matemáticas (Tabla 1). Para conservar su anonimato, nos referiremos a ellos con una etiqueta que indica el grupo al que pertenece y el número de participante, por ejemplo, G2P3 es el participante 3 del grupo 2.

Tabla 1. Características de los estudiantes seleccionados

Estudiante	Rendimiento	Autoconfianza	Motivación	Perseverancia
G1P4 G2P1 G2P4	Alto	Alta	Alta	Sí
G1P2 G1P3	Medio	Alta	Media-Alta	Sí
G1P1 G2P2	Medio	Media	Media	A veces
G2P3 G2P5	Bajo	Baja	Baja	No

Un ejemplo de los fragmentos utilizados en la clasificación es el de G2P3, cuando afirma: “Las matemáticas nunca me han gustado, ni se me han dado bien, siempre suspendía y las dejaba por imposibles, en la clase me aburría y pensaba que no me servían de nada las cosas que estaban explicando”.

Análisis de datos

Para realizar el análisis de los vídeos partimos de un sistema de 16 categorías preestablecidas basado en la revisión de la literatura (Montoro y Gil, 2012). Por un lado, contienen códigos para identificar experiencias de flujo: concentración, falta de concentración, disfrute, ausencia de disfrute, emociones positivas y emociones negativas; y, por otro, códigos que reflejaban la presencia o ausencia de los aspectos vinculados al flujo en la literatura, es decir, complejidad percibida, metas claras, retroalimentación, utilidad e interés. Se visualizaron varias veces las grabaciones y se extrajeron fragmentos asociados a cada una de estas categorías.

Posteriormente, se observó si se producían cambios en el nivel de flujo de los estudiantes, es decir, si pasaban de estar desconcentrados y/o desmotivados a mostrarse concentrados y disfrutando al realizar la tarea y viceversa.

Cuando esto sucedía, se volvía a visualizar el vídeo en busca de posibles causas de dicho cambio: un incremento sustancial en la complejidad de la tarea, interacciones entre los estudiantes, interacciones con el profesor…

Las tablas 2, 3 y 4 muestran ejemplos de las transcripciones, indicando lo que decía cada estudiante en cada momento (1ª columna), cómo lo decía y lo que hacía en ese momento (2ª columna), y de la codificación realizada (3º columna).

Dos de los cuatro vídeos seleccionados fueron analizados por dos investigadores externos para garantizar la objetividad de la codificación, alcanzándose un nivel de coincidencia alto.

RESULTADOS

Por cuestiones de espacio, aunque la discusión o resultados que se muestran hacen referencia al análisis de los dos grupos y las dos tareas, vamos a ejemplificar el análisis realizado sobre la tarea de obtención de fórmulas (que es en la que el porcentaje de estudiantes en flujo es menor).

Desarrollo de la resolución del grupo 1 de la tarea de obtención de fórmulas

La tarea seleccionada consta de una parte en la que las fórmulas para el área de las figuras pueden hallarse usando únicamente patrones aritméticos (triángulo equilátero, hexágono regular, rombo y romboide), y otra que requiere el uso de conceptos geométricos (rectángulo, triángulo rectángulo y triángulo cualquiera).

La primera parte, aunque al principio piensan que es complicada, consiguen resolverla con cierta facilidad (Figura 1), evaluando y comprendiendo las ideas de sus compañeras. G1P1 obtuvo la fórmula del triángulo equilátero, G1P3 la del hexágono, G1P4 la del rombo y G1P2 la del romboide.

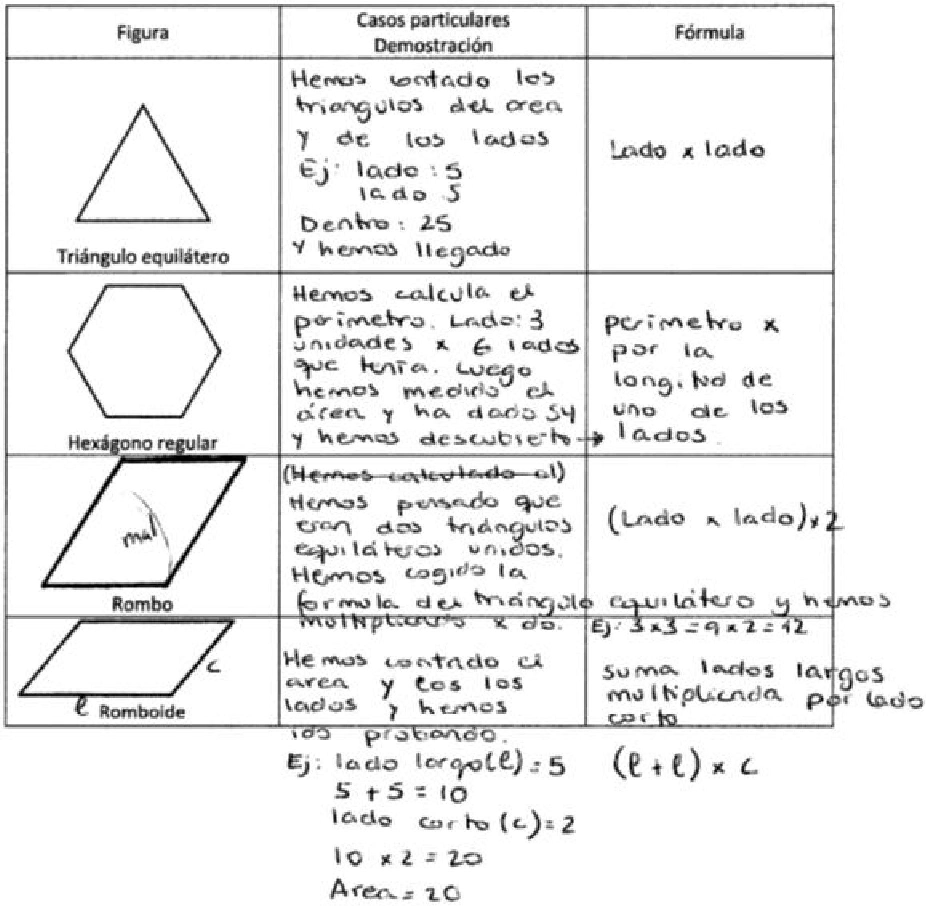


Figura	Casos particulares Demostración	Fórmula
Triángulo equilátero	Hemos contado los triangulos del area y de los lados Ej: lado: 5 lado 5 Dentro: 25 Y hemos llegado	Lado x lado
Hexágono regular	Hemos calcula el perimetro. Lado: 3 unidades x 6 lados que tenía. Luego hemos medido el área y ha dado 54 y hemos descubierto →	perimetro x por la longitud de uno de los lados.
mal Rombo	~~(Hemos calculado el)~~ Hemos pensado que eran dos triángulos equiláteros unidos. Hemos cogido la formula del triángulo equilátero y hemos multiplicado x 2.	(Lado x lado)x2 Ej: 3x3=9x2=12
c ℓ Romboide	Hemos contado el area y los lados y hemos ido probando. Ej: lado largo(ℓ)=5 5+5=10 lado corto (c)=2 10 x 2 = 20 Area = 20	suma lados largos multiplicanda por lado corto (ℓ + ℓ) x c

Figura 1. Resolución de la primera parte

Durante su realización, todas las estudiantes presentaron síntomas de haber disfrutado y estar concentradas en la búsqueda de patrones (tabla 2), especialmente G1P2 y G1P3, que están completamente enganchadas.

Tabla 2. Concentración y disfrute al obtener la fórmula del hexágono regular

Discurso	Acciones/Comentarios	Codificación
G1P2: Vale, que tiene 2 son 24.		
G1P3: 2 por uno, dos...	G1P3 señala los lados.	
G1P2: 6*2=12. No, no va.	G1P2 cuenta más rápido.	
G1P1: es que son tres triángulos por cada lado... Ah, no...	G1P1 está concentrada en su geoplano, pero se equivoca al contar.	Concentración
G1P3: ¡mira!, ¡12*2! 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Por 2, 24	G1P3 grita y le da un manotazo a G1P2. Cuenta los triángulos del "perímetro" mientras los señala.	Disfrute
G1P1: ¿cómo?		
G1P2 y G1P4: Vamos a poner otro tamaño.	No ha escuchado lo que dice G1P1	
G1P3: Yo, yo, yo, porfi.		Interés
G1P4: ¿pero antes qué hemos hecho? Hemos hecho no sé qué por dos.		
G1P3: 96. 24*4, ¡lo estaba diciendo! Son los lados que hay, por 4. ¡No!	G1P3 habla excitada. G1P2 le choca la mano a G1P3.	Disfrute
G1P1: 4* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 24. Por 4.	G1P3 señala el borde muy rápido, y más despacio la medida del lado.	
G1P3: ¡Por los huequecitos que hay! ¡Sí! Tiene razón *G1P1*. Contamos el lado, 4, por el número de lados, 6, sale 24. Y luego multiplicamos por el número de huequecitos. Son 24*4… y sale.	G1P3 termina la frase de G1P1 y habla excitada. Ha recordado su idea.	Retroalimentación
G1P1: Claro		

En esta tarea, G1P4 se encarga de ir rellenando el informe y muestra un deseo por descubrir el patrón y propone sus ideas tan pronto como le surgen, algo poco usual en ella. De hecho, tras experimentar el éxito de encontrar una fórmula por ella misma, intenta que sus compañeras se encarguen de redactar el procedimiento y expresarlas en lenguaje algebraico, tarea que todas ellas consideran tediosa y poco interesante. Ante la negativa de sus compañeras, les pide ayuda para hacerlo, lo que hace pensar por su nivel de rendimiento que quiere que no le desvelen el patrón. En esta situación, G1P2 organiza las ideas e indica a G1P4 lo que poner en el informe, aunque en general todas aportan sus ideas.

G1P1 comienza con una actitud positiva, intentando buscar el patrón, construyendo figuras, dando aportaciones e intentando comprender las ideas de sus compañeras. Sin embargo, sus compañeras van demasiado rápido, por lo que es incapaz de encontrar la regla por ella misma. A medida que avanza la tarea sus intervenciones se hacen cada vez más escasas y se limita a intentar comprender y dibujar las figuras. Pero, no le apetece seguir.

Al comenzar la segunda parte, G1P3 encuentra una dificultad: no saben lo que mide la altura del triángulo unidad. Deciden considerarla como uno y obtienen la misma fórmula que para el romboide. A G1P3 le extraña, pero lo dan por bueno porque funciona con el geoplano. La fórmula del triángulo rectángulo resultó muy fácil para G1P3, una vez conocida la del rectángulo (Figura 2).

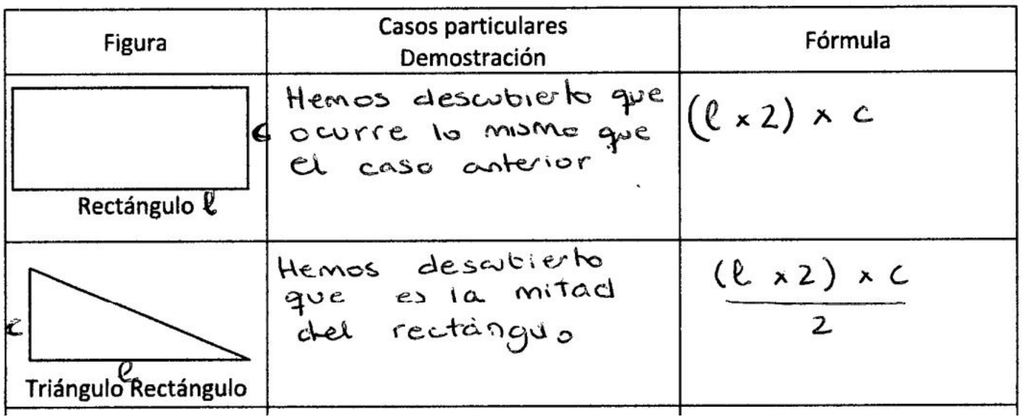


Figura	Casos particulares Demostración	Fórmula
c Rectángulo ℓ	Hemos descubierto que ocurre lo mismo que el caso anterior	$(\ell \times 2) \times c$
c Triángulo ℓ Rectángulo	Hemos descubierto que es la mitad del rectángulo	$\frac{(\ell \times 2) \times c}{2}$

Figura 2. Fórmulas obtenidas (no válidas)

Sin embargo, con el triángulo de lados desiguales aparecen más dificultades: no saben cómo contar los triángulos ni la longitud de los lados. Ahora los triángulos no quedan divididos por la mitad, por lo que la estrategia utilizada en el rectángulo no funciona. G1P2 se muestra un poco enfadada y con interés por resolver esta figura, por lo que G1P2, G1P3 y G1P4 sugieren alternativas, escuchan las ideas de sus compañeras y las evalúan (Tabla 3). Finalmente, deciden preguntar a la profesora.

Tabla 3. Bloqueo al obtener la fórmula del triángulo escaleno

Discurso	Acciones/Comentarios	Codificación
G1P2: es que... se queda mal. G1P4: ya… G1P3: vamos a preguntarle G1P2: es que es así pero ahora, ¿cómo lo contamos?	G1P2 lo observa. Se muestra un poco “enfadada”.	Ausencia de disfrute
G1P4: Pues vamos a contar nada más que los que sabemos. ¡Ups! que tienen esos. G1P2: ¡Por eso! G1P3: ¿Y estos de aquí? G1P2: tengo un plan. Si juntamos esta puntita, con la otra nos da uno. G1P3: Con esta…	Levanta el geoplano enseñándoselo a G1P3 y G1P4. G1P1 se acerca porque no ve. G1P2 lo aleja para que lo vean todos. G1P4 empieza a contarlos. G1P3 mira casi todo el tiempo a su geoplano.	Interés
G1P3: Estos dos forman uno y es en serio! Y este con este también.	G1P2 está bromeando. G1P3 termina la frase de G1P2. Todas se ríen.	Disfrute
G1P4: Es verdad. G1P2: ¿y me explicas este de ahí? G1P4: ¿y este? G1P2 y G1P3: vamos a preguntar.		Concentración

Ésta les pregunta el procedimiento seguido en el rectángulo y les hace ver que si consideran que la altura del triángulo equilátero mide uno (lo mismo que el lado del triángulo unidad), la fórmula no es válida para calcular la superficie de una figura en un folio en blanco utilizando una regla. G1P2 y G1P4 comprenden el problema, pero están desconcertadas porque les funciona en el geoplano siendo incorrecta. El geoplano proporciona retroalimentación “engañosa” en estas situaciones.

G1P3 y G1P1 no entienden la invalidez de la fórmula (aunque no lo manifiestan hasta casi el final de la sesión), ya sea porque no han entendido el problema o porque aun sabiéndolo no son conscientes de que deben utilizar una unidad común para la base y la altura para que sea válida con lápiz y papel. Podría darse un conflicto entre la meta del estudiante, es decir, obtener un patrón o regla para calcular el área de superficies utilizando el geoplano, y la meta del profesor, encontrar una fórmula válida para su cálculo en general.

Para resolverlo, la profesora sugiere otra estrategia que no sea contar. G1P2 toma la iniciativa, pero intenta relacionar perímetro con área y busca estrategias para obtener la longitud de todos los lados, esto la bloquea. La profesora le intenta convencer de que esto no es necesario, argumentando que en las fórmulas usuales no lo es, pero no es capaz de dar otro procedimiento.

De repente, G1P3 que estaba concentrada en su geoplano mientras la profesora estaba hablando, llama la atención de todas porque ha encontrado un procedimiento para calcular el triángulo con uno de sus ángulos de 60 grados (Figura 3).

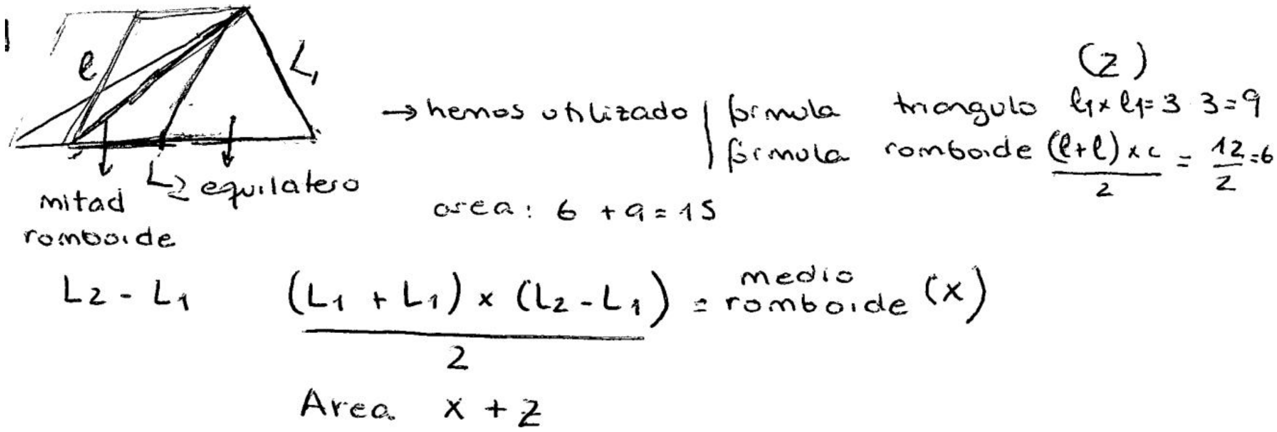


Figura 3. Obtención de la fórmula de un triángulo (con un ángulo de 60º) por descomposición

Al mostrárselo a sus compañeras, G1P2 y G1P4 se animan. G1P3 está especialmente orgullosa de su ocurrencia, pero cuando ella y G1P4 intentan obtener la fórmula se agobian un poco.

La descomposición que ha realizado, aunque es correcta, requiere de confianza, análisis de la figura y un uso adecuado de la nomenclatura, tarea que algunos no han llevado a cabo antes. En cambio, después de que la profesora haya dicho que la fórmula del rectángulo está mal, G1P3 no confía tanto en su procedimiento. G1P4 le dice que el método es correcto y que sólo hay que darle nombres, pero G1P3 se muestra desanimada y afirma no saber hacerlo. Deciden preguntar a la profesora, quién les ayuda a escribirlo en lenguaje algebraico, lo que alegra a G1P3 y G1P4. Comentar que G1P2, que había traducido a lenguaje algebraico la regla obtenida con la mayoría de las figuras anteriores, tuvo que marcharse justo antes de comenzar a escribir la fórmula.

En esta segunda parte de la tarea, G1P1 se limita a observar e intentar comprender. La frustración que han experimentado algunas de sus compañeras, que considera hábiles resolviendo tareas matemáticas, durante la resolución del rectángulo y del triángulo, la velocidad inicial para resolver la tarea y la ausencia de comprensión de algunos de los razonamientos que han llevado a cabo hacen que sienta que poco puede aportar al grupo y elevan su percepción de dificultad de la tarea, que acaba superándola.

Desarrollo de la resolución del grupo 2 de la tarea de obtención de fórmulas

En el desarrollo de la actividad, G2P3 toma un papel poco activo: se limita a intentar comprender el razonamiento de sus compañeros y rellenar el informe para entregar a la profesora. Al principio, todos dan su opinión, aunque la mayoría de ellos dan mayor credibilidad al razonamiento de G2P1 y G2P4, quienes toman un papel muy activo.

En concreto, G2P4 ejerce el papel de líder, dando órdenes y supervisando todo. Además, sólo escucha a G2P1, haciendo caso omiso de lo que dicen G2P2 y G2P5, diciéndoles que todo lo hacen mal y culpabilizándoles de los errores cometidos (Tabla 4). Su actitud muestra que piensa que él es superior y ellos son un lastre en el grupo, por los que los excluye.

Tabla 4. Ejemplo de la dinámica del grupo 2

Discurso	Acciones/Comentarios	Codificación
G2P4 a G2P1: Escúchame. Multiplicas el número este por 6 2*6=12 *2=24 3*6=18 *3=54 G2P1: 48 G2P4: ¿cómo? ¿cómo? ¿cómo?	Se equivocan en las operaciones	
G2P4: Tiene que salir 94, no da. No lo entiendo. Vaya mierda. ¡Ah!, no, no, que es 6*4=24 G2P5: Claro.	G2P3 le dice que está la cámara, él dice que le da igual.	Retroalimentación Emociones negativas
G2P4: 24*4= G2P5: Sí da, sí da, sí da. G2P4: No da 94. Vaya leche. G2P3: A ver si os habéis equivocado sumando eso. G2P1: 4*24 serían... si es que no sale. 96. Nos hemos equivocado por dos. G2P4: Yo creo que nos hemos equivocado porque sí tiene sentido. G2P1: así sí tiene sentido.	G2P4 le explica sus ideas a G2P1.	
G2P5: ¿lo contamos otra vez? G2P4: Es que yo creo que lo hemos hecho mal. Lo habéis hecho mal.	G2P4 culpabiliza a G2P2 y G2P5	Ausencia de apoyo afectivo

G2P4 utiliza un tono agresivo e intenta imponer sus ideas, a la vez que desea la aprobación de G2P1 y comprender sus ideas (su único interlocutor válido junto con la profesora). Este tono lo utiliza con todos, aunque no en todos tiene el mismo efecto. G2P5 exige razones por las que está mal pero no defiende sus ideas, G2P3 dice que él toma nota de lo que G2P4 había dicho y G2P2 busca apoyo en sus compañeros y deja de trabajar cuando no lo encuentra. En cambio, G2P1 cede únicamente cuando cree que es correcto pero si su procedimiento también lo es, lo hace ver.

G2P4 y G2P1 discuten "acaloradamente" casi todo el tiempo. Estas discusiones excluyen al resto del grupo y hacen pensar que la tarea es compleja, provocando que se aburran y solo den su opinión cuando están muy seguros o está la profesora delante. G2P2 y G2P5 se limitan a dibujar las figuras, G2P3 a comprender cómo obtienen el patrón.

En sus intervenciones, la profesora les hace ver que han hecho suposiciones erróneas en varias situaciones, como por ejemplo, suponer que en un romboide un lado siempre tienes que ser el doble del otro (Figura 4).

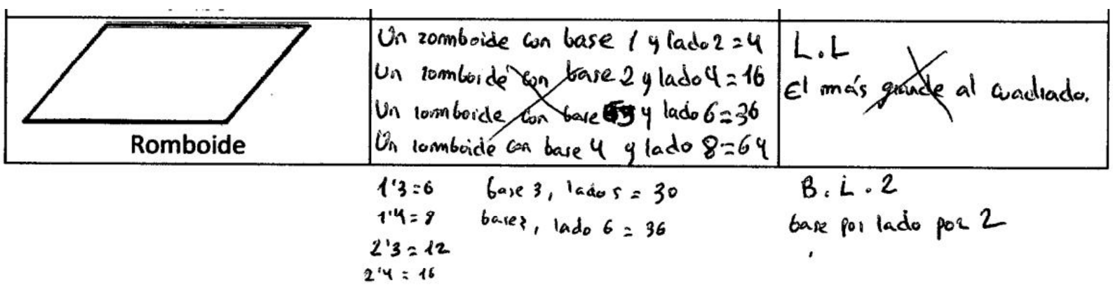


Figura 4. Suposición errónea acerca de las características del romboide

G2P4 piensa que es imposible obtener una fórmula si cambian este supuesto, sin embargo, se motiva cuando ve a G2P1 trabajando, quién acepta muy bien los desafíos. Al enfrentarse a la fórmula del rectángulo realizaron la misma suposición que el grupo 1, lo que les llevó a un bloqueo. G2P4 se muestra enfadado, G2P1 es el único que muestra perseverancia ante las dificultades y con ganas de resolverlo, el resto sienten aburrimiento. Finalmente, con los cálculos que han realizado y algunas preguntas de la profesora, consiguen descubrir la fórmula (Figura 5). Notan que debe haber una forma más sencilla y sienten curiosidad por conocerla. La profesora comenta que siempre han utilizado la misma estrategia, pero que hay otras y les pregunta cómo harían el hexágono de otra forma, teniendo en cuenta lo que vieron en teoría. Así, surge la estrategia de descomposición de figuras. G2P2 ya había observado esta posibilidad al afirmar, mientras sus compañeros realizaban la del rectángulo, que la del triángulo rectángulo es la misma pero dividida entre dos.

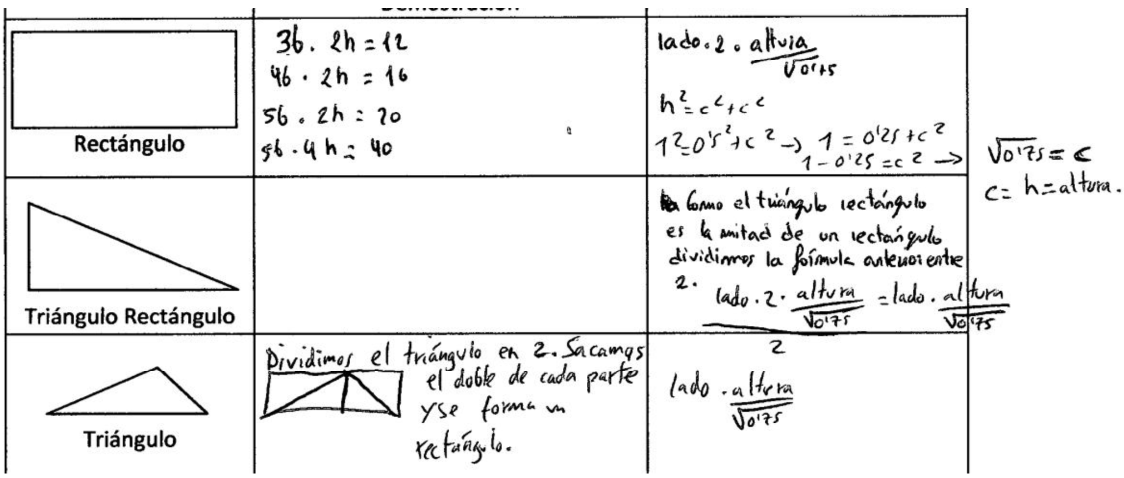


Figura 5. Obtención correcta de las fórmulas para el rectángulo y el triángulo

En definitiva, G1P1, la estudiante de rendimiento medio y autoconfianza media-baja, está concentrada en la tarea pero no disfruta con ella, mostrando desgana durante la segunda parte. Por otro lado, aunque G1P4, estudiante con mayor rendimiento y motivación hacia las matemáticas, da muestras de disfrutar en la búsqueda de patrones y de los éxitos logrados en el grupo, dedica mucho tiempo a rellenar el informe, viéndose limitada su participación en la búsqueda de patrones casi exclusivamente a la segunda parte de la tarea, aspectos que se muestran más complejos. En cuanto a G1P2 y G1P3, estudiantes con un nivel de rendimiento medio y alta autoconfianza, experimentaron flujo mientras buscaban los patrones de la primera parte de la tarea. En cambio, aunque mostraron interés al trabajar la segunda parte, experimentaron emociones negativas y comenzaron a dudar de la validez de sus argumentos y su capacidad para resolver la tarea. En el otro grupo, únicamente experimentó flujo G2P1, estudiante con alto rendimiento y autoconfianza.

En contraste, durante la tarea de comparación, todos los estudiantes se sienten seguros a la hora de realizar la tarea y dar aportaciones, la consideran interesante, útil y de complejidad intermedia-baja, tienen claro lo que deben hacer y reciben retroalimentación inmediata. Salvo G2P2 y G2P5, todos experimentaron flujo realizándola.

DISCUSIÓN

El análisis realizado muestra que la confianza en las propias capacidades para resolver la tarea, recibir retroalimentación sobre la efectividad de las ideas o procedimientos utilizados para solucionarlos y el éxito en tareas similares favorecen la implicación en la tarea, y por tanto, la aparición de experiencias de flujo. En contraste, la presencia de fracasos continuados o la falta de apoyo por parte de los compañeros y la presencia de retroalimentación "engañosa", disminuyen la confianza en la capacidad del estudiante de concluir la tarea de manera satisfactoria, lo que supone un obstáculo para la experimentar flujo.

En el caso de tareas que aumentan su nivel de complejidad rápidamente, es aconsejable que los agrupamientos homogéneos o que los estudiantes que avanzan más rápidamente se encarguen de tomar anotaciones. Además, es necesario que los estudiantes trabajen colaborativamente de manera que todos los miembros del grupo tengan tiempo para reflexionar sobre el problema y oportunidad de expresar sus ideas y se sientan cómodos al hacerlo, creando nuevas ideas fruto de la discusión y colaboración de los miembros del grupo.

Por otro lado, esta tarea podría corregirse para evitar algunos bloqueos innecesarios (cambiar la figura del rombo, puesto que la imagen estaba distorsionada y parecía un romboide), y clarificar el objetivo de la tarea y proporcionar retroalimentación inmediata (proporcionar acetatos con una tramilla de triángulos de lado 1cm y añadir un apartado con ejemplos de figuras con dimensiones que hagan más aparente la invalidez de las fórmulas obtenidas tras considerar la altura del triángulo equilátero mide lo mismo que el lado y proporcione retroalimentación).

Referencias

Gómez-Chacón, I. Mª. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM

Heine, C. A. (1997). *Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement*. Tesis doctoral. Universidad de Chicago, Illinois.

Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2012). Elaboración y aplicación de un instrumento para medir experiencias de flujo. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 397 - 406). Jaén: SEIEM

Nakamura, J. y Csikszentmihalyi, M. (2002). The concept of flow. En C. R. Snyder y S. J. Lopez (Eds.), *Handbook of Positive Psychology* (pp. 89-105). Oxford: Oxford University Press.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Reeve, J. (1994). *Motivación y emoción* (A.M. Lastra. Trad.). Madrid: Ed. McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1992).

Schweinle, A., Turner, J.C, y Meyer, D.K. (2008). Understanding young adolescents` optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*. 77 (2), 125-143.

Whalen, S.P. (1998). Flow and the engagement of talent: Implications for secondary schooling. *NASSP Bulletin*, 82, 22-37.

[i] Financiado por la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia de la Junta de Andalucía, España, a través del Proyecto nº SEJ-7385 y del Programa "FPDU 2009", que está cofinanciado por la Unión Europea a través del programa ERDF.te

CONSTRUCCIÓN DE SERIACIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DE CASO

Construction of sequences at elementary school: A case of study

Morales R., Cañadas, M. C. y Castro E.

Universidad de Granada

Resumen

Presentamos un estudio de caso cuyo objetivo es describir las seriaciones que construye una alumna de 7 años. Pedimos a la alumna que continuara 14 seriaciones diferentes, conociendo dos elementos iníciales dados. La recogida de datos se llevó a cabo a través de una entrevista semiestructurada. En este trabajo describimos el tipo de seriaciones que la alumna construyó atendiendo a las variables de tarea consideradas en esta investigación para el diseño de las seriaciones. Mostramos algunos ejemplos de las producciones de la alumna. Entre los resultados, destacamos que la alumna construyó seriaciones reiterativas y no reiterativas, atendiendo a diferentes patrones y distinto número de elementos en el núcleo.

Palabras clave: *educación primaria, patrones, pensamiento lógico matemático, seriaciones*

Abstract

We present a case of study whose objective is to describe the sequences made by a 7 years old student. We asked the student to continue 14 different sequences, given the first two figures. The data collection was performed through a semi-structured interview. In this work, we describe the kind of sequences constructed by the student, attending to the tasks variables considered in the research design. We show some examples of the student's work. Among the results, we highlight that the student construct reiterative and non-reiterative sequences, with different patterns and different number of element in the nucleus.

Keywords: *logical-mathematical thinking, patterns, primary education, sequences*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento lógico matemático es fundamental en los estudiantes de los primeros niveles educativos, debido a que les permite estructurar la mente, desarrollar la capacidad de razonar, entender el mundo que les rodea y posibilita la construcción de nociones que sirven para designar aspectos cuantitativos de la realidad (Alsina, 2006; Canals, 1980; Castro, del Olmo y Castro, 2002; Dienes y Golding, 1971). El desarrollo del pensamiento lógico matemático infantil debe ser fundamentado en las estructuras lógicas básicas de: clasificación, seriación y ordenación (Piaget e Inhelder, 1976). Estos autores consideran que las seriaciones constituyen un conocimiento básico para el estudio de posteriores conceptos matemáticos. Para continuar una seriación es necesario identificar un patrón. Por ello, la identificación de patrones es importante para lograr construir estructuras lógicas coherentes. Threlfall (1999) y Radford (2010), entre otros, destacan que la

Morales R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Construcción de seriaciones en Educación Primaria: Un estudio de caso. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 401-411). Alicante: SEIEM.

identificación de patrones en las primeras edades escolares puede contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico, a través de la generalización. En esta línea, han avanzado en sus trabajos algunos investigadores como Papic y Mulligan (2005), Papic (2007), y Sarama y Clements (2009). Papic (2007) enfatiza la transcendencia del trabajo con patrones en los primeros niveles educativos, debido a que permiten construir seriaciones, ordenaciones, comparaciones y clasificaciones, sobre la base de la habilidad para identificar, describir y diferenciar atributos de objetos.

Pese a la importancia reconocida del trabajo con patrones y seriaciones considerando atributos cualitativos de objetos en las primeras edades escolares, existen pocos estudios sobre esta temática (Mulligan y Vergnaud, 2006) y diferentes autores manifiestan la necesidad de realizar investigaciones para profundizar en los patrones que son capaces de identificar los alumnos de los primeros cursos (e.g., Clements y Sarama, 2009). Piaget e Inhelder (1976) tratan de desvelar la génesis de las estructuras lógicas básicas de clasificación y seriación; trabajando con más de 2000 niños concluyen que los niños son capaces de realizar seriaciones operatorias de longitudes (elementos con atributos cuantitativos) entre los 7-8 años de edad. Papic y Mulligan (2005) estudian el desarrollo de las habilidades para identificar patrones en niños con edades de entre 4 y 5 años y concluyen que existe una fuerte relación entre la capacidad de los niños para identificar patrones y el desarrollo de sus habilidades pre-algebraicas y de razonamiento. Da Ponte y Velez (2011) muestran los patrones que reconocen dos alumnos (7-8 años) en una tarea de patrones cualitativos. Se centran en analizar la relación que establecen los alumnos entre diferentes tipos de patrones y cómo los representan. Una alumna utilizó la representación pictórica y simbólica para representar un patrón y fue capaz de relacionarlas.

Nuestro interés se centra en los tipos de seriaciones cualitativas que una alumna de siete años construye y los tipos de patrones que identifica y utiliza para continuar seriaciones.

MARCO CONCEPTUAL

El pensamiento lógico matemático es un conjunto de procesos mentales a través de los cuales se establecen relaciones entre objetos, situaciones y conceptos que permiten estructurar la realidad (Soriano, 2008). Este pensamiento es primordial porque aporta fundamentación necesaria para adquirir conocimiento matemático (Canals, 1992, citado por Alsina, 2006).

El pensamiento lógico matemático se organiza mediante estructuras y la maduración de tales estructuras contribuye al desarrollo del pensamiento lógico matemático. Autores como Alsina (2006) asocian estas estructuras con aquella capacidad que construye el niño para analizar las cualidades sensoriales de objetos (color, forma, textura, tamaño…) permitiéndole razonar e interpretar el mundo que lo rodea. Dichas capacidades se asocian con acciones. Entre las acciones que los niños realizan se encuentran: identificar, reconocer, definir; relacionar, y operar, con las cualidades sensoriales de objetos.

Según Piaget (1977) una estructura lógico matemática es una forma de organizar los elementos según sus atributos y las seriaciones son una estructura lógico matemática básica. Adoptamos la definición de seriación de Castro, del Olmo y Castro (2002), quienes señalan que “seriar es ordenar colecciones de objetos manteniendo constante unos atributos de los objetos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación” (p. 44). Las seriaciones se pueden formar de acuerdo a los diferentes atributos que tienen los elementos a seriar. Nuestro foco de atención son las seriaciones cuyo criterio atiende a atributos cualitativos[i], recomendadas para las primeras edades. Fernández (2008) distingue entre seriaciones reiterativas, no reiterativas y seriaciones constantes. Las primeras son aquellas en que se fija la unidad de repetición o núcleo. La figura 1 muestra un ejemplo de seriación reiterativa donde los dos elementos iniciales se repiten constantemente.

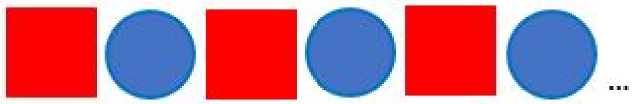


Figura 1. Seriación reiterativa

Las seriaciones no reiterativas son aquellas en las que se observan diferencias de uno o más atributos entre elementos. En este tipo de seriación se observa una regularidad de acuerdo a las diferencias y semejanzas de atributos entre elementos consecutivos, por lo que no tienden a repetirse de la misma forma. La figura 2 muestra una seriación no reiterativa; cada elemento se diferencia del anterior o sucesor en forma y color y se mantiene el tamaño y textura.

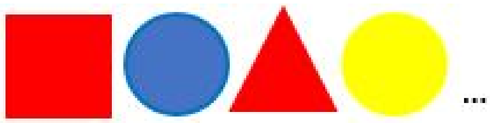


Figura 2. Seriación no reiterativa

Las seriaciones constantes son aquellas en las que cada elemento de la seriación es igual al anterior o sucesor.

Las seriaciones se constituyen por núcleos en los cuales se percibe un patrón. Por tanto, el núcleo es el conjunto de menor número de elementos de una seriación donde se observan patrones que permite generar la seriación (Castro, 1994). En las seriaciones reiterativas el núcleo está conformado por aquellos elementos que se repiten. Por ejemplo, el núcleo de la seriación de la figura 2 está conformado por el cuadrado rojo y el círculo azul. La idea de patrón aparece continuamente cuando trabajamos con seriaciones y no es tarea fácil definir su significado (Liljedahl, 2004). Como idea general, se suele considerar que un patrón se produce ante una situación en la que se observa algo que se repite con cierta regularidad. Identificar un patrón consiste en ver lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Por ejemplo, en las seriaciones no reiterativas explorar un patrón es identificar aquellas semejanzas y diferencias entre los núcleos o elementos y continuar de acuerdo a la regularidad identificada.

Para avanzar en el conocimiento de las seriaciones que abordan alumnos de los primeros niveles educativos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- Describir tipos de seriaciones cualitativas que construye una alumna de 7 años.
- Describir los núcleos que identifica una alumna de 7 años en seriaciones cualitativas.

MÉTODO

Llevamos a cabo un estudio de caso con una alumna de 7 años. La finalidad es conocer en profundidad lo que realiza esta alumna en tareas de seriaciones (Stake, 1999). La alumna, seleccionada intencionalmente, cursaba segundo curso de educación primaria en un colegio en Granada (España) y tenía resultados académicos medios respecto a su curso. La alumna, tras haber cursado educación infantil, tenía algunos conocimientos previos sobre seriaciones cualitativas y había manipulado los bloques lógicos de Dienes.

Llevamos a cabo una entrevista semiestructurada en la que la alumna resuelve catorce tareas sobre seriaciones. La sesión tiene una duración de hora y media. Realizamos grabaciones con videocámara y audio, y fotografías para registrar la información. El primer autor de este trabajo realizó la entrevista, y las grabaciones fueron hechas por la segunda autora.

Diseñamos las tareas atendiendo a tres variables de tarea: (a) cantidad de elementos en el núcleo, (b) atributos (color; forma; tamaño y textura) y (c) variación de atributos entre los elementos de núcleos diferentes. Las preguntas de la entrevista fueron parte de la propuesta de tarea de seriaciones y algunas de ellas las construimos con base en las actividades relativas al operador directo e inverso (Alsina, 2006). Inicialmente, proponíamos a la alumna dos elementos iniciales de la seriación y le pedíamos poner las figuras que iban a continuación observando las dos primeras, sin darle ninguna indicación. A continuación, para ver si identificaba otro patrón, les preguntábamos sobre sus diferencias y semejanzas o le mencionamos que los elementos están ubicados de acuerdo a un criterio y que debía descubrirlo; luego le pedíamos que ubicara más elementos.

Las tareas tienen un elemento en el núcleo y responden a tres niveles hipotéticos de complejidad, según el número de atributos que varían entre dos elementos consecutivos. Estos niveles de complejidad atienden a criterios basados en los trabajos de Threlfall (1999) y Zazquis y Liljedahl (2002). De las 14 tareas que planteamos: las primeras cuatro son de nivel 1 (variación de un atributo y tres fijos), las seis siguientes de nivel 2 (variación dos atributos y dos fijos) y las últimas cuatro de nivel 3 (variación tres atributos y uno fijo). La figura 3 muestra un ejemplo de tarea de nivel 2.

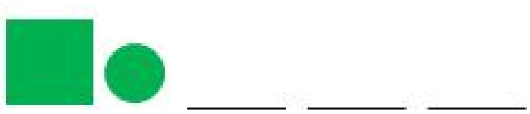


Figura 3. Ejemplo tarea seriación no reiterativa

Utilizamos varias cajas de bloques lógicos de Dienes por ser un material didáctico familiar para la alumna.

Analizamos las transcripciones de la entrevista y fotografías tomadas durante la misma, con base en las siguientes categorías:

- Construcción de seriaciones: tipo de seriación construida a partir de dos elementos dados.
- Consideración del número de elementos en el núcleo.
- Identificación de patrones: atributos que cambia y que mantiene de los elementos del núcleo.

RESULTADOS GENERALES

Presentamos los tipos de seriaciones construidas por la alumna en las 14 tareas. También presentamos ejemplos del trabajo y de los argumentos que utiliza para justificar sus respuestas durante la entrevista. Seleccionamos estos ejemplos y argumentos por tener más riqueza, ser más representativos y porque ilustran de mejor forma los argumentos de la alumna que nos informan acerca de nuestros objetivos de investigación.

La alumna construyó diversos tipos de seriaciones, tanto reiterativas como no reiterativas en las tareas propuestas, atendiendo a diferente número de elementos en el núcleo: uno, dos, tres y cinco como muestra la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de seriaciones construidas

Nº elementos núcleo	Tarea													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Seriaciones reiterativas														
2	X	X	X	X	X	X								
3	X	X	X											
5					X									
Seriaciones no reiterativas														
1		X			X	X					X			
2							X	X	X	X	X	X	X	X

La alumna realizó las seriaciones reiterativas de forma espontánea, sin intervención alguna del entrevistador. En la tabla 1 apreciamos que la alumna logró construirlas considerando dos elementos en el núcleo en las seis primeras tareas. En las tres primeras tareas observamos que logró construir seriaciones reiterativas de dos y tres elementos en el núcleo. En la tarea 5 continuó una seriación de dos y otra de cinco elementos en el núcleo.

En cuanto a las seriaciones no reiterativas de un elemento en el núcleo, las construyó en las tareas 2, 5, 6 y 11. En todos los casos, la alumna construyó este tipo de seriaciones tras preguntarle el entrevistador qué características observaba que se mantenían o se diferenciaban entre las figuras. En la tarea 11 construyó una seriación no reiterativas de dos elementos en el núcleo. En las tareas de la 7 a la 14 construyó seriaciones no reiterativas de dos elementos en el núcleo.

Observamos una tendencia de la alumna a la construcción de seriaciones reiterativas en las seis primeras tareas. Advertimos un cambio en su razonamiento a partir de la tarea 7 en adelante, cuando construye seriaciones no reiterativas de dos elementos en el núcleo de forma espontánea. Ella percibe que no debía continuar la seriación de acuerdo a la repetición de los dos primeros elementos, como se observa en el siguiente fragmento de la conversación.

1. Entrevistador (E): Explícame como lo fuiste haciendo.
2. Alumna (A): Para no seguir la serie.
3. E: Para hacer algo distinto.

4. A: Sí.

Además, la alumna enfatizó que había identificado un cambio de forma y mantenido fijos color, tamaño y textura de los dos elementos iniciales cuando ubicaba otros dos elementos:

5. E: Ahora me cuentas ¿Por qué hiciste eso?

6. A: Porque en vez de una serie pequeño y rojo (aludiendo a los dos primeros elementos) he puesto otra forma (a continuación de los dos elementos iniciales).

EJEMPLOS DE SERIACIONES CONSTRUIDAS

En este apartado mostramos ejemplos del trabajo de la alumna. La figura 4 muestra tres momentos del trabajo de la alumna en la tarea 5. La alumna construyó dos seriaciones reiterativas, de dos y cinco elementos en el núcleo y una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo.

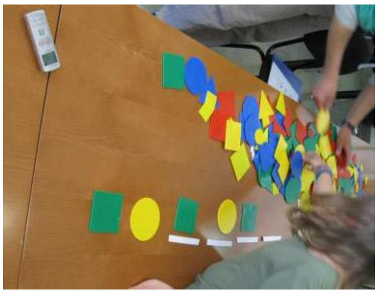
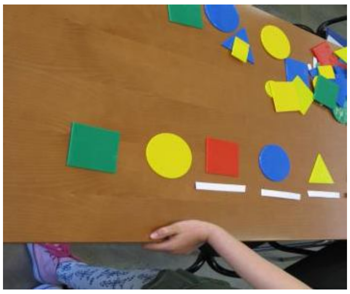




Figura 4. Ejemplos de seriaciones reiterativas y no reiterativas en tarea 5

La alumna inicialmente determinó los atributos que variaban forma y color entre los dos elementos iniciales de la seriación. Sin embargo, no logró continuar la seriación de acuerdo a este patrón, sino que continuó de acuerdo al patrón de repetir los dos elementos iniciales con sus mismos atributos construyendo de esta manera una seriación reiterativa de dos elementos en el núcleo (imagen izquierda figura 4). Posteriormente, el entrevistador le preguntó por lo que observara igual o diferente entre los elementos puestos en un comienzo. A través de esta orientación la alumna logró construir una seriación de un elemento en el núcleo con base en el patrón de las semejanzas y diferencias de atributos entre elementos consecutivos: cada elemento se diferencia del anterior o sucesor en color y forma, y se mantiene tamaño y textura (imagen central figura 4). El siguiente fragmento muestra las preguntas del entrevistador que guiaron a la alumna hacia la construcción de una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo de acuerdo al patrón de las diferencias y semejanzas de atributos entre elementos consecutivos. Se centró en preguntas relativas a los cambios de atributos entre elementos.

7. E: Mira, siempre tienes que fijarte de aquí a acá (Indica con el dedo el segundo elemento círculo amarillo y tercer elemento cuadrado verde imagen izquierda) ¿En qué cambia?

8. A: En forma y color.

9. E: Entonces, qué otro elemento me puede servir ahí (indicando al tercer elemento cuadrado verde grande liso) ¿Solamente el verde?

10. A: No, la roja.

11. E: Esa (le muestra un cuadrado rojo grande liso) ¿Por qué la roja?

12. A: Porque tiene el mismo tamaño y solo cambia el color.

13. E: Solo cambia el color ¿Y qué más cambia?

14. A: Los vértices.

Luego, pedimos a la alumna que continuara la seriación por sí misma. Sin embargo, no logró seguir tal como lo estaba realizando respondiendo a las preguntas del entrevistador. En su lugar construyó una seriación reiterativa de cinco elementos en el núcleo (imagen derecha figura 4). Continuó la seriación de acuerdo al patrón de repetir cinco elementos con sus mismos atributos. La alumna denominó "serie" a este tipo de construcción, como aquella que está constituida por elementos que se repiten constantemente manteniendo sus mismos atributos, como muestra el siguiente fragmento. Aquí también se observa la identificación del núcleo de la seriación por parte de la alumna.

15. E: ¿Por qué hiciste eso?

16. A: Porque parece una serie.

17. E: ¿Cuáles son las figuras que parecen una serie?

18. A: Cuadrado, círculo, cuadrado, círculo, triángulo.

La figura 5 muestra dos momentos del trabajo de la alumna en la tarea 11. En esta tarea logró construir dos seriaciones no reiterativas, de dos y un elemento en el núcleo respectivamente.

Figura 5. Ejemplos de seriaciones no reiterativas en tarea 11

Al comienzo de la tarea 11 la alumna logró identificar aquellas diferencias de forma, tamaño y textura, y semejanzas de color de atributos entre los dos elementos iniciales (imagen izquierda figura 5). Sin embargo, no logró construir una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo con base en este patrón, sino que construyó una seriación no reiterativa de dos elementos en el núcleo. Consideró los dos elementos iniciales como un núcleo y siguió la seriación de acuerdo al patrón de ubicar dos elementos distintos en forma y color a los dos anteriores (imagen de la izquierda figura 5). En el siguiente fragmento notamos el cambio de razonamiento que realiza la alumna y cómo este nuevo razonamiento le permite construir una seriación diferente:

19. E: ¿Cómo has cambiado las formas? ¿Por qué has puesto triángulo y luego triángulo?

(Indicando con el dedo tercer y cuarto elementos imagen izquierda figura 5)

20. A: Para no seguir la serie lo he hecho.

21. E: ¿Qué serie?

22. A: Antes colocaba, cuadrado, círculo, cuadrado círculo, cuadrado y círculo.

23. E: Ah, para hacer esa diferencia.

24. A: Sí.

Posteriormente, con orientación del entrevistador, que buscó que la alumna cuestionara su propio trabajo a través de preguntas orientadas al cambio de atributos entre elementos de la seriación que había construido inicialmente, la alumna construyó una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo de acuerdo al patrón de las diferencias y semejanzas de atributos entre elementos consecutivos; cada elemento se diferencia del anterior o sucesor en forma, tamaño y textura, y se mantiene el color (imagen derecha figura 5). Esta situación se observa en el siguiente fragmento:

25. E: Pero aquí cambiaron los vértices (Indicando con el dedo el primer y segundo elemento de la imagen izquierda figura 5) ¿Y de aquí a aquí cambiaron los vértices? (Indicando con el dedo al tercer y cuarto elemento de la imagen izquierda figura 5).

26. A: No.

27. E: ¿Habría que cambiar esas? (Indicando con el dedo el tercer y cuarto elemento de la imagen izquierda figura 5).

28. A: Sí.

29. E: ¿Por cuál?

30. A: Por un cuadrado (La alumna ubica en la cuarta posición un cuadrado rojo pequeño liso, imagen derecha figura 5).

31. E: ¿Y esas? (Indicando al quinto y sexto elemento imagen izquierda figura 5).

32. A: Si, (La alumna cambia los elementos que están en la quinta y sexta posición imagen izquierda figura 5 y pone en su lugar los de la quinta y sexta posición imagen derecha figura 5).

33. E: Eso es para no seguir la serie.

34. A: Si.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado diversos tipos de seriaciones que una alumna de 7 años construye a partir de dos elementos dados. Esta alumna lo hizo mediante la identificación, descripción y diferenciación de atributos entre objetos, capacidades vinculadas al pensamiento lógico matemático y a la exploración de patrones en los primeros niveles educativos. En ocasiones, requirió ayuda del entrevistador para fijar su atención en la identificación de diferencias entre los atributos, esto es, para la identificación de seriaciones no reiterativas. Sin embargo, la alumna identificó de forma espontánea las seriaciones reiterativas. A partir de los patrones que la alumna detectó, construyó seriaciones reiterativas, no reiterativas, y con diferente número de elementos en el núcleo (1-2-3 y 5).

Todas las seriaciones construidas por la alumna han sido válidas. En todos los casos, la alumna manifestaba haber encontrado el patrón y lo explicaba de forma adecuada. Con esta edad el lenguaje no supone una dificultad para expresar seriaciones con los atributos cualitativos considerados, ni en las seriaciones reiterativas ni en las no reiterativas. Esto es debido a que los alumnos de esta edad ya tienen una predisposición para la búsqueda de justificaciones con respecto a las afirmaciones que realizan (Piaget, 1977).

La orientación del entrevistador se mostró relevante para la construcción de seriaciones no reiterativas. Únicamente preguntándole por diferencias y semejanzas de atributos entre dos elementos consecutivos, la alumna logró seguir este tipo de seriaciones de un elemento en el núcleo de acuerdo a este patrón.

En general, hay una clara tendencia de la alumna por construir seriaciones reiterativas de acuerdo al patrón de repetir los mismos dos elementos iniciales de la seriación. Esta tendencia se observa incluso en casos donde explicaba haber identificado un patrón que se correspondía con seriaciones no reiterativas. Esto puede ser debido a la instrucción recibida en clase ya que la alumna reconoce la idea de "serie" como aquella secuencia de objetos donde se repiten cada cierto número de ellos. Por tanto, cabe hacer una llamada de atención para la práctica docente, donde es necesario incidir en el trabajo con seriaciones no reiterativas para que no asocien la idea de patrón únicamente con las seriaciones reiterativas.

Hemos mencionado en el trabajo tres niveles de complejidad de las tareas que fueron construidos a nivel teórico (Threlfall, 1999; Zazquis y Liljedahl, 2002). Sin embargo, con el trabajo empírico de esta alumna en tareas que responden a diversos niveles, no observamos diferencias en la continuación de una seriación de un elemento en el núcleo. Por tanto, según el trabajo realizado con esta alumna no podemos confirmar los niveles establecidos por los autores mencionados. Sería necesario continuar indagando sobre esta idea. Ampliar la muestra o el diseño de otras tareas podrían complementar los resultados obtenidos.

Por último, conscientes de las limitaciones de este trabajo (un solo caso, reducido número de tareas) hemos hecho un aporte a la necesidad de indagar sobre el pensamiento lógico matemático de alumnos de primeros niveles educativos a través de las respuestas a tareas en las que construyen seriaciones cualitativas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Alsina, A. (2006). Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años. Barcelona, España: Octaedro.

Canals, M. (1980). *La matemática en el párvulo*. Madrid, España: Nuestra Cultura.

Canals, M. (1992). Per una didàctica de la matemàtica a l' escola. Vic, España: Eumo.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro, E., del Olmo, M. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada, España: Universidad de Granada.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math. The learning trajectories approach. Nueva York, NY: Routledge.

Da Ponte, J. y Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. *Boletim Gepem, 59*, 53-68.

Dienes Z. y Golding, E. (1971). *Lógica y juegos lógicos*. Barcelona, España: Teide.

Fernández, J. (2008). *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*. Madrid, España: Grupo Mayéutica-Educación.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.

Mulligan, J. y Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 261-276). Londres, Reino Unido: Sense Publishers.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom,12*(3), 8.

Papic, M. y Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 609-616). Sydney, Australia: MERGA.

Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Barcelona, España: Seix Barral.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1976). Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. Nueva York, NY: Routledge.

Soriano, M. (2008). ¿Qué entendemos en la escuela por pensamiento lógico matemático? *Enfoques Educativos, 16*, 125-129.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London, Reino Unido: Cassell.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

---

[i]Usualmente se distingue entre dos tipos de atributos de los objetos: (a) atributos cuantitativos y (b) atributos cualitativos. Los primeros son propiedades de los objetos cuantificables, a los que se les puede asignar una cantidad y, por tanto, se pueden medir.

PERSPECTIVAS DE ESTUDIANTES PARA PROFESORES SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGIA PARA APOYAR EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

Prospective secondary mathematics teachers' perspectives about the use of technology for supporting the secondary students' mathematics learning

Moreno, M. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar perspectivas de estudiantes para profesores de educación secundaria (EPS) sobre el papel que puede desempeñar la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. Los datos proceden de la planificación de una lección basada en la resolución de problemas mediante el uso de tecnología. Las perspectivas de los estudiantes para profesor se situaron a lo largo de un continuo considerando la relación entre: (i) lo que se pretendía con el uso de recursos tecnológicos y (ii) la naturaleza de la actividad matemática generada. La relación entre ambos aspectos ayuda a reconocer el papel que pueden desempeñar las perspectivas de los estudiantes para profesor cuando están aprendiendo a integrar la tecnología en la enseñanza de la resolución de problemas.

Palabras clave: *Aprendizaje del estudiante para profesor, perspectivas, tecnología, actividad matemática, planificación de una lección, resolución de problemas.*

Abstract

The goal of this research is to characterize pre-service secondary mathematics teacher's perspectives of the role played by technological resources to support students' mathematical learning. The evidences come from a lesson plan activity on problem solving integrating technology. The prospective secondary mathematics teachers' perspectives were situated in a continuum defined by the relation between (i) the way in which technological resources went to be used, and (ii) the nature of mathematical activity. The relation between both aspects help us to recognized the role played by prospective mathematics teachers' perspective in learning to integrate the technological resources in the teaching of problem solving.

Keywords: *Preservice secondary teacher' learning, technology, perspectives, mathematical activity, lesson planning, problem solving*

Algunas de las aproximaciones a la enseñanza de las matemáticas generadas en los últimos tiempos apoyan el uso de los recursos tecnológicos como un medio para favorecer el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. La disponibilidad de diferentes recursos tecnológicos está generando cuestiones sobre el papel del conocimiento y las creencias del profesor en generar aproximaciones a la enseñanza integrando la tecnología. El constructo "Technological Pedagogical Content Knowledge"-TPAK (Koehler y Mishra 2009; Nies, 2005) está intentando caracterizar la interacción entre el conocimiento del contenido, la cuestiones relativas a la enseñanza (pedagogía) y la tecnología. La introducción de este constructo en la investigación didáctica intenta reconocer los desafíos a los que deben enfrentarse los profesores que intentan usar recursos tecnológicos en su

Moreno, M. y Llinares, S. (2015). Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 413-421). Alicante: SEIEM.

enseñanza. En el contexto de la formación de profesores, esta situación genera la cuestión del papel que desempeñan el conocimiento y las creencias sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor cuando están aprendiendo a integrar los recursos tecnológicos en la enseñanza (Wilson, Lee y Hollebrands, 2011; Tondeur, et al. 2012).

MARCO CONCEPTUAL

Simon y colegas (Tzur, Simon, Heinz y Kinzel, 2001; Simon y Tzur, 1999) caracterizaron el término "perspectiva del profesor" para referirse a una estructura pedagógica de concepciones -conocimiento y creencias- que organizan algunos aspectos de la práctica del profesor y que podía condicionar sus posibilidades de aprendizaje. Es decir, la "perspectiva del profesor" se entiende como las referencias cognitivas a través de las cuales los profesores dotan de sentido a las situaciones de aprendizaje en las que se encuentran. En el contexto de la formación inicial, las perspectivas de los estudiantes para profesor sobre la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, sobre su papel como profesor y sobre lo que son las matemáticas escolares pueden determinar en cierta medida la manera en la que pueden aprovechar las oportunidades de aprendizaje generadas en los programas de formación. En particular, cuando están aprendiendo a integrar los recursos tecnológicos en la enseñanza de la resolución de problemas.

La planificación de una lección es un contexto en los que los estudiantes para profesor deben tomar decisiones en relación al papel de los instrumentos tecnológicos, su propio papel como profesores y sobre la naturaleza de la actividad matemática que pretenden generar (Morris y Hiebert, 2009). Durante la planificación de una lección, al generar objetivos de aprendizaje específicos, explicitar la manera en la que relacionan las actividades con aspectos del aprendizaje pretendido y, cómo anticipan las evidencias de aprendizaje de los alumnos para justificar sus decisiones, proporcionan información sobre cómo intervienen sus perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje determinando su toma de decisiones. En este contexto, la idea de "perspectivas del estudiante para profesor" inferidas por el investigador intentan dar cuenta de la interpretación del investigador de las referencias cognitivas que el estudiante para profesor moviliza para tomar decisiones sobre la enseñanza. En particular, cuando los estudiantes para profesor están aprendiendo a usar la tecnología como un recurso para el aprendizaje, se enfrentan en situaciones en las que es posible modificar la naturaleza de la actividad matemática pretendida en los estudiantes. El empleo de herramientas tecnológicas demanda el uso de problemas que no son sólo una adaptación de los que se usan con lápiz y papel, sino problemas donde las herramientas deben funcionar como mediadores entre el resolutor y la construcción del conocimiento matemático (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009; Santos-Trigo, 2007). Teniendo en cuenta estas referencias, nos planteamos el siguiente objetivo de la investigación:

- Caracterizar las perspectivas de los EPS sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático en el contexto de la resolución de problemas.

METODO

Participantes y contexto

En la investigación participaron 25 EPS matriculados en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria cursando la materia de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (50 horas) (Máster de formación de profesores de educación secundaria). Uno de los objetivos de dicha materia era desarrollar el conocimiento de contenido pedagógico y tecnológico en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas. Durante el desarrollo de la materia los EPS analizaron el uso de applets para la enseñanza de las matemáticas, discutieron sobre casos de aula en los que se introducía el uso de tecnología para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, reflexionaron sobre el efecto del uso de la tecnología en el contexto de resolución de problemas identificando y analizando los desafíos generados por la introducción de herramientas tecnológicas frente al no uso de la tecnología. Al final de esta asignatura, como una actividad de evaluación, los estudiantes para profesor planificaron una lección basada en la resolución de problemas usando recursos tecnológicos.

Instrumento y procedimiento

Los datos de la investigación son las planificaciones de la lección realizadas. Para planificar la lección cada EPS eligió un problema de un libro de texto de Educación Secundaria que pudiera ser modificado para ser resuelto con tecnología. En primer lugar, resolvieron el problema y analizaron la actividad matemática que se potenciaba en los diferentes momentos de la resolución (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). En segundo lugar, realizaron una propuesta de planificación de una lección con dicho problema en la que tenían que anticipar momentos clave de la resolución susceptibles de ser usados por el profesor para plantear nuevos retos a los estudiantes y abordar desbloqueos o generar nuevos conocimientos.

Análisis

Inicialmente realizamos un análisis global de las producciones de los EPS, centrando nuestra atención en el papel que desempeñaba la tecnología en los momentos de la resolución del problema que el profesor podía usar para plantear nuevos retos, la manera en la que se abordaban los posibles bloqueos y cómo consideraban el uso de la tecnología en generar extensiones del problema para continuar la lección. Este primer análisis permitió identificar rasgos en las planificaciones realizadas que ponían de relieve distintos usos de los recursos tecnológicos. Estos usos se mostraban en:

(i) la naturaleza de la actividad matemática generada durante los diferentes momentos de la resolución, y cómo aprovechaban dichos momentos para plantear nuevos retos, abordar desbloqueos o generar o introducir nuevo conocimiento, y

(ii) las extensiones del problema propuestas.

En este trabajo presentamos los resultados de cinco casos considerados prototípicos y que nos permitían explicitar las características de las perspectivas identificadas.

Los problemas usados en las planificaciones de las lecciones se centran inicialmente en objetivos de cálculo. Sin embargo, las modificaciones realizadas para introducir los recursos tecnológicos pone de manifiesto la manera en la que los estudiantes para profesor empezaban a considerar como objetivos de aprendizaje el desarrollo de procesos matemáticos como conjeturar, probar o generalizar. La modificación de los objetivos de aprendizaje pretendidos y el papel que podía desempeñar el profesor y el uso dado a los recursos tecnológicos fueron definidos por las "perspectivas de los estudiantes para profesor".

RESULTADOS

Los resultados muestran que las perspectivas de los EPS sobre el papel que puede desempeñar la tecnología como medio de apoyo al aprendizaje matemático se sitúan en un continuo que va desde el uso de la tecnología vinculada a “mostrar” a los estudiantes algún hecho matemático (PERSPECTIVA 1) hasta el uso del recurso tecnológico como un medio para generar conocimiento (PERSPECTIVA 2). Las características que hemos identificado provienen fundamentalmente de la naturaleza de la actividad matemática pretendida por los EPS durante el proceso de resolución del problema con tecnología, y de las características de las extensiones y el papel que éstas desempeñaban en su planificación para crear oportunidades de aprendizaje para generar nuevo conocimiento.

Los problemas en las planificaciones de los cinco casos que usamos para ejemplificar las perspectiva fueron: Lourdes propone un problema de 2º curso ESO de ecuaciones de primer grado para introducir las identidades notables; Pablo propone un problema de 3r curso de ESO en el que hay que calcular la longitud de la mediana de un triángulo equilátero, y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita; Jesús opta por un problema de 3º de ESO de cálculo de áreas y perímetros; Francisco elige un problema de 4º de construcción de polígonos y cálculo de área de un cuadrado; y Marta elige un problema de 1º de cálculo de áreas, en el que utiliza elementos de geometría plana.

PERSPECTIVA 1: Los estudiantes para profesor situados en esta perspectiva (Jesús, Francisco y Marta) ponen su atención en el resultado más que en el proceso. Su objetivo es que los estudiantes resuelvan correctamente el problema y conceden poca importancia a la actividad matemática generada durante el proceso de resolución del problema. No hay evidencias explícitas de que se propicien momentos para que los estudiantes conjeturen, o prueben algún resultado parcial, o aprendan a inferir propiedades a partir del estudio de casos particulares, etc. Las actividades planteadas por los EPS de esta perspectiva son del tipo: identificar datos o aplicar las correspondientes fórmulas. Por ejemplo, Francisco cuando describe y justifica el problema elegido para su lección (calcular el área de un cuadrado, que previamente debía ser construido con software de geometría dinámica), indica el procedimiento de construcción y describe, paso a paso, cómo calcular dicho área:

[…] Para determinar el área del cuadrado necesitamos saber la longitud de una de los lados. Para ello necesito la distancia entre dos vértices que conformen un lado. En este caso uso los puntos C(2,4) y D(0.5,2.5).

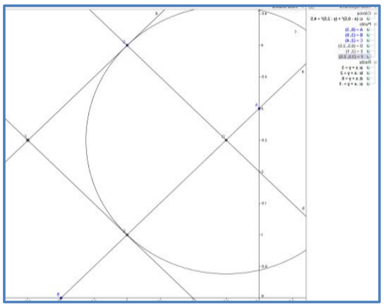
Para calcularlo de forma manual: A(A1, A2), B(B1, B2)

$$Distancia = d = \sqrt{(B1 - A1)^2 + (B2 - A2)^2}$$

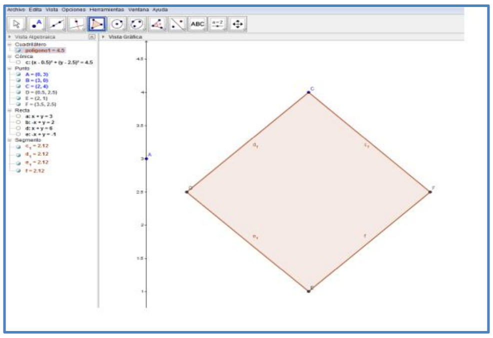
$Área = d^2$ *C(2,4), D(0.5,2.5)*

$$Distancia = d = \sqrt{(4 - 2.5)^2 + (2 - 0.5)^2}$$

Distancia = 2,12 Ud. *Área = 4,5 Ud^2*

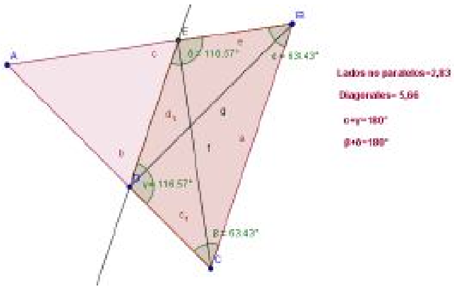


Para encontrar el área de CDEF con el programa, uso la herramienta "polígono" y marco los cuatro vértices. De esta manera me da un área de 4,5 Ud^2.



La actividad pretendida es: representar gráficamente algún elemento matemático (por ejemplo una figura: trapecio, triangulo, etc.) y justificar alguna de sus propiedades (equilátero, isósceles, etc.) usando la potencialidad del software de geometría dinámica y, posteriormente, realizar una comprobación numérica. Por ejemplo, Marta indicaba que después de construir el triángulo y las bisectrices con el software, el recurso tecnológico permitía comprobar con facilidad que la figura obtenida, uniendo los puntos de corte de las bisectrices con los lados opuestos, era un paralelogramo:

> […] *Como podemos observar en la representación la figura que se obtiene al trazar la recta es un cuadrilátero, concretamente un trapecio isósceles. Veamos que efectivamente lo es*



Marta indica:

> *[…] Tendrá que calcular sus ángulos, fijarse en las medidas de sus lados y hacer las diagonales. Así observamos que la figura resultante es un trapecio, ya que tiene los lados no paralelos iguales (ambos miden 2.83), tiene ángulos internos agudos y dos obtusos, que son iguales entre sí; las diagonales son congruentes (ambas miden 5.66) y la suma de los ángulos opuestos es de 180 grados. Respecto al área del trapecio, se calcula directamente por la aplicación al considerar una figura como polígono, y ésta es de 12,8.*

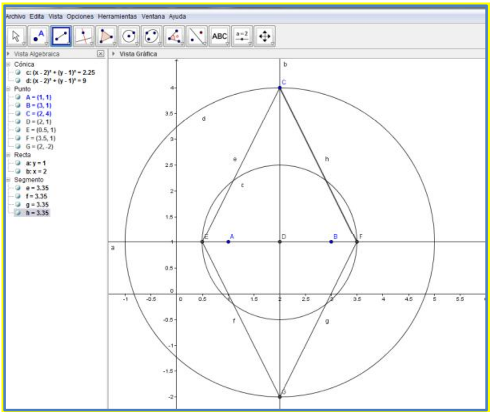
Para estos estudiantes para profesor la tecnología es una herramienta que permite comprobar que la resolución algebraica realizada por los alumnos de la ESO a lápiz y papel es correcta reforzando así los conceptos matemáticos aprendidos. En esta perspectiva hay una sobrevaloración del álgebra y del uso de fórmulas que deberían ser familiares para los alumnos, poniendo el énfasis en que el alumno reconozca hechos tales como: expresión algebraica de la distancia entre dos puntos, obtención de la pendiente de la recta, condición de paralelismo y perpendicularidad, relación entre el perímetro y las áreas de las figuras, etc. Por ejemplo:

> *[…]La altura h se calcula analíticamente con la ecuación que nos da la distancia entre dos puntos.*
>
> *C(C1,C2) = (2,4)* *D(D1,D2) = (2,1)*
>
> $$Distancia = h = \sqrt[2]{(C1-D1)^2+(C2-D2)^2}$$
>
> $$h = \sqrt[2]{(2-2)^2+(4-1)^2} = 3\ Ud.$$
>
> *Mediante trigonometría sabemos la relación entre el lado $\overline{CE}$ y la altura h*
>
> $$h = \overline{CE} * cos\,30$$
> $$\overline{CE} = \frac{h}{cos 30} = \frac{3}{cos\,30} = 3{,}464\ Ud$$

Los EPS en esta perspectiva colocan el énfasis en el manejo técnico del recurso tecnológico (convirtiendo el medio en un fin por sí mismo). Por ejemplo, Francisco uno de los EPS indicaba en la justificación del papel del recurso tecnológico en su lección:

> *[…] El alumno aplicando las formulas comentadas en la resolución del problema llega a una solución que después confirma utilizando el programa, de esta manera se refuerzan sus conocimientos conceptuales y procedimentales. Debe entender el procedimiento para poder generalizarlo a otros problemas, después.*

En esta perspectiva los EPS plantean extensiones a los problemas que conllevan aumentar las habilidades procedimentales, construyendo figuras geométricas algo más complejas con herramienta tecnológica. Francisco, uno de los EPS, indicaba:



[…] *Con este problema conseguimos lo siguiente:*

- *Aumentar las habilidades procedimentales.*
- *Conocimiento de las características y propiedades del rombo.*
- *Conocimiento sobre la conexión entre triangulo y rombo.*
- *Conocimientos sobre el área del triángulo y del rombo.*

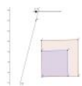
PERSPECTIVA 2: En esta perspectiva se subrayan como objetivos de aprendizaje procesos matemáticos: simbolizar, argumentar, establecer conexiones, conjeturar, estudiar casos particulares, generalizar y ser capaces de hacer transformaciones y manipulaciones con los objetos matemáticos. Para ello los estudiantes para profesor (Lourdes y Pablo) se apoyan en el potencial del recurso tecnológico como la herramienta arrastrar o la introducción de la idea de variable para mostrar la "variabilidad" como un apoyo para el desarrollo de procesos matemáticos de conjeturar o generalizar. Por ejemplo, Lourdes describe un procedimiento susceptible de ser usado en la resolución del problema planteado en la lección para crear una variable, y lo justifica desde la potencialidad de la actividad matemática generada:

> *Paso 5: Crear la variable diferencia*
>
> *<u>Creamos la variable</u> $dif = polígono2 - polígono1$, que nos proporciona la diferencia entre las áreas del cuadrado ampliado y del cuadrado original.*
>
> *Paso 6: Mover el deslizador para encontrar la solución*
>
> *<u>Movemos el deslizador</u> hasta encontrar la solución al problema, que será el valor que tome el deslizador cuando $dif = 24$, que es $X = 5$. Por tanto, el lado del cuadrado original mide $5\ cm$ y su área es $25\ cm^2$, mientras que el lado del cuadrado ampliado mide $7\ cm$ y su área es $49\ cm^2$.*
>
> *De este modo hemos obtenido la solución al problema utilizando GeoGebra. Sin embargo, podemos aprovechar el potencial de este programa para conducir hacia la expresión algebraica de la función diferencia de áreas y el planteamiento de la ecuación correspondiente al problema, <u>así como para establecer conexiones entre diferentes resoluciones</u>. [énfasis añadido]*
>
> *Paso 7: Construir la función diferencia de áreas, representarla y obtener la solución*

Los EPS próximos a esta perspectiva subrayan la posibilidad de potenciar en los estudiantes la capacidad pensar en la resolución de problemas desde diferentes aproximaciones (competencia estratégica). Estos EPS, identifican momentos claves en la resolución del problema en los que el alumno puede estudiar un caso particular que a veces no es inmediato generalizar, usar la tecnología para pasar de una resolución geométrica (más intuitiva y sencilla que la aritmético-algebraica previsible para la propuesta realizada) a una resolución algebraica, establecer conexiones con la gráfica de la función, generando un vínculo entre la función diferencia de áreas y el valor obtenido, y finalmente dar el salto a la algebrización. La tecnología es el recurso que favorece el paso y conexión entre modos de representar y formas equivalentes de resolver el mismo problema. Por ejemplo, este uso de los recursos tecnológicos en la resolución de los problemas se pone de manifiesto en la planificación de Lourdes cuando generaba objetivos de aprendizaje centrados en potenciar las conexiones entre diferentes modos de representación.

Paso 8: Relacionar el modelo dinámico con la representación gráfica de la función

Para ver la relación entre el modelo dinámico construido y la representación gráfica de la función diferencia de áreas, creamos el punto $M = (X, fun(X))$*. Este punto es uno de los puntos de la gráfica de la función dibujada, y se moverá a lo largo de la recta conforme se desplace el deslizador. Coincidirá con el punto H cuando el deslizador valga* 5*. Es otra manera de ver que el lado del cuadrado original mide* $5\ cm$*.*



Paso 9: Plantear la ecuación y resolverla

Finalmente, planteamos la ecuación $(x+2)^2 - x^2 = 24$*, a partir de la función diferencia de áreas, o la ecuación equivalente* $(x+2)^2 = x^2 + 24$*, y la resolvemos:* $4x + 4 = 24$

$4x = 20$

$x = 5$

De aquí también se deduce que el lado del cuadrado inicial mide 5 cm.

En esta perspectiva, los EPS plantean extensiones que proporciona a los estudiantes la posibilidad de estudiar el mismo problema como un caso más general permitiendo establecer conexiones entre diferentes conceptos y procedimientos.

Primera extensión: Un cuadrado se ha ampliado a un rectángulo, aumentando dos centímetros en longitud y cuatro centímetros en altura. El área ha aumentado $74\ cm^2$*. ¿Cuál era el lado del cuadrado?*
Segunda extensión: Al aumentar en dos centímetros los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, el área ha aumentado 26 cm^2*. ¿Cuál era el cateto del triángulo?*

DISCUSION Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar las perspectivas de los EPS de educación secundaria sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. El contexto para inferir dichas perspectivas fue la planificación de una lección basada en la resolución de problemas con integración de recursos tecnológicos. Nosotros hemos identificado dos perspectivas definiendo un continuo en el que situar a los estudiantes para profesor considerando en qué medida la tecnología era introducida en la planificación de la lección y cómo era justificado su uso como apoyo para desarrollar una determinada actividad matemática en los estudiantes (potenciando la emergencia de las estructuras matemáticas y las conexiones entre los diferentes modos de representación o desarrollando actividades de particularización-generalización, conjeturas o pruebas) (Figura 1). La forma en la que los EPS conectaban el uso del recurso tecnológico con la actividad matemática esperada en los estudiantes (mostrar, describir, comparar, inferir, relacionar, reestructurar,…), puso de manifiesto las diferentes maneras en las que los EPS estaban concibiendo el uso de los recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje. Los casos descritos en la sección de resultados pueden ser entendidos como situados en un continuo definido por la presencia, más o menos explícita, de la relación entre el uso de los recursos tecnológicos y el desarrollo de la actividad matemática en el que se sitúan los diferentes EPS.

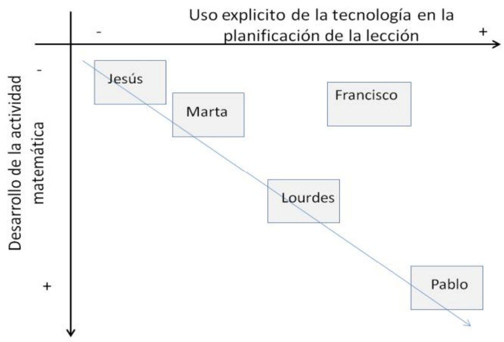


Figura 1. Perspectivas del uso de la tecnología para potenciar el desarrollo de la actividad matemática puesta de manifiesto en la planificación

Este continuo viene definido desde el uso de los recursos tecnológicos para “mostrar” algo que el profesor ya ha introducido (Caso de Jesús), hasta usar los recursos tecnológicos para plantear y superar conflictos cognitivos creando la posibilidad de identificar propiedades y refinar procesos de generar definiciones (Caso de Pablo). Los otros tres casos se han situado a lo largo del continuo definido por estos dos casos dando a los recursos tecnológicos diferentes roles en relación a la actividad matemática pretendida, desarrollo de procesos numéricos en el que los recursos tecnológicos facilitan los cálculos (Caso de Marta), favoreciendo la generación de casos particulares y potenciando el significado de la relación entre variables (Caso de Lourdes) o para consolidar las habilidades procedimentales y ampliar contenidos (Caso de Francisco).

Estos resultados sugieren que aprender a integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de potenciar el desarrollo de la actividad matemática es un proceso complejo. Algunos de los resultados obtenidos podrían ser explicados por las creencias sobre el aprendizaje y sobre la naturaleza de las matemáticas escolares de los EPS. Es decir, la variabilidad en la manera en la que los EPS consideraban el papel que pueden desempeñar los recursos tecnológicos en las situaciones de resolución de problemas pueda ser explicada por otras variables diferentes a la dimensión del conocimiento. Esta última cuestión genera la necesidad de nuevas investigaciones sobre las variables que influyen en el aprendizaje de los estudiantes para profesor de cómo usar los recursos tecnológicos en la enseñanza de la resolución de problemas.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos EDU2011-27288, EDU2011-29328 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Clark-Wilson, A., Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P. y Roschelle, J. (2015). Scaling a technology-based innovation: Windows on the evolution of mathematics teachers’ practices. *ZDM-Mathematics Education, 47*, 79-92.

Daher, W. M. y Shahbari, J. A. (2015). Preservice teachers’ modeling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 25-46.

Koehler, M. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Nies, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology. Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 509-523.

Morris, A. K. y Hiebert, J. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 491-529.

Mouza, C., Karhmer-Klein, R., Nandakumar, R., Ozden, S. Y. y Hu, L. (2014). Investigating the impact of an integrated approach to the development of preservice teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK). *Computers & Education*, *71*, 206-221.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. *ZDM-Mathematics Education*, *39*, 523-536.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS. Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *19*(3), 260-279.

Simon, M. y Tzur, R. (1999). Explicating the teacher's perspective from the researchers' perspectives: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

Sullivan, P., Clarke, D. J., Clarke, D. M., Farrell, L. y Gerrard, J. (2013). Processes and priorities in planning mathematics teaching. *Mathematics Educational Research Journal*, *25*, 457-480.

Tondeur, J., van Braak, J., Sang, G., Voogt, J., Fisser, P. y Ottenbreit-Leftwich, A. (2012). Preparing pre-service teachers to integrate technology in education: A synthesis of qualitative evidence. *Computers & Education*, *59*, 134-144.

Tzur, R., Simon, M., Heinz, K. y Kinzel, M. (2001). An account of a teacher's perspective on learning and teaching mathematics: Implications for teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4(*3), 227-254.

Wilhelm, A. G. (2014). Mathematics teachers' enactment of cognitively demanding tasks: Investigation links to teachers' knowledge and conceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(5), 636-674.

Wilson, P. H., Lee, H. S. y Hollebrands, K. F. (2011). Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 39-64.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS Y RENDIMIENTO ACADÉMICO EN FUNCIÓN DE LOS ESTUDIOS DE ACCESO Y CURSO EN FUTUROS MAESTROS

Attitudes towards mathematics and academic performance depending on the access studies and degree in Primary teacher students

Naya-Riveiro, M. C., Soneira, C., Mato, D. y de la Torre, E.

Departamento de Pedagogía y Didáctica, Universidade da Coruña

Resumen

En este trabajo se analizan las actitudes hacia las Matemáticas de los estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de A Coruña en función del curso y de los estudios de acceso a la Universidad. También se estudia el rendimiento académico según estas dos variables. Se aplica el cuestionario de actitudes PAC de Naya, Soneira, Mato y Torre (2014) con una fiabilidad Alfa de Cronbach de 0.921 a una muestra de 307 estudiantes. El instrumento está formado por 19 ítems con cinco opciones de respuesta tipo Likert y tres dimensiones que miden el autoconcepto, la percepción que tiene el alumno de su profesor y el agrado hacia las Matemáticas. Los resultados muestran que existen diferencias significativas en las actitudes y en el rendimiento en función del itinerario de acceso a la titulación.

Palabras clave: *Actitudes hacia las Matemáticas, rendimiento académico, itinerario de acceso, curso*

Abstract

In this work attitudes towards mathematics depending on the degree and access studies to University are analyzed in Primary teacher students from A Coruña University. Academic performance is also studied regarding these two factors. We apply the PAC attitude questionnaire by Naya, Soneira, Mato and Torre (2014) with a Cronbach´s Alpha coefficient of 0.921 to a sample of 307 students. The questionnaire is made up of 19 items with five Likert-type response and three dimensions that measure self-concept, the student's perception of their math teacher and liking for mathematics. The results show that there are significant differences in attitudes and academic performance depending on the access studies to university.

Keywords: *Attitudes towards mathematics, academic performance, access studies to university, degree*

INTRODUCCIÓN

Hasta hace pocos años, en la formación inicial y permanente del docente primó la mejora de los conocimientos de los futuros maestros, sin embargo a medida que las investigaciones sobre el dominio afectivo matemático mostraban la trascendencia de las creencias, las actitudes y las emociones en la enseñanza-aprendizaje del alumnado la situación cambió. Se fue uniendo lo cognitivo y lo emocional, sin posibilidad de que se puedan deslindar lo uno de lo otro.

Hay investigaciones, que sin dejar de lado otras causas, centran sus estudios en cómo la conducta de los profesores, sus propias creencias y actitudes acerca de sí mismos, sobre las Matemáticas y sus recuerdos influyen en el comportamiento, intereses, motivación y logros de sus escolares (Etxandi, 2007). Es evidente que el proceder de los estudiantes ante las Matemáticas está influenciado por el

Naya-Riveiro, M.C., Soneira, C., Mato, D. y de la Torre, E. (2015). Actitudes hacia las Matemáticas y rendimiento académico en función de los estudios de acceso y curso en futuros maestros. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 423-430). Alicante: SEIEM.

modo en el que los profesores les apoyan emocional y afectivamente; fijando el gusto por la asignatura, la percepción de eficacia matemática del profesor y del mismo estudiante. Todo ello actúa como catalizador del esfuerzo, motivación y agrado hacia la materia, e indirectamente en el rendimiento escolar.

Nuestro interés como formadores en Matemáticas, es conocer sus sentimientos hacia la materia para procurar mejorarlos. Como señalan Bates, Latham y Kim (2011), el entusiasmo hacia la enseñanza de las Matemáticas y hacia las Matemáticas tiene una especial relevancia para el futuro docente y para el docente en ejercicio. Pero sobre todo, porque la abundancia de fracasos en el aprendizaje de las Matemáticas, en diversas edades y niveles educativos, puede explicarse, en gran parte, por la aparición de actitudes negativas originadas por factores ambientales y personales, cuya detección constituiría el primer paso para tratar de contrarrestar su influencia negativa con efectividad.

Con estos argumentos y los elaborados por Ertekin (2010), Sakiz, Pape y Hoy (2012), entre otros, que apuntan a las actitudes como causantes de parte de la insatisfacción y del bajo rendimiento de los estudiantes, e instan a que en los programas de formación de profesores se desarrollen simultáneamente los factores afectivos y cognitivos, justificamos el presente estudio.

A tenor de lo expuesto, estudiamos las actitudes hacia las Matemáticas en el entorno educativo universitario del alumnado de Grado en Educación Primaria en función de los estudios que han realizado antes de ingresar a la universidad. Un segundo objetivo es analizar el rendimiento académico según dicha procedencia y el curso.

MARCO TEÓRICO

Aunque no existe unanimidad a la hora de definir el concepto de actitud hacia las Matemáticas (García y Juárez, 2011), todos los autores concuerdan en que su influencia en la enseñanza-aprendizaje es fundamental, ya que influyen en el proceso cognitivo, bloquean el razonamiento lógico, interfieren en la atención y la memoria, disminuyen la efectividad del esfuerzo, paralizan el pensamiento, causan problemas de rendimiento y ocasionan carencias en las estrategias de aprendizaje específicas y metacognitivas. Hemmings, Grootenboer y Kay (2011) las definen como respuestas positivas o negativas que se mantienen relativamente estables. Por su parte, Gargallo, Pérez, Serra, Sánchez y Ros (2007) hacen hincapié en que son una predisposición aprendida.

Las experiencias negativas en la escuela son críticas en el desarrollo de actitudes matemáticas negativas; conforme se avanza de curso puede disminuir el interés y la motivación y, aquí, el ambiente de clase y el profesor son factores clave que pueden determinar los aprendizajes (Alemany y Lara, 2010). Según Moreno (2010) la relación profesor-alumno se entiende como una interacción con un papel muy importante en el desarrollo de las competencias académicas, sociales y emocionales de los educandos, a través de una correspondencia bidireccional y de interdependencia. En su caso, Martínez Padrón (2008) destaca que las reacciones valorativas hacia la Matemática, hacia quién y cómo la enseña, hacia cómo se aprende o hacia quién y cómo se evalúa, a menudo son producto de las experiencias que se han acumulado como estudiantes, como docentes o como miembros de determinadas comunidades donde, lamentablemente, la Matemática fue y sigue siendo considerada como una de las más impopulares asignaturas del currículo.

Por otra parte, son numerosos los estudios que encuentran problemas de rendimiento en los estudiantes con actitudes negativas en todos los cursos, aunque se esfuercen y les dediquen mucho tiempo a su estudio (Mato y de la Torre, 2009).

Por ello, se debe procurar que los maestros en formación cambien sus creencias negativas y formen opiniones que guíen su formación universitaria, ya que, continuamente, los patrones de conducta de los docentes son observados por los estudiantes de Educación Primaria y marcan su aprendizaje (Bursal y Paznokas, 2006). En este sentido, la labor de los formadores universitarios no es sólo transmitir conocimientos, sino generar entusiasmo, estimular la curiosidad, propiciar actitudes positivas, favorecer un clima emocional adecuado, procurar autoconfianza, transmitir seguridad, ayudar a que los alumnos asimilen los contenidos con agrado y fortalecer las expectativas sobre ellos mismos como futuros docentes de Matemáticas en el nivel de Educación Primaria.

No menos importante es analizar el paso de la enseñanza secundaria a la universitaria en Matemáticas, pues a tenor de los estudios realizados por Iossi (2007), la transición no es fácil, especialmente en la formación para docentes. La razón, justifican Pérez-Tyteca et al. (2009) es que este alumnado presenta una actitud más negativa hacia las Matemáticas que el resto del alumnado universitario. También es trascendental lo que alegan Iannone y Nardi (2007), al considerar otros aspectos como los saltos conceptuales, dificultades cognitivas, socioculturales, didácticas, percepción de los profesores, de la asignatura, de ellos mismos, motivación, utilidad, cambios en la forma de comunicación y en los procesos de demostración en uno y otro ámbito institucional.

Algunos de estos aspectos son considerados por los estudiantes de Bachillerato como innecesarios para desarrollar su labor futura al suponer que la competencia matemática no es ineludible para determinadas profesiones (Gómez-Chacón y Haines, 2008). De tal manera que, con frecuencia, la percepción que tienen las personas de la asignatura guarda relación e influye a la hora de elegir modalidades de bachillerato y optativas en estudiantes preuniversitarios, e incluso se decantan por ciertas carreras en las que muestran confianza ante las expectativas de las asignaturas de Matemáticas. Así, algunos alumnos reconocen que las dificultades y el padecimiento con la asignatura en sus años escolares, les empujó a elegir el Grado en Educación Primaria por presumir que ahí las Matemáticas son más fáciles que en otros estudios (Bates et al., 2011). Sin embargo, Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez (2010) opinan que los futuros maestros consideran útiles las Matemáticas tanto para la vida como para comprender mejor otras disciplinas y entienden que la Didáctica de las Matemáticas les ha aportado otras formas de abordar los problemas matemáticos que antes desconocían.

En nuestras aulas encontramos una gran variedad de procedencia del alumnado (Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología, Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, Bachillerato de Artes, Formación Profesional u otras titulaciones), así como una acusada diversidad de conocimientos matemáticos previos, consecuencia del itinerario y de las asignaturas estudiadas. En Selden y Selden (2005) se expone que las actitudes negativas aumentan durante los primeros cursos de Educación Secundaria, alcanzando su cumbre en tercero y cuarto y se estabilizan durante los cursos de Bachillerato. De este modo, uniendo todas estas variables, la afectividad interviene en el Área de Matemáticas de futuros profesores y de estos a sus alumnos con más fuerza que en ninguna asignatura del currículo escolar (Caballero, Blanco y Guerrero, 2008).

MÉTODO

Participantes

En este estudio participaron de forma voluntaria los estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de A Coruña durante el curso académico 2012-2013. En esta titulación todos los estudiantes deben cursar tres materias troncales del área de Didáctica de la Matemática: Educación Matemática I de 1er curso, Educación Matemática II de 2º curso y Educación Matemática III de 3er curso. Se aplicó el cuestionario a los estudiantes de 1º y 2º curso antes de recibir las clases de estas materias, a los de 3º tras haber cursado la materia y a los de 4º curso una vez superado el Practicum (período de 4 meses de prácticas en centros escolares de Educación Primaria). Es necesario contar con estudiantes de distintos cursos porque se analiza si su actitud hacia las Matemáticas varía a medida que reciben más formación en Educación Matemática y si la experiencia de aula aporta un cambio en su actitud.

La población está formada por 460 estudiantes: 151 de 1º, 139 de 2º, 110 de 3º y 60 de 4º curso. Respondieron el cuestionario 307 sujetos (66.74% de la población) donde 28.3% son de 1er curso, 31.9% de 2º, 24.4% de 3º y 15.3% de 4º. Los estudiantes acceden a esta titulación desde diferentes procedencias: el 36.5% de la muestra realizó la modalidad de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología (CCNT), el 55% el de Humanidades y Ciencias Sociales (HHCCSS), el 2% el de Artes y el 6.5% realizó otro tipo de formación como ciclos de Formación Profesional u otras titulaciones. En cuanto a la calificación que se obtuvo en Matemáticas en el último curso, la muestra ofreció una media de 6.56 en un rango de 0 a 10 con una desviación típica de 1.357.

Materiales

Se aplicó el "Cuestionario de actitudes hacia las Matemáticas para futuros maestros PAC (Percepción, Agrado y Competencia)" de Naya, Soneira, Mato y Torre (2014) con 19 ítems con cinco opciones de respuesta tipo Likert distribuidos en 3 dimensiones:

Dimensión I: Percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado. Compuesto por 9 ítems que hacen referencia al trato que tiene el sujeto con su profesor, si se siente animado o no por su profesor, si logra despertar su interés por las matemáticas y cómo son las clases.

Dimensión II: Agrado hacia las Matemáticas. Formado por 6 ítems que se refieren a la satisfacción, al valor que se le otorga de cara al futuro y a la utilidad de las Matemáticas, tanto desde el punto de vista racional y cognitivo como desde la perspectiva afectiva y comportamental.

Dimensión III: Percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática. Integrado por 4 ítems que aluden a la confianza del estudiante en sí mismo.

Procedimiento

El cuestionario PAC se aplicó on-line de forma anónima, bajo la plataforma Moodle. Para el tratamiento estadístico general de los datos se utilizó el paquete estadístico IBM SPSS v.21.0.

En primer lugar se estudia si existen diferencias significativas en las medias de cada dimensión de la actitud en función del itinerario de acceso aplicando un ANOVA de un factor totalmente aleatorizado. En caso de existir diferencias significativas, se analiza si estas diferencias varían según los cursos. Para ello se agrupó la variable itinerario en tres niveles: uno con la modalidad de Bachillerato de CCNT, otro de HHCCSS y el último denominado Otros (OO) que agrupa al itinerario de Artes u otras opciones.

Otro objetivo es analizar si existe relación entre el itinerario y el rendimiento académico. Además, si esta relación existe, se estudia si su intensidad varía a lo largo de los diferentes cursos. Por este motivo, dado que el interés de la investigación es estudiar el rendimiento académico durante el período de formación como docente, se han considerado de la variable "calificación que obtuviste en Matemáticas en el último curso", sólo las calificaciones que se han obtenido en dicho período de formación. Por ello se ha tomado el curso como una variable con dos niveles: uno con los alumnos de 2º curso dado que la última calificación es de la materia Educación Matemática I de 1er curso, y otro nivel con los alumnos de 3º y 4º curso, puesto que su última calificación recibida de Matemáticas fue en la materia de Educación Matemática III de 3er curso.

El supuesto de normalidad se testó con la prueba de Kolmogorov-Smirnov y los gráficos Q-Q normal y Q-Q normal sin tendencias; el supuesto de homocedasticidad mediante el estadístico de Levene. Posteriormente, para contrastar las hipótesis sobre igualdad de medias, en los casos de incumplimiento de la igualdad de varianzas se usaron, como alternativas al ANOVA, los estadísticos de Welch y Brown-Forsythe. A continuación, cuando las pruebas anteriores mostraban diferencias estadísticamente significativas, se realizaron comparaciones por pares con las pruebas de Tuckey y de Scheffé, así como gráficos de tendencia. En los casos donde no se cumple la homocedasticidad se realizó la prueba de Games-Howel como alternativa.

Para aceptar o rechazar la hipótesis nula, en todas las pruebas se tomó una significatividad asintótica de .005.

RESULTADOS

Los resultados se estructuran en dos subapartados. En el primero se estudia la existencia o no de diferencias significativas en las actitudes en función del itinerario y, en caso de existir, si varían en función del curso. En el segundo, se analiza el rendimiento académico según el itinerario y el curso.

Estudio de las actitudes por itinerario y curso

Se realizó un ANOVA obteniéndose:

- $F(2,304)=0.123$, $p=.884$ y $\eta^2=.001$ para la Dimensión I,
- $F(2,304)=21.864$, $p\leq.001$ y $\eta^2=.126$ para la Dimensión II.

Para la Dimensión II se rechazó la hipótesis nula de igualdad global de medias y se aplicaron las pruebas post-hoc HSD de Tukey para la comparación por pares, existiendo diferencias significativas entre todos los pares excepto en el par (OO, CCNT).

Para la Dimensión III se usaron los estadísticos de Welch y Brown-Forsythe ($F_{Welch}(2,69.348)=12.989$, $p\leq.001$ y $F_{Brown\text{-}Forsythe}(2,92.66)=11.750$, $p\leq.001$), con los que se rechazó la hipótesis inicial de igualdad global de medias. Luego se aplicó la prueba de Games-Howell observándose diferencias significativas en todos los pares excepto en el par (OO, HHCCSS).

A fin de estudiar si estas diferencias eran las mismas en todos los cursos y cómo interactuaban, se realizó un ANOVA de dos factores completamente aleatorizados para la Dimensión III, obteniéndose:

- para itinerario $F(2,304)=8.893$, $p\leq.001$ y $\eta^2=.057$,
- para curso $F(3,303)=2.357$, $p=.072$ y $\eta^2=.023$, y
- para la interacción itinerario-curso $F(6,301)=2.227$, $p=.041$ y $\eta^2=.043$.

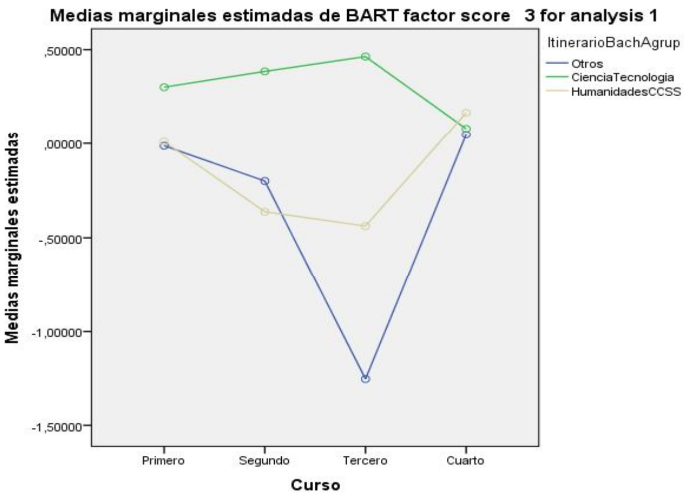


Figura 1: Gráfico de perfil de las medias

Dado que la influencia del itinerario no fue la misma en todos los cursos, para el estudio de las comparaciones múltiples se muestra el gráfico de la Figura 1.

Para estudiar posibles diferencias que no se manifiestan con las pruebas anteriores, se realizó:

- un ANOVA de un factor por itinerario teniendo en cuenta sólo el alumnado de 1.^{er} curso ($F(2,84)=0.896$, $p=.412$ y $\eta^2=.021$).
- un ANOVA de un factor por itinerario teniendo en cuenta sólo el alumnado de 2.º curso ($F(2,95)=6.763$, $p=.002$ y $\eta^2=.125$). Se rechazó la hipótesis nula de igualdad global de medias y se aplicaron las pruebas post-hoc HSD de Tukey y de Scheffé para la comparación por pares, existiendo diferencias significativas en el par (CCNT, HHCCSS).
- el cálculo de los estadísticos de Welch y Brown-Forsythe para el alumnado de 3.^{er} curso ($F_{Welch}(2,10.489)=11.817$, $p=.002$ y $F_{Brown\text{-}Forsythe}(2,7.921)=8.302$, $p\leq.011$), con los que se rechazó la hipótesis inicial de igualdad global de medias. Según la prueba de Games-Howell existen diferencias significativas en el par (CCNT, HHCCSS).

Para el alumnado de 4º curso no se observaron diferencias significativas entre las medias.

Estudio del rendimiento académico por itinerario y curso

Tomando la variable curso agrupada en dos niveles y el itinerario agrupado en tres niveles, se aplicó un ANOVA de dos factores completamente aleatorizados para el rendimiento académico obteniéndose:

- para itinerario $F(2,304)=7.252$, $p\leq.001$ y $\eta^2=.063$,
- para curso $F(1,218)=0.389$, $p=.533$ y $\eta^2=.002$, y
- para la interacción itinerario-curso $F(4,215)=1.679$, $p=.189$ y $\eta^2=.015$.

Se rechazó la hipótesis nula de igualdad global de medias y se aplicaron las pruebas post-hoc HSD de Tukey para la comparación por pares, existiendo diferencias significativas entre el par (CCNT, HHCCSS). Para apoyar el estudio de estas comparaciones se muestra el gráfico de la Figura 2.

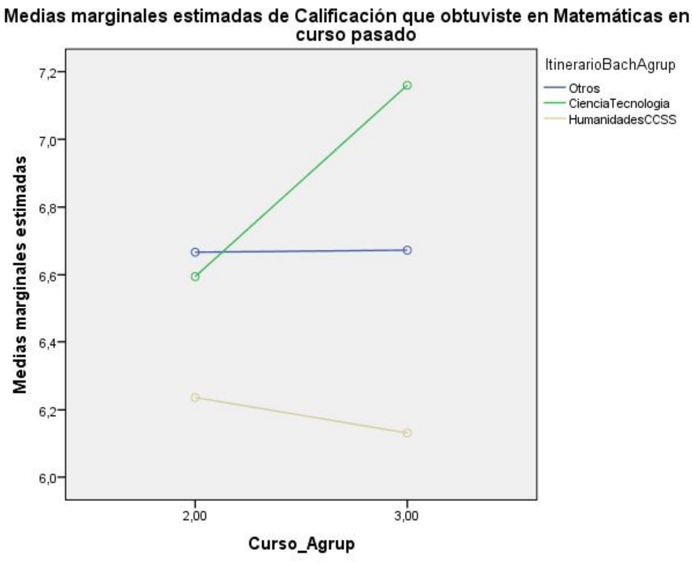


Figura 2: Gráfico de perfil de las medias

Para estudiar posibles diferencias que no se manifiestan con las pruebas anteriores, se realizó:

- un ANOVA de un factor por rendimiento académico teniendo en cuenta sólo el alumnado de 2º curso ($F(2,95)=1.349$, $p=.264$ y $\eta^2=.028$).
- un ANOVA de un factor por rendimiento académico teniendo en cuenta sólo el alumnado de 3º y 4º curso ($F(2,119)=7.182$, $p=.001$ y $\eta^2=.108$). Se rechazó la hipótesis nula de igualdad global de medias y se aplicaron las pruebas post-hoc HSD de Tukey y de Games-

Howell para la comparación por pares, existiendo diferencias significativas en el par (CCNT, HHCCSS).

CONCLUSIONES

Ante los resultados se puede concluir que, en función del itinerario de acceso, no hay diferencias significativas en la percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado. Sin embargo, existen diferencias significativas en el agrado hacia las Matemáticas, teniendo una media más baja los estudiantes que cursaron un itinerario de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales en relación al resto. También hay diferencias significativas en la percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática, siendo la media en los estudiantes que cursaron un itinerario de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología mayor que en el resto. Al analizar si estas diferencias globales dependen del curso, se observa que las variables itinerario y curso interaccionan entre sí. En concreto hay diferencias significativas en el alumnado de 2º y 3er curso entre los itinerarios de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales.

Estas conclusiones coinciden con lo afirmado por Selden y Selden (2005) e Iannone y Nardi (2007), cuando consideran que hay diferencias en las actitudes de los estudiantes debidas a dificultades cognitivas y saltos conceptuales que se producen en relación a la procedencia de acceso del alumnado a la universidad.

En cuanto al rendimiento académico, se observa que este varía según la procedencia con el que se accede a la titulación de Grado en Educación Primaria. Estas diferencias sólo se manifiestan en las calificaciones de las materias recibidas en 2.º y 3.^{er} curso, mientras que no se aprecian en la materia de 1.^{er} curso de la titulación. Una posible causa de esto podría ser el contenido específico de cada materia. En el caso del 1.^{er} curso, Educación Matemática I incluye temas más generales de Didáctica de la Matemática, mientras que en las materias de 2.º y 3.^{er} curso, Educación Matemática II y III, se tratan contenidos matemáticos más específicos; conceptos en los que los estudiantes procedentes del itinerario de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología dominan, en general, en mayor grado.

Finalmente, los resultados obtenidos en esta investigación concuerdan con lo recogido en los estudios de Liston y O'Donoghue (2008); Gómez Chacón y Haines (2008), cuando afirman que los alumnos carecen de pensamiento matemático (es decir, habilidad de pensamiento abstracto o lógico, procesos de demostración), de competencias de cálculo y de espíritu matemático (es decir, falta de motivación y perseverancia) dejando entrever bajo la categoría espíritu matemático aspectos relativos a la dimensión actitudinal del sujeto.

Referencias

Alemany, I. y Lara, A. I. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: Un instrumento para su medición. *Publicaciones*, *40*, 49-71.

Bates, A. B., Latham, N. y Kim, J. (2011). Linking preservice teachers mathematics self-efficacy and mathematics teaching efficacy to their mathematical performance. *School Science and Mathematics*, *111*(7), 325-333.

Blanco, L. J., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto*, *19*(1), 13-31.

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 173-179.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradigma*, *29*(2), 157-171.

Ertekin, E. (2010). Correlations between the mathematics teaching anxieties of preservice primary education mathematics teacher and their beliefs about mathematics. *Educational Research and Reviews*, *5*(8), 446-454.

Etxandi, R. (2007). Matemática en educación primaria: un intento de renovación de la práctica en el aula. *UNO*, *45*, 15-25.

García, M. y Juárez, J. (2011). Revisión del constructo actitud en Educación Matemática: 1959-1979. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *26*, 117-125.

Gargallo, B., Pérez, C., Serra, B., Sánchez, F. y Ros, I. (2007). Actitudes ante el aprendizaje y rendimiento académico en los estudiantes universitarios. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(1), 1-11.

Gómez-Chacón, I. M y Haines, C. (2008), Students' attitudes to mathematics and technology. Comparative study between the United Kingdom and Spain, En *11th International Congress on Mathematical Education*, http://tsg.icme11.org/tsg/show/31.

Hemmings, B., Grootenboer, P. y Kay, R. (2011). Predicting mathematics achievement: the influence of prior achievement and attitudes. *International Jounal of Science and Mathematics Education*, *9*, 691-705.

Iannone, P. y Nardi, E. (2007). The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: Mathematicians perspectives. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2300-2309). Larnaca, Chipre: ERME.

Iossi, L. (2007). Strategies for reducing math anxiety in post-secondary students. En S. M. Nielsen y M. S. Plakhtonik (Eds.), *Proceedings of the 6th Annual College of Education Research Conference: Urban and International Education Section* (pp. 30-35). Miami: Florida International University.

Liston, M. y O'Donoghue, J. (2008). The influence of affective variables on student's transition to university mathematics. *11th International Congress on Mathematical Education*, http://tsg.icme11.org/tsg/show/31.

Martínez Padrón, O. J. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens*, *9*(1), 237-256.

Mato, M. D. y de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 285-300). Santander: SEIEM.

Moreno, R. (2010). *Estilos de apego en el profesorado y percepción de sus relaciones con el alumnado*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Naya, M. C., Soneira, C., Mato, M. D. y de la Torre, E. (2014) Cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, *1*(2), 141-149.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA*, *4*(1), 23-35.

Sakiz, G., Pape, S. J. y Hoy, A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics classrooms? *Journal of School Psychology*, *50*(2), 235-255.

Selden, A. y Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

LA DIVISIBILIDAD EN MANUALES PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Divisibility in textbooks for Computer Engineering students

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, Á.

Universidad de Jaén

Resumen

Las aplicaciones de la Teoría de Números a la Informática son relevantes. Para los estudios de Ingeniería Informática, hemos escogido tres universidades españolas y seleccionado siete manuales recomendados en las bibliografías del curso 2014-15, con contenidos de divisibilidad. Hemos realizado un análisis didáctico, mediante el marco del enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática, acerca del concepto de máximo común divisor, algoritmos de cálculo y sus aplicaciones a la Informática. Concluimos que existe una evolución en el tratamiento de los textos hacia una menor abstracción, más aplicaciones y más presencia del lenguaje de programación.

Palabras clave: *Teoría de Números, manuales universitarios, análisis didáctico, situaciones-problemas, lenguajes*

Abstract

Numbers Theory has many applications for the Computation Sciences. We have chosen, for the Computer Engineering Degree, three Spanish universities and seven textbooks recommended in their 2014-2015 year bibliography, with divisibility contents. We carry out Didactic Analysis, using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematical Education, about the greatest common divisor concept and Euclidean Algorithms, and its applications. We conclude that there is a change in textbooks, referred to less abstraction, more applies and programming language used.

Keywords: *Numbers Theory, university textbooks, didactic analysis, problem-situations, languages*

INTRODUCCIÓN

La divisibilidad en los números enteros es un tema fundamental dentro de la Teoría de Números para un estudiante de Ingeniería Informática por sus múltiples aplicaciones en este campo. Entre estas podemos subrayar la representación de un número en los distintos sistemas de numeración y sus operaciones (el sistema binario es la base de la aritmética computacional y son también muy utilizados el octal y el hexadecimal). Asimismo, son muy importantes las aplicaciones de las congruencias para: asignar posiciones de memoria a ficheros de un ordenador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la Aritmética Modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública.

Hay muchos algoritmos que usan números enteros y uno de los más utilizados es el Algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor de dos números enteros no nulos, de una forma más eficiente que a partir de la factorización en números primos. Sus aplicaciones son numerosas y facilitan el cálculo del inverso modulo n, la resolución de sistemas de congruencias a través del algoritmo chino del resto, o el estudio de las soluciones de ecuaciones diofánticas.

La relevancia de este tema se pone de manifiesto en el hecho de aparecer en los currículos de los Grados en Ingeniería Informática bajo descriptores como Matemática Discreta, Algorítmica Numérica o Aritmética entera y modular y sus aplicaciones a la Informática. Estos responden a las competencias descritas en el Anexo I de la resolución de 8 de junio de 2009, en la que se publica el

Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes de Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 431-440). Alicante: SEIEM.

Acuerdo del Consejo de Universidades por el que se establecieron las recomendaciones para la solicitud de títulos oficiales en el ámbito de la Ingeniería Informática y que fue publicada en el BOE número 187 de 4 de agosto de 2009.

El objetivo del trabajo es analizar el concepto de máximo común divisor y su cálculo, a través del Algoritmo de Euclides, junto con sus aplicaciones, en textos de Matemática Discreta o Álgebra, recomendados para los estudios de Ingeniería Informática, por tres universidades españolas, seleccionadas por ocupar los mejores puestos en el *Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo de Ciencias de la Computación, 2014*, utilizando como herramientas las situaciones-problemas y lenguajes del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

En este trabajo analizamos cómo abordan siete libros de texto universitarios recomendados para estudiantes del Grado de Informática, el concepto de máximo común divisor y dos algoritmos numéricos relacionados: el Algoritmo de Euclides y el extendido o Identidad de Bézout.

De la comparación entre los distintos manuales pretendemos obtener una amplia visión de las diferentes formas de abordar la temática estudiada y la adaptación que sufren estos contenidos por estar dirigidos a estudiantes del Grado de Informática, motivo por el cual las aplicaciones a la Informática tienen una especial relevancia. Estas son explicitadas en el estudio de las situaciones-problemas y los lenguajes, motivo por el que se han elegido estas dos entidades en este trabajo.

Corresponde, por último, a nuestro presente problema de investigación observar si existe una evolución en el tratamiento que realizan los manuales y determinar posibles tendencias.

Todas estas cuestiones nos han llevado a formular las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué elementos de las situaciones-problemas: situaciones de introducción y motivación, ejemplos, ejercicios…aparecen en los diferentes libros de texto?, ¿qué tipos de lenguaje aparecen en los libros de texto? Y, por último, ¿qué consecuencias didácticas se pueden extraer?

En lo que respecta a los antecedentes hemos tenido en cuenta, por una parte, trabajos de análisis de manuales como Ordóñez (2011), Gea (2012), Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) que utilizan también el EOS, en cuanto al desarrollo de las entidades primarias para hacerlas operativas en el estudio de manuales. También se ha tenido en cuenta la investigación de González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014), que analizan, desde otras perspectivas, manuales universitarios.

El análisis de manuales es un tema de gran interés en Didáctica de las Matemática como muestran los trabajos presentados en el XVIII Simposio de la SEIEM de 2014 y la inquietud mostrada al respecto por algunos miembros.

Los trabajos Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013 y 2014) muestran algunos resultados de dicho proyecto respecto del estudio de la Teoría de Números para informáticos

Por otra parte, Harel y Sowder (2007) se preguntan, "en vista del auge de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra…", sobre "el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general…." (p.20). Nuestro estudio, dado que analiza manuales para el Grado de Ingeniería Informática, está estrechamente relacionado con la influencia que tienen estas herramientas en el desarrollo de habilidades de los estudiantes, en la línea de lo que proponen estos autores.

MARCO TEÓRICO

Utilizamos como marco de referencia el EOS. En él "se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.) Con la intención de progresar en una ontología y semiótica de dichos objetos, a la vez que hacerlos operativos el EOS propone seis tipos de entidades primarias a tendiendo a la función que desempeñan en la actividad matemática: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones (Godino, 2002).

"Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerar las insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción" (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 7)

SELECCIÓN DE MANUALES

La muestra consta de siete textos recomendados en la bibliografía de asignaturas que contienen temas relacionados con el cálculo del máximo común divisor y sus aplicaciones a la Informática.

La selección de los textos ha sido muy cuidada y se ha estructurado en distintos niveles:

En primer lugar, buscamos criterios para la selección de las universidades en las que hicimos la búsqueda de contenidos y bibliografía. Optamos por el *Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo de Ciencias de la Computación, 2014,* por su prestigio y porque en este año se comenzó nuestra investigación. En él, buscamos las universidades españolas que estaban mejor situadas en esta disciplina. La primera es la Universidad de Granada, en el puesto 43, y posteriormente la Universidad de Jaén (en el puesto 76-100) y la Universidad Politécnica de Madrid (en el puesto 101-150).

En segundo lugar, buscamos a través de sus páginas web, las guías académicas de los grados de Ingeniería Informática, publicadas en el curso 2014-15, para localizar las asignaturas que pudieran contener los temas de divisibilidad. Resumimos en la Tabla 1 los resultados de la exploración realizada y hemos marcado con (*) las asignaturas donde se localizaron los contenidos de Teoría de Números que son objeto de nuestro estudio.

Por último, consultamos y comparamos las bibliografías de cada materia e hicimos una selección de manuales, que hemos denominado [M1] hasta [M7] (referenciados en el Anexo I), de acuerdo a los siguientes criterios:

[M1] Es un texto común en las tres universidades. Escrito originalmente en inglés y traducido al castellano. Actualmente está en su quinta edición.

[M2] Se eligió por ser un libro recomendado por las universidades de Granada y la Politécnica de Madrid. La Universidad Politécnica de Madrid propone también una versión actualizada en inglés, de 2002, sin embargo, hemos optado por la que aparece en castellano pues es la recomendada en las dos bibliografías.

[M3] Es un manual clásico de Álgebra, en inglés, común en las universidades de Granada y Jaén.

[M4] Es un texto en español que aparece en la bibliografía de las universidades de Jaén y la Politécnica de Madrid. Hemos preferido analizar una versión más actual, que ha salido en 2015, y que corresponde a la tercera edición.

[M5] Es una copublicación de Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid y aparece recomendado por la Universidad de Jaén.

[M6] Aunque sólo aparece en la bibliografía de la Universidad de Jaén, dos de sus autores pertenecen a la Universidad del País Vasco y el tercero a la Escuela de Informática de Murcia.

[M7] Es un manual orientado a las prácticas con ordenador para Mathematica. Editado por el servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

La extensión de las bibliografías de cada guía docente es variable. La Universidad Politécnica de Madrid sólo recomienda en la guía de aprendizaje para el doble Grado [M1] y [M2] como bibliografía básica, y estos textos se incluyen también en una lista más extensa para el Grado de Ingeniería Informática. Sin embargo, la bibliografía que aparece en la Universidad de Granada para la doble titulación es muy diferente a la seleccionada para Informática. La Universidad de Jaén propone una bibliografía complementaria más extensa que nos ha permitido elegir los manuales [M5] y [M6], publicados por otras universidades españolas que, aunque no han sido sometidas a nuestra exploración, se hacen aquí presentes. La última columna de la Tabla 1 muestra la distribución, por universidades, de los textos seleccionados. Es importante señalar que esta bibliografía es la vigente durante este curso 2014-15.

Tabla 1. Contenidos y bibliografía

Universidades	Titulaciones	Asignaturas exploradas	Curso/ Semestre	Textos
Universidad de Granada	Grado de Ingeniería Informática	Algebra Lineal y Estructuras Matemáticas (*)	1º/1º	M1, M2
		Lógica y Métodos Discretos	1º/2º	
	Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas	Lógica y Métodos Discretos	1º/1º	M3
		Álgebra I (*)	2º/1º	
		Álgebra II	3º/1º	
		Álgebra III	4º/1º	
Universidad de Jaén	Grado de Ingeniería Informática	Matemática Discreta (*)	1º/1º	M1, M3, M4, M5, M6, M7
		Álgebra (*)	1º/2º	
Universidad Politécnica de Madrid	Grado de Ingeniería Informática	Matemática Discreta I (*)	1º/1º	M1, M2 y M4
		Matemática Discreta II	2º/1º	
	Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas	Matemática Discreta I (*)	1º/1º	M1, M2
		Matemática Discreta II	1º/2º	

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

El análisis didáctico se ha realizado siguiendo las características metodológicas propias del marco teórico que marca nuestra investigación, el EOS, y según otras investigaciones como las tesis de Ordóñez (2011) y Gea (2012) o los trabajos de Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010). Por motivos de espacio, en esta comunicación presentamos una parte del estudio realizado que se corresponde con dos de las anteriores entidades y que son: situaciones y lenguaje dado que, además, se analizan en profundidad.

Dentro de la primera, nos fijamos en qué dominios se introducen el concepto de máximo común divisor y los Algoritmos de Euclides. Hemos reparado en los contenidos de cada libro pues, en ocasiones, era imprescindible conocer los temas previos para entender el tipo de definición o demostración elegida por el autor. Se han tenido aquí en cuenta: si se proporciona o no justificación de los conceptos o algoritmos, la forma de introducir las definiciones, se han analizado los ejemplos y el lugar que ocupan, y se han observado si contienen ejercicios o aplicaciones a la Informática.

En el caso del lenguaje, hemos categorizado los tipos de lenguaje y se han analizado aquellos que aparecen en cada texto universitario explicitando el que es dominante pues marca el tono general.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y RESULTADOS

La divisibilidad es un tema muy amplio para tratar en un curso con contenidos de Matemática Discreta. En este trabajo abordamos cuestiones relativas al cálculo del máximo común divisor, a través del Algoritmo de Euclides y el Algoritmo extendido de Euclides. Los conceptos y teoremas analizados en los manuales son los siguientes:

1. Definición de máximo común divisor. La definición más formal de máximo común divisor de a y b es: aquel elemento del dominio, d, verificando: i) d/a y d/b y ii) Si existe d' tal que d'/a y d'/b entonces d'/d. Según la definición, el máximo común divisor no es único y, en el caso de los enteros, hay dos y son d y –d, aunque, por convenio, se toma el positivo. En distintas aplicaciones a la Informática, como en las congruencias, nos podemos reducir en ocasiones a números positivos, por lo que si calculamos el máximo común divisor de dos números positivos, éste coincide con el mayor, con el orden natural, de los divisores comunes.

2. Teorema fundamental de la Aritmética. Este teorema prueba la descomposición en primos de un número no nulo y no unidad. A partir de ella, el máximo común divisor será el producto de "los primos comunes elevados al menor exponente". Para números grandes la factorización en primos es bastante complicada y por esto se busca un método más eficiente como el que proporciona el Algoritmo de Euclides.

3. *Algoritmo de la división.* Si a, b $\in$Z, b no nulo, entonces existen únicos enteros cociente, q, y resto, r, tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < |b|$. Los restos son muy interesantes en el Álgebra Computacional tanto para la expresión de un número en distintos sistemas de numeración como para las aplicaciones de la Aritmética modular, y, como se ve en el teorema, son números positivos. Es por ello y debido a que la división entre números negativos es difícil para el estudiante, que en algunos textos este teorema se restringe al caso de b, un número positivo.

4. Algoritmo de Euclides. Como se puede ver en cualquier manual, el máximo común divisor de dos números no nulos se obtiene como el último resto no nulo de las distintas divisiones propuestas (M1, p. 164) En algunos textos se impone que los números sean positivos y empezar por el de mayor valor absoluto, pero esto no se requiere en el enunciado original. Sin embargo sí podemos considerar el caso en que uno de ellos es ya divisor del otro; es decir, el primer resto ya es cero.

5. Algoritmo extendido de Euclides o Identidad de Bézout. Demuestra que el máximo común divisor de dos números no nulos se puede escribir como combinación lineal de ellos. Este resultado es una consecuencia del anterior y despejando cada resto se obtiene de forma recurrente el resultado. Este teorema es muy importante por sus aplicaciones, por ejemplo, al cálculo de inversos de clases de restos (Ordóñez, Ordóñez y Contreras, 2013 y 2014)

Analizaremos si estos conceptos están presentes en todos los manuales expresándolo en la Tabla 2 con la numeración que aquí hemos fijado, del 1 al 5. En lo que se refiere a las entidades primarias objeto de estudio, exponemos las diferentes componentes consideradas en cada una de ellas:

Situaciones-problema

En esta entidad indagaremos:

1. Dominios de definición: Exploramos en qué dominios se introducen el concepto de máximo común divisor y algoritmos de Euclides; esto es, si se realizan para los enteros no nulos, enteros positivos, en el anillo de polinomios o ambientes más generales como: dominios de integridad (DI), dominios de ideales principales (DIP), dominios de factorización única (DFU) o dominios euclídeos (DE). Ha sido de ayuda en esta cuestión observar los contenidos de cada libro para entender el tipo de definición o demostración elegida por el autor.

2. Situación de introducción-motivación. Siguiendo investigaciones como Ordóñez (2011) se han tenido aquí muy en cuenta si se proporciona o no justificación de los conceptos o algoritmos y elementos favorecedores de un clima de motivación bien sea a través de datos históricos, aplicaciones o ejemplos.

3. Ejemplos. El uso de los ejemplos y su posición en el texto es muy importante en el análisis de las situaciones como muestran las investigaciones de Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010).

4. Ejercicios. Analizamos también si hay ejercicios propuestos y si se aporta resolución de los mismos. También buscamos si hay ejercicios orientados para resolver con ordenador.

5. Aplicaciones a la Informática. Son bastantes directas en este tema e importantes para los Grados donde se encuentran estos contenidos. Analizamos si se explicitan y en qué forma. En ocasiones aparecen como ejercicio o como parte básica en la teoría de códigos, claves de dominio público, etc.

En la Tabla 2 resumimos los resultados obtenidos en el análisis de los manuales respecto de las situaciones-problema. Incorporamos también el capítulo del libro en el que se desarrollan los contenidos estudiados para facilitar su búsqueda al lector que así lo desee.

Tabla 2. Situaciones-problema

Manuales	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Capítulos	2	1	1, 6	1	1,8	6	11
Conceptos	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4	1,2,3,4,5
Dominios de definición	Enteros positivos	Enteros, luego sólo positivos	El más general DFU y DE	Enteros, luego sólo positivos	Enteros y luego en DFU, DIP y DE	En el anillo de polinomios	Enteros no nulos
Introducción-motivación	Reseña histórica, ejemplos y aplicaciones	Ejemplos y retrospectiva	No	Reseña histórica, Ejemplos a veces	Reseña histórica	No	Al inicio del capítulo con las aplicaciones
Ejemplos	Antes y después	Antes y después	Casi ninguno, después	Muchos, después	Un ejemplo después	No	Sí, con Mathematica
Ejercicios	Sí, con resolucion. Complementarios	Sí, con resolución a ejercicios seleccionados	Sí, pero no numéricos, con resolución	No los hay al final. Sí, muchos ejemplos	Sí, en cada sección	No	Sí, de exámenes y con aplicaciones. Sin resolver
Aplicaciones Informáticas	Sí, amplias	No	No	Alguna	No	No	Sí, en ejercicios

Lenguaje

En el estudio de los tipos de lenguaje, distinguimos entre el lenguaje de las Matemáticas que utilizamos y el lenguaje propio de programación. Sigue una clasificación dentro de cada categoría:

1. El lenguaje de las Matemáticas

1.1. Natural escrito: es el lenguaje común, con el que hablamos habitualmente. Se utiliza para acercarse a las cuestiones de la Matemática de una forma más simple y cercana.

1.2. Numérico: Es aquel en el que se utilizan números. En este tema de Teoría de Números deberá aparecer en ejemplos, ejercicios, etc.
1.3. Simbólico: Se utilizan los símbolos de la Matemática. Aparece en las notaciones, por ejemplo, para los divisores y las congruencias y también para el máximo común divisor.
1.4. Tabular: En ocasiones se recogen datos en una tabla. Es sabido que para un estudiante no está exenta de dificultades su lectura. A veces se utilizan tablas para recoger los cálculos de los algoritmos.
1.5. Gráfico: Corresponde con la utilización e interpretación de un gráfico.
1.6. Algorítmico: Con él expresamos mediante un número finito de pasos el conjunto de instrucciones que hay que realizar para obtener el resultado que se describe.
1.7. Axiomático: Según la Real Academia de la Lengua, en su acepción para las Matemáticas, "un axioma es cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría". Así el lenguaje axiomático es el que se utiliza en la descripción de estos principios.
1.8. Inductivo o recurrente: Es el lenguaje que se establece en los distintos principios de inducción. En general, se demuestra para el primero y, supuesto para n, se demuestra para n+1. La construcción se hace a partir de los anteriores n-1, n-2,…
1.9. Deductivo o lógico: Utilizamos en él concatenaciones lógicas o razonamientos bien trabados. Aparecen operadores de la lógica matemática, cuantificadores, etc.

2. <u>El lenguaje de programación</u>

2.1. Código: Conjunto de instrucciones o texto desarrollado en lenguaje C, Pascal, lenguaje de Mathematica o Matlab, etc entre otros. Son las órdenes que sabe leer el ordenador para poder ejecutar lo que queremos.
2.2. Pseudocódigo: Conjunto de instrucciones de alto nivel para describir un programa o algoritmo. Se le llama también en computación falso lenguaje y utiliza las convenciones estructurales de un lenguaje de programación pero está diseñado para la lectura humana en lugar de la lectura mediante una máquina.

A continuación, la Tabla 3 recoge la presencia de los distintos tipos de lenguaje que hemos encontrado en los siete manuales. En la última fila hemos explicitado el lenguaje de programación encontrado. Dejamos la casilla en blanco cuando no se encuentra.

Tabla 3. Lenguaje

Manual	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Natural escrito	x	x		x			x
Numérico	x	x		x	x	x	x
Simbólico	x	x	x	x	x	x	x
Tabular				x			
Algorítmico	x	x	x	x	x		x
Axiomático		x					
Inductivo	x	x	x	x	x	x	x
Deductivo	x	x	x	x	x	x	x
Programación	Pseudo-código			Pseudo-código			Mathe-matica

Para cada manual, es de especial interés destacar las siguientes consideraciones:

[M1]: En este texto se incide en la introducción y motivación de los conceptos y resultados, de forma que hay una mayor presencia del lenguaje natural escrito y ejemplos numéricos antes y después de cada cuestión, además de reseñas históricas y alusiones a las aplicaciones de lo que se expone. La definición del máximo común divisor no es la más formal por lo que el autor se restringe a los enteros positivos. En ellos, el orden para buscar el mayor de los divisores comunes coinciden con el orden natural, con lo que no se pierde la intuición del conocimiento previo del estudiante en este campo. La Algorítmica Numérica tiene un papel importante en el texto y esto se pone de manifiesto en que se proporciona el pseudocódigo para el Algoritmo de Euclides. Hay ejercicios para realizar con el ordenador y tienen un lugar muy destacado en este tema, las aplicaciones a la Informática, que se encuentran de forma notoria, como secciones del capítulo, tratándolas con profundidad en número y detalle.

[M2]: En este manual hay definiciones más formales que en el anterior, aunque luego se restringe el cálculo a los enteros positivos. La presencia de lenguaje natural escrito permite que el lenguaje deductivo, inductivo o algorítmico de la Matemática, más formales, no agobien al estudiante. Esto se refuerza también con el uso de bastantes ejemplos colocados antes y después de las definiciones formales. Destaca cómo enlaza los contenidos haciendo una retrospectiva de lo aprendido en párrafos como los siguientes:

- Hablando del concepto de ser divisor o múltiplo y la notación a divide a b, $a \mid b$, y su relación con la fracción $\frac{b}{a}$ comenta: "El lector estará sin duda familiarizado con las reglas para manipular fracciones;…" (p. 19)
- Respecto del Algoritmo de la división (p. 16), deduciendo la unicidad del resto dice "De niños aprendemos que al dividir 27 entre 6 el cociente es 4 y el resto es 3, (…) se nos dice que debemos tomar como resto el valor mínimo, de forma que "lo que sobra" sea lo menor posible (…) es consecuencia del Axioma del buen orden."
- Introduciendo la factorización en primos (p. 24), escribe: "Casi seguro que el lector está familiarizado con la idea de que cualquier entero positivo puede expresarse como producto de primos; por ejemplo…"

[M3]: Es un manual de Álgebra clásica como informa su título. Dedica dos capítulos: el primero dedicado a los números enteros en los que establece los conceptos 2, 3 y 5 para aplicarlos luego a congruencias y el capítulo 6 (Anillos y cuerpos) donde los conceptos se describen en los ambientes más generales. No hay motivación para los conceptos ni aplicaciones a la Informática. Es también notable la ausencia de ejercicios numéricos y lenguaje de programación. Este texto forma parte de la bibliografía complementaria en la Universidad de Jaén y en la del Doble Grado de Informática y Matemáticas de la Universidad de Granada.

[M4]: Este texto trata la Teoría de Números en el primer capítulo. Incluye numerosos ejemplos numéricos que recomienda haga el alumno, a modo de ejercicio, para adquirir destrezas. Utiliza el lenguaje tabular para ordenar los datos que va calculando. Como aplicación a la Informática ofrece pseudocódigos para el Algoritmo de Euclides y la factorización en primos.

[M5]: El libro dedica un primer capítulo de números y congruencias, un capitulo 6, sobre anillos e ideales, que facilita el estudio de anillos y factorización en el capítulo 8. En el primer tema, el concepto de máximo común divisor se establece para enteros no nulos pero se elige el positivo. Es el único texto de los analizados que, previo al estudio del Algoritmo, repara en el caso particular de que el primer resto sea cero; esto es, uno es múltiplo de otro. Suele haber un ejemplo de cada noción con poco lenguaje numérico y la última sección corresponde a reseñas históricas.

[M6]: Es el más formal y tiene poquísimos ejemplos numéricos, a pesar de su título Álgebra Abstracta Aplicada. Es grande el nivel de abstracción con el que se exponen los conceptos y algoritmos. Ofrece distintas aplicaciones a la Informática en otros capítulos pero no como elementos motivadores o consecuencia inmediata de los conceptos que se exponen. Todos los capítulos, menos éste, proponen ejercicios que vienen resueltos al final del texto.

[M7]: Este manual forma parte de la bibliografía básica de la Universidad de Jaén y ha sido editado para responder al programa de prácticas de la asignatura Matemática Discreta. Predomina el lenguaje de programación utilizado en el software *Mathematica*. Dispone de un resumen teórico y los ejemplos se resuelven con ordenador. Lo más significativo es que se implementan los algoritmos que se ven en clase (se adjuntan en cd), en el lenguaje de programación que dispone el programa, de forma que el estudiante de Informática pueda trasladarlos a cualquier otro lenguaje de programación. También se presentan funciones que tiene *Mathematica* incorporadas para resolver cocientes, restos, etc. y distintas cuestiones relacionadas con el tema.

CONCLUSIONES

El análisis del concepto de máximo común divisor, el Algoritmo de Euclides y el Algoritmo extendido de Euclides o Identidad de Bézout en manuales recomendados para los estudios de Ingeniería Informática, marcado como objetivo, ha revelado que estos conceptos aparecen en casi todos los manuales. La Tabla 2 nos indica la importancia de los contenidos en estas titulaciones.

Cabe destacar que en este tema tres manuales optan por incluir reseña histórica generalmente como introducción, con objeto de motivar, y, en otros casos, como sección al final del capítulo. Por otro lado, el uso de ejemplos previos a la definición formal aparece en los dos textos con más ejemplos numéricos (M1 y M2). El manual M4 presenta muchos ejemplos numéricos, posteriores a los algoritmos para que el alumno adquiera destrezas en los cálculos incluso es el único que utiliza el lenguaje tabular para recoger dichos cálculos.

Respecto del análisis de las aplicaciones a la Informática, que también figura como objetivo de esta investigación, ha resultado sorprendente que éstas se encuentran sólo en tres de los siete manuales analizados. Sólo en M1, el único recomendado por las tres universidades, las aplicaciones aparecen ampliamente desarrolladas, tanto de forma explícita como secciones de capítulo, como utilizándolas como elemento motivador en la introducción de definiciones o teoremas.

Los manuales con más aplicaciones a la Informática presentan dominios de definición más restrictivos (enteros positivos) y se distinguen de otros textos aconsejados para la doble titulación con Matemáticas, en la Universidad de Granada, en que los dominios de definición son más abstractos (DIP, DFU, DE) y necesitan mayor desarrollo teórico previo.

Los manuales más editados M1 (5ª edición) y M4 (3ª edición) son aquellos que presentan dominios de definición más restrictivos, mayor número de ejemplos numéricos, elementos motivadores y el lenguaje natural escrito para presentar al lector las cuestiones matemáticas de forma más cercana. Estos son también los que presentan pseudocódigos para implementar los algoritmos en el ordenador. Todo esto nos habla de un proceso de cambio en la adaptación de los contenidos de divisibilidad en el Grado de Informática y de que verdaderamente existe una evolución en el tratamiento de los mismos, desde desarrollos más formales (M3, M5 y M6) hacia otros más numéricos (M1, M2 y M4), que se pueden implementar utilizando lenguajes de programación.

Hay que tener en cuenta, que utilizando la entidad primaria del lenguaje, dentro del EOS, ha sido posible detectar nueve tipos distintos de tal lenguaje, poniendo de manifiesto la riqueza analítica de este marco teórico. Dado que el EOS es de naturaleza holística, hemos podido, no solo obtener una gran variedad de matices en el lenguaje, sino estudiar y comparar manuales muy diferentes a través de las situaciones-problemas.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación EDU2012-32644.

Referencias

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384.

Gea, M. M. (2012). *Fundamentos para un estudio sobre la didáctica de la regresión y la correlación.* Tesis de Maestría. Universidad de Granada.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). La regresión en los textos de bachillerato de ciencias sociales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 365-364) Salamanca: SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática.* Universidad de Granada. Recuperado el 10 de marzo de 2015 de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Reston, VA: NCTM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Guitérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 493-502) Salamanca: SEIEM.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Anexo I. Manuales analizados

[M1] Rosen, K.H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones.* (5ª ed.) Madrid: Mc Graw- Hill.

[M2] Biggs, N.L. (1998). *Matemática Discreta*. Barcelona: Vicens Vives.

[M3] Cohn, P.M. (2000). *Classic Algebra*. England: Wiley and Sons.

[M4] García Merayo, F. (2015). *Matemática Discreta*. (3ª ed.) Madrid: Paraninfo.

[M5] Dorronso, J. y Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid.

[M6] Vera, A., Vera, F.J. y García M.A. (1992). *Álgebra Abstracta Aplicada.* Murcia: Antonio Vera López y otros.

[M7] García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica.* Jaén: Universidad de Jaén.

INTERPRETACIÓN DE LA DISPERSIÓN DE DATOS EN CONTEXTO DE RIESGO POR PROFESORAS EN FORMACIÓN

Interpreting spread of data in risk context by preservice teachers

Orta, J. A.[a], Sánchez, E.[b] y Altamirano, J. A.[a]

[a]Escuela Nacional para Maestras de Jardines de Niños, México, [b]Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo explorar el razonamiento de profesoras en formación, acerca de la dispersión de los datos (variabilidad o variación) cuando la analizan en problemas que involucran riesgo. En esta comunicación se informa sobre las respuestas a dos problemas de un cuestionario administrado a 64 profesoras en formación. Los problemas son de comparación de conjuntos de datos y están ubicados en situaciones de riesgo: apuestas en juegos y duración de vida en tratamientos médicos. El cuestionario fue aplicado antes de que las futuras profesoras iniciaran un curso de procesamiento de información estadística. Los resultados muestran la dificultad de las profesoras en formación para interpretar la dispersión en contextos de riesgo. Es necesario reflexionar durante la instrucción de las futuras profesoras sobre los significados de medidas de centro y dispersión y contribuir a una mejora en su educación.

Palabras clave: *Dispersión, variabilidad, riesgo, profesoras en formación*

Abstract

The aim of this investigation is to explore the preservice teachers´ reasoning about variation (variability or spread) when they analyze data in situations under uncertainty. In particular, in this communication the responses to two problems of a questionnaire administered to 63 preservice teachers are reported. The problems are of comparing groups of data in situations of risk: stakes in games and the life expected after medical treatments. The questionnaire was applied before the preservice teachers began a course of statistical information processing. The results show the difficulty found by students to interpret variation in risk context. It is necessary to reflect during the instruction of future teachers about the meanings of measures of dispersion Center and contribute to an improvement in their education.

Keywords: *Dispersion, variability, risk, preservice teachers*

INTRODUCCIÓN

La variación[i] es la causa subyacente de la existencia de la estadística, está presente en todos lados y por lo tanto en los datos (Watson, 2006). Moore (1990) enfatiza su omnipresencia y la importancia de medirla y modelarla. Wild y Pfannkuch (1999) incluyen la percepción de la variación como parte de los tipos fundamentales del razonamiento estadístico. Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que “la comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas” (p. 203). Burrill y Biehler (2011) proponen una lista de siete ideas estadísticas fundamentales en las cuales la variación es la segunda después de los datos. Muchos investigadores exploran escenarios que permitan a los alumnos mostrar su comprensión acerca de la variación, diferentes contextos y problemas han sido propuestos para conocer el razonamiento de los alumnos en diferentes niveles escolares para percibir, describir o medir la variación en los datos. Por ejemplo, variabilidad en el

Orta, J. A., Sánchez, E. y Altamirano, J. A. (2015). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por profesoras en formación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 441-450). Alicante: SEIEM.

muestreo (Watson y Moritz, 2000), azar (Watson y Kelly, 2004), mediciones repetidas, variación natural en el crecimiento de plantas (Lehrer y Schauble, 2007; Petrosino, Lehrer y Schauble, 2003), y clima (Reading, 2004). Las situaciones de riesgo proveen otro escenario para investigar el razonamiento de los estudiantes sobre variabilidad (Sánchez y Orta, 2013). Esta comunicación tiene como objetivo explorar la manera en que profesoras en formación de educación preescolar interpretan la dispersión de los datos en situaciones de riesgo y continuar el trabajo de Orta y Sánchez (2013), en el cuál los participantes fueron alumnos de 9º grado (14-15 años).

Los profesores como parte de su ejercicio diario, necesitan comprender información de tipo estadístico como gráficas, promedios y otros conceptos (Estrada, 2007). Hacer uso eficiente de esta información es útil cuando preparan sus clases o si forman parte de un equipo de investigación. El contexto de las profesoras mexicanas en educación preescolar (atención a niños de 3-6 años) se está transformado, y las futuras profesoras deben utilizar y crear información; a la par desarrollar un pensamiento lógico que les permita acompañar procesos de diferente índole (por ejemplo, académicos o de gestión). Durante su formación, las profesoras de preescolar cursan la asignatura *procesamiento de información estadística* cuyo propósito es:

> "promover que el futuro docente comprenda y aplique los conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial que le permitan recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo; así mismo, se pretende que los futuros docentes apliquen estos conceptos y procedimientos en la realización de proyectos de investigación y en la elaboración de su documento recepcional" (SEP, 2012, p.6).

La propuesta curricular actual de profesoras de preescolar no tiene como fin que estas propongan estrategias didácticas al estar en servicio. Para esta investigación estudiaremos el razonamiento de las futuras profesoras vistas como aprendices de contenido estadístico para su desarrollo profesional que se enfoca en aspectos diferentes a sus futuras actividades de enseñanza en el aula. Nuestro interés se centra en la exploración de la forma en que las profesoras en formación interpretan la dispersión en un contexto de riesgo, que es una propuesta que puede contribuir a la investigación sobre el razonamiento de la variación, además de que los resultados también pueden contribuir a mejorar la instrucción del curso mencionado. En lo sucesivo nos referiremos a las futuras profesoras como *estudiantes*, la palabra alumnos se refiere a aprendices en general.

MARCO DE REFERENCIA

Una parte importante en una investigación en didáctica de las matemáticas son los problemas. Al resolverlos estos deben promover en los alumnos la capacidad de pensar y razonar y así proveer al investigador de resultados relevantes que aporten información al área de estudio. Los problemas deben también llamar la atención de los alumnos para que puedan comprometerse con su solución y aumentar las probabilidades de la comprensión del concepto que se quiere estudiar. En la estadística el razonamiento debe articular ideas como media o dispersión, expresadas con números, con situaciones reales basadas en datos, es decir, el razonamiento estadístico está íntimamente relacionado con el contexto, y los números en contexto implican información (Moore, 1990). Los problemas sobre toma de decisiones bajo incertidumbre son comunes en estadística, este tipo de problemas han sido utilizados para promover y analizar características importantes del razonamiento estadístico de las personas. Por otro lado, las situaciones que requieren de la comparación de conjuntos de datos son utilizadas frecuentemente para involucrar a los alumnos en el razonamiento con datos (Garfield y Ben-Zvi, 2008). En esta exploración se presentan dos situaciones de toma de decisiones y comparación de conjuntos de datos en los cuales, la dispersión es importante, y ésta puede ser asociada con la noción de riesgo.

La interpretación de la dispersión depende de la situación de la cual provengan los datos. Las situaciones de riesgo pueden proveer un escenario para elaborar problemas en los que surja la variación. Cuando la incertidumbre presente en un suceso implica una amenaza se llama riesgo.

Estas situaciones aparecen cuando hay resultados no deseados que, como consecuencia, provocan pérdidas o daños. Un problema paradigmático en un escenario de riesgo consiste en elegir entre dos juegos de apuestas de los cuales se muestran pérdidas y ganancias (Kahneman y Tversky, 2000). Considere el siguiente problema:

Las ganancias observadas de n repeticiones de un juego A y m del juego B son:

Juego A: $x_1, x_2 \dots ; x_n$

Juego B: $y_1, y_2 \dots ; y_m$

¿En cuál de los dos juegos participarías?

Una solución puede ser: 1) comparar $\bar{x}$ y $\bar{y}$; 2) si $\bar{x} \neq \bar{y}$, elegir el juego cuya media es mayor; 3) si $\bar{x} = \bar{y}$, se tienen dos opciones: 3a) elegir cualquier juego; 3b) analizar la dispersión de los datos en cada juego y elegir uno de acuerdo con las preferencias hacia el riesgo. Estas preferencias pueden ser definidas como generalizaciones de las actitudes hacia el riesgo:

> "En general, la preferencia por un resultado seguro y el rechazo de un juego cuyo resultado tiene un valor esperado igual o mayor a dicha ganancia es llamada aversión al riesgo. Y el rechazo de una ganancia segura y la aceptación de un juego cuyo resultado tiene un valor esperado menor o igual a esa ganancia es llamada propensión al riesgo" (Kahneman y Tversky, 2000, p. 2)[ii].

En un juego la dispersión de las ganancias (incluidas las pérdidas) puede ser considerada una medida de riesgo: entre mayor dispersión más riesgo. Una persona adversa al riesgo preferirá un conjunto de datos menos disperso en lugar de otro cuyos datos tengan mayor dispersión; mientras que una persona es propensa al riesgo cuando prefiere la opción cuyos datos son más dispersos.

La comunidad de educadores estadísticos ha distinguido tres ideas superpuestas para organizar y analizar los objetivos, actividades y resultados del aprendizaje de la estadística: competencia, razonamiento y pensamiento estadísticos (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Esta exploración se ubica en el área de razonamiento estadístico. La propuesta de investigación sobre razonamiento estadístico es comprender como razonan las personas con ideas estadísticas (Garfield y Ben-Zvi, 2008) y así proponer características para crear escenarios de aprendizaje. Cuando los alumnos tratan de justificar sus respuestas, muestran los elementos a los que le dan importancia, en particular los datos que eligen, las operaciones que realizan, sus creencias y sus conocimientos. Aunque en ocasiones las respuestas de los alumnos no son tan explícitas para revelar claramente su razonamiento, de cualquier manera muestran indicios para identificar algunos de sus rasgos. En este estudio identificamos algunas características del razonamiento de estudiantes ante las situaciones descritas.

METODOLOGÍA

En el estudio participaron 64 estudiantes de una escuela normal pública de la Ciudad de México que cursan la Licenciatura en Educación Preescolar. Para explorar las ideas de las estudiantes se utilizó un cuestionario con dos problemas sobre comparaciones de conjuntos de datos (ver anexo). El proceso de validación del cuestionario se realizó mediante un ajuste resultante de dos ciclos de *aplicación-análisis de las respuestas-modificación de los problemas* (Orta y Sánchez, 2013 y 2014). Los ajustes en cada ciclo se hicieron para obtener o mejorar los datos y así dar respuestas más precisas a las preguntas de investigación.

El cuestionario fue resuelto por las estudiantes al iniciar el curso de procesamiento de información estadística, por lo que no contaban con conocimientos estadísticos (al menos vistos recientemente). El trabajo con los problemas del cuestionario sirvió para introducir a las estudiantes a un tipo de razonamiento y los resultados permitieron elaborar un diagnóstico acerca de sus conocimientos. Los problemas tenían un inciso donde se planteó una situación de toma de decisiones. En el problema 1, se dan las ganancias y pérdidas de dos juegos y se pide elegir el juego en el que más convendría jugar. En el problema 2 se dan tiempos de recuperación en forma gráfica de dos grupos de pacientes tras someterse a uno de dos tratamientos y se pide decidir cuál es el mejor tratamiento. En el problema 1 las medias aritméticas de los conjuntos de datos son iguales mientras que en el segundo son distintos. En ambos debe atenderse a la dispersión asociada al riesgo para justificar la elección.

RESULTADOS

A continuación se comentan los resultados obtenidos en cada uno de los problemas resueltos por las estudiantes, se inicia este apartado presentando las respuestas al problema 1 y posteriormente se muestran las correspondientes con el problema 2. Para analizar las respuestas en primer lugar se observó la decisión que tomaron, es decir, el conjunto de datos que eligieron; en segundo lugar, se categorizaron las respuestas con base en las estrategias de comparación que describieron en sus justificaciones siguiendo las sugerencias de Birks y Mills (2011).

Problema 1

La solución normativa del problema 1 consistiría en el procedimiento descrito en el marco de referencia, que estriba en comparar las medias y verificar que son iguales; a partir de esto hay dos opciones, una que se puede elegir cualquier juego teniendo en cuenta que la ganancia promedio es la misma para ambos, o considerar la dispersión (a través del rango sería suficiente). En este caso, la opción elegida dependería de las actitudes del riesgo del que resuelve el problema: Elegirían el juego 1 quienes son adversos al riesgo, mientras que optarían por juego 2 los propensos al riesgo.

Las frecuencias con las que se eligió alguna de las opciones se presenta en la Tabla 1. Ninguna de las argumentaciones para dichas elecciones siguió el esquema de razonamiento que se describió en el párrafo anterior; aunque algunas se aproximan o prefiguran partes de dicho esquema.

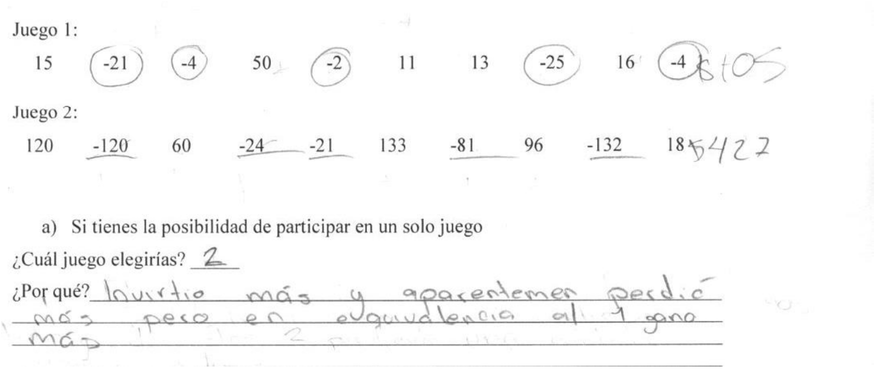
Un procedimiento común a todas las estrategias consistió en sumar las ganancias de cada juego (los valores positivos) y sumar sus pérdidas (valores negativos pero sin considerar el signo), obteniéndose 4 valores G_1, G_2, P_1, P_2.

Tabla 1. Conteo, según elección, de las respuestas a la pregunta 1a

Elección	Pregunta 1a)
Juego 1	36
Juego 2	21
Cualquiera	5
No responde	1
Total	63

La manera en que combinaron estos valores (G_1, G_2, P_1, P_2) produjo tres estrategias:

Comparación de pérdidas o ganancias. 27 (de 63) estudiantes no logran coordinar los cuatro valores y se basan, ya sea en la pareja de ganancias (eligen el juego 2, porque $G_2 > G_1$) o en la pareja de pérdidas (eligen el juego 1 porque $P_1 < P_2$, es decir: $-P_1 > -P_2$). En algunas de estas respuestas se percibió el riesgo.


Juego 1:
15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4 8105

Juego 2:
120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18 5427

a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego
¿Cuál juego elegirías? 2
¿Por qué? Invirtio más y aparentemen perdió más pero en equivalencia al 1 ganó más

Figura 1. Ejemplo de la categoría, comparación de pérdidas o ganancias

La Figura 1 muestra un ejemplo donde una estudiante eligió el juego 2, y la justificación de su elección fue con base en la comparación de las ganancias, observando que las ganancias eran mayores en el juego 2.

La justificación en el ejemplo de la Figura 1 fue: “Invirtió más y aparentemente perdió más pero en equivalencia al 1 gano más”. En este ejemplo además del uso de la ganancia máxima para decidir entre un juego y otro (427 > 105), se observa la propensión al riesgo ya que al final de la justificación se comenta “gano más”.

Comparación de la diferencia entre ganancias y pérdidas. En 5 (de 63) casos se vio que la ganancia global en ambos juegos es la misma. Esto mediante la comparación de las diferencias entre ganancias y pérdidas: $G_2 - P_2 = G_1 - P_1 = 49$. Este procedimiento prefigura el uso de la media.

Por ejemplo, una estudiante argumenta: “Al sumar las ganancias y pérdidas de cada juego pude notar que a pesar de que en el juego 2 las ganancias son mayores, existe una inversión inicial en ambos de $49, es decir que en cualquiera que juegue mi diferencia entre ganancias y pérdidas será la misma”. En estos casos, no se mencionan la dispersión de los datos ni consideraciones de riesgo.

Comparación de la razón entre ganancias y pérdidas. En 25 (de 63) casos se compararon las razones entre pérdidas y ganancias, notando que es mayor la del juego 1: $\frac{G_1}{P_1} > \frac{G_2}{P_2}$, por tanto, optando por este juego. Dado que las medias son iguales la anterior desigualdad se reduce a $P_2 > P_1$, en el fondo, esta estrategia consiste en elegir el juego 1 porque se pierde menos. Por ejemplo,

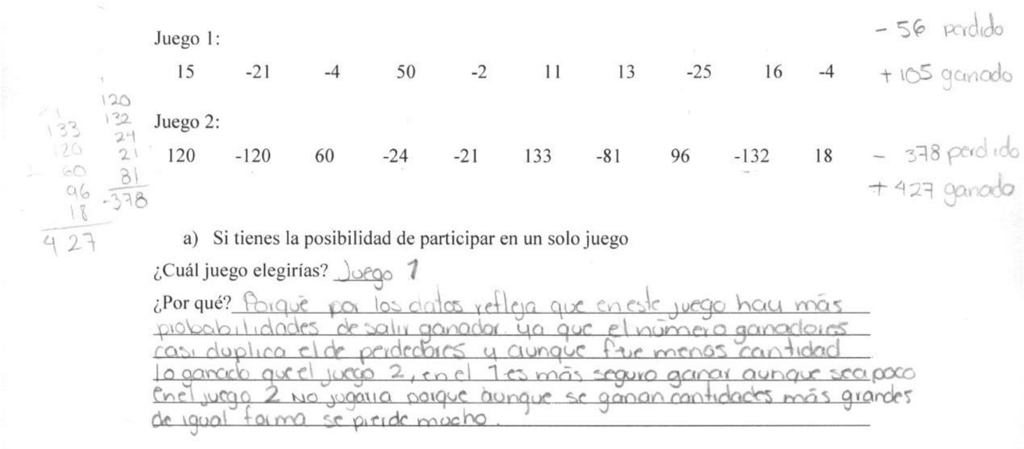


Figura 2. Ejemplo de la categoría, comparación de la razón entre las ganancias y las pérdidas

La justificación del ejemplo de la Figura 2 fue la siguiente: “Porque por los datos refleja que en este juego hay más probabilidades de salir ganador ya que el número de ganadores casi duplica el de perdedores y aunque fue menos cantidad lo ganado que el juego 2, en el 1 es más seguro ganar aunque sea poco en el juego 2 No jugaría porque aunque se ganan cantidades más grandes de igual forma se pierde mucho”. En este ejemplo se observa, por un lado el uso de la razón entre las ganancias y las perdidas y, por otro la aversión al riesgo ya que en parte del argumento se comenta que “es más seguro ganar aunque sea poco”.

Problema 2

La solución normativa del problema dos puede reducirse al cálculo de las medias de los tiempos de vida de cada tratamiento, notando que los datos del tratamiento 1 tienen mayor media (6.7) que los del tratamiento 2 (6). Notando lo anterior, también puede elegirse el tratamiento 2, teniendo en cuenta la dispersión mediante el rango e interpretándolo como riesgo. Se consideraría que el riesgo con el tratamiento 1 (rango = 8) es mayor que el riesgo con el tratamiento 2 (rango = 4) y que la disminución en el riesgo podría compensar la diferencia entre las medias. En este último caso la elección estaría motivada por una aversión al riesgo.

Las frecuencias con las que se eligió cada opción se muestran en la Tabla 2.

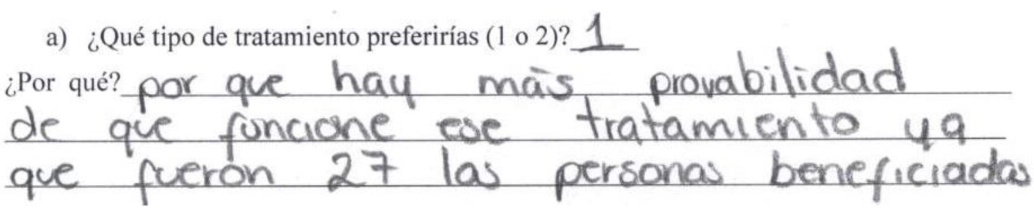
Tabla 2. Conteo, según elección, de las respuestas a las preguntas 2a

Elección	Pregunta 2a)
Tratamiento 1	43
Tratamiento 2	21
Total	64

En los argumentos que justifican las elecciones se pueden identificar 6 estrategias, las cuales a continuación describimos ordenándolas de menos a más estructuradas.

Comparación sin justificación o circular. En 20 casos, en los que 9 eligieron el tratamiento 1 y 11 el tratamiento 2, sólo justificaron su elección diciendo que en ese “se vive más”, o que era el mejor tratamiento, sin ofrecer argumentos que muestren cómo se utilizaron los datos. Seguramente vieron en la gráfica algún rasgo que aparentemente indicaría que se vive más, pero no lo supieron expresar.

Comparación de cardinalidad. Nueve estudiantes que eligieron el tratamiento 1, basaron su elección en la cardinalidad del conjunto de datos (27 > 21), en sus argumentos comentaban que más personas habían vivido con esa opción. El siguiente es un ejemplo:


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1 o 2)? 1

¿Por qué? por que hay más provabilidad de que funcione ese tratamiento ya que fueron 27 las personas beneficiadas

Figura 3. Ejemplo de la estrategia, comparación de la cardinalidad

En las estrategias anteriores no se alude al riesgo, ni es clara la interpretación de la dispersión.

Comparación de valores extremos. En 16 casos la elección se realizó con base en uno de los valores extremos. Cuando el tratamiento elegido fue el 1, en 7 respuestas se argumentó que con ese tratamiento se podrían vivir hasta 10 años; en 2 casos se justificó dicha elección indicando que vivirían por lo menos un año. En 7 casos se eligió el tratamiento 2, justificando que se vivirían por lo menos 4 años. Un ejemplo de este tipo de respuestas donde se eligió el tratamiento 1 fue: “El tiempo vivido en años por persona es mayor; se puede llegar a vivir 9 o incluso 10 años, lo que en el otro tratamiento no”. En las respuestas donde el tratamiento elegido es el 1, es probable que la elección sea motivada por una propensión al riesgo, ya que se menciona que se puede vivir hasta 10 años; mientras que las respuestas donde el tratamiento elegido fue el 2, es probable que sean motivadas por una aversión al riesgo, pues comentan que al menos pueden vivir 4 años.

Comparación de centros. En 9 respuestas se compararon los valores modales observados en cada gráfica. En 6 de ellas eligieron el tratamiento 1, posiblemente comparando las modas de los conjuntos de datos (8 > 6), por ejemplo, una justificación es: “hay más probabilidades de vivir más años (8 aprox)”. En 3 casos eligieron el tratamiento 2 probablemente con base en la proporción de personas que vivieron seis años, por ejemplo: “aquí me garantizan 7 personas que van a vivir 6 años seguros, sin embargo en el "1" 6 personas viven 8 años, es seguro pero yo voy más por el número de personas que tomaron el tratamiento”. En esta estrategia aunque se consideran los centros de los conjuntos de datos, se ignora la variación de los datos.

Comparación del centro y extremo. En 6 respuestas se combinaron centro y un valor extremo para justificar la elección. En 4 se eligió el tratamiento 1, en uno de estos casos se expresa que se podían vivir hasta 10 años y en promedio 8 (en realidad es la moda). En 2 casos se eligió el tratamiento 2, probablemente, consideraron que por lo menos vivirían 4 años y en promedio 6. Un ejemplo de esta clase de respuestas se muestra en seguida en la Figura 4.

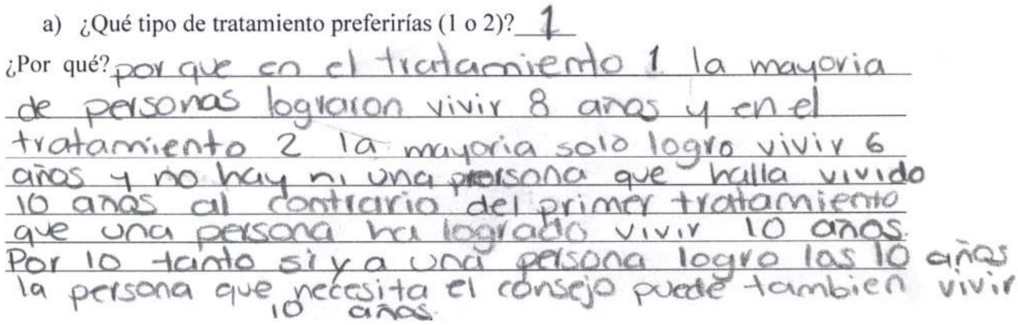

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1 o 2)? 1
¿Por qué? por que en el tratamiento 1 la mayoria de personas lograron vivir 8 años y en el tratamiento 2 la mayoria solo logro vivir 6 años y no hay ni una persona que halla vivido 10 años al contrario del primer tratamiento que una persona ha logrado vivir 10 años. Por lo tanto si ya una persona logro las 10 años la persona que necesita el consejo puede tambien vivir 10 años.

Figura 4. Ejemplo de la categoría comparación del centro y extremo

La justificación en la Figura 4 fue: "porque en el tratamiento 1 la mayoría de personas lograron vivir 8 años y en el tratamiento 2 la mayoría solo logró vivir 6 años y no hay ni una persona que haya vivido 10 años al contrario del primer tratamiento que una persona ha logrado vivir 10 años. Por lo tanto si ya una persona logró los 10 años la persona que necesita el consejo puede también vivir 10 años". En la respuesta es claro que la estudiante observo centros (valor modal) y extremos para tomar una decisión, quizás también la preferencia por el riesgo sea la propensión, porque con ese tratamiento "…una persona ha logrado vivir 10 años".

Comparación con el rango. Sólo en cuatro respuestas donde el tratamiento elegido fue el 1, se hizo alusión al rango. En estos casos se pondera el riesgo, aunque de manera confusa, por ejemplo:

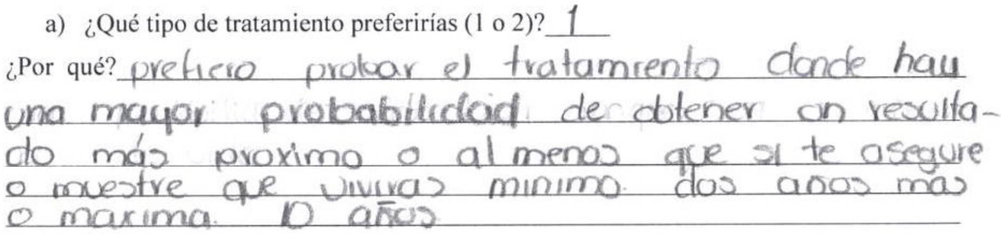

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1 o 2)? 1
¿Por qué? prefiero probar el tratamiento donde hay una mayor probabilidad de obtener un resultado más proximo o al menos que si te asegure o muestre que viviras minimo dos años mas o maxima 10 años

Figura 5. Ejemplo de la categoría comparación con el rango

La justificación fue: "prefiero probar el tratamiento donde hay una mayor probabilidad de obtener un resultado más próximo o al menos que si te asegure o muestre que vivirás mínimo dos años más o máximo 10 años".

CONCLUSIONES

En el problema 1, la estrategia de sumar las ganancias y luego las pérdidas tiene la virtud de que se toman en cuenta todos los datos. En exploraciones anteriores (Orta y Sánchez, 2013) con alumnos de educación secundaria, y en esta misma exploración pero con el problema de los tratamientos, se presentan varias respuestas en las que se comparan elementos aislados de cada conjunto (los máximos, los mínimos o las modas). Aunque no siempre se combinan de manera adecuada los 4 valores resultantes, es un avance que se proponga una estrategia que incluya todos los datos.

La estrategia de comparación de las ganancias totales prefigura la más sofisticada, comparar las medias. Gal, Rothschild y Wagner (1989) y Watzon y Moritz (1999) mostraron que el uso de la media en la comparación de datos no es una estrategia espontánea ni fácil de arraigar en los alumnos. Así que la estrategia que desarrollan espontáneamente las estudiantes las pone en una buena posición para comprender la comparación de datos a través de comparar sus medias.

La insistencia en la enseñanza de la importancia de la proporcionalidad suele hacer pensar a las estudiantes que es una herramienta para resolver todo problema. En este caso, la estrategia de comparar las razones probablemente provenga de esa creencia. No es una estrategia del todo inadecuada, pues en el caso presente lleva a elegir el jugo en el que la pérdida es menor. Pero la estrategia no es válida en general.

Contrariamente a lo observado con los alumnos de educación secundaria (Orta & Sánchez, 2013), en el caso de las estudiantes, salvo contadas excepciones, no desarrollaron estrategias basadas en la consideración de los rangos y/o influenciadas por la percepción del riesgo.

La percepción de las estudiantes sobre los problemas es que son diferentes, pues ninguna adaptó la estrategia seguida en el problema 1 para aplicarla al 2; el contexto y el formato de presentación ejercen mayor influencia en la conducta de resolución que la estructura (oculta) del problema.

Mientras que en el problema 1 en general hubo tratamiento de los datos, en el problema 2, en 20 casos se eligió un tratamiento sin ofrecer ninguna justificación que incluyera un tratamiento de los datos, probablemente debido a la dificultad de extraer los datos numéricos de la gráfica.

En este problema se presenta la estrategia basada en la comparación de uno de los valores extremos de cada conjunto de datos (mínimo, máximo), que también se explica por la aparente ausencia de la lista de datos para aplicar procedimientos aritméticos como en el problema 1.

En cambio, en este problema las estudiantes fueron más sensibles a consideraciones de riesgo; pues en las estrategias que consideran un extremo o un centro y un extremo ponderan el riesgo en la forma de elegir el tratamiento 1 porque se puede vivir 10 años (propensión al riesgo), o se elige al tratamiento 2 porque al menos se viven 4 años (aversión al riesgo).

Aunque de manera incipiente los problemas asociados al riesgo con los que hemos explorado el razonamiento de alumnos, conducen a percibir la variación dándole un significado asociado al riesgo. En la experiencia presente se encuentran estrategias que conducen a utilizar la media y el rango de manera significativa. Con base en estas ideas se pueden estructurar actividades que ofrezcan probabilidades de ofrecer un significado más a los procedimientos basados en la utilización de la media y la dispersión.

Referencias

Birks, M. y Mills, J. (2011). *Grounded Theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Nueva York: Springer.

Estepa, A. (2013). Los fenómenos de cambio. *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Organizado por el grupo de investigación Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gal, I., Rothschild, K. y Wagner, D. A. (1989). *Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children*. Ponencia presentado en el Meeting of the Society for Research in Child Development, Kansas City, MO.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Nueva York: Springer.

Kahneman, D. y Tversky, A. (2000). *Choices, values, and frames*. Cambridge, MA: Russell Sage Foundation.

Lehrer, R. y Schauble, L. (2007).Contrasting emerging conceptions of distribution in contexts of error and natural variation. En M. Lovett y P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp.149-176). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington DC: National Academy Press.

Orta, J. A. y Sánchez, E. A. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). Bilbao: SEIEM.

Orta, J. A. y Sánchez, E. A. (2014). Interpreting variation of data in risk-context by middle school students. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Teaching Statistics*. Flagstaff, AZ.

Petrosino, A. J., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2&3), 131-156.

Reading C. (2004). Student description of variation while working with weather data. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 84-105.

Sánchez, E. y Orta, A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números, 83*, 65-77.

SEP (2012). *Procesamiento de Información Estadística*. México DF: Secretaría de Educación Pública.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 145-168.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 44-70.

Watson, J. M. y Kelly, B. A. (2004). Statistical variation in a chance setting: A two-year study. *Educational Studies in Mathematics*, *57*, 121-144.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wild, D. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

ANEXO

Cuestionario

Problema 1. En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1:

15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4

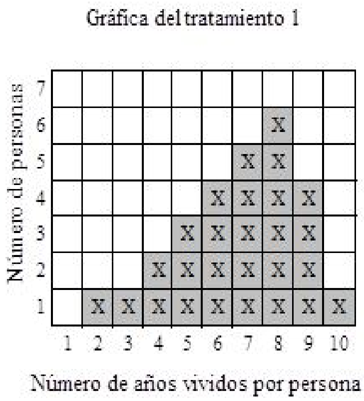
Juego 2:

120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18

Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego, ¿Cuál juego elegirías? ¿Por qué?

Problema 2. Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, incurable y mortal, pero que es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre dos tratamientos. Las personas tienen diferentes reacciones a las medicinas, para algunas tienen el resultado previsto, mientras que para otras pueden ser más o menos benéficas. A continuación se muestran los años que han vivido varios pacientes tratados con cada una de las opciones mencionadas; cada dato de los que se muestran corresponde al tiempo que ha sobrevivido un paciente con el respectivo tratamiento. Después se muestran las gráficas correspondientes a los tratamientos.

Tratamientos



¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1 o 2)? ¿Por qué?

---

[i] Debe aclararse que los términos variación, variabilidad y dispersión se consideran como sinónimos, apoyándonos en el análisis de Estepa (2013), aunque tales términos conllevan ligeras diferencias, en el contexto presente, su uso se refiere al núcleo que comparten.
[ii] Traducción libre de los autores.

EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON TABLETAS A TRAVÉS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN

Learning the quadratic function with tablets through the modelling process

Ortega, M. y Puig, L.

Universitat de València

Resumen

Analizamos cualitativamente la implementación de un modelo de enseñanza y aprendizaje diseñado para trabajar la función cuadrática con tabletas a través de la modelización matemática de un fenómeno de la vida real en un grupo de 1º de bachillerato. El fenómeno estudiado es la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una cierta altura considerando solo el primer salto. El análisis de los datos revela que la realización de un estudio previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y los conocimientos previos de los estudiantes, son clave en la elección de la función usada como modelo así como también en la interpretación de los resultados en términos del fenómeno. También se observa que los estudiantes presentan concepciones arraigadas sobre el concepto de altura.

Palabras clave: *Modelización matemática, resolución de problemas, funciones, datos reales, tabletas*

Abstract

We analyse qualitatively the implementation of a teaching and learning model designed to work on the quadratic function with tablets through the mathematical modelling of a real-life phenomenon in a group of 11th grade students. The phenomenon studied is the relation between the time and the height of a ball when it is dropped from a certain height considering only the first jump. The analysis of the data reveals that a previous study of the qualitative properties of this phenomenon and the students' previous knowledge are key elements when they have to choose the function used as a model and they interpret the results in terms of the phenomenon. We also observe that the students have a rooted idea about the concept of height.

Keywords: *Mathematical modelling, problem solving, functions, real data, tablets*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones en educación matemática coinciden en señalar la importancia de introducir la modelización en la enseñanza para mostrar la relación entre las matemáticas y el mundo real (Sol, Giménez y Rosich, 2011). Sin embargo, la incorporación a las aulas de esta forma de concebir la enseñanza sigue siendo un asunto pendiente debido, entre otros, a la falta de recursos y material de soporte para el profesorado y a la necesidad de un cambio de modelo en la gestión de las actividades en la enseñanza (Burkhardt y Pollack, 2006; Antonius, Haines, Jensen, Niss y Burkhardt, 2007).

Por otro lado, el incremento en el uso de las nuevas tecnologías está cambiando todo aquello que nos rodea y, en consecuencia, la forma en la que se concibe la enseñanza y el aprendizaje. Por ello, es importante la incorporación de estas herramientas en el aula ya que, como señalan Burkhardt y Pollack (2006), cualquier curso de modelización en el que no se utilicen este tipo de recursos estará alejado de la realidad de los estudiantes.

Ortega, M. y Puig, L. (2015). El aprendizaje de la función cuadrática con tabletas a través del proceso de modelización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 451-458). Alicante: SEIEM.

Desde hace unos años, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València se está trabajando en el diseño y en la experimentación de materiales de enseñanza centrados en el estudio del proceso de modelización con ayuda de nuevas tecnologías, combinadas con una metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas y cuyo principal objetivo es generar recursos para el profesorado (Puig y Monzó, 2013). Los trabajos estudian las familias de funciones y el significado de los parámetros involucrados en ellas a través del uso de diferentes entornos de aprendizaje (ordenadores, calculadoras gráficas…). Poco se sabe aún sobre el estudio de las familias de funciones mediante el uso de tabletas y de las posibilidades que ofrecen sus aplicaciones. Este es el principal punto de interés de nuestro estudio, que consistirá en la elaboración de una situación de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de tabletas. Además, en el diseño también se incluye el uso de datos reales; se tiene en cuenta lo que señalan Monzó y Puig (2011) sobre las observaciones que aparecen en el documento de discusión para el ICMI Study *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* del uso de datos reales en el dominio del manejo de las expresiones algebraicas por parte de los estudiantes (Stacey et al., 2000).

Por tanto, la originalidad de nuestra investigación se basa en la combinación del uso de la modelización para trabajar las familias de funciones y la obtención y manejo de datos reales mediante el uso de tabletas.

MARCO TEÓRICO

En este estudio de carácter empírico, adoptamos el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL), desarrollado por Filloy, Rojano y Puig (2008), que pretende dar cuenta de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, que se conciben como situaciones de comunicación y de producción de sentido en las que intervienen tres personajes esenciales: el estudiante, el profesor y las matemáticas. Esto hace que se deban contemplar los siguientes elementos: la enseñanza, los sujetos que aprenden, los conceptos matemáticos involucrados y la comunicación establecida. Desde la perspectiva de los MTL, esto se traduce en constituir un modelo a partir de cuatro componentes: de competencia, de actuación, de enseñanza y de comunicación (Puig, 2006). En este marco desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de esta, es un Modelo Teórico Local.

Así pues, desde esta perspectiva, consideramos que un proceso de modelización es aquel por el cual se establece, de forma explícita o implícita, una relación entre alguna idea matemática y una situación real (Blomhøj y Jensen, 2003). Analíticamente es posible describir todo proceso siguiendo el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) que se muestra en la Figura 1.

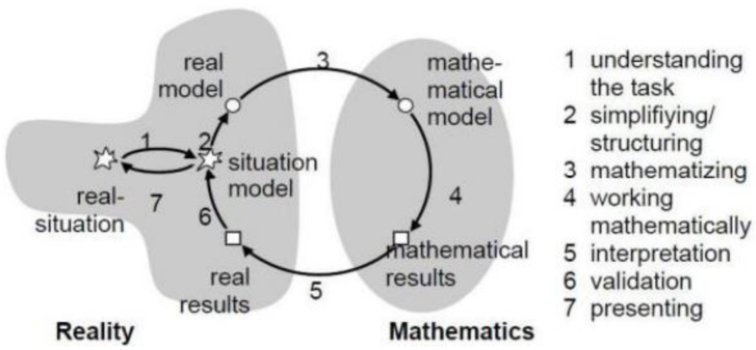


Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007)

Desde nuestro punto de vista, es esencial tener en cuenta la investigación existente en resolución de problemas, puesto que entendemos el proceso de modelización como un caso particular de proceso de resolución de problemas.

En particular, Schoenfeld (1985), después de analizar las actuaciones de resolutores reales, establece que en todo proceso de resolución de problemas intervienen cuatro componentes: heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias. En Puig (1996), se afirma que un buen gestor, el gestor instruido, es aquel que conoce tanto los mecanismos generales de gestión como los específicos del tipo de problema o de proceso de resolución en el que está embarcado.

Para los problemas de modelización, Puig y Monzó (2013), argumentan que el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones es un elemento clave en la gestión del proceso, por lo que se incluye explícitamente en el diseño del modelo de enseñanza.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La finalidad del estudio es analizar cómo influyen el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones así como los conocimientos previos de los estudiantes en el aprendizaje de la función cuadrática. Para esto, diseñamos e implementamos un modelo de enseñanza que combina el uso de datos reales con tabletas a través de la modelización matemática.

Nos planteamos como objetivos de investigación:

(a) Analizar en qué fases del ciclo de modelización influye el análisis cualitativo realizado y los conocimientos previos de los estudiantes.

(b) Realizar una exploración de las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con un modelo de enseñanza con estas características.

MATERIALES Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Población y contexto

La población de este estudio estaba formada por un grupo natural de 16 estudiantes de primer curso de bachillerato que no se habían enfrentado antes a la resolución de tareas de modelización. Poseían conocimientos sobre las diferentes familias de funciones y el significado de los parámetros adquiridos en cursos previos con el uso de nuevas tecnologías.

Diseño del experimento de enseñanza

El estudio realizado consistió en diseñar e implementar un modelo de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de tabletas caracterizado por la inclusión de elementos de gestión del proceso de modelización y el uso de datos reales obtenidos directamente en el aula con tabletas.

El fenómeno que se plantea que estudien matemáticamente es la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una cierta altura, restringiendo el modelo al primer salto, esto es, desde el momento en que toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar. Considerando el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), la situación real ya se da simplificada ya que se especifican las magnitudes que se deben estudiar, el tiempo y la altura.

El experimento se llevó a cabo en tres sesiones de las cuales dos se dedicaron a la implementación del modelo de enseñanza y una a la realización de entrevistas. Durante las sesiones dedicadas a la enseñanza, los estudiantes trabajaron por parejas ya que, según Schoenfeld (1985), esto favorece la verbalización de lo que hacen, piensan o desean hacer.

En la primera sesión, se les administró una ficha en la que se presentaba el fenómeno que debían estudiar y un catálogo de preguntas donde los estudiantes tenían que usar sus conocimientos previos sobre las propiedades cualitativas de las familias de funciones y el significado de los parámetros para responder. Entre estas, se les pidió que realizaran un esbozo de la gráfica de la función que pensaban que modelizaría el fenómeno, que eligieran la familia de funciones que mejor se ajustaba a esta de las de una lista dada y que justificaran su elección. Al final se pidió que simularan el fenómeno estudiado y que lo grabaran mediante Video Physics® (fotografía izquierda, Figura 2): esto les permitió obtener un conjunto de puntos cuyas coordenadas mostraban el tiempo y la altura a la que se encontraba la pelota en cada instante.

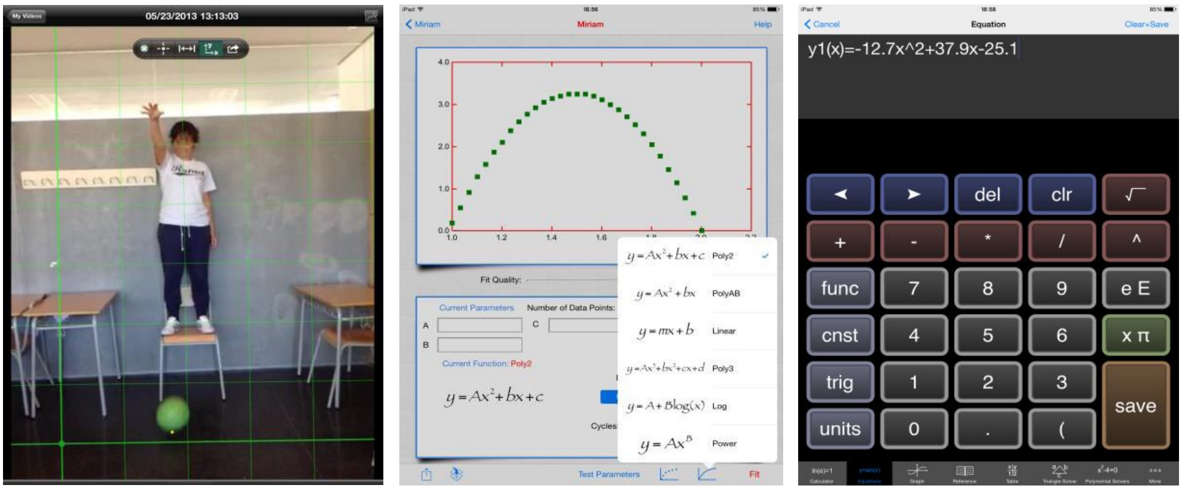


Figura 2. Secuencia de capturas de pantalla de Video Physics®, Data Analysis® y Free GraCalc®

En la segunda sesión, los estudiantes introdujeron dichos puntos en la aplicación Data Analysis® para elegir la función que mejor ajustaba a éstos (fotografía central, Figura 2) y obtener así un modelo del fenómeno. Además, se les administró una segunda ficha con preguntas relativas al cálculo del dominio de la función (preguntas 5 y 6, Figura 3) y a la interpretación de los datos en relación con el fenómeno estudiado con el objetivo, no solo de que los alumnos analizaran sus propiedades con mayor profundidad, sino también de que validaran la adecuación del modelo escogido (pregunta 7, Figura 3). En concreto, en la pregunta 5 se les pedía que calcularan algunas imágenes de la función cuyos valores para *x* estaban fuera del dominio y que explicaran si pensaban que las imágenes obtenidas mostraban lo que verdaderamente ocurría, con la finalidad de que se dieran cuenta de que la función de regresión no representa a la función que modeliza el fenómeno en todo el dominio, sino solamente en el intervalo para el que se ha definido; en este caso, durante el primer salto.

Para responder a estas cuestiones, usaron la aplicación Free GraCalc® (fotografía derecha, Figura 2), cuyo funcionamiento es similar al de una calculadora gráfica.

Para finalizar, en la última sesión se seleccionaron las parejas que participaron en el estudio de casos atendiendo a los resultados obtenidos del análisis de sus actuaciones en las dos sesiones anteriores relativos a los objetivos del estudio. A estos se les realizó una entrevista de diagnóstico con la finalidad de detectar el origen de los resultados obtenidos y en la que también incorporamos elementos de enseñanza. Esto último se hizo en base a lo que Roth y Radford (2011) comentan sobre la importancia de trabajar en la zona de desarrollo próximo del estudiante, yendo más allá de lo que Freudenthal (1983) denomina "proceso de reinvención guiada", con el objetivo de guiar a los alumnos, a partir de preguntas y sugerencias, hacia la adquisición de conocimientos relacionados con el significado de los parámetros y las concepciones relacionadas con el concepto de altura observadas en las respuestas de los estudiantes y que detallamos en el siguiente apartado.

Cabe destacar que la elección de las aplicaciones usadas en el experimento se debió al hecho de ser gratuitas o de bajo coste con la finalidad de facilitar su futura incorporación a las aulas.

5. a. ¿A qué altura se encuentra la pelota cuando x = 0,76? f(0,76) = ___

b. ¿Y cuándo x = 1,1? f(1,1) = __________

c. ¿Y cuándo x = 0,11? f(0,11) = __________

d. ¿Y cuándo x = 100? f(100) = __________

6. a. En general, ¿crees que las respuestas obtenidas en la pregunta anterior muestran lo que verdaderamente ocurre? ¿Por qué?

b. ¿Qué datos no se ajustan a lo que esperabas? ¿Por qué?

7. a. ¿Para qué valores de x (tiempo) la pelota golpea el suelo? Explica cómo has obtenido el resultado.

b. ¿Para qué valores de x (tiempo) la pelota alcanza su máxima altura? Explica cómo has obtenido el resultado.

Figura 3. Preguntas de la ficha posterior al experimento

Recolección y análisis de datos

Las características del marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales comportan que la metodología con la que se organiza la investigación tenga como componente esencial la descripción de las actuaciones de los alumnos y la selección de casos que se estudian mediante la realización de entrevistas que, habitualmente, son con enseñanza. Nosotros analizamos los datos dados de las fichas, de las tabletas y de las entrevistas.

Por un lado, se analizaron las respuestas de las fichas y los datos de las tabletas (lugar donde fijan el eje de las x en Video Physics®, ajuste de la función escogida, etc.) realizando una reconstrucción racional, esto es, una narración de las conductas y los comportamientos de los estudiantes con el objetivo de dotar de sentido el conjunto del texto (Puig, 1996) y, por consiguiente, de elaborar un catálogo de observaciones relativas a aquellas actuaciones relacionadas con los objetivos planteados en el estudio. Para ello, además se tuvieron en cuenta las observaciones realizadas en clase y recogidas en una memoria después de cada sesión. Se analizaron los datos por parejas y también por resultado relevantes.

Por otro lado, se analizan las entrevistas realizando la transcripción de las intervenciones y una reconstrucción racional, incluyendo comentarios sobre las actuaciones tanto de estudiantes como de investigador y reacciones observadas en las grabaciones, fundamentales para la total comprensión e interpretación de los datos. El análisis de las entrevistas se realizó también pareja por pareja y por resultados, centrándonos en estudiar la influencia del análisis cualitativo y de otros elementos en el modelo.

RESULTADOS

En primer lugar, incluimos los resultados que muestran la influencia del análisis cualitativo y de los conocimientos de los estudiantes en la elección del modelo matemático y durante la interpretación de los datos en términos del fenómeno, primer objetivo del trabajo. Por otro lado, mostramos las concepciones que estos presentan sobre el concepto de altura como resultado de explorar sus actuaciones cuando trabajan con el modelo de enseñanza diseñado.

Influencia del análisis cualitativo previo y de los conocimientos de los estudiantes en la elección de la función usada como modelo

En la Figura 4 se muestra un fragmento de entrevista en el que podemos observar la influencia del análisis cualitativo en la elección del modelo ya que al preguntar a los estudiantes en qué se basaron para escoger la función $f(x)=ax^2+bx+c$, responden haciendo alusión al esbozo que realizan en la primera ficha, “el dibujo”. Además, también utilizan sus conocimientos sobre las familias de funciones para relacionar la gráfica de la función con su expresión algebraica al explicar que “como el dibujo era una parábola, sabíamos que x llevaba un cuadrado”.

I:	[…] ¿por qué escogisteis esta función? [$f(x)=ax^2+bx+c$]
E1:	Al final encontramos que esa era la más coherente.
I:	Y, ¿en qué os basasteis para responder?
E1:	Pues, como el dibujo era una parábola, sabíamos que x llevaba un cuadrado.

Figura 4. Ejemplo de fragmento de entrevista

Por otro lado, los conocimientos previos de los estudiantes sobre el significado de los parámetros son otro elemento clave en la elección del modelo. En la Figura 5 vemos que, al preguntar por qué eligen la función $f(x)=ax^2+bx$ como la que mejor modeliza el fenómeno, explican que “como [la gráfica de la función] empieza en (0,0) no tenemos c”, utilizando sus conocimientos sobre el significado de los parámetros para especificar por qué eligen $f(x)=ax^2+bx$ y no $f(x)=ax^2+bx+c$. A la hora de justificar su respuesta se ven forzados a dar un significado al resto de parámetros de la familia ya que explican que “la a indica el eje de las y y la b el de las x”, cosa que corresponde a una primera interpretación de los parámetros sin demasiada reflexión, como ellos mismos afirman durante la posterior entrevista.

3. Explica por qué has hecho esta elección.

“Porque la a indica el eje de las y y la b el de las x y como [la gráfica de la función] empieza en (0,0) no tenemos c.”

Figura 5. Ejemplo de respuesta ficha previa al experimento

Influencia del análisis cualitativo previo y de los conocimientos de los estudiantes en la interpretación del modelo en términos del fenómeno

En la Figura 6 podemos observar que los estudiantes explican que la pelota alcanza su máxima altura “en el punto intermedio entre los dos tiempos anteriores ya que es un lugar aproximado donde se encontraría el vértice de la parábola”, utilizando sus conocimientos sobre las propiedades cualitativas de la función para relacionar la máxima altura de la pelota con el punto más alto de la función. Además, se basan en la gráfica del estudio cualitativo para afirmar que el vértice es el punto más alto de esta por ser una parábola convexa.

7.b. ¿Para qué valores de x (tiempo) la pelota alcanza su máxima altura? Explica cómo has obtenido el resultado.

“1,5. El punto intermedio entre los dos tiempos anteriores [tiempos en los que la pelota golpea el suelo] ya que es un lugar aproximado donde se encontraría el vértice de la parábola.”

Figura 6. Ejemplo de respuesta ficha posterior al experimento

Las concepciones sobre el concepto de altura

Como resultado de realizar una exploración de las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con el modelo de enseñanza presentado, encontramos una fuerte tendencia a considerar que la altura por encima del nivel del suelo es positiva y cero exactamente en el suelo, hecho que depende de dónde se fije el eje de abscisas en el programa Video Physics®.

Esto se puede observar en la respuesta que dan los estudiantes a la pregunta 6 (Figura 7) donde, después de encontrar que algunas imágenes de la función (ver pregunta 5) cuyos valores se encuentran fuera del dominio dan valores negativos, concluyen que “la altura en este caso no puede ser negativa ya que la pelota no atraviesa el suelo”, considerando que la referencia tomada es el suelo y que los valores negativos corresponden a niveles inferiores a este.

5. Responde las siguientes cuestiones. **a. ¿A qué altura se encuentra la pelota cuando $x = 0{,}76$? $f(0{,}76)$ =** “-3,541646” **b. ¿Y cuándo $x = 1{,}1$? $f(1{,}1)$ =** “1,28226” **c. ¿Y cuándo $x = 0{,}11$? $f(0{,}11)$ =** “-20,8487” **d. ¿Y cuándo $x = 100$? $f(100)$ =** “-121909,3”	**6.a. En general, ¿crees que las respuestas obtenidas en la pregunta 5 muestran lo que verdaderamente ocurre? ¿Por qué?** “No, porque la altura en este caso no puede ser negativa ya que la pelota no atraviesa el suelo, sino que rebota, y por tanto la y no debería ser negativa.”

Figura 7. Ejemplo respuesta ficha posterior al experimento

CONCLUSIONES

Hemos diseñado e implementado un modelo de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de datos reales, obtenidos y procesados con aplicaciones para tabletas.

Respecto al objetivo de analizar en qué fases del ciclo de modelización influye el análisis cualitativo realizado y los conocimientos previos de los estudiantes, hemos constatado que, tal como afirman Puig y Monzó (2013), estos elementos, que forman parte del componente de enseñanza del MTL, son cruciales a lo largo de todo el proceso de modelización. En particular, son clave en la elección de la función usada como modelo y en la interpretación de ésta en términos del fenómeno, principal aportación de nuestro estudio.

Respecto al segundo objetivo, observamos una tendencia a considerar que la altura no puede tomar valores negativos cuando se trabaja por encima del nivel del suelo, probablemente como consecuencia de que habitualmente se considera éste como referencia y de que no se cede la responsabilidad de su elección al alumno, por lo que sería conveniente plantear un mayor número de situaciones en el aula en las que se tuvieran en cuenta estos aspectos.

Como implicaciones futuras, se tendrán en cuenta los resultados obtenidos, que forman parte del componente de actuación del MTL, para la mejora del diseño del modelo de enseñanza y la posterior elaboración de modelos análogos para trabajar otras familias de funciones distintas así como el significado de los parámetros con el uso de tabletas, incluyendo el análisis cualitativo como elemento clave para guiar a los estudiantes. Además, se contempla la posibilidad de analizar en qué fases del proceso de modelización influyen las características de la herramienta tecnológica y las posibles consecuencias en el aprendizaje de las familias de funciones.

Agradecimientos

La investigación ha sido financiada por el Proyecto EDU2012-35638 y por la ayuda para contratos predoctorales BES-2013-063826 del Ministerio de Economía y Competitividad

Referencias

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M. y Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the teacher. En P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 295-308). Nueva York: Springer.

Blomhoj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications, 22*(3), 123-139.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Horwood Publishing.

Burkhardt, H. y Pollack, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *ZDM-Mathematics Education, 38*(2), 178-195.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning.* Utrecht: OW & OC.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008*). Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel Publishing.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 107-126). Huesca: SEIEM.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35). México DF: Trillas.

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Nueva York: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning, 4,* 329-343.

Stacey, K., Carlson, D., Drouhard, J.-P. Fearnley-Sander, D., Fujii, T. … y Chick, H. (2000). Discussion Document for the 12th ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, *48,* 6-13.

UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA EL CONCEPTO DE RECTA TANGENTE

A genetic decomposition for the concept of tangent line

Orts, A.[a], Llinares, S.[b] y Boigues, F. J.[c]
[a]IES Guadassuar (Valencia), [b]Universidad Alicante, [c]Universidad Politécnica Valencia

Resumen

Presentamos una descomposición genética del concepto de recta tangente vista como una trayectoria hipotética de aprendizaje. Para generar esta descomposición genética se ha realizado un análisis histórico de la génesis del concepto, un análisis de libros de texto de Bachillerato, una síntesis de los resultados de las investigaciones sobre la comprensión de la recta tangente y hemos tenido en cuenta los resultados de un cuestionario respondido por alumnos de Bachillerato. La descomposición genética integra las perspectivas analítica local y geométrica como medio para favorecer la tematización del esquema de recta tangente.

Palabras clave: *compresión matemática, recta tangente, descomposición genética*

Abstract

We present a genetic decomposition of the concept of tangent line view as a hypothetical learning trajectory. To generate this genetic decomposition we performed a historical analysis of the genesis of the concept, analyzed different high school mathematics textbooks, conducted a synthesis of the findings of research on understanding the tangent line, and designed a questionnaire that was completed by high school students in a pilot study. The genetic decomposition generated considers the analytical and geometrical perspectives as a means to promote the thematization of the schema of tangent line.

Keywords: *mathematical understanding, tangent line, genetic decomposition.*

INTRODUCCIÓN

La recta tangente es un concepto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y ser considerada como la recta que mejor aproxima localmente una función. Desde esta perspectiva, en el desarrollo del concepto de recta tangente interviene el concepto de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función y los procesos de aproximación a una curva (Robles, Del Castillo y Font, 2010). El concepto de recta tangente a una gráfica de una función puede ser representado en varios sistemas de representación que en cierta medida favorecen su comprensión compartimentalizada. Artigue (1991) señala que una recta tangente en un punto puede ser concebida como una línea que pasa por el punto pero no corta la curva alrededor de ese punto, como una línea que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, como una línea que pasa por dos puntos infinitamente cercanos al punto de la curva, etc. Estas perspectivas pueden coexistir en la mente de un matemático, pero no resulta igual para un estudiante. Las investigaciones indican la existencia de perfiles de estudiantes que pueden usar significados más próximos a la idea de recta tangente procedente del análisis o desde sus propiedades geométricas (Biza, Zacharides, 2010; Vivier, 2013). En la comprensión del concepto de recta tangente, las investigaciones indican que el conocimiento previo de los estudiantes sobre la tangente a un círculo influye en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a una curva. Este hecho hace que resulte desafiante para los estudiantes considerar la idea de recta tangente a una curva en un punto de inflexión, la recta tangente que coincide con la gráfica de la función y la recta tangente en un punto cúspide (Biza, Christou, y Zachariades, 2008; Castela, 1995).

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de recta tangente. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.

Esta situación plantea la necesidad de comprender mejor la manera en la que los estudiantes construyen el significado de recta tangente teniendo en cuenta los aspectos que las investigaciones previas han mostrado como desafiantes, así como estudiar cómo determinadas secuencias de actividades pueden ayudarles a complementar los significados desde las perspectivas analíticas y geométricas. Se pretende analizar cómo los estudiantes pueden lograr una compresión que vaya más allá de la mera manipulación algorítmica ya que a veces, los estudiantes son capaces de obtener la ecuación de la recta tangente a una curva pero sin evidencias de estar entendiendo lo que es la recta tangente. La investigación planteada tiene como objetivo describir trayectorias de aprendizaje de la recta tangente a una curva generadas en un experimento de enseñanza diseñado ad hoc. Desde la teoría APOS (Arnon et al., 2014), el diseño de un experimento de enseñanza debe estar articulado alrededor de una hipótesis sobre el proceso de construcción de los significados que adopta la forma de una Descomposición Genética del Concepto (DGC) recta tangente. Se trata del conjunto de construcciones mentales que un estudiante debería desarrollar para alcanzar la comprensión de un concepto matemático. Esta descomposición no tiene porqué ser única sino que es una forma en la que un estudiante puede aprender dicho concepto. Los resultados de la primera fase de la investigación que ha permitido generar una DGC del concepto de recta tangente a una curva son lo que se presentan aquí.

MARCO TEÓRICO

Dubinsky (1991) extiende la abstracción reflexiva de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La abstracción reflexiva permite la construcción de objetos cognitivos denominados acciones, procesos, objetos y esquemas. Son considerados formas de conocer junto a mecanismos constructivos (interiorización, encapsulación, tematización) mediante los cuales los estudiantes realizan las construcciones mentales. Así, una acción sería cualquier manipulación física o mental que realiza un individuo sobre elementos matemáticos. En la medida en que una acción se repite y se reflexiona sobre ella se tiende a interiorizar la acción, en un proceso que ya es concebido como algo interno al sujeto en contraposición a la acción que es considerada externa a él. El individuo puede realizar otras acciones con los procesos y actuar con una cierta tendencia a considerarlo globalmente y, por tanto, a ser consciente de esas transformaciones sobre los procesos. En este caso, decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto. Con una concepción a nivel de objeto, el individuo debe ser capaz de volver al proceso que ha originado el objeto (desencapsular) y realizar las transformaciones apropiadas. Por último, los procesos y objetos pueden organizarse de una manera estructurada para formar un esquema. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema matemático evoca un esquema o parte de él para resolverlo (Arnon et al, 2014, García, Llinares, y Sánchez-Matamoros, 2011). En este proceso de construcción de los significados, algunas veces es posible identificar obstáculos epistemológicos y cuyo origen lo podemos encontrar en la historia de las ideas matemáticas (Brousseau, 1983). La noción de obstáculo ayuda a identificar las dificultades en el proceso de aprendizaje y permite, por tanto, el diseño de estrategias que mejoren dicho proceso.

MÉTODO

Metodológicamente, para la generación de una descomposición genética de la recta tangente desde la perspectiva APOS (Arnon et al, 2014) debemos considerar:

- los resultados de las investigaciones previas,
- el análisis epistemológico del concepto,
- análisis de los libros de texto, y
- los resultados de un estudio piloto.

Una síntesis de las investigaciones previas

Algunas investigaciones destacan la influencia negativa que ejerce la idea de tangente a una circunferencia. Biza y colaboradores (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza, Nardi y Zacharides, 2009; Biza y Zacharides, 2010) identifican tres grupos de estudiantes: los que consideran que la recta tangente toca pero no corta (geométrico global); los que aplican propiedades geométricas de forma local (intermedio local), y los que consideran la recta tangente como límite de las rectas secantes (analítico local). Por otra parte, Vivier (2010) señala que los estudiantes inicialmente construyen dos concepciones geométricas: recta que toca en un punto la circunferencia (C1) y recta perpendicular al radio de la circunferencia (C2). Posteriormente construyen los significados analíticos: límite de rectas secantes en un punto de la curva (C3) y recta que pasa por el punto de tangencia con pendiente la derivada (C4). Este autor indica que parece existir una desconexión entre las concepciones geométricas y analíticas. Además, el uso del término secante parece que genera problemas en los estudiantes. Finalmente, se ha subrayado que el tránsito entre la concepción global (euclídea) a la concepción local (leibniziana) se realiza a través de la convención matemática (Canul, Dolores y Martinez-Sierra, 2011). En este sentido, los resultados de estas investigaciones aportan características de la manera en la que los estudiantes llegan a comprender el concepto de recta tangente, las transiciones necesarias y los obstáculos que deben superar.

Análisis epistemológico del concepto

La Historia de las Matemáticas (Ausejo, 1992; Collette, 1991; Rey Pastor y Babini, 1997) señala dos grandes corrientes en la forma de tratar la recta tangente. Una que arranca en Arquímedes y a través de Roberval o Torricelli llega a Newton, en la que Arquímedes utiliza la dirección instantánea del movimiento para definir la recta tangente. La segunda, que partiendo de Euclides y Apolonio, llega a Descartes y Fermat y desemboca en Leibniz, en la que Descartes presenta la recta tangente como límite de las rectas secantes. En la primera etapa hacen sus aportaciones Euclides, Arquímedes y Apolonio siendo sus concepciones radicalmente diferentes marcando las dos tendencias que se van a seguir posteriormente. Arquímedes piensa en la recta tangente como la dirección instantánea del movimiento. En cambio, Euclides y Apolonio tienen una concepción más estática, como recta de mínimo contacto con una cónica (toca pero no corta). Esta vertiente desembocaría en la concepción geométrica de autores como Descartes, Fermat, Barrow y Leibniz, como límite de rectas secantes, mientras que la caracterización iniciada por Arquímedes podemos reconocerla también en los trabajos de Torricelli, Roberval y Newton. Por otra parte, identificamos una tercera concepción vinculada a la manera que tiene Leibniz de concebir una curva como formada por infinitos segmentos. Al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente.

Análisis de libros de texto

Se ha llevado a cabo un análisis de libros de texto de Bachillerato usados en la actualidad en las asignaturas de Matemáticas I y II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II de cuatro editoriales españolas: Anaya, SM, Santillana y Bruño. El análisis se ha centrado en cuatro dimensiones:

1) el contexto general o descripción de los libros;

2) un análisis de contenido, entendido como el modo de organizar el concepto a lo largo del texto. Además de la estructura en que se presentan las ideas, se consideran los siguientes aspectos relativos al análisis conceptual: el tipo de definición que se utiliza (formal o intuitiva), el tipo de registro semiótico usado y el tipo de ejercicios y problemas resueltos y propuestos. Junto a este análisis conceptual se incluye también un análisis fenomenológico (referido a los fenómenos que dan origen a la introducción del concepto, en concreto, si se mueven en un campo específico de las matemáticas o tienen que ver con otras ciencias) y un análisis estructural (relación con otros contenidos);

3) un análisis didáctico, en el que nos preguntamos si se busca crear un objeto de conocimiento o solo dotar al alumno de una herramienta de cálculo y

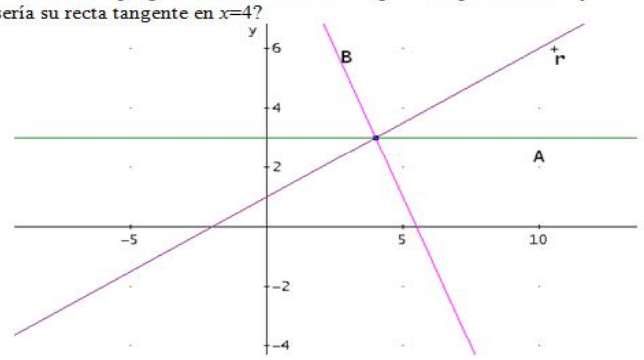
4) el significado institucional histórico, que se refiere a la concepción dominante a la que hace referencia.

Análisis de las respuestas a un cuestionario

Para identificar los elementos cognitivos que los estudiantes movilizaban en la resolución de problemas relacionados con la recta tangente, se diseñó un cuestionario formado por 8 ítems. Los ítems (Figura 1) incidían en

- aspectos gráficos: identificar la recta tangente a una curva en un punto extremo o en un punto de inflexión o en un punto anguloso o identificar la recta tangente a otra recta,
- aspectos analítico-algebraicos: hallar la recta tangente de funciones concretas en puntos determinados, y
- aspectos analítico-numéricos: obtener una aproximación del valor de una función en un punto a partir de la recta tangente a dicha función en un punto cercano

Q.5 La función r que presentamos es una recta que tiene por ecuación $y=x/2+1$, ¿Cuál sería su recta tangente en $x=4$?



Solución:	i) A	ii) B	iii) r			iv) Ninguna de las anteriores	
Grado de Seguridad en la respuesta:			0	1	2		
Justificación:							

Q.7 Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en x=1 vale 3, es decir, $f'(1)=3$, obtén de manera aproximada el valor de $f(1'027)$. Esboza un gráfico que explique tu respuesta.

Solución justificada:					
Grado de Seguridad en la respuesta:	0	1	2		

Figura 1. Ejemplos de ítems usados en el cuestionario

Para su diseño se revisaron diferentes cuestionarios de estudios previos (Tall, 1987; Tall y Vinner, 1981). Además, tuvimos en cuenta la dificultad de los estudiantes en proporcionar una definición de recta tangente al recurrir a descripciones basadas en la tangente a un círculo, en generar rectas tangentes en puntos angulosos, y en puntos de inflexión o en curvas que se confunden localmente con su tangente (Castela, 1995). Consideramos las tres concepciones identificadas en el análisis epistemológico: (i) Concepción euclídea (válida solo para las cónicas): la recta tangente toca la curva sin cortarla, la roza sin atravesarla; (ii) la Concepción cartesiana: la recta tangente como límite de las rectas secantes; y (iii) la Concepción leibniziana: la curva está formada por infinitos segmentos. Prolongando el segmento en el que se encuentra el punto considerado obtenemos la recta tangente.

El cuestionario fue contestado por 24 alumnos de Bachillerato de 1º y 2º después de la introducción del concepto. Los estudiantes de 1º habían recibido instrucción previa si bien era la primera vez que estudiaban la recta tangente. En cambio, los estudiantes de 2º ya habían estudiado este concepto en los dos cursos.

El currículo introduce el concepto de recta tangente como la recta que toca a la circunferencia en un punto desde una perspectiva geométrica en 1º de ESO, en contraposición a la cuerda que une dos puntos de ella o a la recta exterior a la circunferencia, es decir, la concepción euclídea. En Bachillerato y tras introducir el concepto de derivada se estudia la recta tangente a una función desde el punto de vista del Análisis Matemático (aquí es donde aparecen los problemas al querer extender el concepto de recta tangente a una circunferencia a cualquier curva).

RESULTADOS

Sobre el análisis de los libros de texto

El tratamiento de la noción de recta tangente realizado en los diferentes textos actuales es similar. Los textos usan la concepción cartesiana para introducir el concepto de recta tangente a un arco de cónica (Figura 2). Siguen de manera especial el texto del grupo Cero de 1982 donde se introducía el concepto de recta tangente a una curva, tanto numéricamente como gráficamente, a partir de la tasa de variación media y de las pendientes de las rectas secantes. Solo en los textos de segundo curso de la editorial SM aparece una aplicación de la recta tangente como mejor aproximación lineal a una función en un punto.

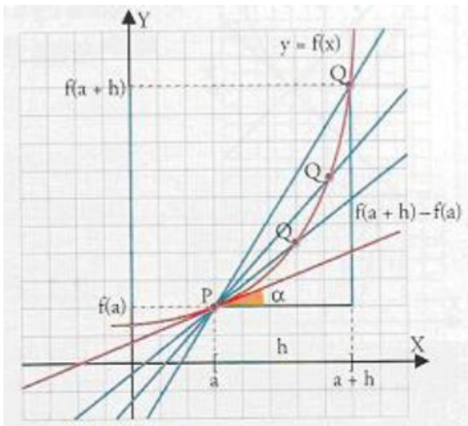


Figura 2. Modelo canónico (Ed. Bruño: Matemáticas I, pág. 51)

Globalmente los textos no proporcionan una definición clara de recta tangente a una función en un punto considerándola como límite de las secantes y no plantean la extensión a recta tangente a cualquier curva. La introducción utilizada en estos textos no permite superar esta dificultad pues plantean un modelo canónico en el que la función empleada es muy similar a un arco de cónica. Esta situación tiene raíces históricas. Esto es, se reproduce el problema al que tuvieron que enfrentarse Descartes y Fermat: la concepción euclídea únicamente es válida para las cónicas pero no para el creciente número de curvas que se iban conociendo en el siglo XVII. En este sentido, solamente la editorial SM propone funciones como $f(x)= x^3$ en la que se remarca explícitamente que la recta tangente en el punto $x=0$ puede cortar a la gráfica de la función, e incluyendo funciones como f(x)= |x| en la que no existe recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Además, como señalan Ortega y Sierra (1998, p. 98), en el proceso de aproximación de la recta tangente por las rectas secantes, "parece que [...] la Comunidad Matemática sabe hallar la tangente a cualquier curva y distingue tangente de secante. Esto no es así, ya que salvo en las cónicas, no se dispone de ningún criterio para decidir si una recta es tangente a la curva o no. Entonces, ¿cómo interpretar que la derivada en el punto x=p es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (p, f(p))? ¿no debiéramos definir, previamente, el concepto de recta tangente a la curva en dicho punto?". Sierpinska (1985) señala también las dificultades respecto a la aproximación de las rectas secantes a la tangente, pues cuando los estudiantes llegan al punto de tangencia, encuentran que no hay más que un solo punto, pero por un punto pueden pasar muchas rectas. Siguiendo a Vivier (2010), no se puede usar un concepto, como el de recta tangente, que no ha sido previamente construido; se trabaja con la noción de tangente pero dicha noción aún no tiene su definición matemática.

Es por ello, que en nuestra propuesta de descomposición genética introducimos la recta tangente a partir de la concepción leibniziana (Elemento E1, tabla 1), definición, por otro lado, utilizada ya por el marqués de l'Hôpital, para posteriormente relacionar dicha concepción con la cartesiana, pues parece obvio que los estudiantes tienen muchas dificultades para entender el concepto de recta tangente a partir de la concepción cartesiana. Cuando se caracteriza la recta tangente como aquella recta hacia la que tienden las rectas secantes (Elemento E2, tabla 1), la recta límite es ya un objeto conocido. Ahora es posible interpretar geométricamente la derivada como la pendiente de la recta tangente pues esta ya ha sido definida y estudiada con anterioridad (Elemento E1RE2, E03R04, tabla 1). Llegados a este punto, introducimos la ecuación de la recta tangente a una función en un punto (Elemento E3, tabla 1).

Sobre el cuestionario

Una mayoría de estudiantes reflejan una concepción euclídea de la recta tangente que supuso un obstáculo para construir la concepción cartesiana. En este sentido, si bien son capaces de calcular la recta tangente a una curva en un punto de forma algorítmica, tienen dificultades para identificar la recta tangente a una curva en un punto de inflexión, en un punto anguloso o la recta tangente a una recta, además de las dificultades en usar la idea de recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en un punto en un contexto de resolución de problemas.

Generación de una DGC Recta Tangente

Como consecuencia del análisis epistemológico, el análisis de los libros de texto y los resultados del cuestionario piloto, generamos una descomposición genética (Tabla 1) entendida como una trayectoria hipotética de aprendizaje como hipótesis previa para el diseño de un experimento de enseñanza. La propuesta de descomposición genética se inicia con el concepto de recta tangente a partir de la concepción leibniziana (recta tangente como mejor aproximación lineal a la curva) para posteriormente estudiar la concepción cartesiana (recta tangente como límite de recta secantes) estableciendo la relación entre ambas como un medio para introducir la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, en vez de introducir directamente la recta tangente a partir de la concepción cartesiana que es la aproximación habitual en los libros de texto.

Tabla 1. Descomposición genética de recta tangente

Elementos matemáticos y relaciones		Pre-requisitos
E0		
	E01	Reconocimiento como acción de puntos de una recta y de una función a partir de su abscisa a nivel gráfico y analítico
	E02	Conocer como acción el concepto de pendiente de una recta a partir de dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) (Cálculo): $$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
	E03	Conocer como proceso el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta
	E04	Conocer como proceso la idea de recta (forma analítica): Identificar y hallar puntos de una recta
	E05	Conocer como objeto la idea de recta: Ecuación punto-pendiente de una recta: $$y\text{-}y_0 = m(x\text{-}x_0)$$
	E06	Conocer como proceso el límite como tendencia
	E07	Conocer como proceso el concepto de derivada de una función en un punto: $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
	E08	Conocer como objeto el concepto función derivada
E1		Linealidad local de una función en un punto
	E11	Acción de aplicar varios zoom sobre una función en un determinado punto
	E12	Interiorización de la acción E11 en un proceso
	E13	El objeto de concebir, localmente, la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente (mejor aproximación lineal)
E2		Sucesión de rectas secantes
	E21	Acción de crear rectas secantes manteniendo un punto fijo y acercando otro punto al fijo
	E22	Interiorización de la acción de crear rectas secantes (E21) en un proceso
	E23	Encapsulación como objeto de la idea de recta secante
E1RE2		Conocer como proceso la identificación de la recta tangente (E1) con la tendencia limite de E2
	E03RE04	Conocer como proceso la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto tangencia (pendiente de la recta tangente): $$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
E3		Recta tangente como objeto: $y\text{-}y_0 = f'(x_0)(x\text{-}x_0)$
	E31	Acción de hallar la ecuación de la recta tangente
	E32	Interiorizar la acción de determinar la ecuación de la recta tangente
	E33	Encapsular como objeto la idea de recta tangente, relación modo gráfico y analítico (ecuación)
E4		Tematización del esquema de Recta tangente

E_i = Elementos matemáticos; E_i R E_j = Relaciones entre elementos

CONCLUSIONES

La descomposición genética de la recta tangente se apoya en unos pre-requisitos y considera tres componentes y su relación como medio para construir la tematización del concepto: la linealidad local de una función, sucesión de rectas tangentes, y recta tangente. Las relaciones entre los modos de representación analítica y gráfica son los medios conjeturados para que los estudiantes interioricen los procesos para generar formas de conocer la recta tangente como objeto. El uso de la recta tangente (reconocimiento gráfico y cálculo de la ecuación) en condiciones especiales como puntos angulosos y en curvas en las que se confundan parcialmente con la gráfica de la función, permite estar en condiciones de favorecer la tematización del esquema de recta tangente. Esta descomposición genética permite fundamentar la toma de decisiones en el diseño de experimentos de enseñanza que nos permitan describir diferentes trayectorias de aprendizaje. Además la descomposición genética que hemos detallado puede ser de utilidad para diseñar laboratorios virtuales que permitan la experimentación. En este contexto, programas como Geogebra pueden implementar herramientas tales como el zoom o crear una sucesión de rectas tangentes que ayudarían a realizar acciones y facilitar que los alumnos construyan los elementos cognitivos del esquema de recta tangente.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education.* New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Ausejo, E. (1992). Las *matemáticas en el siglo XVII* (revista nº 17 en Historia de la Ciencia y de la Técnica). Akal. Torrejón de Ardoz.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.*

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics, 29(3),* 31-36.

Biza, I y Zacharides, T. (2010). First year Mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 29,* 218-229.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2)*, 165-198.

Canul, E., Dolores. C. y Martínez-Sierra (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 14(2)*, 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 7-47.

Collette, J. (1991). *Historia de las matemáticas* (2 vol.). Madrid: Siglo XXI.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathemathical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterized thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1023-1045.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32*, 87-115.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática* (2 vol.). Barcelona: Gedisa.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 6(1).

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. En J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME international conference* (Vol. 3, pp. 69-75). Montreal, Canada: PME.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12, 151-169.*

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignament secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 15, 173-199.

CONCEPCIONES DE PROFESORES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR SOBRE EL USO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Conceptions of high school teachers about uses of the history of mathematics

Rodríguez-Vásquez, F., Romero-Valencia, J. y Henao-Saldarriaga, S.

Universidad Autónoma de Guerrero, México

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados de una investigación cuyo objeto fue analizar concepciones de profesores de matemáticas de nivel medio superior sobre la inclusión de la historia de la matemática en su práctica docente. Se usó un método mixto para la recogida y análisis de datos. Para detectar concepciones de los profesores, se elaboraron un cuestionario y una entrevista. Los resultados de su aplicación indican que la mayoría de los profesores del estudio no están habituados a considerar la historia de la matemática en su enseñanza; además sus concepciones sobre incluir este recurso están condicionadas por su visión del sistema educativo.

Palabras clave: *Concepciones, historia de la matemática, enseñanza, bachillerato*

Abstract

In this paper, we present the results of a research whose purpose was to analyze conceptions of high school mathematics teachers about including the history of mathematics in their teaching. We used a mixed method for the collection and analysis of data. To identify some of the teachers' conceptions, we created a questionnaire and an interview. Results show that most teachers in the study are not used to consider the history of mathematics in their teaching; moreover, their conceptions about including this resource are mediated by their view of the educational system.

Keywords: *Conceptions, history of mathematics, teaching, high school*

INTRODUCCIÓN

Investigadores en el campo de la Educación Matemática han estudiado las concepciones de los docentes de matemáticas frente a sus prácticas educativas, bajo el supuesto que todo modelo de enseñanza de la matemática implica una concepción sobre la disciplina, su aprendizaje y su enseñanza (Gil y Rico, 2003; Flores, 1998; Thompson, 1992). Para los propósitos de este trabajo se asume que las *concepciones* son el conjunto de posiciones de un docente sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Contreras, 1998) en conjunción con lo dicho en Thompson (1992), quien asemeja las concepciones a estructuras mentales generales, que abarcan creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares.

Particularmente un análisis histórico y epistemológico de los conceptos matemáticos contribuye en dos niveles, uno asociado al aprendizaje de los conceptos, y otro a la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas (Anacona, 2003). Respecto al primer nivel, Farmaki y Paschos (2007) señalan que la historia puede ser un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje y el estudio de la matemática, ayudando a mantener el interés y el entusiasmo de los alumnos en la asignatura. Asimismo un enfoque de la enseñanza basado en elementos históricos muestra una matemática más humanas y menos atemorizante, puesto que permite hacer consientes a los estudiantes que el mismo concepto matemático con el que ellos tiene dificultad actualmente, también lo fue en una época para los matemáticos (Bakker y Gravemeijer, 2006).

Rodríguez-Vásquez, F., Romero-Valencia, J. y Henao-Saldarriaga, S. (2015). Concepciones de profesores de nivel medio superior sobre el uso de la historia de la matemática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 469-475). Alicante: SEIEM.

En relación con el segundo nivel, un estudio histórico y epistemológico permite al docente evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos, es decir posibilita la determinación de obstáculos epistemológicos que eventualmente se pueden presentar en el aprendizaje de dichos conceptos (Jankvist, 2009).

Tzanakis et al. (2002) señalan que un docente que indague la historia de la matemática es consciente de que ésta no es un producto ya acabado y perfecto, por el contrario es el resultado de una actividad humana permeada por distintas disciplinas y momentos históricos, sociales y culturales específicos. Dicha concepción indudablemente tendrá implicaciones didácticas, asociadas con la importancia de fomentar en el aula procesos matemáticos como la modelación y la resolución de problemas, los cuales son una fuente para creación de conceptos y estructuras matemáticas como lo muestra la historia, en otras palabras se fomentará la actividad matemática en el aula. Por el contrario, un docente que no tenga conocimiento de la historia y su concepción está vinculada con una postura formalista, hará énfasis en los procesos lógicos de demostración y en la forma rigurosa de presentación de un concepto (Anacona, 2003), lo cual genera en los estudiantes una mala disposición al momento de aprender matemáticas por no hallar relación con su entorno social.

Consideramos necesario investigar qué concepciones tienen los profesores de matemáticas de bachillerato sobre la inclusión de la historia de la matemática en su práctica docente, dado que el conocimiento por parte de los docentes sobre la génesis y evolución de los conceptos influye en las prácticas de enseñanza y en las concepciones sobre la matemática.

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca dentro de un estudio exploratorio con un enfoque mixto que combina métodos tanto cualitativos como cuantitativos. De acuerdo a Cohen & Lawrence (2002) un enfoque mixto permite el análisis y la interpretación de los datos obtenidos en la investigación, posibilitando juicios sólidos sobre la base de los datos. En esta dirección, Creswell (2009) (utilizado por Castro y Godino, 2011) señala que los métodos mixtos se fundamentan en una fase relativa a una encuesta, con el fin de generalizar los resultados a una determinada población, y otras fase centrada en las entrevistas con el propósito de profundizar en los puntos de vista de los participantes. De acuerdo con esta perspectiva, el estudio se fundamenta en un primer momento en el análisis cuantitativo y cualitativo de los datos obtenidos de un cuestionario (instrumento de la investigación), y en un segundo momento en los análisis de las entrevistas a los profesores participantes.

Para el análisis sobre las concepciones, primero se revisaron las respuestas al cuestionario y posteriormente se examinaron las entrevistas con el propósito de identificar algunas estructuras mentales generales, es decir, las concepciones, que tiene los docentes sobre la inclusión de la historia de la matemática en las prácticas de enseñanza y aprendizaje. La adopción del enfoque mixto permitió explorar las concepciones de los profesores frente a la incorporación de la historia de las matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Participantes, diseño e instrumentos

El estudio se llevó a cabo con 11 profesores de matemáticas de bachillerato del estado de Guerrero en México. Todos los profesores participantes se encontraban en servicio. Se diseñó un cuestionario conformado por 8 ítems que tenían diferentes opciones de respuesta (Tabla 1). Particularmente los ítems 1 y 2 tuvieron como objetivo analizar diferentes concepciones sobre la historia de las matemáticas y los usos establecidos por los docentes en sus prácticas. En el ítem 3 se buscaba indagar sobre los obstáculos para incorporar la historia de las matemáticas en la práctica docente. En los ítems 4 y 5 se exploró la importancia que le otorgan los profesores a la historia de las matemáticas en sus clases y en su formación profesional. Finalmente las preguntas 6, 7 y 8 se orientan hacia el estudio de los intereses de los docentes por incorporar materiales históricos en las clases de matemáticas. La entrevista fue de tipo estructurada y consistió de 28 preguntas a los profesores, algunas de ellas exploradas también en el cuestionario, con el propósito de ampliar y discutir las respuestas planteadas por los docentes.

Las preguntas planteadas en el guión de los dos instrumentos principales (cuestionario y entrevista) posibilitaron la identificación de las diferentes concepciones de los docentes asociadas a la incorporación de la historia de las matemáticas en las prácticas de enseñanza.

ANÁLISIS

El análisis se dividirá en dos partes, en la primera se muestran los resultados del cuestionario y algunas tendencias de las concepciones de los profesores, y en la segunda se muestra una transcripción de la entrevista que amplía y complementa lo discutido en la primera parte.

De acuerdo a los resultados presentados en la Tabla 1, respecto del ítem 1 se puede afirmar que la mayoría de los profesores (63.6%) admiten usar la historia de las matemáticas como un recurso didáctico para su práctica docente. Esto se sustenta en el hecho de que la historia de la matemática se constituye en un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje mediante los datos anecdóticos de los matemáticos. Al respecto, Farmaki y Paschos (2007) señalan que aspectos históricos de las matemáticas posibilitan el interés y el entusiasmo de los estudiantes en la clase y la asignatura. El 27.3% de los docentes argumentan que sí utilizan la historia en las clases presentando explícitamente la génesis y evolución de un concepto matemático. Sólo un profesor (9.1%) menciona que no hace uso de aspectos históricos dentro de la práctica docente. A pesar de existir la opción de explicitar otro uso de la historia de las matemáticas los docentes no presentaron uno nuevo a los ya establecidos en la pregunta. Se observa además, que los profesores desconocen la historia como una herramienta para identificar obstáculos en la comprensión matemática.

En el ítem 2, se observa que el 90.9% de profesores utilizan la historia en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, se hace evidente que no siempre se busca la historia como recurso. de ahí, la necesidad de estudiar las concepciones de los docentes frente al uso sostenido de la historia como herramienta en los procesos de aprendizaje y enseñanza. Una manera de promover esto es entender la historia como herramienta cognitiva que permite identificar obstáculos epistemológicos que los estudiantes pueden experimentar al momento de abordar un concepto matemático (Jankvist, 2009). Asimismo, los profesores deben aprender que la génesis de un concepto matemático puede constituirse en una herramienta de construcción de situaciones de enseñanza (Brousseau, 1997).

Del ítem 3, se observa que un obstáculo predominante para incorporar la historia en las prácticas docentes es la cobertura del programa establecido por la escuela y el currículo nacional. Este obstáculo es generado principalmente por el afán de cumplir con todos los contenidos pre establecidos al inicio de cada año. A pesar, de que se cumple con los temas planeados para un determinado semestre se deja de lado el nivel de profundidad con que se estudian los conceptos matemáticos, ocasionando que los estudiantes olviden pronto lo visto en clase. Algunos elementos de la historia permitirían ahondar en profundidad los conceptos matemáticos sin caer en la confusión de un curso histórico de las matemáticas. No se trata de presentar las técnicas y los algoritmos tal cual surgieron en la historia, si no de utilizar elementos teóricos revelados por la historia con el objeto de una mayor comprensión por parte de los estudiantes.

Con respecto al obstáculo vinculado con la actitud de los profesores, correspondiente al 18.18%, se encontró que una de las razones por la que no utilizaban la historia se vinculaba con lo tedioso que era leer textos históricos en latín y otros que sin estar en latín eran muy extensos.

En el ítem 4 se pone de manifiesto que la mayoría de los profesores (63.6%) otorgan importancia a la historia de las matemáticas en los cursos que imparten. Sin embargo, el uso que otorgan a la historia queda resumido en presentar aspectos anecdóticos de los matemáticos a fin de motivar a los estudiantes en las clases. En consecuencia, los diferentes usos de la historia en la práctica docente tales como: estudiar las rutas de aprendizaje de los estudiantes, determinación de obstáculos epistemológicos y diseño de actividades no son tomados en cuenta en el desarrollo de una clase.

Tabla 1. Ítems del cuestionario

ITEM	RESPUESTAS (OPCIONES)	NÚMERO DE RESPUESTAS AL ITEM-PORCENTAJE
1. En su práctica docente, la historia de las matemáticas figura como:	Un recurso didáctico	7 - (63.6%)
	Un fin en sí mismo	3 - (27.3%)
	No figura	1 - (9.1%)
	Otra	0 - (0%)
2. ¿Recurre a la historia de las matemáticas, como parte del proceso de enseñanza aprendizaje, en las asignaturas que actualmente imparte?	Siempre	3 - (27.3%)
	Nunca	1 - (9.1%)
	A veces	7 - (63.6%)
	Otra	0 - (0%)
3. ¿Qué obstáculos podrían presentarse o se presentan al introducir la historia de las matemáticas en su práctica docente?	Actitud	2 - (18.18%)
	Cobertura del programa	9 - (81.82%)
	Confusión de curso	0 - (0%)
	Otra	0 - (0%)
4. ¿Considera la historia de la matemática como un área de conocimiento relevante o formal respecto la educación que se debe impartir en los cursos de matemáticas?	Siempre	7 - (63.6%)
	Casi nunca	3 - (27.3%)
	Nunca	1 - (9.1%)
5. ¿Debería incluirse la historia de la matemática en el currículo de la formación profesional de los profesores de matemáticas?	Sí	10 - (90.9%)
	No	1 - (9.1%)
	Depende	0 - (0%)
6. ¿Le interesaría algún material o recurso didáctico para utilizar la historia de la matemática en su práctica docente?	Sí	9 - (81.82%)
	No	2 - (18.18%)
	Depende	0 - (0%)
7. ¿Qué tipo de material le interesaría?	Libros	7 - (63.3%)
	Manuales de orientación	5 - (45.5%)
	Videos	7 - (63.3%)
	Audios	3 - (27.3%)
	Otros	1 - (9.1%)
8. ¿Qué características o aspectos de la historia de la matemática le gustaría que incluyera el material?	Datos anecdóticos	5 - (45.5%)
	Problemas de antaño	8 - (72.7%)
	Prácticas experimentales	7 - (63.6%)
	Otros	2 - (18.18%)

Del ítem 5 se observa que la mayoría de los docentes (90.9%) admite la importancia de incluir en su formación a la historia de la matemática. Aunque ellos hacen uso limitado de la historia como herramienta de motivación, reconocen que existen otros usos de ésta que aportan a su formación profesional pero que desconocen. Algunos profesores asocian el hecho de que el conocimiento de aspectos epistemológicos de un concepto posibilita una adecuada comprensión de éste (Jankvist, Mosvold, Fauskanger y Jakobsen, 2012). Ya que se reconoce que algunos obstáculos presentados en la constitución de los conceptos permite el diseño de situaciones que mejoran la comprensión por parte de los estudiantes, cabe incluir en la formación de los docentes aspectos históricos y epistemológicos de las matemáticas, aprovechables para pensar la práctica docente.

Del ítem 6, se observa que un alto porcentaje de los docentes (81.8%) están interesados en utilizar un material o un recurso didáctico que se vincule con la historia de la matemática. Lo anterior, se sustenta en la idea de que la historia es una herramienta que motiva las clases, de aquí el interés de los docentes por encontrar materiales vinculados con la historia que posibiliten la realización de una clase diferente a la tradicional en la que el estudiante pueda sentirse atraído.

Del ítem 7 se observa que los profesores prefieren los libros (63.3%) y los videos (63.3%) que incorporan aspectos históricos de la matemática. De acuerdo a este ítem, se deduce que la historia aparece como herramienta que permite despertar el interés y el entusiasmo en los estudiantes, dejando de lado otros usos que pueden aportar no solo a las prácticas si no a la formación como docentes. 5 profesores señalan el interés por manuales que orienten el proceso de cómo utilizar los factores históricos y epistemológicos de las matemáticas en sus prácticas. En consecuencia es necesario realizar una formación que cualifique las prácticas docentes y en las que se retomen estudios sobre los aportes de la historia al campo de la Matemática Educativa.

Del ítem 8 se observa que los docentes tienden a escoger material que involucre la resolución de problemas de antaño, es decir problemas clásicos en la historia de las matemáticas, con el propósito de trabajar tanto procesos matemáticos como la motivación durante la clase. Igualmente los datos anecdóticos surgen como un factor que permite a los estudiantes sentirse atraídos por la asignatura.

En esta segunda parte se muestra una trascripción de entrevista. (I = Investigador; D = Docente; HM = historia de la matemática).

I: Cuéntenos cómo utiliza la HM en sus clases.

D: … utilizo los antecedentes históricos que voy a abordar con los muchachos, de alguna manera, para que el muchacho no vea las matemáticas como un coco (monstruo), sino más bien que lo pudo realizar un ser humano, que lo hizo no precisamente en un salón de clase, sino que lo hizo precisamente resolviendo un problema práctico, entonces de esa manera es como yo trato de abordar la HM.

I: ¿Cómo se podría usar la HM en el aula?

D: … a través de una historia con personajes conocidos de los jóvenes y luego relacionarlos con los creadores del conocimiento, citar a Pitágoras a través de un video que le llame la atención a los estudiantes, una película…

I: ¿Qué de la HM debería enseñarse?

D: … los problemas a los que se enfrentó el matemático combinado con una anécdota y una historia de un personaje para que sean más atractiva las matemáticas.

I: ¿Recibió usted una educación formal sobre HM?

D: No, recibí una educación formal de matemática pero no de historia…

I: ¿Para qué cree que sirve la HM?

D: … para conocer todos los personajes que han desarrollado el conocimiento de las matemáticas,… para saber cuáles fueron los problemas reales que se enfrentaron y que originaron la idea de desarrollar un conocimiento matemático, pensamos que el conocimiento matemático se desarrolla en un aula de clase aplicando didáctica o metodología de las matemáticas,…, seguramente ni Newton ni Descartes crearon matemáticas en esas condiciones, más bien fueron problemas que plantearon el entorno y el medio y que hubo necesidad de resolverlo.

E: ¿Qué obstáculos epistemológicos podrían presentarse o se presenta al intentar introducir la HM en la enseñanza de los cursos de nivel medio superior?

D: El obstáculo es los usos y costumbres de cómo se ha enseñado la matemática, a lo mejor el muchacho estaría muy tendencioso a confundirse, es matemática o es historia, …, pero no es un obstáculo que no se pueda superar… una vez que al muchacho se le dé el antecedente histórico del tema que se va a estudiar, en los diferentes contextos, ya sea geométrico o ya sea algebraico o aritmético, el muchacho ya sabrá que Pitágoras no es el apodo del triángulo, y que Pitágoras fue un personaje que vivió en Tales de Mileto en los años tal, y …, pudo a través de la geometría demostrar que el cuadrado de la hipotenusa es la suma del cuadrado de los dos catetos...

I: ¿Cree usted que habría algún beneficio en los alumnos, consecuencia de introducir la HM en clase?

D: Sí… el alumno vería a la matemática no desde el punto de vista de un problema, tendría oportunidad de asomarse desde un punto de vista de cómo se generó el conocimiento de la matemática…

I: ¿Entonces, cuál es la reacción que tiene los estudiantes hacia la historia?

D: Es fabulosa, o sea, contribuye mucho a interesarlos en las matemáticas.

I: ¿Sí les interesa?

D: Sí, sí.

I: ¿Considera la HM como un área de conocimiento relevante o formal respecto a la educación que se debe impartir? ¿Por qué?

P: Yo sí la considero… lo voy a decir por mi experiencia… es importante que a través de la historia se conecten las líneas directrices, porque hasta en los programas educativos… las sectorizan.

I: ¿Considera que la HM debe incluirse en un curso de matemáticas?

P: De momento no,…, los modelos educativos aún no lo han considerado, pero sí que se introdujera en los programas de matemáticas... sí, así como el estudiante que va a estudiar la pintura, la escultura, lo primero que lleva es historia del arte.

Se pone de manifiesto que la historia aparece en las prácticas educativas como una herramienta de motivación para las clases de matemáticas, es decir los docentes incorporan la historia de las matemáticas con el propósito de humanizarla y a su vez acercar al estudiante a unas matemáticas menos formales y más aproximadas a su cotidianidad.

CONCLUSIONES

Las concepciones que tienen los profesores respecto del uso de la historia en su práctica docente son en gran parte que la historia de la matemática favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje cuando la usan como un factor motivacional, a este respecto se observa que no se explotan todas las formas en las cuales se podría usar este recurso entre ellas, la determinación de obstáculos epistemológicos, el diseño de materiales didácticos, y la reformulación de los currículos. Otra concepción que manifiestan los profesores, se asocia con la idea de incluir en los cursos de formación docente la historia de las matemáticas. Esto se refleja por la necesidad de materiales que contengan problemas de antaño y de prácticas experimentales, aunque también se observa su necesidad sobre el conocimiento de las cuestiones anecdóticas.

Una de las dificultades que se observa respecto a la inclusión de la historia de la matemática en el aula es que muchas veces no se recurre a ella por el tiempo que se destina de cobertura a la asignatura y a la actitud de los mismos estudiantes. Esto en particular lleva a reflexionar acerca de que las concepciones de los profesores al respecto de incluir este recurso están mediadas por la comprensión e interpretación que se realiza de las condiciones del sistema educativo.

Consideramos que la línea de investigación en Historia de la Matemática en la Educación Matemática debe ser tal que promueva su incidencia en las aulas, mostrando una articulación factible entre la investigación y la práctica educativa.

Referencias

Anacona, M. (2003). Historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 149-168.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99-116). Ciudad Real: SEIEM.

Cohen, L. y Lawrence, M. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

Farmaki, V. y Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 83-106.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada: Comares.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-47.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 235-261.

Jankvist, U. T., Mosvold, R., Fauskanger, J. y Jakobsen, A. (2012). *Mathematical knowledge for teaching in relation to history in mathematics education*. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education. Seúl, Corea del Sur.

Thompson A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Nueva York: Macmillan.

Tzanakis, C., Arcavi, A. y Siu, M.-K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

CULTURA DE RACIONALIDAD Y PROCESOS DE ENCULTURACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Culture of Rationality and Processes of Enculturation in Secondary School

Rodríguez-Rubio, S. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.

Resumen

En el escrito se aportan evidencias empíricas de que las prácticas matemáticas que se desarrollan en el salón de clases están orientadas por una cultura de racionalidad (específica de cada aula), determinada por los patrones de justificación de los enunciados matemáticos que ahí surgen y las trayectorias de participación de los actores de clase. Adicionalmente, se muestra empíricamente que si bien esa cultura preferentemente la promueve el profesor, los alumnos aprenden de ella, la interiorizan y, a su vez, la ponen en juego, es decir, participan en un proceso de 'enculturación'. En el estudio, de corte etnográfico y etnológico, se analiza un caso, el de un salón de clases de nivel secundaria y para el análisis de los argumentos se recurre al modelo de Toulmin.

Palabras clave: *cultura de racionalidad, procesos de enculturación, argumentos, etnografía*

Abstract

The paper provides empirical evidence to support the notion that mathematics practices developed in the classroom are guided by a culture of rationality (specific to each classroom), determined by the justification patterns of the mathematics statements in that setting and the participation trajectories of class agents. Moreover, the paper empirically shows that even if the teacher preferentially promotes said culture, the students learn from it, they interiorize it and, in turn, put it into play. That is to say, the students take part in a process of 'enculturation'. The study, of an ethnographic and ethnological type, analyzes one case –that of a secondary school classroom and the Toulmin's model is used for the analysis of the arguments.

Keywords: *culture of rationality, processes of enculturation, arguments, ethnography*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hersh sugiere (1993, p. 395) que "la noción de prueba rigurosa no está cavada en mármol", mientras que Thom apunta que "no existe una definición rigurosa del rigor" (1980, p. 122). Atiyah y colaboradores (1994, p. 178) adelantan una posible explicación de este fenómeno: "quizás ahora se tienen criterios severos de demostración a los cuales aspirar... pero en las primeras fases de nuevos desarrollos se debe estar preparado para actuar con un estilo más (abierto y menos riguroso)". Cierto es que no existe un prontuario que marque los pasos a seguir para conseguir una prueba rigurosa en matemáticas; que no hay un procedimiento explícito y formal que norme las actividades de demostración y certificación de pruebas que practican los matemáticos. Con todo, la diversa actividad matemática que se ha desarrollado a lo largo de la historia y que a la fecha se sigue practicando, aporta evidencias de que sí existen unas prácticas matemáticas de justificación paradigmáticas, apegadas a normas y hábitos a los cuales se ciñen las comunidades concretas de matemáticos. Esas evidencias proporcionan indicios de que existe una Cultura de Racionalidad que orienta las decisiones y actividades que los expertos llevan a cabo relacionadas con la demostración matemática y la prueba. En el presente escrito se aportan evidencias empíricas de que así como la práctica del profesional de las matemáticas está orientada por una cultura de racionalidad específica (relativa a cada comunidad), las prácticas matemáticas que se desarrollan en el salón de clases

Rodríguez-Rubio, S. y Rigo-Lemini, M. (2015). Cultura de racionalidad y procesos de enculturación en la Escuela Secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 477-484). Alicante: SEIEM.

también están guiadas por una cultura de racionalidad (acotada por condiciones generales pedagógicas y didácticas pero que también son específicas de cada aula); adicionalmente, se muestra empíricamente que si bien esa cultura preferentemente la promueve el profesor, los alumnos aprenden de ella, la interiorizan y a su vez, la ponen en juego, es decir, participan en un proceso de 'enculturación' de esa cultura de racionalidad que sucede conforme a una dinámica que retroalimenta y consolida las prácticas impulsadas por el propio docente.

ANTECEDENTES

La noción de racionalidad, con un sentido distinto al que se introduce en este trabajo, ha sido empleada en diversas investigaciones en educación matemática.

Por un lado, están los trabajos que parten del modelo de Habermas, basado en la racionalidad epistémica, teleológica y comunicativa. Dentro de ellos están los que Boero ha realizado (e.g., en el 2006) centrado en los procesos de conjeturación y demostración en la educación matemática, o los que ha desarrollado en colaboración (como el de Morselli y Boero, 2009), en donde se sugiere la aplicación del modelo de Habermas para contribuir al debate sobre marcos teóricos adecuados que permitan considerar la compleja naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y para examinar los procesos de "enculturación" científica, desde una perspectiva de las razones matemáticas. En otras contribuciones de Boero y colaboradores (Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010), ellos proponen integrar los modelos de Toulmin y de Habermas como herramientas de análisis para analizar el comportamiento de los estudiantes y para inspirar prácticas en el aula que permitan desarrollar conciencia en los estudiantes sobre la naturaleza de la prueba.

Otros trabajos han tomado como punto de partida la idea de racionalidad práctica definida por Herbst y Chazan. Los autores consideran que la racionalidad es a menudo implícita y caracteriza los mecanismos regulatorios de la práctica de comunidades adaptadas al trabajo que se espera que ellos hagan (Herbst y Chazan, 2003); afirman que la racionalidad práctica es una forma de dar cuenta de las prácticas existentes y estables en la enseñanza de las matemáticas. Herbst y Chazan (2011) también señalan que si la enseñanza de las matemáticas puede ser concebida como una práctica, debiera descansar sobre la base de una racionalidad práctica común, sobre la cual los profesionales individuales pueden construir su propia enseñanza de las matemáticas contra el telón de fondo de sus compromisos personales y las demandas de los contextos institucionales donde trabajan.

MARCO INTERPRETATIVO

Los Esquemas Epistémicos. Su definición

Los mecanismos a los que una persona o una comunidad recurre habitualmente para sustentar los hechos de las matemáticas Rigo (2013a, 2013b) los denomina 'esquemas epistémicos'. Ella identifica esquemas epistémicos de tipo matemático (e.g., las instanciaciones de reglas) así como esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas, como el esquema operatorio, mediante el cual se otorga validez a una regla acudiendo a la autoridad de las matemáticas.

Interpretación funcional de los argumentos. El modelo de Toulmin

De acuerdo con el modelo de Toulmin (1974), un argumento está conformado por tres elementos: Claim (C, conclusión cuyos méritos se están tratando de establecer), Data (D, hechos a los que se apela para darle fundamento a la conclusión) y Warrant (W, mediante los cuales se da cuenta de las reglas, principios o licencias de inferencia que autorizan pasar de D a C). Otros tres elementos pueden ser considerados en el modelo de Toulmin: Backing (B, o respaldo), Cualificador modal y Reserva, sin embargo, en la investigación que aquí se reporta, sólo se retomó al primero. El Backing apoya al Warrant (W) al ofrecer su cimiento teórico, práctico o experimental.

En investigaciones sobre educación matemática el modelo de Toulmin ha sido adaptado y utilizado para varios fines, por ejemplo, Krummheuer (1995) lo emplea para analizar la argumentación en una clase de matemáticas de nivel elemental y para documentar cómo el aprendizaje progresa en un aula; Yackel (2002) lo usa para examinar el papel del profesor en la argumentación colectiva; Martinez y Pedemonte (2014) para identificar y analizar el proceso de argumentación que apoya la producción de conjeturas y pruebas.

La Cultura de Racionalidad. Una caracterización

Los componentes de la Cultura de Racionalidad son, entre otros, los siguientes:

CR.i. *Normas de sustentación*. El bagaje de argumentos que una comunidad habitualmente activa para sustentar afirmaciones o hechos de las matemáticas. Se trata de las prácticas recurrentes y más aceptadas de argumentación o sustentación que se dan en una comunidad. Los argumentos están integrados por los esquemas epistémicos (tanto matemáticos como extra-matemáticos) que aparecen explícitamente en las evidencias (D).

CR.ii. *Trayectorias de participación y reparto de responsabilidades*. Se refiere a quién da los C o los D y a quién le corresponde sancionar esas participaciones. Las trayectorias de participación están integradas por una sucesión de intervenciones de los actores de clase en los procesos de argumentación.

TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

La investigación que aquí se reporta es de tipo interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994) y está basada en un estudio exploratorio de caso (Stake, 1999). Para el análisis se asume un enfoque etnográfico (Berteley, 2000) mediante el cual se trata de determinar la posible racionalidad de la clase estudiada a través de la observación empírica directa y de la recuperación de las voces, acciones y significados de los actores; asimismo, se adopta un enfoque etnológico (Berteley, 2000) —acudiendo a un estudio de corte más longitudinal— conforme al cual se buscan identificar hábitos y patrones relacionados con los mecanismos de justificación de los enunciados matemáticos que surgen en clase y con las trayectorias de participación de dichos agentes, componentes que en el marco de esta investigación integran la ‘cultura de racionalidad’. Para determinar el caso, se hicieron observaciones sin intervención, a tres profesores de una escuela que cuenta con prestigio académico en una misma zona geográfica. Se eligió a la Maestra Noemí, con dos años de servicio, porque era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática; cuando fue observada, ella impartía la clase de matemáticas a un grupo de primer grado de educación secundaria integrado por 42 alumnos. En un primer momento se le observó durante 5 sesiones; en uno segundo, se observaron 6 sesiones (que se analizan en este documento) y en un tercer momento se le volvió a observar durante otras 5 sesiones. Las clases fueron videograbadas y transcritas. Se utiliza el modelo de Toulmin (1974) para analizar y comparar las estructuras argumentativas de los fragmentos de la clase.

LA CULTURA DE RACIONALIDAD DE UNA CLASE ORDINARIA DE MATEMÁTICAS. ESTUDIO EMPÍRICO

Para el análisis que aquí se expone se examinó una secuencia didáctica que versa sobre reparto proporcional. La secuencia didáctica, impartida en seis módulos de 50 minutos cada uno, se fragmentó en episodios, en cada uno de los cuales se propusieron uno o varios argumentos para dar sustento a una afirmación. Para este reporte se analizaron 33 episodios y 68 argumentos. Los datos se analizan de acuerdo a tres niveles de análisis.

Primer nivel de reconstrucción. Los mecanismos de sustentación promovidos en la clase por la maestra Noemí

En el aula de matemáticas, lo que significa argumentar o sustentar las afirmaciones matemáticas, esto es, lo que significa participar en las prácticas de racionalidad (y educarse en esa racionalidad y aprender a partir de ella), se crea y recrea en las actividades escolares diarias (Cf. Berteley, 2000;

Stake, 1999). Es por esto que, en lo que sigue, se ilustra lo que frecuentemente sucede en el aula de la maestra que participó en el estudio, mediante el análisis de un fragmento de su clase. Se trata de un referente empírico integrado por dos argumentos que forman parte de un mismo episodio, el cual esclarece bien las formas de sustentación habituales en la clase observada. La transcripción de los argumentos aparece en la primera columna de la Tabla 1, y su interpretación funcional, con base en el modelo de Toulmin (1974), se incluye en la segunda.

Tabla 1. Registro del primer fragmento y análisis de los argumentos con el modelo de Toulmin

<table>
<tr>
<td>43 P: Si se requieren preparar 12 litros de agua de limón, ¿cuántos limones y cuántas cucharadas de azúcar necesitamos?
58 E: 48 limones y 24 de azúcar.
60 E: Porque se van a duplicar.</td>
<td>Argumento 1
D1: Instanciación de una regla intuitiva (PIM) → C1: Para 12 litros de agua de limón se necesitan 48 limones y 24 cucharadas de azúcar
W1: Propiedades y uso de una regla
B1: Matemático. Propiedades de la proporcionalidad (conocimiento básico)</td>
</tr>
<tr>
<td>76 P: Duplicas, ¿por qué? Antes tenías 6, ahora te están pidiendo 12. Multiplicamos por 2: 6 por 2, 12; …
<table>
<tr><th>Litros de agua de limón</th><th>Número de limones</th><th>Cucharadas de azúcar</th></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr>
</table>
(Tabla que la maestra elabora en el pizarrón)
83 P: Si vemos que se está duplicando [la cantidad de litros de agua] nos damos cuenta que tenemos que duplicar también la cantidad de limones y la cantidad de cucharadas de azúcar. Si se triplicara, por ejemplo, si tenemos el dato de tres y nos piden 9 …
85 P: Vean la tabla, al principio nos dieron 3 litros de agua para 12 limones y 6 cucharadas de azúcar. Si aumenta la cantidad de litros de agua, qué pasa con los limones ¿aumentan o disminuyen?
86 E: Aumentaron.
87 P: Cierto. Si aumenta la cantidad de litros de agua, ¿qué pasa con las cucharadas de azúcar?
89 P: Aumentaron. Si la cantidad de litros disminuyera, ¿qué pasaría con los limones?
90 E: Disminuyen.
91 P: Disminuyen, ¿y con las cucharadas de azúcar?
92 E: Disminuyen.</td>
<td>Argumento 2
D2: i) D1; ii) Confianza en la conversión de registro; iii) Reflexión y explicación del porqué de procesos y relaciones; iv) Esquema semi-inductivo → C2 = C1
W2: Viabilidad o justificación de la validez de la PIM (en el contexto de una noción de la proporcionalidad); propiedad de los isomorfismos
B2: Matemático. Propiedades de la proporcionalidad y de los isomorfismos (conocimiento medio)</td>
</tr>
</table>

93	P:	[93] P: A esa relación se le llama relación de proporcionalidad, si aumenta una y aumenta la otra ya la hicimos, aumentan parejo. Si a una la multiplico por 2, la otra también la multiplico por 2. Si disminuyen, disminuyen parejo…	

En el primero de los argumentos que aparecen en la Tabla 1, un alumno suministró como evidencia (D1) la instanciación de una regla intuitiva (la Propiedad Isomórfica de la multiplicación, PIM, por sus siglas. Vergnaud, 1989), cuya aplicación la soportó en las propiedades de dicha regla (v. W1), lo que a su vez sustentó en un respaldo matemático y en una noción básica de la proporcionalidad (en B1). En el segundo argumento, trasmitido por la profesora, se tiene una evidencia (D2) de un nivel distinto a la evidencia D1. La maestra aprovechó la intervención del estudiante para llevar a cabo un análisis de casos que le permitió introducir y justificar el concepto de proporcionalidad. Para ello, se basó en tres consideraciones relacionadas con dicha noción: que si se duplican o triplican las cantidades de un espacio de medida, se debe hacer lo propio en los otros espacios de medida (PIM para casos básicos, en 83); que las cantidades de los espacios de medida o bien aumentan, o bien, disminuyen (propiedad de los isomorfismos que aunque no define a la proporcionalidad, en la educación básica se suele tomar como su distintivo esencial, en 85-92); y que dicha variación se da entre los espacios en forma “pareja”, haciendo quizás referencia a la aplicación de la PIM a cualquier escalar (93). La conexión entre la evidencia y la afirmación se sostuvo en W2, constituido por un esquema epistémico, el de la viabilidad de la PIM, que se soportó a su vez en un respaldo matemático (B2), específicamente, en propiedades de la proporcionalidad que implican un conocimiento medio.

Segundo nivel de reconstrucción. Los alumnos: los mecanismos de sustentación aprendidos en clase

En el siguiente fragmento (Tabla 2) se muestra cómo los estudiantes de la clase analizada ponen en juego las prácticas de racionalidad que su mentora promueve.

Tabla 2. Registro del segundo fragmento y análisis de los argumentos con el modelo de Toulmin

<table>
<tr><td>43</td><td>P:</td><td>Si se requieren preparar 12 litros de agua de limón, ¿cuántos limones y cuántas cucharadas de azúcar necesitamos?</td><td rowspan="6">Argumento 3

D3: Instanciación de una regla intuitiva PIM → C3 = C1

W3: Propiedades y uso de una regla

B3: Matemático. Reglas de proporcionalidad (conocimiento medio)</td></tr>
<tr><td>78</td><td>P:</td><td><table><tr><td>Litros de agua de limón</td><td>Número de limones</td><td>Cucharadas de azúcar</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>94</td><td>L:</td><td>$\begin{array}{r}12\\ \times 4\\ \hline 48\end{array}$ $\begin{array}{r}6\\ \times 4\\ \hline 24\end{array}$</td></tr>
<tr><td>95</td><td>P:</td><td>Ahora explícanos qué es ese 4 por 12 y 4 por 6.</td></tr>
<tr><td>96</td><td>L:</td><td>Pues si se divide 12 entre 3 da 4.
Y se multiplica 3 por 4 da 12.
$\begin{array}{r}4\\ 3\overline{)12}\end{array}$</td></tr>
<tr><td>97</td><td>P:</td><td>¿Por qué dividiste entre tres?</td></tr>
</table>

104 F: … no sería más fácil?... 105 P: ¿Puedes explicar lo que quiso decir? 106 F: Sí, si dice que por tres litros de agua son igual a 12 limones, entonces si queremos ver para 12 litros, tenemos que ver cuántas veces cabe 12 entre tres. Se divide 12 entre 3, serían 4, entonces el 12 se tiene que multiplicar por 4, entonces son 48 limones. Y ya como sabemos que es por 4, para saber cuántas cucharadas multiplicas 6 por 4 es a 28 [24] cucharadas.	Argumento 4 D4: Instanciación de una regla intuitiva; Reflexión y explicitación de procesos y relaciones involucrados → C4 = C1 W4: Viabilidad o justificación de la validez de la PIM (en el contexto de una idea de proporcionalidad) B4: Matemático. Reglas de la proporcionalidad (conocimiento medio)

En el tercer argumento, una alumna (L) proporcionó como evidencia (D3) la instanciación de una regla intuitiva (Propiedad Isomórfica de la multiplicación, PIM), y a semejanza del primer argumento, esa instanciación la soportó en las propiedades de la regla (W3) que sustentó en un respaldo matemático y una noción media de la proporcionalidad porque utilizó un factor escalar cuatro (B3). En el cuarto argumento otra alumna (F) proporcionó una evidencia más elaborada (D4) pues no sólo utilizó la PIM, sino que explicitó el proceso, al mencionar con detalle las relaciones implicadas, lo que le permitió validar la regla a través de la explicación del por qué (esto se deja ver en W4, la cual está respaldada matemáticamente en una noción media de proporcionalidad, B4).

Haciendo una comparación entre los dos fragmentos de clase analizados, es posible percibir algunas semejanzas. En primera instancia, en relación a la trayectoria de participaciones: primero interviene un alumno, quien sugiere una afirmación y ofrece una primera evidencia; a continuación participa la maestra, en el caso del primer fragmento, o F, en el caso del segundo fragmento, quienes con sus argumentos profundizan y enriquecen los argumentos correspondientes (el del alumno y el de L, respectivamente) (v. D's); otra semejanza se refiere a la calidad de las participaciones: las primeras evidencias son instanciaciones de reglas y las segundas son explicaciones conceptuales de las reglas o de su uso, o explicación de su viabilidad (v. W's); y finalmente, se puede mencionar el tipo de argumentos, respaldados en ambos casos en consideraciones matemáticas (v. B's). Las semejanzas que se dan en este ejemplo ilustran adecuadamente cómo las prácticas de racionalidad que emprende la maestra en clase son reproducidas por sus estudiantes, es decir, los fragmentos bajo examen permiten esclarecer cómo la maestra va enculturando en esa racionalidad a sus estudiantes y cómo ellos ponen en práctica esa cultura promovida principalmente por su mentora. Es importante comentar que no es excepcional el caso de L y F; hubo otras participaciones de alumnos en las que también reprodujeron las prácticas de racionalidad impulsadas por la Maestra.

Los rasgos de las prácticas de racionalidad que en este apartado se han destacado, en lo que sigue se sustancian acudiendo a otro nivel de análisis, de tipo numérico. Con ese examen se intenta mostrar que las prácticas de racionalidad aquí descritas son una expresión concreta de la Cultura de Racionalidad que prevalece en la clase observada y en la que los alumnos, como se deja ver en el segundo fragmento, pero también en el tercer nivel de reconstrucción, participan activamente.

Tercer nivel de reconstrucción. Identificación de Patrones

Los argumentos recurrentemente formulados en las clases de Noemí se describen en la Tabla 3. Ahí también aparece el tipo de Backing en el que se soporta el argumento (matemático o extra-matemático), la frecuencia con la que se dio en clase, y el actor que lo formuló. La incidencia, relativamente alta, de estos argumentos en la clase observada permite sugerir que se trata de algunas de las normas de sustentación (CR.i) que dan forma y actualizan la Cultura de Racionalidad de dicha clase.

Tabla 3. Argumentos recurrentes en la clase observada (M: Matemático, E-M: Extra-matemático)

Argumento	Descripción del Argumento	Backing	Profesora	Alumnos
IRI	Instanciación de una regla intuitiva (PIM o valor unitario)	M	3	20
IRE	Instanciación de una regla escolar (regla de tres)	M E-M	1 3	0 3
EGCP	Explicitación genérica conceptual del proceso. Se explican procesos generalizables a otros casos, y se explicitan contenidos matemáticos y significados	M	3	0
EGUR	Explicitación genérica del uso de una regla. Se explicita el funcionamiento de una regla	M E-M	9 5	5 0
V	Viabilidad o justificación de una regla o un proceso	M	4	1
RAI	Repetición para dar aval institucional	M E-M	3 1	0 0
R	Consideraciones empíricamente razonables	M E-M	2 2	0 0
CRI	Comprobación de regla intuitiva	M	3	0

Otra posible norma que conforma la Cultura de Racionalidad de la clase observada (CR.i, y que se desprende también del análisis de las cantidades que destacan en la Tabla 3) hace referencia a la división equilibrada del número de argumentos que dieron los alumnos y los que dio la maestra: mientras casi el 45% fueron proporcionados por ellos, los restantes (55%) los ofreció su mentora.

Pero, sin duda alguna, uno de los rasgos más sobresalientes de las normas de sustentación (CR.i) de la Cultura de Racionalidad que impera en el salón de clase de Noemí es la tendencia que ahí se observa hacia la sustentación con base en consideraciones matemáticas, resaltando otra vez la participación de los alumnos: de los 39 argumentos que estuvieron a cargo de la maestra, en 28 de ellos el Backing fue matemático (cerca del 72%); de los 29 argumentos donde participaron los alumnos, 26 se sustentaron matemáticamente (cerca del 90%), y de los 68 argumentos totales, 54 de ellos (cerca del 80%) fueron soportados en aspectos de la disciplina. Sobresale también el que casi el 12% de los argumentos son de tipo conceptual (V y EGCP).

CONSIDERACIONES FINALES

En el análisis expuesto, tanto en el de las prácticas de racionalidad que se dejan ver en los fragmentos puntuales de clase, como en el de tipo cuantitativo, que ofrece una panorámica de la cultura de racionalidad que parece prevalecer en la clase de Noemí, si bien despunta el papel de la maestra (como la principal promotora de esa racionalidad), también destaca la participación de los alumnos. Desde la perspectiva de la teoría social del aprendizaje ─formulada por Wenger (1998)─, fue esta participación activa y creativa de los estudiantes la que dio lugar a un aprendizaje y una asimilación de las prácticas de racionalidad que la maestra impulsó entre ellos; pero esta participación, a su vez y en buena medida, llegó como resultado del oficio de la maestra Noemí, quien consiguió que los estudiantes intervinieran en prácticas que les resultaron significativas y quien logró también ampliarles el horizonte al proporcionarles acceso a recursos que les permitieron desarrollar prácticas matemáticas de calidad. Sería deseable que los profesores fueran conscientes de la cultura de racionalidad que ellos promueven en el aula y de cómo ellos enculturan a sus alumnos en las prácticas matemáticas que se desprenden de dicha cultura.

Referencias

Atiyah, M. et al. (1994). Responses to "Theoretical Mathematics": Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30(2),* 178-207.

Berteley, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas*. México D. F.: Paidós.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Praga, República Checa: PME.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Herbst, P. y Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of Mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: the case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics, 23*(1), 2-14.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in Mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics. 24*, 389-399.

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinez, M. V. y Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, *86*, 125–149.

Morselli, F. y Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. En V. Durand, S. Soury y F. Arzaello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 211-220). Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique.

Rigo, M. (2013a). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics 84*(1), 71-91.

Rigo, M. (2013b). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 459-466). Bilbao: SEIEM.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Thom, R. (1980). "¿Son las matemáticas "modernas" un error pedagógico y filosófico?". En J. Piaget, G. Choquet, J. Diedonné, R. Thorn y otros (Eds.), *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Selección y Prólogo de Hernández, J. (pp. 115-130). Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Toulmin, S. E. (1974). *The Uses of Argument.* New York: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1989). *Multiplicative structures*. En J. Hiebert y Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation? *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423-440.

UNA MIRADA CURRICULAR A LA COMPETENCIA DE INDAGACIÓN

A curricular view of the inquiry competence

Sala Sebastià, G., Font Moll, V. y Giménez Rodríguez, J.

Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo proponemos una caracterización (definición, desarrollo y descriptores) de la competencia de indagación, entendida como la capacidad de formularse preguntas de investigación e intentar responderlas haciendo uso de las matemáticas, para las etapas de Educación Primaria y Secundaria. Se considera una competencia básica que el alumnado podría continuar desarrollando en la siguiente etapa educativa, ajustándose entonces a la definición del currículo de Bachillerato para la competencia de investigación. Se argumenta que la adquisición de la competencia matemática está estrechamente relacionada con esta competencia de indagación ya que, siguiendo las recomendaciones del currículo, la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas debe basarse en la problematización de contextos reales y cotidianos del alumnado.

Palabras clave: *Competencia de indagación, primaria, secundaria, matemáticas*

Abstract

In this paper we propose a characterization (definition, development and descriptors) of the inquiry competence (understanding as the ability of formulating inquiry questions and trying to ask them using the mathematics) for the levels of Elementary and Secondary Education. We define it as a basic competence that students could continue to develop in the next level. Then the definition of this competence would match the inquiry competence definition in the A level curriculum. The acquisition of mathematical competence is closely related to this inquiry competence because following the recommendations of curriculum teaching and learning of Mathematics should be based on the problematisation (or problem solving) of real and quotidian students' contexts.

Keywords: *Inquiry competence, elementary school, secondary school, mathematics*

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presenta es una reflexión curricular sobre la necesidad de definir y caracterizar una competencia de indagación en las etapas educativas de Primaria y Secundaria para evitar la ruptura de competencias que se da entre estas etapas y el Bachillerato. Como contexto de reflexión utilizamos el currículo catalán. No obstante, las reflexiones y conclusiones son aplicables a los currículos de las otras comunidades, ya que también se contempla la noción de competencias básicas en las etapas de Primaria y ESO y la competencia de investigación en Bachillerato.

En el currículo de Bachillerato de Catalunya (DOGC, 2008), las competencias que se deben ir adquiriendo durante esta etapa educativa se clasifican en dos grupos: competencias generales y competencias específicas de cada materia. Las competencias generales y comunes se definen para el conjunto de la etapa educativa y se recomienda trabajarlas de forma transversal, ya que la finalidad principal del aprendizaje por competencias es que el alumnado sea capaz de transferir conocimientos de un contexto a otro.

Contemplada como competencia general, junto a otras cinco competencias está la competencia de investigación. Esta competencia se define en el currículo de Bachillerato (DOGC, 2008) así:

Sala Sebastià, G., Font Moll, V. y Giménez Rodríguez, J. (2015). Una mirada curricular a la competencia de indagación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 485-490). Alicante: SEIEM.

> Facultad de movilizar los conocimientos y los recursos adecuados para aplicar un método lógico y razonable para encontrar respuestas a preguntas o para resolver problemas relevantes, que aun no se han solucionado en el nivel y el ámbito adecuado a los conocimientos, destrezas y actitudes que se poseen (p. 7).

Al finalizar esta etapa educativa todo el alumnado debe haber realizado un trabajo de investigación que debe haber contribuido definitivamente, tanto al logro de la competencia de investigación, como a saber aplicarla en las diferentes materias del currículo. Cada una de las materias curriculares contribuye al desarrollo de ciertas competencias específicas propias que, a su vez, contribuyen de manera concreta a la consecución de las diversas competencias generales.

En relación a las competencias específicas de la materia de Matemáticas, en el currículo de Bachillerato se citan: la competencia matemática; la competencia en modelización matemática; la competencia en contextualización y, finalmente, la competencia en experimentación, como punto de partida de la construcción de conocimiento matemático curricular. En este sentido, las capacidades que el currículo de Matemáticas potencia, facilitando el establecimiento de razonamientos cuantitativos sobre situaciones de la vida real y sobre el mundo cotidiano del alumnado, contribuyen de forma importante al logro de la competencia general en investigación.

Al igual que en la materia de Matemáticas se alude a una competencia en experimentación, cercana en su definición a la competencia general de investigación, en otras materias del área de Ciencias también se define una competencia en indagación y experimentación como competencia en exclusiva asociada con las materias de esta área. En cada asignatura, al tratarse de una competencia específica, su definición varía para adaptarse a las especificidades de la materia. No obstante, la principal diferencia entre la competencia de investigación y la de indagación, además de lo específico concretado para cada materia de esta última, es la puntualización en sus definiciones de que la indagación se refiere a una actividad de investigación limitada al contexto escolar.

La competencia de indagación, en cambio, no aparece como propia o específica de las materias de Ciencias Sociales o Artísticas, aunque en la descripción de su currículo y de las metodologías didácticas se encuentren múltiples recomendaciones para realizar tareas o trabajos de indagación para la contribución de la materia a las competencias generales. Estas materias pueden ofrecer contextos adecuados para realizar indagaciones donde las Matemáticas tengan un protagonismo importante y permitan potenciar el desarrollo de sus competencias específicas, así como la competencia de indagación, tanto en la etapa de Secundaria como en la de Primaria.

Esta competencia de indagación podría trabajarse, en las etapas de Primaria y Secundaria, siguiendo las recomendaciones curriculares, de forma general y transversal para conseguir un desarrollo de nivel suficiente para ser la base de la competencia de investigación definida en el currículo de Bachillerato, ya que las competencias básicas en que se basan las competencias de la etapa de Bachillerato se deben desarrollar durante las etapas educativas de Primaria y ESO.

Estas competencias básicas, según los currículos de Primaria (DOGC, 2007a) y ESO (DOGC, 2007b), se componen de ocho competencias ubicadas en dos grupos: competencias transversales y competencias específicas centradas en convivir y habitar el mundo. El primer grupo, integrado por seis competencias clasificadas en tres subgrupos: competencias comunicativas, metodológicas y personales. El segundo grupo, integrado por dos competencias específicas: competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico y competencia social y ciudadana.

Entre las competencias transversales metodológicas es donde encontramos clasificada la competencia matemática. No obstante, de la misma forma que en el currículo de Bachillerato, se especifica que los contenidos curriculares de cada área contribuyen a la adquisición de competencias propias o específicas de cada materia, así como, cada una hace su particular contribución a la adquisición de las competencias básicas de la etapa correspondiente. Es decir, la competencia matemática, además de ser considerada una competencia transversal, contribuye al desarrollo de competencias específicas del contenido matemático.

A diferencia del currículo de Bachillerato, ni en el currículo de Primaria ni en el de ESO se define explícitamente, una competencia transversal propiamente llamada de investigación y/o de indagación. Sin embargo, en el currículo de la ESO, sí que se define una competencia llamada *científica*, propia y exclusiva de las materias clasificadas en área de las Ciencias Naturales. Y, además, en muchos apartados de los dos currículos, hay recomendaciones didácticas metodológicas de realización de propuestas que incluyan tareas relacionadas con la investigación de problemas que permitan al alumnado movilizar y transferir conocimientos de un contexto a otro y facilitar el desarrollo competencial. También subrayar que, en la ESO, el alumnado debe realizar al finalizar la etapa un proyecto de investigación guiada donde deberá demostrar ciertas capacidades que encajan con las descripciones de las competencias en indagación específicas de las materias de Bachillerato y de la competencia de investigación general.

En el apartado siguiente se presenta una propuesta de definición, así como una caracterización de la competencia de indagación (niveles de desarrollo y descriptores). La metodología utilizada para la conceptualización de esta competencia se ha basado en la realización de una síntesis propia de los elementos de indagación que se hallan en presentes en los currículos de Educación Primaria, ESO y Bachillerato de Cataluña, una revisión preliminar de la amplia literatura acerca de la enseñanza y aprendizaje por indagación y su evaluación (Abril et al., 2013; Artigue, Dillon, Harlen y Léna, 2012; OECD, 2013), así como, en la triangulación de los resultados de diversos trabajos de los autores, anteriores al presente trabajo.

CARACTERIZACIÓN DE LA COMPETENCIA DE INDAGACIÓN

La propuesta que se presenta, se basa en la necesidad de evaluar una competencia que, aunque no se encuentra definida explícitamente en los currículos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, por un lado, se promueve con las recomendaciones didácticas de todas las materias o áreas de conocimiento y, por otro, al finalizar la etapa de ESO será la base de la competencia de investigación del Bachillerato.

Se presenta la siguiente definición de *competencia de indagación* para las etapas de Primaria y ESO, basada en el currículo y otra literatura referenciada en la sección de Introducción.

La competencia de indagación es una competencia metodológica, como la competencia matemática, ya que hace referencia directa a aprender métodos de trabajo y estrategias para resolver problemas de forma eficaz, en principio en el entorno escolar pero que deben de significar una preparación para la vida cotidiana y, posteriormente, para la vida adulta. También la llamamos competencia transversal ya que los conocimientos que se adquieren y las habilidades que se desarrollan provienen de todas las áreas y materias del currículo.

Con el objetivo de confeccionar unos descriptores con que caracterizar la competencia y su gradación, se confeccionó en un estadio inicial de este trabajo una tabla con unos descriptores *a priori*, extraídos de la revisión de los currículos catalanes y la literatura relacionada con la enseñanza y aprendizaje basada en la indagación. Esta tabla inicial se utilizó para evaluar el nivel de logro de dicha competencia en la implementación de dos secuencias didácticas, en una ocasión con alumnado de ciclo superior de educación Primaria (Sala, Giménez y Font, 2013). y en la otra con alumnado de primer ciclo de ESO (Sala, Barquero, Font y Giménez, 2015). En ambas implementaciones, las secuencias didácticas planteaban situaciones problemáticas pertenecientes a contextos curriculares del área de Ciencias Sociales, muy cercanos a la realidad cotidiana del alumnado. En el proceso de indagación de ambas secuencias didácticas las Matemáticas tenían un papel importante, ya que las aportaciones de esta materia a las competencias básicas están en estrecha relación con la competencia de indagación que se pretendía potenciar.

El análisis de los resultados de estas implementaciones permite mejorar y complementar la tabla de caracterización preliminar. La Tabla 1 muestra la nueva caracterización de la competencia de indagación y sus niveles de desarrollo.

La competencia se caracteriza mediante una serie de descriptores principales, numerados del 1 al 7, relacionados con la secuencia que debe seguir todo proceso de indagación: problematizar la situación planteada; mostrar una actitud de duda para promover la exploración e investigación y buscar explicaciones; hacer predicciones sobre los posibles resultados o "soluciones" del problema planteado en base a las ideas previas y la revisión preliminar de la situación; planificar, diseñar una estrategia para investigar sobre el problema, así como, conducir y regular (o autorregular) el trabajo de indagación, planteando hipótesis con que trabajar; buscar, manejar y elaborar información y datos e interpretarlos a la luz de las hipótesis; validar los resultados; y, finalmente, comunicar los resultados de la indagación.

Para cada uno de estos 7 descriptores se proponen 3 niveles de desarrollo de la competencia: el nivel básico de principiante; el nivel intermedio; y el nivel avanzado. En cada uno de estos niveles se proponen diversos indicadores del logro de la competencia, diferenciados según del descriptor de que se trate. Por ejemplo, un estudiante de educación Primaria que después de una lluvia de ideas en su equipo de investigación, sepa discernir cuales de las preguntas propuestas sirven para generar una línea de investigación y cuales no, estaría mostrando, para el descriptor número 1 (*Problematiza la situación planteada para iniciar la indagación*), un nivel de desarrollo de la competencia intermedio.

El desarrollo de la competencia es gradual y depende del dominio de múltiples habilidades que están estrechamente vinculadas con otras competencias, principalmente transversales y metodológicas, del currículo. Por lo tanto, siempre se debe entender como un logro progresivo y la evaluación se debe hacer de forma sumativa, siendo la Tabla 1 orientativa.

Tabla 1. Caracterización de la competencia de indagación

Nivel básico (B)	Nivel intermedio (J)	Nivel avanzado (S)
1. Problematiza la situación planteada para iniciar/continuar la indagación		
B.1. Asume la situación como un problema de la comunidad **B.2.** Formula preguntas a partir del contexto susceptibles de ser investigadas	**J.1.** Dispone de parámetros que utiliza para contrastar las preguntas generadas y reconocer sus posibilidades/limitaciones **J.2.** Clasifica las preguntas y argumenta racional y lógicamente sobre cuales son las que se pueden descartar	**S.1.** Analiza crítica y holísticamente, sintetiza la información y extrae las principales ideas para acotar la situación problemática **S.2.** Formula nuevas preguntas a partir de ideas alternativas a las existentes en el contexto de la situación
2. Mantiene una actitud de duda que le permite buscar posibles explicaciones		
B.1. Muestra una actitud de duda basada en la curiosidad **B.2.** Reconoce, de forma intuitiva, en la situación planteada una cierta problemática	**J.1.** Muestra una actitud de duda basada en la idea de lakatiana de prueba y refutación **J.2.** Identifica en la situación problemática diversidad de posibilidades que es necesario investigar	**S.1.** Muestra una actitud intencionadamente crítica de duda ante la situación planteada **S.2.** Contrasta la información que emerge de la situación con sus ideas previas y valora si es necesario investigar para construir conocimiento nuevo
3. Hace predicciones sobre las posibles respuestas/explicaciones/resultados		
B.1. Hace predicciones basadas en el sentido común y propias creencias a partir del enunciado de la situación planteada **B.2.** Plantea conjeturas desde una posición empática y subjetiva ante la problemática	**J.1.** Plantea conjeturas contemplando los conocimientos previos sobre el contexto problemático **J.2.** Distingue diferentes conjeturas en función de diferentes supuestos	**S.1.** Construye hipótesis a partir de diferentes variables que identifica en la problemática habiéndose informado previamente o en base a modelos **S.2.** Explicita las hipótesis de forma clara y organizada con el objetivo de contrastarlas
4. Planifica, conduce y regula las acciones para desarrollar una indagación		

B.1. Utiliza, acepta las herramientas propuestas por el guía (o docente) y acepta formar parte de la comunidad de investigación **B.2.** Sigue las indicaciones y el diseño de planificación propuestas de forma rígida **B.3.** Reflexiona esporádicamente sobre la validez de las conexiones que se van realizando	**J.1.** Se integra en la comunidad de investigación donde discute, propone y escoge entre varias planificaciones **J.2.** Sugiere cambios en el diseño de la planificación cuando cree que el desarrollo del trabajo de indagación lo requiere **J.3.** Explicita sus reflexiones sobre la validez de las conexiones y las comunica a la comunidad de investigación	**S.1.** Organiza y lidera la comunidad de investigación donde propone y justifica planificaciones de diseño propio que se plantean flexibles y adaptables al curso de los trabajos de indagación **S.2.** Analiza sistemáticamente los niveles de calidad de las conexiones **S.3.** Genera nuevos sistemas de control de calidad relacionados con la confiabilidad, fiabilidad, representatividad, dispersión, etc.
5. Clasifica, escoge, elabora e interpreta los datos/información recabados		
B.1. Recoge datos de las fuentes propuestas y los registra **B.2.** Clasifica la información **B.3.** Explora los datos mediante posibilidades de tanteo	**J.1.** Escoge la información útil entre las posibles fuentes y la recoge y registra **J.2.** Analiza, elabora y valora la información reconociendo conexiones i/o patrones en relación a las hipótesis planteadas, con diversos recursos (tablas, generalizaciones, obtención de modelos, etc.)	**S.1.** Busca información en otras fuentes para complementarla **S.2.** Analiza, elabora y valora la información desde diversos puntos de vista reconociendo nuevas conexiones i/o patrones en relación a las hipótesis planteadas, con herramientas teóricas escogidas conscientemente
6. Valida los resultados, comparándolos con las predicciones		
B.1. Reconoce algunos resultados **B.2.** Valida los resultados estableciendo conclusiones (de causa-efecto)	**J.1.** Reconoce los resultados en relación a las hipótesis planteadas **J.2.** Valida los resultados en contraste con las hipótesis y argumentando críticamente para la comunidad	**S.1.** Reconoce los resultados en relación a las hipótesis planteadas después de un proceso deductivo y valora la posibilidad de generar nuevas hipótesis, teniendo en cuenta las limitaciones del trabajo. **S.2.** Valida los resultados en contraste con las hipótesis y argumenta críticamente contemplando explicaciones alternativas en base a las evidencias
7. Comunica las conclusiones/resultados de la indagación		
B.1. Explica los resultados y conclusiones a la comunidad de investigación **B.2.** Responde a preguntas sobre el proceso de indagación	**J.1.** Elabora un texto (puede ser oral) para exponer los resultados en relación a las hipótesis a la comunidad interesada **J.2.** Defiende y argumenta críticamente las conclusiones expuestas, respondiendo a preguntas sobre detalles **J.3.** Reflexiona sobre el trabajo del equipo	**S.1.** Elabora un informe de indagación formal, rigurosamente argumentado para exponer los resultados en relación a las hipótesis **S.2.** Responde a cualquier tipo de preguntas sobre el proceso y/o los resultados y las limitaciones **S.3.** Reflexiona sobre el trabajo del equipo y el impacto sobre los resultados

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Rubio (2012) ha señalado que uno de los problemas del desarrollo y evaluación de competencias es una cierta ambigüedad de las orientaciones curriculares. En ellas se suele formular una lista de competencias con sus descriptores que permiten a un profesor considerar que lo que hace el alumno es una evidencia que corresponde a un determinado nivel de desarrollo de una determinada competencia. Ahora bien, en algunos casos no hay coherencia entre las competencias, los descriptores están formulados de manera ambigua, las competencias se solapan unas con otras, etc.

La propuesta de caracterización de la competencia de indagación que se hace en este trabajo -si bien presenta algunos de estos aspectos problemáticos, como el solapamiento de algunos descriptores- puede ser una aportación a la solución parcial de esta problemática, ya que permite: 1) conectar las competencias básicas de primaria y secundaria con la de investigación de Bachillerato; 2) realizar una evaluación más precisa de los logros y las dificultades del alumnado cuando se hallan inmersos en procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la indagación.

Se trata de una competencia transversal y metodológica que no es exclusiva del área o la materia de las Ciencias Naturales y que, por lo tanto, puede y debe ser desarrollada también en las otras materias. En particular, desde las Matemáticas, con el uso de contextos reales extra matemáticos próximos al alumnado. A su vez, el desarrollo de la competencia de indagación puede contribuir al desarrollo de la competencia matemática.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-32644.

Referencias

Abril, A., Aguirre, D., Aldorf, A., András, S. … y Tamási, C. (2013). *PRIMAS Project: Inquiry-based learning in maths and science clases.* http://www.primas-project.eu/zoeken/search.do?null

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. y Léna, P. (2012). *Learning through inquiry*. http://www.fibonacci-project.eu

DOGC (2007a). Decret 142/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària, *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, n. 4915 de 29 de Julio de 2007, 21882-21870.

DOGC (2007b). Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (ESO), *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, n. 4915 de 29 de Julio de 2007, 21870-21946.

DOGC (2008). Decret 142/2008, de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del batxillerat, *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, n. 5183 de 29 de Julio de 2008, 59042-59401.

OECD (2013). *PISA 2012. Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. París: OECD.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Sala, G., Barquero, B., Font, V. y Giménez, J. (2015). A multidisciplinary approach to model some aspects of historical events. En N. Vondrová y K. Krainer (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa),

ENTRECRUZAMIENTO DE LOS SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS Y LOS SISTEMAS QUÍMICOS DE SIGNOS

Intertwinement of Mathematical Sign Systems and Chemical Sign Systems

Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E.

CINVESTAV, México

Resumen

En esta investigación, docentes de educación media básica y de educación media superior resuelven un cuestionario de matemáticas y de química. Durante los procesos de elaboración se advierte el entrecruzamiento entre los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos. La competencia formal es alcanzada por uno de los docentes de educación media superior. Se observan dificultades en el uso de la recta numérica al representar procesos de óxido-reducción en una reacción química con números negativos.

Palabras clave: *competencia formal, números enteros, sistemas matemáticos de signos, sistemas químicos de signos, recta numérica.*

Abstract

In this research report, a questionnaire of mathematics and chemistry is solved by professors of junior high school and high school. Throughout the resolution process it is noticed the intertwinement between mathematical and chemical sign systems. The formal competence is reached by a high school teacher. Difficulties are noted when oxide-reduction processes are presented in a chemical reaction within negative numbers on the number line.

Keywords: *formal competence, integers, mathematical sign systems, chemical sign systems, number line.*

Existen dificultades enfrentadas por los docentes en el aprendizaje y la enseñanza de la química referidas a los sistemas matemáticos de signos (SMS) específicamente en el álgebra con los números enteros. Este estudio pretende mostrar el entrecruzamiento de los SMS con el de los Sistemas Químicos de Signos (SQS) y cómo mediante sus representaciones los docentes pueden explicar las concepciones de la materia y los procesos de óxido-reducción.

MARCO TEÓRICO

Este estudio es visto desde la matemática educativa, por ello utilizamos como marco teórico metodológico el de los modelos teóricos locales (MTL) propuesto por Filloy (1999) para la observación experimental. El término SMS es introducido por Filloy (1999) para analizar los textos creados por los estudiantes que constituyen los procesos de producción de sentidos. En esta perspectiva semiótica, Filloy (1999) propone cuatro componentes interrelacionados entre sí. Estos componentes son el de los modelos de enseñanza, el de los procesos cognitivos, el de competencia formal y el de comunicación.

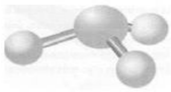
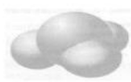
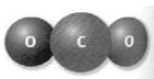
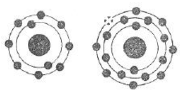
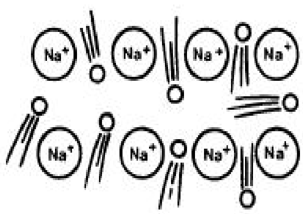
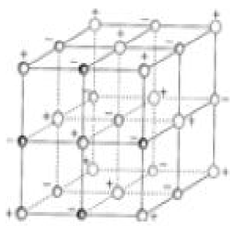
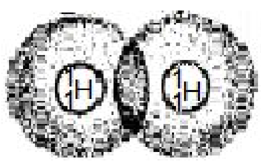
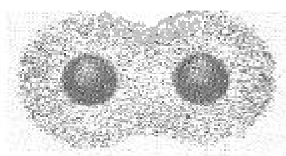
Los modelos de enseñanza considerados para este estudio son el Modelo de la *Recta Numérica* y el *Modelo Chino*. Peled (1991) identificó niveles de conocimiento en la dimensión de cantidad y en la dimensión de la Recta Numérica. Este modelo es utilizado para representar especies que se oxidan y se reducen en una reacción química. Por lo que respecta al *Modelo Chino* (Gallardo, 1994) referido a los números enteros, se utiliza durante el proceso de adquisición del lenguaje algebraico en la

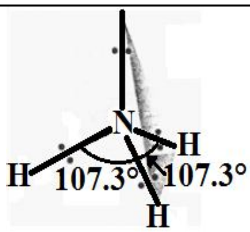
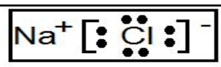
Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E. (2015). Entrecruzamiento de los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 491-501). Alicante: SEIEM.

resolución de problemas (Gallardo y Rojano, 1994). Con este modelo se pueden asociar los números enteros a las cargas eléctricas de partículas subatómicas y a los números de oxidación de los elementos que forman un compuesto. Así, las cargas de los protones son representadas por enteros positivos, las de los electrones por enteros negativos y las de los neutrones por el cero. Los números de oxidación, parafraseando a Pimentel y Spratley (citados en Cruz, Chamizo y Garritz, 1986), son cargas ficticias asignadas a los átomos en las moléculas (o iones), útiles para comprender los procesos de óxido-reducción. Cuando un átomo se encuentra en estado basal, su carga es neutra porque tiene el mismo número de protones y electrones. Si el átomo pierde electrones, éste queda cargado positivamente tantas cargas positivas como electrones pierda; de la misma forma cuando un átomo gana electrones, quedará cargado negativamente el mismo número de cargas ganadas.

Concerniente a los modelos utilizados en la enseñanza de la Química y sus SQS, Benarroch, Matus y Nappa (2011) analizan libros de texto para identificar el modelo atómico que un estudiante requiere. Perales y Jiménez (2004) proponen una clasificación de las ilustraciones presentadas en los libros de texto. Galagovsky (2004) emplea la clasificación de Perales y Jiménez (2004), profundizando sobre el tipo de lenguaje, diferenciando entre el *lenguaje gráfico* como aquellas representaciones concretas, por ejemplo la distribución espacial entre átomos en un compuesto químico y el *lenguaje formal* que implica el uso de símbolos con reglas semánticas preestablecidas. Para este estudio, proponemos utilizar la clasificación de Galagovsky (2004) en términos semióticos, mostrada en la Tabla 1.

Tabla 1. Taxonomía de representaciones de los enlaces químicos según Galagovsky (2004).

Grado de iconicidad	**Representaciones concretas**	**SQS**
Dibujo figurativo	Bolas y varillas fusionado bolas   	Gráfico
Dibujo figurativo más signos	Niveles electrónicos 	Formal
	Otros  	Gráfico
Dibujo esquemático más signos	Orbitales moleculares  	Gráfico y formal

Grado de iconicidad	Representaciones concretas	SQS
		Gráfico y formal
Descripción en signos normalizados	Lewis 	Formal
	Diagramas de rayas H-H	Formal
	Molecular H_2O	Formal

Por otra parte, Filloy (1999) identifica hechos que se presentan en una situación de enseñanza cuando se pasa de un estrato de lenguaje SMS más concreto a otro más abstracto. Se han encontrado niveles intermedios de conceptualización de los números negativos, como *sustractivo*, *signado*, *relativo*, *aislado* y el *número entero* (Gallardo, Santos y Hernández, 2010). En el nivel de *sustractivo* el minuendo siempre será mayor que el sustraendo y el signo menos solo tiene un carácter binario; el *signado* es aquel natural al que se ha asociado un signo más o un signo menos apareciendo la dualidad del signo unario y binario; el *relativo* se concibe con la idea de opuestos en situaciones discretas y simétricos en situaciones continuas; el *aislado* se acepta como la solución de una operación o de una ecuación y el *número entero* negativo cuando se ha llegado a la formalización alcanzando el mismo nivel que el de los números positivos. Se observa la triple naturaleza del signo menos, concebida como: 1) *signo binario* para la sustracción, 2) como *unario* para expresar un número negativo y 3) para representar a los números *simétricos* (Bofferding, 2014). Se manifiesta la triple naturaleza de la sustracción como *diferencia*, *completar* y *quitar*.

Por lo que respecta al componente de competencia formal (Puig, 2006), simula la actuación de un usuario ideal de un SMS. En este estudio consideramos como sujeto competente, al profesor que posee un grado mayor de competencia formal. En cuanto al componente de comunicación, éste describe las reglas de formación y decodificación de textos, para eliminar la ambigüedad contextual circunstancial. Como el conocimiento químico es producido a través de modelos (Chamizo, 2006), éstos nos permiten la comunicación entre el investigador y los sujetos de estudio.

ESTUDIO EMPÍRICO

Diseñamos un cuestionario piloto para docentes de educación media básica y media superior. El instrumento metodológico consta de situaciones de análisis, ejercicios y problemas sobre la operatividad de números enteros y el lenguaje algebraico. Además se indaga sobre los SQS referidos al átomo, molécula, compuesto y reacción química.

El cuestionario fue aplicado a cuatro docentes: un docente que imparte las asignaturas de Matemáticas y Química en educación secundaria en Veracruz, México; otro docente de secundaria que imparte Química en la Ciudad de México; y dos docentes de preparatoria que imparten Química en la Universidad Nacional Autónoma de México (DP1 y DP2). Todos los docentes cuentan con cinco años como mínimo de experiencia en la enseñanza de la Química. El cuestionario fue aplicado al finalizar el ciclo escolar 2014-2015.

Se detectó el entrecruzamiento de los SMS y de los SQS, observando niveles de competencia en el uso de SMS en contextos matemáticos y químicos. Encontramos dificultades en el uso de SMS que dan origen a imprecisiones en los conceptos químicos, como por ejemplo procesos de oxidación y reducción asociados al modelo de la recta numérica.

Además se advierte que los SMS y los SQS tienen semejanzas y diferencias en cuanto a los significados. Los coeficientes en una expresión algebraica y los coeficientes estequiométricos en una reacción química tienen el mismo significado. Sin embargo, "***xy***" en un SMS es el producto de dos números cualesquiera, mientras que en química representa el resultado de la unión de dos átomos o especies químicas "***x+y***".

Con base en las apreciaciones anteriores, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo influye la conceptualización de los números negativos en la conceptualización de los procesos de óxido-reducción?
- ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre los SMS y los SQS?

Para responder a estas preguntas, se analizaron los cuestionarios resueltos de los cuatro docentes. Estos hechos permitieron observar la competencia matemática y la competencia química de los docentes.

A continuación mostramos en las Tablas 2-6 dos de las producciones analizadas. La docente de educación media superior (DP1) muestra en algunas de sus respuestas las mismas dificultades que los docentes de educación secundaria, siendo la de menor nivel de competencia. El docente de educación media superior (DP2) lo consideramos como el docente con competencia formal.

Tabla 2. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

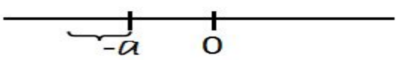
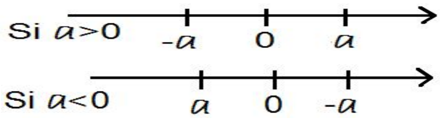
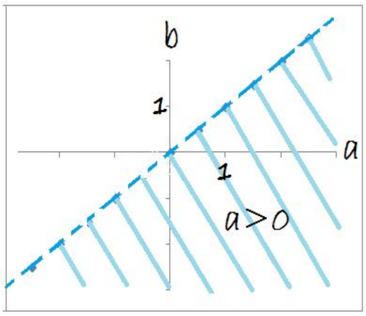
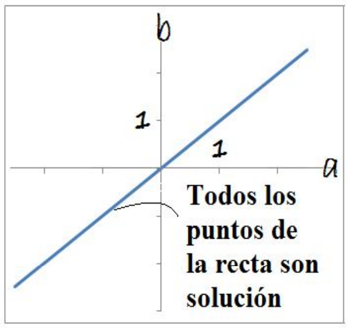
DP1	**DP2**
Ejercicio a resolver: operaciones de suma y resta de enteros	
(-3)-(-8)=-3+8=5 **Resuelto correctamente:** Uso de una estructura equivalente evitando la sustracción.	(-3)-(-8)=5 **Resuelto correctamente:** No muestra el proceso, únicamente resultados.
Situación a resolver: representa en la recta numérica el simétrico de *-a*.	
 **Resuelto incorrectamente:** El uso de la recta numérica no le apoya para representar números simétricos. El simétrico siempre va a estar a la izquierda del cero.	 **Resuelto correctamente:** Presenta los dos casos en los cuales "*a*" puede ser mayor o menor que cero. Muestra el número "*a*" como <u>número entero formalizado</u> positivo o negativo.
Ejercicio a resolver: si *"x=11"*, y *"z=-9"*, ¿cuánto es "*x(-z)"*?	
11(-(-9)=11+9=20 **Resuelto incorrectamente:** Presenta dificultades con el uso de paréntesis. Predominio aditivo cuando hay multiplicación.	(11)(-(-9))=+99 **Resuelto correctamente:** No muestra el proceso, únicamente resultados.

Tabla 3. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

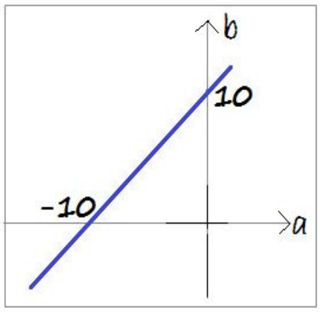
<table>
<tr><th>DP1</th><th>DP2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio a resolver: en “a-b=c”, ¿cómo debe ser el minuendo “a” con respecto al sustraendo “b”, para que la diferencia “c”, sea mayor que cero?</td></tr>
<tr><td>Positivo y mayor valor que b.

Resuelto incorrectamente:
Ausencia de SMS.
Uso del lenguaje natural.
Aparece el número como sustractivo, no realizando la extensión a los enteros negativos.</td><td>$a\text{-}b>0 \Rightarrow a>b$


Resuelto correctamente:
Utiliza SMS para representar su respuesta.
Tiene sentido para el sujeto el uso del plano cartesiano en la sustracción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio a resolver: en “a-b=c”, ¿cómo debe ser el minuendo “a” y el sustraendo “b”, para que la diferencia “c” sea igual a cero?</td></tr>
<tr><td>Los dos con el mismo valor “a” positivo y “b” negativo.

Resuelto incorrectamente:
No diferenciación entre las operaciones de suma y resta.</td><td>$a\text{-}b=0 \Rightarrow a=b$


Resuelto correctamente:
Es sintáctico, utilizando SMS para representar su respuesta.
Tiene sentido para el sujeto el uso del plano cartesiano en la sustracción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio a resolver: resuelve la ecuación “–a+b=10”</td></tr>
<tr><td>$-a+b=10$
$a=20$
$b=-10$
$20+(-10)=10$
$20-10=10$

Resuelto incorrectamente:
Muestra dificultades al realizar la sustitución numérica de un número positivo en “-a”.
Asigna solo una pareja de valores para dar solución.
Sus valores no satisfacen la igualdad.
Presenta dificultades para</td><td>$-a+b=10$
$b=10+a$


Resuelto correctamente:
Encuentra el conjunto solución con una representación gráfica, utilizando a la recta como un medio de organización.
Aparece el número como aislado.</td></tr>
</table>

Tabla 4. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

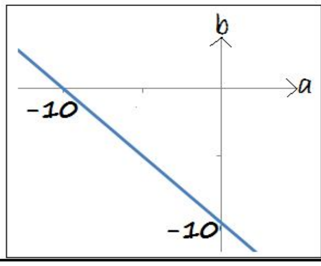
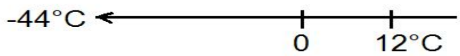
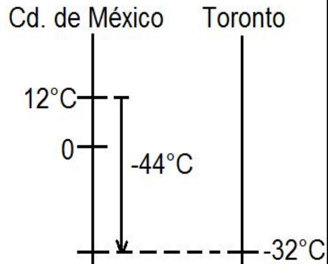
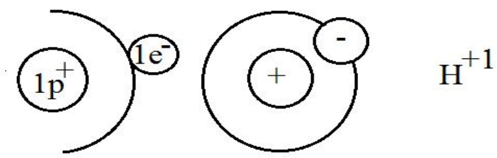
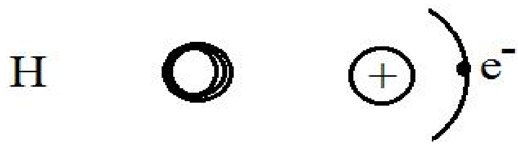
DP1	DP2
Ejercicio a resolver: resuelve la ecuación *"-a-b=10"*	
-a-b=10 *a=-5* *b=-15* *-5-(-15)* *-5+15=10* **Resuelto incorrectamente:** Muestra dificultades al realizar la sustitución numérica de un número negativo para "*-a*". Asigna solo una pareja de valores para dar solución. Sus valores no satisfacen la igualdad. Presenta dificultades para conceptualizar al número relativo.	*-a-b=10* *b=-a-10*  **Resueltos correctamente:** Encuentra el conjunto solución con una representación gráfica, utilizando a la recta como un medio de organización. Aparece el número como aislado.
Problema a resolver: la diferencia de temperaturas entre la ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México es de -44 °C. ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento, si la temperatura en la ciudad de México es de 12°C?	
a-b=-44 *a-12=-44* *a=-44+(-12)* *a=-44-12* *a=-56* *T=-56°C* **Resuelto incorrectamente:** Plantea correctamente la ecuación. Resuelve el problema incorrectamente. Muestra confusión con los signos binario y unario al realizar la trasposición de términos. Traza la recta numérica y ésta no le ayuda a resolver el problema. 	 *DT=12°C-44°C=-32°C* **Resuelto correctamente:** Utiliza la recta numérica de forma vertical en contextos de temperatura. Visualiza la sustracción como una diferencia.
Representa un átomo de hidrógeno y una "molécula" de cloruro de sodio.	
 **Resuelto incorrectamente:** En el tercer SQS presenta a un átomo de hidrógeno como un catión H^{+1}.	 **Resuelto correctamente:** Los SQS son el formal molecular, el de bolas y el de niveles electrónicos.

Tabla 5. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

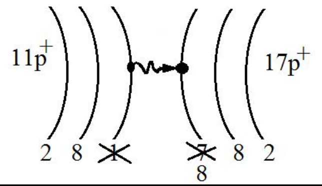
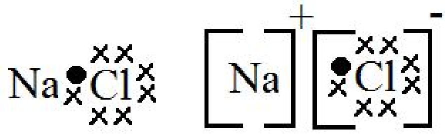
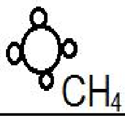
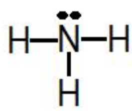
DP1	**DP2**
Representa una "molécula" de cloruro de sodio.	
NaCl  $Na^{+}Cl^{-}$ **Resuelto correctamente:** Sus SQS son formales con diferentes grados de iconicidad. Muestra dibujos figurativos con signos (niveles electrónicos) y descripción con signos normalizados (molecular).	NaCl  **Resuelto correctamente:** Los SQS formales mostrados son el molecular y dos representaciones de Lewis.
En ambos casos observamos en los SQS puntos negros o bolitas que representan electrones como en el modelo Chino.	
¿Cómo representas un compuesto químico?	
Mediante su fórmula química o con su nombre químico. **Respuesta correcta:** Menciona un SQS formal molecular pero no lo presenta y otro lingüístico.	Por su fórmula química: H_2SO_4 Con modelo de esferas:  Fórmula desarrollada:  **Respuesta correcta:** Menciona tres SQS diferentes: formal molecular, gráfico de bolas y formal diagrama de rayas-Lewis.
¿Qué indican los subíndices 2, 2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?	
Que en la molécula de dicromato de potasio hay 2 átomos de potasio, 2 átomos de cromo y 7 átomos de oxígeno. **Respuesta correcta:** Nombra el compuesto correctamente y sólo presenta el significado microscópico de los subíndices en un SQS formal-molecular.	Desde el punto de vista microscópico 2 átomos de K, 2 de Cr, 7 de O. Desde el punto de vista macroscópico 2 moles de átomos de K, 2 moles de átomos de Cr y 7 moles de átomos de O. También indican la relación de átomos que participan en la fórmula. **Respuesta correcta:** Presenta tres significados de los subíndices en una fórmula química, el "microscópico", el macroscópico y el relacionado con la ley de las proporciones definidas y múltiples.

Tabla 6. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

<table>
<tr><th>DP1</th><th>DP2</th></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo representas una reacción química?</td></tr>
<tr><td>

$A+B \longrightarrow AB$

REACTIVOS ⟶ PRODUCTO

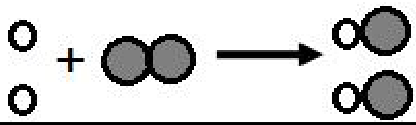
Resuelto correctamente:
Utiliza literales A, B y AB para representar reactivos y productos.
A+B es igual a AB
Expresa una generalización de una reacción de síntesis.

</td><td>

Con símbolos de elementos, signos, subíndices y coeficientes

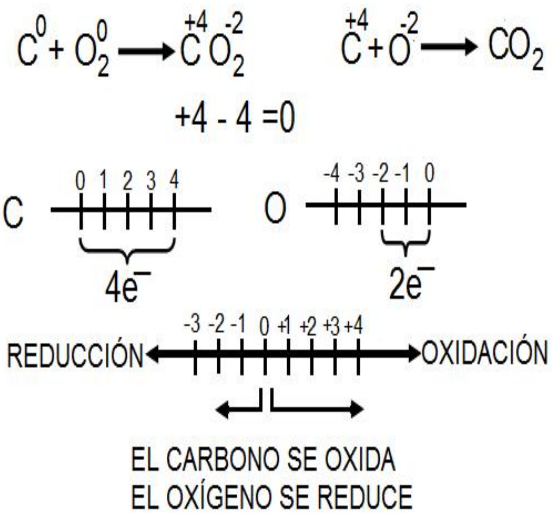
$2Na(s) + Cl_2\ (g) \longrightarrow 2NaCl(s)$

con modelo de esferas, de esferas y de barras:



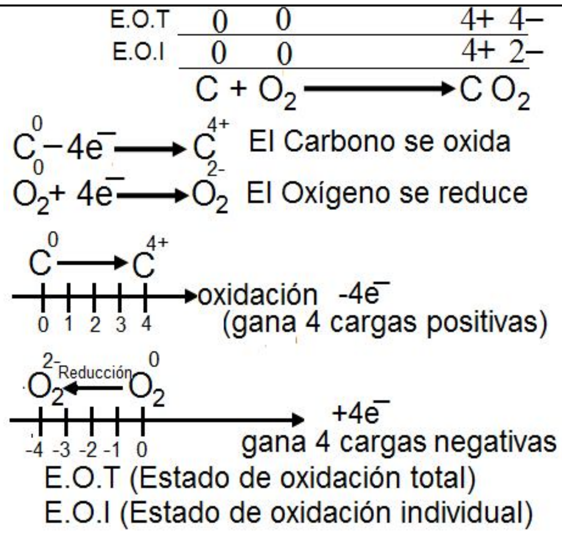
Resuelto correctamente:
Exhibe dos SQS para una misma reacción con balance de materia: el formal-molecular y el de bolas. En el segundo se visualizan a los cambios químicos como reorganización de átomos y se distingue entre elementos y compuestos.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la reacción química de óxido reducción $C+O_2 \rightarrow CO_2$ identifica la especie que se reduce y la especie que se oxida, representa las semi-reacciones con los números de oxidación.</td></tr>
<tr><td>



Resuelto incorrectamente:
Pasa de un SQS a un SMS cuando representa los números de oxidación de los reactivos y productos incorrectamente.
Utiliza la recta numérica para representar el número de oxidación pero no el proceso de cambio y como referencia.
No describe si el carbono gana o pierde electrones. No indica si el oxígeno gana o pierde electrones. No anota las semi-reacciones.

</td><td>



Resuelto correctamente:
Pasa de un SQS a un SMS anotando los EOI y los EOT de las especies que participan en la reacción. Los números de oxidación los representa como 4+, 2- y 2-. El entrecruzamiento de ambos sistemas se observa en las semi-reacciones.
Recurre a la recta numérica para identificar si una especie se reduce o se oxida.
Error: perder cuatro electrones no significa ganar cuatro cargas positivas.

</td></tr>
</table>

REFLEXIONES FINALES

La docente DP1 operó correctamente la adición y sustracción de números enteros. Sin embargo, en las preguntas de sustracción, las respuestas presentan la ausencia de SMS al contestar con lenguaje natural, apareciendo el número como sustractivo. Muestra soluciones incorrectas, en la sustitución numérica con números positivos y negativos en expresiones como "*–a*", en la trasposición de términos y confusión entre signo unario y binario. El uso de la recta numérica no le apoya para representar números simétricos, para ella el simétrico de un número siempre estará a su izquierda. Hay un predominio aditivo en la multiplicación y tiene la tendencia a cerrar expresiones abiertas igualándolas a cero.

El profesor DP2 mostró un grado mayor de competencia formal al exhibir sus respuestas y utilizar a la recta como medio de organización (Freudenthal, 1983) que lo conduce a la extensión de los naturales a los enteros.

En relación a los resultados en química, los cuatro docentes representan a un átomo y a una molécula correctamente, excepto la docente DP1 confundiendo a un átomo con un catión. Muestra dificultades para indicar los números de oxidación de los átomos y compuestos anotados en el superíndice. La recta numérica no le proporciona ayuda para identificar el proceso de pérdida o ganancia de electrones, únicamente para determinar correctamente las especies que se oxidan o se reducen. Las dificultades que presenta la docente DP1 en la reacción de óxido-reducción parecen estar relacionadas con el nivel de conceptualización de los números negativos.

El docente DP2 muestra el mayor grado de competencia formal, sus SQS son formales y gráficos de acuerdo a la clasificación de Galagovsky (2004), exhibe las visiones macroscópicas y microscópicas de los subíndices en las fórmulas químicas, así como la relacionada con las proporciones definidas y múltiples. Identifica las especies que se reducen y se oxidan mostrando la ganancia y pérdida de electrones en las semi-reacciones apoyándose en la recta numérica. Presenta el entrecruzamiento de SQS con los SMS y viceversa. Sin embargo, al pasar de un sistema a otro comete un error, ya que "sumar es igual a restar" en matemáticas, pero en química, quitar cuatro electrones no es igual a "ganar cuatro cargas positivas", es quedar cargado positivamente. Este puede ser un error conceptual o de lenguaje, que puede tener implicaciones en la enseñanza y generar confusión en los alumnos. En matemáticas se pueden proponer estructuras sintácticas equivalentes como: 0-(-4)=0+4=+4. En química "0-(-4e^-)" es una reacción química, mientras que "0+(+4p^+)" representaría una reacción nuclear. Parece ser que el dominio de los SMS ayuda a clarificar conceptos utilizados en los modelos de enseñanza de la química, en el que se deben advertir las semejanzas y diferencias.

El docente DP2 parece tener mayor grado de competencia formal en matemáticas al haber mostrado la extensión de los naturales a los enteros. En química, parece tener el mayor grado de competencia formal al expresar en las resoluciones significados diversos con diferentes representaciones y al operar con los enteros correctamente en las semi-reacciones. La docente DP1 parece tener el menor grado de competencia en matemáticas al resolver incorrectamente 7 de 8 planteamientos en los que se observa no haber realizado la extensión de los naturales a los enteros. En química, parece tener el menor grado de competencia al resolver incorrectamente 2 de 6 planteamientos, porque aunque utiliza diferentes representaciones, no reconoce los diversos significados de los componentes de una fórmula química y no opera correctamente con los números enteros en las semi-reacciones.

De los modelos de enseñanza, la recta numérica a pesar de ser criticada por muchos autores, nos permitió visualizar las dificultades de los docentes en la conceptualización de los números enteros tanto en matemáticas como en química. El modelo chino surge en química como puntos o bolitas con carga eléctrica en las representaciones formales de los átomos y moléculas dibujadas por todos los docentes.

En el aprendizaje de la matemática se advierte el uso de estructuras sintácticas equivalentes a restar números negativos sumando positivos (Bruno y Martinón, 1996). Sin embargo, esto puede ocasionar errores conceptuales en la enseñanza de la química, por ello señalamos la importancia de la enseñanza de la sustracción de números negativos sin el uso de una estructura equivalente.

Se encontraron algunas semejanzas y diferencias en ambos sistemas, como el presentado por la docente DP1 al utilizar una generalización en una reacción de síntesis. En ella representa a un átomo o un compuesto con una letra mayúscula como en lenguaje algebraico y no con símbolos químicos. Se advierte que "AB" es el producto de una reacción, sin que ello signifique que la especie "A" multiplica a la especie "B" como en álgebra, sino por medio de una unión química.

Uno de los entrecruzamientos de los SMS y de los SQS se observa en las semi-reacciones mostradas por el docente DP2, en donde el carbono con número de oxidación cero pierde electrones quedando cargado positivamente. Esos electrones son transferidos al oxígeno quedando cargado negativamente. Las semi-reacciones son representadas en la recta numérica. Se observaron diferentes entrecruzamientos entre los SMS y los SQS. Un posterior estudio podría dar cuenta de otros entrecruzamientos entre los SMS y los SQS.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benarroch, A., Matus, L. y Nappa, N. (2011). La modelización del enlace químico en libros de texto de distintos niveles educativos. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 10*(1), 178-201.

Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Grader´s Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194-245.

Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos: sumar=restar. *Uno, 10*, 123-132.

Chamizo, J. A. (2006). Los modelos de la Química. *Educación Química, 17*(4), 476-482.

Cruz, D., Chamizo, D. y Garritz, A. (1986). *Estructura atómica. Un enfoque Químico.* México: Addison Wesley Iberoamericana.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Los Países: Reidel.

Galagovsky, L. (2004). Del aprendizaje significativo al aprendizaje sustentable. Parte 2: Derivaciones comunicacionales y didácticas. *Enseñanza de las ciencias, 22*(3), 349-365.

Gallardo, A. (1994). Negative numbers in Algebra. The use of a teaching model. *Psychology of Mathematics Education*, 376-383.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1994). School Algebra: Syntactic difficulties in the operativity with Negative Numbers. En D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 159-165). Baton Rouge, LA: North American Chapter.

Gallardo, A., Santos, N. y Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida, España: SEIEM.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age an ability. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Assissi, Italia: PME.

Perales, F. J. y Jimenez, J. (2004). Las ilustraciones en los libros de Física y Química de la ESO. *Revista de Educación Abierta. Aspectos didácticos de Física y Química, 12*, 11-65.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en investigación de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (107-126). Huesca: SEIEM.

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Exploratory study of attitudes towards statistics in high school students

Salinas, J.[a] y Mayén, S.[b]

[a]Universidad Nacional Autónoma de México, [b]Instituto Politécnico Nacional, México

Resumen

En los últimos tiempos ha sido reconocida la importancia de los aspectos afectivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Se presenta un estudio exploratorio que forma parte de una investigación más amplia con el objeto de analizar las actitudes hacia la Estadística que tienen estudiantes mexicanos de bachillerato de dos sistemas educativos distintos. Con este fin, se ha aplicado la Escala de Actitudes hacia la Estadística EAEE a 277 estudiantes del CCH-UNAM, siendo en éste una materia optativa. Se observa que estos estudiantes reconocen la importancia y utilidad de la Estadística en su área de estudios y en la vida diaria, y que en estos centros escolares son las mujeres quienes prefieren estudiarla. La falta de estudios previos de Estadística se está considerando como un elemento que determine una actitud favorable o desfavorable.

Palabras clave: *Actitudes hacia la Estadística, escala EAEE, estudiantes de bachillerato*

Abstract

In recent times the importance of affective aspects in the teaching and learning of statistics has been well acknowledged. An exploratory study, which is part of a wider investigation in order to analyze the attitudes towards statistics with Mexican high school students from two different educational systems, is presented. To this goal, we have applied the Scale of Attitudes Toward Statistics EAEE to 277 students from CCH-UNAM, in that statistics is an elective. The students accept the importance and usefulness of statistics in their field of study and daily life; the female students are those who prefer to study this subject. The lack of previous statistical studies is being considered as an element that determines a favorable or unfavorable attitude.

Keywords: *Attitudes towards statistics, EAEE scale, high school students*

INTRODUCCIÓN

Dentro de la investigación en Educación Estadística existen diversas preocupaciones, como se señala en numerosos trabajos, orientados al análisis de la comprensión de conceptos estocásticos, a la formación de profesores en Estadística o a su inclusión curricular (Batanero, Burrill y Reading, 2011). Sin embargo, en la última década han cobrado importancia estudios relacionados con las actitudes hacia la Estadística tanto de la población estudiantil como del profesorado (Estrada, 2007) como resultado de que los educadores han observado que los aspectos afectivos influyen en su aprendizaje (Mato y Fernández, 2009). Estudios como los de Estrada (2002 y 2007), Estrada, Bazán y Aparicio (2010), y Escalante, Repetto y Mattinello (2012) son ejemplo de ello. A partir de las actitudes hacia las matemáticas surgen las escalas que miden estos constructos, ahora orientadas hacia la Estadística, contemplando como principales elementos de análisis los componentes que las constituyen. Las más usadas son el SAS-*Statistics Attitude Survey* (Roberts y Bilderback, 1980), el ATS-*Attitudes Toward Statistics Scale* (Wise, 1985) y el SATS-*Survey of Attitudes Towards Statistics* (Schau, Stevens, Dauphine y del Veccio, 1995).

El constructo sobre la actitud se origina en el campo de la psicología social y deriva en múltiples definiciones que apuntan a la organización durable de procesos motivacionales, perceptuales y

Salinas, J. y Mayén, S. (2015). Estudio exploratorio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 503-509). Alicante: SEIEM.

cognitivos respecto a algún aspecto del mundo del individuo (Padua y Ahman, 1979); a un *constructo* psicológico en el que se combinan creencias y emociones y que predisponen a un individuo a responder ante otras personas, objetos e instituciones de una manera positiva o negativa; a la tendencia a evaluar un objeto o constructo en términos positivos o negativos (Severy, 1974). Estas definiciones coinciden en que la actitud es un constructo del comportamiento; que son disposiciones internas de un individuo a actuar en una persona, objeto o situación. Una actitud no lleva a una conducta, pero la conducta puede considerarse como factor que se relaciona con la actitud (Escalante et al., 2012). La tendencia de las actitudes hacia la Estadística se forma a lo largo del tiempo como consecuencia de las emociones y sentimientos en el contexto del aprendizaje de las matemáticas y la Estadística (Gal y Garfield, 1997). En el dominio sobre las actitudes hacia la Estadística, se señala que éstas se componen de diversos elementos: cognitivo, afectivo, comportamental o tendencial. Son bastante estables, de intensidad moderada, se expresan positiva o negativamente (agrado-desagrado, gusto-disgusto) y, en ocasiones, pueden representar sentimientos vinculados externamente a la materia: profesor, actividad, libro (Auzmendi, 1992).

En este estudio entenderemos la actitud hacia la Estadística como una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. De acuerdo con esta interpretación, el objetivo del estudio es analizar las actitudes hacia la Estadística que tienen estudiantes mexicanos de nivel de bachillerato. Esta iniciativa forma parte de un estudio más amplio que consiste en analizar dichas actitudes en grupos de alumnos con características semejantes pero de sistemas de bachillerato distintos. En uno, la Estadística es materia obligatoria y en el otro, es opcional; se pretende también explorar las actitudes de sus profesores, de lo que presentaremos resultados en otro momento.

Para esta comunicación nos centraremos alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México (CCH-UNAM), ya que terminan el bachillerato y en poco tiempo experimentarán un cambio de nivel educativo puesto que en general pasarán a la universidad. Así también, porque la Estadística en este sistema de bachillerato es de carácter opcional, por lo que los estudiantes al pasar al último año tienen que elegir entre cursar Cálculo Diferencial e Integral, Cibernética y Computación, y Estadística y Probabilidad, que en un sentido lógico, esta elección tendría que estar vinculada con la Profesión que pasarían a estudiar. Por otro lado, no hemos encontrado en el contexto científico mexicano registros de este tipo de estudios dirigidos a poblaciones del mismo nivel escolar.

METODOLOGÍA

Describimos en esta sección el instrumento, la muestra, las variables género y escolares, y el procedimiento seguido para analizar la información, mismo que realizamos con el software SPSS.

Cuestionario

Utilizamos la *Escala de Actitudes hacia la Estadística* EAEE (Estrada, 2002) para esta investigación. Este es un instrumento de medición y evaluación de actitudes hacia la Estadística de más reciente creación, validado desde el momento de su construcción; se ha administrado a diversos grupos de estudiantes españoles universitarios, a profesores en formación y en ejercicio, y poblaciones de otros contextos. Aunque fue diseñada para aplicarse a profesores, en nuestro caso la hemos considerado adecuada para nuestros alumnos, pues recoge elementos referentes a la utilidad, formación y multidisciplinariedad de la Estadística, y a cuestiones relacionadas con el trasfondo social, económico y cultural (Estrada, 2010). De esta forma, podremos tener un primer acercamiento sobre lo que los estudiantes sienten y valoran respecto a la Estadística.

Este instrumento es una composición de tres escalas: Escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980), Escala ATS (Wise, 1985) y Auzmendi (1992), que han sido las más utilizadas en el ámbito de la medición de actitudes. De éstas se han extraído para su construcción los componentes antropológicos y pedagógicos (Auzmendi, 1992; Gil Flores, 1999; Estrada et al., 2003). La Tabla 1 presenta la distribución de los componentes que se evalúan en cada ítem.

Componentes antropológicos: *Social,* son las actitudes relacionadas con la percepción y valoración del papel de la Estadística en el ámbito sociocultural de cualquier ciudadano. *Educativo,* analiza el interés hacia la Estadística y su aprendizaje, la visión de su utilidad para el alumno, su opinión sobre si debiera ser incluida en el currículo y la dificultad percibida. *Instrumental,* recoge la utilidad hacia otras materias, como forma de razonamiento y como componente cultural.

Componentes pedagógicos: *Afectivo,* sentimientos personales hacia el estudio de la Estadística, agrado-desagrado, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por los temas. *Cognitivo,* incluye las concepciones y creencias acerca de la Estadística, comprensión de conceptos, resolución de problemas y su percepción en el mundo actual, la ciencia y la escuela. *Comportamental,* comportamiento respecto a la Estadística, es la tendencia a la acción, la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, su utilidad.

Tabla 1. Componentes antropológicos

	Social	*Educativa*	*Instrumental*
Afectivo	1, 11,25	7, 12, 23	10, 13, 16, 20
Cognitivo	2, 19, 21	4, 6, 17	3, 24
Comportamental	9, 18	8, 15, 22	5, 14

La escala contiene 25 ítems que constan de un enunciado y 5 posibles respuestas: muy en desacuerdo (1 punto), en desacuerdo (2 puntos), indiferente (3 puntos), en acuerdo (4 puntos) y muy en acuerdo (5 puntos). Como no todos los ítems están redactados en el mismo sentido, se han codificado de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Los ítems que expresan una actitud favorable son: 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 22 y 24, y los que expresan una actitud desfavorable: 1, 3, 6, 9, 11, 14, 15, 19, 21, 23 y 25.

Muestra

Está compuesta por 277 estudiantes mexicanos de entre 17 y 18 años de edad, del 5º semestre de bachillerato procedentes de los centros escolares del CCH-UNAM; todos han elegido estudiar Estadística, pues como ya hemos mencionado, es una materia opcional y el primer curso que se tiene en este nivel. Se les aplicó la escala EAEE al inicio del curso.

Variable género

Este sistema de bachillerato es mixto y de conocimientos generales. Entendemos que conocer la composición de la muestra por género es de importancia significativa, pues cabría esperar que el número de estudiantes tuviese una distribución uniforme.

Tabla 2. Distribución de estudiantes por género y centro escolar

CCH	Frec H	%	Frec M	%	Total
AZC	18	19	38	21	56
NAU	19	20	38	21	57
OTE	25	26	29	16	54
SUR	12	12	24	13	36
VAL	22	23	52	29	74
Total	96	100	181	100	277

Sin embargo, se observa que las mujeres superan notablemente al número de hombres que respondió la Escala (Tabla 2), casi en todos los centros las mujeres representan el doble de los varones, lo que sugiere mayor preferencia para estudiar Estadística por parte de las mujeres.

Variables escolares

Aunque el currículo mexicano de educación básica (escuela primaria y secundaria) incluye temas introductorios a la Estadística, los resultados señalan que la mitad (49.8 %) de estos estudiantes *nunca* la han estudiado, sumadas con las respuestas que indican que han tenido algún curso hasta el *bachillerato,* representan casi 75 %; sólo 22 % la ha estudiado en *secundaria* y unos cuantos en *primaria* (1.8 %).

RESULTADOS

Presentamos los resultados para cada uno de los 25 ítems y por cada categoría de respuestas (muy en desacuerdo… muy de acuerdo); se considera el número de casos, sus medias y desviaciones típicas, las cuales se interpretan en forma positiva (una media alta, indica una actitud positiva). Los ítems 1, 3, 6, 9, 11, 14, 15, 19, 21, 23 y 25 tienen una tendencia negativa, por tanto, su puntuación será inversa y sus indicadores reflejarán una actitud contraria al enunciado del ítem (Tabla 3).

Ítems mejor valorados

El primer dato sobresaliente es el resultado del ítem *21, La estadística no sirve para nada,* con una media de 4.57; su interpretación es contraria al enunciado, lo que significa una respuesta positiva muy elevada, corresponde a componentes social-afectivo. Notamos que 193 estudiantes contestan “muy en desacuerdo” y 64 “en desacuerdo”, lo que apunta que 257 alumnos, es decir, casi todos piensan que la Estadística es muy útil y muestran una actitud favorable. Estos resultados coinciden con los mejores valorados por futuros profesores, en el estudio de Estrada (2007) y utilizando la escala SATS. El segundo ítem relevante es el *6, En la escuela no se debería de enseñar estadística,* al cual 143 estudiantes contestaron “muy en desacuerdo” y 102 “muy de acuerdo”, con una media de 4.35. También es un resultado muy positivo, ya que un alto número de estudiantes reconocen la necesidad de aprender Estadística. Esta tendencia confirma los resultados de Estrada et al., (2010) usando esta escala con alumnos peruanos, y los de Estrada (2002 y 2007) en sus respectivos estudios con futuros profesores con la escala SATS. Sus componentes corresponden a aspectos educativos y cognitivos relacionados con el interés de mantener la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. El siguiente ítem notable por su puntuación global es el *23, Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística,* que obtuvo una media de 4.23. Hay una ligera diferencia con los anteriores y también tiene una interpretación contraria. Sus componentes se relacionan con aspectos educativo-afectivo, que indica que los estudiantes muestran sentimientos de afecto hacia esta materia y la necesidad de aprender Estadística. Otro ítem de esta categoría es el *19, La estadística sólo sirve para la gente de ciencias,* con una media de 4.19. Un total de 233 estudiantes respondieron positivamente a este ítem que evalúa las componentes social y cognitiva; se infiere que la Estadística no sólo sirve para los que estudian ciencias; también es una herramienta que se aplica en otras áreas de conocimiento. Estos resultados se contraponen a las opiniones de profesores españoles en formación, que no perciben parcialmente la utilidad de esta materia (Estrada, 2002). Finalmente, el ítem 2, *La estadística ayuda a entender el mundo de hoy,* alcanzó una media de 4.02 y obtuvo una puntuación alta, con 232 estudiantes que piensan que la Estadística es útil para entender el mundo actual, lo que justifica su enseñanza como parte de la formación básica de todos los ciudadanos (Gal, 2002). También es un ítem que integra las componentes social y cognitiva.

Ítems peor valorados

El ítem con la puntuación más baja fue el *3, A través de la estadística se puede manipular la realidad,* con una media de 2.18, tiene componentes instrumental-cognitivo. Este es un caso concreto que coincide con estudios de otros contextos, entre ellos, el de Estrada (2002), pues la idea del enunciado genera incertidumbre hacia los datos estadísticos. Muchos autores señalan que la Estadística tiene mala imagen, por el mal uso que se le da en la política o en la publicidad. Le sigue el ítem *14, Utilizo poco la estadística fuera de la escuela,* que tiene una media de 2.61, a este ítem

145 estudiantes respondieron negativamente, si aumentamos 75 que respondieron de manera indiferente, podemos concluir que en definitiva, los estudiantes no usan la Estadística, lo que se podría explicar por la insuficiencia de cursos que han tenido o falta de reconocimiento de situaciones problemáticas donde se aplica; es de componentes instrumental-comportamental. Este resultado también aparece con futuros profesores peruanos.

Tabla 3. Resultados en los ítems para el total de la muestra

Ítem	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indiferente	En acuerdo	Muy en acuerdo	Media	Desviación estándar
1. Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de TV	16	47	147	57	10	3.01	.87
2. La estadística ayuda a entender el mundo de hoy	2	9	34	171	61	4.01	.73
3. A través de la estadística se puede manipular la realidad	6	33	40	122	76	2.17	1.0
4. Es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	4	10	51	158	54	3.90	.8
5. Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	8	27	80	130	32	3.55	.92
6. En la escuela no se debería enseñar estadística	143	102	23	5	4	4.35	.82
7. Me divierto en las clases que se explica estadística	10	27	100	107	33	3.45	.94
8. Los problemas de estadística me resultan fáciles	11	65	53	123	25	3.31	1.0
9. No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa	24	88	109	51	.5	3.27	.92
10. Me gusta la estadística porque me ayuda comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas	5	20	86	144	22	3.57	.81
11. Me siento intimidado ante datos estadísticos	45	98	84	42	8	3.47	1.0
12. Encuentro interesante el mundo de la estadística	8	22	97	130	20	3.48	.85
13. me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	9	28	109	103	28	3.41	.91
14. Utilizo poco la estadística fuera de la escuela	12	45	75	112	33	2.60	1.03
15. En clase de estadística nunca entiendo de que están hablando	90	122	30	29	6	3.94	1.02
16. Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente	14	32	135	84	12	3.17	.87
17. La estadística es fácil	16	50	68	112	31	3.33	1.07
18. Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas	5	20	57	145	50	3.78	.88
19. La estadística solo sirve para la gente de ciencias	114	119	31	8	5	4.19	.87
20. Me gusta hacer problemas cuando uso la estadística	13	38	130	82	14	3.17	.89
21. La estadística no sirve para nada	193	64	10	6	4	4.57	.78
22. A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido	30	42	107	88	10	3.02	1.02
23. Si pudiera eliminar alguna materia seria la estadística	142	83	35	8	9	4.23	.99
24. La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas	3	11	45	160	58	3.94	.79
25. Evito las informaciones estadísticas cuando las leo	51	96	101	25	4	3.60	.93

Análisis de la puntuación total por alumno

Para analizar la puntuación total en actitudes de cada alumno respecto a la Estadística se tiene que observar la suma de las puntuaciones de los 25 ítems. De esta manera, esta escala tipo Likert valora de entre 25 hasta 125 puntos, es decir, de una puntuación totalmente negativa hasta una muy positiva, por tanto, cuanto más alta sea esta puntuación, más favorable será su actitud. Una puntuación de 75 refiere una actitud indiferente o neutra y todas las puntuaciones superiores serán más favorables cuando mayor sea el valor obtenido en la escala de medida.

La puntuación total osciló entre 58 y 113 por alumno, por lo que ninguno tiene una actitud totalmente negativa ni totalmente positiva hacia la Estadística. De estos, 21 tienen una actitud negativa (7.6 %), que representan un bajo porcentaje para el conjunto de la muestra; sólo 2 muestran indiferencia (0.7 %); y 254 tienen una actitud favorable hacia la Estadística (91.7 %), tendencia que va en aumento.

Conclusiones

La aplicación de la Escala EAEE a los estudiantes de CCH en esta primera etapa ha permitido detectar sus actitudes hacia el estudio de la Estadística, que marcan una tendencia favorable y nuestras evidencias más concretas derivan de aquellos ítems sobresalientes que evalúan componentes de tipo social, cognitivo, afectivo y educativo.

Siguiendo esta línea de investigación y también la propuesta por Carmona (2004), quien señala la relación de las actitudes y la ansiedad hacia la Estadística con el rendimiento en Estadística, el abandono de asignaturas optativas o la falta de asistencia a la convocatoria de exámenes en este campo, nos llama la atención en nuestros primeros resultados, que al ser ésta una asignatura opcional en un sistema escolar mixto, son las mujeres quienes prefieren estudiar Estadística, ya que representan el doble o más de hombres que respondieron en cada centro. En los trabajos de Estrada (2010) y Estrada et al. (2010), con estudiantes de magisterio españoles y peruanos respectivamente, y por otra parte, el de Escalante (2012) con estudiantes argentinos de psicología, no se han encontrado diferencias significativas al respecto.

Otro resultado relevante es el interés que mantienen los estudiantes por el aprendizaje de la Estadística, que queda de manifiesto en el ítem 6, y reconocen la importancia y utilidad tanto para su área de estudios como para la vida diaria. En otros análisis con la escala SATS, basada en el conocimiento, los resultados son semejantes.

La falta de estudios previos de Estadística en los alumnos de bachillerato es consistente con investigaciones de autores ya mencionados; lo cual puede ser un elemento que determine una actitud favorable o desfavorable. Nuestra investigación sigue su curso y, en otro momento, informará si las actitudes de estudiantes del mismo grado escolar pero en distintos escenarios son persistentes o presentan diferencias, lo cual también deberá estudiarse con respecto a las actitudes por parte de los profesores.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Bilbao: Mensajero.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study.* Nueva York: Springer.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal,* 3(1), 5-28.

Escalante, E., Repetto, A. y Mattinello, G. (2012). Exploración y análisis de la actitud hacia la estadística en alumnos de psicología. *Liberabit, 18*(1), 1-18.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: Un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). La Laguna: SEIEM.

Estrada, A. (2010). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la Escala EAEE para profesores. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM.

Estrada, A., Bazán, J. y Aparicio, A. (2010). Un estudio comparativo de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Unión, 24,* 45-56.

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg, Holanda: IOS Press.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía, 214,* 567-590.

Mato, M. D., de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 285-300). Santander: SEIEM.

Padua, J. y Ahman, I. (1979). *Escalas para la medición de actitudes.* En J. Padua (Ed.), *Técnicas de investigación aplicadas a las ciencias sociales* (pp. 154-230). México DF: FCE.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA, 4*(1), 23-35.

Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement, 40,* 235-238.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y del Veccio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement, 55,* 868-875.

Severy, L. (1974). *Procedures and issues in the measurement and evaluation, educational testing service.* Princeton, NJ: National Institute of Education.

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Evaluation of primary teachers' common knowledge of contents to teach probability

Vásquez, C.[a] y Alsina A.[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universidad de Girona

Resumen

En este estudio se evalúa el conocimiento común del contenido de profesores de Educación Primaria en activo para enseñar probabilidad. Para ello se analizan las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de 93 profesores de primaria al cuestionario CDM-Probabilidad, fundamentado en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Los resultados muestran que la gran mayoría de los participantes en el estudio presentan un conocimiento común del contenido insuficiente, sobre todo en lo que respecta a la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades (3,2% de respuestas correctas), la independencia de sucesos en ensayos repetidos (5,3% de respuestas correctas) y la comprensión de suceso seguro (5,4%). Se concluye que urge desarrollar instancias de perfeccionamiento que permitan adquirir un conocimiento adecuado para una enseñanza idónea de la probabilidad.

Palabras clave: *probabilidad, modelo CDM, conocimiento común del contenido, profesorado, educación primaria*

Abstract

This study evaluates the level of knowledge held by in-service primary school teachers for teaching probability. In order to do this, we analyse the mathematical practices present in the answers given by 93 primary teachers to the CDM-Probability questionnaire, based on the Didactic-Mathematical Knowledge model (CDM). Results show that the vast majority of the study participants show insufficient understanding of content, especially in regard to the independence of events linked to the calculation of probabilities (3.2% of answers correct), the independence of events in repeated trials (5.3% of answers correct) and the understanding of certain events (5.4%). It is concluded that the development of ongoing teacher training is urgently required to enable teachers to acquire adequate knowledge to be able to teach probability effectively.

Keywords: *probability, DMK model, common content knowledge, school teachers, primary education*

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas la probabilidad se ha incorporado desde muy temprana edad en los currículos de numerosos países. Un aspecto clave para asegurar que estas nuevas propuestas curriculares tengan éxito es la formación del profesorado, pues la mayoría de maestros de Educación Primaria tienen poca o ninguna preparación sobre probabilidad y su didáctica. Debido a esta falta de preparación, en muchas ocasiones la enseñanza de la probabilidad se omite, y cuando se realiza, se focaliza principalmente en la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz, Serrano, 2007). Esta situación impide el desarrollo de una experiencia estocástica basada en una metodología

Vásquez, C., y Alsina, A. (2015). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 511-520). Alicante: SEIEM.

activa y exploratoria de fenómenos aleatorios que permita el desarrollo de un razonamiento probabilístico desde la infancia (Sthol, 2005).

A pesar de que en los últimos años las investigaciones en torno al tema han empezado a aumentar debido al impulso dado por el *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) *Study 18, "Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education*" (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008; Batanero, Burrill y Reading, 2011), todavía siguen siendo escasas, sobre todo en relación al profesorado en activo de Educación Primaria. Desde esta perspectiva, en este trabajo presentamos un estudio centrado en evaluar y analizar el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad de maestros de Educación Primaria en activo. Para ello se asume el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático CDM (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013), que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

FUNDAMENTOS

Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de matemáticas

Godino (2009) propone un modelo integrador para el conocimiento del profesor de matemáticas que denomina modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) e incluye las distintas facetas y componentes implicadas en el análisis didáctico-matemático. Dicho modelo considera tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático (Pino-Fan et al., 2013):

1. *Conocimiento común del contenido*: se refiere a los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones-problema en relación a un tema de en un nivel educativo determinado en el que se enmarca la situación-problema, y se analiza a través de la faceta epistémica.
2. *Conocimiento avanzado del contenido*: es también un conocimiento de tipo matemático que se refiere a que el profesor, además de saber resolver situaciones problemas sobre un determinado tema y nivel, debe poseer conocimientos más avanzados del currículo. Se analiza a través de la faceta epistémica.
3. *Conocimiento especializado*: se refiere al conocimiento adicional que diferencia al profesor de otras personas que saben matemáticas. Este conocimiento es interpretado desde la faceta epistémica, y considera cuatro subcategorías: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, y conocimiento del contenido en relación con el currículo.

En la figura 1 (Godino, 2014) se muestra una representación del modelo CDM, en la que se usan las facetas, componentes y criterios de la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011) para categorizar los conocimientos del profesor de matemáticas descritos.

Así, a través de las categorías que propone el modelo CDM y mediante la utilización de las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona el EOS, es posible analizar, interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor de matemáticas.

Conocimiento probabilístico del profesorado de Educación Primaria

Una de las primeras investigaciones en torno a las concepciones y el conocimiento probabilístico fue realizada por Azcárate (1995), quien detectó concepciones erróneas y dificultades en relación a la noción de probabilidad, además de una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y del conocimiento probabilístico en 57 futuros maestros. Posteriormente, Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) analizan las respuestas a un cuestionario sobre sucesos aleatorios, encontrando que la mayoría de participantes no reconocen la aleatoriedad de los fenómenos presentados, sobre todo cuando están vinculados al contexto cotidiano.

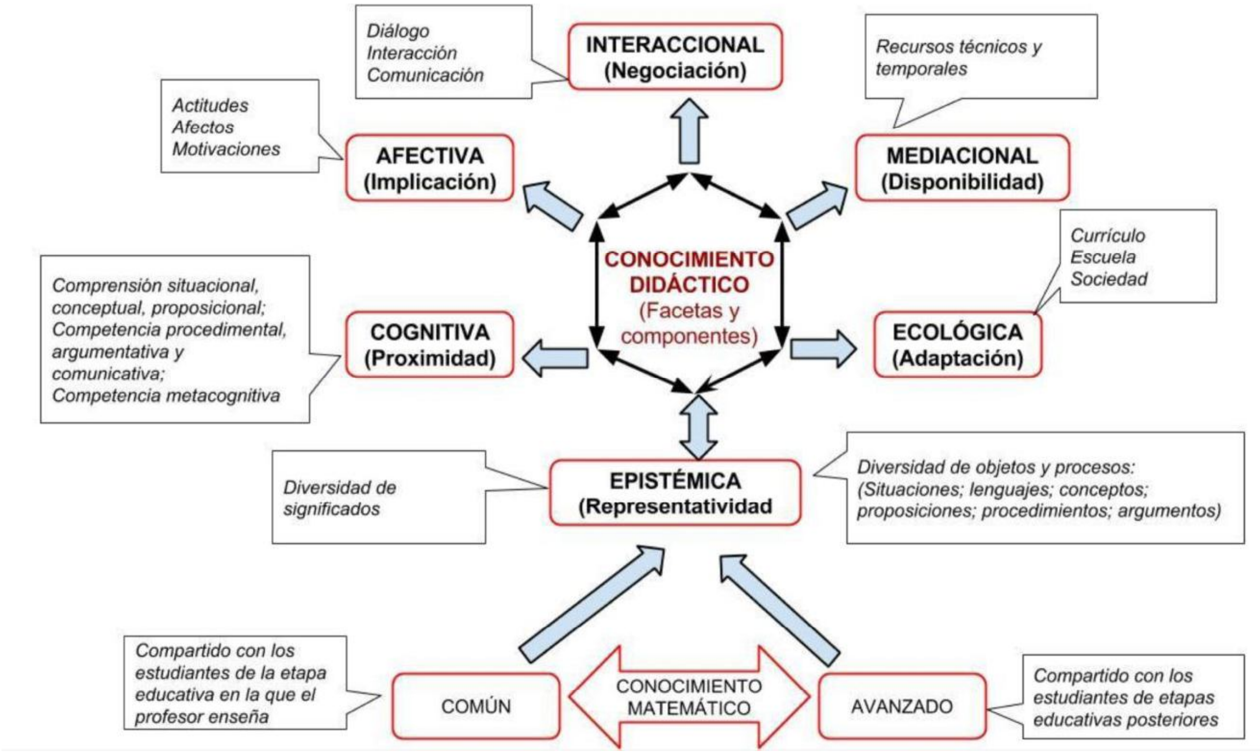


Figura 1. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2014, pág. 52).

Begg y Edward (1999) realizan entrevistas y aplican un cuestionario a 22 maestros australianos, y los resultados indican una escasa comprensión de la probabilidad y de las nociones que subyacen a ella, evidenciando la presencia de la heurística de la representatividad, el sesgo de la equiprobabilidad y dificultades para interpretar un enunciado de probabilidad de manera no probabilística.

Batanero, Godino y Cañizares (2005) evalúan la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico de 132 futuros maestros, obteniendo que un 60% razonan según la heurística de la representatividad, otro 60% presenta el sesgo de equiprobabilidad y un 23% muestradificultades para interpretar un enunciado probabilístico en forma no probabilística (estos sesgos fueron reducidos y mejorados al utilizar metodologías de enseñanza basadas en la simulación). En esta misma línea, Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evalúan las estrategias para resolver problemas elementales de comparación de probabilidades en 102 futuros maestros. Los resultados evidencian una mejora con respecto a investigaciones anteriores, aun cuando se observa que un grupo importante muestra una falta de razonamiento proporcional.

Ortiz, Batanero y Contreras (2012) evalúan el conocimiento sobre la idea de juego equitativo de 167 futuros maestros a partir de las soluciones a dos problemas de respuesta abierta. Los resultados muestran que tienen un conocimiento suficiente y que aplican estrategias en su mayoría correctas para decidir si un juego es o no equitativo. Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2013), a partir de la aplicación de un problema sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad a 157 futuros maestros, observan que se produce una mezcla de intuiciones y creencias correctas e incorrectas sobre la forma de percibir la aleatoriedad. Asimismo, detectan sesgos como la falacia del jugador o el enfoque en los resultados, además de concepciones erróneas sobre la equiprobabilidad o la falta de comprensión de la independencia de sucesos. Mohamed (2012) evalúa el conocimiento común del contenido de 283 futuros maestros en relación a la idea de juego equitativo, a través de un problema extraído de un libro de texto de Educación Primaria. Los resultados evidencian que la mayoría tienen un escaso conocimiento, y los errores y dificultades más comunes son el sesgo de la equiprobabilidad y la falacia del jugador. También Gómez (2014) evalúa el conocimiento común del contenido sobre probabilidad según sus distintos significados y, aunque los resultados son bastante alentadores, indican un pobre razonamiento probabilístico y un predominio de las estrategias aritméticas.

En síntesis, los resultados de las investigaciones vinculadas al conocimiento matemático para enseñar probabilidad en Educación Primaria evidencian que en general es muy deficiente, presentando en algunos casos los mismos errores y dificultades que los alumnos de la etapa escolar.

MÉTODO

Con el fin de evaluar y analizar el conocimiento común del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de Educación Primaria en activo, se diseñó y validó el cuestionario CDM-Probabilidad, el cual se basa en el modelo del conocimiento didáctico-matemático y en la metodología que este modelo propone, que incluye dos fases: en primer lugar se elige una tarea matemática que lleve a los profesores a poner en juego, por medio de la solución de la tarea o situación, los aspectos más relevantes en relación al tema probabilidad que se pretende evaluar; y en segundo lugar, se formulan ítems de evaluación o propuestas de actividades que contemplen las distintas facetas del conocimiento del profesor que se desean evaluar y analizar. Desde esta perspectiva, se obtuvo la definición semántica de la variable objeto de medición, que considero dos componentes, por un lado una de tipo curricular que contempla el contenido de probabilidad, y por otro, una de tipo ontosemiótico referida al significado institucional del contenido de probabilidad. Con este propósito se analizaron distintos aspectos vinculados a estos componentes, que son de interés para este estudio (análisis histórico-epistemológico, significados, orientaciones curriculares, análisis de libros de texto escolar, investigaciones previas, etc.). A partir del análisis de los puntos antes señalados, se elaboró una tabla de contenidos (Tabla 1), en la cual se reflejan los aspectos centrales del significado de referencia que se pretende evaluar.

Tabla 1. Contenidos que se espera movilizar en el conjunto de ítems que conforman el cuestionario del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad.

Contenidos	Ítems						
	1	2	3	4	5	6	7
Experimento y suceso aleatorio	x	x	x	x		X	x
Espacio muestral	x	x	x	x	x	X	x
Posibilidad de ocurrencia (seguro, posible, imposible)		x	x		x		
Significados de la probabilidad	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo de probabilidad	x	x		x		x	x
Comparación de probabilidades		x		x		x	
Independencia de sucesos	x				x		x
Equiprobabilidad	x			x		x	x

Una vez diseñado dicho cuestionario, se procedió a su validación por medio de una aplicación piloto a un grupo reducido de profesores y la evaluación de juicio de expertos, lo que permitió, finalmente, disponer la versión definitiva del instrumento. Dicho instrumento compuesto por siete ítems de elaboración propia o reformulados a partir de investigaciones previas (Cañizares, 1997; Fischbein y Gazit, 1984; Green, 1983), permite explorar ciertos aspectos parciales o iniciales de las distintas categorías y subcategorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, por medio del planteamiento de situaciones problemáticas de enseñanza hipotéticas, a los profesores, para analizar sus prácticas matemáticas operativas y discursivas ligadas a sus configuraciones cognitivas. Específicamente, para evaluar el conocimiento común del contenido se pidió a los maestros que resolvieran las situaciones-problema planteadas

(Figura 2) o bien que respondieran a preguntas del tipo: ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas?, ¿Considera correcta la respuesta de este alumno?, etc.

El cuestionario CDM-Probabilidad fue aplicado a 93 profesores de Educación Primaria de 22 centros educativos que imparten clases de matemáticas de 1º a 6º en la región de La Araucanía (Chile). Estos profesores asistieron a un Seminario-Taller gratuito sobre "Enseñanza de la probabilidad en la Educación Básica" realizado por una universidad del sur de Chile. Los profesores accedieron a responder voluntariamente el cuestionario CDM-Probabilidad después de la firma del consentimiento informado y de la revisión de las instrucciones.

Ítem 1: La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Luís: *es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.*

Andrés: *es igual de probable que salga cara o sello.*

Lucía: *es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.*

Responda:

a) Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez

Ítem 2: La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Caja A: 3 bolas blancas y 3 negras

Caja B: 3 bolas blancas y 5 negras

Responda:

a) Resuelva el problema

Ítem 3: El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:

Carla: *tres porque hay tres tipos de colores.*

Antonio: *tendrá que cogerlas todas y así estará lo más seguro posible.*

Raúl: *si se sacaran primero las bolas rojas y verdes, serían siete, pero como son una de cada color, pues ocho.*

Karina: *para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total y hay de tres colores, hay que dejar tres bolas en la caja, una de cada color.*

Responda:

a) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?

<u>Ítem 4:</u> Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:

a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

<u>Ítem 5:</u> Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón:

"la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

<u>Ítem 6:</u> Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua.

Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

<u>Ítem 7:</u> Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema

Figura 2. Ítems y preguntas del CDM-Probabilidad que evalúan el conocimiento común del contenido.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para analizar el conocimiento común del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo se analizaron las prácticas matemáticas presentes en las respuestas obtenidas a las distintas preguntas y situaciones problemáticas presentadas en los ítems 1a), 2a), 3a), 4a) y 7a), 5 y 6 del Cuestionario CDM-Probabilidad, que cubren los distintos contenidos explicitados en la tabla 1. De acuerdo a lo planteado por Godino, Batanero y Font (2007), este conocimiento es inobservable, no obstante el conjunto de prácticas presentes en las respuestas de los profesores a las situaciones problemáticas planteadas permitió obtener indicadores empíricos para la evaluación del conocimiento común del contenido.

De este modo, una vez recogidos los datos se analizaron las respuestas y los argumentos presentes en ellas, codificándolas según el "grado de corrección", asignando las siguientes puntuaciones: "2" si la respuesta es correcta, "1" si es parcialmente correcta y "0" si es incorrecta. Los porcentajes de acuerdo con el grado de corrección así como el porcentaje de respuestas sin responder para cada una de las preguntas que evalúan el conocimiento común del contenido se muestran en la figura 3.

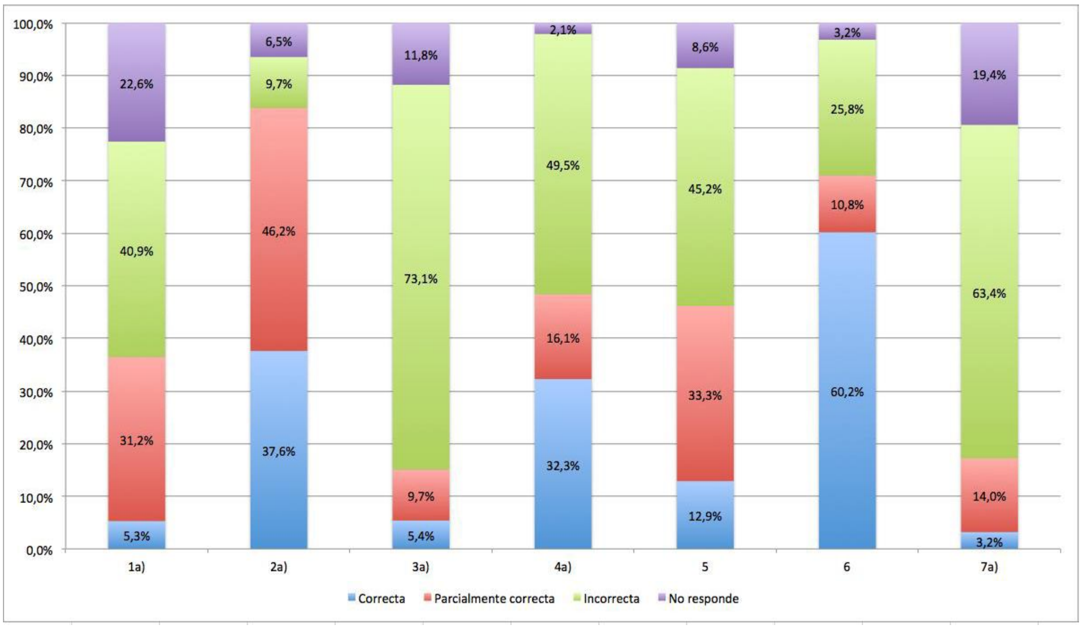


Figura 3. Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento común del contenido de acuerdo con el grado de corrección.

Los resultados muestran que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de gran parte de los participantes es de un nivel muy insuficiente, pues el porcentaje promedio de respuestas correctas no supera el 22,4%, lo que denota que los profesores presentan serias dificultades para resolver correctamente las situaciones problemas planteadas producto de concepciones erróneas y de la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos.

En lo que respecta a la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos, bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio (pregunta 1a) resultó ser de gran dificultad, pues solo un 5,3% de los participantes responden de forma correcta, mientras que un alto porcentaje (37,6%) deja influenciar su respuesta ya sea por el sesgo de la recencia positiva o negativa, o bien fundamentan su respuesta en argumentos incorrectos (3,3%).

En el caso del cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables (pregunta 2a), si bien los resultados son más alentadores, ya que un 37,6% otorga una respuesta correcta, éstos evidencian estrategias de resolución muy elementales (como por ejemplo la comparación del número de casos desfavorables) características de la etapa pre-operacional (Piaget e Inhelder, 1951). Además, en algunas de las situaciones problemáticas vinculadas a este contenido se observa la presencia del sesgo de la equiprobabilidad, que provoca que un alto porcentaje realicen una incorrecta generalización de la regla de Laplace, obviando el supuesto de la equiprobabilidad de sucesos.

Del mismo modo ocurre con la comprensión del concepto de suceso seguro (pregunta 3a),dado que del 15,1% de los profesores que identifica la respuesta correcta, solo un 5,4% lo hace en base a nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades para extraer bolas de la caja.

En el caso de la pregunta 4a) que se centra en el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, un 32,3% de los profesores identifica que el experimento aleatorio presenta dos resultados no equiprobables, argumentando su respuesta en la comparación de las cantidades absolutas del número de niñas y niños. Mientras que un 16,1% presenta el sesgo de la equiprobabilidad obviando que los sucesos simples a comparar no son equiprobables, aplicando en sus cálculos incorrectamente la regla de Laplace.

En relación a la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades, y noción de aleatoriedad (ítem 5), la situación planteada resultó de gran dificultad, pues solo un 12,9% de los profesores argumenta que la probabilidad de ganar o de perder no depende de los resultados anterioresya que se trata de sucesos independientes. Mientras que del 45,2% de respuestas incorrectas, un 33,3% manifiesta de manera explícita el efecto de recencia negativa o falacia del jugador, y un 11,9% considera que la suerte juega un rol importante en la asignación de probabilidades.

Para la comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo (ítem 6), los resultados son bastante alentadores, pues un 60,2% de los sujetos distingue el espacio muestral correspondiente a dos sucesos simples no equiprobables, y de este modo a partir del cálculo y comparación de probabilidades logra establecer si el juego es o no justo.

Finalmente, en el caso de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace (pregunta 7a) un 3,2% enfoca su argumento en la independencia y en la equiprobabilidad de los sucesos, y al igual que en la pregunta 1a) se observa una fuerte incidencia del sesgo de la recencia positiva y negativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha evaluado el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad de acuerdo con el modelo CDM (Godino, 2009), por medio de la aplicación del cuestionario CDM-Probabilidad. A partir de los datos obtenidos se ha puesto de manifiesto que prácticamente la totalidad de los profesores de primaria que han participado en el estudio poseen un conocimiento común del contenido sobre probabilidad a un nivel muy elemental y extremadamente insuficiente, lo que les impediría llevar a cabo un proceso de instrucción idóneo de la probabilidad.

Estos resultados son similares, y en algunos casos más alarmantes, a los obtenidos en investigaciones que al igual que la nuestra miden el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad. Tal es el caso de la investigación de Mohamed (2012), quien también evidencia que la resolución de problemas sobre probabilidad es una tarea difícil para los futuros profesores. Sin embargo, nuestros resultados se encuentran muy por debajo a los obtenidos por los futuros profesores. Del mismo modo ocurre si comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Gómez (2014) quien evidencia un conocimiento matemático y didáctico insuficiente sobre probabilidad en futuros profesores de primaria, con un fuerte predominio del sesgo de la equiprobabilidad y la heurística de la representatividad. Incluso si contrastamos las respuestas de los profesores de primaria con las obtenidas en Cañizares (1997) con alumnos de primaria en la resolución de problemas de probabilidad de características muy similares a los nuestros, se observa que los resultados de éstos últimos superan a los nuestros. Esta situación es alarmante, si consideramos que en nuestro caso se trata de profesores de primaria en activo, es decir, que ya se encuentran enseñando probabilidad en la Educación Primaria, y que podrían transmitir tales sesgos a sus alumnos. En consecuencia, urge realizar un programa de intervención que permita mejorar el nivel del conocimiento sobre probabilidad en el profesorado de Educación Primaria en activo.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). *Joint ICMI and IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, CA: ICMI and IASE.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* Nueva York: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* CD ROM. Johannesburgo, Sudáfrica: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. M. (2013, febrero). *Reconocimiento de la aleatoriedad por futuros profesores españoles de educación primaria.* Presentado en el Simposio de matemáticas y educación matemática. III Congreso internacional de matemáticas asistida por computador, Bogotá, Colombia.

Batanero, C., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO, 44,* 7-16.

Begg, A. y Edwards, R. (1999, diciembre). *Teachers' ideas about teaching statistics.* Presentado en the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education, Melbourne. Disponible en http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics*, *15,* 1-24.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2011, junio). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Presentado en XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Granada: Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325 - 3326). Antalya, Turkey: CERME.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza dela probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa (RELIME), 15*(1), 63-91.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). *REVEMAT*, *8*(2), 1-49.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). Nueva York: Springer.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Revista Números, 85*, 5-23.

CARACTERIZACIÓN DE LA “MIRADA PROFESIONAL” DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Characterization of pre-services’ teacher professional noticing about the understanding of generalization patterns

Zapatera, A.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]Universidad CEU Cardenal Herrera, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta comunicación es caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para maestro (EPM) cuando describen e interpretan respuestas de alumnos de Primaria a problemas de identificación de patrones. El estudio conjunto de los grados de evidencia de la identificación de los elementos matemáticos relevantes en el proceso de generalización de patrones y de la interpretación de la comprensión de los estudiantes, nos permitió identificar cinco perfiles de EPM con una gradación entre ellos. Esto nos ha llevado a caracterizar cinco perfiles de EPM que muestran que el conocimiento de matemáticas es necesario pero no suficiente para el desarrollo de una “mirada profesional”.

Palabras clave: *Mirada profesional, generalización de patrones, estudiantes para maestro*

Abstract

The aim of this communication is to characterize pre-service teachers’ (PST) professional noticing when they describe and interpret primary students’ answers to generalization tasks. The study of the degrees of evidence of the identification of the mathematical relevant elements in the process of generalization and the interpretation of the students’ understanding, allowed us to identify five PSTs’ profiles with a gradation among them. In turn this has led us to characterize five profiles of PST which indicate the necessity of knowledge of mathematics for the development of professional noticing, though such knowledge is not sufficient.

Keywords: *Professional noticing, generalization patterns, pre-service teachers*

INTRODUCCIÓN

Una de las tareas del profesor es interpretar las respuestas de los estudiantes a las tareas matemáticas, con el fin de tomar decisiones relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje (Llinares, 2009). Para ello debe hacer uso de sus conocimientos sobre la enseñanza de la matemática en general y de tópicos específicos en particular (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Ponte y Chapman, 2006), identificando lo que es relevante en las producciones de los estudiantes y relacionando aspectos específicos con un marco más general (van Es y Sherin, 2002). Esta competencia no es innata y se puede desarrollar (Fortuny y Rodríguez, 2012), por ello es necesario caracterizarla e identificar cuáles son los etapas que indican un progreso de los profesores en relación con la enseñanza de tópicos concretos.

Pocas son las investigaciones que han estudiado la caracterización de la mirada profesional. Fernández, Valls y Llinares (2011) han caracterizado la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los alumnos en el tópico de los problemas

Zapatera, A. y Callejo, M.L. (2015). Caracterización de una trayectoria de la “mirada profesional” de los estudiantes para maestro sobre la comprensión del proceso de generalización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521-528). Alicante: SEIEM.

proporcionales. Estos autores han señalado cuatro niveles y han indicado los saltos cognitivos para pasar de un nivel a otro.

Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls (2013) han generado descriptores de diferentes grados de desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los alumnos sobre la derivada. Los descriptores se crearon a partir del análisis de las destrezas de identificación e interpretación, estableciendo seis perfiles de estudiantes para profesores de secundaria en función de: los elementos matemáticos relevantes identificados y los niveles de comprensión de los alumnos de secundaria que habían sido capaces de interpretar.

En esta comunicación se caracteriza la mirada profesional de estudiantes para maestro cuando describen e interpretan respuestas de alumnos de Primaria a problemas de generalización de patrones.

MARCO TEÓRICO

Esta comunicación se sitúa en la intersección de dos líneas de investigación: la caracterización de una mirada profesional del profesor y la generalización de patrones lineales.

La mirada profesional se ha conceptualizado de varios modos (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; van Es y Sherin, 2002). Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la mirada profesional mediante tres destrezas relacionadas: 1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes, 2) interpretar la comprensión de los estudiantes y 3) decidir las acciones a desarrollar con los alumnos.

Las investigaciones sobre cómo alumnos de Primaria resuelven problemas de generalización de patrones lineales han puesto de relieve el papel relevante que juegan en el proceso de generalización de patrones los siguientes elementos matemáticos:

- *Coordinación entre estructura espacial y numérica*: Para extender una secuencia de figuras, el estudiante debe captar una regularidad ligada a la coordinación de las estructuras espacial y numérica. La estructura espacial emerge de la distribución de elementos de cada figura y la numérica del número de elementos en cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010).
- *Relación funcional*: Para identificar un término lejano (o no especificado) es preciso establecer la relación entre la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011).
- *Proceso inverso*: Para identificar la posición de una figura conocido el número de elementos que la forman se debe establecer una relación funcional inversa de la anterior. Muchos estudiantes son capaces de establecer la relación entre la posición de una figura y su número de elementos, pero les cuesta revertir el pensamiento (dado el número de elementos de una figura identificar su posición) (Warren, 2005; Merino, Cañadas y Molina, 2013).

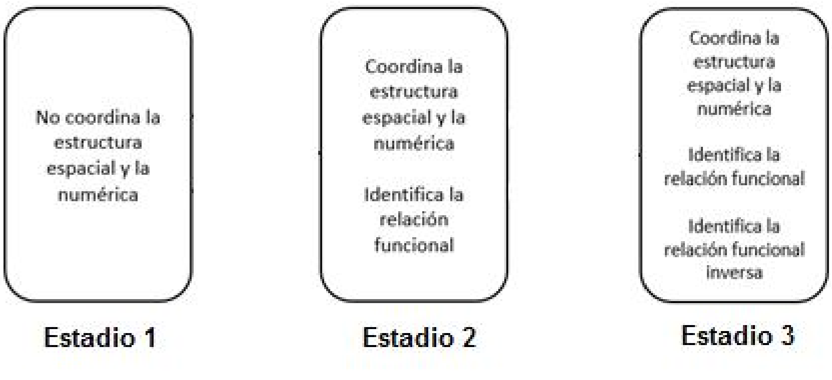


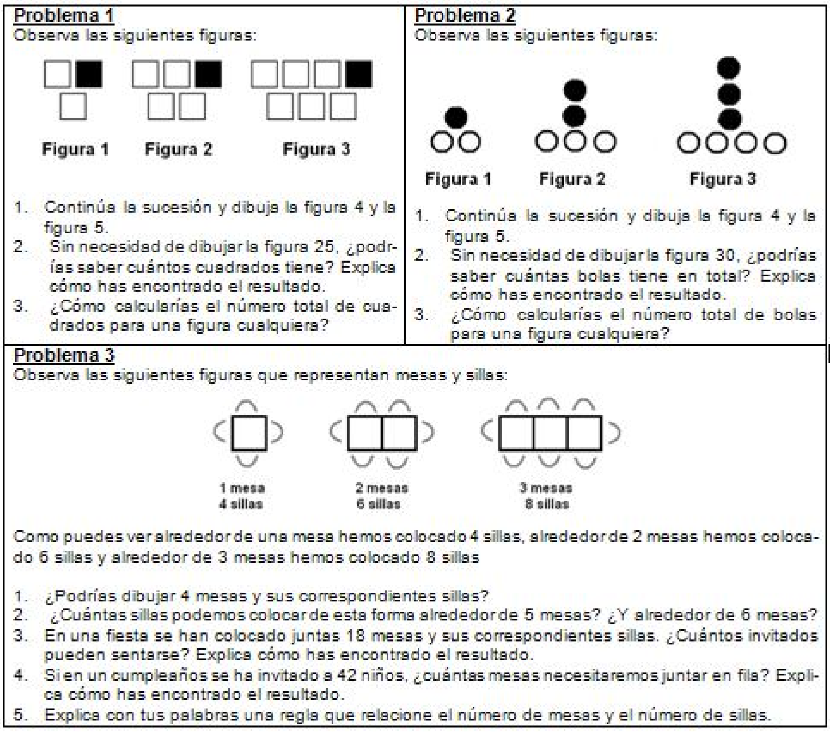
Figura 1. Estadios de la comprensión de la generalización de patrones

Estos elementos matemáticos, tomados de investigaciones previas, permiten determinar tres estadios de la comprensión de los alumnos de Primaria sobre la generalización de patrones (Zapatera y Callejo, 2013) (Figura 1).

MÉTODO

Los participantes fueron 40 estudiantes para maestro (EPM) que estaban en el segundo semestre de su programa de formación del Grado en Maestro en Educación Primaria, cursando una materia centrada en el desarrollo del sentido numérico en alumnos de Primaria. Todos los EPM, habían resuelto previamente problemas de generalización y habían identificado los elementos matemáticos, pero no habían tenido aún información sobre la generalización de patrones en alumnos de Primaria.

Los instrumentos de recogida de datos fueron dos cuestionarios creados a partir de investigaciones previas sobre generalización de patrones en alumnos de Primaria (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Radford, 2010). En el primer cuestionario (Figura 2) se pedía a los EPM resolver tres problemas de generalización lineal en los que debían: (a) continuar la sucesión para términos cercanos; (b) calcular el número de elementos que componen una figura de un término lejano; (c) identificar la regla general y (d) identificar una figura dado el número de elementos. En el segundo cuestionario se les pedía responder a dos preguntas profesionales a partir del análisis de las respuestas de tres alumnos de Primaria a los tres problemas que previamente habían resuelto.



Problema 1
Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 25, ¿podrías saber cuántos cuadrados tiene? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de cuadrados para una figura cualquiera?

Problema 2
Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 30, ¿podrías saber cuántas bolas tiene en total? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de bolas para una figura cualquiera?

Problema 3
Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:

1 mesa 4 sillas
2 mesas 6 sillas
3 mesas 8 sillas

Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado juntas 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

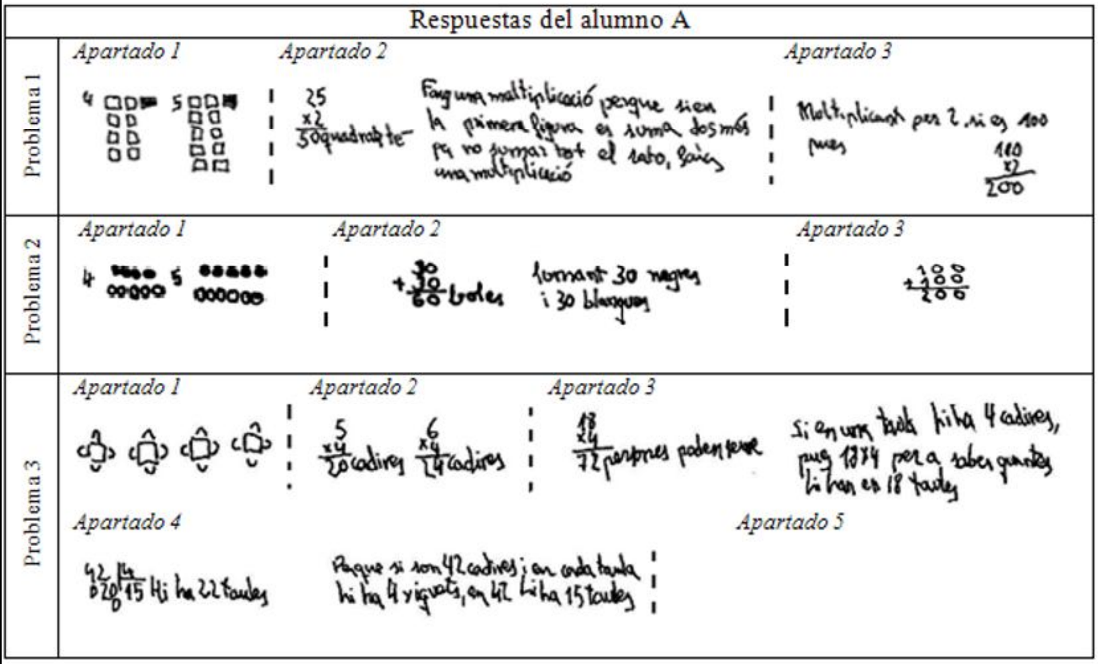
Figura 2. Problemas del Cuestionario 1

Para elaborar el Cuestionario 2 se seleccionaron las respuestas de tres alumnos de Educación Primaria (A, B y C) a cada uno de los problemas del Cuestionario 1, atendiendo a diferentes grados de comprensión del proceso de generalización, según la trayectoria de aprendizaje de la Figura 1:

- El alumno de Primaria A muestra una falta de coordinación de la estructura espacial y la numérica.
- El alumno de Primaria B coordina la estructura espacial y numérica y es capaz de establecer una relación funcional para identificar términos lejanos.

- El alumno de Primaria C coordina la estructura espacial y numérica y es capaz de establecer una relación funcional para identificar términos lejanos y de identificar la relación funcional inversa.

La Figura 3 muestra las respuestas del alumno A a los tres problemas.



Las respuestas están en valenciano.
Problema 1. *Apartado 1:* Tiene 50 cuadrados
Apartado 2: Hago una multiplicación porque si a la primera columna se le suma otra más, para no sumar todo el rato se hace una multiplicación
Apartado 3: Multiplicando por 2 si es 100
Problema 2. *Apartado 2*: Lo forman 30 negras y 30 blancas
Problema 3. *Apartado 3*: Si en una mesa hay 4 sillas pues 18x4 para saber cuantas hay en 18 mesas
Apartado 4: Porque si son 42 sillas y en cada mesa hay 4 niños, en 42 hay 15 mesa

Figura 3. Respuestas del alumno de Primaria A a los tres problemas

Los EPM debían analizar las respuestas de los tres alumnos de Primaria a cada uno de los tres problemas y contestar a las siguientes preguntas:

- *Qué aspectos destacarías de las respuestas del estudiante X en relación a cada uno de los problemas, indicando a qué problema te refieres.*
- *A partir de los aspectos que has destacado, identifica algunas características del proceso de generalización del estudiante X en los tres problemas.*

El procedimiento de análisis de datos se desarrolló en tres fases sucesivas (Figura 4). En la primera fase a cada uno de los EPM se les asignó un nivel en cuanto a la identificación de los elementos matemáticos: ninguno, bajo, medio o alto, en función de que no identificaran ningún elemento o que identificaran uno, dos o los tres elementos en el conjunto de las respuestas de los alumnos de Primaria. Asimismo se les adjudicó un nivel en cuanto a la interpretación de la comprensión de los alumnos de Primaria, según interpretaran la comprensión de ningún alumno, sólo de uno (bajo), de dos (medio) o de los tres (alto).

En la segunda fase del análisis se hizo un estudio conjunto de la identificación y la comprensión que llevó a agrupar los EPM en perfiles. Por último en la tercera fase, el análisis de la resolución de los problemas permitió hacer un refinamiento de los perfiles relacionando los perfiles de los EPM con el conocimiento matemático de éstos al resolver problemas de generalización de patrones. Este refinamiento nos permitió añadir más características a los perfiles.

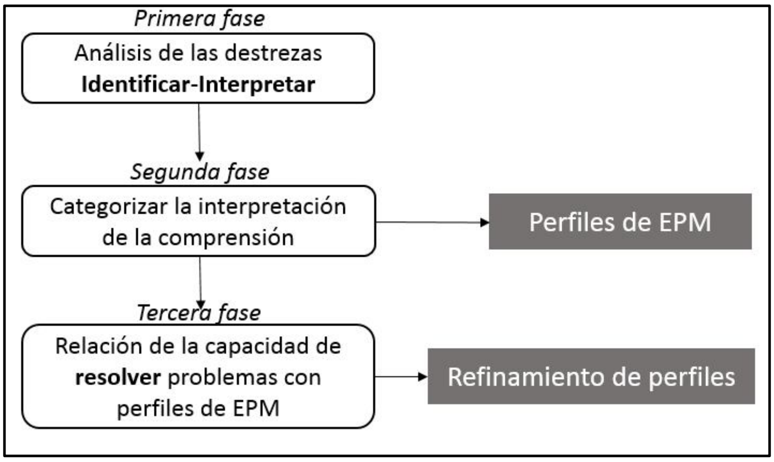


Figura 4. Fases en el análisis de datos

A partir de los perfiles identificados se generó una trayectoria de aprendizaje de la “mirada profesional” de los EPM sobre la comprensión de los estudiantes de Primaria del proceso de generalización.

RESULTADOS

El estudio conjunto de los grados de evidencia de la identificación de los elementos y de la interpretación de la comprensión (primera fase de análisis), puso de manifiesto que a los EPM les resultó más fácil identificar los elementos usados por los alumnos de Primaria, que interpretar la comprensión del proceso de generalización de patrones de estos alumnos (Tabla 1).

Tabla 1. Resultados conjuntos de la descripción y la interpretación

		Interpretación				Total
		Ninguno	Bajo	Medio	Alto	
Identificación	Bajo	6	2	0	0	8
	Medio	6	7	4	0	17
	Alto	3	4	6	2	15
Total		15	13	10	2	40

Todos los EPM detectaron al menos un elemento matemático propio del proceso de generalización y lo usaron para describir la estrategia de resolución de los estudiantes. Este elemento fue la “coordinación entre las estructuras espacial y numérica”. Sin embargo 15 EPM de un total de 40 no lo usaron para caracterizar la comprensión del proceso de generalización de ninguno de los alumnos de Primaria, ni siquiera del alumno que no coordina la estructura espacial y la numérica (alumno A). Estos 15 EPM caracterizaron la comprensión de los estudiantes de Primaria indicando la corrección o no de las respuestas y que habían tenido dificultades. Otros 15 EPM identificaron los tres elementos matemáticos característicos del proceso de generalización (identificación alta, Tabla 1) y los usaron para describir la estrategia de resolución de alguno de los alumnos, pero sólo dos de ellos los emplearon para caracterizar el proceso de generalización de los tres alumnos de Primaria.

En cuanto a los 13 EPM del nivel bajo de interpretación, todos menos uno identificaron la comprensión del alumno A. Y los 10 del nivel medio identificaron la comprensión de los alumnos A y B (6 EPM), A y C (3 EPM) y B y C (1 EPM).

Surgen cinco perfiles de EPM que agrupan a 38 EPM (Tabla 2) de modo que todos ellos menos los del perfil 0 interpretaron la comprensión del alumno de Primaria que no coordina la estructura espacial con la numérica (alumno A). Los dos EPM que no se han clasificado en estos perfiles no interpretaron la comprensión de este alumno A que representa el estadio inicial de la trayectoria de aprendizaje (Figura 1); uno de estos EPM identificó sólo al alumno B y el otro a los alumnos B y C. Por otra parte hay una gradación entre estos perfiles y las primeras características son las siguientes:

Perfil 0: Reconocen al menos un elemento matemático y no muestran evidencias de interpretar la comprensión del proceso de generalización de los alumnos de Primaria.

Perfil 1: Reconocen al menos un elemento matemático y muestran evidencias de la comprensión de la generalización cercana.

Perfil 2a: Reconocen al menos dos elementos matemáticos y muestran evidencias de la comprensión de la generalización cercana y generalización lejana

Perfil 2b: Reconocen al menos dos elementos matemáticos y muestran evidencias de la comprensión de la generalización cercana y generalización lejana con proceso inverso

Perfil 3: Reconocen los tres elementos matemáticos y muestran evidencias de la generalización cercana, generalización lejana y generalización lejana con proceso inverso

Tabla 2. Número de EPM en cada uno de los perfiles identificados

	Perfil 0	Perfil 1	Perfil 2a	Perfil 2b	Perfil 3	Total
Total	15	12	6	3	2	38

En cuanto a la resolución de los problemas, los resultados muestran, por una parte, que la capacidad de los EPM para interpretar la comprensión de los estudiantes de Primaria está vinculada a su capacidad para resolver los problemas, pues resolvieron correctamente las cuestiones de generalización lejana, regla general y proceso inverso en los tres problemas algunos EPM de los dos perfiles más bajos y prácticamente todos los EPM de los tres perfiles más altos (Tabla 3). Y por otra parte que la capacidad para resolver problemas es necesaria pero no suficiente para describir e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, pues hubo 9 EPM que resolvieron correctamente los tres problemas y, en cambio, no fueron capaces de interpretar la comprensión del proceso de generalización de ninguno de los alumnos de Primaria (Perfil 0, Tabla 3), lo que muestra que el conocimiento de matemáticas es necesario pero no suficiente para caracterizar la "mirada profesional". Este resultado nos ha permitido refinar los perfiles iniciales.

Tabla 3. Respuestas correctas de los EPM de cada uno de los perfiles a los tres problemas

Cuestión/ Elemento	Generalización Cercana				Generalización Lejana			Regla General			Proceso Inverso
	Con dibujo			Sin dibujo							
Problema	P1	P2	P3	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P3
Perfil 0 (n=15)	15	15	15	15	15	14	14	12	12	9	11
Perfil 1 (n=12)	12	12	12	12	12	12	11	10	11	8	9
Perfil 2a (n=6)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5
Perfil 2b (n=3)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Perfil 3 (n=2)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Total (n=38)	38	38	38	38	38	37	36	33	34	28	30

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos han permitido identificar cinco perfiles de EPM con relación a cómo describen e interpretan las respuestas de alumnos de Primaria a problemas de generalización de patrones y a su capacidad para resolver problemas. A partir de estos resultados podemos caracterizar la “mirada profesional” de los EPM sobre la comprensión del proceso de generalización de patrones de alumnos de Primaria.

Los EPM del perfil 1, a diferencia de los del perfil 0, son capaces de utilizar el elemento matemático “coordinación de las estructuras espacial y la numérica” para describir la comprensión del alumno de Primaria que realiza una generalización cercana, teniendo en cuenta el número de elementos que componen la figura pero no su distribución espacial (alumno A). Algunos de los EPM de estos perfiles presentan dificultades para resolver problemas de generalización de patrones, en particular, en las cuestiones relativas a la obtención y expresión de la regla general y a la utilización del proceso inverso.

Los 27 EPM categorizados en los perfiles inferiores (perfil 0 y perfil 1), 17 EPM, que representa un 63% de este grupo, resolvieron correctamente todos los apartados de los problemas pero no interpretaron la comprensión de ningún alumno de Primaria o solo de uno de ellos. Esto señala que el conocimiento del contenido matemático es necesario pero no es suficiente para desarrollar la mirada profesional. Se confirma la idea de Fernández, Valls y Llinares (2011), de Sánchez-Matamoros et al. (2013) y de Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls (2014): Aunque algunos EPM tengan un conocimiento matemático apropiado para resolver las tareas a analizar, tienen dificultades para describir las estrategias de los estudiantes utilizando elementos matemáticos adecuados o para interpretar las características de la comprensión matemática de los estudiantes.

Los EPM de los perfiles 2a y 2b, a diferencia de los del perfil 1, no tienen dificultades a la hora de resolver los problemas de generalización. Utilizan, además del elemento matemático “coordinación de la estructura espacial y numérica”, otro de los elementos matemáticos relevantes para interpretar la comprensión de los alumnos de Primaria. Los EPM del perfil 2a son capaces de utilizar el elemento “proceso inverso” para caracterizar al alumno que, además de coordinar las estructuras espacial y numérica, sabe establecer una relación funcional para identificar términos lejanos, pero no es capaz de invertir dicha relación (alumno B). Los EPM del perfil 2b son capaces de utilizar el elemento matemático “relación funcional” para caracterizar la comprensión del proceso de generalización del alumno que sabe identificar la relación entre número de la figura y número de elementos que la componen y viceversa (alumno C). Los EPM del perfil 3 son capaces de utilizar los tres elementos matemáticos para caracterizar la comprensión de los tres alumnos de Primaria.

Nuestros resultados aportan pues información sobre cómo caracterizar la mirada profesional del profesor de matemáticas en el tópico específico del proceso de generalización de patrones. Estos perfiles se explican a través de descriptores que son indicadores que ayudan a describir y comprender esta competencia docente y por tanto el aprendizaje de los EPM (Fernández, Valls y Llinares, 2011). En nuestro estudio los descriptores se crearon a partir del análisis conjunto de las destrezas de identificación e interpretación y de la capacidad para resolver los problemas.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education, 40,* 3-22

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación matemática, 1,* 23-37.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO, 51*, 92-101.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' pre-instructional competence in patterning activity. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brasil: PME

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM.

Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Zapatera, A., & Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

Pósteres

INTERACCIÓN EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA DE REINO UNIDO Y ESPAÑA

Mathematics primary classroom interaction in UK-Spain

Aliseda, B.[a], Ramos, M.[b], Sánchez, B.[a], Chamoso, J. M.[a], Rosales, J.[b] y Vicente, S.[b]

[a]Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca
[b]Dpto. Psicología Evolutiva y de la Educación, Universidad de Salamanca

La investigación en Educación Matemática se ha interesado por el análisis de la interacción entre un maestro de Primaria y sus alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas en el aula (e.g., Sánchez et al., 2014). Los resultados obtenidos en estudios en España mostraron que el maestro promueve escasamente el razonamiento cuando resuelve problemas con sus estudiantes (Rosales et al., 2012). Por eso es de interés conocer qué sucede en otros países. En este trabajo se pretenden comparar los procesos que se explicitan durante la interacción de maestros de Primaria de Reino Unido y España cuando resuelven problemas similares con sus estudiantes.

Se grabó la interacción de tres maestros de Primaria de Reino Unido y dos de España resolviendo problemas sobre números fraccionarios, que ejercían su labor en cursos curriculares equivalentes. Una vez transcritas, se organizaron en ciclos (Wells, 1999) y, a partir de los contenidos que se hacían públicos en cada uno, se categorizaron en función del proceso que se promovía (Mullins et al., 2012; Rosales et al., 2012): Conocimiento, Aplicación y Razonamiento. Los resultados, en porcentajes, se compararon atendiendo a las categorías consideradas. En Reino Unido y España, respectivamente, se obtuvo un 51.72% vs 88.46% (Conocimiento), un 34.48% vs 11.54% (Aplicación) y un 13.79 vs 0% (Razonamiento).

Los procesos explicitados por los maestros de ambos países muestran, primeramente, que maestros españoles y anglosajones favorecieron el aprendizaje de conocimiento. Además, de forma diferente, los maestros anglosajones dedicaron una parte de su instrucción al razonamiento al contrario que los españoles (en la línea de los resultados de Rosales et al., 2012). Quizás este aspecto pueda ser de interés para entender los resultados de los alumnos españoles en evaluaciones internacionales (Vicente et al., 2013). Más investigación sobre ello sería aconsejable. Analizar con más detalle los aspectos que caracterizan esos resultados podría tener implicaciones educativas.

Referencias

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J. y Vicente, S. (2014). Autonomía en la interacción en resolución de problemas no rutinarios en aulas de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 603). Salamanca: SEIEM.

Mullins, I., Martin, M., Ruddock, G., O´Sullivan, C. y Preuschoff, C. (2012). *TIMSS 2011. Marcos de la evaluación.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*(8), 1185-1195.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J. M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: Una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25*(4), 535-548.

Wells, G. (1999) *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge, Reino Unido: CUP.

Aliseda, B. y otros (2015). Interacción en las aulas de matemáticas de primaria de Reino Unido y España. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 531). Alicante: SEIEM.

INTERVENCIÓN SOBRE LA SUMA MEDIANTE EL USO COMBINADO DE REGLETAS Y TIC'S

Intervention on the sum by the combined use of Cuisenaire rods and ICT

Antón Sancho, Á. y Duque Domingo, J. V.

Escuela Universitaria de Magisterio "Fray Luis de León"

Se trata de una investigación empírico-cuantitativa que pretende comprobar que las claves de Driver y Bell (1986) sobre aprendizaje manipulativo y significativo son efectivas para el aprendizaje de la suma en alumnos de 4º de Primaria que presentan dificultades de aprendizaje (Radatz, 1979, 1980). Esta intervención se realizó en el último semestre del curso 2014/2015 en el colegio de la Asunción de Ponferrada. El grupo-clase está formado por 25 alumnos (14 niñas y 11 niños) de 4º de Primaria en donde se aprecia en general déficit de atención, acentuado en tres alumnos, uno de ellos diagnosticado.

Realizamos una intervención en el aula combinando materiales didácticos clásicos de tipo manipulativo (regletas) con el uso de las TIC (aplicación MathGames) para trabajar la suma de enteros. Con ello pretendemos favorecer la motivación y, así, vencer lo máximo posible los problemas de atención y aumentar el rendimiento. Verificaremos, por tanto, la siguiente hipótesis: *a partir de la combinación de recursos didácticos manipulativos (regletas) y el uso de las TIC, los alumnos de 4º de Primaria serán capaces de mejorar su destreza intelectual en la operación de la suma*. La *variable independiente* es la metodología, fundamentada en la combinación de material manipulativo y digital, y la *variable dependiente* es el rendimiento del alumno en el aprendizaje de la suma. Para comprobar nuestra hipótesis, verificamos que la hipótesis nula es falsa.

Los *instrumentos* de evaluación son la observación directa y pruebas objetivas (inicial y final). Estas pruebas objetivas se realizarán mediante el juego del arco, que plantea una actividad con 12 operaciones de sumar y contabiliza el tiempo en terminarla. Evaluaremos utilizando el promedio de tiempo por acierto. El estadístico t de Student nos permitirá desestimar la hipótesis nula. El procedimiento consiste en 5 sesiones de 50 minutos con los siguientes *objetivos didácticos*: 1) Resolver operaciones de sumas y realizar estimaciones; 2) Conocer y aplicar las propiedades asociativa y conmutativa de la suma; 3) Resolución de problemas de la suma.

Durante la primera y la última realizamos las evaluaciones inicial y final. En la segunda utilizamos las regletas: las presentamos y realizamos actividades por grupos de modo cooperativo. En la tercera utilizamos la aplicación MathGames para Tablet: se les muestra la aplicación en la pizarra digital y se proponen actividades individuales según el nivel de cada alumno. Durante la cuarta sesión, en la sala de informática, realizamos actividades por equipos según el nivel.

Como resultados, el 100% de los alumnos mejoraron o igualaron en número de aciertos y el 92% mejoraron el tiempo de ejecución. El estadístico t de Student toma el valor 4,11, lo que nos permite descartar la hipótesis nula con fiabilidad del 95%.

Referencias bibliográficas

Driver, R. y Bell, B. (1986). Students' thinking and the learning of science: A constructivist view. *School Science Review, 67,* 443-456.

Radatz, H. (1979). Error analysis in the Mathematics education. *Journal for research in mathematics education, 10(*3), 163-172.

Radatz, H. (1980). Student´s errors in the Mathematics learning process: a survey. *For the learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

Antón-Sancho, A. y Duque Domingo, J. V. (2015). Intervención sobre la suma mediante el uso combinado de regletas y tic's. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 533). Alicante: SEIEM.

¿QUÉ COMPRENSIÓN DE LAS CONCEPTUALIZACIONES DEL CONCEPTO DE LÍMITE ALCANZAN LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO?

What understanding of the conceptualizations of the limit concept is reached by prospective high school math teachers?

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T.

Universidad de Valladolid

El póster contiene un resumen de una investigación de tipo experimental que se está desarrollando con 12 alumnos del máster de secundaria (4 arquitectos, 4 ingenieros y 4 matemáticos) sobre el concepto de límite. Se considera el marco teórico MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008) relativo al conocimiento común y especializado del contenido, y las concepciones del límite intuitiva, aproximación óptima (Blázquez y Ortega, 2002) y métrica. El objetivo es determinar qué comprensión de estas conceptualizaciones tienen los alumnos participantes, lo cual es clave para transferir adecuadamente el concepto a sus futuros alumnos, y averiguar la posible evolución de unas a otras. El punto de partida es el análisis de las concepciones iniciales de los alumnos sobre aproximación, tendencia y límite finito de una función en un punto. Se ha comprobado que los alumnos no distinguen los conceptos de aproximación y de tendencia y que sus concepciones sobre el límite son todas intuitivas y la mayor parte incompletas.

Con el fin de determinar su evolución, se les presentan siete definiciones del concepto de límite (que forman parte de un cuadernillo de trabajo autoformativo) y se les pregunta por la familiaridad de las mismas, la veracidad, la equivalencia y cuál es la más apropiada para la docencia de Bachillerato. Asimismo, se grabó un vídeo del debate que se realizó sobre sus respuestas. Del análisis de los datos recogidos se deduce que: los alumnos se han ido afianzando en los conceptos de aproximación, tendencia y límite finito de una función en un punto; no hay diferencias sustanciales entre las respuestas de los graduados en matemáticas, ingeniería y arquitectura por el alto grado de deficiencia; no utilizan con éxito las definiciones más familiares para ellos, que son las métricas; interpretan la equivalencia entre algunas definiciones por la forma de su escritura más que por su significado; sólo 1/3 de los alumnos considera correctas las definiciones presentadas.

En suma, poseen un conocimiento común bastante deficiente y, en consecuencia, están muy lejos de poseer un conocimiento especializado sobre el concepto. En la actualidad se está analizando la coordinación entre los valores de la variable y de la función (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Valls, Pons y Llinares, 2011) y las grabaciones de entrevistas a 4 alumnos sobre sus respuestas.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67-82.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 167-192.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T. (2015) ¿Qué comprensión de las conceptualizaciones del concepto de límite alcanzan los futuros profesores de matemáticas en bachillerato?. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 535). Alicante: SEIEM.

AUMENTAR COMPETENCIAS Y MOTIVACIÓN MEDIANTE LA PARTICIPACIÓN EN COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Increasing competences and motivation through participation in Competitions of Mathematics

Barahona, S.[a] y Yáñez, D. F.[b]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universidad Católica de Valencia

Cabe prestar atención a la desmotivación que los alumnos manifiestan ante el aprendizaje de las Matemáticas por razones como las desconexión manifiesta entre lo que aprenden y el entorno real (Fernández y Pérez, 2011), la dificultad al realizar los distintos problemas surgidos, la falta de metodologías de trabajo donde se intensifique el trabajo en equipo y cooperativo (Hidalgo et al, 2004). Así como la heterogeneidad mostrada en el alumnado actual siendo muchos los niveles presentes en un aula. Las competiciones matemáticas, como Olimpiadas o Pruebas Cangur, y, sobre todo, las sesiones de preparación a éstas, aúnan muchas de las características que adolecen en las actividades de enseñanza-aprendizaje presentadas en el aula de Matemáticas. Sin embargo, los asistentes a estas clases tienen un perfil y una sensibilidad más desarrollada para la resolución de problemas, cálculo o geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013). En este trabajo presentamos una propuesta para fomentar la asistencia de alumnos con dificultades de aprendizaje diseñando una metodología que facilite y reconozca el trabajo, además de que ordene y estructure las distintas ideas necesarias para la resolución y afrontamiento de problemas. En las sesiones preparadas se utilizan distintos recursos didácticos. Por tanto los objetivos específicos de este trabajo son:

- Fomentar la participación en competiciones matemáticas tanto de alumnos con talento matemático como de aquellos que no tienen aptitudes especiales para las matemáticas, pero sí tienen una buena actitud hacia a ellas.
- Dotar a los alumnos de suficientes herramientas para enfrentarse a problemas como los que se proponen en competiciones matemáticas.
- Aumentar la sensación de accesibilidad a las matemáticas.
- Potenciar las capacidades de alumnos con talento matemático.
- Mostrar la componente lúdico-formativa de las matemáticas mediante actividades que no se proponen habitualmente en Educación Secundaria y resultan motivadoras para el alumnado.
- Mejorar los expedientes académicos de alumnos de Educación Secundaria, gracias a la asistencia de sesiones de enriquecimiento matemático.

Esta propuesta teórica es la primera fase de un proyecto de investigación que consta de tres partes: diseño, experimentación y análisis de resultados.

Referencias

Fernández, M. E. y Pérez Jiménez, A. J. (2011). Las altas capacidades y el desarrollo del talento matemático. El proyecto Estalmat-Andalucía. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *27*, 89-113.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334,* 75-95

Barahona, S. y Yánez, D. F. (2015). Aumentar competencias y motivación mediante la participación en competiciones matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 537). Alicante: SEIEM.

REPRESENTACIONES EN EL PLANO DE CAMBIOS DE NIVEL EN EL ESPACIO POR ESCOLARES DE 5 AÑOS: ESTUDIO DE CASOS

How do 5 years old children symbolize in a plane the 3-dimensional level changes: A case study

Berciano, A.[a], Jiménez, C.[b] y Salgado, M.[c]

[a]Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de La Rioja, [c]CEIP Sigüeiro

En este poster presentamos diferentes simbolizaciones que utilizan escolares del aula de infantil de 5 años para representar en un plano cambios de nivel en el espacio tridimensional. En particular, basándonos en un enfoque contextualizado y globalizado de la matemática (Alsina, 2012; Berdonneau, 2008), se ha diseñado una actividad (Gonzato, Fernández y Godino, 2011) en la que los niños y niñas tienen que localizar un tesoro escondido en el centro escolar situado en un piso distinto al de su ubicación y representar individualmente en un plano el itinerario seguido para hallarlo.

Para analizar las producciones realizadas se han tenido en cuenta, por un lado, los documentos escritos junto con entrevistas individuales con el fin de entender qué había querido representar el niño y, por otro lado, se han medido las destrezas espaciales haciendo uso de una prueba de diagnóstico escolar (De la Cruz, 1988), que nos ha llevado a agruparles en 4 grupos según dichas destrezas. Estas agrupaciones nos han servido para analizar con mayor detalle la posible correlación entre los símbolos usados y las destrezas espaciales (Sarama y Clements, 2009).

Los resultados muestran que, de un modo u otro, independientemente de sus destrezas espaciales, la gran mayoría reconoce el cambio de nivel en el espacio e intenta trasladarlo al plano, la representación simbólica más usada para caracterizar dicho cambio de nivel viene marcada por una representación unidimensional de la escalera y la complejidad de los planos depende de las habilidades espaciales del alumnado.

Referencias

Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades, *Números, 80*, 7-24.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas Activas.* Barcelona: Graó.

De la Cruz, M. V. (1988). *Pruebas de diagnóstico preescolar*. Madrid: TEA Ediciones, S.A.

Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, *77*, 99-117.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. Nueva York: Routledge.

Berciano, A., Jiménez, C. y Salgado, M. (2015). Representaciones en el plano de cambios de nivel en el espacio por escolares de 5 años: Estudio de casos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 539). Alicante: SEIEM.

ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN RESUELVEN PROBLEMAS DE PARTICIÓN

Students with Down syndrome solve partition problems

Bruno, A., Hernández, B. y Noda, A.

Universidad de La Laguna

En trabajos previos con alumnado con síndrome de Down (SD), observamos que pueden escribir y hacer operaciones con números de tres cifras y, sin embargo, presentan dificultades en tareas de descomposición de números en diferentes sumandos (partición aditiva), incluso con números inferiores a 10 (Bruno y Noda, 2013). Las alteraciones que presentan con la memoria a corto y largo plazo, favorecen que tengan dificultades para recuperar los hechos numéricos, lo que no ayuda en estas tareas.

Se presentan resultados de un estudio de casos de dos personas con SD, que siguen una secuencia de enseñanza-aprendizaje sobre el sistema de numeración decimal adaptada a sus características cognitivas. La secuencia utiliza un marco, adaptado de Jones et al. (1996), que consta de cinco niveles de pensamiento (organizados según el tamaño de los números) y aborda cuatro constructos: contar, agrupar, particionar y relacionar. En este caso, se muestran sus respuestas a las tareas de particiones aditivas del segundo nivel de pensamiento (números menores que 100). Las dos estudiantes con SD analizadas, de 19 y 27 años, pertenecen a una asociación de personas con SD en la que reciben apoyo escolar. Siguieron una secuencia individual de aprendizaje, en sesiones de una hora semanal durante seis meses, realizando tareas con materiales concretos (regletas, objetos cotidianos, legos, dinero, etc.) y resolvieron problemas de los cuatro constructos. Todas las sesiones fueron videograbadas. El objetivo del estudio es analizar su evolución en la comprensión conceptual de la decena, observando los beneficios del uso de materiales, apoyos visuales y de la resolución de problemas.

Las dos estudiantes reflejan comportamientos distintos en las tareas de partición en las que debían repartir en grupos una cantidad numérica, con materiales concretos. Por ejemplo, en la tarea de repartir 48 globos entre tres personas en partes iguales, una de ellas empieza usando estrategias incorrectas (repartir los globos por su color) continuando con otras más adecuadas: primero repartir 10 a cada uno y posteriormente, las unidades restantes. La otra estudiante hace grupos aleatorios para ir compensando los que tienen más y menos cantidades, hasta conseguir la igualdad, estrategia más costosa. A través del uso de materiales se reconducen sus estrategias para que experimenten la utilidad de la decena como unidad de compuesta, en tareas de partición.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación, Madrid.

Referencias

Bruno, A. y Noda, A. (2013). Partición numérica en personas con síndrome de Down. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 175-183). Bilbao: SEIEM.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, A., Rich, B. y Van Zoest, L.R. (1996). Multidigit Number sense: a Framework for instruction and assessment. *Journal fort Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336.

Bruno, A., Hernández, B. y Noda, A. (2015). Estudiantes con síndrome de down resuelven problemas de partición. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 541). Alicante: SEIEM.

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA INICIAR LA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

Mathematical modelling to start building spanning set and span

Cárcamo, A.[a], Gómez, J.[b] y Fortuny, J.M.[c]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Politécnica de Cataluña, [c]Universidad Autónoma de Barcelona

Este estudio exploratorio se fundamenta en la necesidad de que la investigación en Educación Matemática a nivel universitario, de acuerdo con Selden y Selden (2001), posea un rol activo y contribuya al desarrollo del currículum. Aquí se presentan los resultados del primer ciclo de experimentación de una investigación de diseño más extensa cuyo objetivo es construir una teoría de instrucción local para los conceptos específicos de Álgebra Lineal: conjunto generador y espacio generado.

La teoría de instrucción local es el producto de la investigación de diseño e incluye tanto las teorías sobre el proceso de aprendizaje de los contenidos a enseñar como las teorías sobre los medios destinados a apoyar ese aprendizaje. Metodológicamente consiste en obtener un diseño instruccional "óptimo" a través de un proceso de experimentación con ciclos de revisión y rediseño (Gravemeijer, 2004).

En Álgebra lineal se han realizado recientes innovaciones para contribuir a superar las dificultades que los estudiantes tienen en este curso, entre ellas, el uso de la modelización matemática como una herramienta para la enseñanza que ha resultado ser eficaz (Gómez y Fortuny, 2002). Por otra parte, la heurística de los modelos emergentes es un enfoque de uso reciente a nivel universitario que tiene como propósito que los estudiantes aprendan las matemáticas matematizando un cierto contenido a través de contextos que sean experienciales para ellos (Selden y Selden, 2001).

A partir de lo expuesto, el objetivo del primer ciclo de experimentación fue evaluar cómo un diseño instruccional, basado en la modelización matemática y en la heurística de los modelos emergentes, apoya la construcción de los conceptos conjunto generador y espacio generado. Para ello, se elaboró una trayectoria hipotética de aprendizaje y se aplicó en el aula con 30 estudiantes de primer año de L'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú en el periodo 2013-2014.

Los resultados de este primer ciclo de experimentación sugieren que este diseño instruccional favorece la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado, ya que gran parte de los estudiantes logra hacer una transición desde su conocimiento matemático informal hacia una comprensión más formal de estos. Además, estos resultados servirán como insumo para refinar el diseño instruccional para el segundo ciclo de experimentación.

Referencias

Gravemeijer, K. (2004, Julio). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics.* Presentado en 10th International Congress in Mathematics Education, Copenague, Dinamarca.

Gómez, J. V. y Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 31, 7-23.

Selden, A., y Selden, J. (2001). Tertiary Mathematics Education Research and its Future. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*: *An ICMI Study* (pp. 237–254). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscú: Kluwer.

Cárcamo A., Gómez J. y Fortuny J. (2015). La modelización matemática para iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 543). Alicante: SEIEM.

EVOLUCIÓN DE LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Attitudes evolution of psychology students toward statistics

Comas, C.[a], Estrada, A.[a], Nascimento, M.[b] y Martins, A.[c]

[a]Universitat de Lleida, [b]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, [c]Instituto Politécnico da Guarda (UDI/IPG)

La Estadística se ha incorporado en forma generalizada al currículum de la mayoría de estudios universitarios como fruto del importante papel que desempeña en la formación científica y técnica de profesionales de muy variado perfil. Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; así hemos de ser capaces de usar los datos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás.

Es un componente importante de los planes de estudio de Psicología aunque la enseñanza de los conceptos estadísticos plantea especiales problemas didácticos, porque según Vera y Díaz (2013) los estudiantes de este grado no tienen una base matemática tan amplia como los de otras carreras científicas y porque además sus actitudes hacia la propia actividad estadística no son positivas.

Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo.

El trabajo que presentamos, mediante formato de poster, se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes de Psicología de la Facultad de Ciencias de la Educación de una universidad pública antes y después de realizar un curso de Estadística.

Analizadas las respuestas (pre y post) a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (indicado con el acrónimo EAEA desde Estrada, 2002), los resultados indican una moderada mejora de las actitudes lo que nos invita a reflexionar y a proponer acciones educativas que contribuyan a desarrollar actitudes más positivas. En el poster se expondrán algunos de estos resultados junto con conclusiones del estudio.

Agradecimentos

Trabajo apoyado por el Proyecto EDU 2013-41141-P.

Referencias

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Trabajo de Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Vera, O. y Díaz, C. (2013). Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 197-203). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Comas, C., Estrada, A., Nascimento, M. y Martins, A. (2015). Evolución de las actitudes hacia la Estadística en estudiantes de Psicología. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 545). Alicante: SEIEM.

EXPLORACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES MEDIANTE LA MODELIZACIÓN DE LA INTENSIDAD DE SONIDO UTILIZANDO IPADS®[i]

Exploring two-variable functions representation through modelling of sound intensity with iPads®

Diago P. D.[a], Ferrando, I.[b] y Puig, L.[b]

[a]Universitat Internacional Valenciana (VIU), [b]Universitat de València, Estudi General (UVEG)

En este póster describimos una experiencia de modelización llevada a cabo con alumnos de 4º de ESO junto con un análisis preliminar de las actuaciones de estos alumnos. La resolución de tareas de modelización promueve la matematización de situaciones, al tiempo que lleva a los estudiantes a interpretar, reflexionar y validar los resultados matemáticos en la realidad, procesos que son esenciales en la resolución de problemas orientados a la alfabetización matemática (Blum et al., 2002, p. 151).

El objetivo de este trabajo es explorar conceptos y procedimientos relativos a la representación de funciones de dos variables elaborados por los alumnos. Concretamente, estamos interesados en la representación cartesiana tridimensional de este tipo de funciones realizadas por alumnos que todavía no han recibido formación académica sobre este tema.

Durante cuatro sesiones y organizados por grupos, los alumnos actúan como investigadores para resolver una pregunta de investigación concreta: *¿Cómo se distribuye el sonido a lo largo del aula?* Guiados por el profesorado, los alumnos tomarán datos reales usando el iPad® como sonómetro mediante la aplicación Decibel Ultra Pro®, con el fin de determinar el mapa de intensidad de sonido del aula. Se les facilita también un material manipulable, los cubos Multilink®, con el que se pretende que los alumnos ideen un sistema de representación tridimensional de funciones de dos variables propio a partir de los datos medidos.

A partir de un análisis cualitativo preliminar de las actuaciones de los diferentes grupos observamos que son capaces de elaborar un sistema de representación propio, personal y válido del fenómeno modelizado. En este sistema de representación están presentes varios aspectos que consideramos precursores de la representación cartesiana, destacando, entre ellos, el concepto análogo a la noción histórica de aplicada utilizada por Euler. Este concepto es considerado como un primer estadio para la representación de funciones de dos variables. Así pues, las situaciones de modelización pueden aportar contribuciones fundamentales al proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos.

Referencias

Blum, W. et. al. (2002). ICMI Study 14. Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 149-171.

---

[i] Esta investigación ha sido realizada mediante la financiación del proyecto de investigación EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad

ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO SOBRE EL USO DE LA NOCIÓN DE MEDIDA EN TAREAS MATEMÁTICAS

Study on the prospective primary teachers' responses about the use of concepts of measurement in mathematics tasks

Estrada, A.[a], Moreno, M.[b], Huszar G.[a] y Barbero I.[a]

[a]Universidad de Lleida , [b]Universidad de Alicante

En general, los estudiantes al acceder al grado de maestro, muestran carencias en el dominio de conocimientos elementales de matemáticas, que se hacen más evidentes en el momento en el que deben aplicarlos a situaciones y contextos matemáticos menos procedimentales de los que están habituados a utilizar a lo largo de su formación obligatoria y bachillerato.

Por ello, la preocupación por la formación matemática de los futuros maestros es grande y algunas comunidades autónomas se han planteado establecer pruebas específicas de acceso a los grados de maestro, o simplemente imponer condiciones restrictivas a partir de las notas de matemáticas obtenidas en las Pruebas de Acceso a la Universidad (Cataluña y Madrid).

Además, la mejora de la formación matemática de los maestros es necesaria para poder gestionar satisfactoriamente el aprendizaje matemático del alumnado de 3 a 12 años y la medida de magnitudes es una parte importante del currículo porque además de relacionar múltiples conocimientos permite su aplicación en diferentes situaciones y contextos**.** Por ello su programa formativo debería estar construido de forma que preste atención a las necesidades de las personas, que pueda responder a preguntas sobre las medidas que se usan de forma habitual (las horas y minutos de un reloj, los kilovatios de electricidad que consumimos, el coste del trayecto de casa a la oficina en el vehículo privado, etc.), y que vaya más allá de un mero conocimiento instrumental.

En esta línea, el estudio realizado analiza las respuestas sobre el uso de la noción de medida en tareas matemáticas en la prueba diagnóstica preparada ad hoc para la investigación que se está realizando con los estudiantes de primer curso del grado de Maestro de Educación Primaria de las diferentes modalidades con las que cuenta la Universitat de Lleida. Dicha prueba consiste en una selección de tareas procedentes de ítems liberados de estudios internacionales ─PISA principalmente (OECD, 2014), así como otras cuestiones diseñadas por los propios investigadores, y todas ellas relacionadas con conceptos de medida (medida de longitudes, áreas, husos horarios, cambios de monedas, etc.), y en las que los estudiantes deben aplicar sus conocimientos previos.

Destacan con mejores resultados, aquellas tareas en las que se han de realizar simples algoritmos, frente a aquellas en las que se ponen en juego diferentes contenidos, son algo menos instrumentales y hacen referencia a cambio y relaciones. Los resultados en general son bastante similares a los de las pruebas de origen y proporcionan una información interesante sobre el uso de los conceptos de medida lo que puede ser un elemento clave para incidir en la formación inicial de los maestros de primaria.

Referencias

OECD (2014). PISA 2012 Results in Focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know: Key results from PISA 2012. Paris: Autor.

Estrada, A., Moreno, M., Huszar, G. y Barbero, I. (2015). Estudio de las respuestas de los estudiantes para maestro sobre el uso de la noción de medida en tareas matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 549). Alicante: SEIEM.

RESUMEN GRÁFICO Y LINGÜÍSTICO DE LA CALIDAD DE LA ENSEÑANZA EN UNA DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO

Graphical and linguistic summary of the quality of assessment in a whole group discussion

García-Honrado, I.[a], Ferrer, M.[b] y Blanco-Fernández, A.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Con el objetivo de conseguir un resumen visual y lingüístico de la percepción de la calidad de la enseñanza en una discusión en gran grupo a través de un conjunto borroso, durante el curso académico 2014-2015 realizamos un estudio de campo con 49 estudiantes del grado de Maestro en Educación Infantil. Para ello nos apoyamos en un conjunto de diez rúbricas, el Instructional Quality Assessment (IQA), que permiten valorar diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de una escala fija y discreta: 0, 1, 2, 3 ó 4 (Boston, 2012).

Actualmente, existen trabajos que tratan de extender escalas tipo Likert, como éstas, a escalas más flexibles (Rosa de Saa, Gil, González-Rodríguez, López, M. T. y Lubiano, M. A, 2015) que permitan describir mejor las valoraciones subjetivas que realizamos las personas a través de conjuntos borrosos. La percepción o valoración personal de un individuo sobre cierto aspecto puede modelarse de forma sencilla y a la vez eficaz mediante un conjunto borroso, que se caracteriza por una función definida en una escala real (por ejemplo, en este caso, el intervalo [0,4]), cuyos valores representan el grado de concordancia (en una escala de 0 a 1) de la valoración del individuo con cada uno de los puntos de la escala real. Es decir, permite una transición continua en la escala de valoración, en lugar de la elección de una categoría concreta.

En trabajos previos justificamos el uso de conjuntos borrosos trapezoidales para representar las percepciones u opiniones en distintas rúbricas del IQA (Ferrer y García-Honrado, 2014). En la actualidad, obtenemos 49 análisis a través de conjuntos borrosos trapezoidales de dos discusiones en gran grupo de una colección de problemas de semejanza. En cada análisis pedimos una valoración general de la calidad de la discusión a través un conjunto borroso. Esto nos permite asignar pesos, a las diez rúbricas, a la hora de agregarlas para construir un resumen. Este resumen es un conjunto borroso trapezoidal que, por su forma y posición en la gráfica, permite conocer cómo ha sido la calidad de la enseñanza, pudiendo asignarle un valor lingüístico (muy baja, baja, media, alta o muy alta), y ofrece la representación de la certeza que tenemos sobre dicha calidad. Finalmente, proponemos una aplicación con GeoGebra que permitirá a los docentes obtener una valoración general de la discusión en gran grupo realizada a través de sus percepciones en las distintas rúbricas del IQA, y lo aplicamos a dos discusiones de problemas de semejanza.

Referencias

Boston, M. D. (2012). Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal, 113*(1), 76-104.

Ferrer, M. y García-Honrado, I. (2014). Ejemplificación del uso de conjuntos borrosos en la valoración de la calidad de la enseñanza. En F. Bobillo, H. Bustince, F. J. Fernández y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy* (pp. 579-584). Zaragoza, España. ESTYLF.

Rosa de Saa, S. de la, Gil, M. A., González-Rodríguez, G., López, M. T., y Lubiano, M. A. (2015). Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis. *IEEE Transactions on FuzzySystems, 23*(1), 111–126.

García-Honrado, I., Ferrer, M. y Blanco-Fernández, A. (2015). Resumen gráfico y lingüístico de la calidad de la enseñanza en una discusión en gran grupo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 551). Alicante: SEIEM.

AVANZANDO EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Progress in research on teacher knowledge

Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

La investigación sobre el conocimiento del profesor es una temática relevante en el campo de la Educación Matemática. Se pueden plantear muy diversas perspectivas teóricas para su caracterización (Ribeiro et al., 2014). Nuestra investigación, pretende dar un paso más en la línea de articular propuestas teóricas para una mejor comprensión del conocimiento del profesor y del aprendizaje o desarrollo profesional. Es una propuesta, por un lado prágmática, pretende profundizar en la caracterización del conocimiento del profesor, y por otro lado, indagar sobre las formas de articulación de teorías, en este caso haciendo una propuesta de tipo metodológica.

En Ribeiro et al. (2014), un mismo episodio se analiza desde diferentes puntos de vista teóricos. Si consideramos la propuesta de Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello (2008) en el que se identifican y caracterizan diferentes maneras de articular teorías (networking), los resultados de Ribeiro et al. (2014) muestran una primera toma de contacto entre los enfoques teóricos "así como una comprensión de los distintos marcos teóricos y su rol en el análisis" (p. 562), que es un indicador de una estrategia de "comprender a otros y hacer comprensible nuestra teoría" (Prediger et al. 2008, p.171) y que para estos mismos autores "parece ser una precondición para conectarlas" (p. 171). Además el planteamiento, muestra una "combinación de marcos teóricos", siguiendo a Prediger et al.(2008), ya que un conjunto de datos se analiza desde varios marcos teóricos por yuxtaposición de los mismos. Desde nuestro punto de vista la conexión de teorías utilizada podemos entenderla como *horizontal*, en el sentido de que todas las teorías están al mismo nivel y utilizan los mismos datos.

En la investigación, que estamos desarrollando, la articulación o conexión de teorías que proponemos es *vertical*, de manera que los datos que utiliza cada marco teórico/conceptual para el análisis no son los mismos. Abrimos, pendiente de formular y abordar, la problemática del "ajuste" entre perspectivas de diferente naturaleza (aunque con matices), alguna cognitiva y otra de base sociocultural. En definitiva, nuestra propuesta se encuadra en la problemática de "investigar el conocimiento del profesor y su desarrollo a través del análisis del discurso".

Lo que necesitamos, en principio, es un esquema de análisis del discurso del profesor (tanto del matemático, como del didáctico-matemático) y un modelo de conocimiento del profesor, que pueda servir para caracterizarlo en un momento dado y el "cambio" del conocimiento como modelo de desarrollo del conocimiento o aprendizaje del profesor. El análisis del discurso, así planteado, se convierte en un instrumento metodológico para la caracterización del conocimiento del profesor y su transformación. Diferentes investigadores han hecho aportaciones en este sentido.

Referencias

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D.… y Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica con distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca: SEIEM

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM-Mathematics Education*, *40*, 165-178.

Gavilán-Izquierdo, J. M. (2015). Avanzando en la investigación sobre el conocimiento del profesor. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 553). Alicante: SEIEM.

ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL Y TECNOLOGÍA EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES

Technology in bi-dimensional statistics in social science high school textbooks

Gea, M. M., Contreras, J. M., Batanero, C. y López-Martín, M. M.

Universidad de Granada

El objetivo de este trabajo es analizar el uso de la tecnología en los textos del Bachillerato de Ciencias Sociales en el tema de estadística bidimensional, teniendo en cuenta que posibilita trabajar con proyectos y datos reales, y facilita el cálculo y representación gráfica (Pratt, Davies y Connor, 2011). Analizamos los objetos matemáticos considerados en el enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007): problemas planteados, lenguaje, procedimientos, argumentos, conceptos y proposiciones o propiedades asociadas; cada uno de los cuáles toma un significado específico cuando se usa la tecnología. Nos basamos también en investigaciones previas sobre libros de texto de estadística, por ejemplo, Sánchez Cobo (1999) o Lavalle, Micheli y Rubio (2006).

La muestra está formada por ocho libros de texto de primer curso de Bachillerato en la modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales*, que se eligieron por ser los más utilizados en la enseñanza pública en la Comunidad Autónoma de Andalucía, y estar publicados en editoriales de gran tradición y prestigio. En ellos se analiza el uso de la tecnología en tres modos diferentes: 1) en el planteamiento o resolución de problemas; 2) en la referencias a recursos en Internet; y 3) analizando un CD que complementa algunos textos y que incluye descripción de tecnología, propuesta de tareas o recursos tecnológicos tales como la hoja de cálculo.

Aunque hay gran variabilidad y algunos libros son muy completos, los resultados indican que apenas se cita la tecnología, principalmente la calculadora o la hoja Excel, y que las representaciones gráficas se suelen limitar al diagrama de dispersión. La mayoría de enlaces a Internet son a unidades didácticas o ejercicios de autoevaluación y no a conjuntos de datos o simuladores. Algunos CDs reproducen el mismo texto en versión electrónica o contienen material no estrictamente relacionado con la tecnología. Puesto que las directrices curriculares sugieren promover el desarrollo de las competencias “Tratamiento de la información y competencia digital” y la “Competencia matemática”, estos resultados indican la necesidad del profesor de complementar los textos en cuanto al uso de la tecnología.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 383-406.

Pratt, D., Davies, N. y Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics, En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 97-107). New York: Springer.

Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gea M. M., Contreras, J. M., Batanero, C. y López-Martín, M. M. (2015). Estadística bidimensional y tecnología en los textos de Bachillerato de Ciencias Sociales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática *XIX* (p. 555). Alicante: SEIEM.

ANÁLISIS DE TAREAS RELACIONADAS CON LAS NOCIONES DE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES

Analysis of tasks related to the concepts limits and continuity of functions in Spanish textbooks

Giacomone, B.[a, b], Loría, J. R.[a, c], Solera, M.[a] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[a]

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad Nacional de La Plata (Argentina), [c]Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

Consideramos que hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la alfabetización o desarrollo de la competencia matemática. Partiendo del marco teórico PISA (OCDE, 2013), reconocemos que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y a la organización por medio de representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en las cuales se presentan los problemas (Rico, 2006). Por tal motivo, el núcleo de este trabajo, se refiere a una indagación sistemática sobre las situaciones y contextos en los que se presenta la noción de límite y continuidad de funciones, a partir del análisis de los problemas propuestos en nueve libros de texto de Matemáticas de 1º Bachillerato. Empleamos una metodología descriptiva de las características de los problemas de límite y continuidad de funciones que posean en la redacción de su enunciado, la descripción de un contexto relacionado con la vida real. Destacamos la poca cantidad de problemas contextualizados en situaciones de la vida real. Los manuales que sirven de libro de texto en la asignatura de Matemáticas en primero de bachillerato, en el bloque de “Límite y continuidad de funciones”, ofrecen una base a una enseñanza de corte tradicional apoyada en la ejercitación de los distintos contenidos mediante actividades repetitivas que no están contextualizadas.

Referencias

OCDE (2013). PISA 2015 draft mathematics framework. Disponible en http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2015draftframeworks.htm

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación,* 275-294.

Giacomone, B., Loría, J. R., Solera, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Análisis de las tareas relacionadas con las nociones de límite y continuidad de funciones en libros de texto españoles. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 557). Alicante: SEIEM.

ESTUDIO EMPÍRICO DEL ERROR DE INVERSIÓN

Empirical study of the reversal error

Gutiérrez Soto, J.[a], Arnau, D.[a], González-Calero, J. A.[b] y Figueras, O.[c]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla-La Mancha, [c]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Clement (1982) planteó a estudiantes universitarios, entre otras, la siguiente tarea: "Escribe una ecuación usando las variables C y S para representar la siguiente afirmación: 'En el restaurante de Mindy, por cada 4 personas que pidieron tarta de queso, hay 5 personas que pidieron strudel'. Donde C representa el número de pasteles de queso y S el número de strudels" (p. 17). Encontró que solo el 27% daban la solución correcta ($5C=4S$) y que el error más común era invertir el orden de los números en la ecuación ($4C=5S$). Clement propuso dos modelos explicativos para interpretar el error de inversión: 1) la coincidencia del orden de las palabras y 2) la comparación estática.

El objetivo global de nuestra investigación es evaluar qué modelo explica de manera más satisfactoria el error de inversión en problemas similares al anterior. Para ello pretendemos analizar cómo afectan diferentes variables de la tarea en la mayor o menor incidencia del error de inversión.

En este trabajo presentamos un estudio empírico a 38 estudiantes del grado de Maestro en Educación Primaria. Nos centramos en el estudio de las respuestas a la tarea: Escribe una ecuación, usando las cantidades 3, 29, número de médicos, número de pacientes, para representar la siguiente afirmación: "En un hospital, por cada 3 médicos hay 29 pacientes". La recogida de datos se realizó con una aplicación informática diseñada ad hoc que permitió introducir como variable de tarea la obligatoriedad de usar únicamente el signo de multiplicación.

El 5% de las respuestas fueron correctas, mientras que un 34% se clasificaron como error de inversión. En este caso las respuestas ofrecidas fueron de tres tipos: 3*Número de médicos=29*Número de pacientes, 3*Número de médicos=Número de pacientes*29 y Número de médicos*3=Número de pacientes*29 En todas ellas Número de médicos aparece en el término izquierdo de la ecuación, lo que en principio apoyaría la hipótesis de la coincidencia del orden las palabras como modelo explicativo. Por otro lado un 61% se clasificaron como otro tipo de error. En este caso, destacan las respuestas 3*29=Número de médicos*Número de pacientes, Número de médicos*Número de pacientes=3*29 y Número de pacientes*Número de médicos=29*3, sumando un 21% del total. Una posible explicación es la necesidad de los alumnos por realizar operaciones con los números dados. Una explicación, dada por un alumno en una entrevista realizada tras la administración del cuestionario, fue que 3*29 debía ser la cantidad total de número de médicos multiplicada por el número de pacientes. Este razonamiento parecía incluir de forma implícita que el producto de pacientes por médicos debía ser constante o que el signo igual tenía un significado distinto al de equivalencia.

Referencias

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Gutiérrez Soto, J., Arnau, D., González-Calero, J. A. y Figueras, O. (2015). Estudio empírico del error de inversión. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 559). Alicante: SEIEM.

UNA PRIMERA APROXIMACIÓN AL TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL DE JUAN CORTÁZAR

A first approach to the Elementary Algebra Treaty by Juan Cortázar

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A.

Universidad de Córdoba

Recientemente las investigaciones en el campo de la Historia de la Educación Matemática han suscitado un creciente interés entre investigadores de diferentes universidades. Este tipo de estudios nos permiten analizar los avances matemáticos incorporados en cada época así como su evolución a lo largo de la historia y su aportación a la enseñanza de la materia.

En este sentido, los libros de texto se convierten en una de las más importantes fuentes de información y vía de transmisión de conocimientos de la época, además de describirnos el contexto social, cultural y educativo.

Como parte de un estudio cualitativo basado en el prolífico autor bilbaíno del siglo XIX Juan Cortázar, presentamos un avance del análisis realizado a su *Tratado de Álgebra Elemental*, obra de gran importancia para la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera parte del XX. Además se trata de una obra que ha estado señalada como libro de texto en las Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales. La edición estudiada corresponde a la decimoquinta, impresa en Madrid en el año 1865 y forma parte de la biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid.

El objetivo de nuestro estudio es contextualizar desde el punto de vista de la Educación Matemática, la obra del escritor. Para ello realizaremos un análisis de tipo histórico basado en un análisis de contenido que nos muestre los aspectos más destacados así como su influencia en el contexto histórico en la que se desarrolla. En el poster atenderemos a los contenidos que incluye, a saber, los ejemplos, ejercicios y problemas que propone y sus aportaciones al ámbito educativo.

Referencias

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2013). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18*(1), 49-76.

Peset, J. L., Garma, S. y Pérez-Garzón, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Siglo XXI.

Picado, M. y Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Épsilon, 77*, 99-112.

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Una primera aproximación al Tratado de Álgebra Elemental de Juan Cortázar. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 561). Alicante: SEIEM.

INFLUENCIAS EN LOS AUTORES DE LIBROS DE ARITMÉTICA DEL SIGLO XVI

Influences in the Sixteenth-Century authors of arithmetic books

Madrid, M. J.[a], Maz-Machado, A.[b] y López, C.[c]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Córdoba, [c]Universidad de Salamanca

Los libros de texto antiguos aportan información sobre los conocimientos matemáticos, su transmisión a lo largo de tiempo y también sobre la cultura y las costumbres de la época en la que fueron escritos. Este hecho ha motivado un gran número de investigaciones relacionadas con ellos, como las de Schubring (1987) y Maz y Rico (2009).

Este trabajo se ha centrado en el siglo XVI porque diversos factores como el desarrollo de la imprenta, que impulsó la difusión del conocimiento en castellano, o el aumento del intercambio de mercancías con América, que hizo necesario que un mayor número de comerciantes necesitaran conocimientos matemáticos; favorecieron la aparición a lo largo de todo este siglo de libros de aritmética con contenidos matemáticos básicos centrados en las aplicaciones prácticas de estos temas en el comercio.

En ocasiones los autores de libros de textos no plasman sus aportaciones personales de tipo matemático, si no que siguen las de otros, seleccionando los contenidos y ejemplos que consideran más adecuados. Esto hace que en los libros no solo esté presente el autor, si no también todos aquellos de los que se han tomado ideas. El objetivo de este estudio es conocer cuáles fueron las principales influencias que recibieron los autores de aritméticas del siglo XVI a través de las citas presentes en sus libros.

Se trata de una investigación exploratoria y descriptiva de carácter histórico-matemático; se seleccionaron nueve libros de aritmética considerando que todos ellos fueran escritos en castellano y que su primera impresión se realizara en el siglo XVI. Como técnica de análisis se utilizó el análisis de contenido, utilizado en otros estudios históricos similares (Maz y Rico, 2009).

Los resultados muestran grandes diferencias en el número de citas incluidas en las distintas obras y variedad de autores citados. Se han encontrado más de 130 autores pero sólo 9 aparecen en 3 o más de ellos. Finalmente, es posible clasificar en dos grandes grupos a la gran mayoría de autores citados en los textos. Por un lado se presentan autores clásicos: griegos y romanos, cuyas épocas van desde el siglo VI a.C. hasta el siglo V. En el otro gran grupo, se incluye a todos los autores de los siglos XV y XVI principalmente matemáticos, o con conocimientos de esta materia.

Agradecimientos: Este artículo trabajo se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad EDU2011-27168.

Referencias

Maz, A. y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics, 7*(3), 41-51.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y López, C. (2015). Influencias en los autores de libros de aritmética del siglo XVI. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 563). Alicante: SEIEM.

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA LA MEDICIÓN DEL CONOCIMIENTO DE MAESTROS EN FORMACIÓN SOBRE PROPIEDADES ARITMÉTICAS ELEMENTALES

Design and validation of a questionnaire to measure primary pre-service teachers' knowledge on elementary arithmetic properties

Marbán, J. M. y Arias, R.

Universidad de Valladolid

La formación inicial del profesorado se configura como una de las claves del éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de la educación matemática. Las investigaciones desarrolladas en este sentido, sea su enfoque de carácter más empírico o más teórico, se apoyan en modelos profesionales docentes, en estándares de excelencia docente o en marcos conceptuales como el conocido Conocimiento Matemático para la Enseñanza definido por Hill, Ball y Schilling (2008).

En el caso particular de la Educación Primaria en nuestro país, donde la enseñanza-aprendizaje del campo numérico se extiende en el tiempo de manera notable, adquiere especial relevancia también el concepto "(buen) sentido numérico" que, según Alsina (2002), puede entenderse como la capacidad de aplicar buenos razonamientos cuantitativos en contextos reales. En la búsqueda por determinar cómo se desarrolla y se alcanza el "sentido numérico", McIntosh, Reys y Reys (1992) lo sitúan en el plano de la comunicación y nos dicen que la persona desarrolla un sentido numérico a base de lograr un entendimiento general de los números y de las operaciones. A partir de aquí determinan tres áreas donde el sentido numérico juega un papel clave: los conceptos numéricos específicamente, las operaciones con números y las aplicaciones de números y operaciones.

El instrumento, en forma de cuestionario, que presentamos a través de este trabajo, se centra en la segunda de las áreas determinadas por McIntosh, Reys y Reys (1992), donde es preciso analizar la comprensión del efecto de las operaciones, la comprensión de las propiedades matemáticas y una comprensión de la relación entre las operaciones. Así, se describe el proceso seguido para el diseño y la validación de un cuestionario orientado a medir conocimiento de la materia y conocimiento pedagógico del contenido en el marco concreto referido a las propiedades aritméticas de las operaciones suma y multiplicación.

Referencias

Alsina, A. (2002). De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria. *UNO*, *29*, 55-66.

Hill, C. H., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Mcintosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

Marbán, J. M. y Arias, R. (2015). Diseño y validación de un cuestionario para la validación del conocimiento de maestros en formación sobre propiedades aritmética elementales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 565). Alicante: SEIEM.

EL PAPEL DEL "RIGOR" EN LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

The role of "rigour" in qualitative research in mathematics education

Méndez, R. A.[a], Marbán, J. M.[a] y Jorrín, I. M.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Kennesaw State University, Estados Unidos

En este trabajo se hacen explícitas las estrategias y técnicas procedimentales utilizadas para dotar de rigor una tesis doctoral desarrollada en la Universidad de Valladolid.

Dicha tesis doctoral centra su atención en el estudio de los modelos de excelencia docente, tanto desde una perspectiva deductiva, como desde una inductiva. Para su desarrollo metodológico, se ha decidido configurar un procedimiento innovador que tiene en cuenta tradiciones de investigación cualitativa como la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1994), así como algunas técnicas bibliométricas apenas exploradas en la investigación en Educación Matemática, tales como el *Science Mapping* (Small, 1997). Específicamente, se ha utilizado el análisis de co-citación y similitud (Gmür, 2003; White y McCain, 1998) para la creación de redes que evidencien patrones de evolución alrededor del concepto de la excelencia docente.

En el ejercicio de concretar el diseño metodológico de la investigación se hizo uso del modelo *Hopscotch,* una herramienta conceptual para el diseño de investigaciones cualitativas, que permite estructurar y facilitar el entendimiento de la complejidad de un buen diseño de investigación.

Para este poster se ha decidido revisar en detalle una de las cinco fases de la tesis doctoral (la investigación documental que tiene como fin el diseño de los modelos deductivos de excelencia docente) a la luz de uno de los pasos del modelo *Hopscotch*: el correspondiente a la integridad/confiabilidad (*trustworthiness*) y que imprime rigor la investigación.

De esta manera, se explica el concepto de rigor, originalmente tenido en cuenta en la investigación de corte positivista, pero revisado en profundidad en el escenario de la investigación cualitativa (Shenton, 2004) desde las cuatro lentes propuestas por Guba (1981): Credibilidad, en preferencia a la validación interna; transferencia, en preferencia a la validación externa o generalización; consistencia, en preferencia a la confiabilidad; y confirmabilidad, en preferencia a la objetividad.

Referencias

Corbin, J. y Strauss, A. (1994). Grounded theory methodology. En N. K. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, CA: Sage.

Gmür, M. (2003). Co-citation analysis and the search for invisible colleges: A methodological evaluation. *Scientometrics, 57*(1), 27-57.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *ECTJ*, *29*(2), 75-91.

Shenton, A. K. (2004). Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. *Education for Information*, *22*(2), 63-75.

Small, H. (1997). Update on science mapping: Creating large document spaces. *Scientometrics, 38*(2), 275-293.

White, H. D., y McCain, K. W. (1998). Visualizing a discipline: An author co-citation analysis of information science, 1972-1995. *Journal of the American Society for Information Science, 49*(4), 327-355.

Méndez, R. A., Marbán, J. M. y Jorrín, I. M. (2015). El papel del rigor en la investigación cualitativa en educación matemática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 567). Alicante: SEIEM.

CAMINOS DE APRENDIZAJE PARA LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA BASADOS EN ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ERRORES

Learning paths in the introduction to Algebra based on the didactic analysis of errors

Montejo-Gámez, J.[a] y Amador, M. V.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad Complutense de Madrid

En esta contribución se estudia la enseñanza del manejo del lenguaje algebraico para estudiantes que establecen su primer contacto con el álgebra. Utilizamos para ello elementos del análisis didáctico, que permiten alcanzar un nivel de profundidad adecuado para conocer el proceso de aprendizaje de los alumnos y desarrollar recursos didácticos que optimicen dicho aprendizaje.

El lenguaje algebraico es el lenguaje propio de las matemáticas y por tanto una formación algebraica adecuada es esencial para la educación matemática y científica del individuo. El currículo de secundaria hace hincapié en este hecho e incluso existen proyectos internacionales (el denominado 'Early Algebra', por ejemplo) que defienden la formación algebraica más temprana, por lo que los profesores de matemáticas (en especial los que están en formación) deben contar con herramientas para proponer tareas que trabajen la iniciación al álgebra a cualquier nivel.

Con este fin, en Simon (1995) se introducen las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje como herramientas de mejora docente basadas en la investigación. A su vez, Gómez y Lupiañez (2007) definen los caminos para concretar a nivel de aula, utilizando la noción de capacidad como conocimiento elemental sobre nuestras expectativas de aprendizaje. La dualidad natural existente entre capacidades y errores nos permite utilizar estos caminos para caracterizar el objetivo de aprendizaje "aprender las expresiones algebraicas" a través de un grafo basado en las capacidades extraídas a partir de errores cometidos por alumnos de secundaria (Hidalgo, 2002; Amador, Montejo-Gámez y Ramírez, 2015). El diseño instruccional asociado a dicho grafo se ha mostrado eficaz con alumnos de 1º curso de ESO.

Proponemos en este trabajo una combinación de análisis de errores y análisis didáctico para comprender cómo se produce el aprendizaje del lenguaje algebraico. Este estudio combinado utiliza los caminos de aprendizaje para optimizar la descripción gráfica del objetivo de aprendizaje y es una herramienta efectiva para elaborar sistemáticamente propuestas didácticas estructuradas y que adapten las tareas al nivel de los alumnos.

Referencias

Amador, M. V., Montejo-Gámez, J. y Ramírez, M. (2015). Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º de ESO. Comunicación aceptada para la *17 Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Cartagena, julio de 2015.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Hidalgo, M. J. (2002). *Memoria del periodo de docencia e investigación del Programa de Doctorado Enseñanza de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas*. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Montejo-Gámez, J. y Amador, M. V. (2015). Caminos de aprendizaje para la iniciación al álgebra basados en análisis didáctico/de errores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 569). Alicante: SEIEM.

ESTUDIO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Study of primary school students' functional thinking

Morillo-Lopera, M.S., Moreno, A., del Río, A., Cañadas, M.C. y Molina, M.

Universidad de Granada

El objetivo de esta investigación es identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 3º curso de Primaria, en el marco de la propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como Early-Algebra (Molina, 2009). Previo a la toma de datos se realizó un análisis de los antecedentes en el tema del álgebra en relación con el pensamiento funcional, concluyendo que este tipo de pensamiento incluye la relación entre cantidades que pueden expresarse en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función**.** El pensamiento funcional se trabaja, habitualmente, en etapas posteriores a la educación primaria, por lo que actualmente no existen suficientes estudios realizados sobre su introducción en cursos tempranos.

Algunas investigaciones han evidenciado que los estudiantes de educación primaria (Blanton, 2008; Brizuela, 2000; Carraher, 2008; Schliemann et al., 2003), con la práctica del álgebra, son capaces de establecer relaciones y funciones numéricas. Los distintos modos de representación proporcionan distintos puntos de vista sobre cómo en la educación temprana se pueden plasmar el pensamiento funcional.

La investigación que se presenta en este póster se ha realizado con una muestra intencional de estudiantes de 3º de primaria. El instrumento que hemos utilizado para la recogida de información es una tarea escrita compuesta por siete cuestiones relacionadas con una situación modelizable por una relación funcional (lineal). La metodología de la investigación ha sido de tipo exploratorio. Los resultados muestran que estos alumnos utilizan diversas estrategias y representaciones para establecer la relación funcional propuesta en la tarea.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming Thinking, Transforming practice.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwarz, J. L. (2008). *Early algebra is not the same as algebra early*. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). New York: Routledge.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Schliemann, A. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA* (vol. 4, pp. 127-134). Honolulu: University of Hawai'i.

Morillo-Lopera, M.S. y otros (2015). Estudio del pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 571). Alicante: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA CONDUCTA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DESDE MODELOS ECONÓMICOS A LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Analysis of student's mathematical behavior from economic models to theory of didactic situations

Moura, H. P. G.[a], Fernández-Blanco, T.[b], Gusmão, T. C. R. S.[c]

[a]Faculdade Independente do Nordeste, Brasil, [b]Universidade de Santiago de Compostela, Espanha, [c]Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Brasil

En este póster se presenta un estudio cuyo objetivo es interpretar modelos económicos (Morton, 1971; Elster, 1989; Carmona, 1997; Bueno, 2004), concretamente los que implican "elección", "toma de decisiones" y "teoría de juegos", para analizar la conducta matemática de los estudiantes cuando resuelven problemas en el aula y establecer la relación entre dichos modelos.

El análisis se realiza desde supuestos de las "estrategias óptimas", de la "optimización de beneficios" y "minimización de costes y riesgos" y del modelo de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). En este sentido, la atención se dirige hacia los caminos que llevarán a los estudiantes a escoger una determinada opción de respuesta y si esa elección está influenciada por uno u otro modelo.

De modo particular, las cuestiones de investigación son las siguientes: ¿Cómo utiliza el estudiante los recursos que posee? ¿Cómo y cuándo optimiza tales recursos? ¿Cómo son sus decisiones de optimización? Dentro de un enfoque cuantitativo-cualitativo los objetivos se insertan en el contexto de una investigación de tipo descriptivo y los procedimientos de toma de datos siguen las directrices de una investigación naturalista o de campo. Los participantes son estudiantes de 3º y 4º curso de la ESO y futuros maestros de España y Brasil, a los que se proponen tres problemas analizados según las teorías antes citadas.

Los resultados, aunque parciales, apuntan hacia la idea de que la conducta matemática de los estudiantes está estrechamente ligada, entre otros factores, a procesos de elección, a sus preferencias y al contrato didáctico que se establece entre profesores y estudiantes.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Bueno, M. C. (2004). *Metodología para la toma de decisiones*. Madrid: Delta Universidad.

Elster, J. (1989). *Ulises y las sirenas: Estudios sobre racionalidad e irracionalidad*. México DF: FCE.

Carmona, A. C. (1997). *Toma de decisiones. Análisis y entorno organizativo*. Barcelona: Edicions UPC-Aula Teòrica, 53.

Morton, D. D. (1971). *Introducción a la Teoría de Juegos*. Madrid: Alianza Editorial.

Moura, H. P. G., Fernández-Blanco, T. y Gusmão. T. C.R.S. (2015). Análisis de la conducta matemática de estudiantes desde modelos económicos a la Teoría de las Situaciones Didácticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 573). Alicante: SEIEM.

¿CUÁL ES EL PERFIL DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA?

What is the profile of prospective secondary mathematics teachers?

Muñiz-Rodríguez, L.[a, b], Alonso, P.[a], Fernández-Blanco, T.[c], Rodríguez-Muñiz, L.J.[a], y Valcke, M.[b]

[a] Universidad de Oviedo (España), [b] Ghent University (Bélgica), [c] Universidad de Santiago (España)

En este póster se presenta un análisis de los programas de formación inicial docente de matemáticas en Educación Secundaria, con el objetivo de conocer el perfil profesional de los estudiantes del Máster en Formación del Profesorado (MFP) a partir de las titulaciones que dan acceso al mismo y de las condiciones de entrada a los diferentes programas en las distintas universidades españolas.

El análisis documental realizado (OECD, 2014) pone de manifiesto notables diferencias a nivel internacional en relación a la estructura, duración y condiciones de acceso a estos programas. Mientras que en algunos países los programas de formación inicial se rigen por una serie de estándares que especifican en qué medida las competencias del profesorado de matemáticas deben ser evaluadas, en el caso de España, el MFP se regula por una colección de competencias generales e imprecisas sobre los titulados, comunes a cualquier especialidad.

En la actualidad, se ofertan 51 programas de formación inicial para futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria en España ─33 en universidades públicas y 18 en privadas. La orden ministerial que regula los programas de formación inicial establece como requisito de admisión la acreditación del dominio de las competencias relativas a la especialidad que se desee cursar. Sin embargo, la subjetividad de tal condición da lugar a una notable heterogeneidad en el perfil profesional de los futuros docentes de matemáticas. El análisis de las titulaciones de acceso al máster en la especialidad de matemáticas en varias universidades españolas a partir de la información disponible en sus páginas web, nos permite afirmar que existe una notable diferencia entre la formación matemática de los futuros docentes. Los datos facilitados por los coordinadores de los distintos másteres nos permiten asumir un claro predominio de alumnado procedente de matemáticas y estadística, así como de una amplia gama de ingenierías (aeronáutica, civil, electrónica, industrial, telecomunicaciones, entre otras). En el caso de las ingenierías, por ejemplo, y teniendo en cuenta la estructura de los distintos grados en esta rama, pueden existir grandes diferencias en los contenidos matemáticos que incluyen. Esta situación se acentúa si consideramos alumnos procedentes de ramas tales como artes y humanidades o derecho.

A partir del marco internacional y su relevancia para la situación española, es necesario adoptar medidas que garanticen un sistema de formación docente de calidad. En opinión de los autores, es necesario establecer directrices nacionales específicas para la especialidad de matemáticas y crear un marco de estándares profesionales que permitan el desarrollo profesional del futuro profesor de matemáticas. Las notables diferencias entre las universidades a la hora de establecer qué titulaciones permiten el acceso directo a la especialidad de matemáticas del MFP, deberían minimizarse mediante el diseño de una prueba de admisión estandarizada basada en competencias matemáticas o mediante la definición de unos criterios comunes para el conjunto de universidades.

Agradecimientos

Trabajo financiado por una ayuda del Campus de Excelencia Internacional de la Univ. de Oviedo.

Referencias

OECD (2014). Indicator D6: What does it take to become a teacher? Recuperado de http://www.oecd.org/edu/EAG2014-Indicator%20D6%20%28eng%29.pdf

Muñiz-Rodríguez, L. y otros (2015). ¿Cuál es el perfil de los futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 575). Alicante: SEIEM.

DIFICULTADES Y ERRORES EN MATEMÁTICAS EN LA PRUEBA DE INGRESO AL CUERPO DE MAESTROS

Difficulties and errors in Mathematics in the public exam to become Primary Teachers

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A.

Universidad de Murcia

Muchos alumnos que cursan el Grado de Maestro de Primaria no solo tienen dificultades para resolver problemas elementales, a veces estas dificultades las tienen al aplicar los algoritmos de multiplicación y división y "el profesorado ha de enseñar a sus estudiantes contenidos elementales propios de la etapa educativa para la que estos se están preparando como si fuera la primera vez que estos estudiantes los abordan" (SEIEM, 2014, p. 2).

El objetivo del presente estudio es identificar los errores cometidos por 142 alumnos de 2.º, 3.º y 4.º matriculados en el Grado de Maestro de Primaria al realizar una prueba de matemáticas, utilizando cinco cuestiones correspondientes al campo numérico de la Prueba de Matemáticas para el ingreso en el Cuerpo de Maestros de la Comunidad de Madrid de 2013 (CAM, 2013).

Los errores encontrados, según la clasificación de Abrate, Pochulu y Vargas (2006), corresponden en su mayoría a deficiencias o ausencias de conocimientos previos. Las cuestiones corresponden a divisibilidad, números romanos, ordenar números racionales, obtener el número que falta en una multiplicación/división y aplicar porcentajes. En la primera, el 78,7 % considera solo los factores primos del número dado y algunos divisores; en la segunda, más de la quinta parte de los alumnos no sabe pasar de romanos a arábigos y viceversa; en la tercera, uno de cada seis alumnos no hace bien el paso de fracción a decimal; en la cuarta, más del 25 % de los alumnos comete errores en los algoritmos de multiplicación y división; y, en la quinta. un 30 % de los alumnos aplica mal los porcentajes o no responde a lo que se le pide. Los alumnos presentan diferentes tipos de dificultades dentro de las mencionadas por Socas, Hernández y Palarea (2014). No hay diferencias significativas por género y si las hay por curso, favorable a 4.º.

En cuanto a las evaluaciones de las cinco cuestiones, ningún alumno las contestó bien a todas ellas, a cuatro de ellas solo el 9,2%. El 36,6% contestaron bien a tres o más cuestiones, de los que el 25% son de 2.º, el 31,4% de 3.º y el 55,3% de 4.º. Las bajas calificaciones y los errores encontrados indica que parece oportuno "la posibilidad de elaborar pruebas específicas de acceder a las titulaciones de maestro" (SEIEM, 2014, p. 2).

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemáticas*. Villa María, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Disponible en http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf.

CAM (2013). *Procedimiento selectivo para el ingreso en el cuerpo de maestros: matemáticas.* Disponible en http://sec.magister.com.es/madrid2013/resumen_comun_madrid_2013.pdf

SEIEM (2014). Editorial. *Boletín*, *37*. Disponible en h http://www.seiem.es/publicaciones/boletines.htm

Socas, M., Hernández, J. y Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas matemáticos para profesores de educación primaria y secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2014* (pp. 145-154). Málaga: Dpto. Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2015). Dificultades y errores en matemáticas en la prueba de ingreso al cuerpo de maestros. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 577). Alicante: SEIEM.

PRÁCTICAS DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN LA PLANIFICACIÓN DE CLASE

High school teachers' practices in lesson planning

Pinzón, A.[a], González, M.J.[b] y Gómez, P.[a]

[a]Universidad de los Andes, [b]Universidad de Cantabria

El proceso de planificar, llevar a la práctica y evaluar diseños curriculares ha sido objeto de análisis en la literatura (Mutton, Hagger y Burn, 2011). Sin embargo, se sabe muy poco de las prácticas que tienen los profesores para su planificación de clase (Akyuz, Dixon y Stephan, 2013) y se han utilizado múltiples instrumentos y procedimientos para estudiarla que usualmente requieren gran cantidad de recursos y se centran en el análisis de un número reducido de casos. Dentro del contexto anterior, en este trabajo, presentamos el diseño de un cuestionario, con base en el modelo análisis didáctico (Gómez, 2007), que nos permitió caracterizar las prácticas de planificación de 28 profesores que cursaban un programa de maestría en una universidad colombiana.

Las preguntas del cuestionario se refieren a cinco aspectos de su competencia de planificación: los documentos curriculares que el profesor utiliza; las expectativas de aprendizaje y los errores previstos; las actuaciones del profesor y de los estudiantes; los criterios de selección de tareas y secuenciación de las mismas; y la evaluación. Solicitamos a los sujetos que recordaran una clase que habían impartido recientemente y que respondieran las preguntas del cuestionario en relación con esa clase. La mayoría de las preguntas del cuestionario son abiertas. Aunque las respuestas a estas preguntas fueron variadas, nos fue posible establecer códigos que las organizaran, a partir de la revisión de la evidencia (Corbin y Strauss, 1990) y con base en las dimensiones y niveles del currículo. Recogimos la cantidad de respuestas que fueron etiquetadas con cada código, calculamos el porcentaje al que corresponde esa cantidad sobre el total de respuestas codificadas y, con base en estos resúmenes de resultados de las preguntas, nos fue posible caracterizar las prácticas de planificación del grupo de profesores.

A partir de los datos analizados, podemos afirmar de manera parcial que este grupo se caracteriza porque, en su planificación: centran su atención en las dimensiones conceptual y social del currículo a la hora de atender los documentos de referencia (plan de área y documento de los estándares); centran la formulación de los objetivos de aprendizaje en los procedimientos y las representaciones, sin necesariamente buscar una relación compleja entre los tres organizadores del currículo del análisis de contenido; tienen en cuenta parcialmente los errores en los que sus estudiantes pueden incurrir al abordar las tareas; no planifican para abordar esos errores, cuando los han tenido en cuenta; y no prevén la actuación de sus estudiantes cuando ellos abordan las tareas que se les proponen.

Referencias

Akyuz, D., Dixon, J. K. y Stephan, M. (2013). Improving the quality of mathematics teaching with effective planning practices. *Teacher Development, 17*(1), 92-106.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1), 3-21.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Mutton, T., Hagger, H. y Burn, K. (2011). Learning to plan, planning to learn: the developing expertise of beginning teachers. *Teachers and Teaching, 17*(4), 399-416.

Pinzón, A., González, M.J. y Gómez, P. (2015). Prácticas de profesores de secundaria en la planificación de clase. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 579). Alicante: SEIEM.

CONOCIMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN PORTUGAL

Primary school teachers' word problem solving knowledge in Portugal

Ramos, M.[a], Loureiro, M.[b], Rosales, J.[a], Vicente, S.[a] y Sánchez, B.[a]

[a]Universidad de Salamanca, España; [b]Universidade da Beira Interior, Portugal

Los conocimientos de los maestros juegan un papel importante en la calidad de la instrucción (Hill et al., 2008). Varios estudios han mostrado que el conocimiento de los maestros (ver una revisión en Ribeiro et al., 2014) sobre resolución de problemas es coherente con lo que ocurre en las aulas al resolver problemas (Ramos et al., 2013). Sin embargo, se sabe menos acerca de los conocimientos sobre resolución de problemas de maestros de países como Portugal. Por ello, en este trabajo se pretende analizar si una muestra de maestros de educación primaria de Portugal reconoce tanto la utilidad de la información situacional y matemática añadida a los problemas, como el énfasis en el razonamiento en el modelo de resolución propuesto y en la interacción profesor-alumnos.

36 maestros sin experiencia previa en resolución de problemas fueron entrevistados en torno a tres tareas (problema, modelo de resolución e interacción). En cada tarea el maestro debía elegir argumentando entre dos opciones: una (I) referida a problemas y procesos de resolución estándar, y la segunda (II) referida a problemas matemáticos y situacionalmente enriquecidos, y procesos en los que se promovían ambos tipos de razonamiento. Los maestros que argumentaron las opciones estándar y superficial en las distintas tareas fueron categorizados como superficiales, mientras que los que dieron argumentos sobre la segunda opción fueron categorizados como genuinos. Los resultados (Tabla 1) se agruparon en porcentajes atendiendo a las categorías tomadas en cada tarea.

Tabla 1. Porcentaje de elección de cada alternativa en cada tarea por los maestros.

	Maestros Portugueses (n=36)	
Tarea	Superficial (I)	Genuino (II)
Problema	88.9	11.1
Resolución	58.3	41.7
Interacción	25	75
Media	57.4	42.6

Los maestros exhiben un conocimiento superficial y genuino equiparado. De forma más específica, a medida que las tareas fueron más explícitas, los maestros fueron detectando las ayudas incluidas que facilitaban el razonamiento (en la línea de los resultados de Ramos et al., 2013). Más investigación sobre ello sería aconsejable. Analizar con más detalle los aspectos que caracterizan esos resultados podría tener implicaciones educativas.

Referencias

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, G. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26* (4), 430-511.

Ramos, M., Rosales, J. y Vicente, S. (2013, agosto). *Perceptions and reflections in word problem solving*. Poster presentado en Biennial Conference for Research on Learning and Instruction, Munich, Alemania.

Ribeiro, C. M. et al. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica – distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca: SEIEM.

Ramos, M. y otros (2015). Conocimiento sobre resolución de problemas de maestros de educación primaria en Portugal. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 581). Alicante: SEIEM.

EMPODERAMIENTO DOCENTE DE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Teacher empowerment of Socioepistemological Theory

Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R. y Montiel, G.

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014) propone una nueva manera de relacionarse con el saber matemático. Propone un tránsito de la centración en objetos matemáticos hacia la centración en las prácticas ligadas a ellos, que los significan mediante el uso. Los interrogantes actuales son cómo propiciar y evidenciar que los profesores experimentan este tránsito y cuáles son sus manifestaciones. Mostraremos los avances a partir de un episodio de un estudio de caso contextualizado en Oaxaca, México. Se toma la noción matemática relativa a la proporcionalidad directa (Reyes-Gasperini, 2013) donde la relación hacia la representación gráfica de la función de proporcionalidad deja de ser restringida a una recta que pasa por el origen para aunar la noción de razón de cambio, la interpretación de la pendiente y la noción de variación.

Respecto al saber matemático, metodológicamente se realiza una *problematización del saber matemático;* esto es un estudio socioepistemológico mediante el análisis sistémico desde las cuatro dimensiones del saber: Su naturaleza epistemológica, su tesitura sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Así obtenemos las prácticas ligadas al objeto matemático y diseñamos situaciones de aprendizaje para trabajar la *problematización del saber matemático escolar* (*psme*) con profesores. Además recientemente incorporamos aspectos de la *Grounded Theory* para estudiar y categorizar las manifestaciones del empoderamiento.

Como conclusiones preliminares obtenemos que para *propiciarlo* precisamos de la *psme*; para *evidenciarlo* construimos una *estructura metodológica* que contrapone la centración en objetos (la proporcionalidad) hacia las prácticas (lo proporcional); y por último, las *manifestaciones* como consecuencia del empoderamiento que hasta el momento hemos evidenciado refieren, por ejemplo, a la incorporación y el diálogo con una disciplina de referencia, la participación activa en congresos mostrando los resultados de estudios realizados por docentes y la construcción de nuevos roles del profesor en su comunidad. En síntesis, el empoderamiento docente que exponemos articula el *liderazgo*, propio de las corrientes sociológicas, con la *problematización del saber matemático*, propia de la TSME: Una nueva relación al saber matemático permitirá al docente hacerse dueño del saber que enseña y de esta manera le permitirá transformar su realidad y la de su entorno.

Referencias

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios de la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: Acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360-382.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México DF: Secretaría de Educación Pública.

Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R. y Montiel G. (2015). Empoderamiento docente de la teoría socioepistemológica. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 583). Alicante: SEIEM.

ERRORES EN LA SUSTRACCIÓN COMETIDOS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Errors in subtraction by university students

Rodríguez, M.[a] y Sánchez, A. B.[b]

[a]Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca
[b]Dpto. Didáctica, Organización y Métodos de Investigación, Universidad de Salamanca

El manejo adecuado de las operaciones elementales es uno de los objetivos de la enseñanza obligatoria de gran parte de los países del mundo. Referido a ello, la investigación muestra que un alto porcentaje de niños de primaria (6-12 años) cometen errores cuando realizan sustracciones (López y Sánchez, 2007; Young y O'Shea, 1981). Sin embargo apenas se sabe si esos errores se mantienen en personas adultas. En este trabajo se pretende analizar los tipos de errores que estudiantes universitarios cometen al realizar la sustracción.

Para ello, se eligió una muestra, por disponibilidad, de 535 estudiantes universitarios de la Universidad de Salamanca de diversos cursos de las Diplomaturas y Grados de Maestro, Gestión y Administración de Empresas, y Estadística. Cada uno de los estudiantes resolvieron, en una sesión de aula, sin límite de tiempo, el cuestionario validado de Van Lehn (1990), compuesto por 20 sustracciones de diferentes tipos (más detalle López y Sánchez, 2007). Las respuestas erróneas se categorizaron a partir de las 120 categorías de errores producidos por niños en edad escolar de la teoría de Van Lehn (1990), a las que se añadieron otro tipo de errores que surgieron del análisis. Los resultados se organizaron en tablas en valores absolutos y porcentajes.

Los resultados mostraron que solamente 129 (24'1%) estudiantes de los 535 individuos realizó correctamente todas las operaciones. Con más detalle, del total de 10.700 sustracciones, 1258 (11'76%) tenían algún error. Analizando el tipo de errores producidos, donde el más frecuente fue el error de cálculo, este trabajo se centra en uno de ellos, en concreto, cuando los estudiantes no tuvieron en cuenta las llevadas y sustrajeron el dígito más pequeño del mayor en cada columna, independientemente de su posición en el minuendo o sustraendo. Este es un error que se mantiene con el tiempo ya que es uno de los más significativos que se produjeron en niños de 6-12 años en estudios previos (López y Sánchez, 2007; Van Lehn, 1990), que puede indicar que la enseñanza o el aprendizaje de los estudiantes del algoritmo de la sustracción pudo no haber sido el adecuado, o el manejo adecuado del algoritmo por los estudiantes no se mantuvo después de un cierto tiempo. Profundizar esos aspectos puede ser objetivo de futura investigación. También puede ser motivo de futura investigación ampliar la muestra a otras personas adultas, así como comparar los resultados con los producidos por estudiantes de Primaria. Este estudio podría tener implicaciones educativas para favorecer la enseñanza y aprendizaje de la sustracción en las edades escolares.

Referencias

López, R. y Sánchez, A. B. (2007). Los componentes generadores de errores algorítmicos. Caso particular de la sustracción. *Revista de Educación, 344,* 377-402.

Van Lehn (1990). *Mind bugs: Origins of procedural misconceptions.* Cambridge, MA: MIT Press.

Young, R. y O´Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science, 5*, 153-177.

Rodríguez, M. y Sánchez, A. B. (2015). Errores en la sustracción cometidos por estudiantes universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 585). Alicante: SEIEM.

PARTICIPACIÓN EN LA INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS AL RESOLVER UN PROBLEMA CON APARTADOS DE DISTINTOS DOMINIOS COGNITIVOS EN PRIMARIA

Participation in the interaction between teacher and students when together solving a problem with different cognitive domains in primary classrooms

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J., Vicente, S. y Gracia, L.
Universidad de Salamanca

La interacción en las aulas es de interés en Educación Matemática, por ejemplo, referido a la participación de los alumnos cuando resuelven problemas conjuntamente con el profesor en el aula de Primaria. Rosales et al. (2008) muestran que es escasa cuando resuelven problemas rutinarios, aunque aumenta en los no rutinarios (Sánchez et al., 2014). Analizamos la participación en la interacción profesor-alumnos cuando resuelven juntos un problema con tres apartados (adaptado de TIMSS 2007, IEA, 2011) ubicados en los dominios de conocimiento, aplicación y razonamiento.

Se eligieron por disponibilidad tres maestros de 6º curso con elevada experiencia, entre una muestra de maestros asignados a centros públicos y privados que dejaron ser grabados en audio mientras resolvían el problema con sus alumnos. Transcrita la interacción, se organizó por ciclos que se categorizaron según la construcción de la idea principal del ciclo (Chamoso et al., 2007): Nivel 1 (P: profesor), Nivel 2 (Pa: profesor-alumno), Nivel 3 (Ap: alumno-profesor) y Nivel 4 (A: alumno).

Tabla 1. Resumen de resultados del estudio

	Conocimiento	Aplicación	Razonamiento
Nivel 1 (P)	14,71 %	15,00 %	19,83 %
Nivel 2 (Pa)	67,65 %	77,50 %	58,62 %
Nivel 3 (Ap)	17,65 %	7,50 %	21,55 %
Nivel 4 (A)	0,00 %	0,00 %	0,00 %

Los resultados muestran que, en general, la interacción entre profesor y alumnos es escasa. Atendiendo al razonamiento comparando con los demás dominios cognitivos, parece que aumenta la participación monologal del profesor y la conjunta entre profesor y alumnos con una mayor contribución de éste, en la línea de cuando resuelven problemas no rutinarios (Sánchez et al., 2014). Esto requiere más investigación para profundizar si el tipo de problema repercute en la participación de los alumnos, con las correspondientes implicaciones educativas.

Referencias

Chamoso, J. M., Vicente, S., Rosales, J. y Orrantia, J. (2007). Análisis de la interacción profesor-alumno en el aula de matemáticas: actividades, autonomía e incidentes. *Actas XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Querétaro, México, 15-18 de julio de 2007.

IEA (2011). *TIMSS 2007. Guía del usuario para la base de datos internacional.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J. M. (2008). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los profesores cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos? *Cultura y Educación, 20*(4), 423-439.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J. y Vicente, S. (2014). Autonomía en la interacción en resolución de problemas no rutinarios en aulas de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p.603). Salamanca: SEIEM.

Sánchez, B. y otros (2015). Participación en la interacción profesor-alumnos al resolver un problema con apartados de distintos dominios cognitivos en Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 587). Alicante: SEIEM.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS Y EL TRABAJO CON RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROFESORES QUE ASISTIERON EL CURSO "PRÓ-LETRAMENTO"

Attitudes toward mathematics and work in problem solving of teachers attendant to the course "Pró-Letramento"

Sander, G. P. y Pirola, N. A.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Campus de Bauru

El objetivo de este trabajo es investigar cómo las actitudes hacia las matemáticas influyen en la práctica pedagógica en el trabajo con resolución de problemas de los profesores que asistieron al curso de formación continua del "Pró-Letramento". La investigación se basa, principalmente, en estudios de Brito (1996, 2006) que abordan temas tales como la resolución de problemas y actitudes hacia las matemáticas. El "Pró-Letramento" fue un programa de formación continua, en Brazil, para profesores en los primeros años de la escuela primaria interesados en mejorar la calidad del aprendizaje en la lectura/escritura de la Lengua Portuguesa y de las Matemáticas. En este contexto, la investigación se centró en el curso de Matemáticas, con énfasis en los estudios relacionados con el tema "Resolución de problemas: el lado lúdico de la enseñanza de las Matemáticas". El enfoque metodológico de la investigación es de naturaleza cualitativa, aunque se apoya también en algunos datos cuantitativos (Bogdan y Biklen, 1994). Los instrumentos utilizados fueron una escala de actitudes hacia las matemáticas (Brito, 1998) y la observación y grabación de clases de esta disciplina. La escala de actitud hacia las matemáticas se administró a 442 profesores que asistieron al "Pró-Letramento" en Matemáticas. De ellos, seleccionamos a 4 profesores, uno con actitud muy positiva, otro con actitud muy negativa y otros con actitud poco positiva y poco negativa para la observación y análisis de su actuación en el aula. Los datos de la escala de actitudes mostraron que la distribución de las actitudes positivas y negativas de estos profesores fue casi equilibrada, con una mayor tendencia a actitudes negativas hacia las matemáticas. Durante el acompañamiento, se observó que los profesores con actitudes positivas trabajan con resolución de problemas de diversas maneras, cuestionando más situaciones, mientras los profesores con actitudes negativas trabajaron mecánicamente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo de CAPES – Proc. nº 99999.010434/2014-03.

Referencias

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Oporto, Portugal: Porto Editora.

Brito, M. R. F. de. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus.* Tese de Livre Docência, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Brito, M. R. F. (1998). Adaptação *e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática.* Zetetike *6(*9), 45-63.

Brito, M. R. F. de (Org.). (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. En M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar* (pp. 13-53). Campinas, Brasil: Alínea Editora.

Sander, G. P. Pirola, N. A. (2015). Actitudes hacia las matemáticas y el trabajo com resolución de problemas de professores que asistieron el curso "PRÓ-LETRAMENTO". En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 589). Alicante: SEIEM.

INFLUENCIA DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

Influence of dynamic geometric software in mathematics visualization

Segade Pampín, M. E., Souto Salorio, M. J. y Mato Vázquez, M. D.

Universidade da Coruña

Este trabajo tiene como objetivo exponer los aspectos teóricos relativos a la influencia del software de Geometría dinámica en el desarrollo de la visualización matemática en base a los resultados de las principales investigaciones realizadas en este ámbito.

Se describe el marco teórico en el que encuadramos la presente investigación, y en particular se define el término visualización y se expone su importancia en el aprendizaje de la Geometría. Asimismo, se enuncian las dificultades que se encuentran en la práctica de la visualización y se explican las distintas pruebas existentes para evaluar la visualización. En último lugar, se detallan los beneficios del uso del software de Geometría dinámica para el desarrollo de la visualización.

Es fundamental conocer los procesos cognitivos relativos a la visualización que muestran los estudiantes en el transcurso de resolución de una tarea matemática, ya que se podrán extraer aspectos e indicaciones que permitan mejorar la enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Gutiérrez, 2006). Por otra parte, el software de Geometría dinámica proporciona a los estudiantes la posibilidad de aprender conceptos geométricos y explorar sus relaciones fácilmente (Mariotti, 2013). Es por ello que, investigar y analizar en profundidad las nuevas posibilidades didácticas que esta tecnología interactiva incorpora a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, podrá ayudar a mejorar y desarrollar la práctica de la visualización, componente clave del razonamiento matemático.

Referencias

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Geometría para el siglo XXI*, 13-58.

Mariotti, M.A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education, 45*(3), 441- 452.

Segade Pampín, M. E., Souto Salorio, M. J. y Mato Vázquez, M. D. (2015). Influencia del software de geometría dinámica en la visualización matemática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 591). Alicante: SEIEM.

ÍNDICE DE AUTORES