Investigación en Educación Matemática XXI

Editores:
José M. Muñoz Escolano
Alberto Arnal Bailera
Pablo Beltrán Pellicer
M. Luz Callejo de la Vega
José Carrillo Yáñez

SEIEM

XXI SEIEM

ZARAGOZA

6, 7, 8 y 9 de septiembre de 2017
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza

Universidad Zaragoza 1542

Facultad de Educación Zaragoza

Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Departamento de Matemáticas Universidad Zaragoza 1542

Investigación en Educación Matemática

XXI

Universidad Zaragoza
1542

Investigación en Educación Matemática

XXI

José M. Muñoz-Escolano, Alberto Arnal-Bailera,
Pablo Beltrán-Pellicer, M. Luz Callejo y José Carrillo (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Zaragoza, 6, 7, 8 y 9 de septiembre de 2017

Investigación en Educación Matemática XXI

Edición científica
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Facultad de C. Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)

José María Muñoz-Escolano
Alberto Arnal-Bailera
Pablo Beltrán-Pellicer
M. Luz Callejo de la Vega
José Carrillo Yáñez

Edita: Servicio de Publicaciones. Universidad de Zaragoza
Diseño del logo: Juan Cruz Resano López y Nora Ramos Vallecillo
Diseño de la portada: Juan Cruz Resano López y Nora Ramos Vallecillo

ISBN: 978-84-16723-42-3
ISSN: 1888-0762

Cítese como:
J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), (2017) *Investigación en Educación Matemática XXI*. Zaragoza: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

ÍNDICE

Presentación

Desde su fundación en 1996, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) ha servido de foro de comunicación entre investigadores en Educación Matemática, ejerciendo de catalizador de gran parte de la investigación realizada en esta área en los últimos 21 años en España con influencia internacional. En la actualidad, con 220 socios, la SEIEM está en condiciones de mirar al futuro próximo mediante la elaboración de una *Agenda para la acción 2018-2022* con acciones concretas que le permitan consolidar e impulsar la sociedad, generar sinergias y aumentar su visibilidad.

La celebración de simposios anuales es una de las actividades destacadas que la SEIEM lleva realizando desde su inicio. A lo largo de los años, estos simposios se han convertido en referencia nacional en la investigación en Educación Matemática y gozan de notable impacto a nivel latinoamericano. Como indicador de la calidad investigadora de estos simposios, cabe señalar la presencia de sus trabajos en bases de datos internacionales como el *Conference Proceedings Citation Index* de la colección principal del *Web of Science* de Thompson Reuters, así como la participación y las contribuciones firmadas por investigadores de distintas nacionalidades.

El XXI Simposio SEIEM se ha celebrado en la nueva Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza, del 6 al 9 de septiembre de 2017. Aunque es la primera vez que un simposio SEIEM se realizaba en Zaragoza, esta Universidad ya contaba con el antecedente de la organización del X Simposio celebrado en Huesca en 2006. Más de 185 investigadores de cinco nacionalidades distintas se han dado cita en este Simposio, que ha contado con la presencia de invitados institucionales de la Real Sociedad Matemática Española, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y la Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

El programa científico de este año ha sido similar al de otros simposios anteriores. Se continúa con una estructura de dos seminarios con ponentes invitados, tres sesiones de presentación de comunicaciones sujetas a un proceso de evaluación por pares, diversos *workshops* o grupos de trabajo de investigadores que comparten líneas o temáticas de investigación y la presentación de pósteres.

Además de las anteriores actividades ya "tradicionales", en este simposio también caben destacar las dos actividades llevadas a cabo durante el primer día: *la sesión dedicada a jóvenes investigadores* y *la sesión de formación y docencia universitaria*. Desde hace tres años, se incluye en la programación de los simposios la celebración de una sesión especial para estudiantes de doctorado o recientes doctores. La actividad está resultando exitosa e interesante por cuanto el número de participantes se incrementa cada año. En esta ocasión, la organización de la misma ha correspondido a Matías Arce y a Miguel Ángel Montes. Han contribuido a esta sesión José Carrillo, impartiendo una conferencia invitada titulada *Revisando un artículo de investigación: en qué fijarse y qué conocimiento extraer del propio proceso de revisión*, y los jóvenes investigadores Ignacio González-Ruiz y Eder Pinto. Por otro lado, la principal novedad del programa de este año ha consistido en la realización de una sesión sobre formación de la docencia. La programación de esta sesión recoge el interés manifestado en distintas ocasiones por muchos socios, en cuanto a que además de investigadores, también son formadores de docentes. Coordinada por M. Luz Callejo, la sesión consistió en un seminario-taller impartido por Carme Burgués y titulado *Formar maestros para enseñar matemáticas en profundidad. Algunas ideas para compartir*, que gozó de un gran número asistentes.

En este volumen se recogen las siguientes contribuciones al simposio:

El Seminario I de investigación aborda la Didáctica del Algebra en el grupo de investigación *Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica* (DMDC). Miguel R. Wilhelmi ejerce como coordinador del Seminario y realiza una presentación al mismo. A continuación, se recogen las dos ponencias invitadas. La primera ponencia está firmada por Josep Gascón, en colaboración con Marianna Bosch y Noemí Ruiz-Munzón, y la segunda ponencia está firmada por Juan D. Godino, en colaboración con María Burgos. En ellas se recogen y se discuten los resultados de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar desde diferentes marcos teóricos. En este seminario se actualizan algunos de los resultados mostrados en el Seminario del XVI Simposio de Baeza en 2012 sobre el grupo DMDC, pero, en esta ocasión, centrado en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar, tópico que también fue objeto de estudio en el XI Simposio de La Laguna en 2007.

El Seminario II de investigación se centra en *Dimensiones de la Diversidad en Educación Matemática*. Núria Planas realiza una breve presentación del seminario, que también consta de dos ponencias. En primer lugar, Ángel Gutiérrez, en colaboración con Adela Jaime, realiza una revisión de resultados de investigaciones recientes sobre estudiantes con alta capacidad matemática, línea en la que los autores poseen una prolongada trayectoria investigadora. Posteriormente, Núria Planas presenta en su ponencia una panorámica de recientes investigaciones en relación con el aprendizaje matemático multilingüe en la escuela. Este seminario se complementa con el llevado a cabo en el XIV Simposio en Lleida de 2010 sobre Educación Matemática y diversidad.

Se presentan en las actas un total de 38 comunicaciones de las 51 inicialmente presentadas. Todas comunicaciones han sufrido un proceso de revisión por pares doble-ciego (74,5% de aceptación) coordinado por el Comité Científico del Simposio y en el que han participado 85 revisores.

Finalmente, se incluyen también resúmenes de los 48 pósteres defendidos en el simposio de las 54 propuestas inicialmente presentadas. Dichos resúmenes también han sufrido un proceso de evaluación por pares. Las comunicaciones y pósteres muestran la gran variedad de las temáticas y líneas de investigación actuales en Educación Matemática.

En las siguientes líneas, querríamos expresar nuestro agradecimiento a José Carrillo y a M. Luz Callejo, coordinadores del Comité Científico, así como al resto de la Junta Directiva de la SEIEM durante el periodo 2016 – 2017, tanto por la confianza mostrada en el Comité Local como organizadores del XXI Simposio, como por todo el trabajo realizado y asesoramiento dados durante la preparación y la celebración del mismo. También mencionar a los coordinadores de los seminarios y de los grupos de investigación por su diligencia a la hora de programar y llevar a cabo sus distintas sesiones.

En tiempos de escasez económica, desearíamos agradecer especialmente el apoyo económico recibido de varias instituciones, además de la propia SEIEM. En primer lugar, agradecer a la Universidad de Zaragoza, que ha apoyado la organización del simposio mediante una ayuda del Vicerrectorado de Política Científica. A la Facultad de Educación, por cedernos los magníficos espacios donde se celebró el simposio. Al Instituto Universitario de investigación en Matemáticas y Aplicaciones, por las ayudas y el soporte brindados. Finalmente, al Departamento de Matemáticas por las facilidades dadas y por el decidido impulso a la investigación en Educación Matemática que lleva realizando a lo largo de estos años.

La organización de este simposio ha sido una labor colectiva. Me siento personalmente en deuda con los miembros del Comité Local y desearía agradecerles a todos ellos su implicación personal, ilusión, interés y buen hacer que han mostrado durante la preparación y celebración del simposio, en algunos casos, teniendo que desplazarse muchos kilómetros hasta Zaragoza por estar trabajando en otras universidades. Quería también hacer una mención especial a Julio Sancho, por su ayuda desinteresada en la maquetación y edición de estas actas durante los meses estivales de julio y agosto. Finalmente, agradecer a Juan Cruz Resano y a Nora Ramos, compañeros del área de Didáctica de la Expresión Plástica en la Facultad de Educación, por el ingenioso diseño del logo que motiva el simposio, los carteles y la portada de estas actas.

Esperamos que este congreso y los trabajos aquí publicados sirvan para impulsar la investigación en Educación Matemática y producir mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles educativos.

Zaragoza, septiembre de 2017.

José M. Muñoz-Escolano
Coordinador Local del XXI Simposio de la SEIEM

Seminario I

Didáctica del Álgebra en el Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica

Coordinador

Miguel Rodríguez Wilhelmi. Universidad Pública de Navarra.

Introducción al seminario de investigación I: Didáctica del Álgebra

Ponentes

Josep Gascón Pérez. Universitat Autònoma de Barcelona.

El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico.

Juan Díaz Godino. Universidad de Granada.

Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar.

DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA[1]

Algebraic Education

Wilhelmi, M.R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

La Didáctica del álgebra es un área prioritaria en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Así, en congresos nacionales e internacionales se reserva un grupo de trabajo específico para esta área. La comunidad Early Algebra se ha ido asentando en los últimos treinta años, ha aportado fundamentación teórica y datos experimentales sobre la conveniencia de superar la oposición aritmético-algebraico y sobre la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, antes que un paso de una actividad meramente aritmética (en Educación Primaria) a otra donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria). La Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas aporta un modelo de la proporcionalidad, que sobrepasa el desarrollo numérico clásico en Educación Primaria, pero sin introducir una formalización propia de la Educación Secundaria.

Palabras clave: *Didáctica del álgebra, Early Algebra, Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM), proporcionalidad.*

Abstract

The Algebraic Education is a priority area in research in Mathematics Education. Thus, national and international congresses reserve a specific working group for this area. The Early Algebra community has been established in the last thirty years, has provided theoretical foundation and experimental data on the desirability of overcoming arithmetic-algebraic opposition and on the need to structure the curriculum as an epistemological continuum, rather than a step of an activity merely arithmetic (in Primary Education) to another where algebra is presented as a finished product (in Secondary Education). The Theory of Didactical Situations in Mathematics provides a model of proportionality, which goes beyond the classical numerical development in Primary Education, but without introducing a typical formalization of Secondary Education.

Keywords: *Algebraic Education, Early Algebra, Theory of Didactical Situations in Mathematics (TSDM), proportionality.*

DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA COMO DOMINIO DE INVESTIGACIÓN

Los congresos internacionales principales tienen grupos de investigación en Didáctica del álgebra. El PME (http://www.igpme.org/) dedica el dominio de investigación 1 al Álgebra y a las estructuras algebraicas; el CERME (http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/), el grupo de trabajo temático 3 al Pensamiento algebraico.

Además, en los congresos, simposios, jornadas, etc., nacionales e internacionales, además de estos grupos específicos, el álgebra es un tópico utilizado de forma extensa para ejemplificar o articular discursos vinculados a otros grupos de trabajo de interés disciplinar general (argumentación y prueba, visualización, representación, modelos, etc.) o de intervención pedagógica o didáctica (evaluación, enseñanza y aprendizaje con tecnología, desarrollo profesional docente, etc.).

Wilhelmi, M.R. (2017). Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM.

En la SEIEM, el desarrollo de la Educación matemática relacionada con la aritmética y el álgebra se integra en el Grupo de trabajo del Pensamiento Numérico y Algebraico y, de igual manera, forma parte de propuestas de otros grupos de interés. Además, en los últimos 5 años, de 2012 a 2016, la Sociedad ha impulsado dos seminarios específicos; a saber:

— Seminario II: Fines de la investigación en pensamiento algebraico (Paralea, Castro y Puig, 2012).

— Seminario I: Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico (Lupiáñez, González Marí, Gil, Arnau y Moreno, 2015).

Además, en los Simposios de la SEIEM 2012-2016, el número de comunicaciones dedicadas expresamente al álgebra o que utilizan este tópico para ejemplificar el discurso, con referencias explícitas a publicaciones científicas sobre la Didáctica del álgebra son abundantes y determinan un interés amplio de los investigadores por este campo (Tabla 1).

Tabla 1. Didáctica del álgebra en los Simposios de la SEIM 2012-2016

Año	2012	2013	2014	2015	2016
Álgebra como tópico	5	4	7	5	3
Álgebra como ejemplo	13	9	9	15	4
Total comunicaciones	39	43	46	43	41
Seminario Didáctica del álgebra	Sí	No	No	Sí	No

Este breve panorama es por sí mismo suficiente para poder afirmar que la Didáctica del álgebra tiene un interés vigente en la comunidad de investigadores.

Este seminario describe este campo de investigación desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, http://www.atd-tad.org/) y del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/). Este desarrollo estará a cargo de Josep Gascón (Universitat Autònoma de Barcelona) y de Juan D. Godino (Universidad de Granada), respectivamente.

En este documento, en primer lugar, se hace una breve descripción de la Didáctica del álgebra desde otras perspectivas teóricas; en concreto, desde la denominada perspectiva *Early Algebra* y desde la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM, http://guy-brousseau.com/), origen del Grupo "Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica (DMDC)". En segundo lugar, se hace un sucinto análisis de las similitudes y diferencias de la TAD y el EOS, sin ánimo exhaustivo, como detonante que sirva a la vez de introducción a los dos enfoques que vertebran el seminario y al debate posterior.

EARLY ALGEBRA

Kieran, Pang, Schifter y Ng (2016) hacen un estudio del origen, estado y perspectivas de la investigación en el campo del *early algebra*, mostrando la evolución teórica y del desarrollo práctico en procesos de enseñanza y aprendizaje con estudiantes de entre 6 y 12 años. Así, en la perspectiva del *early algebra* (EA) se sostiene que "las relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas están en el centro de la actividad algebraica temprana" (p. 1). Además, se justifica la importancia central del lenguaje natural; no en vano, en esas edades los niños están en plena adquisición y desarrollo del lenguaje. Sus capacidades lingüísticas y comunicativas condicionan, pues, los procesos de representación y argumentación, para justificar, convencer al igual y para operativizar el pensamiento.

La premisa esencial del EA es que el paso de la aritmética al álgebra es complejo y que, por lo tanto, de cara a diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje mejor adaptados a las restricciones en la instrucción y cognitivas, es preciso "adelantar" ciertos aspectos algebraicos en las etapas tempranas. Para ello, desde el EA se intenta responder a la pregunta: ¿qué características describen el pensamiento algebraico?

La comunidad EA, ahora asentada tras treinta años de fundamentación teórica y aportación de datos experimentales, ha sostenido la conveniencia de superar la oposición aritmético-algebraico y la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, antes que un paso de una actividad meramente aritmética (en Educación Primaria) a otra donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria). Así, ya en 1996 Kieran propone un modelo de la actividad algebraica, que se desarrolla en tres niveles:

- *Nivel 1.* Actividad matemática que involucra objetos y expresiones algebraicas. Por ejemplo, resolución de problemas que precisen ecuaciones, patrones numéricos o geométricos, relaciones numéricas.
- *Nivel 2*. Actividad que suponga transformaciones de objetos basadas en reglas. Por ejemplo, manipulación de polinomios, factorización o expansión, transformación de ecuaciones y, en general, progreso mediante expresiones equivalentes.
- *Nivel 3*. Actividad en la que el álgebra es una herramienta al servicio de otro propósito. Por ejemplo, en la modelización, el estudio del cambio en un contexto, el análisis de relaciones, la justificación de reglas.

Estos niveles no tienen una mera disposición temporal, sino que vertebran los usos y concreciones según las diversas perspectivas teóricas y prácticas. Por otro lado, el tercer nivel es más que una manipulación simbólica, siendo precursor de actividades algebraicas posteriores.

> Las actividades globales de meta-nivel de álgebra pueden ser consideradas no sólo como parte de la actividad algebraica simbólico-literal, sino también como precursoras de actividades generacionales y transformacionales que serán puestas en juego más adelante (Kieran, 2004, 148).

Kieran (2004) hace una revisión de propuestas en diferentes países o contextos: en Estados Unidos, según el NCTM; en el desarrollo de las matemáticas en China, Singapur y Korea; el currículo según Davydov (2000) o la propuesta por *The Royal Society* (Sutherland, 1997). Se observan diferencias sustanciales entre las propuestas, aspecto que es también refrendado por Schmittau y Morris (2004) en relación con los Estándares y Principios del NCTM y la propuesta de Davydov.

> Las diferencias descritas […] reflejan diferencias fundamentales en las bases para desarrollar la comprensión algebraica, y suposiciones divergentes sobre los detonantes del pensamiento algebraico [...] Las diferencias con el currículo de los Estados Unidos son lo suficientemente profundas como para constituir un cambio de paradigma (p. 85).

Así, las diferencias entre las diferentes propuestas no pueden ser resumidas en la elección, secuencia y planificación temporal de las actividades, sino sobre todo en las propiedades que se atribuye a dichas actividades para el desarrollo del razonamiento algebraico por los sujetos.

Hay, por supuesto, aspectos que son referidos por las distintas perspectivas como claves para poder gestionar la actividad de los estudiantes. La noción de igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) es clave. Así, Cai y Knuth (2011), citando a Kieran, establecen que la ruptura semiótica de la igualdad es uno de los 5 aspectos que es preciso tomar en consideración en el tránsito de la aritmética al álgebra.

> La transición de la aritmética al álgebra es difícil para muchos estudiantes, incluso para aquellos estudiantes que son bastante competentes en aritmética, ya que a menudo requiere que ellos piensen de maneras muy diferentes [...] Kieran, por ejemplo, sugirió [5] cambios del pensamiento aritmético al algebraico: [...] (5) Una reorientación del significado del signo igual: de un significante para calcular, a un símbolo que denota una relación de equivalencia entre cantidades (p. ix).

Por todo ello, este seminario parte de una doble premisa:

- *Hipótesis divergente*. Dado el carácter multidimensional de los contextos y procesos educativos, las diferentes perspectivas teóricas en Didáctica de las matemáticas proponen medios distintos de control y funcionamiento de los sistemas didácticos, lo que imposibilita el surgimiento de una teoría única o que una se revele más eficaz, pertinente o con un mayor poder heurístico, tanto para el desarrollo de los aprendizajes como para la comprensión de cómo se lleva a cabo la adquisición de éstos.

- *Hipótesis convergente*. Dada la naturaleza relacional de las matemáticas y la constatación empírica de actividad matemática equiparable en contextos educativos diversos, con docentes distintos y currículos diferenciados, es posible identificar un campo común de intervención, donde criterios equiparables de gestión de los sistemas didácticos son asumibles y, por lo tanto, las distintas perspectivas teóricas son pertinentes con la debida meta-transposición didáctica que las haga inteligibles y eficaces.

PROPORCIONALIDAD EN LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

La TSDM sostiene la hipótesis según la cual todo saber matemático puede ser modelizado por una *situación didáctica fundamental* (Brousseau, 1998). Toda situación didáctica comienza con una consigna, es decir, la trasmisión de la tarea a los alumnos en un lenguaje comprensible. Los alumnos tendrán que contar con una *estrategia de base*, que permita dar una respuesta que necesariamente se revele inadecuada. Así, los alumnos obtienen información inteligible que, en oposición al *medio antagonista*, les permite hacer evolucionar sus conocimientos hacia el saber que se desea enseñar.

La *situación del puzle* fue elaborada para la introducción de la proporcionalidad con fracciones. Se presenta a los alumnos la Figura 1.

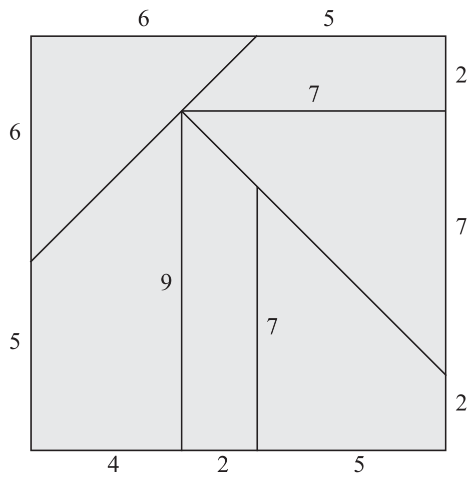


Figura 1. Puzle (Brousseau y Brousseau, 1987, p. 137)

Con la Figura 1 a la vista, los estudiantes reciben la consigna:

> Aquí podéis ver un puzle. Vais a fabricar unos parecidos, más grandes que los modelos respetando la regla siguiente: el segmento que mide 4 cm en el modelo deberá medir 7 cm en vuestra producción.
>
> Yo doy un puzle por equipo. Cada alumno tendrá que hacer una o dos piezas. Cuando terminéis tendréis que poder construir las mismas figuras que con el modelo (Brousseau y Brousseau, 1987, p, 138).

La actividad que sigue es por todos bien conocida:

- *Situación 1*: *utilización de estrategias de base*. Por orden de frecuencia en la aparición en los grupos, se tienen las siguientes estrategias: 1) construir cada pieza por separado, añadiendo 3 cm a todos los lados de todas las piezas; 2) construir un cuadrado mayor por adición también de 3 cm en los segmentos que componen los lados, lo que da dos lados de 17 cm y otros dos de 20 cm; 3) utilizar, en la construcción de las nuevas piezas, la regla “ 2 × longitud segmento – 1” (ya que 7 = 2 × 4 – 1).

- *Situación 2: obtención de la reducción a la unidad*. Consigna:

  > Los diferentes procedimientos que habéis utilizado ayer para rehacer el puzle no son buenos, porque no os han permitido construirlo correctamente. Os habéis dado cuenta de que sumando tres o haciendo "(×2) – 1" , las medidas no son correctas. En esta sesión, vais a intentar encontrar las medidas buenas que permitirán construir el puzle" (p. 141).

  El maestro (o, eventualmente, un alumno que ha tenido éxito en la sesión 1) dispone los valores:

  $4 \rightarrow 7$
  $5 \rightarrow$
  $6 \rightarrow$
  $2 \rightarrow$
  $9 \rightarrow$
  $7 \rightarrow$

  Los alumnos establecen, aunque no es necesaria, la proposición: $8 \rightarrow 14$; que motiva la afirmación: "¡Necesitamos la imagen del uno!... ¡Sí, eso permitiría encontrar todas las otras!".

  La sesión prosigue con todos los cálculos necesarios, no sin errores (por ejemplo, tomar 1,7 como constante de proporcionalidad, en lugar de 1,75), hasta la construcción del puzle y la comprobación empírica de que es correcto, es decir, que las piezas encajan.

- *Situación 3: generalización.* Consigna:

  > Hemos agrandado un puzle. Para ello, teníamos un modelo del que conocíamos las medidas y una información sobre una de ellas: a 4 le corresponde 7. ¿Qué habéis buscado? (p. 145).

  Los alumnos responden rápidamente: "es preciso encontrar la imagen de 1". El maestro pregunta entonces: "Si 9 tiene por imagen 11, ¿cuál sería la imagen de 1?".

  En fases posteriores de la situación, se buscan las imágenes de fracciones, haciendo el cálculo con ellas, sin "transformarlas" a números decimales. El avance de la clase es laborioso y requiere finalmente ejercicios de "entrenamiento".

Las consignas al inicio de cada sesión sirven para controlar las producciones *individuales*, evitando así la pérdida de sentido por los alumnos, y para el desarrollo *grupal*. Asimismo, el control busca que toda la clase comparta unos conocimientos que permitan actuar conjuntamente. Estas intervenciones pueden repetirse a lo largo de la sesión, permitiendo al docente modular la exigencia de la situación *adidáctica* que afrontan los niños.

> [Nota] Es muy importante hacer regularmente "un alto" con los niños: recordar o hacer recordar qué problema había sido propuesto, qué preguntas había provocado el problema. Es necesario que los alumnos sepan lo que están resolviendo. El maestro puede incluso, alguna vez, recordarlo durante la actividad: de hecho, muchos niños, mientras buscan 'medios', 'soluciones' de un problema, olvidan a menudo el 'porqué' de sus cálculos (p. 145).

En la sección siguiente se analizan diversos aspectos clave de la situación del puzle desde la perspectiva de la TAD y del EOS.

UNA MIRADA A LA SITUACIÓN DEL PUZLE POR LA TAD Y EL EOS

La TAD y el EOS comparten en su ADN, por así decirlo, esta forma de afrontar la Didáctica de las Matemáticas de la TSDM. En la situación del puzle descrita hay cuatro claves: 1) la noción de situación y el control sobre la actividad en el sistema didáctico; 2) cómo se generalizan los resultados; 3) la necesidad de realizar ejercicios de 'entrenamiento'; y, finalmente, 4) qué se entiende por álgebra. Estos cuatro aspectos tienen una interpretación en términos de la TAD y del EOS, a saber:

1. *Situación y control del sistema didáctico.* En la TSDM, la *situación* modeliza tanto el saber

matemático como su gestión en el *sistema didáctico* (por la definición del *medio antagonista*, el control de las *variables didácticas* y la estructura en fases de *acción*, *formulación*, *validación* e *institucionalización*). La TAD y el EOS proponen para ello dos herramientas teóricas diferenciadas; a saber, una para la dimensión epistemológica y otra para la didáctica.

— La TAD introduce la noción de *praxeología matemática* (PM) como una cuádrupla:

$$(t, T; \theta, \Theta) \equiv (\text{tarea, Técnica; tecnología, Teoría})$$

que permite modelizar el saber matemático; la *praxeología didáctica* como la organización de las PM en una institución y los medios utilizados para su control y funcionamiento en un proceso de estudio.

— El EOS introduce la noción de *significado pragmático* (sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas), que junto con la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos modelizan los diversos significados institucionales del contenido matemático en cuestión (por ejemplo, la proporcionalidad) y los diversos tipos de objetos que intervienen en las prácticas implicadas.

El análisis de los procesos de estudio se hace mediante la noción de configuración y *trayectoria didáctica* cuya dinámica está orientada hacia el logro de una alta *idoneidad* articulando la indagación /construcción y la transmisión del conocimiento.

2. *Generalización*. En la situación del puzle, toda vez que se ha respondido a la tarea inicial, por manipulación de la *variable didáctica* (qué segmento se transforma y qué valor toma en el nuevo puzle), se pone a prueba el conocimiento adquirido. Es decir, en la TSDM el *saber* se identifica con la noción que permite resolver clases de problemas. En este caso, el objetivo no es la construcción del puzle resultante de la ampliación primera (4 → 7), sino la comprensión por parte de los alumnos de teoremas esenciales de la proporcionalidad: "si sabemos la correspondencia de 1, podemos determinar el resto"; "la reducción a la unidad da la constante de proporcionalidad"; "no importa la representación utilizada, vale con decimales y con fracciones", etc.

   En consecuencia, dado que toda situación fundamental debe contar con *variables didácticas* para el progreso de los *conocimientos* de los alumnos (efectivos en los casos particulares) a la adquisición del *saber científico* pretendido (válido para la clase de problemas), se puede sostener la tesis según la cual toda situación fundamental incluye un componente esencialmente algebraico.

   De hecho, este rasgo de "generalización" es también asumido por la TAD, que sostiene que una praxeología matemática está más algebrizada que otra en tanto contiene más tipos generales de problemas, pudiéndose entonces establecer *grados de algebrización* entre praxeologías. De manera similar, en el EOS se asume que en las prácticas algebraicas los procesos de particularización-generalización son esenciales y la dualidad intensivo-extensivo condiciona el progreso en los distintos niveles de algebrización en las prácticas matemáticas.

3. *Ejercicios de entrenamiento*. La TSDM no modeliza este tipo de ejercicios. Así, asume una organización usual en las escuelas, donde la actividad matemática busca: a) introducir un saber, b) dotarlo de sentido o c) dominar su uso en tanto que instrumento. La TSDM, centrada en las situaciones adidácticas o con un componente adidáctico esencial, se ocupa esencialmente de modelizar los dos primeros tipos de actividades.

   La TAD denomina el *momento del trabajo de la técnica* a la organización didáctica cuyo objetivo es la *rutinización* de la técnica, que aumente su eficacia y limite su coste de ejecución en la institución. En el EOS, se trata de una práctica operativa cuyo objetivo es la maestría en un procedimiento. Por lo tanto, en estas dos perspectivas, TAD y EOS, se incorpora este tipo de actividad en una modelización global de la actividad matemática.

4. *Lo simbólico literal no se identifica con lo algebraico*. La actividad en la situación del puzle no busca la notación "$y = ax$", donde "a" es la constante de proporcionalidad. Tampoco busca el enunciado de proposiciones de la función lineal: 1) $f(ax) = af(x)$; 2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$. La situación, en las distintas fases, evoluciona por ampliación del campo numérico (naturales, decimales y fracciones). Los grados de algebrización en la TAD y los niveles de algebrización en el EOS son consistentes con esta premisa, dado que atribuyen a la notación una función en el proceso de algebrización, pero no limitan éste a la cristalización de los enunciados mediante variables, parámetros, funciones, etc. De hecho, esta tesis está asimismo fundamentada en el programa *Early Algebra*.

En las ponencias que siguen, Josep Gascón y de Juan D. Godino aportarán una visión más profunda de los aportes, alcance y poder heurístico de la TAD y del EOS, respectivamente, para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico y para elaborar propuestas didácticas viables en las aulas.

Referencias

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM. [Recuperable en (17/05/2017): https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/].

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early Algebraization*. Berlin: Springer-Verlag.

Davydov, V. V. (2000). Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviet Studies in Mathematics Education* (Vol. 2). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). [Recuperable en (20/05/2017): https://www.marxists.org/archive/davydov/generalization/generalization.pdf].

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271-290). Seville, Spain: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. [Recuperable en (10/05/2017): http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index].

Kieran, C., Pang, JS., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra*. Hamburg: Springer. [Recuperable en (15/05/2017): https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-32258-2].

Lupiáñez, J. L. (Coord.), González Marí, J. L., Gil, F., Arnau, D. y Moreno, A. (2015). Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 17-65). Alicante: SEIEM.

Paralea, M. (Coord.), Castro E. y Puig, L. (2012). Fines de la investigación en pensamiento algebraico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 71 - 95). Jaén: SEIEM.

Schmittau, J. y Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 60-87.
[Recuperable en (13/05/2017): http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index]

Sutherland, R. (1997). *Teaching and learning algebra pre-19*. London: The Royal Society. Recuperable en (18/05/17): https://royalsociety.org/~/media/Royal_Society_Content/policy/publications/1997/10183.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77-120. [English version, 2011: *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) 21*, 53-82. [Disponible en (01/11/16): http://math.unipa.it/%7Egrim/Wilhelmi_Q21.pdf].

[1] Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad

EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

The problem of elementary algebra within the anthropological theory of the didactic

Gascón, J.[a], Bosch, M.[b] y Ruiz-Munzón, N.[c]

[a]Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona,
[b]IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, [c]Universitat Pompeu Fabra

Resumen

Los primeros trabajos sobre la transposición didáctica del álgebra, llevados a cabo por Yves Chevallard en la década de los 80 del siglo pasado, pusieron de manifiesto que, en primera instancia, el álgebra es un instrumento —el instrumento algebraico— que culmina en la modelización algebraica y transforma completamente las condiciones del trabajo matemático. En coherencia con esta posición epistemológica, las investigaciones desarrolladas a lo largo de los últimos 25 años sobre el álgebra elemental en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico proponen considerar este dominio como un proceso de algebrización, ampliando así el ámbito de la actividad matemática escolar en el que se suele situar el problema didáctico correspondiente. Hemos estudiado, como componentes de dicho problema, la relación entre «lo numérico» y «lo algebraico», la algebrización de la proporcionalidad, la construcción de los números enteros como objetos algebraicos y el desarrollo de la modelización algebraica hacia la modelización funcional.

Palabras clave: *teoría antropológica de lo didáctico, modelización algebraica, proceso de algebrización, problema didáctico.*

Abstract

The first studies of the didactic transposition of algebra, carried out by Yves Chevallard in the 1980s, showed that, first of all, algebra is an instrument —the algebraic instrument— which evolves towards algebraic modelling and completely transforms the conditions of the mathematical work. According to this epistemological position, research on elementary algebra developed during these last 25 years within the anthropological theory of the didactic propose to consider it as a process of algebraization, thus enlarging the school mathematical domain where the corresponding didactic problem is usually located. As components of this problem, we have studied the relationship between "the numerical" and "the algebraic", the algebraization of proportionality, the construction of integers as algebraic numbers, and the development from algebraic to functional modelling.

Keywords: *anthropological theory of the didactic, algebraic modelling, process of algebraization, didactic problem.*

1. DEL PROBLEMA DOCENTE AL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

Denominamos «problemas docentes» a los que se plantea el profesor *como tal profesor* cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las *nociones disponibles* en la cultura escolar importadas en muchas ocasiones de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, actitud, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). En el

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). Zaragoza: SEIEM.

enunciado de los problemas docentes se asumen, sin cuestionarlas, las *ideas dominantes* en la citada cultura escolar[1] (Gascón, 1999b). En el caso del álgebra elemental la formulación inicial del problema docente puede expresarse como sigue:

> ¿*Qué* tengo que enseñar a mis alumnos y *cómo* tengo que enseñarlo a propósito del álgebra elemental?, ¿cómo puedo *motivarlos* para aumentar su *interés* y mejorar su *actitud* con relación al aprendizaje del álgebra?, ¿cómo *utilizar las TIC* a fin de mejorar la *competencia algebraica* de los alumnos?

Dado que la problemática docente tiende a poner en primer plano las cuestiones relativas a las dificultades de enseñanza-aprendizaje, las investigaciones próximas a dicha problemática empiezan centrándose en estudiar las principales *dificultades de los alumnos* en el aprendizaje del álgebra y las posibles *actuaciones del profesor* para paliarlas. Así, por ejemplo, los trabajos de Booth (1984), Kieran (1981) y Vergnaud (1985) estudian las creencias iniciales de los alumnos en torno al signo de igualdad y las dificultades que estas comportan para el aprendizaje de las ecuaciones. Los trabajos de Bednarz (2001) y Filloy y Rojano (1989), entre otros, analizan las dificultades con las que se encuentran los alumnos al operar con incógnitas debido a la falta de comprensión sobre la invariancia del conjunto de soluciones de una ecuación si se aplican transformaciones equivalentes a ambos lados de esta. Muchas de las explicaciones propuestas presuponen que la permanencia en el *marco de referencia aritmético*, esto es, el hecho de que los alumnos al comenzar el estudio del álgebra continúen utilizando las nociones y los enfoques que usaban en aritmética, puede dar cuenta de las dificultades que presentan en el aprendizaje inicial del álgebra.

Desde una perspectiva *psicolingüística* algunas investigaciones sitúan el origen de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra en la *disociación semántica/sintaxis*. Así, por ejemplo, Kaput (1987, 1996) describe el fenómeno de la *alienación del álgebra* provocada por el manejo escolar de un sistema simbólico formal aislado de todo contexto que pudiese dar significado a dichas acciones. Radford y Grenier (1996) sitúan la causa del vacío de significación que tienen las ecuaciones para los alumnos en el brusco *salto de abstracción* al que se les somete, en comparación con la lentitud del desarrollo histórico de las ecuaciones, mientras que Sfard y Linchevski (1994) sitúan el origen de las dificultades de los alumnos en la *rigidez del significado* que asignan a las expresiones algebraicas.

Para la t*eoría antropológica de lo didáctico* (TAD), en la que nos situamos, la reformulación de un problema docente para convertirlo en un problema de investigación didáctica —que, en nuestro caso, sería el problema didáctico del álgebra elemental—, requiere de manera imprescindible el cuestionamiento del ámbito de la actividad matemática involucrado. Este cuestionamiento constituye el motor de los primeros trabajos sobre la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) y de los más específicos sobre la transposición didáctica del álgebra elemental (Chevallard, 1984, 1989a, 1989b, 1989c, 1990). Estos trabajos dieron lugar a la construcción de un ámbito de investigación didáctica en el que se inscriben numerosas investigaciones posteriores, como Gascón (1993, 1994-95, 1999a, 2001); Bolea, Bosch y Gascón (1998, 1999, 2001a, 2001b, 2004); Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2010, 2011, 2013, 2015) y las recogidas en el volumen especial de la revista *Recherche en Didactique des Mathématiques* (Coulange et al., 2012; Assude et al., 2012; Chevallard y Bosch, 2012; Grugeon et al., 2012; Ruiz-Munzón et al., 2012).

Los trabajos que forman parte de esta línea de investigación participan de un tipo de cuestionamiento que se inicia examinando qué es lo que se enseña en una institución docente bajo el apelativo de «álgebra elemental» y, complementariamente, qué actividades y conocimientos relativos al álgebra *no* se enseñan. Obviamente, dicho examen requiere que el investigador utilice un punto de vista, construido desde la didáctica, un modelo epistemológico del álgebra elemental a modo de *sistema de referencia* que proporcione criterios para decidir qué aspectos de la actividad —presentes o ausentes en la práctica escolar— pueden ser considerados como «algebraicos».

[1] No todo problema de investigación didáctica (o problema didáctico) parte necesariamente de un problema docente, pero históricamente la problemática docente ha constituido y sigue constituyendo la problemática didáctica básica.

En la sección 2, utilizando un esbozo de un *modelo epistemológico de referencia* (MER),[2] describiremos algunos aspectos de la *economía* del álgebra elemental en las diferentes instituciones, es decir, analizaremos lo que se entiende por álgebra elemental y por actividad algebraica en la clase de matemáticas, en la escuela y en la sociedad, lo que nos permitirá estudiar algunos fenómenos didácticos asociados al *modelo epistemológico dominante* (MED) en la enseñanza secundaria. Mostraremos el carácter *prealgebraico* de la matemática escolar con relación a determinados indicadores del *grado de algebrización* de una organización o *praxeología matemática* (PM) y caracterizaremos las prácticas matemáticas escolares en términos de una *aritmética generalizada*.

En la sección 3 explicitaremos el MER que proponemos mediante la caracterización de tres etapas sucesivas del *proceso de algebrización* de las PM. Mostraremos que esta interpretación del álgebra elemental, alternativa a la que se deduce del MED, esto es, del modelo implícito vigente actualmente en la enseñanza secundaria, le asigna una *nueva razón de ser* que contiene ampliamente a la razón de ser oficial, al tiempo que modifica profundamente su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares.

En la sección 4 llevaremos a cabo un esbozo del análisis ecológico del álgebra elemental, esto es, empezaremos a analizar *por qué* la *relación institucional a lo algebraico* es la que se describe en la sección 2 y qué condiciones se requerirían para modificarla en una dirección determinada. En particular nos interesan las restricciones que dificultan la génesis y el desarrollo del álgebra elemental como *instrumento de modelización*.

En la sección 5, por fin, analizamos muy brevemente, desde el punto de vista que nos proporciona la TAD, la forma como el *enfoque ontosemiótico* trata el problema didáctico del álgebra elemental.

En resumen, pretendemos completar y precisar en alguna medida los resultados presentados en García (2007) y en un trabajo reciente (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2015) relativos al estudio de algunas de las cuestiones que forman parte de las tres dimensiones fundamentales —*económica*, *epistemológica* y *ecológica*— del problema didáctico del álgebra elemental (Gascón, 2011). En ningún caso tenemos la pretensión de sintetizar *todas* las aportaciones de la TAD a dicho problema.

2. ECONOMÍA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LA INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA: EL CARÁCTER PREALGEBRAICO DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

La *dimensión económica* de un problema didáctico abarca las cuestiones relativas al sistema de reglas y principios (*nomos*) que regula la organización y el funcionamiento institucional de las PM y las *praxeologías didácticas* (PD) involucradas (Gascón, 2011; Gascón y Nicolás, 2017). La actividad que hay que llevar a cabo para responder a estas cuestiones incluye la observación y la descripción detallada de los elementos praxeológicos (así como las relaciones entre ellos) efectivamente existentes en determinadas instituciones, tomando como referencia un MER y un *modelo didáctico de referencia* sustentado en él. Este análisis pretende, además de caracterizar el MED en la institución en cuestión (que, en nuestro caso, es el modelo del álgebra elemental vigente en la institución de la enseñanza secundaria), sacar a la luz los fenómenos didácticos dependientes del mismo.

Entre las cuestiones que forman parte de la dimensión económica del problema del álgebra elemental destacamos las siguientes: ¿cuál es la *unidad de análisis institucional* adecuada para estudiar la organización y el funcionamiento del álgebra elemental en secundaria? Con más precisión: ¿qué *instituciones*

[2] En trabajos anteriores hemos descrito con detalle las funciones que desempeña un MER en la metodología de investigación de la TAD. Entre dichas funciones destacamos aquí la caracterización del modelo epistemológico dominante en la institución de referencia y la función fenomenotécnica, esto es, su capacidad de sacar a la luz determinados fenómenos didácticos: «Todo MER es provisional, es una hipótesis, y debe ser contrastado empíricamente. Si un MER específico no cumple su función fenomenotécnica, deberá ser revisado y hasta modificado profundamente. La piedra de toque para decidir entre dos MER rivales cuál de ellos es más útil heurísticamente (o para decidir cómo modificar un MER a fin de poder estudiar nuevos aspectos de un fenómeno didáctico) son los hechos didácticos interpretados como fenómenos» (Gascón, 2014, p. 112).

hemos de tomar en consideración: el aula, la escuela, el sistema de enseñanza de las matemáticas, o incluso más allá? ¿Cómo se considera, cómo se describe, cómo se interpreta y, en definitiva, qué características presenta el álgebra elemental actualmente *en cada una de las instituciones* que intervienen en el proceso de transposición (especialmente en la enseñanza secundaria)? ¿Qué tipos de actividades consideradas como «algebraicas» en el MER que proponemos están presentes, y cuáles están ausentes, en la matemática escolar? ¿Cómo se puede caracterizar el *grado de algebrización* de las PM que viven en las instituciones escolares?

Dado que el MER no puede construirse sin utilizar, entre otros, los datos provenientes del sistema escolar y que, recíprocamente, para obtener dichos datos se utiliza necesariamente un MER como referencia, es obvio que ambos procesos (construir un MER del álgebra elemental y analizar el papel que desempeña «lo algebraico» en el sistema escolar) deben llevarse a cabo de manera simultánea. Por imperativos de la linealidad del texto empezaremos por exponer en esta sección el análisis de la economía del álgebra elemental (para lo cual utilizaremos elementos del MER que describiremos en la sección 3). Y para construir dicho MER será necesario, a su vez, utilizar datos empíricos provenientes del análisis económico que presentamos en esta sección.

En los trabajos de Chevallard citados anteriormente sobre la transposición didáctica del álgebra se puso de manifiesto que, en primera instancia, el álgebra es un instrumento, el *instrumento algebraico*, que culmina en la *modelización algebraica* y transforma completamente las condiciones del trabajo matemático. Posteriormente (Gascón, 1989, 1993 y 1994-1995) hemos mostrado que la *técnica algebraica se genera a partir del patrón clásico de análisis-síntesis*[3] entendido como una *técnica matemática* muy potente y flexible, capaz de abordar, mediante sus sucesivas modalidades, múltiples tipos de problemas. Su desarrollo pasa por dos etapas: en la primera emerge el *cálculo ecuacional* y en la segunda aparece el *instrumento algebraico*, esto es, la *modelización algebraica* propiamente dicha.

En esta versión incipiente del modelo alternativo, el álgebra escolar no aparece inicialmente como una organización matemática al mismo nivel que las otras organizaciones que se estudian en la escuela, sino como un *instrumento de modelización* de todas las organizaciones matemáticas escolares (Bolea, Bosch y Gascón, 1998). Hemos propuesto un conjunto de cuatro indicadores (IGA1, …, IGA4) para caracterizar el mayor o menor *grado de algebrización* de una PM (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a). Señalemos, sin embargo, que estos no constituyen un criterio de demarcación que permita trazar una frontera precisa y nítida entre una PM *algebrizada* y una *prealgebraica* (en el sentido de «todavía no algebrizada»). Postulamos que la algebrización de una PM es siempre una cuestión de grado y es por esta razón que proponemos *indicadores del grado de algebrización*. Estos indicadores hacen referencia a ciertas características estructurales y funcionales de las PM consideradas como un todo. Los criterios para elegirlos provienen de determinados principios o asunciones básicas de la TAD que podemos resumir muy brevemente como sigue: (a) la actividad matemática puede ser interpretada como una *actividad de modelización* en el sentido explicitado en múltiples trabajos (Chevallard, 1989b, 1989c; García et al., 2006; Barquero et al., 2013); (b) Tanto desde el punto de vista histórico como del propio desarrollo interno de las matemáticas, se observa un proceso de matematización progresiva que, inicialmente, podemos denominar *proceso de algebrización*[4] y que se manifiesta en la integración de las PM en otras relativamente más completas en el sentido de Bosch, Fonseca y Gascón (2004); (c) Esta integración progresiva de las PM se lleva a cabo mediante procesos de modelización intramatemática que aumentan el grado de algebrización de las PM (en el sentido que caracterizaremos en lo que sigue). Los casos de

---

[3] Puig y Cerdán (1990), de acuerdo con esta idea, consideran que el método de análisis-síntesis, paradigma de lo aritmético, puede abocar al álgebra con tal de que se operen en su interior transformaciones de significado similares a las que se producen en la elaboración del lenguaje algebraico.

[4] La noción de «proceso de algebrización» referida a las organizaciones matemáticas escolares, así como los primeros desarrollos de la misma, fueron expuestos por primera vez en el año 1997 en la IXème École d'Été de didactique des mathématiques en Houlgate (Francia) (Bolea, Bosch y Gascón, 1998).

la divisibilidad sobre los naturales (Gascón, 2001) y de la proporcionalidad clásica (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a), entre otros, constituyen ejemplos de este fenómeno. En resumen, los indicadores que describimos a continuación se inspiran en la forma en que la TAD interpreta la modelización matemática como instrumento de articulación (García et al., 2006) y en los *indicadores del grado de completitud* de una organización matemática local (Fonseca, 2004; Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

IGA1. Una PM nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes *tipos de problemas*. Un primer indicador del grado de algebrización de la PM está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta *manipular la estructura global* de estos problemas. Esto significa que una PM está más algebrizada en la medida que contiene *tipos generales de problemas* (en lugar de problemas aislados), lo que puede llegar a requerir el uso sistemático del juego entre *parámetros* e *incógnitas*.

En las PM que viven en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) raramente se plantea la cuestión de estudiar el tipo de problemas al que pertenece un problema dado y, en coherencia con este déficit, no se suele manipular la *estructura global de los tipos de problemas*. En particular, los parámetros están prácticamente ausentes, las letras juegan prioritariamente el papel de incógnitas y, en algunos casos, de variables.

IGA2. La posibilidad de *tematizar las técnicas*, tomándolas como objeto de estudio y creando así una nueva problemática a nivel tecnológico, constituye un segundo indicador del grado de algebrización de las PM. Se materializa en plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación, la producción y el alcance (o dominio de validez) de las técnicas que la integran, esto es, en un *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas.

En el currículo de la ESO no aparecen problemas cuyo objetivo sea interpretar o justificar una técnica matemática determinada. Tampoco se plantea la problemática del alcance o dominio de validez de las técnicas que se utilizan, por lo que las *limitaciones* que presentan todas las técnicas pasan completamente inadvertidas (Fonseca, Bosch y Gascón, 2010). Únicamente para tipos muy estereotipados de problemas se plantea la pregunta de las condiciones de existencia de solución y de la estructura del conjunto de soluciones. Resulta, en definitiva, que el *cuestionamiento tecnológico* (Sierra, Bosch y Gascón, 2013) está prácticamente ausente en la actividad matemática escolar.

IGA3. El grado de *unificación de las PM* constituye un tercer indicador del grado de algebrización. Esta unificación comporta, paralelamente, una reducción drástica de los instrumentos escritos (formalismos) y, en general, de los *ostensivos* (Bosch, 1994) con los que se representan y manipulan los diferentes componentes de las PM.

En dirección contraria a esta unificación, las PM que se estudian en secundaria son generalmente *puntuales*, muy *rígidas* y *aisladas*, lo que dificulta, e incluso impide, que en dicha institución se reconstruyan efectivamente PM locales relativamente completas (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). Se observa, en definitiva, una fuerte y rápida tendencia a *atomizar la actividad matemática* y, en particular, una *desintegración del corpus algebraico* (Chevallard, 1989c).

IGA4. El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una PM, cuando esta se ha construido como modelo algebraico de cierto sistema, viene dado por la posibilidad de *generar tipos de problemas cada vez más alejados del contexto de dicho sistema*. Cuanto más algebrizada está una PM, más posibilidades tiene de *independizarse del sistema* que modeliza.

En la enseñanza secundaria no aparecen prácticamente nunca modelos algebraicos de un sistema (ni matemático ni extramatemático) construidos con el objetivo de responder a cuestiones problemáticas que surgen en dicho sistema. Así, por ejemplo, en la escolaridad obligatoria las *fórmulas* no aparecen como el fruto de un *trabajo algebraico* ni hacen ninguna de las funciones específicas de los *modelos algebraicos* que podrían dar lugar a nuevos tipos de problemas; las fórmulas hacen únicamente el papel de *reglas para automatizar ciertos cálculos*.

En resumen, la organización matemática escolar de la enseñanza obligatoria provoca una actividad muy *atomizada*, lleva a la manipulación puramente *formal* de las expresiones algebraicas, no incluye ningún tipo de *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas que, por otra parte, no parecen precisar justificación, y provoca la separación entre los usos de las *fórmulas* (que no desempeñan el papel de modelos) y del *lenguaje funcional*. Como conclusión general podemos decir que, tomando como referencia los cuatro indicadores descritos, la matemática escolar obligatoria está muy débilmente algebrizada y, en consecuencia, podemos hablar del *carácter prealgebraico* de la matemática escolar que interpretamos como un fenómeno didáctico.

En coherencia con este fenómeno puede caracterizarse la interpretación habitual del álgebra escolar como una *aritmética generalizada* (Bolea, 2003, pp. 70-72) que consiste en la identificación del álgebra elemental con el «simbolismo algebraico» (o lenguaje algebraico), en contraposición a, pero también como desarrollo de, un supuesto «lenguaje aritmético». Algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra, perfectamente compatibles con el carácter prealgebraico de la matemática escolar, son las siguientes:

- El álgebra escolar se construye en un contexto exclusivamente numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción simbólica de expresiones numérico-verbales. Se la considera como un mero epifenómeno de la aritmética.
- La resolución de un problema algebraico se identifica con la obtención de un número tal como sucede en el caso de los problemas típicos de la aritmética escolar.
- Se considera que las expresiones algebraicas surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos, se supone que esta es su razón de ser.
- El álgebra escolar se presenta, en general, muy vinculada a la aritmética y bastante aislada del resto de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo de secundaria.
- Las tareas consideradas como específicamente «algebraicas» se reducen a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números (lo que se suele denominar cálculo algebraico) y a la resolución de ecuaciones.
- En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre los datos conocidos (valores numéricos) por un lado y las incógnitas por otro.
- Una ecuación se interpreta habitualmente como una igualdad numérica que se cumple para algunos valores concretos de las incógnitas.

En Bolea (2003) se demuestra, a partir del análisis de documentos curriculares, libros de texto y de una encuesta entre profesores, que en la enseñanza secundaria se asume acríticamente este modelo epistemológico —que identifica el álgebra elemental con una especie de aritmética generalizada— como único e incuestionable, constituyéndose así en el MED en esta institución. Esta interpretación del álgebra constituye asimismo el MER, a menudo implícito, de gran parte de las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática.

3. LIMITACIONES DEL MODELO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA Y CONSTRUCCIÓN DE UN NUEVO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA

El didacta utiliza inevitablemente, como referencia, un modelo (más o menos explícito) de las praxeologías matemáticas que están en juego en el problema didáctico que aborda, esto es, un MER del ámbito de la actividad matemática en cuestión. Forman parte de la *dimensión epistemológica* del problema las cuestiones dirigidas a indagar los principios y los criterios que guiarán la construcción del citado modelo de referencia para que este cumpla sus principales objetivos, entre los que destacan: sacar a la luz y dar cuenta de fenómenos didácticos que permanecían invisibles o inexplicados y sustentar organizaciones didácticas que permitan superar determinadas limitaciones de los correspondientes procesos de estudio escolares basados en el MED en la institución escolar.

En nuestro caso nos planteamos las siguientes cuestiones: ¿cómo puede describirse el álgebra elemental mediante un MER compatible con el modelo epistemológico general de la actividad matemática que propone la TAD? ¿Cuál es la amplitud del *ámbito matemático* más adecuada para plantear el problema didáctico del álgebra elemental, esto es, qué amplitud debe abarcar un MER del álgebra elemental? ¿Debe restringirse al *marco aritmético* habitual o, por el contrario, debemos plantear el problema a un nivel más amplio que abarque la *modelización matemática* en la enseñanza secundaria? ¿Qué relaciones debe propugnar dicho MER entre «lo algebraico» y «lo numérico» y, en general, entre «lo algebraico» y el resto de áreas de la matemática escolar?

3.1. Limitaciones de la aritmética generalizada como modelo del álgebra elemental

Para justificar la necesidad de construir un modelo alternativo debemos empezar constatando algunas de las limitaciones que presenta la interpretación del álgebra elemental como aritmética generalizada. Dado que toda «limitación» lo es con referencia a ciertos principios que se asumen como referencia, para sacar a la luz dichas limitaciones tomaremos el punto de vista que propugna la TAD sobre el proceso de algebrización y cuyos primeros rasgos vienen dados por los indicadores del grado de algebrización.

3.1.1. Desarticulación entre la aritmética generalizada y la modelización funcional

Partiendo de la organización matemática clásica en torno a la *proporcionalidad de magnitudes* (Bosch, 1994) se construyen tres praxeologías situadas respectivamente en niveles progresivos de algebrización (en el sentido definido por los indicadores) y tales que cada una de ellas contiene y, en cierta forma, modeliza a la anterior. La construcción de este proceso hipotético de algebrización de la proporcionalidad clásica, ha permitido hacer visibles (construir y empezar a estudiar) dos importantes fenómenos didácticos emergentes en los actuales sistemas de enseñanza que hemos designado respectivamente como *aritmetización de la proporcionalidad* (o *evitación del álgebra*) y *aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a). Para estudiar dichos fenómenos hemos formulado problemas didácticos tales como:

> ¿Por qué los problemas de proporcionalidad tienden a considerarse en la organización matemática escolar como problemas que forman parte de la aritmética y están alejados del ámbito algebraico?
>
> ¿Qué restricciones impiden en la matemática escolar unificar todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) mediante el modelo de la función lineal y alcanzar así el segundo nivel de algebrización de la proporcionalidad descrito en el proceso hipotético de algebrización?
>
> ¿Qué condiciones se requieren para que la actividad matemática alcance un nivel de algebrización (en términos de los indicadores del grado de algebrización) que haga necesaria la emergencia de la modelización funcional general descrita mediante este proceso de algebrización? (Ibíd., pp. 282-289).

Para responder a estas preguntas hay que apelar a la ausencia escolar de un *álgebra de magnitudes*[5] (en lo referente a la articulación y algebrización de la PM en torno a la proporcionalidad) y, en general, a la incidencia del MED del álgebra elemental sobre la práctica matemática escolar, lo que pone de manifiesto la necesidad de construir un nuevo MER capaz de articular el álgebra elemental con la modelización funcional general. En base a dicho MER, en García et al. (2006) se describe y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* (REI) que articula la relación de proporcionalidad previamente algebrizada con el resto de relaciones funcionales elementales y en Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Mun-

[5] En Whitney (1968) se propone una teoría matemática para elaborar toda un «álgebra de las magnitudes». Si nos situamos en un nivel teórico más cercano al de la enseñanza secundaria, bastaría con la propuesta de Freudenthal (1973).

zón et al. (2011) se amplía el MER del álgebra elemental para incluir la modelización algebraico-funcional y sustentar un REI que permite a la comunidad de estudio superar la separación escolar entre las fórmulas «algebraicas» y el lenguaje funcional.

3.1.2. Un obstáculo didáctico relacionado con la consideración de los negativos como objetos aritméticos

La introducción escolar de los números negativos se hace habitualmente en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. En consecuencia, la razón de ser que se asigna oficialmente en secundaria a los números con signo es la de expresar la medida de dichas magnitudes y resolver problemas en los que estas aparecen. Pero, en realidad, estos problemas se resuelven de forma más económica utilizando números naturales.

Este enfoque didáctico clásico (y todavía predominante) al fomentar la concepción de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida, refuerza un obstáculo epistemológico que la comunidad matemática tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números negativos y justificar su estructura (Brousseau, 1983). De hecho, los denominados «modelos concretos» o «realistas», que se utilizan habitualmente para introducir los números negativos, contribuyen a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre estos (y sobre sus operaciones) porque enfatizan la estructura lineal, en lugar de la estructura de anillo totalmente ordenado, por lo que no es posible, por ejemplo, dar sentido a la regla del producto (Cid y Ruiz-Munzón, 2011). En definitiva, podemos afirmar que esta concepción de los negativos constituye un *obstáculo didáctico*.

Para superar este obstáculo se ha postulado la necesidad de introducir los negativos en un contexto algebraico[6], interpretando el álgebra como un instrumento de modelización (Cid y Ruiz-Munzón, 2011, Cid et al., 2017). Este nuevo punto de vista postula que una posible razón de ser de los números negativos se encuentra en las *necesidades operatorias* que emergen con la implantación del lenguaje algebraico. Este transforma los símbolos *binarios* de las operaciones aritméticas en símbolos unarios[7]. En consecuencia, los símbolos "+" y "–" que en aritmética designaban operaciones a realizar, en el lenguaje algebraico designan *sumandos* y *sustraendos* no operaciones binarias. De hecho, en el lenguaje algebraico los símbolos binarios se sobreentienden, por lo que no se escriben. Aparecen así las *operaciones entre operaciones* cuyo resultado no es, en general, un número como en aritmética sino una nueva operación.

El cálculo con sumandos y sustraendos transforma en sumas lo que en aritmética eran sumas y restas (igual que el uso de expresiones racionales transforma en productos lo que antes eran productos y cocientes). Esto simplifica el cálculo algebraico porque la suma y el producto tienen buenas propiedades (son conmutativas y asociativas).

Las necesidades operatorias del cálculo algebraico acaban dando sentido a los sumandos y sustraendos aislados, introduciendo el significado *predicativo* de los signos "+" y "–" y asumiendo que las letras que forman parte del lenguaje algebraico puedan tomar valores positivos o negativos, independientemente del signo que las preceda. En resumen, desde este punto de vista, se considera que las necesidades operatorias del cálculo algebraico (y, en última instancia, la modelización algebraica en la que

[6] Históricamente los números negativos no fueron aceptados por la comunidad matemática hasta que el grado de algebrización de las matemáticas lo hizo inevitable. Los sucesos que marcaron este hecho histórico fueron: la teoría general de ecuaciones con el teorema fundamental del álgebra (algebrización de la teoría de ecuaciones); y la emergencia de la geometría analítica con la necesaria unificación de las ecuaciones de las curvas independientemente del cuadrante en el que se situaran (algebrización de la geometría).

[7] Esta transformación tiene lugar cuando se enfatiza la diferencia como resultado de comparar (que designa una relación) frente a la resta como resultado de quitar (que designa una acción), lo que introduce las diferencias con signo y su interpretación desglosada en un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Se reinterpreta el signo "–" como signo operativo unario, es decir, como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos (Cid et al., 2017).

dicho cálculo culmina) son *constitutivas* de los números negativos[8]. En Cid y Ruiz-Munzón (2011) se describe la experimentación, con alumnos que inician la ESO, de un REI (denominado provisionalmente *actividad de estudio e investigación*, AEI) en el que se lleva a cabo la introducción de los números negativos en un entorno algebraico.

3.1.3. Un fenómeno histórico que se mantuvo inexplicado mientras el álgebra se interpretaba como una aritmética generalizada

Durante siglos el MED en la comunidad de historiadores de la matemática, que sigue siendo utilizado en la mayoría de libros de texto y manuales de historia de las matemáticas como su MER (lo denominaremos MER_1), situaba los orígenes del álgebra en la escuela de Alejandría y, en particular, en la obra de Diophanto. Pero las investigaciones históricas de Jacob Klein (1934/1968), utilizando un MER_2 alternativo, esto es, una nueva definición de «álgebra», mostraron claramente que la interpretación histórica que hace coincidir la génesis del álgebra con la introducción de «valores indeterminados» representados por letras, no era satisfactoria porque no permitía dar cuenta de determinados fenómenos históricos. Entre estos cabe destacar las dificultades encontradas por los griegos para resolver numerosos problemas geométricos. Estas dificultades se pueden explicar por el hecho de no disponer de instrumentos para formular los problemas geométricos en términos de operaciones y, en definitiva, por no disponer de un cálculo simbólico potente.

De hecho, para dar cuenta de estos fenómenos conviene postular, como observa Klein, que Viète creó una nueva disciplina que no estaba al alcance de los antiguos. En la génesis de esta «nueva álgebra» convergen dos enfoques independientes: el análisis geométrico de Pappus y los métodos aritméticos de Diophanto. Por lo tanto, la nueva álgebra de Viète puede ser considerada tanto aritmética como geométrica (Gascón, 1994-95).

Entre los principales rasgos del modelo epistemológico alternativo (MER_2) de la génesis del álgebra que Jacob Klein construye y utiliza para dar razón de los citados fenómenos históricos, hasta entonces inexplicados, destacamos que, más allá de la designación simbólica de ciertos objetos, el álgebra redefinida por el MER_2 se caracteriza por hacer un uso sistemático del *cálculo simbólico*, de los *parámetros* y de las *fórmulas* (que se tornan posibles por primera vez), por *tematizar el método* como tal y por interpretar que la génesis del álgebra está ligada, a la vez, a la *aritmética* y a la *geometría*. El MER que proponíamos provisionalmente en Gascón (1994-95), que reinterpreta el álgebra elemental como instrumento de modelización de sistemas de todo tipo, es completamente compatible con el MER_2 que utiliza Jacob Klein. Su formulación actual, mucho más detallada, será descrita a continuación.

3.2. Construcción de un modelo epistemológico alternativo del álgebra elemental

La formulación de este MER alternativo en términos de una sucesión creciente de PM está descrita con detalle en Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón et al. (2011). Este modelo permite hacer visibles y empezar a dar cuenta de los fenómenos reseñados en la sección 3.1, así como dar razones por las que el modelo que identifica el álgebra elemental con una especie de aritmética generalizada sigue estando vigente en las instituciones didácticas[9]. En esta sección presentamos una descripción sintética del mismo.

---

[8] Una característica fundamental de la modelización intramatemática es su carácter «constitutivo» del propio conocimiento matemático. En particular, el cálculo algebraico (que culmina en la modelización algebraica) es un elemento esencial de la construcción de lo numérico, tanto en la génesis histórica como en la teoría matemática, más que un simple epifenómeno de lo numérico.

[9] Es importante volver a insistir en que no sería posible comprender las limitaciones de un MER_1 (el MED en Secundaria, asumido de manera implícita en múltiples investigaciones, puede hacer aquí el papel de MER_1) si no se dispone de un MER_2 alternativo que permita formular y predecir fenómenos nuevos además de reformular los antiguos desde una perspectiva más comprensiva (Gascón, 2014).

El MER que proponemos describe el *proceso de algebrización* articulado en tres etapas, cada una de las cuales se materializa en una PM que contiene y amplía a la anterior y está generada por un tipo de problemas cuya estructura general está caracterizada de antemano[10]. Cada una de estas PM contiene las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se requieren, en principio, para estudiar y resolver los problemas que presentan la estructura característica de la etapa. Pero esto no significa que un problema concreto, cuya estructura corresponda a cualquiera de las etapas, no pueda resolverse con las técnicas de una etapa anterior. En particular, diremos que un problema se ha resuelto con *técnicas aritméticas* si la incógnita (suponiendo que sea una cantidad de cierta magnitud) se ha obtenido mediante una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas ejecutada a partir de los datos (que también son cantidades conocidas de ciertas magnitudes). A dicha cadena la llamaremos *programa de cálculo* (PC), siguiendo la propuesta de Chevallard (2005).

La construcción del MER del álgebra elemental se inicia entonces eligiendo como *sistema inicial a modelizar* la PM en torno a los problemas que pueden resolverse con técnicas aritméticas y que pueden enunciarse en cualquier contexto (numérico, geométrico, comercial, físico, etc.). Veamos un ejemplo en un contexto geométrico:

> *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. Si la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 9 cm., ¿cuánto vale el área del triángulo?*
>
> Para resolver el problema, siguiendo la indicación de Descartes en las *Reglas para la dirección del espíritu*, aplicamos el *patrón clásico de análisis-síntesis* «para realizar con los números lo que los antiguos hacían con las figuras». El *análisis* del problema parte, como siempre, de la incógnita que, en este caso, es el área del triángulo (A). Para calcular A sólo necesitamos la longitud del lado desigual que tomaremos como base (b), puesto que la altura correspondiente es un dato, 9 cm. Para calcular b basta calcular su mitad ($b/2$). Por fin, ($b/2$) puede calcularse por el teorema de Pitágoras a partir de los datos.
>
> Este *análisis* se resume en la siguiente estructura del problema:
>
> $$PC(6,9) := \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{6^2 - (9-6)^2}}{2}$$
>
> Guiada por el análisis, la *síntesis* se materializa en una cadena de operaciones aritméticas (esto es, en la *ejecución de un* PC) que parte de los datos (6 y 9) y finaliza con el cálculo de la incógnita que, en este caso, es el área del triángulo (clásicamente esta cadena de operaciones se expresaba *verbalmente*).
>
> $$9-6=3 \rightarrow 3^2=9 \rightarrow 6^2-9=27 \rightarrow \sqrt{27} \rightarrow 2\cdot\sqrt{27} \rightarrow 9\cdot 2\cdot\sqrt{27} \rightarrow 9\cdot\sqrt{27} = \text{Área}$$

El *proceso de algebrización* propiamente dicho se inicia cuando la estructura de algunos de los problemas que se formulan para avanzar en el estudio de ciertos sistemas es tal que el patrón clásico de análisis-síntesis fracasa como técnica de resolución debido a las dificultades (y hasta la imposibilidad) de descomponer el análisis del problema y su proceso de resolución (la síntesis) en una cadena de pasos sucesivos. En ese momento, el análisis pasa a ligar el objeto *incógnita* no tanto con los *datos* sino con la *condición del problema*, esto es, con una igualdad entre dos cantidades de la misma magnitud simbolizadas mediante dos expresiones algebraicas diferentes. Como consecuencia de ello, la síntesis (entendida como el proceso consistente en obtener el objeto incógnita a partir de los datos) desaparece, aunque puede ser útil para construir la condición (o condiciones) del problema. La estructura del problema se expresa entonces simbólicamente, necesariamente *por escrito*, como un todo no descomponible (Gascón, 1989, pp. 36-41 y 1993, pp. 315-320).

La *primera etapa* del proceso de algebrización surge cuando se trabaja con modelos que requieren plantear un tipo de problemas cuya estructura general toma la siguiente forma:

$$PC(x, a_1, \ldots, a_k) = y$$

[10] La delimitación de las etapas del modelo propuesto, esto es, la definición de la estructura algebraica general del tipo de problemas que caracteriza a cada una de las etapas, es relativamente arbitraria ya que, como cualquier modelo, responde a una intención de sacar a la luz y abordar ciertos fenómenos.

Donde x e y son *variables* y los a_i son *argumentos numéricos*. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente[11]:

> Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia y la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 3/2 del radio de la circunferencia. ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita?
>
> En este problema el dato es una relación (la altura relativa al lado desigual es los 3/2 del radio de la circunferencia) y la incógnita es otra relación (entre el área del triángulo y el radio de la circunferencia). El *análisis* proporciona una estructura del problema que es formalmente análoga a la del problema anterior:
>
> $$\text{Área} = PC\left(R,3,2\right) := \frac{\frac{3R}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{3R}{2}-R\right)^2}}{2}$$
>
> La *síntesis* se reduce en este caso a un proceso de *simplificación de expresiones algebraicas* que acaba con la relación $A=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

En el caso particular en que el valor numérico que toma x sea un *dato* y la *incógnita* del problema sea el correspondiente valor numérico que toma y, entonces tendremos un problema cuya solución consistirá simplemente en ejecutar el $PC(x, a_1, \dots , a_k)$ para el valor dado de x. Si, por el contrario, la *incógnita* es el valor numérico que debería tomar x para que y tome un valor numérico *dado*, entonces el problema se convierte en la resolución de una *ecuación con una incógnita*. Si la ecuación es resoluble mediante una cadena de operaciones aritméticas sin manipular la incógnita, entonces se dice que estamos ante una *ecuación aritmética*. En caso contrario, tenemos un problema cuya estructura corresponde propiamente a la primera etapa del proceso de algebrización y cuya resolución puede requerir técnicas ecuacionales complejas.

En el trabajo en esta etapa aparecen nuevas técnicas (además de las propias de la aritmética escolar) para la *creación* y la *simplificación* de escrituras, como las que rigen la *jerarquía de las operaciones* y las *normas de uso de los paréntesis*. Se requiere asimismo un nuevo entorno tecnológico-teórico que incluye las nociones de *expresión algebraica*, *PC equivalentes* y *ecuación* (con una incógnita) como nuevos objetos matemáticos. También se requieren nuevas técnicas que permitan la manipulación de expresiones algebraicas y el *cálculo ecuacional.*

El paso a la *segunda etapa* se produce cuando el proceso de modelización comporta utilizar, además de los modelos de la primera etapa, un nuevo tipo de modelos cuyo estudio requiere tratar con problemas cuya estructura viene dada mediante la igualdad entre dos PC con los *dos mismos argumentos no numéricos* (x_1, x_2):

$$PC_1(x_1, x_2, a_1, \dots , a_k) = PC_2(x_1, x_2, b_1, \dots , b_s)$$

Entre los problemas de este tipo, muchos se caracterizan porque tanto los «datos» como la «incógnita» vienen dados en forma de *relaciones entre variables* del PC. Un ejemplo sencillo de sistema cuyo estudio requiere trabajar con problemas que se sitúan en esta segunda etapa y en el que el modelo algebraico viene dado por la igualdad entre dos PC es el siguiente[12]:

> Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Cada tipo de fichas tiene un valor determinado de puntos. Supongamos que al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 fichas rojas, mientras que Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 fichas rojas.

[11] El problema que formulamos para empezar a estudiar el sistema de los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia constituye una pequeña variación del problema anterior y empieza a poner de manifiesto las limitaciones de las técnicas puramente aritméticas (las cuales serían aún más evidentes si nos preguntamos, por ejemplo, «¿Cuánto aumentaría el área si el radio aumentara un 10%?»). Al evidenciar la necesidad de las técnicas algebraicas de simplificación (entre otras) podemos afirmar que esta variación de los problemas resolubles mediante técnicas aritméticas constituye una técnica didáctica útil para llevar a cabo la tarea didáctica de iniciar el uso del instrumento algebraico en la matemática escolar.

[12] En este caso proponemos un ejemplo en el que ambos PC tienen estructura lineal en las variables x_1 y x_2 por ser especialmente adecuado para la introducción temprana (en el primer ciclo de la ESO) del álgebra elemental (Cid y Ruiz Munzón, 2011).

Si llamamos respectivamente B y R al valor en puntos de las fichas blancas y de las fichas rojas, entonces el número de puntos que tiene cada uno de ellos al acabar la partida vine dado por las siguientes *expresiones algebraicas*:

$$20B + 90R \text{ y } 40B + 60R$$

Para estudiar este sistema pueden plantearse diferentes problemas como, por ejemplo: ¿Qué relación debe darse entre los valores respectivos, en puntos, de las fichas blancas y rojas si al final Eva tiene 10 puntos más que Bernardo? Para responder a esta cuestión se requiere transformar globalmente la igualdad de dos PC:

$$20B + 90R = 40B + 60R + 10$$

Primero se *simplifica* la ecuación para obtener una equivalente: $2B + 9R = 4B + 6R + 1$ y luego se utilizan las técnicas de *cancelación* para obtener: $3R = 2B + 1$ y, en definitiva, la relación que debe darse entre los valores en puntos de las fichas blancas y las fichas rojas: $B = (3R - 1)/2$

En esta etapa aparece una mayor complejidad en las técnicas algebraicas que ya estaban presentes en la primera etapa y, además, se requieren nuevas técnicas de manipulación de expresiones algebraicas y, en particular, el uso de la «reducción», que consiste en transformar globalmente la ecuación mediante las técnicas de *cancelación* para obtener una nueva ecuación (o igualdad de dos PC) equivalente a la anterior. Conceptualmente aparecen las nociones de *ecuación con dos variables* (o incógnitas) y *familia de ecuaciones* (con una incógnita) dependiente de un parámetro.

En el caso particular de que la incógnita sea el valor numérico que toma uno de los argumentos no numéricos (dados el valor concreto que toma el otro argumento no numérico y la relación entre los dos PC), entonces el problema se reduce a la *resolución de una ecuación con una incógnita*. Es precisamente en este ámbito muy particular de la segunda etapa (y que también puede aparecer en la primera etapa) donde se sitúa principalmente el álgebra de la escuela secundaria española, más concretamente, en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y de situaciones que pueden ser modelizadas por estas.

La *tercera etapa* de algebrización se alcanza cuando en el proceso de modelización aparecen sistemas cuyo estudio requiere utilizar, además de los modelos de las dos primeras etapas, otros modelos algebraicos en los que *no se limita el número de argumentos* o *variables* y en los que se necesita eliminar la distinción entre *parámetros* e *incógnitas*, haciendo abstracción de si son «conocidos» o «desconocidos».

La estructura de los problemas que intervienen en esta tercera etapa se materializa en una *fórmula* que puede interpretarse como el *modelo algebraico de un sistema*. El trabajo con dicho modelo persigue, al igual que en las etapas anteriores, aumentar los conocimientos sobre el sistema modelizado mediante el estudio de cuestiones problemáticas que no pueden abordarse en el ámbito del sistema.

Un ejemplo de sistema cuyo estudio mediante un proceso de modelización algebraica puede dar lugar a problemas cuya estructura los sitúa en esta tercera etapa, es el siguiente (Gascón, 1993, pp. 318-320).

Sistema geométrico formado por la familia de los triángulos rectángulos de área A, hipotenusa a y semiperímetro s.

Siguiendo el espíritu de las *Reglas* de Descartes, para empezar a estudiar el sistema debemos buscar la dependencia de cada uno de los elementos del problema respecto de los restantes, «haciendo abstracción de si son conocidos o desconocidos».

En el intento de expresar una de las variables del sistema en función de las restantes, el *análisis reductivo fracasa,* pero al explicitar la síntesis se pone de manifiesto una cantidad, $(b + c)^2$, que puede expresarse de dos maneras diferentes

$$(b+c)^2 = (2s-a)^2 = 4s^2 + a^2 - 4as$$

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc = a^2 + 4A$$

Igualando ambas expresiones se obtiene la fórmula de Herón para el triángulo rectángulo:

$$A = s \cdot (s - a)$$

A continuación debemos deducir la hipotenusa a y el semiperímetro s como si fueran «desconocidos»:

$$a = s - \frac{A}{s}; \qquad s = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + A}$$

Este último modelo puede interpretarse en el sentido que el área A de un triángulo rectángulo es una «medida» de la cantidad de magnitud en que el semiperímetro excede a la hipotenusa (si $A \to 0$, entonces $s \to a$).

Se pone así claramente de manifiesto cual es la razón de ser que la TAD asigna al álgebra elemental: la *modelización algebraica de sistemas* de todo tipo, tal como esta se conceptualiza en Chevallard (1990) y en Gascón (1993, pp. 321-323).

En resumen, podemos afirmar que, utilizando este MER como sistema de referencia, el álgebra escolar tal como se presenta en la ESO española se ubica completamente en la parte más elemental de la segunda etapa del proceso de algebrización, sin llegar a alcanzar plenamente la tercera etapa del mismo. En efecto, en la enseñanza secundaria obligatoria, la *razón de ser asignada oficialmente* al estudio del álgebra escolar consiste en traducir el enunciado de un problema concreto al lenguaje algebraico y resolverlo mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones (normalmente lineales o cuadráticas) reducible a una ecuación con una incógnita[13].

En Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón et al. (2011) se muestra que este MER del álgebra elemental se articula dentro de un MER más amplio que engloba la modelización funcional, y en Cid y Ruiz-Munzón (2011) y Cid et al. (2017) se propone una nueva versión del MER del álgebra elemental para dar cabida a la introducción temprana (al inicio de la ESO) de los números negativos como objetos algebraicos.

En síntesis, este MER redefine el álgebra elemental como un instrumento de la actividad matemática que transforma la estructura de los diferentes dominios de la matemática escolar, reorganiza la articulación entre ellos y cambia el *tipo de estudio* que es posible llevar a cabo con los mismos. En consecuencia, debe considerarse como una *técnica de ayuda al estudio*, esto es, como una importante *técnica didáctica*.

4. ESBOZO DE UN ANÁLISIS ECOLÓGICO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

En esta sección empezaremos a analizar *por qué* la *relación institucional a lo algebraico* en la enseñanza secundaria es la que hemos descrito en la sección 2, esto es, qué condiciones mantienen dicha relación, qué cambios se requerirían para modificarla en la dirección marcada por el MER propuesto y, en definitiva, qué restricciones limitan el desarrollo del álgebra elemental como instrumento de modelización.

Dicho en otros términos, después de responder a algunas de las cuestiones que forman parte de la *dimensión económica* (sección 2), y de dar una respuesta provisional a la *dimensión epistemológica* del problema del álgebra elemental mediante la construcción de un MER (sección 3), vamos a formular y empezar a abordar la *dimensión ecológica* de dicho problema (Gascón, 2011).

[13] Las limitaciones que sufre la actividad de modelización algebraica de sistemas que vive en la enseñanza secundaria (cuando la analizamos desde el punto de vista que nos proporciona el MER construido) son obvias y no pueden justificarse por la presunta complejidad de la estructura de los tipos de problemas que intervienen en las últimas etapas del proceso de algebrización. Basta observar, por ejemplo, el problema que hemos propuesto en la segunda etapa (con estructura lineal) y, más en general, los múltiples tipos de problemas elementales en los que tanto los datos como la incógnita vienen dados en forma de relaciones elementales entre variables. Estos tipos de problemas, entre otros muchos, están ausentes en la matemática escolar de la ESO.

Para analizar las condiciones *ecológicas* que se requieren para que determinados objetos y actividades puedan existir en la escuela, Chevallard (2002) introdujo la noción de escala de *niveles de codeterminación didáctica*, que amplía y al mismo tiempo estructura el ámbito empírico que tomaremos en consideración. La organización de las PM y de los dispositivos y los gestos que se necesitan para su enseñanza (las *praxeologías didácticas*, PD) requieren que estos cumplan una serie de condiciones que pueden ser *específicas de la disciplina* en cuestión (en nuestro caso las matemáticas) o bien *genéricas*, es decir, provenientes de la manera de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje en la *escuela*, los roles que se asigna a la escuela en la *sociedad*, etc.

Humanidad

↓↑

Civilización

↓↑

Sociedad

↓↑

Escuela

↓↑

Pedagogía

↓↑

Disciplina ↔ Área ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

Figura 1: Niveles de codeterminación didáctica

Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica según muestra el esquema de la Figura 1. Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles.

Los trabajos sobre la enseñanza del álgebra elemental realizados en la TAD han permitido identificar algunas restricciones provenientes de todos los niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica, incluyendo los niveles superiores de la *Civilización* y la *Sociedad* (4.1), los intermedios de la *Escuela* y la *Pedagogía* (4.2) y los específicos que abarcan desde la *Disciplina* hasta las *Cuestiones* (4.3).

4.1. Restricciones provenientes de los niveles de la Civilización y la Sociedad

¿Cuáles son las restricciones de origen cultural y social que tienden a mantener el carácter prealgebraico del currículo escolar? El estudio de este problema puso de manifiesto que para entender lo que pasa en los sistemas didácticos es preciso tomar en cuenta el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto así como la noosfera y, a partir de ella, la sociedad y la cultura. El desarrollo de este estudio constituyó el primer ejemplo de *análisis* (*macro*)-*ecológico* de las condiciones de posibilidad de un tipo dado de fenómenos didácticos en un entorno institucional determinado (Chevallard, 1989c).

La *teoría de la transposición didáctica* (Chevallard, 1985) parte de la constatación de que la sociedad tiende a exigir del sistema de enseñanza que el saber que es propuesto para ser enseñado al ciudadano sea compatible tanto con el *saber sabio* que lo legitima como con la *epistemología cultural corriente*. De acuerdo con (Chevallard, 1989c), la cultura occidental se sustenta sobre la postura metafísica del *logocentrismo*, según el término acuñado por el filósofo francés Jacques Derrida (1967), que asume, más o menos explícitamente, que el pensamiento reside en la cabeza, se expresa en voz alta por medio de la palabra y se conserva posteriormente mediante la escritura. Por lo tanto, la escritura es vista como una «degradación» del pensamiento o, a lo sumo, como un producto secundario del mismo: primero se piensa y, después, el pensamiento se plasma en el papel (o la pantalla). Desde este punto de vista, no se valora suficientemente el papel que pueden desempeñar los formalismos científicos (que, en realidad, son productos primariamente escritos y que se «oralizan» posteriormente) como instrumentos de pensamiento científico. No se entiende la necesidad de recurrir a grafismos que no son abreviaciones de conceptos verbales, sino signos escritos productores de significados por sí mismos. El álgebra constituye el primer producto de esta escritura matemática primaria. El cálculo algebraico y, en general, el trabajo con expresiones algebraicas, no es una obra *fácilmente culturizable* (en el sentido de asumible por la cultura corriente) ya que constituye un formalismo que *ha nacido como lenguaje escrito* y no tiene siempre un referente claro en el discurso verbal.

No desarrollaremos más aquí esta fuente de incomprensión cultural hacia la importancia de la «instrumentalidad» del formalismo científico como herramienta de pensamiento, que encontramos bajo distintas expresiones, en diversos ámbitos sociales. Las obras de divulgación con títulos como *Física sin matemáticas* o incluso *La estadística sin fórmulas* ya hablan por sí solas. Lo que queremos subrayar aquí es la importante incidencia de esta postura metafísica sobre los niveles inferiores de codeterminación didáctica, puesto que el alumno no podrá ver reconocidos sus cálculos como «razonamientos» y el profesor deberá buscar nuevos «significados» a esta herramienta que aparece siempre como una pura sintaxis sin una semántica propia. Esta *peyoración cultural del álgebra* queda claramente reflejada en esta cita del eminente geómetra británico contemporáneo Michael Atiyah (2002, pp. 42-43) (la cursiva es nuestra):

> El Álgebra es la oferta que el diablo hace a los matemáticos. El diablo dice: Te daré esta poderosa máquina que responderá a cualquier pregunta que desees. Todo lo que necesitas hacer es darme tu alma, olvídate de la Geometría y te daré esta maravillosa máquina. Por supuesto nos gustaría tener ambas cosas […]. No obstante, el daño a nuestra alma está ahí, *porque cuando entras en cálculos algebraicos* esencialmente dejas de pensar geométricamente, *dejas de pensar en el significado*.

Es interesante apuntar que muchas de las investigaciones didácticas sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra elemental no escapan a este logocentrismo occidental. De ahí que, durante muchos años, una problemática frecuente de estas investigaciones se haya centrado en estudiar los «significados» que los alumnos atribuyen al simbolismo algebraico (Radford, 2000). Tal como hemos descrito en la sección 1, encontramos un gran número de trabajos dedicados al estudio de las dificultades de los alumnos para «entender» —es decir, verbalizar— nociones como las de *ecuación, igualdad, identidad, parámetro*, etc. o, más ampliamente, investigaciones que tratan del estudio de las *concepciones espontáneas* de los alumnos respecto a conceptos fundamentales del álgebra (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Kieran, 1981) o a las letras utilizadas para designar las incógnitas, variables o parámetros (Trigueros et al., 1996; Blanco y Garrote, 2007; Malisani y Spagnolo, 2009).

Esta concentración de las investigaciones relativas al álgebra elemental en la *función semiótica* del lenguaje algebraico, ignorando completamente la *función instrumental* del mismo (Bosch, 1994), constituye un síntoma de la vigencia del logocentrismo e impide que, también en el ámbito de la investigación didáctica, se interprete el álgebra elemental como un instrumento de modelización tal como propone el MER que hemos construido.

4.2. Restricciones provenientes de los niveles de la Escuela y la Pedagogía

En consonancia con la *interpretación psicopedagógica dominante* (Gascón et al., 2004), las organizaciones didácticas escolares tienden a eliminar algunos de los aspectos más característicos de la *disciplina matemática* (por ejemplo, el trabajo técnico *sistemático*, productor de saber) con la «buena intención» de evitar la *desconcertación de los alumnos* y su salida del sistema. Así, se fracciona el proceso de enseñanza de las matemáticas hasta hacerlo desaparecer como tal proceso, convirtiendo la matemática escolar en un conjunto *atomizado* de actividades aisladas aderezadas con elementos presuntamente motivadores (juegos, cercanía a los intereses vitales del alumno, herramientas tecnológicas, etc.). De esta forma se eliminan los objetivos a largo plazo y, en consecuencia, se dificulta y casi se impide el desarrollo del álgebra como instrumento de modelización.

Intentando proteger a los alumnos de toda *desconcertación* y de la «dureza» de la *disciplina matemática* se les empuja, paradójicamente, hacia un estado de *desconcertación permanente* puesto que la atomización excesiva de la actividad matemática escolar, exigida por la necesidad de llevar a cabo una actividad aparentemente *creativa* (en contraposición a todo tipo de actividad rutinaria y sistemática), provoca la necesidad de un cambio constante de actividad, lo que imposibilita el dominio robusto de las técnicas[14]. En estas condiciones, es prácticamente imposible que el álgebra, como herramienta de modelización, pueda «vivir» y «desarrollarse» en la actual educación secundaria.

4.3. Restricciones provenientes de los niveles específicamente matemáticos

En Bolea, Bosch y Gascón (2001a, pp. 291-298) se describen con cierto detalle los efectos de las restricciones originadas por la transposición didáctica de las PM sobre la vida del álgebra elemental en el sistema de enseñanza de las matemáticas. Se trata principalmente de restricciones que provienen o bien de la *necesidad de adecuar* las actividades matemáticas escolares y las prácticas docentes a la *representación institucional* del álgebra elemental, esto es, al modelo epistemológico escolar del álgebra como *aritmética generalizada*, o bien de la *necesidad de evaluar* la actividad matemática de los alumnos y los conocimientos correspondientes.

En lo que se refiere al primer tipo de restricciones, es evidente que la vinculación exclusiva y unidireccional del álgebra escolar con lo numérico, hasta el punto de considerarla como un mero epifenómeno de la aritmética, comporta su aislamiento del resto de las áreas de la matemática escolar y dificulta enormemente el desarrollo del álgebra elemental como instrumento de modelización de cualquier tipo de sistema (matemático o extramatemático). Como ya hemos dicho, esta interpretación escolar del álgebra favorece la consideración de la proporcionalidad como una *relación aritmética entre números* (en lugar de una *relación funcional entre variables*) lo que tiende a aislar la proporcionalidad (y, en última instancia, al álgebra escolar) del resto de relaciones funcionales, dificultando, además, su articulación con la geometría escolar.

Por su parte, las restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la actividad matemática de los alumnos tienden a mantener el carácter prealgebraico de la matemática escolar, dificultando el cambio en la dirección marcada por el MER alternativo propuesto. En efecto, el trabajo que es posible llevar a cabo en PM muy *atomizadas*, en las que predomina la manipulación *formal* de las expresiones algebraicas y en las que no se cuestionan las técnicas ni se requiere ningún tipo de justificación de las mismas, es más fácilmente evaluable que el que se podría llevar a cabo en PM fuertemente algebrizadas. Dicho en otros términos: las *técnicas específicas de la actividad de modelización* (como, por ejemplo, la delimitación del sistema, la elección de las variables relevantes o la interpretación en términos del sistema del trabajo realizado en el modelo), en comparación con las técnicas propias de la aritmética generalizada, son menos visibles, menos atomizables, menos algoritmizables y, en definitiva, más difíciles de evaluar. En consecuencia, las restricciones originadas por la necesidad de evaluar dificultan de manera importante el desarrollo escolar de la modelización algebraica. En el caso de la proporcionalidad estas restricciones contribuyen a potenciar el curioso fenómeno ya citado de la *evitación de las técnicas algebraicas* y a priorizar el uso de la «regla de tres».

5. EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Para analizar el punto de vista del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) sobre el álgebra elemental, debemos empezar por preguntarnos qué entiende dicho enfoque por «álgebra elemental» y, a continuación, cuál es el problema didáctico que aborda con relación al citado ámbito de la matemática escolar y qué respuestas aporta. Cuestionamos así que los diferentes enfoques en didáctica

[14] La ausencia institucional de un dispositivo didáctico para dar cabida y legitimidad matemática al trabajo técnico dificulta objetivamente el desarrollo de la verdadera creatividad matemática, provocando el fenómeno que hemos denominado *paradoja de la creatividad* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 289-290).

(en nuestro caso, el EOS y la TAD) utilicen los términos básicos (en este caso «álgebra elemental») con el mismo significado y que traten el mismo problema aunque este se enuncie bajo un mismo epígrafe.

Con relación al álgebra elemental, el EOS se interesa en primer lugar por la caracterización del *razonamiento algebraico elemental* (RAE) en el ámbito de la educación primaria (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y su extensión a los niveles de educación secundaria (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Estos trabajos asumen la necesidad de:

> […] identificar indicadores de la actividad matemática que permitan clasificarla como *aritmética* o *algebraica* o, de forma más precisa, aspectos que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de algebrización. (Godino et al., 2014, p. 201)

Además, se utilizan estos resultados en la formación del profesorado con el objetivo de capacitarlos para el desarrollo del sentido algebraico de sus alumnos.

En el EOS, el criterio para considerar una actividad matemática como «algebraica» viene dado por lo que es considerado como tal por la comunidad didáctica: «una práctica matemática se considera algebraica si presenta cierto tipo de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como *algebraicos*» (Ibíd., p. 204).

Se describen tres niveles de RAE en la educación primaria (junto con el nivel 0, que caracteriza la ausencia de rasgos algebraicos). En términos generales:

> Se asume que se incrementa la algebrización a medida que intervienen objetos intensivos de segundo grado (clases o tipos de intensivos de primer grado, como los números naturales), se expresan de manera alfanumérica y se opera con ellos de manera analítica (sintáctica). (Godino et al., 2015, p. 122)

Es importante subrayar que el nivel de algebrización se asigna a la actividad matemática que se realiza y no a la tarea en sí misma, por lo que una misma tarea puede llevarse a cabo mediante actividades matemáticas diferentes que pueden ser clasificadas en diferentes niveles de algebrización.

Posteriormente se amplían estos niveles con otros tres que caracterizan la matemática de secundaria (incluido el Bachillerato). En el nivel 4 se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes; en el nivel 5 se realizan cálculos analíticos que implican el uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas; y en el nivel 6 se comienza a estudiar estructuras algebraicas en sí mismas (Ibíd.).

Se observa, en definitiva, que la noción de «álgebra elemental» está muy ligada en el EOS a los procesos de generalización (y particularización) propios de la actividad matemática:

> Los niveles de algebrización son básicamente grados de generalidad, combinada con el uso de diversos registros de representación semiótica (RRS), sus transformaciones y conversiones (Duval, 1995), los cuales son indicativos de fases en el proceso de reificación de los objetos intensivos intervinientes. Consideramos que para la descripción del carácter algebraico de las prácticas matemáticas es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización. (Ibíd., p. 130)

Dado que en la TAD los procesos de generalización y el grado de generalidad desempeñan un papel relativamente secundario en la redefinición del álgebra elemental, aparece un primer rasgo de «inconmensurabilidad» local entre ambos enfoques.

En cuanto al problema didáctico que plantea y aborda el EOS con relación al álgebra elemental, podemos decir que, en primera instancia, se trata del problema de cómo describir indicadores de la actividad matemática que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de RAE. Complementariamente, el EOS pretende caracterizar las «brechas o discontinuidades ontosemióticas» que pueden tener lugar en la realización de las tareas matemáticas escolares cuando estas requieren situarse en los sucesivos niveles de razonamiento algebraico y elaborar propuestas de enseñanza que contemplen el progreso de los estudiantes a medida que avanzan en dichos niveles.

Es cierto que el EOS, como la TAD y otros muchos enfoques —como, por ejemplo, el *early algebra* (Kieran et al., 2016)—, postulan la necesidad de cuestionar y eventualmente modificar las organizaciones matemáticas y didácticas escolares en torno al álgebra elemental. Pero, más allá de los cambios curriculares que el EOS pueda proponer como consecuencia de estas investigaciones, ¿se plantea las cuestiones que constituyen el núcleo de las dimensiones económica y ecológica del problema didáctico del álgebra elemental tal como se considera en la TAD[15]?

Además, en la TAD, la dimensión epistemológica del problema es básica y fundamental. De hecho, el cuestionamiento de la razón de ser que el sistema escolar asigna oficialmente al álgebra elemental se fundamenta en las limitaciones que presenta el MED en la institución de secundaria para sustentar organizaciones didácticas que superen determinados fenómenos didácticos considerados «indeseables» en base a los principios o asunciones básicas de la TAD. El MER alternativo que se construye como referencia para sacar a la luz y estudiar dichos fenómenos constituye una hipótesis científica, parcialmente contrastada, según la cual es posible diseñar procesos didácticos (sustentados en el MER en cuestión) de manera que la comunidad de estudio acabe utilizando el álgebra elemental como un instrumento de modelización de sistemas de todo tipo, superando así las «limitaciones» originadas por su identificación con una aritmética generalizada (Gascón y Nicolás, 2017).

En síntesis, el objetivo para el cual la TAD construye un MER, que redefine el álgebra elemental como un proceso de algebrización estructurado en tres etapas, no es otro que el de estudiar la economía y la ecología de este ámbito de la matemática escolar y dar cuenta, en primera instancia, de ciertos fenómenos didácticos que emergen en la institución de enseñanza secundaria. Este es el objeto de estudio primario de la didáctica, según la TAD. Los resultados de este estudio, cuya base empírica incluye datos provenientes de todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica, sustentan el diseño y la gestión de REI cuya experimentación permite contrastar empíricamente, y en su caso modificar, el MER inicial con el objetivo de sacar a la luz fenómenos nuevos o aspectos de los fenómenos didácticos que habían quedado ocultos.

En consecuencia, las etapas del proceso de algebrización y los niveles de RAE desempeñan funciones muy diferentes en cada uno de los enfoques. En coherencia con esta disimetría, los criterios para caracterizar los niveles de algebrización en el EOS y los que se utilizan en la TAD para describir las etapas del proceso de algebrización son de distinta naturaleza, por lo que su comparación es muy arriesgada. En efecto, mientras que la TAD se basa en indicadores del grado de algebrización que hacen referencia a características estructurales y funcionales de las PM consideradas como un todo y que, en última instancia, dependen del modelo epistemológico general de las matemáticas que sustenta la TAD, los criterios que emplea el EOS se refieren a la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, en términos del grado de generalidad de los objetos, transformaciones y lenguajes que estos utilizan.

En resumen, podemos afirmar que los problemas que el EOS y la TAD se plantean en torno a lo que cada uno de estos enfoques denomina «álgebra elemental» son de diferente naturaleza, lo que introduce otro rasgo de «inconmensurabilidad» entre ambos enfoques.

Como ejemplo de las consecuencias de la diferente forma de interpretar el problema didáctico del álgebra elemental podemos citar, para acabar, las dos maneras de dar cuenta de un «mismo» hecho didáctico[16]. El EOS propone una posible hipótesis explicativa de algunas de las dificultades que aparecen en el aprendizaje del álgebra en base a que «el diseño curricular, las lecciones de los libros de texto y la actuación

[15] Como, por ejemplo, ¿cuáles son las limitaciones de la enseñanza escolar del álgebra que el EOS pretende superar?, ¿qué fenómenos didácticos «indeseables» (en base a los principios o asunciones básicas del EOS) ponen de manifiesto dichas limitaciones?, ¿en qué dirección modificar el papel que desempeña el álgebra en la enseñanza de las matemáticas?, ¿cómo explicar la permanencia de una organización didáctica escolar en torno al álgebra que presenta las características que hemos descrito así como las grandes dificultades para modificar dicha organización en una dirección determinada?

[16] Dado que el EOS y la TAD no coinciden en la forma de interpretar el álgebra elemental, no parece razonable suponer que interpretan de la misma forma las «dificultades» escolares que aparecen en el aprendizaje del álgebra.

de los profesores en el aula no tienen en cuenta, con la atención necesaria, la complejidad de objetos y procesos que se ponen en juego en las prácticas matemáticas escolares» (Godino et al., 2015, p. 137).

Debido a la amplitud de la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos que propugna la TAD (Bosch y Gascón, 2004), para dar cuenta de las «dificultades» de los alumnos y los profesores en la enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental es necesario tomar en consideración las restricciones institucionales de todo tipo que hemos descrito brevemente en la sección 4. Esto significa que, más allá de la complejidad ontosemiótica de los objetos y los procesos que se ponen en juego, hemos de considerar la incidencia de las restricciones que provienen de todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición y de todos los niveles de codeterminación didáctica.

Esto no significa que, cuando analizamos la actividad matemática que tiene lugar en el aula, no sea posible hacer determinadas comparaciones[17] puntuales entre los componentes de la praxis que, de manera más o menos paradigmática, forman parte de los diferentes niveles de algebrización (según el EOS) por un lado y de las sucesivas etapas del proceso de algebrización (según la TAD) por otro. Pero este tipo de comparaciones puede llevar a malentendidos si aislamos dichos componentes de la actividad matemática global y del problema al que responden los niveles en el EOS y las etapas en la TAD.

En resumen, consideramos que cualquier comparación entre la forma como dos enfoques teóricos en didáctica (como, por ejemplo el EOS y la TAD) responden ante un problema (como, por ejemplo, el problema didáctico del álgebra elemental) debe hacerse partiendo de un análisis crítico de lo que cada uno de los enfoques define como tal problema, en qué términos lo formula, cuál es el ámbito institucional en el que lo sitúa, cómo lo relaciona con otros problemas didácticos y cuál es el tipo de respuestas que considerará aceptables. Este análisis nos llevará inevitablemente a preguntarnos sobre lo que cada uno de los enfoques considera como «problema didáctico» y, en última instancia, a iniciar un debate –continuamente aplazado– sobre las diferentes formas de interpretar el objeto de estudio de la ciencia didáctica que todavía subsisten en nuestra comunidad.

Referencias

Assude, T., Coppe, S. y Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège: atomisation et réduction. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds) *Recherche en didactique des mathématiques. Enseignement de l'algèbre, élémentaire. Bilan et perspectives* (pp. 41-62). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Atiyah, M. (2002). Las matemáticas en el siglo XX. Traducción en *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *50*, 35-55.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq*., *15*(1), 1-28.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra. Accounting for the reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Melbourne, Australia: The University of Melbourne, vol. 1 (pp. 69-78).

Blanco, L., Garrote, M. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*, *3*(3), 221-229.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

[17] De acuerdo con Kuhn, consideramos que ni en su forma metafórica ni en su forma literal *inconmensurabilidad* implica *incomparabilidad*.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). Le caractère problématique du processus d'algébrisation: le cas de la proportionnalité et des grandeurs, En M. Bailleul, C. Comiti, J.L. Dorier, J.B. Lagrange, B.I. Parzysz y M.H. Salin (Eds.), *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 153-159, ARDM.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*, vol. II (pp. 135-145). Osnabrück (Germany): Forschungsinstitut fuer Mathematik didactik.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001b). ¿Cómo se construyen problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, *13*(3). Parte I: El álgebra escolar en el Programa Cognitivo (pp. 22-40); Parte II: El álgebra escolar en el Programa Epistemológico (pp. 40-63).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *14*, 125-133.

Booth, L. (1984). *Algebra. Children's Strategies and Errors*, Windsor, NFER-Nelson.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas*, (pp. 135-159). Barcelona: Edebé

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, España.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. En G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 325-341). [Disponible en https://hal.archives-ouvertes.fr]

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage (2ª édiction 1991).

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1989b): *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989c): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, [Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille].

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Perspectives curriculaires : vois d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, *23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. En J.-L. Dorier, Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. Floris, R. (Eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En Ducourtioux, C. y Hennequin, P.-L. (Éds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*. Publications de l'APMEP nº 168, 239-263. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques. Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 19-39).

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L. y Robert A. (Eds.) (2012) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Derrida, J. (1967). *De la grammatologie*. París: Les Editions de Minuit.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics 9*, 19-25.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, *22*(2), 5-35.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria, *Investigación en educación matemática XI*, pp. 71-90.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226-246.

Gascón, J. (1989). *El Aprendizaje de Métodos de Resolución de Problemas de Matemáticas*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Matemàtiques.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, *37*, 43-63.

Gascón, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, *11*(1), 77-88.

Gascón, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid.

Gascón, J. (2001). Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação*, *10*(2), 33-66.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas, *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99-123.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M., Sales, J. y Segura, R. (2004). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro, Comunicación invitada en las *Xornadas sobre Educación Matemática*, Santiago de Compostela, 16-18/09/2004.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico, *Educaçao Matemática Pesquissa* (Special Issue).

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica, *Avances de investigación en Educación Matemática*, *8*, 127-142.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F. y Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques. Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 137-162). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Kaput, J. (1987). Algebra papers: A representational framework. En N. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp.345-354.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustenta la reforma del álgebra? (I y II), *UNO*, *n. 9*, 85-97 y n. 10, 89-103.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. ICME-13 Topical Surveys*. Springer International Publishing.

Klein, J. (1934/1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, Dover Publications: New York.

Malisani, E. y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 19-41.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos, México. [Recuperable en http://cuaed.unam.mx/math_media/anexos/articulos/acerca_caracter_algebraico.pdf]

Radford, L. (2000) Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics 42*, 237–268.

Radford, L. y Grenier, M. (1996): Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre, *Revue des sciences de l'éducation*, XXII/2, 253-276.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2010) La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 655-676). Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: the case of school algebra, *CERME 8* (6-10 febrero, Turkey). http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Bosch.pdf

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *REDIMAT*, *Vol. 4*, No. 2, 52-77.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Numéro spécial, *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*, Coordonné par L. Coulange et J-P. Drouhard, 87-106.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación, *BOLEMA*, *27*, nº 47, pp. 805 - 828.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, *14*(3), 351-363.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level, en A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (comps.), *Theory Research y Practice in Mathematical Education*, (pp.27-45). University of Nottingham, Shell Center for Mathematical Education.

Whitney, H. (1968).The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, *American Mathematical Monthly*, *75*, 227-256.

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ESCOLAR

Onto-semiotic perspective of the school algebraic reasoning

Godino, J.D. y Burgos, M.

Universidad de Granada

Resumen

En esta ponencia presentamos una síntesis de las investigaciones realizadas sobre el problema de la naturaleza del álgebra escolar aplicando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. La noción de configuración de prácticas, objetos y procesos se aplica para identificar tipos de objetos y procesos algebraicos, los cuales son usados para elaborar un modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas. Se ejemplifica el modelo con su aplicación al análisis de procesos de resolución de tareas de proporcionalidad. Asimismo, se hace una síntesis de las investigaciones realizadas sobre formación de profesores aplicando el modelo de los niveles de algebrización. Finalmente, se analizan concordancias y complementariedades de este modelo con las etapas del proceso de algebrización propuestas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se formulan algunas cuestiones abiertas.

Palabras clave: *razonamiento algebraico, enfoque ontosemiótico, niveles de algebrización, formación de profesores.*

Abstract

In this paper we describe a synthesis of the research carried out on the nature of school algebra, where theoretical tools of the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction are applied. The notion of configuration of practices, objects and processes is applied to identify types of algebraic objects and processes, which are used to elaborate a model for the algebrization levels of mathematical practices. The model is applied in the analysis of a proportionality task resolution processes. A synthesis of the research carried out on teacher training, where the model of algebrización levels is applied is also described. Finally, we analyze the concordances and complementarities of this model with the stages of algebrization process proposed by the Anthropological Theory of the Didactic and some open questions are formulated.

Keywords: *algebraic reasoning, onto-semiotic approach, algebraization levels, teachers' education.*

INTRODUCCIÓN

En el marco de un proyecto del Plan Nacional de Investigación sobre formación didáctico - matemática de futuros maestros de Educación Primaria, hemos tenido la ocasión de aplicar las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2012; Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar la naturaleza del razonamiento algebraico escolar (RAE) y sus implicaciones en la formación de profesores. En particular, la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos ha ayudado a identificar objetos y procesos específicos que se ponen en juego en la realización de prácticas matemáticas usualmente calificadas como algebraicas. El resultado ha sido la elaboración de un modelo de RAE que distingue distintos niveles de algebrización de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas propias de Educación Primaria y Secundaria. El uso que se ha hecho de este

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). Zaragoza: SEIEM.

modelo hasta ahora ha sido para promover en los futuros profesores la reflexión sobre la naturaleza del álgebra y desarrollar en ellos una competencia específica sobre reconocimiento de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. No se han abordado aún las implicaciones del modelo de niveles RAE sobre la planificación curricular ni tampoco para distinguir posibles niveles de desarrollo cognitivo de los estudiantes.

En esta ponencia hacemos una síntesis del modelo de niveles RAE, su fundamentación y de las aplicaciones que se han realizado sobre formación de profesores. También se describe el uso de la noción de configuración ontosemiótica, junto con la distinción de niveles de algebrización, para identificar significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad.

El trabajo lo hemos organizado en los siguientes apartados. En primer lugar, se presenta la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, seguida de la descripción de los tipos de objetos y procesos que se consideran como algebraicos. Después se muestra el modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas, el cual se aplica seguidamente para definir significados de la proporcionalidad basados en la distinción de niveles de algebrización. A continuación, se describen brevemente otras investigaciones sobre razonamiento algebraico realizadas en el marco del EOS. En la sección siguiente se reconocen algunas concordancias y complementariedades del modelo de niveles RAE con las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas propuestas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999). Finalmente se mencionan algunas cuestiones abiertas a futuras investigaciones y observaciones finales.

CONFIGURACIÓN DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS

El EOS es un sistema teórico modular e inclusivo que proporciona herramientas para el análisis epistémico y cognitivo de la actividad matemática, asumiendo presupuestos antropológicos y semióticos sobre la naturaleza de las matemáticas (Godino, 2017). La herramienta clave para el análisis epistémico y cognitivo es la de *configuración ontosemiótica*, la cual tiene en cuenta las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas realizadas ante una situación - problema, así como los objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas. Como tipos de objetos primarios se proponen las siguientes categorías, teniendo en cuenta la función o papel que dichos objetos desempeñan en las prácticas matemáticas:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones intra y extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media, función, etc.).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o dualidades:

1. *Ostensivo / no ostensivo*, que permite distinguir lo material o perceptible (ostensivo) de lo abstracto, ideal o inmaterial (no ostensivos).
2. *Extensivo / intensivo*, que diferencia la función particular de un objeto en un contexto o práctica (extensivo) de la función general en diversos contextos o clases de prácticas (intensivo).
3. *Personal / institucional*, que distingue la perspectiva de los sujetos individuales (personal) de la compartida en una institución o comunidad de prácticas (institucional).

4. *Significante / significado*, es decir, antecedente o consecuente de una función semiótica que relaciona una expresión con un contenido.
5. *Unitario / sistémico*, que diferencia los objetos considerados globalmente como un todo (unitario) de aquellos que son considerados como sistemas formados por componentes estructurados (sistémico).

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios (Font y Rubio, 2017). En consecuencia, se tienen procesos de problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación, etc. En la Figura 1 se sintetizan las relaciones entre las herramientas teóricas que propone el EOS para el análisis de la actividad matemática.

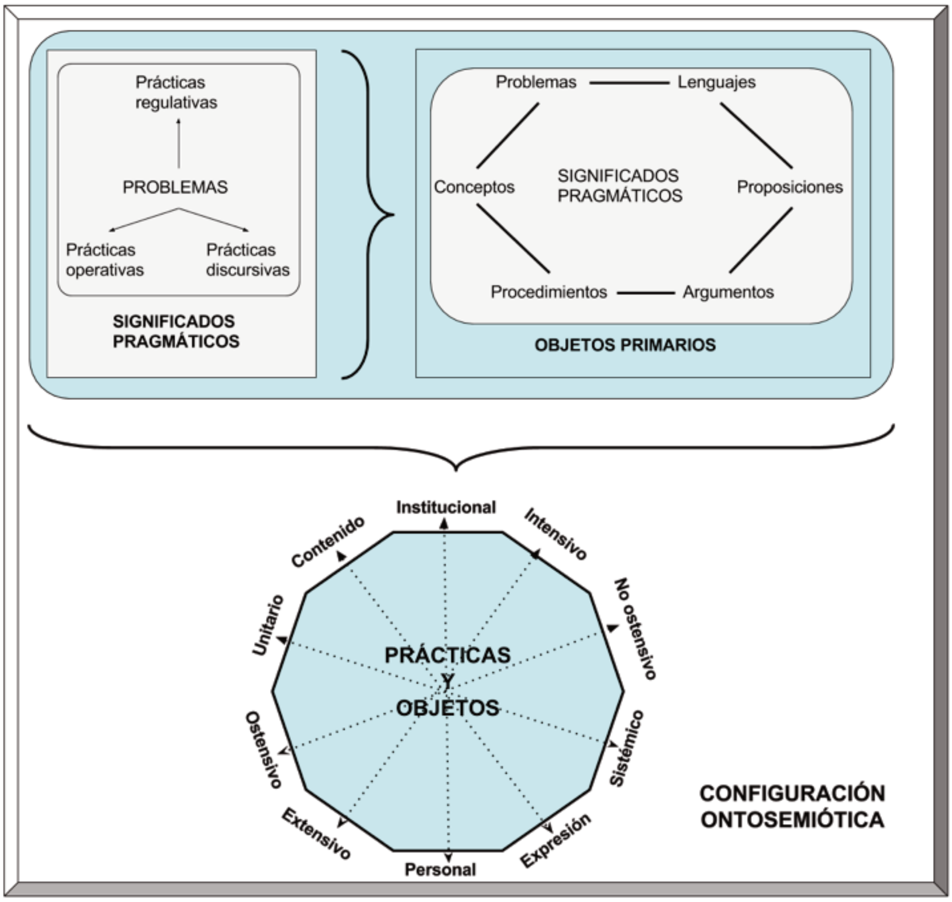


Figura 1. Significados pragmáticos y configuración ontosemiótica
(Fuente: Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017, p. 4)

En este trabajo también aplicamos la noción de significado de un objeto (en este caso, la proporcionalidad) en su versión pragmatista, esto es, entendido como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego en la solución de situaciones - problemas en las que el objeto desempeña un papel clave (Godino y Batanero, 1994).

OBJETOS Y PROCESOS ALGEBRAICOS

Una práctica matemática se considera algebraica si en ella intervienen ciertos tipos de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como "algebraicos". Se consideran como tipos de objetos algebraicos los siguientes (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014):

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.
2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.
3) *Funciones*. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y el álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Asimismo, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones, variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula analítica.
4) *Estructuras, sus tipos y propiedades* (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.), características del álgebra superior o abstracta. El estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, aunque es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo ($\mathbb{N}$, +, ×) de los números naturales.

Procesos algebraicos

Como se indica en Godino et al. (2014), en el caso de las prácticas algebraicas los procesos de particularización – generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008, Mason y Pimm, 1984). Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización.

Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que en el EOS se denomina objeto intensivo, el cual viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Mediante el proceso inverso de particularización se obtienen objetos que se denominan extensivos, esto es, objetos particulares. Una colección finita simplemente enumerada no se considera como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. En ese momento, el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*.

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto *ostensivo* que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los que se opera de manera sintáctica, analítica o formal.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford, 2003).

En el modelo de niveles de algebrización desarrollado en el marco del EOS se analiza la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está fijada de manera objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

MODELO DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

La caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria se basa en la distinción de tres niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados, y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. La Figura 2 resume los criterios que se tienen en cuenta para definir los tres primeros niveles de algebrización.

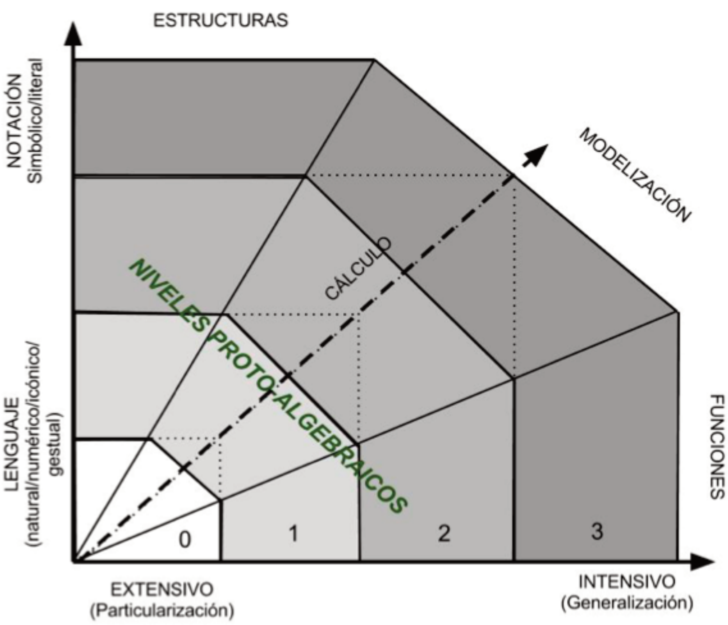


Figura 2. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático (Fuente: Godino et al., 2014, p. 216)

Considerando que los números naturales son también objetos intensivos (entidades generales, abstractas) que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, es necesario atribuirles un primer grado de generalidad o intensión. En el nivel 0 de algebrización no se puede decir que no intervengan objetos intensivos, sino que a tales objetos corresponde un primer grado de intensión. De hecho, es necesario observar que el número 3, por ejemplo, puede considerarse la característica de todos los conjuntos coordinables finitos cuyo cardinal es tres; así, "3" es ya un objeto que representa a una clase. Por ello, la atribución de un carácter algebraico a una práctica matemática supone la intervención de intensivos al menos de un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1.

En Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria. Estos niveles están basados en la consideración de:

1) el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; 2) el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. En los anexos 1 y 2 se incluye una síntesis de los rasgos característicos de cada uno de los niveles.

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

En esta sección aplicamos las herramientas teóricas descritas anteriormente y el modelo de niveles de algebrización para analizar diversos significados de la proporcionalidad, sintetizando el análisis realizado en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017).

El universo de significados de la proporcionalidad se puede clasificar según distintos criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985).

En consecuencia, se pueden delimitar variantes de significados propios de algunos campos de aplicación de la proporcionalidad (geométrico, probabilístico, etc.) y, como veremos seguidamente, según el nivel de algebrización de la actividad matemática realizada para la resolución de los problemas.

En la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.) y sus respectivas medidas. En una fase del proceso de resolución las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números reales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto. En la fase de modelización intra-matemática se ponen en juego los tres significados de la proporcionalidad que describimos seguidamente, conjuntamente con los significados pragmáticos ligados a los contextos de aplicación. Estos tres significados, junto con el informal/cualitativo, no son exhaustivos ni independientes, siendo posible identificar significados parciales dentro de cada categoría y prácticas matemáticas que involucren a varios de ellos. Es importante tener en cuenta los diversos significados en el diseño de los procesos de instrucción, los cuales deben tener lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria y secundaria) y en distintas áreas de contenido, como describe Wilhelmi (2017).

Significados pragmáticos según los niveles de algebrización

La aplicación de los niveles de algebrización de la actividad matemática propuestos en Godino et al. (2014) a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional (RP). Parece razonable y útil para la organización curricular y la gestión de las intervenciones didácticas distinguir tres tipos de significados: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. Estos tipos de significados se complementan con un significado informal/cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

Un análisis informal, puramente cualitativo, de las situaciones de proporcionalidad puede proveer de una estimación que sirva para validar el modo de proceder y el resultado final. Por otro lado, un razonamiento de este tipo se hace necesario, como primer paso, para distinguir si estamos ante una situación de proporcionalidad y si ésta es directa o inversa.

Significado aritmético

Utilizaremos como ejemplo el siguiente problema de valor faltante para mostrar los diversos sistemas de prácticas mediante los cuales se puede abordar su solución:

Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?

El significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división), como ocurre en la siguiente secuencia de prácticas:

1. En las situaciones de compra-venta de la vida cotidiana, es habitual suponer que, al comprar cantidades pequeñas de café, dichas cantidades sean del mismo tipo y calidad.
2. En consecuencia, si se compra el doble, el triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Del mismo modo, si se compra la mitad, la tercera parte, etc. de producto, se deberá pagar la mitad, la tercera parte, etc. de precio.
3. Si un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros, el precio de 100 gramos de café (cinco veces menos) debe ser la quinta parte de 5 euros, esto es, 1 euro.
4. El precio de 50 gramos (mitad de 100 gramos) deberá ser la mitad, esto es, 50 céntimos.
5. De esta manera, 450 gramos de café deben costar, $4 \times 1 + 0{,}50 = 4{,}50$; es decir, 4 euros y 50 céntimos.

La práctica 1 tiene un carácter discursivo-descriptivo de la situación-problema, mientras que las restantes tienen carácter normativo y operativo. En la solución intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; por tanto, según Godino et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización, puesto que no intervienen objetos y procesos algebraicos.

Significado proto-algebraico

El significado proto-algebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma , como, por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas:

1. Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc., de precio.
2. Por tanto, la relación que se establece entre las cantidades del producto compradas y el precio pagado es de proporcionalidad directa.
3. En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: $5/500 = x/450$; siendo x el precio al que debe venderse 450 gramos de café.
4. En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,
$$5 \times 450 = 500 \times x,$$
5. Luego, $$x = (5 \times 450)/500 = 4{,}5$$
6. Por tanto, el precio del paquete debe ser 4,5 euros.

Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2 (proto-algebraica), según el modelo de Godino et al. (2014), ya que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción.

Una variante diagramática de esta técnica de solución se conoce como la "regla de tres", que en cierto modo "oculta" la intervención de las razones y la proporción, lo cual puede comportar un significado "degenerado" de la proporcionalidad aritmética (Figura 3):

$$\left.\begin{array}{l} 500 — 5 \\ 450 — x \end{array}\right\} \quad x = \frac{450 \times 5}{500} = 4{,}5$$

Figura 3. Regla de tres

Significado algebraico-funcional

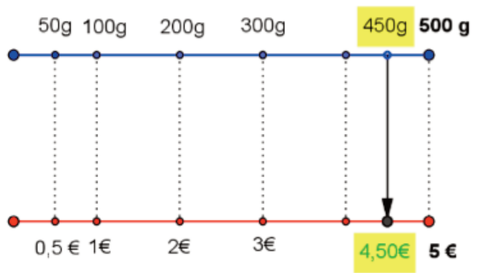
Una de las caracterizaciones del significado propiamente algebraico viene dada por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones: $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(k{\cdot}a) = k{\cdot}f(a)$. Una de estas técnicas se aplica en la siguiente secuencia de prácticas:

1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que pagaremos por dos paquetes de café distintos, será igual al precio de un paquete que pesase lo mismo que los dos juntos.
2. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto Q, y el conjunto de los precios pagados P, $f{:}Q \to P$ es lineal.
3. En toda función lineal se cumple que la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número $f(k{\cdot}a) = k{\cdot}f(a)$.
4. El coeficiente de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno).
5. Aplicando dichas propiedades al caso se tiene:

   $f(500\text{g}) = 5€;\quad 500 f(1\text{g}) = 5€;\quad f(1\text{g}) = \dfrac{5}{500}€$ [Un gramo de café cuesta 1 céntimo]

6. $450 f(1\text{g}) = 5€;\quad f(1\text{g}) = 450 \times \dfrac{5}{500}€;\quad f(450\text{g}) = 4{,}5€$
7. Luego el precio de un paquete de 450 gramos debe ser de 4,5 euros.

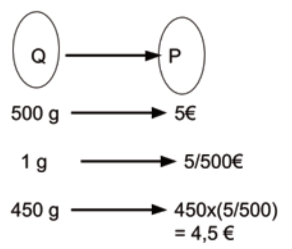
Es posible también considerar soluciones basadas en representaciones diagramáticas, como las que se incluyen en la Figura 4, donde se pone en juego la noción de correspondencia. En estos casos la actividad matemática que se realiza se puede calificar de proto–algebraica de nivel 1 (anexo 1).



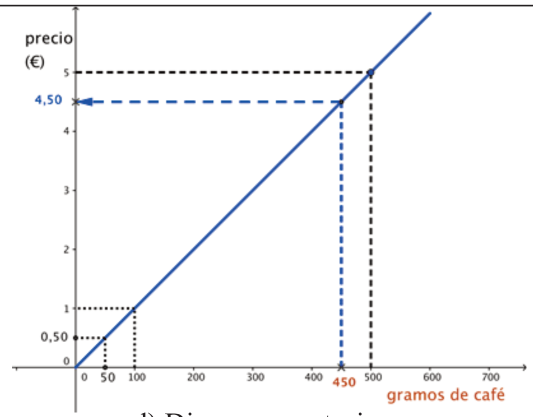
a) Diagrama lineal

Cantidad	Precio
500	5
100	1
50	0,5
400	4
450	4,5

b) Diagrama tabular



c) Diagrama sagital



d) Diagrama cartesiano

Figura 4. Soluciones diagramáticas (Fuente: Godino, et al., 2017, p. 8)

Algunos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Obando, Vasco y Arboledas, 2014) enfatizan el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma y = k·x, en el que k es la razón constante, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. Aunque se hable de la "función lineal", en singular, en realidad se pone en juego el conocimiento de la estructura de una familia de funciones, ya que k interviene como un parámetro, lo que supone un primer contacto con el nivel cuatro de algebrización que definen Godino, Neto et al. (2015).

Dada la eficacia matemática del razonamiento algebraico, parece deseable, desde el punto de vista de la idoneidad epistémica, que los procesos de instrucción tiendan a lograr el nivel algebraico de significación para el razonamiento proporcional. Pero no parece idóneo, desde el punto de vista cognitivo y afectivo, prescindir de los niveles precedentes. No obstante, la resolución de problemas que involucran la proporcionalidad en la vida cotidiana y profesional puede ser idónea mediante la aplicación de procedimientos propios de la significación aritmética, incluso con la variante degenerada de la regla de tres.

SOLUCIONES A UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA – FUNCIONAL CON DIFERENTES NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

En este apartado incluimos el enunciado y posibles soluciones a un problema de modelización algebraica–funcional, las cuales pueden involucrar los niveles 1 a 5 de algebrización (Figura 5). Muestra, con claridad, que la asignación de niveles se refiere a la práctica matemática que se realiza en cada caso. Este ejemplo lo hemos usado en talleres de formación de profesores de educación secundaria para reflexionar sobre las características del razonamiento algebraico escolar.

Enunciado del problema

Supón que remas en kayak 5 millas a favor de la corriente en un río desde tu campamento base hasta una presa, y que seguidamente regresas al campamento. En ausencia de corriente eres capaz de remar a *x* millas por hora. Si la velocidad de la corriente del río es de 1 milla por hora, escribe una expresión que permita calcular el tiempo total del viaje en función de tu velocidad *x* de remada.

a) Resuelve la tarea.
b) Identifica el nivel de algebrización que se pone en juego en la realización de la tarea.
c) Enuncia una tarea relacionada de manera que su resolución implique un nivel 1 de algebrización.
d) Ídem, para un nivel 4 y 5

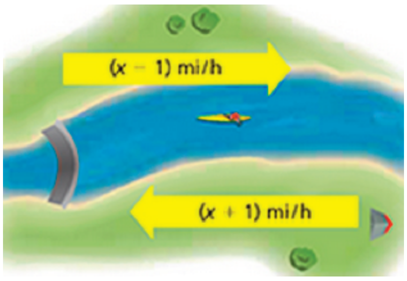


Figura 5. Movimiento uniforme

Respuestas esperadas y niveles de algebrización

a) Sabemos que el espacio recorrido e por un móvil en movimiento uniforme, en un tiempo *t*, es proporcional a la velocidad *x*, es decir, $e = x \cdot t$, luego, $t = e/x$. Cuando se rema a favor de la corriente la velocidad será $x + 1$, y cuando se va en contra, $x - 1$. Luego el tiempo *t*, en función de la velocidad *x*, se puede calcular con la expresión:

$$t = \frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{10x}{(x+1)(x-1)}$$

b) En la solución dada se encuentra una expresión algebraica racional como criterio de una función de variable real cuyo recorrido es el conjunto de los números reales positivos. Se opera con la variable independiente para obtener una expresión canónica, luego se pone en juego un nivel 3 de algebrización (anexo 1).

La actividad matemática tendría un nivel 2 de algebrización si el estudiante da como solución,

$$t = \frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1}$$

En este caso no se llega a operar con la variable independiente de manera sintáctica. La expresión dada queda ligada a la información contextual de los dos tramos (ida y vuelta) en los que el kayak realiza el movimiento, que da lugar a los dos sumandos y a la circunstancia de remar a favor o en contra de la corriente (sumar o restar 1 a la velocidad de remada).

c) Se puede dar la velocidad de remada (p. e., 3,5 millas /hora) y preguntar por el tiempo que se tarda en hacer el recorrido:

$$t = \frac{5}{3{,}5+1} + \frac{5}{3{,}5-1} = 3{,}11$$

Tiempo igual a 3,11 horas. En este caso solo es necesario hacer cálculos aritméticos, aunque interviene también la regla que define la situación como de proporcionalidad, como es el caso del movimiento uniforme. Por tanto, se asigna el nivel 1 de algebrización.

d) Se puede considerar que la distancia al campamento es una variable *d*, así como también la velocidad de la corriente *c*. En este caso la expresión funcional debe involucrar el uso de dos parámetros, que es el requisito para asignar el nivel 4 de algebrización (anexo 2).

$$t = \frac{d}{x+c} + \frac{d}{x-c}$$

Si se da como dato el tiempo (p.e., $t = 4$ horas) y se pregunta por la velocidad de la corriente *c*, o por la distancia al campamento *d*, entonces será necesario despejar dichos parámetros. El uso conjunto de variables, incógnitas y parámetros y la realización de operaciones con los parámetros es propio del nivel 5 de algebrización (anexo 2):

$$4 = \frac{d}{x+c} + \frac{d}{x-c}$$

$$4(x+c)(x-c) = d(x-c) + d(x+c) = 2xd$$

$$d = \frac{2(x+c)(x-c)}{x}$$

OTRAS INVESTIGACIONES SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN EL MARCO DEL EOS

En Godino, Aké, et al. (2015) se diseña un instrumento de evaluación (Cuestionario CDM-RAE) para la evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos de estudiantes del Grado en Educación Primaria sobre razonamiento algebraico elemental. Se describen las categorías de conocimientos algebraicos tenidas en cuenta (estructuras, funciones y modelización) y las categorías de conocimientos didácticos (facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Asimismo, se describen y analizan las tareas incluidas en el cuestionario informando de la validez de contenido del mismo. El cuestionario consta de 25 ítems que evalúan tanto conocimientos algebraicos como conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en Educación Primaria.

En Godino, Wilhelmi, et al. (2015) se describen y analizan los resultados de aplicar el cuestionario CDM-RAE a una muestra de estudiantes del Grado en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, y que, finalmente, garantice procesos de estudio efectivos en la Educación Primaria. La muestra estuvo compuesta por 597 estudiantes de las Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. El análisis cuantitativo de los resultados permitió explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación de los programas de formación en matemáticas y su didáctica entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos, generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

En Aké, Godino, et al. (2014) se analiza una experiencia formativa de maestros de Educación Primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La experiencia se realizó en un curso sobre "Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria" donde el razonamiento algebraico elemental fue un tema transversal respecto a los restantes bloques temáticos. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, entendida en sentido generalizado y basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Las actividades sobre razonamiento algebraico elemental fueron realizadas por 56 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para la formación de maestros, mientras que los resultados sugieren que el reconocimiento de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización es una competencia difícil de lograr con los medios asignados en el proceso formativo.

Este artículo es un resultado parcial de la tesis doctoral de Aké (2013); otra tesis doctoral centrada también en la formación de maestros en razonamiento algebraico es la de Castro (2011).

El marco del enfoque ontosemiótico ha sido utilizado en otras investigaciones sobre álgebra que no se relacionan con la distinción de niveles de algebrización. Este es el caso de Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2012) y de Sbitneva, Moreno, Rivera y García (2015).

CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES CON OTROS MODELOS

Los niveles de algebrización que se han propuesto están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico: A) El álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; B) El álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales. El aspecto A se concreta en el modelo basado en EOS en dos niveles proto-algebraicos de razonamiento, mientras que el B se asociada a un nivel algebraico consolidado. Los niveles de algebrización que hemos descrito son también interpretables en términos de "capas de generalidad" que describe Radford (2011, p. 311).

El requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir "lo algebraico", como, por ejemplo, Puig y Rojano (2004, p. 198), quienes incluyen entre otras las siguientes características:

- El uso de un sistema de signos para resolver problemas que permita expresar el contenido del enunciado del problema relevante para su solución (su "estructura"), separada de lo que no es relevante.
- La ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos, que les permitan representar a cualquier tipo de objeto matemático.
- El carácter analítico del uso de los sistemas de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica.

Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. "Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como "algebra temprana" (Carraher y Schliemann, 2007), proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para diferenciarlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es "hacer explícita la generalidad", en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad.

En Godino et al. (2015) se ha iniciado el estudio de la articulación del modelo de niveles de RAE basado en el EOS con las etapas del proceso de algebrización definidas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Bolea, 2002; Gascón, 1999, 2011; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2010).

A pesar de que las "etapas" según la TAD se refieren a recorridos de estudio potenciales y los "niveles" según el EOS a la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, es posible establecer paralelismos entre ambos modelos. Así, se concluye que el nivel 2 del modelo basado en el EOS se corresponde con la etapa 1 de la TAD y la etapa 2 de la TAD se corresponde con el nivel 3 del EOS. La etapa 3 del proceso de algebrización propuesta por la TAD, analizada desde la perspectiva del EOS, lleva a proponer la distinción de dos niveles adicionales (4 y 5 en el modelo EOS), al tener en cuenta la complejidad ontosemiótica del uso de parámetros para expresar familias de ecuaciones y funciones. Por último, el nivel 6 del EOS no se corresponde de manera explícita con ninguna etapa en el modelo basado en la TAD. En la Tabla 1 se resumen estas relaciones.

Tabla 1. Correspondencia entre las etapas (TAD) y los niveles (EOS) de algebrización

EOS	TAD
Nivel 0: aritmético	PCA: programa de cálculo aritmético
Nivel 1: proto-algebraico incipiente	
Nivel 2: proto-algebraico intermedio	Etapa 1: necesidad de formulación simbólica de un PCA
Nivel 3: algebraico consolidado	Etapa 2: igualación de dos PCA
Nivel 4: uso de parámetros	Etapa 3: introducción de parámetros
Nivel 5: manipulación de parámetros	
Nivel 6: tareas estructurales	

Los tipos de objetos y procesos algebraicos considerados en el modelo descrito en este trabajo suponen un análisis microscópico complementario al abordado mediante la noción de praxeología usado en el marco de la TAD. De hecho, el modelo propuesto permite un estudio pormenorizado de los comportamientos de los sujetos, que amplía el carácter institucional abordado desde la identificación de las praxeologías matemáticas y didácticas. Además, al incluir el modelo EOS niveles proto-algebraicos, está más adaptado a etapas donde el razonamiento algebraico es incipiente (tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria), mientras que las sucesivas etapas del proceso de algebrización propuestas desde la TAD en los trabajos citados están más centradas en la caracterización del álgebra en niveles educativos superiores. Así, aunque los criterios usados en ambos modelos teóricos para definir niveles o etapas en el proceso de algebrización son distintos, el análisis teórico realizado muestra que son consistentes y complementarios, reconociendo, no obstante, que la plena articulación de estos modelos deberá ser profundizada en estudios posteriores.

CUESTIONES ABIERTAS

En la identificación de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas se han aplicado las nociones de práctica, objeto y proceso del EOS (configuración ontosemiótica) que permiten hacer análisis de tipo microscópico de la actividad matemática. Pero la noción de significado pragmático de un objeto (p.e., el álgebra), entendido como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego ante la resolución de cierto tipo de problemas (Figura 1), permite hacer análisis a nivel macroscópico. Sobre el álgebra escolar se considera que no hay un único significado de referencia, sino diversos, dependiendo del contexto, marco institucional o de las comunidades de prácticas en que tal objeto desempeña su función. El problema esencial que se debe abordar es cómo articular los diversos significados en la progresión de los aprendizajes de los estudiantes, a medida que transitan por los diferentes niveles educativos y contextos institucionales.

En el caso de la proporcionalidad hemos identificado tres significados ligados a niveles de algebrización. Sin duda, desde el punto de vista epistémico, el significado algebraico - funcional reúne características de generalidad y eficacia en la resolución de problemas que llevan a priorizar su desarrollado respecto a otros significados con un ámbito de aplicación más restringido. Pero la idoneidad epistémica no es la única faceta a tener en cuenta. Es posible que el significado algebraico–funcional suponga un reto inalcanzable como primer encuentro al tema para los estudiantes de educación primaria. Además, estar familiarizado con el significado aritmético y el protoalgebraico puede ser un prerrequisito para comprender en toda su generalidad el significado algebraico–funcional.

El modelo de los niveles de algebrización que hemos descrito responde a uno de los problemas del álgebra escolar que se ha abordado aplicando algunas herramientas del EOS. No consideramos que haya un único problema relativo a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. En el marco del EOS se considera que estos procesos involucran varias facetas o dimensiones, cada una de las cuales plantea problemas de investigación específicos. Además del problema epistémico, esto es, relativo a la naturaleza, caracterización y emergencia del propio contenido matemático desde el punto de vista institucional, es necesario plantear y abordar los problemas siguientes:

- *Cognitivo– afectivo*, centrado en la caracterización de los significados personales de los estudiantes.
- *Instruccional*, esto es, cómo promover el desarrollo de los conocimientos y competencias matemáticas en los estudiantes.
- *Ecológico*, identificación y control de los factores que condicionan y soportan los procesos de estudio matemático.

Por otra parte, la definición de niveles de conocimiento y competencia en cualquier campo del saber, como puede ser la geometría o el álgebra, se enfrenta a un problema de difícil solución. El conocimiento tiene, en general, una estructura compleja cuya naturaleza es más bien arborescente que lineal; por tanto, una propuesta de niveles discretos de razonamiento algebraico, como ocurre también con los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele, debe justificar por qué se proponen 4, 5 o 6 niveles, y no un número diferente. Entre los niveles 1, 2, 3, etc., ¿es posible, y útil, definir niveles intermedios o subniveles? Teniendo en cuenta que se trata de una modelización, y por tanto, una simplificación de una realidad compleja, como es el *conocimiento* en un campo específico, la definición de subniveles es una cuestión abierta a futuros desarrollos, como ocurre también con el modelo de los niveles de van Hiele. En todo caso, como todo modelo, es necesariamente una descripción simplificada.

Los niveles de razonamiento algebraico se han propuesto para modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en la resolución de problemas matemáticos, esto es, es una descripción de la actividad matemática que se hace bajo la perspectiva de los objetos y procesos característicos del álgebra. Se aplican, por tanto, de manera local y en unas circunstancias temporales y contextuales determinadas. Un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado, y cada manera puede implicar niveles de algebrización diferentes. Parece necesario y útil abordar el estudio de los niveles de algebrización desde una perspectiva más macroscópica, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

En el primer caso se trataría de calificar como más o menos algebraicas determinadas formaciones epistemológicas que se despliegan ecológicamente a lo largo de un periodo histórico, o de diferentes etapas curriculares. Las etapas del proceso de algebrización propuestas en el marco de la TAD parece que tienen este carácter. En el segundo caso, esto es, desde el punto de vista personal, el estudio de niveles de algebrización se puede contemplar desde la perspectiva de niveles de desarrollo cognitivo, esto es, como etapas en la vida del estudiante de matemáticas que se pueden calificar como de incremento progresivo más o menos consolidado de conocimiento y competencia algebraica. Esta es una cuestión abierta que requiere nuevos estudios teóricos y empíricos.

Reconocimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 25 – 48.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann. A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 23-37.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, *11*(1), 77-88.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García. y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127 - 150.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(2-3), 167-200.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Blanco, T. F., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de Educación*, *370*, 199-228.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277-289

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2012). Vectors, change of basis and matrix representation: onto-semiotic approach in the analysis of creating meaning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(1), 11–32.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H.Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 303- 322). Berlin: SpringerVerlag.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Sbitneva, L., Moreno, N., Rivera, D. y García, B. (2015). Evaluation of the efficiency of our teaching practice based on OSA theory: the case of linear algebra course in b-learning. *8th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2015 Proceedings*, pp. 4381-4387.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *27*(1), 77-120.

Anexo 1. Resumen de características de los niveles 0-3 de algebrización

NIVELES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	– Objetos con un primer grado de generalidad (números particulares) – Significado operacional de la igualdad – Variables como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	– Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) – Significado relacional de la igualdad – Variables como incógnitas	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	Natural, numérico, icónico, gestual; se usan símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	– Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) – Significado relacional de la igualdad – Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante	– Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia. – Ecuaciones de la forma, $Ax \pm B = C$ – En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los objetos intensivos reconocidos, aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.
3	– Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. (Objetos intensivos con un segundo grado de generalidad.)	– Operaciones con objetos de un segundo grado de generalidad – Ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ – Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referir a información contextual.

Anexo 2. Resumen de características de los niveles 4 -6 de algebrización

NIVELES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
4	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual
6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con cuarto grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

Seminario II

Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática

Coordinadora

Núria Planas Raig. Universitat Autònoma de Barcelona

Introducción al seminario de investigación I: Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática

Ponentes

Ángel Gutiérrez Rodríguez. Universitat de València

Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática

Núria Planas Raig. Universitat Autònoma de Barcelona

Aprendizaje matemático multilingüe: qué se sabe y desde qué teorías

DIMENSIONES DE LA DIVERSIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Dimensions of diversity in mathematics education

Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Han pasado ocho años desde el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática en Lleida, ocasión en la cual se celebró un Seminario de título ‘Educación matemática y diversidad’. Su coordinador, Enrique de la Torre, escribía en la Introducción que “se pretendía dar un paso adelante” (2010, p. 118). Con este nuevo Seminario, se pretende precisamente dar otro paso adelante en la discusión sobre la investigación, en el ámbito de nuestra comunidad científica, acerca de una variedad de aspectos de la diversidad en educación matemátic aconcretados mediante dos acercamientos.

Estamos en un foro de investigación de modo que la noción de diversidad debe dirimirse en el contexto de la discusión científica. No obstante, como investigadores no trabajamos ajenos a los otros contextos que intervienen en la configuración de los espacios que investigamos. En estos otros contextos, la noción de diversidad se relaciona con familias de términos y acepciones de distinta naturaleza y profundidad. Por ejemplo, a nivel legislativo, la vigente Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), establece en su preámbulo que “Todos los estudiantes poseen talento, pero la naturaleza de este talento difiere entre ellos”, para luego afirmar que “La verdadera fortaleza está en la mezcla de competencias y conocimientos diversos”. El despliegue de la Ley a nivel curricular lleva hasta el contexto de las directrices políticas de organización de las enseñanzas en los centros escolares; aquí, encontramos planes de atención a la diversidad que asocian el descubrimiento de la diversidad a la identificación de inteligencias múltiples (ver, por ejemplo, Departament d’Ensenyament, 2017). En la lengua coloquial, se tiende a recurrir al término diversidad en educación para señalar que en una escuela hay alumnos con historias recientes de inmigración, o bien para indicar que hay alumnos con necesidades educativas especiales designadas por la administración. Estas son algunas de las acepciones que circulan en los escenarios educativos donde planteamos nuestras investigaciones, influyentes en las acepciones particulares que producimos a lo largo de la labor científica.

Este Seminario es una oportunidad de comunicar la diversidad de nociones de diversidad que producimos y manejamos en la investigación en educación matemática. Los que participamos en el Seminario disponemos de evidencias empíricas que nos han llevado a formular tesis específicas sobre relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y una dimensión de la diversidad. En la primera ponencia, Ángel Gutiérrez y Adela Jaime, de la Universitat de València, explican parte de su trayectoria de investigación con alumnos denominados de ‘altas capacidades matemáticas’. Su estudio se refiere, por tanto, a la diversidad de capacidades. En la segunda ponencia, yo misma recorro parte de mi trayectoria de investigación en la Universitat Autònoma de Barcelona, con alumnos cuyas lenguas habituales son distintas a la lengua de la enseñanza en clase de matemáticas. Este es, por tanto, un estudio que se refiere a la diversidad de lenguas. Estos dos acercamientos difieren teóricamente en muchos aspectos y plantean retos de distinta índole; sin embargo, comparten la propuesta de entender manifestaciones de una dimensión específica de la diversidad en el aprendizaje matemático.

En todos los textos que siguen, la diversidad representa una medida cualitativa de variación: unas veces se piensa como variación entre individuos, otras veces se piensa como variación dentro de un grupo y finalmente como variación simultánea de individuos y grupos. Es importante notar que la diversidad, como noción ligada a la de variación, no implica elección: no se elige el talento específico

Planas, N. (2017). Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 69-70). Zaragoza: SEIEM.

que se tiene, ni se eligen las lenguas específicas del grupo clase en el que se enseña y aprende. Sin embargo, sí se eligen y elaboran las respuestas educativas y científicas ante las distintas expresiones e identificaciones de la diversidad. Esta reflexión es esencial para entender que la conjunción de, por ejemplo, diversidad y capacidades es de naturaleza distinta a la conjunción de diversidad y rendimientos. La diversidad de capacidades se acostumbra a vincular con la diversidad de rendimientos en entornos de enseñanza y aprendizaje donde la percepción del aprendiz es predominantemente estática, individualizada y homogénea respecto a unos objetivos únicos de aprendizaje. La conjunción de diversidad y lenguas es otro caso que se acostumbra a vincular con la diversidad de oportunidades de aprendizaje entre aulas y menos con la diversidad de recursos disponibles en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Este Seminario y el de 2010 suponen un paso adelante porque, en su conjunto, contribuyen a la construcción de una noción de diversidad que sea suficientemente multidimensional y compleja: multidimensional por la referencia necesaria a cognición, afecto, creencias, comportamiento, bagajes, capital, contextos…, y compleja por la interacción necesaria entre dimensiones. La noción triple producida en el Seminario de Lleida y la noción doble producida aquí plantean aspectos comunes y complementarios de fundamentación que se coordinan en una noción de diversidad irreducible a una dimensión de estudio y a un solo ángulo teórico dentro de una dimensión. De ahí el título del presente Seminario, 'Dimensiones de la diversidad en educación matemática'. Resulta difícil de imaginar una aproximación al estudio de la diversidad que no se cimiente en contribuciones al estudio de una dimensión particular. Pero resulta igualmente difícil de imaginar una aproximación a la noción misma de diversidad, situada en el área de educación matemática, que no tenga en cuenta el efecto sumativo de los estudios sobre distintas dimensiones de la diversidad. La propia complejidad de la noción de diversidad reside en que no puede ser entendida de manera directa sino a través de la comprensión de sus distintas dimensiones y de las relaciones entre ellas.

Conviene seguir promoviendo seminarios y actividades de discusión de estudios sobre diversidad en educación matemática a fin de avanzar en la construcción de una noción de diversidad teóricamente fuerte, multidimensional y compleja, que permita identificar: 1) cómo distintas dimensiones de la diversidad se relacionan y 2) cómo esto se produce dentro y entre teorías. Esta noción de diversidad es más teórica que empírica. Como veremos a continuación, la investigación sobre diversidad con datos de la práctica educativa en aulas de matemáticas requiere un nivel de precisión y de posicionamiento teórico que obliga a seleccionar un aspecto o dimensión de la diversidad. Esto no implica, sin embargo, que las explicaciones que se elaboran deban ni puedan ceñirse únicamente a la dimensión analizada. El famoso lema "E pluribus unum", recontextualizado por Silver y Kilpatrick (1994) para referirse a los retos de la diversidad de la investigación en educación matemática, se aplica bien a la comprensión misma de la noción de diversidad. Otra cuestión nada trivial es hasta qué punto podemos transitar en el estudio de dimensiones de la diversidad, especialmente cuando la investigación de varias dimensiones es tan escasa.

Referencias

De la Torre, E. (Ed.) (2010). Educación matemática y diversidad. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Á. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 117-120). Lleida: SEIEM.

Departament d'Ensenyament (2017). *Currículum i orientacions. Atenció a la diversitat*. Barcelona: Generalitat de Catalunya [http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/diversitat].

Silver, E. A. y Kilpatrick, J. (1994). E pluribus unum: Challenges of diversity in the future of mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 734-754.

INVESTIGACIÓN SOBRE ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA[1]

Research on mathematically gifted students

Jaime, A. y Gutiérrez, Á.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Resumen

En la actualidad va creciendo el consenso sobre la necesidad de atender de forma especializada y diferenciada las necesidades educativas especiales de los estudiantes con alta capacidad matemática. Paralelamente, se percibe un incremento en la cantidad de investigaciones centradas en este colectivo. En este texto, presentamos una panorámica de los resultados de investigaciones recientes, españolas e internacionales, sobre estudiantes con alta capacidad matemática. Después ofrecemos una síntesis de las investigaciones que estamos desarrollando en la Universitat de València basadas en diversos contenidos matemáticos pero con los objetivos comunes de entender mejor los procesos cognitivos de los estudiantes con alta capacidad matemática de Primaria y ESO y de proporcionar a los profesores materiales que les ayuden a atender adecuadamente a estos estudiantes en sus clases ordinarias.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, educación primaria, educación secundaria obligatoria (ESO), procesos cognitivos, atención a la diversidad.*

Abstract

There is growing consensus on the need to consider in a specialized and differentiated way the special educational needs of mathematically gifted students. At the same time, there is an increase in the number of research focused on those students. In this text, we present an overview of the results of recent research, both Spanish and international, on mathematically gifted students. Next, we offer a synthesis of the research we are developing at the University of Valencia based on various mathematical contents but with the common objectives of better understanding the cognitive processes of students with high mathematical ability in Primary and Lower Secondary schools and to provide teachers with materials that may help them to adequately teach to these students in their regular classes.

Keywords: *mathematical giftedness, primary school, lower secondary school, cognitive processes, attention to diversity.*

INTRODUCCIÓN

Son numerosos los focos de interés de la investigación en didáctica de las matemáticas (o educación matemática) actual. En ocasiones, estos focos de interés se simplifican y esquematizan en un t*riángulo educativo* en cuyos vértices están las matemáticas, los profesores y los estudiantes. Este triángulo tal vez fuera válido en la primera época, cuando se prestaba atención principalmente a las ideas matemáticas, a cómo llevarlas a los currículos escolares y a cómo enseñarlas para lograr que los estudiantes las aprendieran, pero dejó de ser representativo unas décadas después, cuando se produjo un movimiento de los focos de atención hacia la investigación de aspectos cognitivos de los estudiantes, que explicaran cómo se procesan, entienden y asimilan nuevas ideas matemáticas (Bass, 2008), y de aspectos profesionales de los profesores, que ayudaran a entender su problemática y mejorar su formación y su práctica. En la actualidad, sin olvidar el análisis de los contenidos matemáticos, los componentes cognitivos de los estudiantes ni los aspectos profesionales de los profesores, se ha ampliado enormemente el abanico de puntos de vista desde los que se analizan e investigan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

En este contexto, y desde cualquiera de los numerosos puntos de vista adoptables, lo más frecuente es que las investigaciones tengan como objetivo más o menos directo analizar las dificultades de aprendizaje. En unas ocasiones se investigan directamente algunas dificultades específicas, mientras que en otras se investigan factores que pueden condicionarlas o modificarlas, positiva o negativamente. Sin embargo, este interés por ayudar a comprender y minimizar las dificultades de aprendizaje de las matemáticas que sufre una mayoría de estudiantes hace que quede oculto e ignorado otro problema didáctico importante, como es el de comprender y abordar la problemática en torno a los estudiantes con alta capacidad matemática, es decir aquéllos con una capacidad matemática claramente superior a la media. Estos estudiantes no tienen las dificultades de aprendizaje que sufren sus compañeros de aula, al contrario, son capaces de comprender deprisa y con profundidad los nuevos contenidos matemáticos. Sin embargo, tienen otro tipo de necesidades especiales que también hay que investigar y tratar de solucionar desde la didáctica de las matemáticas.

Lamentablemente, no todos los profesionales de la enseñanza asumen que los estudiantes con alta capacidad y superdotados tienen necesidades educativas especiales que deben ser atendidas. La SEIEM ha demostrado que sí asume esta postura. En 2010 se organizó un seminario sobre educación matemática y diversidad en cuya presentación el coordinador identificó como necesidades educativas especiales "una gran diversidad de campos de investigación, pues a la Educación Matemática no solamente le interesan las situaciones que se pueden plantear con estudiantes con parálisis cerebral, autismo, sordera, ceguera, etc., sino también las que se dan cuando en el aula tenemos estudiantes con altas capacidades matemáticas." (De la Torre, 2010). Este año, la SEIEM ha organizado un nuevo seminario sobre diversidad en el que se ha dedicado una de las intervenciones a los estudiantes con alta capacidad matemática.

En el ICME10, tuvo lugar un panel plenario titulado "Mathematics education for whom and why? The balance between mathematics education for all and for high level mathematics performance" (Niss, 2010). En España, como en muchos otros países avanzados, la formación matemática se concibe como una necesidad social y un derecho de todos los ciudadanos, al menos durante el periodo de enseñanza obligatoria. Pero, por otra parte, en aquellos países en los que las autoridades educativas son conscientes de la necesidad de disponer de profesionales con una formación matemática elevada, se toman medidas para identificar a los estudiantes que muestran una alta capacidad matemática y para proporcionarles una formación específica que les permita desarrollar su potencial matemático (Diezmann y Watters, 2002; NCTM, 2003). Nuestra postura personal al respecto, como didactas y como investigadores, es que ninguna de las dos opciones (matemáticas para todos y matemáticas para los de más capacidad) debe primar sobre la otra, sino que ambas son igualmente importantes y el sistema educativo tiene obligación de prestar la misma atención a ambas. En otras palabras, el sistema educativo debe ocuparse de que todos los estudiantes reciban una buena formación matemática, lo cual conlleva la necesidad de proporcionar formación diferenciada a los estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, para que, en particular, los mejor dotados para las matemáticas puedan llegar tan lejos como su capacidad les permita.

Esta afirmación es una interesante declaración de principios. De hecho, es posible encontrar afirmaciones en esta dirección en las últimas leyes educativas españolas. En la LGE (aprobada en 1970) se dice que "se prestará una educación especial a los escolares superdotados para el debido desarrollo de sus aptitudes". La LOGSE (aprobada en 1990) supuso un retroceso en este aspecto, pues sólo proponía atención diferenciada a los estudiantes con dificultades. La LOCE (aprobada en 2002) identifica diversos tipos de "alumnos con necesidades educativas especiales", entre los que están los "alumnos superdotados intelectualmente". Por último, la LOE (aprobada en 2006) y su modificación de 2013, la LOMCE, también diferencian varios tipos de "dificultades específicas de aprendizaje" entre los que se encuentran los estudiantes con "altas capacidades intelectuales".

La implementación práctica por las autoridades educativas de estas directrices de las leyes de educación más recientes, es decir desde la LOCE, ha consistido en pedir a los centros de enseñanza que definan y desarrollen adaptaciones curriculares para los estudiantes superdotados. Estas adaptaciones curriculares suelen tener como punto crítico, debido a la dificultad y complejidad que conlleva, su implementación en la asignatura de matemáticas, ya que una mayoría de estudiantes identificados como superdotados tienen una alta capacidad matemática. En los últimos años está habiendo un incremento en el reconocimiento por autoridades y profesores de la inaplazable necesidad de poner en práctica estrategias de aula para ayudar a estos estudiantes.

Lo indicado en los párrafos anteriores es el contexto que explica y justifica la conveniencia de que la didáctica de las matemáticas se plantee y aborde un importante problema de investigación, consistente en describir y analizar diferentes factores que influyen de manera significativa en la problemática de la formación de los estudiantes con alta capacidad matemática, así como en proponer soluciones prácticas y realistas. La investigación centrada en los estudiantes con alta capacidad matemática no es nueva en España, si bien, hasta hace pocos años, estaba casi toda en el terreno de la psicología educativa, formando parte de un contexto más amplio centrado en la superdotación. Sin embargo, en los últimos años están surgiendo en diversas universidades españolas grupos de didactas de las matemáticas interesados en investigar este tema desde diferentes aproximaciones, si bien la producción de estos grupos es todavía escasa, como lo muestra que sólo 11 artículos de las actas de los Simposios de la SEIEM versan sobre la alta capacidad matemática, siendo el más antiguo de 2008, con 4 de ellos publicados en 2016 y 7 presentados en los años 2013-2016 por miembros del mismo equipo de investigación. Esta situación no es exclusiva de España; por ejemplo, el primer congreso CERME en el que hubo un grupo de trabajo dedicado a la alta capacidad matemática fue el de 2011 y Diezmann y Watters (2002) afirman, respecto de Australia, que es bastante limitada la cantidad de publicaciones de investigación sobre este tipo de estudiantes.

Hay diversos términos que se utilizan habitualmente en el contexto que nos ocupa en este documento. Los más habituales son superdotación, alta(s) capacidad(es) y talento. Existen diversas definiciones de estos términos en la literatura que pueden indicar diferencias entre ellos. En este texto, asumimos el significado que se da a superdotación en el sistema educativo español, que incluye como requisito más característico, la obtención de al menos 130 puntos de cociente intelectual. Usaremos de manera habitual el término *alta capacidad matemática* (o, simplemente, alta capacidad), para referirnos a los estudiantes que muestran una calidad matemática claramente superior a los estudiantes medios de su misma edad o curso, aunque no lleguen a ser considerados como superdotados. En cuanto al término talento matemático, hemos optado por no utilizarlo para evitar confusión en los lectores.

En este texto hacemos, primero, un repaso de la investigación reciente, tanto española como internacional, relativa a los estudiantes con alta capacidad matemática. En particular, mencionamos las publicaciones en las actas de simposios de la SEIEM, aunque algunas de ellas formen parte de otras publicaciones más extensas, como tesis de máster o doctorales. Después, describimos la línea de investigación sobre alta capacidad que estamos desarrollando en la Universitat de València desde hace aproximadamente una década[2], cuyo objetivo central último es elaborar materiales de enseñanza que puedan ser llevados a las aulas de Primaria y ESO, pero que tiene otros objetivos de investigación más específicos que nos ayudan a entender las características cognitivas de estos estudiantes, sus estrategias de resolución de problemas y sus procesos de aprendizaje. Por último, presentamos algunas conclusiones y propuestas de acción.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Dedicamos esta sección a presentar investigaciones españolas e internacionales relevantes sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En lo referente a las publicaciones internacionales, el objetivo no es hacer una revisión extensa, pues ésta superaría el espacio disponible y tampoco se ajustaría a los objetivos del Seminario, sino mostrar ejemplos de publicaciones pertinentes. Hemos dividido la revisión en varios apartados centrados en diferentes aspectos destacados de la investigación didáctica sobre la alta capacidad matemática. Son diversas las opciones de temáticas para organizar esta revisión bibliográfica, pero hemos escogido aquéllas en las que se están realizando investigaciones en España: Resolución de problemas, caracterización de la alta capacidad matemática e identificación de estudiantes y análisis de los procesos de razonamiento y aprendizaje de estudiantes con alta capacidad.

Investigación sobre resolución de problemas

Empezamos la revisión bibliográfica por este tema porque, dentro de la escasez de investigación didáctica, la mayoría de publicaciones, nacionales e internacionales, están relacionadas con la resolución de problemas (Castro, 2008). Un repaso de las presentaciones realizadas en los grupos de trabajo dedicados a la alta capacidad en los congresos ICME, CERME y MCG muestra claramente este hecho.

Esta tendencia a basar las investigaciones en la resolución de problemas se da también en las españolas, basadas en resolución de problemas de diferentes áreas de las matemáticas escolares. Así Ramírez, Flores y Castro (2010), Ramírez (2012), Gutiérrez, Jaime y Alba (2014), Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos y Jaime (2015), Escrivà (2016), Escrivà, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime (2016) y Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez (2016) plantean problemas en los que el uso de la visualización es un elemento fundamental de la resolución. Varios de esos estudios están orientados hacia la geometría espacial, incluyendo en algunos casos el uso de software de geometría 3d, mientras que los otros se basan en contextos planos. Los resultados de dichos estudios son coherentes con resultados anteriores, en particular con los tipos de razonamiento matemático propuestos por Krutetskii (1976), es decir el analítico, el geométrico y el armónico, cuya diferencia se basa en los estilos de trabajo empleados al abordar la resolución de los problemas.

La posible relación entre alta capacidad matemática y estilo de razonamiento es una cuestión que todavía no ha recibido una respuesta concluyente. Presmeg (1986) señala que la mayoría de los estudiantes con alta capacidad de sus investigaciones no eran visualizadores y que ello es debido a una diversidad de factores que ayudan a que estos estudiantes prefieran no usar la visualización, entre los que destacan el estilo de enseñanza formal habitual en las aulas (al menos en la época de este estudio) y la propia naturaleza de las matemáticas superiores. Sin embargo, Van Garderen (2006) obtiene resultados aparentemente contradictorios con los anteriores, ya que observa que los estudiantes con alta capacidad usan más imágenes mentales que sus compañeros con capacidad matemática media.

Benavides (2008) y Castro, Benavides y Segovia (2006, 2008) presentan resultado de la administración de un conjunto de problemas de estructura multiplicativa y nos ofrecen una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes con alta capacidad de su muestra. Estos resultados demuestran que, en contra de lo que opinan muchos profesores, estos estudiantes no aprenden solos, sino que, igual que sus compañeros, necesitan que sus profesores les ayuden a entender y aprender los nuevos contenidos y a corregir los errores que cometen.

Por otra parte, Arbona (2016), Arbona, Jaime, Gutiérrez y Beltrán-Meneu (2016), Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015), Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez (2016) y Benedicto, Hoyos, Aristizábal, Gutiérrez y Jaime (2016) se centran en el contexto de la pre-álgebra para analizar los procesos de resolución de problemas de generalización de sucesiones numéricas, en contextos de patrones geométricos o similares, por estudiantes con alta capacidad de los últimos cursos de Primaria. Los resultados de estos experimentos muestran que los estudiantes con alta capacidad de dichos cursos están en condiciones de empezar a aprender los significados de los conceptos básicos de álgebra, empezar a usar el sistema de símbolos algebraico, expresar en términos algebraicos relaciones funcionales generalizadas y plantear y resolver ecuaciones lineales.

Otros investigadores que han analizado el aprendizaje de pre-álgebra por estudiantes con alta capacidad son Amit y Neria (2008), quienes informan de que, para resolver problemas de patrones geométricos, los estudiantes con alta capacidad realizan análisis pictórico, numérico y verbal de los enunciados y utilizan principalmente las estrategias recursiva y funcional para resolverlos, mostrando una flexibilidad mental que les ayuda a cambiar con facilidad de una forma de análisis o estrategia a otra según les interesara. Este resultado concuerda con los obtenidos en las publicaciones mencionadas en el párrafo anterior.

Una tipología especial de resolución de problemas es la que tiene que ver con las competiciones matemáticas. En las competiciones matemáticas normalmente se valora cómo de completo, correcto, original, etc. es el proceso de resolución de los problemas. Sin embargo, las Pruebas Cangur presentan unas características específicas debido a que plantean problemas de elección múltiple en tiempo limitado y a que no se valora el proceso de resolución, sino sólo si el resultado es o no correcto. Esto ha dado pie al interés de Guinjoan, Gutiérrez y Fortuny (2015) por analizar los procesos de razonamiento, la toma de decisiones y el grado de certeza y confianza en sus respuestas de los estudiantes que obtienen mejores resultados en estas Pruebas. En este estudio se observa que disponer de las opciones de respuesta influye poco en las estrategias de resolución seguidas, ya que los estudiantes no utilizan con más frecuencia la comprobación de casos, que hay una relación positiva entre la certeza de los estudiantes en que sus respuestas son correctas y la corrección real de éstas y que los estudiantes utilizan con frecuencia la intuición ya que no tienen tiempo para resolver completamente los problemas.

Algunas investigaciones se han orientado a analizar, desde varios puntos de vista, los problemas de matemáticas para determinar su adecuación a los estudiantes con alta capacidad. Benedicto (2013) y Karp (2013) analizan problemas propuestos en libros de texto. Pitta-Pantazi, Christou, Kattou, Sophocleous y Pittalis (2015) proponen diseñar y plantear problemas que incluyan diversas destrezas matemáticas, como el uso de tecnología, la expresión verbal, iniciativa, entre otras. Ivanov, Ivanova y Stolbov (2013) proponen un modelo que tiene en cuenta la actividad realizada por los estudiantes al resolver un problema y los esquemas de razonamiento aplicados.

Los análisis de problemas anteriores son análisis teóricos de enunciados, que sirven como una primera aproximación a identificar su adecuación a los estudiantes, pero, dada la diversidad de estilos y capacidades que hay entre los estudiantes con alta capacidad, se hace necesario experimentar con estudiantes. Así, Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) comparan el análisis teórico de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos con el análisis de la demanda cognitiva mostrada por estudiantes con alta capacidad. Sus resultados muestran una sorprendente diversidad de comportamiento de los estudiantes.

Es frecuente que los investigadores propongan a los estudiantes con alta capacidad, junto a la resolución de problemas, el planteamiento de problemas (problem posing). Este tipo de actividad conjuga la capacidad matemática superior con la creatividad, pues permite a los estudiantes mostrar su habilidad para plantear problemas originales, variados y con diversos grados de dificultad (Silver, 1997). Voica y Singer (2012) analizan las respuestas de un grupo de estudiantes con alta capacidad de 4º a 6º de Primaria a los que se pidió que modificaran el enunciado de un problema. Los estudiantes que identificaron y entendieron los contenidos matemáticos puestos en juego en el problema fueron capaces de producir variantes y generalizaciones del problema, mientras que los otros estudiantes se limitaron a plantear variaciones superficiales. Espinoza, Lupiañez y Segovia (2016) presentan a un grupo de estudiantes con alta capacidad matemática dos situaciones realistas y les piden plantear un enunciado de un problema aritmético “que te parezca difícil de resolver”. Los estudiantes produjeron enunciados complejos, con diversos tipos de números y que requieren varias operaciones. Por lo tanto, ambas investigaciones apoyan la idea de que la habilidad para plantear enunciados de problemas variados y complejos es una característica de los estudiantes con alta capacidad matemática.

Un estudio precursor sobre planteamiento de problemas es el de Ellerton (1986), que muestra que los estudiantes de mayor capacidad plantean problemas más complejos, es decir con más operaciones, utilizando datos más complejos y necesitando operaciones más difíciles, que sus compañeros con capacidad media. Además, los estudiantes de capacidad media tenían menos éxito resolviendo los problemas que ellos mismo han planteado que sus compañeros con alta capacidad. Otros estudios más recientes (Sophocleous y Pitta-Pantazi, 2017) confirman este tipo de resultados y, además, relacionan la alta capacidad matemática con la habilidad en el planteamiento de problemas y con la capacidad de realizar pensamiento crítico y razonamiento de alto nivel (higher order thinking).

Investigación sobre identificación y caracterización de estudiantes con alta capacidad matemática

En esta sección nos centraremos en los esfuerzos hechos desde la didáctica de las matemáticas para caracterizar la alta capacidad matemática y para identificar a los estudiantes con esta característica intelectual. No vamos a entrar en otros procedimientos de detección, comunes en el ámbito escolar y basados generalmente en tests psicológicos, algunos de los cuales han sido descritos en Ramírez (2012), Pitta-Pantazi (2017) y en literatura psicológica especializada, ya que diversos estudios (por ejemplo, Niederer y Irwin, 2001 y Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008) muestran que estos tests son menos fiables que una batería de problemas de matemáticas elegidos cuidadosamente.

En lo referente a la caracterización de la alta capacidad, hay diversos estudios realizados a lo largo de los años que ofrecen información empírica avalando determinados rasgos de comportamiento. Un elemento común a estos estudios es que se basan en observar a muestras de estudiantes previamente identificados por otros procedimientos como con alta capacidad resolviendo problemas. La primera lista de rasgos con alta capacidad que se menciona habitualmente en la literatura es del conocido estudio de Krutetskii (1976), que incluye rapidez y flexibilidad de razonamiento, memoria matemática, y habilidades de generalización, de manejo de conceptos abstractos, de identificación y uso de estructuras matemáticas. Otros estudios en esta línea, recogidos en Jaime y Gutiérrez (2014) y Pitta-Pantazi (2017), apuntan a características más específicas y relacionadas con áreas matemáticas, como las capacidades de visualización y de realización de razonamientos cualitativo, cuantitativo y causal. Por otra parte, algunos estudios coinciden en señalar que es necesario tener en cuenta el razonamiento visual para realizar una identificación de los estudiantes con alta capacidad (Webb, Lubinski y Benbow, 2007). Rojas, Jiménez y Mora (2009) presentan un estudio en el que, basándose en la resolución de problemas que requieren usar visualización espacial, identifican diversas características en los estudiantes con alta capacidad observados.

Una metodología de investigación frecuente en estudios de nuestra área que tratan de identificar características de estudiantes con alta capacidad matemática es la de comparar formas de actuación de éstos con las de estudiantes medios, en particular en resolución de problemas. Por ejemplo, Heinze (2005) observa que los estudiantes con alta capacidad superan a sus compañeros en rapidez de resolución, sistematización del trabajo y calidad de sus explicaciones verbales. En el contexto de las investigaciones realizadas en España, Benavides (2008) compara la resolución de problemas multiplicativos y Ramírez (2012) y Escrivà (2016) la de tareas de visualización. Reyes-Santander y Karg (2009) plantean dos problemas a estudiantes con alta capacidad de Primaria para ver qué características diferenciadoras permiten identificar, con el objetivo de que profesores y futuros profesores aprendan a identificar a estudiantes con alta capacidad en sus clases. Díaz y otros (2008) comparan las respuestas de un grupo de estudiantes, seleccionados para participar en Estalmat-Galicia, a los problemas de selección de Estalmat y a un test psicológico estandarizado. Sus resultados indican que, aunque hay una correlación bastante buena entre las respuestas a los problemas y al test, son más fiables los problemas para identificar a estudiantes con alta capacidad, pues el test puede pasar por alto a algunos estudiantes. Otro estudio con cuestiones de investigación relacionadas es el de Nolte (2012).

El estudio presentado en Benavides (2008) y Castro, Benavides y Segovia (2006, 2008) tiene como objetivo central elaborar y administrar un conjunto de problemas de estructura multiplicativa con el objetivo de ver si permiten identificar a estudiantes de Primaria con alta capacidad. Este estudio concluye que los problemas elegidos permiten diferenciar estudiantes con alta capacidad de estudiantes de capacidad media.

En Gutiérrez y Jaime (2013) ofrecemos ejemplos de dos estilos de resolución de problemas en los que los estudiantes ponen en juego algunas formas de trabajo características, como identificar un elemento clave del problema, flexibilidad para modificar el problema planteado o para cambiar de estrategia de resolución y capacidad para identificar un proceso inductivo y generalizarlo.

Una característica típica de la resolución de problemas por estudiantes con alta capacidad es la originalidad de sus procedimientos, pues con frecuencia siguen formas de resolución atípicas, en las que combinan los conocimientos matemáticos de manera sorprendente. Estos estudiantes suelen mostrar mucha intuición al resolver problemas, pues son capaces de llegar a la solución de un problema incluso aunque no dispongan de los conocimientos matemáticos necesarios para escribir una justificación detallada de la misma. También es reconocida como una característica típica de los estudiantes con alta capacidad matemática la rapidez para comprender nuevos conceptos, propiedades o procedimientos.

Con frecuencia, estas características aparecen combinadas (Jaime y Gutiérrez, 2014), como en el caso de un estudiante con alta capacidad (11 años, cursando 6º de Primaria) al que planteamos el problema de dibujar en una hoja de papel un polígono regular de 20 lados. Nada más terminar de oír el enunciado, el estudiante respondió:

Estudiante: Hacemos 360÷20, que son 18°, y con ese ángulo unimos muchos triángulos juntos, 20.

El estudiante se refería a los triángulos formados al unir el centro del polígono con los vértices, y la investigadora suponía que el ángulo de 18º que había calculado era el ángulo central. La resolución típica que cabe esperar es dibujar los 20 triángulos consecutivos midiendo ángulos de 18º con vértice en el centro del polígono. La investigadora quiso confirmarlo:

Investigadora: ¿Y qué hacemos con el ángulo de 18°?

Estudiante: [dibuja dos triángulos consecutivos desde el centro y marca el ángulo exterior, Figura 1a] Éste mide 18°.

Investigadora: ¿Por qué?

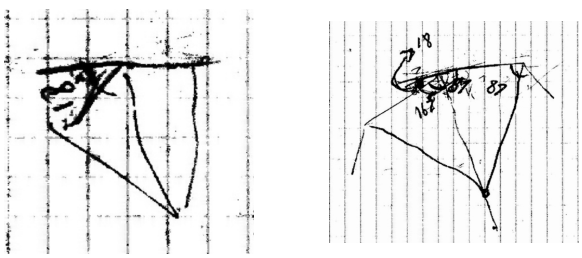
Estudiante: Intuición. Yo lo veo, pero no sé por qué es así.

Investigadora: ¿Y cómo harías entonces el polígono?

Estudiante: [marca el ángulo formado por los lados del polígono que salen de un vértice, Figura 1b] Esto mide 162 porque es 180-18.

Investigadora: ¿Y qué haces con ese ángulo?

Estudiante: Dibujar los triángulos. 162 ÷ 2 es el ángulo [de un triángulo]. Lo dibujamos, y al lado otro, y al lado otro, … Así hasta 20.



—a— —b—

Figura 1. Respuesta del estudiante

Después de resolver el problema, la investigadora le sugirió al estudiante el procedimiento típico, basado en utilizar el ángulo central de 18°. Al momento de empezar la explicación, el estudiante no necesitó que la investigadora le explicara más, diciéndole que ya sabía qué le iba a explicar y que no hacía falta que siguiera.

Al analizar este diálogo, se perciben diversos rasgos con alta capacidad matemática: la originalidad de la solución, evidente al utilizar el ángulo exterior de 18º en vez del ángulo central. La intuición del estudiante, que fue capaz de visualizar la solución y dibujarla de manera rigurosa aunque no había estudiado algunos de los conceptos involucrados, como el ángulo central o el ángulo exterior. La rapidez de comprensión, al adelantarse a las explicaciones de la profesora y no necesitar que terminara de explicarle el otro método de resolución.

La diversidad de baterías de problemas producidos y administrados a estudiantes con alta capacidad da pie a plantearse la pregunta de si todas ellas dan resultados similares. La respuesta está lejos de ser unánime. Por una parte, hay estudiantes con alta capacidad matemática que no se muestran igualmente diestros en diferentes áreas de las matemáticas escolares. Escrivà (2016) planteó a una clase ordinaria de 6º de Primaria una serie de problemas de geometría espacial y también parte de los problemas de Benavides (2008), observando que ambos conjuntos de problemas producían resultados discrepantes, ya que los estudiantes que mostraron mejor capacidad de visualización y rasgos con alta capacidad matemática relativos a la visualización no fueron los que mejor resolvieron los problemas multiplicativos. Trabajos anteriores han presentado resultados coherentes con este, como Ryu, Chong y Song (2007), quienes informan de que estudiantes con alta capacidad con gran destreza en álgebra y determinadas áreas de geometría mostraron dificultades en el uso de la visualización para resolver problemas de geometría espacial. Por otra parte, Applebaum (2017) da cuenta de diversas investigaciones en las que los estudiantes que muestran mejor capacidad espacial también tienen mejor capacidad matemática.

Padres y profesores suelen relacionar la alta capacidad con el éxito escolar, es decir con las buenas notas. Sin embargo, esta relación es ficticia. Aparte del hecho, suficientemente conocido y documentado, de que los estudiantes superdotados tienen un alto riesgo de fracaso escolar, por haber perdido el interés por los estudios, y de que numerosos estudiantes superdotados desarrollan estrategias para pasar desapercibidos en sus clases, entre las cuales destaca la de obtener notas mediocres, hay diversas investigaciones que muestran que no siempre hay relación entre alta capacidad matemática y buenas notas en matemáticas. En una investigación realizada en Valencia, trabajamos con un grupo ordinario de clase y obtuvimos que todos los estudiantes que mostraron un uso destacado de las habilidades de visualización espacial obtenían también buenas notas en las asignaturas de matemáticas, pero había también estudiantes con buenas notas que no destacaron en el uso de la visualización (Escrivà, 2016; Escrivà, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016). Brandl (2011) encuentra en sus experimentos estudiantes con alta capacidad que no obtienen buenas notas y estudiantes con buenas notas que no tienen alta capacidad. Evidentemente, las notas obtenidas en los cursos de matemáticas de Primaria y Secundaria están condicionadas por una diversidad de factores, no todos de rendimiento matemático, lo cual hace que estas notas no puedan tomarse como un indicador principal con alta capacidad matemática, sino como un indicador secundario que debe servir para activar otros procedimientos de identificación más fiables.

No podemos cerrar esta sección sin mencionar la relación entre creatividad y alta capacidad matemática, aunque no es nuestro objetivo entrar a describirla. Dicha relación es un caso particular de una relación más amplia entre sobredotación y creatividad. Limitándonos al ámbito de las matemáticas, para una mayoría de autores, alta capacidad y creatividad son dos conjuntos con intersección no vacía pero ninguno incluido en el otro, si bien no hay acuerdo sobre la posible relación de dependencia lógica de una respecto de la otra (Pitta-Pantazi, 2017 y diversos textos en los congresos CERME, ICME y MCG). En otros párrafos de este texto mostramos que la creatividad se considera como una característica de la alta capacidad y es, por tanto, uno de los rasgos que se buscan al tratar de identificar a estudiantes con alta capacidad.

Investigación sobre procesos de razonamiento y de aprendizaje

Dado el relevante papel que tiene la aritmética en Primaria y Secundaria, no es de extrañar que haya diversos trabajos centrados en el aprendizaje de la aritmética y el pensamiento numérico, así como de pre-álgebra. En este contexto, Freiman (2004) y Vale y Pimentel (2011) informan de los resultados de sendos experimentos con estudiantes con alta capacidad de Primaria en los que plantean diversos problemas de aritmética y álgebra seleccionados para que supongan desafíos para los estudiantes. Lee (2004) diseña unos problemas que se resuelven mediante ecuaciones lineales. Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) exploran la utilización de problemas pre-algebraicos con estudiantes de 4º curso de Primaria, observando las diferencias entre formas de resolución de estudiantes con alta capacidad y ordinarios. Phillipson y Callingham (2009) ofrecen una revisión de la literatura relativa a la alta capacidad matemática y la habilidad de cálculo.

Por otra parte, los problemas de geometría siguen siendo un contexto muy utilizado para evaluar las habilidades de razonamiento deductivo de los estudiantes. Por ejemplo, Cho, Han, Jim, Kim y Song (2004) presentan un micromundo geométrico basado en Logo y software de geometría dinámica para estudiantes de Primaria y Secundaria. De Villiers (2016) presenta una unidad de enseñanza sobre generalización basada en un problema geométrico que es modificado para que los estudiantes obtengan y demuestren una versión generalizada.

Siendo la demostración una característica central del trabajo matemático, sorprende la poca atención prestada al aprendizaje de la demostración por estudiantes con alta capacidad. En la búsqueda para preparar este texto, sólo hemos encontrado el trabajo de Lee (2005), que analiza un experimento de enseñanza orientado a mejorar la habilidad de demostración en contextos geométricos de estudiantes de 12 años. Sus resultados muestran que estos estudiantes siguen los procesos habituales de aprendizaje de la demostración, desde métodos empíricos a deductivos.

Otros investigadores se han centrado en el aprendizaje de contenidos extraescolares, típicos de actividades de extensión. Schindler y Joklitschke (2015) crearon un contexto de matematización de situaciones reales mediante teoría de grafos, a fin de observar si estudiantes con alta capacidad de secundaria (12-13 años) eran capaces de resolver este tipo de problemas y de generalizar estrategias de matematización. Sus resultados indican que la habilidad de los estudiantes para resolver los problemas depende en gran medida del contexto de cada problema y de la facilidad con la que identificaron un contexto geométrico o visual para representar los datos del problema. Con unos objetivos parcialmente coincidentes, Aizikovitsh-Udi y Amit (2011) diseñan una unidad de enseñanza basada en el uso de estadística en situaciones de la vida ordinaria para promover en estudiantes de secundaria con alta capacidad (15-16 años) pensamiento crítico y razonamiento de alto nivel. Entre sus resultados, destaca que el razonamiento de alto nivel no surge de forma espontánea, ni siquiera en los estudiantes con alta capacidad, sino que es necesario inducirlo mediante la enseñanza y que esto depende, en gran medida, del contexto y del tipo de actividades.

Los dos estudios anteriores, al igual que otros, muestran que es necesario prestar atención al papel de los profesores y sus formas de organizar las clases, pues sólo profesores creativos y bien formados pueden abordar adecuadamente la formación de sus alumnos con alta capacidad (Karp y Leikin, 2009). Así, Zaslavsky y Linchevski (2007) y Gal, Levenson, Shayshon, Tesler, Eyal, Prusak y Berger (2008) presentan resultados de sendos programas de formación de profesores enfocados a hacerles conscientes de las necesidades de los estudiantes con alta capacidad que tienen en sus clases, a modificar la práctica de los profesores y a establecer conexiones entre la teoría y la práctica. Por su parte, Karsenty y Friedlander (2008) informan de un curso de desarrollo profesional de profesores Secundaria en el que se enfatiza la importancia de promover la alta capacidad matemática en sus clases y se da a los profesores pautas para lograrlo.

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN PROPIAS

La revisión de la literatura española en educación matemática sobre estudiantes con altas capacidades de las páginas anteriores muestra que, durante los últimos años las investigaciones se han desarrollado principalmente en las universidades de Granada (llevadas a cabo por Enrique Castro, Isidoro Segovia, Pablo Flores, Rafael Ramírez, José Luis Lupiáñez y estudiantes de postgrado) y de Valencia. En esta sección presentamos brevemente las principales investigaciones que llevamos a cabo en la Universitat de València. En las páginas anteriores hemos mencionado algunos aspectos de nuestro trabajo, pero ahora vamos a presentarlo de forma más organizada.

Un objetivo último de investigación común a todos los estudios que estamos realizando es producir información que resulte útil a los profesores de Primaria y ESO poder para atender adecuadamente a sus alumnos con alta capacidad. Dicha información consiste, por una parte, en identificar rasgos característicos de la actividad matemática de estos estudiantes y, por otra, en producir conjuntos de *actividades matemáticas ricas* (Hewson, 2011) que los profesores puedan usar en sus clases con todos los estudiantes del grupo de manera que los estudiantes de distintas capacidades matemáticas puedan alcanzar objetivos de aprendizaje o de resolución de problemas diferentes. También estamos empezando a investigar la resolución de problemas en entornos de comunicación virtual, lo cual facilita la comunicación entre estudiantes de alta capacidad, analizando el comportamiento de los estudiantes y la eficacia de dicho entorno de trabajo.

Análisis de la complejidad del razonamiento matemático

Una característica que distingue a los estudiantes con alta capacidad de sus compañeros es la complejidad de los procesos de razonamiento que pueden desarrollar. Existe un consenso cada vez mayor entre los grupos internacionales de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática en que, para mejorar la calidad del aprendizaje de las matemáticas, es necesario que los profesores planteen en sus clases actividades y problemas que sean cognitivamente exigentes para sus alumnos, es decir que les induzcan a utilizar razonamiento de alto nivel (Bishop, 2008; Boston y Smith, 2009; Cai y Howson, 2013). Esto es válido para todos los estudiantes, pero es más necesario para los estudiantes con alta capacidad. Este planteamiento pone de relieve la cuestión de cómo saber si un problema de matemáticas servirá para promover el razonamiento de alto nivel, la cual ha sido investigada desde hace bastantes años (Benedicto, 2013; Pitta-Pantazi y Sophocleous, 2017). Una de las propuestas realizadas para responderla es el modelo teórico de los *niveles de demanda cognitiva* (Smith y Stein, 1998).

La demanda cognitiva de una tarea matemática se define como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2009, p. 1). Smith y Stein (1998) definieron un conjunto de características de cada nivel de demanda cognitiva que permiten identificar la complejidad de razonamiento necesaria para la resolución de actividades o problemas planteados en los libros de texto o por los profesores en clase. Estos autores utilizan los niveles de demanda cognitiva en el contexto de la formación de profesores y futuros profesores, para enseñarles a evaluar las actividades que plantean y a mantener su nivel de demanda cognitiva en clase. Esta forma de utilización del modelo tiene, para nosotros, el inconveniente de que es teórica, pues sólo analiza los enunciados de los problemas y las formas correctas de resolverlos típicas de los estudiantes medios.

En nuestras investigaciones hemos aplicado el modelo de demanda cognitiva para analizar la complejidad del razonamiento de estudiantes reales resolviendo problemas. Esto nos ha obligado a reconceptualizar los niveles de demanda cognitiva y a modificar, completar y mejorar las características definidas en Smith y Stein (1998). Esta actividad de investigación teórica (Benedicto, Gutiérrez y Jaime, 2017) está dando lugar a un fructífero conjunto de resultados empíricos basados en experimentos con estudiantes con alta capacidad de diversas edades resolviendo problemas de varias áreas de las matemáticas como geometría plana (Benedicto, 2013), pre-álgebra (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015; Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez, 2016) y visualización (Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos y Jaime, 2015).

Un resultado importante de esta línea de investigación en relación con los estudiantes con alta capacidad es que estamos encontrando una amplia diversidad de resoluciones de un mismo problema, incluso entre estudiantes con la misma edad o del mismo curso. Además, parte de esas resoluciones se alejan bastante de la evaluación del nivel de demanda cognitiva de los problemas hecha teóricamente, basada sólo en el enunciado (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015).

Estilos de razonamiento en contextos de geometría espacial

Consideramos la visualización en matemáticas como "el tipo de actividades de razonamiento basadas en el uso de elementos visuales o espaciales, mentales o físicos, puestos en juego para resolver problemas o demostrar propiedades" (Gutiérrez, 1996, p. 9). Las capacidades de imaginación y visualización espaciales son dos herramientas muy importantes, no sólo en las matemáticas sino también en muchas otras áreas científicas, sociales y humanísticas, así como en numerosos ámbitos profesionales. Estas habilidades son necesarias en el ámbito escolar para facilitar el aprendizaje de las matemáticas desde la educación infantil, a pesar de lo cual no se dedica tiempo a fomentar su desarrollo y perfeccionamiento.

Desde hace bastantes años, hemos desarrollado una línea de investigación que se centra en analizar los procesos de razonamiento visual y en crear entornos en los que los estudiantes de Primaria y Secundaria puedan desarrollar sus capacidades de imaginación y visualización espacial. En los últimos años hemos redefinido esta línea de trabajo centrándola en analizar las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) puestas en juego por los estudiantes con alta capacidad de Primaria (Escrivà, 2016) y ESO (Gómez, 2013).

En Primaria, Escrivà (2016) realiza un experimento de enseñanza en el contexto de una clase ordinaria de 6º de Primaria basado en un entorno de cubos con las caras decoradas, en el que plantea problemas sobre relación entre cubos y desarrollos, rotaciones de cubos y secciones de cubos. Como parte de la metodología de investigación, es necesario seleccionar características de la alta capacidad matemática relacionadas con la visualización, cosa que hemos hecho a partir de los trabajos de Krutetskii (1976), Ramírez (2012) y Van Garderen (2006). En concreto, en este estudio hemos analizado la presencia en las respuestas de los estudiantes de las habilidades de visualización descritas por Del Grande (1990).

Krutetskii (1976) observó en sus experimentos que la mayoría de los sujetos con alta capacidad no eran visualizadores, por lo que planteó la conclusión de que la visualización no es un rasgo de alta capacidad. No obstante, estudios más recientes como el de Van Garderen (2006) y otros mencionados antes en este texto, coinciden con el nuestro en mostrar que los estudiantes de alta capacidad suelen ser buenos visualizadores, por lo que la visualización sí se debe considerar un rasgo de alta capacidad.

El análisis de las clases muestra algunas consecuencias significativas de la orientación predominantemente aritmética de las clases de matemáticas, pues algunos estudiantes que en la asignatura de matemáticas obtenían notas mediocres, destacaron claramente por su destreza en la resolución de los problemas, mientras que otros estudiantes que sacaban buenas notas tuvieron dificultades importantes para resolverlos. También se observó que los estudiantes de nuestra muestra que manifestaron de forma consistente rasgos de alta capacidad son los que resolvieron mejor los problemas planteados y están entre los que obtenían mejores notas en matemáticas y, al mismo tiempo, los otros estudiantes que obtenían buenas notas, no mostraron rasgos de alta capacidad ni resolvieron bien los problemas. (Escrivà, Beltrán, Gutiérrez y Jaime, 2016).

En ESO, Gómez (2013) administra un conjunto de cuatro problemas de geometría espacial y uno de geometría plana, que admiten varias formas de resolución, con los objetivos de identificar las formas que tienen los estudiantes de organizar la información geométrica, identificar los tipos de imágenes mentales empleadas e identificar diferencias en las formas de razonamiento y los errores cometidos por estudiantes ordinarios y con alta capacidad. Una de las conclusiones de este estudio es que todos los estudiantes con alta capacidad han utilizado habilidades de visualización para resolver al menos cuatro de los cinco problemas.

Los resultados descritos en los párrafos anteriores debemos considerarlos acotados a los cursos de 6º de Primaria y 3º y 4º de ESO. Un resultado de estos experimentos, cuya confirmación y desarrollo en otros cursos está entre los objetivos actuales de esta línea de investigación, es que todos los estudiantes pueden mejorar sus habilidades de visualización si se les plantean actividades adecuadas y que los estudiantes con alta capacidad tienen entre sus características diferenciadoras un mejor dominio del uso de dichas habilidades y más éxito en la resolución de problemas en los que la visualización puede jugar un papel importante.

Aprendizaje de conceptos algebraicos

Diversos estudios españoles (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013) y extranjeros (Radford, 2000; Rivera, 2013) avalan la conveniencia de que los estudiantes de Primaria tomen contacto con el pensamiento algebraico mediante el aprendizaje de conceptos pre-algebraicos y muestran que los problemas de patrones geométricos son un excelente contexto para ello, ya que ayuda a desarrollar la capacidad de generalización y requiere de los estudiantes razonamiento de alto nivel (Amit y Neria, 2008).

En esta línea de investigación, estamos observando las formas de resolver problemas de patrones geométricos por estudiantes de Primaria, tanto con alta capacidad como ordinarios con el fin de identificar y describir sus diversas estrategias y las diferencias características entre unos y otros estudiantes. Estamos trabajando con un marco teórico integrado por varios componentes, que nos permite analizar todo el proceso de resolución de los problemas de patrones geométricos: Los procedimientos (visual y numérico; García-Cruz y Martinón, 1997) de uso de la información gráfica proporcionada por los enunciados, las estrategias de resolución de las preguntas directas (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015) y los niveles de generalización (Radford, 2006).

Arbona (2016) y Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez (2016) presentan y analizan un experimento de enseñanza en el que un niño con alta capacidad, de 9 años y que está empezando 5º de Primaria, progresa a medida que va resolviendo una secuencia de problemas de patrones geométricos, aprendiendo a generalizar relaciones funcionales de sucesiones lineales, afines y cuadráticas y aprendiendo a representar verbal y simbólicamente las generalizaciones lineales. Al mismo tiempo, aprende el significado de elementos algebraicos como el signo igual, las letras (a las que da los significados de número generalizado y de objeto) y las ecuaciones, contextualizadas en las preguntas de inversión de los problemas de patrones geométricos. A continuación, apoyándose en un applet de una balanza, le dio significado a las ecuaciones como estado de equilibrio y a las simplificaciones como operaciones de mantenimiento del equilibrio. Esto ayudó al estudiante a interiorizar el modelo de la balanza y a progresar rápidamente en la resolución de ecuaciones lineales. El estudiante fue capaz de resolver diversos problemas verbales de ecuaciones lineales de contextos diferentes del de los patrones geométricos.

Esta experimentación permite conjeturar que los estudiantes con alta capacidad de los últimos cursos de Primaria están en condiciones de manejar el lenguaje algebraico. Este aprendizaje es muy importante porque les permite acceder a nuevas herramientas matemáticas que les permitirán resolver nuevos tipos de problemas, aumentando así su interés por las matemáticas.

Hemos observado que los estudiantes con alta capacidad suelen utilizar procedimientos recursivos de cálculo para los términos inmediatos y próximos de la sucesión y pasar a procedimientos funcionales para calcular términos lejanos y para verbalizar generalizaciones. Por su parte, los estudiantes ordinarios de los mismos cursos, también suelen utilizar procedimientos recursivos para calcular los términos inmediatos y próximos, pero muchos de ellos se bloquean al no ser capaces de transformar este procedimiento en uno funcional, lo cual les impide calcular los términos lejanos, generalizar y resolver las cuestiones de inversión.

En la actualidad, estamos progresando en esta línea de investigación para diseñar secuencias de enseñanza de pre-álgebra que se puedan implementar en clases ordinarias de Primaria, de manera que todos los estudiantes puedan avanzar, más o menos dependiendo de su capacidad y motivación, y los estudiantes con alta capacidad puedan desarrollar todo su potencial en el contexto de las clases ordinarias de su curso.

Resolución colaborativa de problemas en entornos virtuales

Los estudiantes con alta capacidad matemática se sienten con frecuencia solos en el contexto de sus clases ordinarias, porque ninguno de sus compañeros tiene su capacidad matemática ni su interés por resolver problemas difíciles. Las actividades extraescolares como olimpiadas y talleres cumplen un papel importante desde este punto de vista social, pues ayudan a que estudiantes con capacidades matemáticas, intereses y gustos similares se conozcan y se reúnan en un ambiente de iguales. Las nuevas tecnologías de comunicación abren posibilidades de interacción cuando la reunión física no es posible y, al mismo tiempo, plantean cuestiones sobre la viabilidad y utilidad de diferentes formas posibles de interacción virtual.

Hay investigaciones que muestran que el trabajo cooperativo entre estudiantes superdotados es una estrategia educativa beneficiosa (Davis, Rimm y Siegel, 2014), si bien se necesitan investigaciones específicas que analicen las particularidades de esta metodología cuando se implementa en un entorno virtual para la resolución cooperativa de problemas de matemáticas.

En los últimos años estamos realizando experimentos de diversos tipos, todos los cuales tienen como elemento común que, basándonos en plataformas de video-conferencia, como Skype o Hangout, conectamos de manera síncrona (en tiempo real) a varios estudiantes de alta capacidad y un profesor para resolver problemas. Habitualmente, cada estudiante y el profesor están físicamente en lugares diferentes, por lo que la reunión real no es posible. En este momento, podemos considerar estas investigaciones como estudios exploratorios de recopilación de información (Gutiérrez, 1991), ya que estamos empezando a analizar las condiciones operativas que imponen estos entornos y su influencia en el desarrollo de la actividad, así como las características de las interacciones que se producen en el grupo durante las sesiones. En Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez (2016) presentamos un ejemplo de interacción entre dos estudiantes que tienen que resolver un problema del cuál cada estudiante tiene parte de los datos, de forma que ninguno de ellos puede resolver solo el problema.

Desde un punto de vista metodológico, las conexiones virtuales plantean algunos obstáculos, el principal de los cuales es la dificultad para compartir información a través de las pantallas. En ocasiones, la información que interesa compartir es gráfica (esquemas, figuras geométricas, etc.). En otras ocasiones, la información es verbal-simbólica (una expresión algebraica, los vértices de un polígono, etc.). La comunicación de expresiones algebraicas presenta un reto interesante para los participantes en la actividad, pues deben aprender a manejar verbalmente elementos simbólicos, en especial los paréntesis, cuya omisión produce cambios matemáticamente importantes en las expresiones algebraicas comunicadas. Esto abre una interesante serie de cuestiones de investigación en las que estamos empezando a trabajar.

CONCLUSIONES

En este texto hemos hecho un recorrido por la investigación realizada desde la didáctica de las matemáticas sobre los estudiantes con alta capacidad matemática. Hemos seleccionado las áreas de investigación en las que se ha avanzado más, concretamente las de resolución de problemas, identificación, caracterización y análisis de los procesos de aprendizaje y aprendizaje de estos estudiantes. Hemos presentado algunas publicaciones internacionales relevantes y hemos hecho un recorrido exhaustivo por las investigaciones realizadas en España que conocemos. En la segunda parte del texto, hemos hecho una descripción organizada de las líneas de investigación en las que estamos actualmente involucrados, relativas al análisis de la complejidad del razonamiento de los estudiantes al resolver problemas, al uso de la visualización, al aprendizaje de conceptos y procedimientos pre-algebraicos y la resolución colaborativa de problemas.

La identificación de estudiantes con alta capacidad matemática está en sus comienzos. Dejando aparte el estudio de Krutetskii (1976), que en la actualidad sería muy difícil de llevar a cabo debido a su complejidad y larga duración, los estudios sobre identificación se han centrado en contenidos matemáticos específicos (por ejemplo pensamiento multiplicativo, geometría, visualización o pre-álgebra) y se han basado en unos conjuntos de problemas que son adecuados para unos cursos concretos de Primaria o Secundaria. Estos instrumentos producen resultados parciales, a veces discrepantes, que sólo muestran la capacidad de estudiantes en un área matemática limitada. Es necesario organizar un proyecto de investigación más amplio y ambicioso que dé lugar a herramientas válidas y fiables, que cubran todo el espectro de las matemáticas escolares y, en lo posible, una mayor amplitud de cursos.

Los profesores son un elemento clave en la identificación de los estudiantes con alta capacidad matemática. Sin embargo, se observa una falta de estudios enfocados a los profesores y futuros profesores, en lo referente a sus creencias sobre la alta capacidad y sus formas de identificación de alumnos, a su formación en destrezas de detección y en metodologías de enseñanza adecuadas para organizar sus clases de manera adecuada a las necesidades de estos alumnos.

Asimismo, las nuevas tecnologías proporcionan a los profesores herramientas eficaces para plantear intervenciones educativas y programas complementarios de atención a estudiantes de alta capacidad matemática, porque son una enorme fuente de información y porque pueden resolver la limitación que supone la necesidad de reunirse físicamente, permitiendo a estos estudiantes avanzar más rápido e investigar a su propio ritmo.

Referencias

Aizikovitsh-Udi, E. y Amit, M. (2011). Integrating theories in the promotion of critical thinking in mathematics classrooms. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1034–1043). Rzeszów, Polonia: ERME.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40*, 111-129.

Applebaum, M. (2017). Spatial abilities as predictor to mathematics performance of mathematics motivated students. En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 142-150). Nicosia, Chipre: los autores.

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56731.

Arbona, E., Jaime, A., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2016). Patrones geométricos para iniciar en el álgebra a estudiantes de primaria con talento matemático. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 557). Málaga: SEIEM.

Bass, H. (2008). Discurso en la sesión de apertura del ICME 10. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)* (pp. 28-31). Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde Universitet.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Disponible en http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/1827/1/17349515.pdf.

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/32580.

Benedicto, C., Acosta, C., Gutiérrez, A., Hoyos, E. A. y Jaime, A. (2015). Improvement of gifted students' visualization abilities in a 3d computer environment. En N. Amado y S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 363-370). Faro, Portugal: Universidad del Algarve.

Benedicto, C., Arbona, E., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Analysis of the cognitive demand of a gifted student's strategies to solve geometric patterns problems. Comunicación en el TSG04 (activities for, and research on, mathematically gifted students) *13th International Congress on Mathematical Education (ICME13)*. Hamburgo. Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf /BenyOtros16.pdf.

Benedicto, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). When the theoretical model does not fit our data: a process of adaptation of the cognitive demand model. Pendiente de publicación en *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME10)*, Dublín.
Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/BenyOtros17.pdf.

Benedicto, C., Hoyos, E. A., Aristizábal, J. H., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas. Un ejemplo: Cortando polígonos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 567). Málaga: SEIEM.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Bishop, A. J. (2008). Research, effectiveness, and the practitioners' world. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.). *Critical issues in mathematics education. Major contributions of Alan J. Bishop* (pp. 191-203). Nueva York: Springer.

Boston, M. D. y Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 119-156.

Brandl, M. (2011). High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: A theoretical concept and an empirical survey. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1044-1055). Rzeszów, Polonia: ERME.

Cai, J. y Howson, G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 949-974). Nueva York: Springer.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-34). Badajoz: SEIEM.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca, 11*, 4-22.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión*, 16, 123-140.

Cho, H., Han, H., Jim, M., Kim, H. y Song, M. (2004). Designing a microworld for mathematical creative and gifted students. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*. Copenhague.

Davis, G. A., Rimm, S. B. y Siegle, D. (2014). *Education of the gifted and talented*. Boston: Pearson.

De la Torre, E. (2010). Introducción al Seminario II sobre educación matemática y diversidad. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 117-119). Lleida: SEIEM.

De Villiers, M. (2016). Enrichment for the gifted: generalizing some geometrical theorems y objects. Texto de la comunicación en el TSG04 del *13th International Congress on Mathematical Education (ICME13)*, Hamburgo.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca, 13*(15), 30-39.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA* (pp. 219-226). Auckland: MERGA.

Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271.

Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56732.

Escrivà, M. T., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2016). The posing of arithmetic problems by mathematically talented students. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368-392.

Freiman, V. (2004). Mathematical giftedness in early grades: challenging situation approach. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*. Copenhague.

Fritzlar, T., y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Comunicación en el TSG09 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12)*. Seúl, Corea del Sur.

Gal, H., Levenson, E., Shayshon, B., Tesler, B., Eyal, T., Prusak, N. y Berger, S. (2008). From one end to the other: raising teachers' awareness of mathematically-talented students in mixed-ability classes. Comunicación en el DG09 del *11th International Congress on Mathematical Education (ICME11)*. Monterrey, México.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME21)* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki: PME.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gómez, R. (2013). *Exploración de las características del razonamiento visual en alumnos con talento matemático*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/ 10550/52715.

Guinjoan, M., Gutiérrez, A. y Fortuny, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 29-46.

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento: didáctica de las matemáticas* (pp. 149-194). Madrid. Síntesis.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME20)* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Hewson, S. (2011). *What is a mathematically rich task?* Texto accesible en http://nrich.maths.org/6299.

Ivanov, O., Ivanova, T. y Stolbov, K. (2013). Typologies of mathematical problems: from classroom experience to pedagogical conceptions. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)* (pp. 1175-1184). Ankara, Turquía: ERME.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Karp, A. (2013). Mathematical problems for the gifted: the structure of problem sets. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)* (pp. 1175-1184). Ankara, Turquía: ERME.

Karp, A. y Leikin, R. (2009). Mathematical gift and promise: exploring and developing. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME33)* (vol. 1, pp. 185-186). Tesalónica, Grecia: PME.

Karsenty, R. y Friedlander, A. (2008). Teaching the mathematically gifted: a professional development course. Comunicación en el DG09 del *11th International Congress on Mathematical Education (ICME11).* Monterrey, México.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME29)* (vol. 3, pp. 241-248). Melbourne: PME.

Lee, S.-G. (2004). Activity of a gifted student who saw linear algebraic solution of blackout puzzle. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*, Copenhague.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Reston, VA: NCTM.

Niederer, K. y Irwin, K. C. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME25)* (vol. 3, pp. 431-438). Utrecht, Holanda: PME.

Niss, M. (Ed.) (2010). *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education.* Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde Universitet.

Nolte, M. (2012). “High IQ and high mathematical talent!” Results from nine years talent search in the Prima-Project Hamburg. Comunicación en el TSG03 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME12),* Seúl.

Phillipson, S. N. y Callingham, R. (2009). Understanding mathematical giftedness: integrating self, action repertoires and the environment. En L. V. Shavinina (Ed.), *International handbook on giftedness* (pp. 671-698). Dordrecht, Holanda: Springer.

Pitta-Pantazi, D. (2017). What have we learned about giftedness and creativity? An overview of a five years journey. En R. Leikin y B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness. Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (pp. 201-223). Berna: Springer.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kattou, M., Sophocleous, P. y Pittalis, M. (2015). Assessing mathematically challenging problems. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 1052-1058). Praga: ERME.

Pitta-Pantazi, D. y Sophocleous, P. (2017). Higher order thinking in mathematics: a complex construct En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 72-78). Nicosia, Chipre: los autores.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking. A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: PME-NA.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Trabajo de Tesis. Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/verdetalles/7461/descargar.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447-457). Málaga: SEIEM.

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

Reyes-Santander, P. y Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer.

Rojas, S., Jiménez, W. y Mora, L. C. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. Comunicación en el *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/ 709/1/eluso.pdf.

Ryu, H. A., Chong, Y. O. y Song, S. H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31)* (vol. 4, pp. 137-144). Seúl: PME.

Schindler, M. y Joklitschke, J. (2015). Designing tasks for mathematically talented students. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 1066-1072). Praga: ERME.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75-80.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Sophocleous, P. y Pitta-Pantazi, D. (2017). What is the relationship between critical thinking and problem posing ability? En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 79-85). Nicosia, Chipre: los autores.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.

Vale, I. y Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades, En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CEME7)* (pp. 1154-1164). Rzeszów, Polonia: CERME.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*(6), 496-506.

Voica, C. y Singer, F. M. (2012). Problem modification as an indicator of deep understanding. Comunicación en el TSG03 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME12)*, Seúl.

Webb, R. M., Lubinski, D. y Benbow, C. P. (2007). Spatial ability: a neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology, 99*(2), 397-420.

Zaslavsky, O. y Linchevski, L. (2007). Teacher change in the context of addressing students' special needs in mathematics. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31)* (vol. 1, pp. 166-169). Seúl: PME.

---

[1] Los resultados presentados en este texto son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

[2] El equipo está formado por Eva Arbona, María José Beltrán, Clara Benedicto, María Teresa Escrivá, Ángel Gutiérrez, Adela Jaime (U. de València), Rafael Ramírez (U. de Granada) y Juan Miguel Ribera (U. de la Rioja).

APRENDIZAJE MATEMÁTICO MULTILINGÜE: QUÉ SE SABE Y DESDE QUÉ TEORÍAS[1]

Multilingual mathematics learning: What is known and within which theories

Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este texto, reviso avances de la investigación en educación matemática y lengua a fin de compartir parte del conocimiento generado en este dominio. Esta tarea de revisión ha de servir como recurso para aquellos académicos con interés en construir una cierta comprensión sobre qué se sabe en la actualidad, especialmente en relación con el aprendizaje matemático multilingüe. Bajo el supuesto de que la producción de conocimiento siempre se da en el nivel de la teoría, empiezo con consideraciones sobre las teorías sociales de la enseñanza y del aprendizaje de matemáticas. Estas son las teorías que están contribuyendo principalmente, por una parte, a la expansión del dominio y, por otra, a la refinación de líneas específicas de desarrollo.

Palabras clave: *teorías sociales, análisis crítico del discurso, aprendizaje matemático, lengua, multilingüismo.*

Abstract

In this report, I revise progress from research on mathematics education and language in order to share some knowledge generated in this domain. Such endeavour is expected to serve as a resource to scholars who are interested in gaining understanding of what is known at the current time, particularly about multilingual mathematics learning. Under the standpoint that knowledge generation is always situated at the level of theory, I begin with some remarks about social theories of mathematics teaching and learning. These are the theories that are mostly contributing to the expansion of the domain and, on the other hand, the refinement of lines of development.

Keywords: *social theories, critical discourse analysis, mathematics learning, language, multilingualism.*

¿QUÉ PREGUNTAS Y DESDE QUÉ TEORÍAS?

¿A qué nos referimos cuando hablamos de lengua? ¿A qué nos referimos cuando hablamos de diversidad lingüística? ¿Cuál es la importancia y particularidad de estas nociones en educación matemática? Estas preguntas dan cuenta de la riqueza de debates teóricos abiertos en el dominio de investigación sobre educación matemática y lengua. Unas u otras respuestas se construyen coherentemente dentro de agendas de investigación guiadas por teorías específicas. En este texto, trataré las preguntas anteriores en el marco de las teorías sociales y de las teorías de análisis crítico del discurso. Para empezar, expondré a qué me refiero cuando hablo de teorías sociales.

Durante mucho tiempo, nuestra área se pudo caracterizar mediante dos grandes tradiciones teóricas: una de corte epistemológico acerca de las estructuras organizativas del conocimiento matemático a enseñar y otra de corte psicológico acerca de los procesos mentales de aprendizaje de ese conocimiento. La segunda de estas tradiciones es el punto de partida de las teorías sociales en educación matemática originadas en los años ochenta del siglo pasado. Los trabajos por aquel entonces del grupo alemán liderado por Bauersfeld (1980) proponen equilibrar el estudio de los procesos cognitivos individuales del aprendiz de matemáticas con el estudio de los procesos sociales de interacción del

Planas, N. (2017). Aprendizaje matemático multilingüe: qué se sabe y desde qué teorías. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 91 -105). Zaragoza: SEIEM.

aprendiz con el entorno de enseñanza y aprendizaje: "Enseñar y aprender matemáticas en el aula es una situación de interacción humana en un entorno institucionalizado" [mi traducción] (p. 23). Bauersfeld identifica cuatros dimensiones del aula sobre las cuales ha habido escasa investigación en educación matemática: "la constitución de significado mediante la interacción humana, el impacto de los contextos institucionales, el desarrollo de la personalidad y el proceso de reducir la complejidad del aula" (p. 24). Esta es la acepción de lo social en la que se fundamentarán las sucesivas versiones del constructivismo, del interaccionismo simbólico y de la etnometodología a lo largo de los años ochenta y noventa. La premisa básica de estas teorías sociales es que los procesos relativos a la educación matemática sobrepasan el ámbito de lo individual, que se entiende como ámbito opuesto al social. Son interpretaciones de lo social por oposición a lo individual, donde el aprendiz de matemáticas se conceptualiza como sujeto cuya capacidad cognoscente se facilita en la interacción (Planas, 2010).

Entre tanto, a finales del siglo pasado desde la sociología y la antropología se habían elaborado explicaciones sobre distintos fenómenos complejos de la actividad social donde intervenían aspectos que no eran reducibles a epistemologías del conocimiento ni a formas de cognición de la mente humana. Aquí, surge una segunda acepción de lo social en la que se fundamentarán las teorías de análisis crítico del discurso. La interacción pasa de verse como facilitador a ser generador necesario y constitutivo ('locus') de los procesos de aprendizaje. Esta interacción, además, no se produce solo en el micro nivel del aula; la manera como los alumnos pueden llegar a comprender las matemáticas y participar en la actividad del aula se construye bajo el impacto de las políticas educativas y curriculares y de los discursos dominantes sobre qué es y a quién pertenece la cultura de la matemática escolar. Estamos ya ante interpretaciones de lo social más sofisticadas y "fuertes" acerca de los contextos sociales, culturales, históricos y políticos que constituyen e intervienen en la educación matemática (Planas y Valero, 2016). La premisa básica de estas teorías sociales es que los procesos relativos a la educación matemática son procesos de participación en contextos con modos de hacer y de hablar específicos que se asemejan a distintos grupos. El cambio cognitivo individual que supone el aprendizaje matemático se reconoce cuando se aprende a hacer y hablar en los modos legitimados en la escuela y en una cierta estructura social.

Una importante característica distintiva de las teorías sociales contemporáneas es la convivencia y articulación de las acepciones interaccionista y fuerte de lo social. Dentro de estas teorías, hay una variedad de matices y aproximaciones, todas ellas con el denominador común de comprender la inseparabilidad de la persona – que aprende, que enseña, que investiga… – y el contexto – en el que aprende, en el que enseña, en el que investiga… –. Tomando la perspectiva social de Radford (2016), la educación matemática deja de plantearse en términos de saberes objetivos que se enseñan y se aprenden, para pasar a entenderse en términos de saberes que se "objetivizan" mediante prácticas culturales y sociales históricamente establecidas que privilegian las prácticas de ciertas culturas y grupos. La ética que guía la investigación desde estas teorías sociales (Radford, 2008) busca la comprensión de que todos participamos de manera diferente y con oportunidades diferentes en unos u otros contextos por razón de las prácticas e ideologías que se producen y comunican en ellos. En consonancia, la ética que guía la práctica educativa busca el desarrollo de personas capaces de posicionarse críticamente y producir subjetividades dinámicas que logren participar en prácticas institucionalizadas y rituales de la matemática escolar, negociando, manteniendo y eventualmente cambiando la distribución desigual de la actividad.

De acuerdo con el hilo que marcan las tres preguntas iniciales en el marco de las teorías sociales que reconocen la "fuerza" de las prácticas discursivas, en el siguiente apartado interpreto hitos históricos con un papel decisivo en la configuración actual de la investigación en educación matemática y lengua. La contextualización histórica no solo responde a la intención de hacer notar que este dominio de estudio no es reciente; es sobre todo un relato necesario para entender cómo se ha ido gestando la construcción de nuevas conceptualizaciones del aprendizaje matemático.

INICIOS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LENGUA

A nivel internacional, el interés institucional por la investigación sobre aspectos de lengua en educación matemática se remonta a 1972. En el transcurso del segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-2) celebrado en Exeter, Reino Unido, se constituyó un grupo de trabajo sobre lengua (ver la mención de Howson, 1973, a la relevancia histórica de esta iniciativa en la introducción de las actas de ese congreso). En la Asamblea General del ICME-2, se decidió además auspiciar la organización de un simposio internacional de título 'Interactions between Linguistics and Mathematical Education', que se celebraría en Nairobi, Kenia, en 1974. Durante 12 días, un grupo de 28 educadores matemáticos y lingüistas colaboraron en la elaboración de una agenda de investigación. En el documento final (UNESCO, 1974), se aprecia la todavía escasa articulación entre áreas de conocimiento al sugerirse una lógica que distinguía lingüística de educación matemática en la preparación y presentación de resultados del simposio. Una conclusión, resaltada en el documento final, fue sobre la necesidad de trabajar para entender "el papel de la lengua en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" [mi traducción] (p. 123). Se imponía la visión estática del "papel de la lengua" por delante de la visión social del "uso de la lengua".

Los eventos anteriores se producen en un momento histórico de investigaciones sobre el fenómeno denominado bilingüismo por la lingüística y la psicología cognitiva. En Cummins (1979), se lee que durante la primera mitad del siglo pasado, dentro de la lingüística se desarrollan influyentes trabajos sobre dificultades en el desarrollo cognitivo de personas bilingües. Se acumulan estudios empíricos con grupos de control – con alumnos monolingües – y experimentales – con alumnos bilingües – principalmente en Alemania, Estados Unidos, Suiza, Francia y Canadá. En estos estudios se parte de supuestos neurocognitivos: el esfuerzo que el cerebro de un alumno bilingüe tiene que hacer para manejar adecuadamente dos lenguas se produce a expensas del aprendizaje de otros contenidos y de otras lenguas. Es una época donde rige el paradigma de la medida cuantitativa del aprendizaje, en asociación con medidas de la inteligencia mediante pruebas clínicas individuales. En esta época, se sitúan las primeras investigaciones sobre educación matemática y lengua, que estudian el impacto de la condición de bilingüe – entendida como saber y saber utilizar dos lenguas – en el aprendizaje.

Cummins (1979) produce una crítica a orientaciones de corte estrictamente cognitivo. Con base en sus investigaciones de campo, argumenta que la condición de bilingüe no es necesariamente perjudicial en los procesos de aprendizaje del alumno; hay dificultades derivadas de situaciones en las cuales los contenidos de aprendizaje se proporcionan en una única lengua para la cual el alumno no ha desarrollado habilidades cognitivas y académicas suficientes. Con la tesis sobre el desarrollo de habilidades académicas, Cummins alude a las circunstancias culturales y sociales del alumno en su aprendizaje. Esta tesis impacta en trabajos posteriores sobre bilingüismo. A lo largo del último cuarto del siglo pasado se suceden muestras de un giro hacia orientaciones culturales y sociales en la comprensión de la multiplicidad de bilingüismos: la condición de bilingüe no es ajena a la construcción cultural y social del bilingüismo en los entornos de enseñanza y aprendizaje. Este giro coincide con la publicación de la revisión de trabajos sobre educación matemática y lengua de Austin y Howson (1979). Estos autores destacan la perspectiva de déficit subyacente en varios trabajos que atribuyen al alumno bilingüe dificultades añadidas en el aprendizaje de la lengua de las matemáticas – entendida como tercera lengua – sin considerar la situación de contexto.

Austin y Howson (1979) establecen una interesante y productiva distinción entre la lengua del alumno, la lengua del profesor y la lengua de las matemáticas (ver cómo esta distinción se retoma en Planas, Morgan y Schütte, 2018) para agrupar los trabajos examinados. El grupo más cuantioso de trabajos se centra en el estudio de la complejidad lingüística – sintáctica y semántica – de la lengua de las matemáticas, sin que se considere la complejidad pedagógica, social y cultural de enseñar y aprender matemáticas en entornos con diversidad de lenguas. Son trabajos donde se piensa en términos de carencias del alumno cuya lengua habitual es distinta a la lengua del profesor. Por otro lado, la lengua de las matemáticas se piensa como un objeto monolítico sin variabilidad interna; se excluyen así las lenguas de las matemáticas más alejadas de la lengua utilizada por los matemáticos en su actividad profesional. En general, ya sea para referirse a las lenguas de los alumnos o a las lenguas de las matemáticas, se asume un ideal monolingüe cuyo logro por parte del alumno se asocia al aprendizaje de la lengua del profesor y de la lengua del matemático profesional.

Años más tarde, Secada (1992) publica otra revisión aunque particular de los estudios sobre aprendizaje matemático y educación bilingüe en Estados Unidos. La revisión de Secada es mucho más que una actualización o concreción de Austin y Howson (1979). Por primera vez a nivel internacional, se aportan con claridad argumentos sobre la dimensión social y política de la lengua en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Secada defiende la tesis de que el aprendizaje matemático de alumnos bilingües depende del conocimiento de las lenguas, pero también del re-conocimiento situado de dichas lenguas y de los grupos culturales y sociales de referencia. Para ello, recurre a estudios que relacionan la ausencia de las lenguas de los alumnos en la comunicación en clase con su bajo rendimiento matemático. Varios estudios se refieren a clases de matemáticas en Estados Unidos con alumnos de origen hispano cuya lengua habitual, el castellano, no se utiliza de modo regular en el aula. El hecho de que el rendimiento matemático de alumnos de origen hispano sea significativamente mayor en clases donde el castellano y el inglés se alternan con flexibilidad – en el sistema estadounidense de educación bilingüe de aquel momento – no se explica con argumentos exclusivamente basados en el alumno y su condición de bilingüe. Debe examinarse el capital atribuido a las lenguas del alumno, a fin de comprender las oportunidades de aprendizaje matemático que se le ofrecen en un sistema escolar donde se privilegian unos modos de hablar y de hacer. Del alumno bilingüe no solo se espera que aprenda y hable la lengua del profesor y la de las matemáticas, debe también hablar y comportarse de manera tal que se haga reconocible como alguien en conformidad con el discurso de la escuela y de los grupos que lo promueven.

PRESENTE DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LENGUA

Hasta la publicación del libro de Adler (2001) no se produce el cambio esencial que supone pasar de hablar de bilingüismo a multilingüismo en la investigación en educación matemática y lengua. Si bien con Secada (1992) se había avanzado en la consideración de las dimensiones cultural, social y política de la lengua en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se seguía manteniendo una visión estática de lengua como conjunto reglado de vocabulario, gramática y fonética separables de otros vocabularios, gramáticas y fonéticas (Saussure, 1968). Acorde con esta visión se nombraban y contaban las lenguas a fin de identificar multilingüismo. Estas lenguas son preexistentes a su uso y están lejos de ser concebidas una expresión social e indisoluble de 'la' lengua. Con Adler, se produce un punto de inflexión en la línea histórica de la investigación sobre lengua y educación matemática. Sus datos son de clases en Sudáfrica, donde alumnos y profesores utilizan varias de sus lenguas en la actividad matemática, pero Adler extiende su tesis a cualquier aula aparentemente monolingüe (ver una actualización en Adler y Sfard, 2017). Con el inicio de siglo surge la discusión sobre la construcción de una diversidad de lenguas durante el uso de la lengua en cualquier situación de enseñanza y aprendizaje. Dentro de la clase de matemáticas, algunas de estas lenguas serán modelos concretos de la forma 'culta' y aceptable de hablar y escribir matemáticas.

La contribución de Adler (2001) da lugar al dominio contemporáneo sobre educación matemática y lengua. Por contemporaneidad me refiero a la etapa que se inaugura con el giro epistemológico en la conceptualización de lengua. En esta etapa que pronto cumplirá dos décadas, ha cambiado la forma de entender la relación entre lengua y educación matemática porque ha cambiado la forma de entender la noción de lengua dentro del área: 1) la lengua es múltiple y 2) la multiplicidad se da en el uso. Como ocurre con las teorías sociales, esto no implica que exista un dominio que sea estrictamente contemporáneo y que esté conceptualmente unificado. Sigue habiendo trabajos relevantes que toman una noción formal de lengua; no obstante, estos trabajos formulan preguntas y problemas propios de etapas anteriores y son relativamente escasos a día de hoy. Hay un estado de la cuestión generalizado, que complejiza el contexto social, cultural, histórico y político de uso de la lengua en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El problema no son las dificultades del alumno bilingüe en su aprendizaje de las matemáticas, ni las cuestiones son las que tratan el desarrollo individual de habilidades cognitivas y académicas. El problema ahora es el uso de la lengua en un entorno que es lingüístico, cultural, social y político, y las cuestiones para entender el aprendizaje matemático del alumno son las que tratan sus oportunidades de desarrollar un capital lingüístico, cultural y social que sea reconocido como legítimo en el aula de matemáticas.

En sus formas contemporáneas y respecto a etapas anteriores, cambian las preguntas que se formulan para estudiar la relación entre lengua y educación matemática:

- ¿A qué nos referimos cuando hablamos de lengua en uso?
- ¿Cuál es la importancia y particularidad de esta noción en educación matemática?

Se profundiza en la noción sociolingüística de lengua en uso y en las cualidades diferenciales – respecto a la noción lingüística de lengua – que la hacen pertinente para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la nueva etapa se supone el significado de lengua en uso para cualquiera que sea la conceptualización de lengua. A grandes rasgos, pueden identificarse tres conceptualizaciones principales de lengua que aluden a las nociones de sistema (Morgan, 2006), cultura (Radford, 2008) y discurso (Sfard, 2008) y que se entrecruzan con la terna de lenguas – de las matemáticas, del alumno y del profesor – en Austin y Howson (1979). La Tabla 1 da idea de los elementos implicados en el mapa del dominio contemporáneo.

Tabla 1. Elementos en la representación del dominio contemporáneo

Dominio de estudio	*Temas en Austin y Howson (1979)*	*Conceptualizaciones de lengua*
Educación matemática y lengua	La lengua del alumno	sistema → cultura → discurso
	La lengua del profesor y de la clase	
	La lengua de las matemáticas	

Heredera del funcionalismo, encontramos la conceptualización sociosemiótica de la noción de lengua. Morgan (2006) ve la lengua en uso como sistema semiótico que es producto de la estructura social y que representa las maneras de percibir el mundo por distintos grupos. Estructura social y sistema semiótico interactúan continuamente hasta el punto de ser inseparables. Así, durante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, alumnos y profesores producen la lengua del aula como sistema organizado de signos que se generan en la actividad conjunta y que a la vez inciden en la generación de dicha actividad. Desde esta conceptualización, lo que se vincula a una palabra o a un texto no es solo una entidad mental u objeto matemático, sino el conjunto de significados producidos acerca de la relevancia de dicho objeto en un momento de la comunicación entre personas con ciertos propósitos de interacción y actividad conjunta. Se establece una diferencia, por tanto, entre lo que la lengua permite hacer y lo que personas concretas hacen visible en su comunicación con otras personas. Si bien no es posible que una persona deshaga las entidades mentales ni los modelos culturales que se asocian a signos matemáticos en un aula, mediante el uso de la lengua sí puede añadir – y de hecho añade – significados extra-lingüísticos relativos a la función dada a esos signos en la representación social de la actividad que se comunica.

La conceptualización sociosemiótica de lengua ha estado poco presente en los Simposios de la SEIEM, pero no ausente. Un ejemplo de trabajo interesante es el de Bairral (2002) con datos de profesores de matemáticas en formación en el contexto educativo brasileño. En su análisis de la lengua escrita en entornos formativos de soporte virtual, Bairral asume que los profesores participantes producen y comunican sistemas de significados que son el resultado de la estructura social que ha dado lugar a ese entorno formativo y de la estructura social que subyace a la comunidad de práctica profesional creada en el doble nivel de la interacción y de las instituciones.

Con reminiscencias de la tradición histórico-cultural iniciada por Vygostski, otra conceptualización principal en el dominio contemporáneo se refiere a la visión de la lengua como portadora de modelos culturales e históricos de significación a través de los cuales se piensan y representan los mundos físico y social. Radford (2008) propone la idea de lengua en movimiento dentro de configuraciones culturales e históricas de prácticas. Lejos de ser una sustancia o mercancía que las personas poseen o no, la lengua en sus distintas formas semióticas se conceptualiza como el instrumento social que permite comunicar la pertenencia a una comunidad con unos determinados saberes. Así pues, los saberes que se le reconocen a un alumno dentro de una cultura de matemática escolar se hacen visibles a través del uso que el alumno hace de la lengua en la actividad conjunta del aula. Al recurrir al uso de la lengua, se aportan significados para que se pueda producir una representación objetivable de los saberes del alumno y de su pertenencia a la comunidad de los que actúan ante una tarea matemática de un modo aceptable. La lengua solo es tangible en movimiento y, precisamente por ello, es múltiple y diversa. Antes de ponerse en movimiento, tiene sentido singularizar la lengua del alumno, la lengua del profesor o bien la lengua de las matemáticas como objetos de pensamiento estáticos, pero esto son meros juegos de pensamiento abstracto.

La conceptualización histórico-cultural de la noción de lengua tampoco ha estado explícitamente presente en muchos Simposios de nuestra Sociedad. En el equipo al que pertenezco – Grupo de Investigación en Práctica Educativa, GIPEAM –, un subgrupo elaboramos un trabajo de análisis del discurso (Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2017) donde tuvimos en cuenta aspectos de objetivación histórica y cultural en la producción del discurso matemático del profesor de matemáticas en conversación con los alumnos en clase. Se señaló el impacto, en el desarrollo del razonamiento probabilístico, de la construcción histórica del modelo laplaciano. Vimos el análisis de la conversación, por tanto, como un medio para acceder a información relevante sobre los discursos históricos de la matemática escolar en torno a la enseñanza de la probabilidad.

Aún con reminiscencias de la tradición vygostkiana, encontramos la conceptualización discursiva de la noción de lengua. Sfard (2008) asemeja la noción de lengua a la de discurso y le otorga un papel fundamental en la construcción de los objetos matemáticos y de la actividad que las personas hacen con ellos. Al hablar de matemáticas, se da estatus de existencia a estos objetos y a las propiedades y cualidades que se comunican. Paralelamente, al ser usada, la lengua genera la realidad cultural y social donde se sitúa la realización de unos determinados objetos matemáticos. Esta conceptualización discursiva "fuerte" deja atrás la visión de la lengua como instrumento mediador de comunicación para dotarla de una ontología productora de existencia y de realidad. En este sentido y del mismo modo que ocurre con las conceptualizaciones anteriores, la lengua se produce a sí misma como unitaria y única pero es necesariamente múltiple por ser múltiples los significados culturales, sociales y políticos que produce. Se entiende que la lengua – y por ende el discurso – es el 'locus' donde se producen las matemáticas y los contextos educativos de enseñanza y aprendizaje. Las matemáticas que se consideran cultas y aceptables son las que se construyen de tal modo en el discurso. En particular, esto es revolucionario al implicar la imposibilidad de que exista una lengua de las matemáticas claramente delimitada con patrones sintácticos unívocos.

De las tres conceptualizaciones señaladas, la discursiva es la que ha tenido mayor presencia en los Simposios de la SEIEM. En el seno de GIPEAM ha habido varios trabajos que han adoptado la noción de lengua como productora discursiva de la realidad del aula. Un ejemplo es el trabajo de Chico y Planas (2011). Aquí, se examina la lengua desde el estudio de los procesos de interacción en un grupo reducido de alumnos y su profesora. Se observa la generación de un discurso colectivo que permite significar algunos de los aspectos de la actividad matemática cuyas normas no han sido abiertamente enunciadas en la lengua de la profesora. Este discurso colectivo genera una lengua situada de las matemáticas con momentos de discusión de normas sobre la distribución de tareas en función de las capacidades que se suponen a los alumnos. En el discurso se desarrollan, por tanto, los significados que determinan los alumnos con lenguas de las matemáticas aceptables.

De todo lo anterior, deducimos que la conceptualización de lengua es de suma importancia para la conceptualización de las matemáticas, de la educación matemática y de la investigación en educación matemática. La lengua en uso produce prácticas – semióticas, culturales y discursivas – que son formas activas de producción de las realidades sociales y psicológicas en torno a la matemática escolar y su estudio. En este contexto, el aprendizaje matemático debe ser entendido como la construcción social y psicológica de una lengua de las matemáticas institucionalizada. Los significados de 'la' lengua de las matemáticas se producen a medida que el alumno participa de unas determinadas prácticas. Ahora bien, la producción de estos significados no es necesariamente lineal ni progresiva. Hay muchas prácticas – semióticas, culturales y discursivas – simultáneas y en cierto modo contradictorias, que se encuentran provisionalmente incluidas en una situación de enseñanza y aprendizaje, en algunas de las cuales un alumno puede participar sin que esto comporte la construcción de significados privilegiados en la lengua de las matemáticas.

INVESTIGACIÓN EN APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DIVERSIDAD LINGÜÍSTICA

La línea histórica de desarrollo que he trazado en los apartados anteriores tiene un punto álgido en 2016 con la publicación del volumen asociado al Estudio ICMI 21 sobre educación matemática y diversidad lingüística (Barwell y otros, 2016). Desde la primera agenda de investigación establecida en Nairobi en 1974 hasta la preparación de este volumen, pasando por los distintos hitos históricos comentados, se ha construido una conceptualización de lengua que atribuye la cualidad de multilingüe a toda situación de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que considera las matemáticas, las matemáticas escolares y la educación matemática como producciones históricas, sociales y culturales. En la Tabla 2, represento los distintos aspectos de la argumentación sobre el carácter multilingüe del aprendizaje matemático. En el capítulo de introducción del volumen del Estudio ICMI 21, se vuelve sobre la terna de Austin y Howson (1979) para indicar que la lengua del alumno es plural, al igual que lo son las del profesor y de las matemáticas.

Tabla 2. Elementos en la representación de la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático

<table>
<tr><th>Línea de estudio</th><th>Temas en Barwell y otros (2016)</th><th>Significados de multilingüe</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aprendizaje matemático y lengua</td><td>Las lenguas del alumno</td><td rowspan="3">Sistemas semióticos →
Configuraciones culturales →
Realizaciones del discurso</td></tr>
<tr><td>Las lengua del profesor</td></tr>
<tr><td>Las lenguas de las matemáticas</td></tr>
</table>

En este apartado argumento particularmente la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático en aulas donde la lengua de instrucción no es la lengua habitual de todos los alumnos. Esto implica que la multiplicidad de lenguas se manifiesta de maneras todavía más complejas si cabe. Esta elección empírica es comprensible dado que llevo a cabo la mayoría de mis trabajos de campo en aulas donde la lengua de la instrucción es el catalán mientras que la lengua habitual de los alumnos puede ser el castellano pero también el árabe, el urdú o el bangla, entre muchas otras. A fin de facilitar la comprensión del texto, escribo estos términos para referirme a las diversas lenguas incluidas en cada uno de ellos. Por ejemplo, cuando me refiero al 'castellano' no estoy aludiendo a un único sistema lingüístico reglado; sino a los múltiples castellanos que uno puede reconocer en situaciones de contexto tales como: una conversación entre dos jóvenes en un parque de Barcelona, una solicitud de un ciudadano venezolano en la ventanilla de una administración pública en Bogotá, un profesor de matemáticas en una clase de un instituto de Valladolid, una entrada en la versión online del Diccionario de la Real Academia Española, etc. En estas situaciones se recurre a distintos léxicos y gramáticas, con los que se sugieren distintos grupos culturales y visiones del mundo.

En mi investigación, utilizo métodos ubicados en las teorías del análisis crítico del discurso (Gee, 1996) y los aplico a datos transcritos de aula. A pesar de que no sigo los métodos de análisis crítico del discurso propuestos por Van Dijk (2009), la participación en los seminarios conducidos por este sociolingüista como profesor visitante en el Departamento de Traducción y Ciencias del Lenguaje de la Universitat Pompeu Fabra, ha sido decisiva en la adaptación de las preguntas originales propuestas por Gee, y más en general en la comprensión de que esta teoría analítica multidisciplinar podía ser de utilidad en la investigación en educación matemática. A día de hoy establezco una distinción entre rasgos lingüísticos – visibles en la expresión escrita del discurso – y rasgos discursivos – inferibles del conocimiento que se tiene de los discursos con influencia en el uso de la lengua. Ante una pieza transcrita de una conversación en clase de matemáticas y con el objetivo de investigar la relación entre aprendizaje matemático y lengua, me guían cuatro preguntas:

- ¿Cuáles son los rasgos de la lengua de los alumnos?
- ¿Cuáles son los rasgos de la lengua del profesor?
- ¿Cuáles son los rasgos de la lengua de las matemáticas?
- ¿Qué oportunidades de aprendizaje matemático se producen en este contexto?

En el seno de GIPEAM, varios compañeros han realizado trabajos sobre la generación de oportunidades de aprendizaje en el aula (ver e.g. Ferrer, 2016; Morera, 2013). Tal como se deduce de las preguntas anteriores, esta es una línea de estudio de gran inspiración para los trabajos sobre el impacto de la diversidad de lenguas en la generación de dichas oportunidades (Planas, 2014). La noción de oportunidad de aprendizaje matemático, desde una perspectiva social, se remonta a los trabajos del Grupo de Vanderbilt en los años noventa (ver e.g. Cobb, Yackel y Wood, 1992) donde la acepción de lo social era principalmente de corte constructivista. En aquel entonces fue una noción pionera porque relacionaba el estudio del aprendizaje matemático con el estudio de las condiciones sociales del contexto de enseñanza y aprendizaje. Se diseñaron, implementaron y evaluaron numerosos experimentos de enseñanza con el propósito de introducir cambios en algunas de estas condiciones mediante cambios en el sistema de normas del aula. Esta tradición perdura con fuerza en el área y no con menos fuerza en nuestro equipo de investigación. Los tres pilares teóricos que sostienen la noción de oportunidad de aprendizaje matemático en GIPEAM son los siguientes:

- Las oportunidades de aprendizaje producen aprendizaje
- Los alumnos y profesores producen estas oportunidades
- La producción de oportunidades y de aprendizaje se desarrolla en un contexto social

Puesto que no todas las oportunidades producidas en un contexto de enseñanza y aprendizaje acaban produciendo aprendizaje, es fundamental examinar las condiciones sociales que pueden haber dificultado el desarrollo de los procesos de aprendizaje. Al respecto, a raíz de varios trabajos del Grupo de Vanderbilt, se concluyó que la actividad matemática en grupos reducidos de alumnos era productora de oportunidades de aprendizaje; una década más tarde, Cobb y Hodge (2002) matizaban esta conclusión añadiendo que para que esto ocurriera se tenía que haber construido una lengua compartida entre los alumnos del grupo que legitimara el trabajo colaborativo. En definitiva, si se pone a los alumnos en grupos pequeños pero el discurso dominante del grupo es el del rendimiento individual, no se están dando las condiciones sociales idóneas para que la dinámica de interacción genere aprendizaje. El significado del rendimiento individual puede hacerse visible de maneras más o menos explícitas con menciones a la distribución de tareas según la capacidad matemática que se le atribuye a cada alumno o bien con alusiones veladas a la falta de capacidad de algunos alumnos para contribuir matemáticamente al trabajo colectivo. Los dos extractos que siguen están deliberadamente seleccionados para mostrar oportunidades de aprendizaje matemático producidas en los contextos – semióticos, culturales y discursivos – de un aula de matemáticas en Barcelona, donde alumnos y profesores alternan con flexibilidad palabras y gramáticas normativas del castellano y del catalán. El análisis completo de estos extractos está pendiente de publicación (Planas, 2018); a riesgo de simplificar demasiado la explicación del método, aquí me limito a escoger las partes del análisis que ilustran con bastante claridad las evidencias del carácter multilingüe de los procesos que se están produciendo en la interacción. No está de más hacer notar que, en el análisis crítico del discurso, para identificar varias lenguas de las matemáticas, el analista tiene que ser capaz de reconocer, en las lenguas de los alumnos y del profesor, gramáticas matemáticas distintas a las de los matemáticos en su actividad profesional. Los analistas que ven la matemática escolar como una variación no contradictoria de las matemáticas, tenderán a identificar la lengua de las matemáticas desde la búsqueda de terminologías y gramáticas "canónicas".

Ejemplos de la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático

Tomo dos transcripciones de conversación durante una sesión de clase de matemáticas en un aula de secundaria en Barcelona. La profesora plantea una tarea sobre los números de Fibonacci con inicio en 1 y 2 en el contexto cotidiano de una escalera. Esta es una versión en castellano:

> En una casa hay una escalera con diez peldaños. Si podemos bajar los peldaños de uno en uno y de dos en dos, ¿de cuántas maneras distintas se podrá bajar la escalera?

El primer ejemplo ilustra una conversación dentro de un grupo de alumnos: Maria, Ton, Ada y Leo. Dos de estos alumnos nacieron en Perú y se incorporaron al sistema escolar catalán a finales de la etapa de primaria, donde se les asignó el aula de acogida para alumnos de incorporación tardía.

Maria:	Per què tens tot uns i aquí tot dosos?
Leo:	Puedes bajar sempre o saltar sempre.
Maria:	Sempre es baixa, no t'estàs parat.
Leo:	Pero a veces no bajas, saltas. Y a veces solo bajas.
Ton:	Baixar no vol dir d'un en un. Mira, baixar és un a un, dos a dos, tres a tres, tot és baixar.
Leo:	He empezado pero hay mucho que bajar y saltar. Al menos treinta. Si la escala fuera más corta…
Ton:	Umm… Si fos tres, seria: u, u, u; dos, u; u, dos… i dos, dos impossible. Ara ve quatre.
Ada:	Entonces, quantes…?
Maria:	Quantes què?
Ton:	Quantes seqüències.
Ada:	Entonces les seqüències les diem.

La conversación viene precedida de la sugerencia de Maria de contar una a una todas las posibilidades de bajar la escalera de acuerdo con el enunciado de la tarea. A lo cual, Leo responde que no es un procedimiento demasiado práctico. A partir de aquí, los alumnos de este grupo exploran la estrategia de reducir el problema a otro más simple cuya escalera tenga menor cantidad de peldaños ("si la escalera fuera más corta…"), empezando por tres peldaños. Esta es una buena estrategia para llegar a ver la relación de recursividad que permite obtener las 89 combinaciones como respuesta a la tarea original. La actividad matemática conjunta que se construye en este fragmento, por tanto, pone de relieve la construcción de oportunidades de aprendizaje matemático importantes para la resolución. Estas oportunidades se producen en un contexto de uso "relajado" – en comparación con el que se le supone a los matemáticos en su actividad profesional – y de la lengua de las matemáticas. Aunque los tipos coloquial y formal se han construido como extremos reconocibles en la cultura de la matemática escolar, son gramáticas difícilmente separables e internamente diversas en su uso funcional. Maria y Ton, por ejemplo, producen las palabras para numerales en plural ("unos", "doses"), con lo que se comunica la posibilidad de agrupar los números de la secuencia sin atención al criterio de orden, pero también la posibilidad de hablar de modos prácticos que ahorren la repetición de numerales cuando esto sean el mismo. Leo usa la lengua de las matemáticas de manera similar cuando se refiere a la cantidad de combinaciones elegibles para la resolución de la tarea con la expresión “hay mucho que bajar y saltar”, o cuando menciona la palabra para cuatro sin relacionarla matemáticamente con la palabra para tres. Los términos y gramáticas cotidianos se producen junto a términos y gramáticas asociados a la cultura de la matemática escolar tales como “secuencias” y “si la escalera… entonces…”. En este contexto de rasgos lingüísticos diversos, se observan algunos rasgos discursivos también en el uso de la lengua de las matemáticas. Se comunica un discurso que valida la conexión entre las matemáticas y la realidad empírica sugerida en el enunciado de la tarea; otros usos de la lengua en la conversación podrían haber llevado al uso de gramáticas más algebraicas o más geométricas y menos numéricas que posiblemente hubieron contribuido a visualizar estrategias menos basadas en la cuantificación. Por otra parte, se comunica un discurso que legitima la introducción de terminología específica de la matemática escolar con momentos de la actividad centrados en el reconocimiento técnico del nombre y otros momentos centrados en los elementos empíricos de lo que se nombra.

No podemos dejar de comentar los rasgos lingüísticos de la lengua de los alumnos que no involucran directamente la lengua de las matemáticas. Leo utiliza la palabra “baixar” para movimientos de un peldaño al siguiente inmediato y la palabra “saltar” para movimientos entre dos peldaños no consecutivos. Maria y Ton comunican un significado de “baixar” que también incluye “saltar” de modo que ambas palabras puedan utilizarse indistintamente durante la resolución de la tarea. En este punto, la lengua de los alumnos produce un discurso sobre la relevancia de la lengua oficial de instrucción. La conversación, sin embargo, continúa sin mayores menciones a la lengua de Leo, por lo que el discurso sobre la lengua de instrucción no consigue imponerse al discurso sobre la centralidad de la actividad matemática en la interacción. Puede concluirse que estos alumnos producen oportunidades de aprendizaje matemático vinculadas a la estrategia de reducción del problema original a un problema más simple en un contexto de diversificación de las lenguas de las matemáticas y de los alumnos. Estas lenguas son diversas porque los sistemas lingüísticos, las configuraciones de la cultura de la matemática escolar y las realizaciones de discursos son diversos.

Aporto un segundo ejemplo para reforzar con más datos y análisis empírico el argumento teórico de la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático. Ahora se trata de un fragmento en la misma sesión de clase durante el tiempo de discusión conjunta de la tarea con la profesora (P).

P:	No heu acabat, però ho discutirem junts. Difícil?
Ton	Estem quasi a punt.
Maria:	Un cop sapiguem l’escala de vuit escalons, calculem la del problema.
P:	Vuit esglaons?
Maria:	Volia dir esglaons…
Leo:	Pregunta el vuit.
Maria:	Vuit esglaons és trenta-quatre.
Leo:	Pero le interesa por qué vuit.
P:	Doncs sí. Per què vuit? Per què no nou o set?
Ton:	Perquè quan tenim totes les maneres per vuit esglaons, llavors els altres dos fins a deu es poden fer d’un en un o dos de cop.
Leo:	Doncs esto es por qué.

Maria, Ton, Ada y Leo han descartado la opción de contar una a una todas las posibilidades de bajar una escalera de 10 peldaños, y han llegado a reducir el problema al conteo de todas las posibilidades para una escalera de 8 peldaños; en concreto, esto es una evidencia de que se han aprovechado las oportunidades producidas en el trabajo en grupo respecto a la estrategia de reducción del problema original a un problema de resolución más simple. Dan a conocer la respuesta para la escalera de 8 peldaños, 34, y dicen que este resultado ha de llevar a la respuesta para la escalera inicial. En este fragmento, por tanto, se comunica la construcción de oportunidades de aprendizaje matemático relativas a la relación de recursividad de la secuencia de Fibonacci; esto es, que a partir de escaleras con tres peldaños o más, la respuesta para una escalera con n peldaños es la suma de las respuestas para las dos escaleras con n-1 y n-2 peldaños. A pesar de que puede interpretarse que la estrategia de resolución no es óptima porque estos alumnos no aplican el principio de recursividad desde las escaleras con tres y cuatro peldaños, consiguen obtener las 89 posibilidades de un modo relativamente más práctico de entre los barajados por ellos al inicio de la sesión. De nuevo, las oportunidades de aprendizaje se producen en un contexto de uso "relajado" y diverso de la lengua de las matemáticas, en esta ocasión en interacción directa con la lengua de la profesora. Leo nombra la palabra "ocho" sin vincularla a ninguna métrica, por lo que comunica la cantidad ocho en un uso situado de la lengua de las matemáticas que resulta confuso ya que podrían ser "ocho posibilidades". La lengua de las matemáticas de la profesora es, en este sentido, también relajada en la asignación precisa de métricas a las palabras para números, comunicando así aprobación tácita a la lengua de Leo. Esta lengua de las matemáticas aparece combinada con menciones explícitas a la relevancia de los discursos de explicación y justificación en la cultura de la matemática escolar; las expresiones "por qué" y "por qué no" son marcas gramaticales de estos discursos introducidas por las lenguas de Leo y Ada y la de la profesora. Hay, no obstante, otras marcas gramaticales de cuantificación que aluden a discursos de culturas de la matemática escolar que validan la comunicación de respuestas numéricas por delante de la comunicación del proceso.

En cuanto a las lenguas de los alumnos y de la profesora que no involucran directamente la lengua de las matemáticas, volvemos a identificar la presencia de un discurso sobre la lengua oficial de instrucción, que tal vez también emergería si se hubiera utilizado una palabra no reglada en otra lengua. La lengua de la profesora utiliza "esglaons" en lo que se sugiere como una corrección de "escalons" en la lengua de Maria. A diferencia de lo que ocurre con "baixar" y "saltar" en el primer ejemplo, ahora se trata de una corrección lingüística que no está ligada a discusión semántica. Este rasgo de la lengua no implica necesariamente la intención de corregir la lengua de Maria; puede ser que en la respuesta a la pregunta de la alumna, la profesora utilice la palabra con la que está familiarizada. Sin embargo, aun cuando esta no sea la intención de la profesora, se comunica un discurso sobre la importancia de utilizar adecuadamente la lengua de instrucción. Este es un principio básico del análisis crítico del discurso: los significados que se destacan no son los intencionados – a los que difícilmente se tiene acceso – sino los adjudicables por su efecto visible.

La conversación continúa sin mayores alusiones a la corrección de la lengua con la producción de discursos sobre explicación y justificación en la matemática escolar. En sendos ejemplos, se observa un complejo tejido de significados con demandas de prácticas discursivas contradictorias entre aprendizaje de la lengua de instrucción y aprendizaje de las matemáticas. Estas prácticas están en la conversación manifiesta, disponibles para cualquiera de los alumnos; la dirección que se toma es el resultado de cómo unos y otros se posicionan antes dichas prácticas pero también de cómo en el propio discurso se permite y legitima la opción escogida. Ni Maria ni Ton mantienen el discurso iniciado de una lengua de instrucción adecuada, ni Leo ni Ada se involucran en dar continuidad a la presencia explícita de este discurso. Puede concluirse que estos alumnos producen y mantienen oportunidades de aprendizaje matemático mediante la comunicación de estrategias de reducción del problema original y del principio de recursividad de la secuencia de Fibonacci en un contexto social de diversificación de las lenguas de las matemáticas, de los alumnos y de la profesora. Estas lenguas son diversas porque los sistemas lingüísticos, las configuraciones de la cultura de la matemática escolar y las realizaciones de discursos son diversos.

Antes de proseguir con la última sección del texto, debo decir que el análisis crítico del discurso es un recurso teórico más sofisticado de lo que pueda deducirse leyendo los ejemplos anteriores. Hay muchos métodos de análisis crítico del discurso y preguntas posibles para guiarlo, y en todos ellos se procede de una manera minuciosa en el análisis turno a turno de los rasgos lingüísticos y discursivos que se comunican. Por otra parte, un supuesto básico de todo análisis crítico del discurso es que lo que las personas comunican mediante el uso de la lengua es consecuencia de contextos institucionales amplios que no siempre se hacen visibles – aunque están presentes – en una conversación concreta. Si la política educativa establece distinciones explícitas entre tipos de alumnos – con designaciones para alumnos "de incorporación tardía", con "talento matemático"… –, cualquier conversación en el aula de matemáticas es susceptible de comunicar y reproducir – también de transformar – discursos en torno a estas distinciones, con implicaciones para la construcción y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Los ejemplos que he seleccionado pretenden mostrar que, además de comunicar y reproducir discursos fuertemente establecidos en la sociedad, la lengua de los alumnos y la de la profesora tienen la capacidad de resistir los discursos sobre la distinción entre lenguas y la distinción entre tipos de alumnos en beneficio de los discursos sobre la centralidad de la actividad matemática. No obstante, el uso de la lengua que finalmente lleva a (re)producir unos determinados discursos no se puede entender en el contexto único de la interacción. Lo que hace que Leo se resista a diferenciar entre "baixar" y "saltar" y siga con su explicación de una estrategia matemática que tiene que ver con su interacción con la lengua de Maria y de Leo, y otros muchos niveles de la experiencia cotidiana, pero al mismo tiempo podría representar un discurso de resistencia a la política de la lengua oficial de instrucción, o bien a la política educativa de las aulas de acogida para alumnos de incorporación tardía, y a otros muchos niveles de la estructura social. Una aproximación más fina al análisis crítico del discurso para los ejemplos de este texto, con interpretaciones del impacto de la estructura social en lo que los alumnos y la profesora comunican en la conversación, puede encontrarse en Planas (2018).

IMPLICACIONES PARA LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA

Este texto pretende contribuir a que la comunidad científica de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática se involucre en los debates que se están produciendo sobre educación matemática y lengua y, más en particular, sobre aprendizaje matemático multilingüe. He esbozado el complejo marco de nociones y conceptualizaciones que han llevado a comprender la construcción discursiva y multilingüe del aprendizaje matemático. De un modo también breve he sugerido el potencial de las teorías sociales y de las teorías de análisis crítico del discurso. Todo esto es especialmente relevante en el contexto de un Seminario de nuestra Sociedad ya que, a pesar de la vasta cantidad de estudios bajo enfoques sociales que existen en la comunidad internacional, siguen siendo pocos los trabajos de este tipo que aquí se discuten. No deja de ser sorprendente que los procesos por los que se construyen versiones legítimas de la matemática escolar, de la actividad de enseñanza, de la lengua de las matemáticas, del desempeño del alumno y de la práctica misma de investigación en el área no reciban la atención suficiente. Sí están algo más presentes los enfoques sociales del aprendizaje en 'Avances de Investigación en Educación Matemática', la revista de nuestra Sociedad, aunque principalmente en relación con el aprendizaje profesional del profesor de matemáticas. En Llinares (2012), por ejemplo, se detalla un estudio sobre la construcción discursiva del aprendizaje del profesor en un entorno virtual de comunicación.

En cualquier caso, que la comunidad internacional haya reconocido el potencial de las teorías sociales y de las teorías de análisis crítico del discurso no impide que persistan grandes líneas de investigación inexploradas sobre aprendizaje matemático y lengua. El estudio, desde las teorías sociales, del aprendizaje matemático en entornos de clase con alumnos sordos y oyentes es una de ellas. Las narrativas discursivas clínicas dominantes sobre el alumno sordo como persona a quien le falta algo – paradigma del déficit – se han ido transformado progresivamente en el área para considerar el alumno sordo como persona cuyas lenguas y culturas son en parte distintas a las del oyente (Nairouz y Planas, 2016); las oportunidades de aprendizaje matemático que el alumno sordo produce y aprovecha tienen que ver con las complejas representaciones lingüísticas, históricas, sociales y culturales que destacan las limitaciones – biológicas, intelectuales, culturales… – por delante de las potencialidades. El aprendizaje matemático del alumno sordo como un tipo de aprendizaje matemático multilingüe con características específicas sigue pendiente de una conceptualización rigurosa. La transformación del discurso de la educación matemática y de la investigación en educación matemática acerca del alumno sordo requiere considerar y revisar los contextos sociales e ideologías que ponen en tela de juicio la relación entre el uso de las lenguas de signos y la construcción de las lenguas de las matemáticas. Lo que se sabe en el área sobre la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático sugiere que la interpretación clínica de la sordera es un anacronismo, con implicaciones pedagógicas para la práctica educativa y en especial para los alumnos sordos y sus compañeros oyentes. Esto, sin embargo, no significa que el multilingüismo del aprendiz de matemáticas sordo no deba entenderse en su particularidad ni que deban omitirse las diferencias. El reto está precisamente en entender la diferencia desde el reconocimiento de lo que las lenguas de signos aportan a las lenguas de todos los alumnos, del profesor y de las matemáticas.

Llegados a este punto y para finalizar, resulta esencial examinar cómo las teorías sociales y las teorías del análisis crítico del discurso pueden ayudar a revisar nuestra conceptualización del área de investigación en educación matemática y de los estudios sobre la diversidad. Los discursos excluyentes de construcción del concepto de diversidad en el área no siempre son visibles, incluso en los estudios que tratan de manera central sobre algún tipo de diversidad. Valero (2012) alerta sobre los efectos clasificadores que se derivan de los usos de la palabra diversidad como representación de la diferencia respecto de una normalidad limitadora pedagógicamente. La diversidad ya fue una categoría de construcción de nuestra realidad académica y de nuestro pensamiento investigativo en el Seminario de la SEIEM en Lleida (De la Torre, 2010), de título “Educación matemática y diversidad”, y vuelve a serlo en esta ocasión. Más allá de políticas educativas y movimientos pedagógicos que puedan identificar la diversidad de “capacidades”, de “culturas de origen”, de “compromisos auditivos”… nuestra responsabilidad es detenernos a reflexionar sobre las implicaciones de usar la palabra diversidad en nuestros textos académicos cuando señalamos a unos alumnos como “diversos” y utilizamos lógicas tácitas de diferenciación; pero también cuando por ejemplo no consideramos la “atención a la diversidad de profesores”.

La asociación de la palabra diversidad con solo unos grupos de alumnos no es natural ni objetiva, sino el resultado de nuestro poder como investigadores para construir el área de investigación en educación matemática en unas direcciones y de acuerdo a la producción de unas problemáticas. En este texto he pretendido que la expresión “diversidad lingüística” no actúe como dispositivo de definición de un tipo de diversidad; he intentado producir la “diversidad lingüística” como una expresión cuyo uso viene justificado para avanzar en la construcción de la cualidad multilingüe del aprendizaje matemático. No propongo una diversidad lingüística que sea objeto de estudio, sino una diversidad de lenguas del alumno, del profesor y de las matemáticas que, conceptualizadas como objeto de estudio en el área, contribuyan a comprender la multiplicidad de procesos inherentes al aprendizaje matemático. En la teoría y en la práctica, este posicionamiento discursivo permite ampliar la atención a la diversidad de alumnos con la atención a la diversidad de profesores (y sus lenguas de uso en clase) y a la diversidad de culturas de aula (y sus lenguas de las matemáticas).

Referencias

Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multilingual classrooms*. Dordrecht: Kluwer.

Adler, J. y Sfard, A. (Eds.) (2017). *Research for educational change. Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning*. Londres: Routledge.

Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161-197.

Bairral, M. (2002). Comunidad virtual de discurso profesional geométrico. Contribuciones de un proceso interactivo docente por internet. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano y J. M. Gairín (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VI* (pp. 187-204). Logroño: SEIEM.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23-41.

Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Setati-Phakeng, M., Valero, P. y Villavicencio, M. (Eds). (2016). *Mathematics education and language diversity. The 21st ICMI Study*. Nueva York: Springer.

Cobb, P. y Hodge, L. L. (2002). A relational perspective on issues of cultural diversity and equity as they play out in the mathematics classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 249-284.

Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 99-122.

Cummins, J. (1979). Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children. *Review of Educational Research, 49*(2), 222-251.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situación de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

De la Torre, E. (Ed.) (2010). Educación matemática y diversidad. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Á. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 117-120). Lleida: SEIEM.

Ferrer, M. (2016). *Actividad de enseñanza e interacción en la producción y explotación de oportunidades de aprendizaje matemático*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Gee, J. P. (1996). *Social linguistics and literacies: Ideology in discourses*. New York: Routledge.

Howson, A. G. (1973). A congress survey. En A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 4-74). Nueva York: Cambridge University Press.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en un entorno en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics, 61*, 219-245.

Nairouz, Y. y Planas, N. (2016). La actividad matemática en un aula con estudiantes sordos y oyentes. *Números*, *93*(3), 15-29.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Á. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Planas, N. (2014). One speaker, two languages. Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 87*, 61-86.

Planas, N. (2018). Language diversity builds mathematics learning as much as mathematics learning builds language diversity. En C. Knipping, H. Straehler-Pohl y U. Gellert (Eds.), *Inside the class. Sociological perspectives on participation, inclusion, and enhancement*. Nueva York: Springer.(en prensa)

Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam: Sense Publishers.

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor. Ejemplos, explicaciones y coherencia local. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developments in European research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration*. Londres: Routledge.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of educational philosophy and theory* (pp. 1-6). Singapur: Springer.

Saussure, F. (1968). *Saussure ou le structuralism sans le savoir. Présentation, choix de textes* (Ed. By G. Mounin). París: Seghers.

Secada, W. G. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. En D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 623-660). Nueva York: MacMillan.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

UNESCO (1974). Final report of the symposium 'Interactions between linguistics and mathematical education'. París: UNESCO.

Valero, P. (2012). La inclusión de visiones sobre lo "social" y lo "político" en educación matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 187-203). Graó: Barcelona.

Van Dijk, T. A. (2009). *Society and discourse. How context controls text and talk*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

[1] Este trabajo se ha realizado durante el tiempo de dedicación a los Proyectos EDU-2015-65378-P y SGR2014-0972, y en período de intensificación de la investigación gracias al Institut Català de la Recerca i Estudis Avançats – ICREA.

COMUNICACIONES

ESTUDIO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PRODUCIDOS POR ALUMNOS DE ENSEÑANZA OBLIGATORIA AL RESOLVER UN PROBLEMA DE FERMI

Study of Mathematical models developed by mandatory school students while solving a Fermi problem

Albarracín, L.[a], Ferrando, I.[b] y Boliart, J.[c]

[a]Professor Serra Húnter, Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universitat de València, [c]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este artículo presentamos un estudio de tipo cualitativo dirigido a analizar la evolución de los modelos matemáticos que desarrollan alumnos de 8 a 16 años para resolver un problema de Fermi en el que deben estimar el número de personas que caben en el patio de su centro educativo. Los resultados muestran las estrategias de resolución desarrolladas basadas en modelos matemáticos emergentes que elaboran los alumnos en cada etapa educativa y las dificultades al enfrentarse a contenidos matemáticos como el área o las magnitudes intensivas.

Palabras clave: *modelización, problemas de estimación, medida de magnitudes.*

Abstract

In this article we present a qualitative that analyzes the evolution of the mathematical models that students from 8 to 16 years develop to solve a Fermi problem. The objective of the problem is to estimate the number of people that fit in the courtyard of their educational center. The results show the strategies based on emerging mathematical models developed by the students in each educational stage and the difficulties in dealing with mathematical contents such as area or intensive magnitudes.

Keywords: *modelling, estimation problems, magnitudes measurement.*

INTRODUCCIÓN

Desde el ICMI 14 (Blum, 2002) se ha desarrollado un movimiento dentro de la Didáctica de las Matemáticas con la principal idea de llevar a las aulas actividades que muestren la fuerte relación que existe entre las Matemáticas y el mundo que nos rodea. En este sentido se ha desarrollado el área de interés hacia la modelización matemática. En el caso concreto de España, los currículos han incluido recientemente (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre) de forma explícita la práctica de procesos de matematización y modelización, tanto en contextos de la realidad como en contextos propiamente matemáticos. Este contexto nos mueve a estudiar las posibilidades de los alumnos las etapas obligatorias para generar modelos matemáticos por ellos mismos con el propósito a largo plazo de diseñar actividades que permitan trabajar en las aulas los procesos de modelización.

En investigaciones previas se han utilizado los denominados problemas de Fermi como un tipo de actividades que permiten introducir la modelización matemática en las aulas de Educación Primaria y Secundaria (Peter-Koop, 2004; Ärlebäck, 2009). Los problemas de Fermi son una propuesta de actividades de aula que permite a los alumnos desarrollar sus propias estrategias de resolución de problemas a partir de plantearles preguntas sobre aspectos de la vida real en las que no se ofrece demasiada información

Albarracín, L., Ferrando, I. y Boliart, J. (2017). Estudio de los modelos matemáticos producidos por alumnos de enseñanza obligatoria al resolver un problema de Fermi. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 109-118). Zaragoza: SEIEM.

sobre los fenómenos a estudiar. Provienen de una larga tradición de la enseñanza de la Física a nivel universitario (Robinson, 2008), pero en los últimos tiempos han sido propuestos en otros ámbitos educativos, como para promover el pensamiento matemático (Sriraman y Knott, 2009). Hasta el momento, las investigaciones que utilizan problemas de Fermi son escasas, pero estas han mostrado potencial para desarrollar el razonamiento matemático de los alumnos en diferentes niveles educativos. En este trabajo presentamos un estudio de tipo exploratorio y nos centramos en estudiar los modelos que generan los alumnos de diferentes niveles educativos a un mismo problema, para identificar los conceptos matemáticos que los soportan los modelos matemáticos desarrollados por alumnos de diferentes edades.

MARCO TEÓRICO

Modelización matemática

Las actividades de modelización matemática son aquellas en las que los alumnos deben estudiar un fenómeno real utilizando conceptos y procedimientos matemáticos. El componente principal de estas actividades es que los alumnos creen o generen modelos que se puedan aplicar a la realidad o contexto dados y que, además, estos modelos y las soluciones que se extraen de ellos se puedan generalizar e interpretar en otros contextos (Doerr y English, 2003). En la literatura existe una gran discusión sobre el uso de la modelización matemática en las aulas y se pueden encontrar diferentes posiciones respecto a la naturaleza de los procesos de modelización. Aunque existen diversas formas de concretar la estructura de estos procesos, se entiende que se puede dividir en diferentes fases y que los alumnos las recorren ordenadamente, superando una fase cuando consideran que el trabajo en esa fase se ha cerrado satisfactoriamente (Blum y Leiss, 2007).

En este trabajo no pretendemos caracterizar el proceso de modelización desarrollado por los alumnos y nos centramos en el análisis de los modelos generados durante la resolución de un problema de Fermi. En concreto, utilizamos la siguiente definición de modelo matemático propuesta por Lesh y Harel (2003) que nos debe permitir identificar modelos en las producciones de los alumnos:

> Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
>
> Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. (pág. 159)

Con esta perspectiva, entendemos que un modelo matemático es un constructo en lo que podemos identificar dos tipos de elementos, los conceptuales y los procedimentales, dirigidos a describir un sistema -generalmente complejo- y que serán expresados utilizando diversos tipos de lenguajes.

Problemas de Fermi para introducir la modelización matemática

Los problemas de Fermi son un ejemplo de este tipo de situaciones en las que el punto de partida para obtener el resultado de un problema es una estimación que requiere de la creación de un modelo matemático que simplifique el fenómeno estudiado. Ärlebäck (2009) define los problemas de Fermi como “open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (p. 331)”. En concreto, Ärlebäck (2009) entiende que este tipo de problemas son abiertos en el sentido que no están asociados a una estrategia de resolución conocida por los alumnos o a unos procedimientos concretos, exigiendo a los alumnos a invocar construcciones, concepciones o experiencias previas. Los problemas de Fermi a menudo tienen enunciados con una formulación que proporciona escasa información, sin embargo, al analizarlos en detalle, se pueden descomponer en sub-problemas más sencillos para dar respuesta a la pregunta original. La necesidad de determinar los factores más relevantes del fenómeno estudiado para resolver un problema de Fermi conecta con los aspectos estudiados en el ámbito de la Modelización Matemática. Desde esta perspectiva, Ärlebäck (2011) afirma que los problemas de Fermi son útiles para introducir la modelización matemática en las aulas ya que son accesibles para alumnos de niveles diversos y, en muchas ocasiones, no requieren conocimientos matemáticos profundos por lo que promueven que los estudiantes definan la estructura del problema identificando la información relevante.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de los problemas de Fermi como herramientas para promover la modelización consta de un pequeño número de investigaciones que permiten establecer una base de conocimiento sobre el que fundamentamos nuestro trabajo y que repasamos a continuación.

Peter-Koop (2004) utilizó los problemas de Fermi con alumnos de 9 y 10 años para investigar las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes. Su estudio muestra que los alumnos de estas edades pueden enfrentarse los problemas planteados dando significado a las soluciones obtenidas. Por su parte, Ärlebäck (2009) ha estudiado la forma en la que los alumnos de Educación Secundaria resuelven problemas de Fermi. En concreto, este autor ha observado que los alumnos utilizan mucha información de tipo extra-matemático tanto para realizar las estimaciones correspondientes como para validar los resultados obtenidos.

A partir de las propuestas pioneras de Peter-Koop (2004) y Ärlebäck (2009) respecto al estudio de los procesos de modelización al resolver problemas de Fermi, se han desarrollado diversas investigaciones para estudiar las posibilidades de utilizarlos como herramienta para introducir la modelización en las aulas de Primaria y Secundaria en el contexto educativo español. Para ello se han utilizado problemas en los que deben estimarse grandes cantidades (PEGC), como sub-clase de los problemas de Fermi, ya que por su naturaleza fuerzan a los alumnos a generar procesos matemáticos para resolverlos al no poder efectuar recuentos exhaustivos. En estudios previos (Albarracín y Gorgorió, 2013) se han identificado diferentes estrategias de resolución en PEGC planteados a los alumnos de Educación Secundaria. Algunas de estas estrategias no les permiten resolver el problema por ellos mismos, pero otras contienen los elementos necesarios para dar respuesta efectiva a las preguntas formuladas y lo hacen a partir de desarrollar modelos matemáticos. Las principales estrategias identificadas en estos estudios se listan a continuación:

- Recuento exhaustivo: el estudiante sugiere que la resolución se basa en el recuento exhaustivo.
- Fuente externa: el estudiante sugiere que la solución debe ser aportada mediante una fuente externa que conozca los datos exactos para resolver el problema.
- Densidad: el estudiante basa su resolución en la densidad, hallando el número de elementos que ocupan un área determinada y obtiene el resultado multiplicando densidad por área total.
- Iteración de la unidad: el estudiante parte de la superficie ocupada por uno o varios elementos y, a partir del área total, obtiene el resultado mediante una división.
- Distribución en cuadrícula: el estudiante simula que los elementos están distribuidos en filas y columnas y, de esa forma, estima el número total usando la regla del producto.

Al trabajar en la resolución de los problemas de estimación del número de elementos en un área acotada, los alumnos utilizan diversas formas para aproximarse a las soluciones requeridas y, al trabajar en grupo, desarrollan modelos matemáticos que les permiten explicar los fenómenos estudiados. Hemos observado diferencias en los conceptos que sustentan los modelos desarrollados por alumnos de 16 años y que cursan Educación Secundaria (Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi, y Gorgorió, 2017) de los que desarrollan los alumnos de Educación Primaria de entre 10 y 12 años (Albarracín, Lorente, Lopera, Pérez y Gorgorió, 2015). En este contexto surge la motivación de analizar con detalle los modelos que pueden desarrollar alumnos de entre 8 y 16 años al trabajar con PEGC para poder desarrollar actividades de aula que se ajusten con mayor precisión a los objetivos educativos de cada etapa y para entender la forma en la que los alumnos incorporan nuevos elementos a los modelos que desarrollan a medida que crecen y tienen mayores conocimientos tanto matemáticos como extra-matemáticos, especialmente con alumnos de menos de 10 años, para los que no existe en la literatura una base de conocimiento sobre sus competencias modelizadoras (Stohlman y Albarracín, 2016).

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Para Ärlebäck (2009), los problemas de Fermi como recurso didáctico destacan por su accesibilidad, en el sentido de que pueden ser resueltos por alumnos de diferentes edades y generando respuestas de diferente nivel de complejidad. Esta afirmación se basa en la experiencia de distintos profesores e investigadores a partir del uso de este tipo de problemas en las aulas, pero no existen estudios que la respalden ni disponemos del conocimiento concreto de cómo se concreta esa diferencia de complejidad. Por lo tanto, en este trabajo realizamos un estudio exploratorio de tipo cualitativo para identificar los modelos matemáticos que desarrollan los alumnos de diferentes edades para resolver el problema propuesto y concretar la forma en la que los problemas de Fermi son accesibles a alumnos de diferentes edades.

Así, el objetivo principal de este trabajo es determinar el tipo de modelos matemáticos emergentes (en el sentido desarrollado por Gravemeijer, 1999) que desarrollan alumnos de diferentes edades de las etapas obligatorias para resolver un problema de Fermi en el que se debe estimar el número de personas que caben en un espacio determinado. Para ello se diseña una actividad de aula ad hoc para recoger los informes que elaboran los alumnos y analizar los modelos matemáticos elaborados.

METODOLOGIA

Recogida de datos

La recogida de datos se realiza en una escuela de Educación Primaria (EP) y en un instituto de Educación Secundaria (ESO) de la misma localidad. Concretamente, hemos recogido datos del trabajo de aula de alumnos de los cursos de segundo, cuarto y sexto de Primaria y de segundo y cuarto de Secundaria, con lo que cubrimos el espectro de edades de los 8 a 16 años. En cada curso participan los alumnos de una clase que trabajan en grupos de 4 personas para resolver un problema en el que deben estimar el número de personas que caben en el patio del centro en el contexto de un concierto. La Tabla 1 se muestra el número de alumnos y equipos de trabajo por curso participantes en el estudio:

Tabla 1. Resumen de los participantes en la experiencia

Curso	Número de alumnos	Número de grupos
2º Primaria (8 años)	23	6
4º Primaria (10 años)	19	5
6º Primaria (12 años)	20	5
2º Secundaria (14 años)	20	5
4º Secundaria (16 años)	22	6
Total	102	27

El enunciado concreto del problema que se proporcionó a los alumnos es el siguiente:

> La escuela está preparando un concierto para celebrar el final de curso el día 22 de junio. Para hacerlo, necesita de tu ayuda para encontrar el espacio más adecuado para realizar el concierto. La opción prioritaria es el patio, pero no tenemos claro cuánta gente cabe. Por lo tanto, ¿cuánta gente crees que cabe en el patio?

La recogida de datos se realizó en una sesión de 90 minutos para cada uno de los cursos durante la cual el profesor de aula se limitó a dar las instrucciones sobre el desarrollo de la actividad y a aclarar aspectos relativos al enunciado. En primer lugar, se proporciona el enunciado del problema a los alumnos en el aula y se les permite discutir en pequeños grupos de 4 alumnos sus propuestas de resolución para, posteriormente, ir hasta el patio para tomar los datos que necesiten. Cuando han conseguido los datos necesarios, los alumnos vuelven al aula para resolver el problema y escribir los informes de resolución en los que se les pide que especifiquen los métodos utilizados y los resultados obtenidos. De esta forma, los datos con los que contamos para este estudio son los informes de resolución elaborados por los alumnos y las notas de campo recogidas durante el trabajo en el aula y el patio.

Análisis de datos

Para analizar los modelos emergentes generados por los alumnos durante la recogida de datos proponemos caracterizar cualitativamente los aspectos esenciales que los definen y que nos proporcionan una visión objetiva de la complejidad con la que estos modelos representan la situación estudiada. Siguiendo a Lesh y Harel (2003), consideramos que un modelo matemático incluye conceptos y procedimientos de forma interrelacionada, aunque los alumnos de estas etapas difícilmente explicitan los conceptos en los que basan sus resoluciones. Según Hiebert y Lefevre (1986), el conocimiento conceptual es una estructura de conocimiento (hechos y proposiciones) conectada en red, y el conocimiento procedimental se centra en los símbolos utilizados y las reglas o procedimientos para la resolución de problemas matemáticos. En nuestro análisis utilizamos los procedimientos descritos por los alumnos para interpretar los conceptos que soportan al modelo utilizado en la resolución del problema.

A continuación mostramos algunos ejemplos de las resoluciones analizadas que permiten ilustrar cómo hemos realizado el análisis y que, además, ilustra el vínculo entre los procedimientos descritos y los conceptos en los que se soportan los modelos. En la Figura 1 mostramos la resolución de un grupo de 4º de ESO.

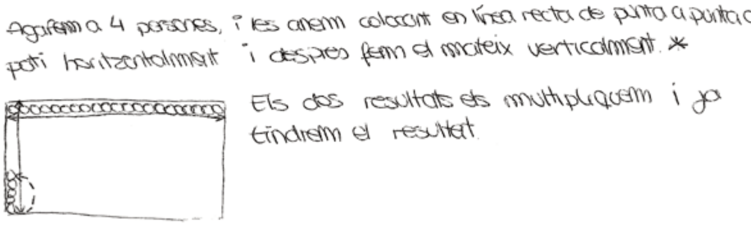


Fig. 1. Una propuesta para contar personas en el patio.
Los alumnos escriben: “Se coge a cuatro personas y se van colocando en línea recta de punta a punta del patio. Luego hacemos lo mismo verticalmente. Luego multiplicamos y obtenemos el resultado.”

Estos alumnos explicitan un procedimiento concreto para realizar la estimación a partir de colocarse en fila y contar para determinar cuántas personas son necesarias para llenar el patio en sus dos direcciones para acabar calculando el producto de estos dos valores. Los alumnos no dan información concreta en su informe escrito sobre ningún concepto aplicado, pero su producción permite inferir que los alumnos han estructurado la posición que puede tomar la gente en el patio siguiendo un patrón de distribución en cuadrícula, con lo que este es el concepto matemático sobre el que sostienen el modelo utilizado. Entendemos que estos alumnos no tratan la superficie del patio como un todo y, al contar el número de personas en filas y columnas, su aproximación a la respuesta pasa por un romper el problema inicial en dos sub-problemas unidimensionales. La distribución de personas elegida es el concepto que articula la resolución y que da sentido al procedimiento escogido. De esta forma entendemos que esta resolución se basa en la elaboración del modelo de distribución en cuadrícula, que ya se han identificado en estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013; Albarracín et al., 2015; Ferrando et al., 2017) propuesto tanto por alumnos de Educación Primaria como Secundaria.

Entre las producciones analizadas se distinguen dos categorías principales. Por un lado, están los alumnos que razonan mediante dimensiones lineales o bien mediante un procedimiento basado en hacer el producto del número de personas en filas y columnas (tal y como se muestra en la Figura 1) o bien usando estrategias alternativas (como la mostrada en la Figura 2). Por otro lado están los alumnos que razonan a partir de la superficie usando dos modelos alternativos para efectuar recuentos de personas en superficies: el modelo de la densidad de población y el modelo de iteración de la unidad.

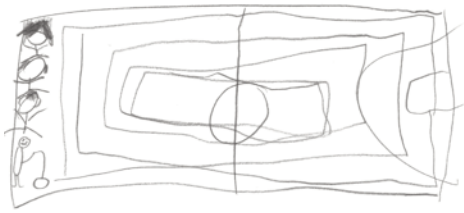


Fig. 2. Resolución de un grupo de 4º de EP

Además, hemos distinguido entre aquellos grupos que consiguen hallar la solución del problema y los que no. Para ello, hemos estudiado si los métodos utilizados y su implementación les permiten obtener estimaciones adecuadas para el valor solicitado. Por la naturaleza de los problemas de Fermi, entendemos que no existe un valor preciso que pueda ser considerado válido y que los valores que entendemos que son acertados deben serlo en el contexto concreto propuesto. Es por ello que, para determinar si el resultado final ofrece una estimación adecuada para el número de personas que caben en el patio durante un concierto, valoramos cada uno de los pasos y decisiones tomados durante la resolución.

En la Figura 3 mostramos la resolución de un grupo de 2ª de EP (8 años). A través de la resolución presentada observamos que el procedimiento se basa en contar el número de niños que caben en la pista horizontal y verticalmente con el objetivo de multiplicar ambos valores. En el informe no explicitaron método alguno, sino que se limitaron a observar que era necesario conocer las dimensiones de la pista, dato que no obtuvieron ni pretendieron utilizar al final. Todo lo que podemos encontrar en el informe de este grupo es el intento de multiplicar 45x118, tal y como se observa en la Fig. 3. Dado que los alumnos no conocen todavía los detalles del algoritmo de la multiplicación trataron, sin éxito, de sumar 45 veces el número 118. De esta forma, estos alumnos no consiguen ofrecer ningún resultado con lo que no obtienen una estimación adecuada, aunque los valores intermedios obtenidos concuerdan con las observaciones del resto de grupos.

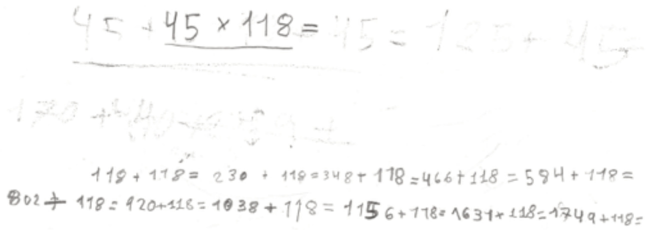


Fig. 3. Resolución de un grupo de 2º de EP

Otro grupo de 2ª de EP realiza un procedimiento similar, pero los valores obtenidos para el número de personas que llenan una fila horizontal o vertical son excesivos, ya que los valoran en 500 y 170, cuando las dimensiones reales del patio son de 41 y 21 metros. En este caso, los alumnos no tratan de multiplicar los valores obtenidos, sino que cometen un error conceptual y los suman, con lo que no están respondiendo adecuadamente a la pregunta. Es por ello que, aunque el procedimiento utilizado puede ser adecuado, hemos considerado que estos alumnos no han resuelto el problema.

En la Figura 4 mostramos la resolución de un grupo de 6º de EP (12 años), estos alumnos han medido las dimensiones de la pista y, una vez obtenidas, utilizando los metros como unidad, consideran que se pueden disponer 2 personas por cada metro lineal. Este grupo finaliza la resolución multiplicando correctamente los valores obtenidos. De esta forma el grupo 2 de 6º de EP (12 años) proporciona una solución que se sostiene en la corrección matemática de cada paso del procedimiento y de la adecuación de las mediciones y consideraciones realizadas al contexto dado.

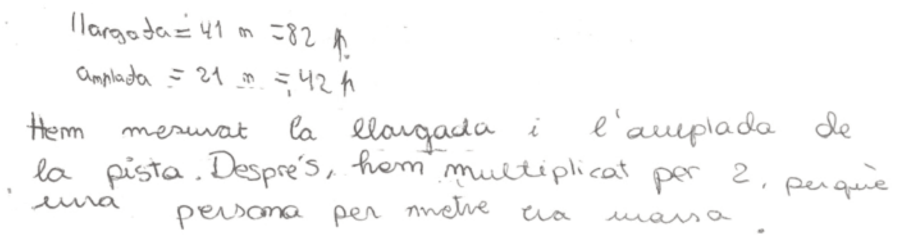


Fig. 4. Resolución de un grupo de alumnos de 6º EP.
"Hemos medido el largo y el ancho de la pista. Después hemos multiplicado por 2 porque una persona por metro era demasiado"

Esta resolución es un ejemplo de razonamiento unidimensional que, sin embargo, incluye una magnitud intensiva (densidad lineal). En efecto, los alumnos no cuentan directamente el número de personas que caben en un metro lineal puestas en fila, sino que estiman el número de personas que caben en un metro lineal y, a partir de la longitud total de cada lado, hallan el número total de personas a lo ancho y a lo largo. Hemos encontrado otras resoluciones con razonamientos unidimensionales que incluyen el concepto de la iteración de la unidad. Tal y como se muestra en la Figura 5, este grupo de alumnos de sexto de EP obtiene, en primer el ancho y el largo de la pista (en centímetros) y, partiendo de la hipótesis de que una persona ocupa 30 cm lineales, obtienen el número de personas que se pueden disponen en cada lado y, de ahí, haciendo el producto, deducen el total.

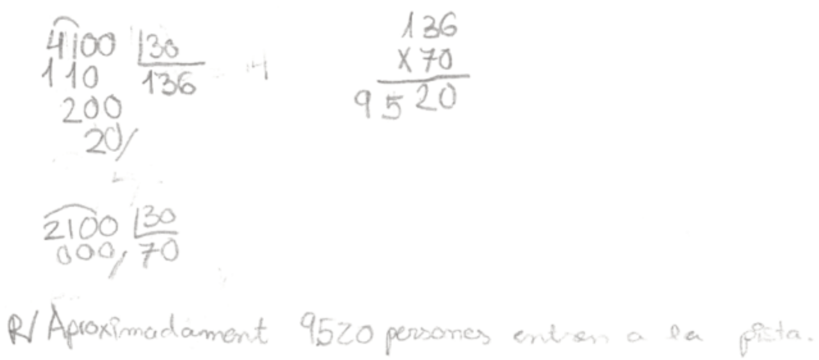


Fig. 5. Resolución de un grupo de alumnos de 6º EP

RESULTADOS

Tal y como hemos detallado en el apartado anterior, hemos diferenciado seis estrategias diferentes de resolución. Cuatro de ellas se basan en razonamientos en los que la aproximación al recuento de personas es de tipo unidimensional y se basan en una representación estática de la distribución de personas en el patio. Estos casos se dividen en dos grupos, los que proponen el encaje de rectángulos y la propuesta de la distribución en cuadrícula. Las resoluciones basadas en este último concepto pueden concretarse en tres procedimientos concretos de recogida de datos, ya sea contando explícitamente todas las personas necesarias para llenar una fila en el patio o calculando esta cantidad a partir de establecer la medida de una unidad o por densidad lineal (personas por metro lineal). Dos estrategias tratan la recogida de datos en el patio a partir de un razonamiento bidimensional y se basan en dos modelos que ya han sido observados y estudiado de forma precisa en trabajos anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013). En concreto nos referimos a la iteración de una unidad en una superficie y el uso de la densidad de población en una superficie.

En la siguiente tabla resumimos las diferentes estrategias y el número de producciones de cada tipo encontradas en cada nivel académico, en negrita están las resoluciones que, debido a diferentes errores, no llegan a una solución adecuada.

Tabla 2. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis

2º EP	**1**	**2**	**3**				
4º EP			3+**1**		1		
6º EP				2	2	**1**+**1**	1
2º ESO				1	1	**1**	2
4º ESO			1			1	4
Estrategias utilizadas	No resuelven	Encajar rectángulos	Recuento exhaustivo	Iteración de la unidad lineal	Densidad lineal	Iteración en superficie	Densidad en superficie
			Cuadrícula			Bidimensional	
		Unidimensional					

Los resultados mostrados en la Tabla 2 permiten distinguir la evolución en las estrategias conforme aumenta el nivel académico de los grupos. Los alumnos más jóvenes, de 2º y 4º de Educación Primaria usan exclusivamente estrategias basadas en los procedimientos asociados a la cuadrícula, sin embargo, en 2º todavía tienen dificultades asociadas a la bidimensionalidad y al algoritmo de la multiplicación. Conforme avanzamos en EP, encontramos algunas estrategias subyacentes algo más complejas tales como la medición de la pista o la estimación del número de personas que se pueden disponer linealmente en un metro. Esta idea intuitiva de densidad evoluciona al saltar al análisis de los grupos de Educación Secundaria, en 2º ya encontramos algunos grupos que utilizan la densidad bidimensional (número de personas por metro cuadrado) y lo hacen de forma adecuada.

Al finalizar la etapa de Educación Primaria algún grupo (en 6º EP) incorpora en su resolución la estrategia basada en utilizar el espacio ocupado por una persona como medida unitaria, este procedimiento permite inferir que los alumnos dominan el cálculo de áreas y el conocimiento de la división como agrupación. Conforme avanzamos en la educación secundaria los alumnos escogen mayoritariamente la estrategia óptima basada en la densidad de población desde el punto de vista bidimensional. Observamos también que los alumnos de 2º de Primaria presentan dificultades para alcanzar un resultado adecuado para la cantidad solicitada en el problema, pero que los alumnos del resto de edades (mayores de 10 años) resuelven mayoritariamente el problema con una estimación adecuada al contexto planteado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio presentado muestra que el problema propuesto admite diversas estrategias de resolución y se aprecia una tendencia en los resultados del estudio al observar el modelo desarrollado en cada etapa educativa. En particular, los alumnos de los primeros cursos de Educación Primaria utilizan de forma mayoritaria la distribución en cuadrícula para resolver el problema. Entendemos que este hecho se sustenta en las dificultades que encuentran al enfrentarse a un problema en el que es indispensable tratar la distribución de personas en una superficie. En concreto, los alumnos de 2º de Primaria utilizan este modelo y lo aplican exclusivamente a partir del conteo directo. Los alumnos de 4º y 6º de Educación Primaria establecen el número de personas necesarias introduciendo los modelos de la iteración de la unidad o de la densidad, tratados ambos de forma lineal. No es hasta 6º de Educación Primaria que encontramos grupos que tratan la superficie del patio como un todo, utilizando la iteración de la unidad y la densidad de población bidimensionales de forma masiva, especialmente en Educación Secundaria. Observamos que en 4º de Educación Secundaria, la densidad de población bidimensional es de uso mayoritario.

El estudio presentado es de tipo exploratorio y presenta algunas limitaciones, aunque permite establecer algunas conclusiones claras, así como orientar futuras investigaciones. Debemos destacar en este punto que este estudio es el que presenta el mayor número de producciones de alumnos analizadas resolviendo problemas de Fermi de los que se pueden encontrar en la literatura. De esta forma, podemos afirmar que las estrategias de resolución identificadas y los modelos en los que se soportan presentan una caracterización fiel de la producción esperable por los alumnos de los distintos grupos de edad. En este sentido los resultados obtenidos en este trabajo son coherentes con los resultados de estudios previos y están relacionadas con las dificultades para dar significado a la bidimensionalidad del área de figuras planas (Corberán, 1996).

Si nos centramos en la distribución de los modelos generados por los alumnos de distintos grupos de edad, entendemos que el presente estudio posee limitaciones que solo pueden superarse a partir de realizar grandes recogidas de datos en diversos centros educativos. En los dos centros en los que se ha implementado la actividad, el trabajo en el aula de matemáticas no incluye la resolución de problemas en contextos reales. Por ello, debemos interpretar los resultados como un esbozo de la situación estudiada, futuros estudios deben ahondar en los detalles para clarificarla. Pese a estas limitaciones, entendemos que los resultados obtenidos y expresados en la Tabla 2 muestran una evolución en los modelos identificados que puede entenderse como una graduación conceptual de los distintos modelos que pueden ser utilizados para resolver el problema. En cualquier caso, no podemos identificar saltos claros en las producciones de los diferentes grupos de edad, observando que grupos de diferentes edades que utilizan estrategias similares. Entendemos que los conocimientos matemáticos y extra-matemáticos de los alumnos son mayores en los niveles superiores y que esta diferenciación es la que explica mayormente las diferencias identificadas, pero no podemos asegurar que el uso de medidas intensivas sea consciente, ni que puedan utilizarlas de forma adecuada en otras actividades.

Las condiciones de la recogida de datos, presentando a los alumnos una actividad en un contexto de investigación y cambiando las condiciones habituales del aula y el papel del docente, nos proporcionan información sobre los modelos emergentes que desarrollan los alumnos por ellos mismos. Así, el trabajo con alumnos entre 2º y 4º de ESO relacionado con el recuento de objetos o personas en una superficie debe permitir introducir los modelos basados en magnitudes intensivas. En cambio, si nos centramos en el trabajo de los alumnos entre 4º y 6º de EP, observamos que el problema utilizado puede utilizarse para que los alumnos sean conscientes de que pueden desarrollar por ellos mismos actividades de modelización y para trabajar aspectos relacionados con la medida (directa e indirecta) de las magnitudes longitud y área.

En el caso de los alumnos de 2º de EP, el problema puede utilizarse para interpretar una situación para ellos compleja y enfrentarse al estudio de las propiedades de las superficies, teniendo en cuenta que es posible anticipar que en el proceso de resolución será necesario realizar una multiplicación y puede ser un buen punto de partida para trabajarla desde el punto de vista conceptual y procedimental (tanto a partir de introducir el algoritmo de la multiplicación como del uso de calculadora). Dado que los estudios sobre los procesos de modelización matemática son escasos si nos centramos en alumnos de menos de 10 años (Stohlman y Albarracín, 2016), el problema utilizado se presenta como una oportunidad para introducir la modelización con alumnos de estas edades y empezar a trabajar con secuencias de problemas que les permitan desarrollar modelos progresivamente más complejos al incorporar nuevos conceptos y procedimientos a los modelos emergentes desarrollados.

Referencias

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(3), 289–315.

Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H., y Gorgorió, N. (2015). Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria. *Epsilon, 32*(89), 19-33.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J. B. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics. En *Proceedings of the 7th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1010-1019). CERME: Rzeszów.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1), 149-171.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). "Filling Up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633).

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde Primaria a la Universidad.* Tesis doctoral. Universitat de València: Valencia.

Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *BOLEMA, 31*(57), 220-242.

Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Erlbaum: Hillsdale.

Jefatura del Estado (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 157-189.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. En S. Ruwisch and A. Peter-Koop (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 454-461) Sydney, Australia: MERGA.

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education, 43*(1), 83.

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange, 40*(2), 205-223.

Stohlmann, M., y Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International*, vol. 2016, Article ID 5240683, 1-9.

[1] Este artículo es fruto de una investigación llevada a cabo en el marco de los proyectos de investigación EDU2015-69731-R y EDU2013-4683-R financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (España) y que ha recibido soporte de la Conselleria d'Educació i Ciencia de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143) y la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (2014 SGR 00723).

APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA DE NUEVO INGRESO DESDE LA PRUEBA DE EVALUACIÓN FINAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Primary teachers´ mathematics common content knowledge when entering the university: clues from a standardized test addressed for Primary students

Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B.

Universidad de Valladolid

Resumen

El conocimiento matemático necesario para una buena docencia en matemáticas en Educación Primaria es un dominio cuya descripción, delimitación y comprensión facilita y orienta el diseño y el desarrollo de programas de formación inicial y permanente de maestros. En este trabajo se realiza una aproximación parcial al conocimiento común del contenido de 298 alumnos de primer curso del Grado en Educación Primaria con anterioridad al inicio de su formación matemática y didáctico-matemática en la universidad, empleando para ello la prueba de evaluación final de la Educación Primaria empleada en el marco LOMCE. Los resultados obtenidos permiten detectar carencias y dificultades que facilitan el establecimiento de elementos para una reflexión orientada al diseño y la utilización de estrategias de apoyo al estudiante en su proceso formativo.

Palabras clave: *Conocimiento Común, Educación Primaria, formación inicial, maestros, matemáticas.*

Abstract

Mathematics Content Knowledge for teaching in Primary Education is a complex domain whose description, delimitation and understanding eases and guides the design and development of initial and on-going teacher training programs. In this work, a partial approximation to Common Content Knowledge of 298 first year students of the Degree in Primary Education is made prior to mathematics education courses at the university. For this purpose, we use a final assessment test for Primary Education as in the LOMCE framework. The results obtained allow us the identification of some deficiencies and difficulties as well as a reflection towards the design and use of strategies for supporting the students through their training process as pre-service teachers.

Keywords: *Common Content Knowledge, Primary Education, initial training, teachers, mathematics.*

INTRODUCCIÓN. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La tasa de alfabetización en España, de acuerdo con la última estadística publicada por el INE en 2015, se sitúa en el 98,1%, entendiéndose como el porcentaje de personas con 15 años o más que son capaces de leer y escribir frases sencillas sobre su vida. Siendo este dato positivo, se observa que en su definición no se incluyen referencias a competencia numérica alguna, lo que permite una compatibilidad teórica entre alfabetismo, por un lado, y anumerismo (Paulus, 2000), por otro.

La preocupación por el nivel de alfabetización matemática como pieza clave para el desarrollo sostenible y justo de las sociedades modernas llevó a la UNESCO a crear en 2009 el Grupo Internacional de Expertos en Educación Científica y Matemática. Este grupo ha elaborado el informe Retos de la

Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119-128). Zaragoza: SEIEM.

Educación Matemática Básica (UNESCO, 2012) que recoge, en su Capítulo 5, un análisis de situación del profesorado de matemáticas de los niveles elementales y, en particular, de su formación, tanto inicial como permanente. En el mencionado informe se sitúa al profesorado en el foco prioritario de atención como reto fundamental para la consecución de una educación matemática de calidad para todos.

El propósito principal de este estudio queda vinculado al establecimiento de un diagnóstico de conocimiento común del contenido dentro de los límites propios de la educación matemática en Primaria, interpretando conocimiento común del contenido en el sentido dado por Ball, Thames y Phelps (2008). Estos autores entienden el conocimiento común como:

> … el conocimiento matemático y habilidades empleadas en contextos diferentes del docente. Los docentes deben conocer lo que enseñan; deben reconocer cuándo los estudiantes ofrecen respuestas erróneas o cuándo el libro de texto presenta definiciones imprecisas. Cuando escriben en la pizarra necesitan utilizar términos y notación correctamente. En resumen, deben ser capaces de hacer aquello que enseñan a sus estudiantes. (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 399, traducción personal)

Con respecto a los antecedentes expuestos en el siguiente apartado, nuestro estudio es diferencial al haber utilizado una prueba competencial estandarizada y propia del nivel educativo para el que los estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM) se están formando como profesionales. Se limita y focaliza el acercamiento al conocimiento común del contenido a un acercamiento a su núcleo elemental en el contexto en el que se genera el estudio, esto es, aquel que da cuenta del conocimiento no especializado por parte de los EPM de aquello que habrán de enseñar en las aulas. Así, los objetivos que se persiguen en este estudio son:

- Conocer el nivel de competencia matemática que los EPM muestran en el comienzo de su formación inicial al enfrentarse a una prueba competencial diseñada para estudiantes de 6º de Primaria.
- Identificar y analizar dificultades y debilidades de los EPM en el ámbito del conocimiento común del contenido matemático propio de la Educación Primaria.
- Establecer elementos para una reflexión orientada al diseño y utilización de estrategias de apoyo que permitan mejorar el conocimiento común del contenido de los EPM.

Consideramos relevante en este punto, de cara a contextualizar mejor la investigación, indicar que los resultados de la evaluación diagnóstica dirigida al subdominio del conocimiento matemático común de los EPM que se presentan en esta comunicación proceden de un estudio de diagnóstico más amplio, que incluye también una evaluación del dominio afectivo-emocional hacia las matemáticas que no es objeto de esta comunicación.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Son múltiples las aportaciones realizadas en la investigación educativa alrededor del concepto de modelo competencial profesional docente. En particular, tanto el modelo de Ball et al. (2008), inspirado en el de Shulman (1986), como el modelo MTSK de Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), que lo refina, abordan la caracterización del conocimiento que un buen docente en matemáticas debe poseer.

Tomando estos marcos teóricos como referencia, es posible identificar sobre qué subdominios centra su atención la formación inicial de futuros maestros de Primaria que se lleva a cabo en las universidades (Arias, 2015), observándose que el conocimiento común del contenido, entendido este como un conocimiento matemático no inherente a los contextos propios de la docencia (Ball et. al 2008, p.399) es, fundamentalmente, objeto de atención y desarrollo en los niveles preuniversitarios. Ahora bien, estudios internacionales como PISA y TEDS-M (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012), entre otras aportaciones relevantes de los mismos, permiten identificar ciertas debilidades del conocimiento común antes del inicio de la formación universitaria, en el caso del primero, y tras el paso por las aulas universitarias de los maestros en formación, en el caso del segundo. Este hecho apoya la necesidad de que tal conocimiento sea también reexaminado, cuestionado o ampliado durante la formación inicial de los EPM, como indica Llinares (2011).

El análisis del conocimiento matemático común en EPM es un tema de crucial interés en Didáctica de la Matemática, como atestigua el número de estudios existente sobre esta cuestión. Algunos se han realizado durante la formación inicial o en la parte final de esta (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2016; Sáenz, 2007), pero un número importante han pretendido analizar la situación de entrada en el grado, antes de iniciar su formación en Didáctica de la Matemática, y a modo de evaluación diagnóstica. Ejemplos de ello son los trabajos de Ryan y McCrae (2005/2006) y de Nortes y Nortes (2013), con pruebas de un nivel equivalente a la Secundaria Obligatoria, bien estandarizadas o creadas y validadas ad hoc; o las investigaciones de Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo (2015), junto con las de Liñán y Contreras (2013), con cuestionarios diseñados y validados por sus autores para analizar el conocimiento común inicial sobre Aritmética y Geometría, respectivamente.

Estos estudios muestran algunas fortalezas en el conocimiento común de los EPM, pero también debilidades importantes. Teniendo en cuenta que el conocimiento matemático es imprescindible, aunque no suficiente, para el desarrollo del conocimiento didáctico (Tatto et al., 2012) y para la gestión y el abordaje de situaciones didácticas asociadas a un conocimiento matemático (Montes et al., 2015), siguen abiertos debates trascendentales en la formación de maestros, como el que busca determinar el conocimiento matemático fundamental (en el sentido de Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014) que un EPM debe poseer al comenzar su formación inicial o el que se orienta a la revisión de los requisitos de acceso al grado.

En este estudio el conocimiento común evaluado se limita a aquel que un EPM debe compartir con sus potenciales alumnos. Por ello, el diagnóstico está orientado a comprobar si el docente en formación es capaz de hacer aquello que se supone que va a tener que enseñar y exigir a sus futuros alumnos en términos de conocimiento matemático, lo que nos sitúa, a su vez, ante la necesidad de describir qué marco de competencia matemática emplear con tal propósito. En este sentido, se ha considerado razonable considerar el marco en el que se apoya el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para diseñar la prueba de evaluación final de Educación Primaria. Ese marco es el definido por la Dirección General de Educación y Cultura de la Comisión Europea (2007) en su informe sobre competencias clave para la formación permanente, y según el cual competencia matemática es:

> La habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña, en distintos grados, la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas) (pág. 64).

Una evaluación desde este marco competencial centrada en el conocimiento común de los EPM, limitado este al propio de la Educación Primaria, realizada en el momento en el que acceden a la titulación y realizada en condiciones de contorno similares a las de los propios alumnos de Educación Primaria cuando finalizan su formación matemática en esta etapa, nos permitirá no solo diagnosticar fortalezas y debilidades en los niveles más elementales del mencionado subdominio del conocimiento matemático para la enseñanza, sino también establecer comparativas con los resultados ofrecidos por los propios alumnos de Primaria facilitando, a su vez, la identificación de potenciales generadores de obstáculos de tipo didáctico.

CONTEXTO Y MÉTODO

Instrumento utilizado: la prueba de evaluación final de 6º de Primaria

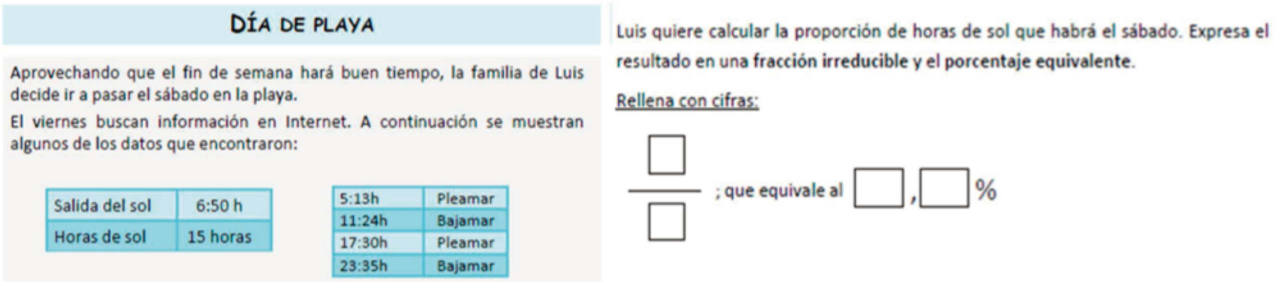
Teniendo en cuenta los objetivos del estudio, su alcance y los marcos teóricos en los que se apoya, el instrumento de medición seleccionado fue la prueba final externa de evaluación de Educación Primaria que establece la LOMCE (MECD, 2013). En particular, su versión diseñada para el curso 2015-2016. Así, el instrumento fue seleccionado a partir de los criterios mencionados previamente, especialmente en términos de coherencia, disponibilidad, estandarización y comparabilidad con resultados procedentes de su aplicación en aulas de Primaria, sin que ello suponga ningún juicio a priori sobre la calidad del propio instrumento ni la renuncia a la generación, en futuros estudios, de instrumentos ad hoc para profundizar en la investigación iniciada.

La prueba empleada atiende a los marcos teóricos propios de TIMSS y PISA para organizar los ítems que la conforman, en función de contextos, contenidos y procesos. Así, se fijan cuatro contextos o situaciones (MECD, 2014, pp. 65-66): personal, escolar, social y científico o humanista. Los contenidos se vinculan casi por completo con los bloques de contenidos fijados por la LOMCE, a excepción del correspondiente a *Procesos, métodos y actitudes matemáticas*, que recibe un tratamiento transversal; y del de *Estadística y Probabilidad*, que se renombra como *Incertidumbre y Datos*. Los otros tres bloques son: *Números, Medida y Geometría*. Por último, en lo concerniente a los procesos cognitivos se tienen en cuenta tres grupos de procesos, tal y como quedan descritos en MECD (2014, pp. 67-68): *Conocer y reproducir, Aplicar y analizar, y Razonar y reflexionar*. Para cada uno se establecen dos niveles, cuya descripción se reproduce en la Figura 1.

Procesos		Descripción	Acciones
Conocer y reproducir	Acceso e identificación	Acciones de recordar y reconocer los términos, los hechos, los conceptos elementales del conocimiento matemático y de reproducir algoritmos.	Nombrar, definir, encontrar, mostrar, imitar, listar, contar, recordar, reconocer, localizar, reproducir, relatar.
	Comprensión	Acciones para captar el sentido y la intencionalidad de textos de lenguaje matemático y de códigos relacionales e interpretarlos para resolver problemas.	Explicar, ilustrar, extractar, resumir, completar, traducir a otros términos, aplicar rutinas, seleccionar, escoger.
Aplicar y analizar	Aplicación	Aptitud para seleccionar, transferir y aplicar información para resolver problemas con cierto grado de abstracción y la de intervenir con acierto en situaciones nuevas.	Clasificar, resolver problemas sencillos, construir, aplicar, escoger, realizar, desarrollar, entrevistar, organizar, enlazar, utilizar.
	Análisis	Posibilidad de examinar y fragmentar la información en partes, encontrar causas y motivos, realizar inferencias y encontrar evidencias que apoyen generalizaciones.	Comparar, contrastar, demostrar, experimentar, planificar, resolver, analizar, simplificar, relacionar, inferir, concluir.
Razonar y reflexionar	Síntesis y creación	Acciones de recoger información y relacionarla de distintas formas, establecer nuevos patrones y descubrir soluciones alternativas.	Combinar, diseñar, imaginar, inventar, planificar, predecir, proponer, adaptar, estimar.
	Juicio y valoración	Capacidades para formular juicios con criterio propio, cuestionar tópicos y exponer y sustentar opiniones fundamentadas.	Criticar, concluir, determinar, juzgar, recomendar, reformular, establecer criterios y/o límites.

Figura 1. Descripción de los grupos de procesos cognitivos considerados y las acciones asociadas

La prueba puede consultarse y descargarse en la siguiente dirección web:bit.ly/2kDjaLU. Se estructura en torno a siete unidades de evaluación, cada una compuesta por la introducción de una situación contextualizada, a modo de estímulo, junto con una serie de preguntas ligadas a la misma (unas cinco por unidad) e independientes entre sí. La prueba consta de 35 preguntas, de elección múltiple o de respuesta corta (dar un resultado), aunque la Pregunta 7, que pedía dos respuestas distintas, fue codificada como dos preguntas diferentes, por lo que la prueba se ha considerado conformada finalmente por 36 cuestiones. De ellas, 12 corresponden al bloque de *Números*, 8 a *Geometría*, 9 a *Medida* y 7 a *Incertidumbre* y datos. Durante el texto, nos referiremos a cada pregunta con una P seguida de su número, con la salvedad de la mencionada pregunta 7. La Figura 2 ilustra la introducción de una situación junto con las preguntas P7a (fracción irreducible) y P7b (porcentaje equivalente). Ambas preguntas corresponden al bloque de *Números*, y se ubican en el nivel de Síntesis y creación (dentro los procesos de *Razonar y reflexionar*), dado que en ellas es necesario combinar la información presentada en el estímulo con información no presente (número de horas de un día) y proponer respuestas utilizando dos formas solicitadas de expresar una razón.


DÍA DE PLAYA

Aprovechando que el fin de semana hará buen tiempo, la familia de Luis decide ir a pasar el sábado en la playa.

El viernes buscan información en Internet. A continuación se muestran algunos de los datos que encontraron:

Salida del sol	6:50 h
Horas de sol	15 horas

5:13h	Pleamar
11:24h	Bajamar
17:30h	Pleamar
23:35h	Bajamar

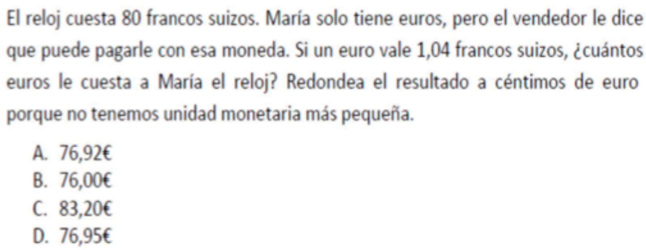
Luis quiere calcular la proporción de horas de sol que habrá el sábado. Expresa el resultado en una **fracción irreducible** y el **porcentaje equivalente**.

Rellena con cifras:

; que equivale al ___,___ %

Figura 2. Ejemplo de estímulo (izquierda) y preguntas P7a y P7b de la prueba (derecha)

La Figura 3 muestra otro ejemplo de pregunta (P18), correspondiente al bloque de *Medida* y ubicada en el nivel de *Aplicación* (dentro de los procesos de *Aplicar y analizar*). La resolución conlleva la selección y aplicación de la información del enunciado para resolver un problema sencillo de proporcionalidad directa asociado a una conversión monetaria.


El reloj cuesta 80 francos suizos. María solo tiene euros, pero el vendedor le dice que puede pagarle con esa moneda. Si un euro vale 1,04 francos suizos, ¿cuántos euros le cuesta a María el reloj? Redondea el resultado a céntimos de euro porque no tenemos unidad monetaria más pequeña.

A. 76,92€
B. 76,00€
C. 83,20€
D. 76,95€

Figura 3. Ejemplo de pregunta de la prueba: P18 (situación que involucra la proporcionalidad)

Contexto. Participantes en el estudio

En el estudio han participado 298 EPM de primer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid (campus de Valladolid y Segovia), 46 de ellos cursando el Plan de Estudios Conjunto formado por el Grado en Educación Infantil y el Grado en Educación Primaria.

La realización de la prueba fue voluntaria, si bien el porcentaje sobre el total de matriculados se situó en un 72%, lo que supone un elevado índice de materialización de la muestra teórica por conveniencia seleccionada. Teniendo en cuenta que, de acuerdo con Cebolla y Garrido (2012, pág. 51), España es un sistema de alta equidad inter-centros, donde tan solo un 2% de la varianza total del conocimiento matemático de los futuros maestros en matemáticas parece deberse a su agrupación en facultades, los resultados de este estudio presentan un alto potencial exploratorio con el que orientar futuros estudios que abarquen muestras de mayor amplitud y representatividad.

Recogida y análisis de los datos

La prueba se desarrolló durante la primera semana de la primera asignatura sobre matemáticas y su didáctica de que constan las titulaciones, en un aula habilitada a tal efecto, en condiciones simuladas de examen bajo la supervisión de los propios docentes y durante un tiempo total de una hora. Las respuestas de los EPM a cada uno de los ítems de la prueba fueron recogidas a través de formularios de respuesta en papel o de formularios en línea, indistintamente, en función del tipo de aula en el que se desarrolló la prueba y del número de conexiones a red disponibles.

Este estudio sigue un paradigma descriptivo-interpretativo, analizándose los datos distinguiendo dos niveles de análisis. En primer lugar, y tras el volcado y la codificación de los datos, se realizó un análisis global de las respuestas. Posteriormente, en una segunda etapa, se llevó a cabo un análisis particular de las preguntas con menor porcentaje de éxito, recurriendo a procesos de triangulación de investigadores (Lincoln y Guba, 1985) para interpretar los errores y dificultades en el marco del conocimiento común del contenido analizado. Los resultados se presentan separados en dos secciones, de acuerdo con los dos niveles de análisis establecidos.

RESULTADOS OBTENIDOS EN EL ANÁLISIS GLOBAL DE LAS RESPUESTAS

En este apartado describimos los resultados obtenidos al analizar globalmente el carácter correcto o no de las respuestas dadas por los EPM a las preguntas de la prueba competencial. La Tabla 1 contiene el valor de los principales estadísticos descriptivos de la variable "Número de respuestas correctamente respondidas por un EPM".

Tabla 1. Resumen de estadísticos asociados al número de preguntas correctamente respondidas

Estadístico	*Media*	*Primer cuartil*	*Mediana*	*Tercer cuartil*	*Moda*	*Desviación Típica*
Valor	28,16	25	29	32	32	5,137

El diagrama de barras de la Figura 4 muestra la distribución frecuencial de la mencionada variable.

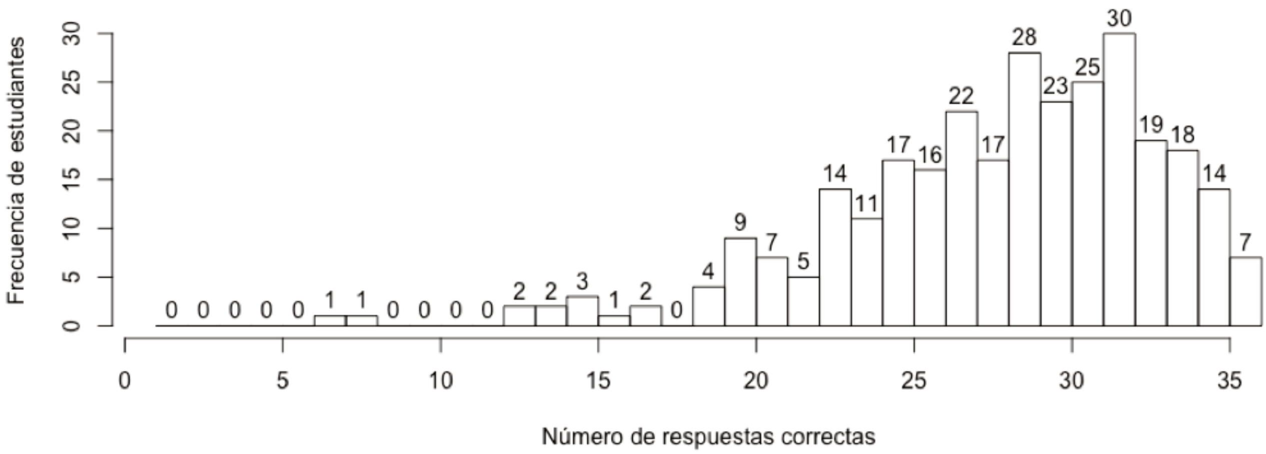


Figura 4. Diagrama de barras que ilustra la frecuencia según el número de RC

La media de la variable ha sido 28'16 respuestas correctas (de ahora en adelante, RC), del total de 36 preguntas, con una desviación típica de 5'137. La Figura 4 muestra una distribución desplazada a la derecha, con las frecuencias más repetidas en valores superiores a la media, correspondiendo el valor 29 a la mediana y el valor 32 a la moda y al tercer cuartil. Es destacable la variabilidad existente en el número de RC ante una prueba competencial dirigida a alumnos de 6º de Primaria. Hay 21 estudiantes que han respondido correctamente todas las preguntas, o todas salvo una. Por el contrario, el primer cuartil se sitúa en 25, por lo que casi la cuarta parte de los EPM no ha dado la respuesta correcta en al menos dos tercios de las preguntas. Este resultado evidencia la presencia de limitaciones en un conocimiento común propio de Educación Primaria en algunos EPM.

Describimos a continuación los resultados realizando la distinción según los cuatro bloques de contenido y según los seis procesos cognitivos utilizados en el marco teórico de la prueba. La Tabla 2 presenta el promedio de RC asociado a cada contenido y a cada proceso cognitivo. Se ha considerado el uso de una escala 0-10 para facilitar la lectura y comparación de la información.

Tabla 2. Promedio de respuestas correctas (RC) dentro de cada bloque de contenido y cada proceso cognitivo (escala 0-10)

Bloque de contenidos	*Promedio de RC (0-10)*	*Proceso cognitivo*	*Promedio de RC (0-10)*
Números	7,733	Acceso e identificación	8,569
Medida	7,213	Comprensión	8,300
Geometría	7,689	Aplicación	7,466
Incertidumbre y datos	8,749	Análisis	8,379
		Síntesis y creación	6,738
		Juicio y valoración	8,036

Los promedios mostrados en la Tabla 2 evidencian la existencia de una diferencia apreciable en el promedio de RC según el bloque de contenidos. El promedio dentro del bloque *Incertidumbre y datos* fue más de un punto mayor (en la escala 0-10) al de los otros tres bloques, por lo que los contenidos ligados a este bloque, en lo referente a su formulación en Educación Primaria, parecen revelarse como una fortaleza del conocimiento común inicial de los EPM, sin descartar que otra posible interpretación pudiera situarse en una debilidad propia del instrumento de evaluación. Las preguntas de este bloque con un mayor porcentaje de RC han sido las asociadas a la lectura e interpretación de datos extraídos de tablas y gráficas (P10, P20, P34) y a situaciones sencillas de cálculo de probabilidades (P4). En el otro extremo, el menor promedio está ligado a las preguntas del bloque de *Medida*. Las mayores debilidades se han detectado en preguntas asociadas a la conversión entre unidades de medida (como el ítem P18, Figura 3) y en la resolución de situaciones que involucran la magnitud tiempo (P13, P19, P23).

En relación con los procesos cognitivos, y como puede verse en la Tabla 2, el promedio de RC ha sido superior a 8 (en la escala 0-10) en cuatro de los seis grupos de procesos. En los otros dos grupos los EPM parecen mostrar ciertas debilidades. Las preguntas asociadas al nivel de procesos *Síntesis y creación* han tenido el menor promedio, revelando dificultades en la resolución de situaciones en las que hay que recoger información de la situación dada y transformarla o relacionarla con otros aspectos u otros conocimientos para dar una respuesta (ejemplos: ítems P7a y P7b, Figura 2). El promedio también es algo menor en el proceso de *Aplicación*, que involucra la selección de información y su aplicación para resolver situaciones (ejemplo: ítem P18, Figura 3).

El análisis del porcentaje de RC pregunta por pregunta constata la presencia de quince preguntas con un porcentaje de aciertos superior al 85%, en gran medida ligadas al primer grupo de procesos cognitivos, *Conocer y reproducir*, y al nivel *Análisis* del grupo *Aplicar y analizar*. La mayoría de los EPM han mostrado un nivel competencial suficiente para resolverlas satisfactoriamente. En el extremo opuesto, hay nueve preguntas en las que el porcentaje de RC ha sido inferior al 70%, muchas de ellas asociadas a los niveles destacados en el párrafo anterior (*Síntesis y creación*, y *Aplicación*). Estas preguntas pueden manifestar una serie de debilidades en el conocimiento común más elemental del contenido por parte de los EPM, cuyo análisis en mayor profundidad como parte de la evaluación diagnóstica inicial se torna interesante y necesario. En este sentido, se ha realizado un análisis más particularizado de estas preguntas, para detectar qué contenidos o qué procesos, según el tipo de pregunta y las opciones de respuesta ofrecidas, subyacen en esas respuestas.

INTERPRETACIÓN DE LAS DIFICULTADES MÁS FRECUENTES EN TÉRMINOS DEL CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO

Los procesos de triangulación de investigadores en relación con las interpretaciones dadas a las respuestas erróneas en aquellas preguntas en las que el porcentaje de RC ha sido menor, o en las que alguna opción incorrecta ha sido marcada por un número considerable de EPM, nos ha permitido detectar cuatro focos de dificultad ligados al conocimiento común del contenido matemático entre los EPM participantes. Esos cuatro focos, que ilustraremos a continuación mostrando la interpretación realizada en varias de las preguntas, han sido:

- Resolución de situaciones de proporcionalidad directa y porcentajes.
- Desconocimiento de hechos asociados a la geometría o a la medida o su aplicación errónea.
- Interpretación de resultados en situaciones que involucran la magnitud tiempo (sistema sexagesimal).
- Comprensión de los textos donde se explica la situación y los datos y se pide una respuesta.

La pregunta P18 (ver Figura 3) involucra una conversión de unidad monetaria, en una situación donde existe proporcionalidad directa (razón: 1 euro son 1’04 francos suizos). En esta pregunta, un total de 95 EPM (casi la tercera parte del total) marcaron la opción C, 83’20€, resultado que se obtiene al multiplicar 80 por 1’04. La reflexión sobre esta respuesta nos condujo a una doble interpretación de la misma. Por una parte, podría existir un error en el planteamiento o en la resolución de la situación de proporcionalidad, que termina con la realización de una multiplicación en lugar de una división. Pero, por otra parte, pudiera ser que estos estudiantes no hayan comprendido el enunciado y sus datos de forma adecuada y, por ejemplo, hubieran entendido la conversión de las monedas en el sentido inverso (es decir, 1 franco suizo son 1’04 euros).

Aunque con una menor frecuencia, se aprecian algunas dificultades en preguntas que involucraban el cálculo de porcentajes, tanto en el cálculo del porcentaje que representa una parte de un total en un contexto discreto (P15) como en la identificación entre expresión decimal de una fracción y porcentaje en la pregunta P7b (ver Figura 2), dificultad también detectada por Montes et al. (2015).

En la pregunta P9 ha habido una respuesta errónea marcada por una cantidad apreciable de EPM. En esta pregunta se pedía contestar cuánto sumaban los cuatro ángulos del cuadrilátero que formaba una cometa, acompañándose de una representación gráfica en la que se marcaban los cuatro ángulos interiores, pero sin referencia alguna al valor de cada uno. Un total de 72 EPM (casi la cuarta parte) señalaron la opción D, “No tengo suficiente información”, pareciendo destacar la necesidad de tener las medidas para dar una respuesta. En esta respuesta, a una pregunta que es codificada dentro del proceso cognitivo *Síntesis y creación*, también hemos encontrado varias interpretaciones posibles. Una de ellas es el desconocimiento de un hecho o propiedad geométrica (la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º) que podría aplicarse directamente para resolver P9. Otra es que también desconozcan la propiedad análoga para el triángulo, que les hubiera servido para llegar al resultado. Y la última es que, conociendo el hecho geométrico para el triángulo, no lo hayan relacionado con esta situación, a través de la descomposición del cuadrilátero en dos triángulos (procedimiento que puede ser más propio del proceso cognitivo en el que se situó la pregunta).

Otras preguntas han evidenciado errores que se han interpretado dentro del desconocimiento o la aplicación errónea de hechos asociados a la *geometría* y la *medida*, como P11 (equivalencia entre las medidas de capacidad y volumen, resultado también detectado por Nortes y Nortes, 2013) o P3.

P23 y P7a fueron las preguntas con el menor porcentaje de RC. En la pregunta P23 se pedía calcular, y expresar en horas y minutos, el tiempo total semanal (de lunes a viernes) que tarda un niño en ir a su colegio en autobús, sabiendo que cada día tarda 20 minutos en ir y 25 en volver. La pregunta era de respuesta abierta. De los 140 EPM (un 47% del total) que dieron una respuesta errónea, 78 escribieron "4 horas y 15 minutos" o "3 horas y 75 minutos". Ha existido coincidencia entre los investigadores participantes en la triangulación al interpretar la obtención de este resultado a partir de una interpretación errónea de la parte decimal, considerando en ese momento que el sistema de medida del tiempo fuera centesimal y no sexagesimal (Ryan y McCrae, 2005/2006).

La pregunta 7a (ver Figura 2), también de respuesta abierta, tuvo más respuestas incorrectas (136) que correctas (122). Entre las incorrectas, 110 EPM contestaron 15/24, que representa una fracción de horas correcta, pero no irreducible. La triangulación de investigadores interpretó el resultado a partir de una mala comprensión del enunciado verbal, en el que se obvia una de las condiciones; aunque pudiera ser que algunos EPM desconocieran el significado de "fracción irreducible". En P12 también se ha interpretado un error frecuente a partir de una mala comprensión del enunciado.

A modo de resumen, aunque las preguntas con un porcentaje menor de acierto se situaban dentro de los procesos cognitivos de *Aplicación* y de *Síntesis y creación*, en varios casos se ha interpretado que los errores encontrados también pueden mostrar dificultades ligadas a procesos de niveles anteriores, como el de *Acceso e Identificación* (por ejemplo, al no recordar o conocer hechos y propiedades elementales que resuelven directamente un problema) o el de *Comprensión* (al tener problemas para captar el sentido e intencionalidad de un enunciado verbal o para interpretarlo).

HACIA EL DISEÑO Y UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS DE APOYO AL EPM

La aproximación realizada en este estudio al diagnóstico de una parte elemental del conocimiento común del contenido que necesita un maestro de Primaria, a través de una prueba competencial estandarizada diseñada para 6º de Primaria, no nos permite concluir si un EPM tiene, al comenzar su formación inicial, un conocimiento matemático fundamental (en el sentido de Castro et al., 2014) suficiente; pero sí detectar carencias y limitaciones en conocimientos básicos propios de ese nivel.

Los resultados muestran la existencia de dificultades importantes en preguntas relacionadas con el bloque de *Medida*, en particular en la conversión y las equivalencias entre magnitudes, y en la interpretación de medidas. Esta dificultad, como indican Liñán y Contreras (2013), quizá esté asociada a un aprendizaje previo de la medida de tipo memorístico y basado en reglas, sin haber desarrollado un aprendizaje significativo sobre el proceso natural de medir. También se han detectado diferencias importantes en la lectura e interpretación de datos según su formato de presentación, mostrándose mayoritariamente un nivel competencial suficiente cuando los datos han de extraerse de tablas y gráficas, pero evidenciándose dificultades cuando los datos provienen de la lectura y comprensión de un enunciado verbal, o cuando deben combinarse esos datos con otros conocimientos para resolver una situación (proceso cognitivo de *Síntesis y creación*).

Aunque la prueba competencial seleccionada tiene algunas limitaciones como instrumento de investigación (por ejemplo, que el tipo de respuesta solicitada proporciona poca información sobre los procesos seguidos por el EPM que dan lugar al resultado, y permite dar una respuesta correcta por azar), su utilización nos permitirá comparar los resultados obtenidos por los EPM con los resultados de los propios alumnos de Educación Primaria, aspecto que aquí no se aborda.

La variabilidad entre los EPM y las limitaciones detectadas en la parcela específica de conocimiento común aquí analizada, que parecen mostrar conocimientos sesgados, olvidados o poco significativos, refuerzan la necesidad de cuestionar y reexaminar ese conocimiento común durante la formación inicial (Llinares, 2011). Así, consideramos imprescindible diseñar y establecer medidas de apoyo complementarias al trabajo en el aula, medidas que les permitan avanzar en su conocimiento común, retroalimentar su conocimiento especializado y contribuir a generar reflexiones de carácter didáctico como parte de su proceso formativo. En ese sentido, una iniciativa puesta en marcha en el contexto en el que se ha realizado este estudio ha sido la incorporación de Smartick como herramienta de apoyo a su trabajo autónomo pero, también, como recurso para la discusión y la reflexión sobre cuestiones vinculadas al conocimiento pedagógico del contenido.

Referencias

Arias, J. R. (2015). *Conocimiento matemático para la enseñanza en la formación inicial de maestros de Primaria: el caso de las propiedades aritméticas de las operaciones suma y multiplicación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turquía: ERME.

Cebolla, H. y Garrido, L. (2012). Los efectos de la educación universitaria en el conocimiento en matemáticas en España y en EEUU: Evidencias del cuestionario TEDS-M. En TEDS-M. *Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 41-59).

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Comisión Europea (2007). *Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo*. Luxemburgo: Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio. *Educación XX1, 19*(1), 135-158.

Lincoln, Y. S., y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Londres, Reino Unido: Sage.

Liñán, M. M. y Contreras, L. C. (2013). Debilidades y fortalezas en el conocimiento de los temas matemáticos en geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78*, 5-16.

MECD (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, 295, 97858-97921.

MECD (2014). *Marco general de la evaluación final de Educación Primaria*. Recuperado el 10 de octubre de 2016 de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/evaluacionsextoprimaria/marco-teorico-evaluacion-final-6ep.pdf?documentId=0901e72b81cf991d

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*, 36-62.

Nortes, A. y Nortes, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17*(3), 185-200.

Paulus, J. (2000). *El hombre anumérico: Analfabetismo matemático y sus consecuencias*.Madrid: Alfaguara.

Ryan, J. y McCrae, B. (2005/2006). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. Mathematics *Teacher Education and Development, 7*, 72-89.

Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 355-366.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L., y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam, Países Bajos: IEA.

UNESCO. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. París, Francia: UNESCO. Recuperado el 15 de junio de 2016 de http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN ESTUDIANTES DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Reading levels of statistical graphs in vocational training students

Arteaga, P.[a], Vigo, J.M.[b] y Batanero, C.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]IES Puertas del Campo, Ceuta

Resumen

En esta investigación realizamos un estudio exploratorio de evaluación del nivel de lectura de gráficos estadísticos por alumnos de 1º y 2º curso de Formación Profesional Básica (FPB) de la especialidad de Peluquería y Estética, antes de la enseñanza formal del tema. Proponemos una clasificación de niveles de lectura que combina las clasificaciones previas de Curcio y Bertin y evaluamos el nivel alcanzado en dicha clasificación en una tarea que pide comparar las tendencias de dos series de datos y predecir datos nuevos. Se observa mejor desempeño en los alumnos de 2º curso, aunque ninguno llega al nivel máximo teórico de lectura del gráfico.

Palabras clave: *Gráficos estadísticos, lectura crítica, Niveles de lectura, enfoque ontosemiótico*

Abstract

In this paper we present an exploratory study to evaluate the reading level reached by 1st and 2nd year Vocational Training students of the specialty of hairdressing and aesthetics before the formal teaching of the subject. We propose a classification of reading levels that combines the previous classifications by Curcio and Bertin and we evaluate the reading level reached by the students using the previous classification in a task where students compare the tendencies of two data series and to predict new data. We observe a better performance in the 2nd year students, although none of them reaches the theoretical maximum reading graph level.

Keywords: *Statistical graphs, critical reading, reading levels, onto-semiotic approach*

INTRODUCCIÓN

Debido a su presencia en los medios de comunicación y el trabajo profesional, una persona con una educación básica debiera poder interpretar los gráficos estadísticos elementales (Sharma, 2013), cuya presencia ha aumentado mucho con los avances tecnológicos (Gal y Murray, 2011; Kemp y Kissane, 2010). Esta interpretación no puede reducirse a una lectura literal del gráfico, sino que se debe poder identificar las tendencias y variabilidad de los datos y obtener conclusiones sobre la información representada (Schield, 2011), pues dichas competencias forman parte de la cultura estadística (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2011). Esta importancia hace que los gráficos se incluyan en la enseñanza primaria y en los libros de texto (Díaz-Levicoy, Batanero y Arteaga, 2015), además de estar presentes en muchas materias escolares, aparte de las matemáticas. Finalmente, en el futuro trabajo profesional de los estudiantes, pueden encontrar gráficos estadísticos; como el utilizado en nuestro cuestionario, que ha sido tomado de estudios estadísticos realizados en la especialidad de los estudiantes de nuestra muestra.

En este trabajo nos centramos específicamente en la interpretación de los gráficos estadísticos en una muestra de estudiantes de Formación Profesional Básica en los primeros cursos. Dentro de la Formación Profesional Básica (MECD, 2014) las matemáticas no aparecen como materia independiente,

Arteaga, P., Vigo, J.M. y Batanero, C. (2017). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de Formación Profesional. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 129-136). Zaragoza: SEIEM.

sino que forman parte del módulo de Ciencias Aplicadas, donde los gráficos estadísticos aparecen en el apartado denominado “Interpretación de gráficos”, donde se combinan gráficos deterministas y estadísticos. Para alcanzar las citadas competencias, se dan una serie de líneas de orientaciones pedagógicas. En particular, en el libro de texto usado por los alumnos de la muestra (Brandi, 2015), se incluyen histogramas, gráficos de barras, polígono de frecuencias, gráfico de sectores y pictogramas. Respecto a ellos se pide al alumnado representarlos, traducir datos en tablas o gráficos, identificar el gráfico estadístico que mejor se adapte a unos datos y actividades de lectura de gráficos.

El objetivo de esta investigación es realizar un estudio exploratorio de evaluación para determinar los niveles de lectura de gráficos estadísticos que alcanzan los alumnos de 1º y 2º curso de Formación Profesional Básica (FPB) de la especialidad de Peluquería y Estética, antes de la enseñanza formal del tema. Puesto que la muestra es pequeña y se trata de un alumnado del mismo centro educativo, no tratamos de generalizar los resultados a otro alumnado o contexto. Con ello completamos nuestras investigaciones previas (Arteaga y Batanero, 2010; Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2015).

FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

Nos basamos en trabajos que definen niveles de lectura en la lectura e interpretación de gráficos, y en investigaciones sobre niveles de lectura en chicos/as de edades similares a los de nuestra muestra.

Bertin (1967) indica que la lectura de un gráfico comienza por una identificación externa (comprensión de título y etiquetas para identificar qué fenómeno o parte de la realidad se representa). Posteriormente se realiza una identificación interna (ver qué variables están representadas, cuál es el significado de las variables y cuál es la escala usada para cada una de ellas). Seguidamente se necesita establecer una correspondencia para obtener conclusiones sobre las relaciones representadas en el gráfico así como la forma en que estas relaciones reflejan otras existentes en la realidad representada. Teniendo en cuenta todo ello el autor define diversos niveles de lectura de un gráfico:

- *B1: Extracción de los datos*: Es el nivel más básico, donde sólo se lee exactamente lo que hay en el gráfico. Por ejemplo, la frecuencia que corresponde a un cierto valor de una variable. No hay operaciones ni comparaciones de datos.
- *B2. Extracción de las tendencias*: Implica la percepción entre la relación de dos o más subconjuntos de datos que intervienen en el gráfico. Para ello hay que operar con los datos o compararlos entre sí. Por ejemplo, cuando se pide identificar el valor de mayor o menor frecuencia en un gráfico.
- *B3: Análisis de la estructura de los datos*: Comparación de tendencias en dos o más variables o grupos. Cuando, por ejemplo, se comparan las modas o rangos de dos conjuntos de datos representados sobre el mismo gráfico.

Dicha clasificación fue ampliada por Curcio (1989) quien estableció los siguientes niveles::

- *C1: Leer los datos*: Lectura literal de la información representada en el gráfico. Sería equivalente al nivel B1 de Bertin.
- *C2: Leer dentro de los datos*: Lectura de una información basada en los datos del gráfico, pero que no está representada explícitamente, para lo cual se necesita comparar varios datos o hacer operaciones con ellos. Es equivalente al nivel B2 de Bertin.
- *C3: Leer más allá de los datos*: Realización de inferencias con la información presentada en el gráfico, más allá de cálculos y/o comparaciones, como por ejemplo, efectuar predicciones. Por ejemplo, si se pide interpolar un valor entre dos dados o extrapolar (antes del primer valor o después del último). No fue considerado por Bertin.

Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel:

- *C4: Leer detrás de los datos*, que consiste en la valoración crítica de los datos (forma en que fueron obtenidos, conclusiones, conocimiento del contexto ...). Supone no sólo tener comprensión gráfica, sino además conocer el contexto de los datos. Tampoco fue considerado por Bertin.

En nuestro trabajo, para facilitar la codificación de las respuestas de los alumnos condensamos las dos jerarquías anteriores en una sólo y proponemos la siguiente jerarquía:

- *N1: Leer los datos (niveles B1 o C1)*. Cuando el alumno realiza una lectura simple de un dato del gráfico (bien directa o inversa).
- *N2: Extracción de tendencias en una única distribución (niveles B2 y C2)*: Cuando se requiere comparar datos dentro de una única distribución de datos o realizar cálculos con ellos.
- *N3: Extracción de estructura: en una representación de datos múltiples (niveles B3 y C2)*. Consiste en comparar las tendencias de dos conjuntos de datos (sólo lo podemos evaluar en gráficos que representan dos o más distribuciones)
- *N4: Leer más allá de los datos (nivel C3)*, dando un valor que no está en el gráfico, es decir, interpolar o extrapolar.
- *N5: Leer detrás de los datos (nivel C4)*: Dar una interpretación crítica del contenido de un gráfico.

Las investigaciones sobre niveles de lectura de los estudiantes de secundaria son escasas. Uno de los trabajos realizados en relación a esta temática es el de Fernandes y Morais (2011) con 108 estudiantes de 9º grado utilizando gráficos de barras, sectores y líneas, siendo la lectura de éste más difícil (25,3% de respuestas correctas mientras en los otros gráficos se llega al 45,3%). Sólo el 24% de los estudiantes responde las preguntas de nivel 2, y el 33% a las de nivel 3 en la clasificación de Curcio (1989) mientras que las de nivel 1 son respondidas por 68%.

Pagan y Magina (2011) realizan un estudio con 105 estudiantes de 9º grado (1º de Educación Secundaria, basada en la aplicación de un pre test, una intervención de aula y un post test, que incluye actividades de lectura de gráficos. Respecto a los niveles de lectura de Curcio, el 67% de los estudiantes alcanza el nivel 1, el 42% el nivel 2 y el 18,7% el nivel 3, aunque las preguntas se refieren a un diagrama de barras.

Carvalho, Campos y Monteiro (2011) analizan la lectura directa e inversa de gráficos de líneas en estudiantes ingleses (84 estudiantes de 7º a 9º); el 74,1% realiza con éxito la lectura directa y el 37,7% la inversa, mejorando los resultados con la edad. No aborda los niveles de lectura.

Nuestro trabajo parte de los anteriores, pero utiliza un mismo gráfico para plantear diferentes preguntas en que se puede llegar a alcanzar el nivel 4 de Curcio (nivel 5 en nuestra clasificación), no tenido en cuenta en los trabajos anteriores. Además se propone la clasificación de niveles que sirve para combinar las categorías de Bertin y Curcio.

MÉTODO

El trabajo se lleva a cabo en una muestra de 47 alumnos/as de los cuales sólo uno es chico y el resto chicas, de dos cursos diferentes (dos grupos de primer curso con un total de 29 alumnos/as y un grupo de segundo con 18) cursando Formación Profesional Básica en la rama de Peluquería y Estética en un centro educativo de Ceuta. El nivel socioeconómico del alumnado es variado y muy diferenciado, tanto en clase social, como en religión y en formación previa, la edad aproximada es de 15-16 años.

Se propuso a los estudiantes la tarea presentada en la Figura 1, tomada de un estudio sobre consumo en peluquería y que representa tres series de datos: gasto medio mensual en peluquería de hombres, mujeres y total, La respuesta esperada a las preguntas es la siguiente:

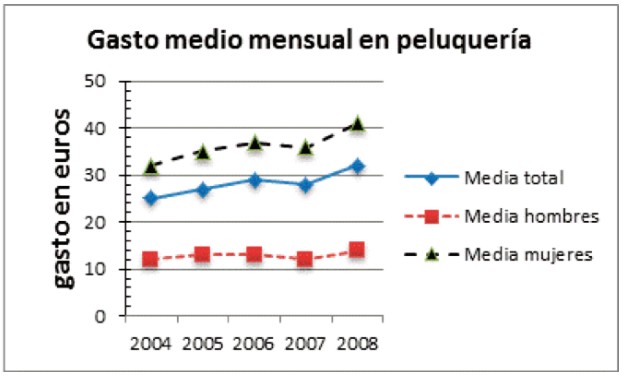
a) El alumno ha de observar la variación en el tiempo del gasto de hombres y mujeres, que tiende a crecer. También se puede ver que el gasto es mayor siempre en las mujeres. Por tanto. se trata de determinar la tendencia en las dos series y compararla. Sería una pregunta de nivel N3 en nuestra clasificación (nivel B3 en Bertin y C2 en Curcio).

b) La segunda pregunta pide una predicción sobre un dato que no está en el gráfico. La diferencia es que la primera es más sencilla pues basta ver que en los hombres hay una crecimiento de 7 euros (1,5 por año) y en las mujeres unos 10 (2 euros al año). Se podría sumar esta cantidad al último dato. Otra respuesta razonable sería incrementar dicha cantidad estimada por año y sumar al último dato, pues el último año mostrado en el gráfico el incremento en el gasto medio fue mayor que los anteriores, tanto en hombres como mujeres, por lo que puede suponerse han aumentado los precios de los servicios. Se trataría del nivel N4 en nuestra clasificación (Nivel C3 en Curcio y no considerado por Bertin).

c) Aunque la tercera pregunta es parecida a la anterior, en realidad se espera que algún alumno pudiera observar que es difícil dar la predicción con tanto tiempo sin datos más actuales (7 años de diferencia), pues el precio podría haber cambiado tanto al alza como a la baja (en este caso por mayor oferta de peluquerías o menor consumo, debido a la crisis económica de los últimos años). Si el alumno responde de este modo llega al nivel N5 en nuestra clasificación (Nivel C4 de Curcio).

En el gráfico siguiente se muestra la evolución del precio medio en euros del ticket en las peluquerías durante el periodo 2004-2008.

a. ¿Hubo la misma evolución del gasto medio mensual en peluquería en hombres y mujeres durante el periodo 2004-2008?
b. En función de los datos mostrados en el gráfico, ¿cuál crees que fue el gasto medio mensual en peluquería durante el año 2009?
c. ¿Qué crees que pasaría durante el año 2015 en relación al gasto medio mensual en peluquería?



http://www.bellezapura.com/2008/03/27/datos-del-barometro-cosmobelleza-2008

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes

RESULTADOS

Recogidos los cuestionarios se analizaron las respuestas. Para cada una de estas columnas se asignó un valor numérico 1 a 5, según el nivel de lectura que alcanza el alumno en su respuesta y 0 si no responde o si no llega al nivel 1 por hacer una lectura incorrecta. A continuación se describen las respuestas correspondientes a cada ítem, junto con un ejemplo, que aclare la forma en que se han codificado.

Primer apartado. Evolución del gasto medio en hombres y mujeres

En el apartado a) del presente ítem los criterios de clasificación de los diferentes niveles han sido los siguientes:

N0: Si no responde a la pregunta o si da una respuesta incorrecta. En este nivel el alumnado no es capaz de ver la evolución del gasto medio mensual en peluquería y compararla en hombres y mujeres.

N1: Si es capaz de leer los datos pero no es capaz de responder a la cuestión que se le pregunta, siendo capaz de reconocer cierta característica de la ilustración, pero no acorde a lo preguntado, no llegando a comparar las informaciones en ambos conjunto de datos ni llegando a obtener la extracción de las tendencias de una manera conjunta.

N2: Es capaz de reconocer la tendencia de forma individual respecto a únicamente uno de los dos grupos, pero no es capaz de compararlos. A modo de ejemplo detallamos la siguiente respuesta, en la que es capaz de observar que en gasto medio mensual en las mujeres es superior que en los hombres, pero no llega a observar la tendencia, diciendo que la evolución no es la misma: "No, la mujer es más".

N3: Si responde correctamente a la pregunta, observando claramente la variación en ambos conjuntos de datos en el tiempo del gasto de hombres y mujeres que tiende a crecer, viendo que es mayor en mujeres que en hombres. Como ejemplo se muestra la siguiente respuesta en la que se detalla que la evolución ha sido la misma, y de manera global ha ido aumentando el gasto en ambas distribuciones: "Si, las dos demandas aumentan igualmente".

Segundo apartado. Extrapolación a un valor cercano

Para el apartado b) la clasificación ha sido la siguiente:

N0: Si no responde a la pregunta o si lee el dato incorrectamente. Aquí, en el siguiente ejemplo, el encuestado responde con un año, cuando lo que se le pide es el gasto medio, por lo que no es capaz de establecer la diferencia entre las variables representadas "2005".

N2: Lee correctamente los datos, pero no llega a identificar o comparar las tendencias de los dos conjuntos de datos dando un valor aproximado pero sin razonamiento y alejado del valor esperado (o bien por exceso o bien por defecto). A modo de ejemplo podemos ilustrar la siguiente respuesta, en la que se dice que el gasto medio estaría rondando los "Rondando los 45 a 50€".

N4: Responde correctamente a la pregunta planteada siendo capaz de comparar las tendencias de dos conjuntos de datos y dando un dato posible dentro de la estructura que presenta el gráfico de una manera razonada. En el siguiente ejemplo observamos que la persona encuestada da un valor numérico, que si bien, no concuerda con el razonamiento de que los hombres tienen un crecimiento de 7 euros (1,5 por año) y en las mujeres 10 euros (2 euros por año), sí da unos resultados estimados posibles adecuados a la pregunta: "40 euros".

Observamos que en este apartado no se dan los niveles 1 y 3; este último porque no se pide comparar dos tendencias y el nivel 1 porque el alumno que lee literalmente un dato, generalmente razona también al nivel 2 en esta pregunta

Tercer apartado. Extrapolación a un valor lejano

En el caso del apartado c) tenemos la siguiente clasificación de las respuestas:

N0: Si no responde a la pregunta o si lee el dato incorrectamente. Aquí en el ejemplo se ilustra que bien no ha sabido interpretar el gráfico, o no sabe bien qué se le está preguntado: "Cada vez más gente".

N3: Lee correctamente los datos, siendo capaz de identificar o comparar las tendencias de los dos conjuntos de datos. A modo ilustrativo tenemos el siguiente ejemplo en el que se da a modo de respuesta un hecho evidente con la lectura del gráfico: "Que las mujeres gastarán más que los hombres"

N4: Si responde a la pregunta planteada dando un valor aproximadamente correcto, pero no razona que es difícil predecir sin datos más actuales, Es decir no llega al nivel crítico pues, aunque es capaz de determinar las características de monotonía del gráfico y extrapolar, no da un razonamiento correcto. Observemos el siguiente ejemplo la alumna da un dato numérico aceptable pero sin dar ningún razonamiento: "46; subirá".

N5: Si responde a la pregunta planteada dando un posible valor que no está en el gráfico y razonando que es difícil predecir sin datos más actuales, es decir, es capaz de determinar las características respecto a la monotonía del gráfico y mediante un razonamiento dar un posible valor, pero poniendo de manifiesto las dificultades de realizar esta estimación, debido a la cantidad de años en los que no se tienen datos. Este nivel no ha sido alcanzado por ningún encuestado.

Una síntesis de los resultados se muestra en la Tabla 2, donde vemos que no aparecen los niveles 2 y 3, pues el alumno que responde, lo hace al menos a nivel 3; pero tampoco aparece el nivel 5.

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes que alcanzan cada nivel de lectura en los tres apartados del ítem 2

	Primer curso (n=29)					Segundo curso (n=18)				
Apartado	N0	N2	N3	N4	N5	N0	N2	N3	N4	N5
a	51,7	17,2	31,1	—-	—-	22,2	44,4	33,3	——	—-
b	27,6	44,8		27,6	—-	44,4	22,2		33,3	—-
c	44,8		6,9	48,3		22,2			77,8	

Podemos apreciar en el primer apartado (evolución de la tendencia), en el que el nivel máximo es N3, apenas un tercio de los encuestados alcanzan dicho nivel. Para el grupo de primer curso, más del 50% alcanzan el N0, o sea contestan erróneamente a las preguntas, mientras que en el segundo, la mayor parte del grupo se queda en el N2 que establece una lectura correcta de los datos, y es capaz de establecer comparaciones, pero no identificar la estructura de los datos pues no compara las dos distribuciones. En la segunda pregunta (predicción a corto plazo), observamos que ocurre algo parecido, aunque se llega al nivel N4, máximo en esta pregunta. En el grupo de segundo curso, casi la tercera alcanzan el nivel máximo, mientras que en el grupo de primero, el porcentaje es algo menor. En la tercera pregunta (predicción a largo plazo) intentamos que alcancen el nivel N5, pero como podemos observar ningún encuestado ha alcanzado dicho nivel. El porcentaje que ha alcanzado el nivel N4 ha sido casi el 50% en el primer curso, y más del 75% en el segundo curso. No obstante el grupo de los que no responden o no son capaces de una lectura simple del gráfico es muy alto.

Los trabajos previos sólo tienen en cuenta el nivel 3 de Curcio que sería nuestro nivel 4 llegando a mostrarlo en 33% en la investigación de Fernandes y Morais (2001), el 18,7% en la de Pagan y Magina (2011) por lo que nuestros resultados son similares en la segunda pregunta pero bastante mejores que los citados en la tercera parte.

En la Figura 2 reproducimos la tabla en un gráfico para mejor comparación entre cursos, donde observamos que en casi todos los apartados los alumnos de segundo en mayor porcentaje alcanzan mayor nivel de lectura. También cabe destacar que el porcentaje de alumnos tanto en el primer como en el segundo curso que están codificados en un nivel N0 es bastante alto, esto llama la atención ya que el tema es cercano a los estudiantes pero aún así hay parte de ellos que no contestan o que no son capaces de leer correctamente la información del gráfico.

Primer curso Segundo curso

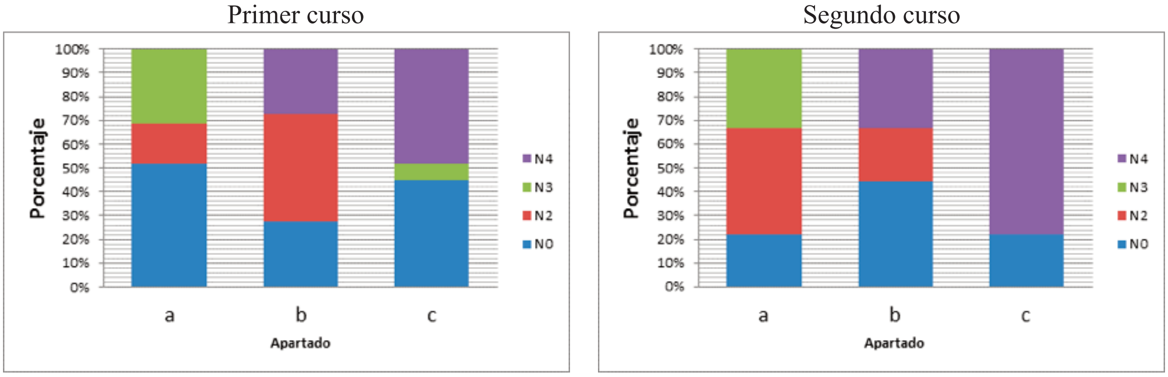


Figura 2. Comparación por curso en los tres apartados

Hay que tener también en cuenta que el gráfico mostrado en este ítem es un gráfico de líneas, que resultó el más difícil con solo el 25,3% de respuestas correctas en la investigación de Fernándes y Morais (2011), mientras que en nuestro trabajo la mitad al menos de los estudiantes en todas las preguntas llega a leerlo correctamente, aunque no alcance el nivel de lectura máximo de la pregunta.

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

El gráfico de líneas se recomienda incluso en la escuela primaria y aparece con frecuencia en los libros de texto de este nivel educativo, como muestran Díaz-Levicoy, Batanero yArteaga (2015). Por ello, los estudiantes deberían tener familiaridad con este tipo de representación, al menos para realizar una lectura literal del mismo. Sin embargo, en nuestro estudio nos resulta preocupante que muchos de ellos no logren el primer nivel de lectura N1 que supone únicamente una lectura literal de elementos aislados del gráfico.

Observamos mejores resultados en la interpretación de gráficos estadísticos en el alumnado de 2º curso de FPB, lo cual es debido, por un lado al grado de madurez del alumnado en una edad más avanzada y a la formación curricular que estos han adquirido a lo largo del 1º curso. Sin embargo, es también preocupante el bajo porcentaje del alumnado que alcanza el nivel máximo en cada una de las preguntas. Además se han identificado algunos errores que se repiten en las respuestas, que son los siguientes:

- Confunde la pregunta planteada; mostrando escasa capacidad de comprensión lectora.
- No identifica la variable representada en el gráfico al ser una media, interpretándola como un valor simple de un dato.
- No identifica que el coste medio se refiere a todo un año, pensando que se refiere a un instante en el tiempo.
- No llega a comparar las dos distribuciones; aunque analiza la evolución de cada una de ellas por separado, no obtiene una conclusión sobre la diferencia en la evolución de las dos tendencias.
- No identifica la tendencia creciente o el mayor crecimiento en una de las distribuciones.

El profesor debe prestar atención a los mencionados errores y ayudar a sus estudiantes a alcanzar una cultura estadística suficiente que les permita una lectura crítica de los gráficos que encuentran en los medios de comunicación y en su vida profesional. En consecuencia, se debiera dedicar más tiempo al estudio de los gráficos y a la realización y análisis de actividades de interpretación de los mismos. La lectura de los gráficos parece, a primera vista, una actividad sencilla y se da por supuesta, dedicando el tiempo de enseñanza a otros temas, por ejemplo, las medidas de posición central o dispersión. Nuestra investigación y las citadas en los antecedentes ponen de manifiesto que la lectura de un gráfico es difícil y debemos reforzar esta capacidad en los estudiantes para conseguir en ellos una cultura estadística suficiente.

Agradecimientos: Proyectos EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (FEDER, EAI) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números 76*, 55-67.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana, 1*(1), 27-37.

Bertin, J.(1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Brandi, A. (2015). Módulo de ciencias aplicadas 1. Matemáticas 1. Madrid: Santillana.

Carvalho, C., Campos, T. M. y Monteiro, C. (2011). Aspectos visuais e conceituais nas interpretações de gráficos de linhas por estudantes. *Boletim de Educação Matemática, 24*(40), 679-700.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Fernandes, J. A. y Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 95-115.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. y Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics, 27*(3-4), 185-195.

Kemp, M. y Kissane, B. (2010) A five step framework for interpreting tables and graphs in their contexts. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics. Ljubljana, Slovenia: International Statistical Institute.* Disponible en http://researchrepository.murdoch.edu.au/6240/.

MECD (2014). *Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero, por el que se regulan aspectos específicos de la Formación Profesional Básica de las enseñanzas de formación profesional del sistema educativo, se aprueban catorce títulos profesionales básicos, se fijan sus currículos básicos y se modifica el Real Decreto 1850/2009, de 4 de diciembre, sobre expedición de títulos académicos y profesionales correspondientes a las enseñanzas establecidas en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* Madrid: Autor.

Pagan, A. y Magina, S. (2012). O ensino de estatística na educação básica com foco na interdisciplinaridade: um estudo comparativo. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 92*, 232- 240.

Schield, M. (2011). Statistical literacy: A new mission for data producers. *Statistical Journal of the IAOS, 27*(3, 4), 173-183.

Sharma, S. (2013). Assessıng students' understandıng of tables and graphs: implıcatıons for teachıng and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 51-70.

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Understanding of the frequentist approach to probability by secondary school students

Begué, N.[a], Batanero, C.[a], Gea, M.M.[a] y Beltrán-Pellicer, P.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

Se presenta un estudio de evaluación de la comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en una muestra de 302 estudiantes de segundo y cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria. Analizamos las respuestas a una tarea en que se pide la estimación de la frecuencia de un resultado en cuatro repeticiones de un experimento. El análisis estadístico de las cuatro estimaciones sugiere una buena percepción del valor esperado y una percepción incorrecta de la variabilidad de los resultados. Se observan también el sesgo de equiprobabilidad y la heurística de la representatividad en una parte de los estudiantes, mejorando los resultados en el curso superior.

Palabras clave: *probabilidad, aproximación frecuencial, valor esperado, variabilidad*

Abstract

We present an assessment study of 302 secondary students' understanding of the frequentist perspective of probability. We analyse their answers to a task where students are asked to estimate the frequency of a result in four different repetitions of the same experiment. The statistical analysis of the four estimations suggests a suitable perception of the expected value in contrast to the perception of variability. The results of the study also suggest the equiprobability bias and the representativeness heuristics, especially within the younger group.

Keywords: *probability, frequentist approach, average, variability*

INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios, la probabilidad ha recibido diferentes significados que actualmente todavía se utilizan en diferentes aplicaciones, de modo que un conocimiento completo de la probabilidad no puede reducirse a uno de estos enfoques (Batanero, 2005). Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado siempre presente en los currículos españoles de secundaria, la nueva legislación (MECD,2015) sugiere complementar el significado clásico de la probabilidad con el significado frecuencial, en el que la probabilidad se concibe como el límite teórico de la frecuencia relativa en una serie larga de experimentos. Dicho enfoque permite conectarla estadística y la probabilidad, pues la estimación de una probabilidad se debe realizar a partir de datos empíricos (Batanero, 2005). Más concretamente, en el currículo básico (MECD, 2015) se incluyen los contenidos relacionados con este tema que se presentan en la Tabla 1.

El enfoque frecuencial de la probabilidad se presenta también en los libros de texto, incluso desde la educación primaria (Gómez, Contreras y Batanero, 2015). Será entonces importante asegurar que los alumnos comprenden este enfoque y ayudarles a corregir posibles sesgos en su razonamiento que les dificulten poner en relación los diversos significados de la probabilidad.

Begué, N., Batanero, C., Gea, M.M. y Beltrán-Pellicer, P. (2017). Comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad por estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 137-146). Zaragoza: SEIEM.

Aunque la investigación en probabilidad tiene ya una amplia tradición, las investigaciones relacionadas con la comprensión del significado frecuencial son todavía escasas (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016). Para contribuir a completar estos estudios, el objetivo de investigación que se define en nuestro trabajo se corresponde con evaluar y analizar la comprensión tanto de la relación entre el valor de una proporción en la población y la frecuencia relativa esperada, como del efecto del tamaño de la muestra sobre dicha variabilidad. Para lo cual se define un instrumento de evaluación dirigido a una de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). También se desea comparar la comprensión mostrada sobre los dos puntos anteriores en los estudiantes de 2º y 4º curso de la ESO, para evaluar la posible mejora con la edad e instrucción recibida por estos últimos.

Tabla 1. Contenidos relacionados con el enfoque frecuencial en el currículo de secundaria

Curso	Contenidos
1º y 2º	Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables (MECD, 2015, p.413).
3º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos (MECD, 2015, p.394).
4º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Probabilidad condicionada.Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística (MECD, 2015, p.398).
4º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes (MECD, 2015, p.403).

ANTECEDENTES

La investigación sobre el significado frecuencial de la probabilidad, que la caracteriza como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa bajo la repetición del fenómeno en idénticas condiciones, se ha centrado en analizar la capacidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias. De acuerdo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), la ley de los grandes números garantiza que las muestras de tamaño suficiente representan adecuadamente a la población de la que fueron tomadas, de modo que los estadísticos asociados a la muestra están próximos a los valores de los parámetros de la población. Como consecuencia, se puede utilizar la frecuencia relativa de un cierto resultado en estas muestras para estimar la probabilidad teórica de dicho resultado en la población. Esta estimación irá aumentando en precisión con el mayor tamaño de la muestra. En otras palabras, la ley de los grandes números sirve de soporte al significado frecuencial de la probabilidad.

Una de las primeras investigaciones en esta línea fue la realizada por Green (1983) con 2930 niños ingleses (de 11 a 16 años), a los que propone (entre otros) un ítem sobre la comprensión de la estimación frecuencial de la probabilidad asociada a un experimento con sucesos no equiprobables. El experimento consistía en el lanzamiento de100 chinchetas al aire, para determinar cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo. En el ítem, Green proporciona los datos obtenidos en la realización de un experimento, donde 68 de 100 chinchetas caen con la punta hacia arriba. El autor esperaba que los niños den un resultado parecido, pero no idéntico. No obstante, los resultados revelaron que el 64% de los niños mostraron el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en asumir que los diferentes resultados de cualquier experimento aleatorio son equiprobables. Estos niños, proporcionaron respuestas en las que la mitad de las chinchetas, aproximadamente, caerían hacia arriba, sin tener en cuenta la información frecuencial. Por otro lado, otros niños que mostraron una preferencia a obtener punta hacia arriba (correcta o parcialmente correcta), dieron una cantidad muy alejada de la esperada. Únicamente el 17% de la muestra dio una estimación correcta de la probabilidad en el experimento propuesto.

Este mismo ítem fue propuesto por Cañizares (1997) a 253 niños españoles (de entre 10 a14 años). La autora indica que el 64,1% de los alumnos muestran el sesgo de equiprobabilidad, mientras que sólo el 15% responde correctamente. Además, se observa un aumento no significativo con la edad en la consideración del principio de equiprobabilidad. En relación con este estudio, la revisión del currículo oficial, donde algunos contenidos de probabilidad son contemplados desde los primeros cursos de primaria, nos incita a esperar una mejora en los resultados de nuestra investigación.

Más recientemente, Gómez, Batanero y Contreras (2014) elaboran un cuestionario constituido por cuatro ítems para evaluar algunas componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial de futuros profesores de Educación Primaria. El primer ítem está dirigido a evaluar el conocimiento común del contenido (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), y es una adaptación del propuesto por Green (1983). Dicho ítem, que usaremos en nuestro estudio, demanda a los participantes pensar cuatro resultados probables, si se repite el experimento. Los resultados se desprenden desde el análisis de la media de los cuatro valores y su variabilidad. Los autores encuentran que solo una tercera parte aproximadamente de la muestra tiene una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. Por tanto, los sujetos presentan pobres intuiciones sobre los experimentos aleatorios. Por otro lado, los participantes presentan diferentes sesgos como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad, o piensan que no es posible realizar la predicción.

Estos resultados coinciden con las investigaciones de Green (1983) y Cañizares (1997), aunque evidencian una mejora en el razonamiento probabilístico. Gómez et al. (2014) señalan que la adaptación del ítem proporciona información sobre la comprensión de la variabilidad, por lo que los resultados muestran que una parte relevante de los sujetos produce muestras de variabilidad extrema o de patrón determinista. En nuestro trabajo utilizamos el ítem adaptado por Gómez et al. (2014), realizando un análisis más detallado de las respuestas, tanto en lo que concierne a la comprensión del valor esperado, como en lo que se refiere a la comprensión de la variabilidad. Además, se propone a estudiantes de Educación Secundaria, y se comparan dos grupos de estudiantes.

METODOLOGÍA

Se trata de un estudio exploratorio de evaluación, básicamente cuantitativo puesto que nuestras conclusiones se deducen del análisis estadístico de los resultados. Dicho análisis es descriptivo y se reduce a la elaboración e interpretación de tablas, gráficos y algunos estadísticos resumen.

La muestra está constituida por un total de 302 alumnos, de los cuales 157 son de 2º de ESO (13-14 años) y 145 de 4º de ESO (15-16 años). El número de grupos distintos de alumnos que participaron fue 9 grupos de 2º de ESO, y 8 grupos de 4º de ESO, de los cuales 6 grupos (en total 108 alumnos, el 75% de los alumnos de este nivel educativo) corresponden a la opción B, orientada a los alumnos que pretenden continuar el Bachillerato. El resto de los alumnos de 4º siguen la opción A recomendada a los estudiantes que piensan continuar la formación profesional. Los participantes que configuran la muestra pertenecen a dos institutos (centros públicos) que se localizan en la ciudad de Huesca. Aunque los estudiantes provienen de dos centros distintos, las diferencias debidas a este hecho no son relevantes, puesto que diversos factores como la situación socio-económica de las familias es muy similar en ambos institutos.

Los alumnos de 2º de ESO que forman parte de la muestra no habían recibido instrucción previa sobre contenidos de probabilidad y estadística en los centros en que se pasó el estudio, aparte de los conocimientos que pudieran haber obtenido en la educación primaria, donde en el último curso hay algunas ideas intuitivas sobre sucesos aleatorios y probabilidad simple. Algunos de los alumnos de los grupos de 4º de ESO recibieron instrucción sobre probabilidad desde el significado clásico de la misma o nociones de estadística descriptiva en los cursos anteriores, independientemente de la modalidad que estaban cursando. En los demás grupos, la ausencia de enseñanza de dichos contenidos responde a factores como el tiempo, que imposibilita a los profesores poder llevar al aula todos los contenidos del currículo. En el caso de la enseñanza de la probabilidad y la combinatoria, dichos contenidos se presentan al final del temario, lo cual conduce a la observación citada anteriormente; es decir, a que dichos contenidos no sean tratados.

Los datos se recogieron por escrito, en la clase de matemáticas, como una actividad de la citada clase, explicándoles el fin de la evaluación y resolviendo las dudas sobre la forma de completarlo. En el cuestionario se propone a los estudiantes la siguiente tarea, que fue resuelta con interés por los alumnos:

Ítem 1. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo  .
Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.
Escribe en la siguiente tabla unresultado que te parezca probable para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Este ítem, como se ha indicado, se ha tomado de Gómez et al. (2014),quien lo adaptó de otro anterior de Green (1983). El fenómeno aleatorio descrito se corresponde con el lanzamiento de chinchetas, y la distribución del número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba se puede modelizar con un modelo binomial, $B(n, p)$, donde n es el tamaño de la muestra y es la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba, siendo esta probabilidad desconocida. La comprensión de la distribución binomial ha sido analizada por Sánchez, García y Medina (2014) en estudiantes de Bachillerato, indicando que los sujetos de su muestra tienen dificultad en describir el rango de la variable y presentan el sesgo de equiprobabilidad.

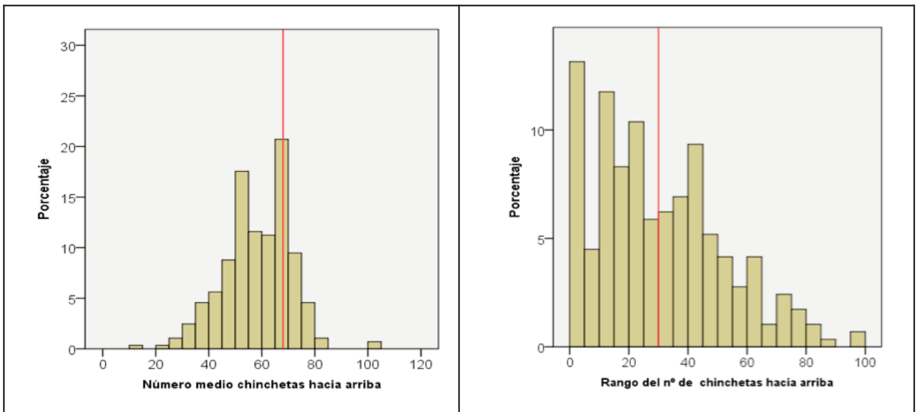
En nuestro caso, si X es el número de chinchetas que caen hacia arriba en un total de100 (n = 100), y p es la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba, esta probabilidad se puede estimar a partir de los datos dados en el enunciado, los cuales permiten también una estimación tanto del valor esperado en los 100 ensayos: np, como de su desviación típica:

Con los datos de la tarea, la probabilidad estimada de pes 0,68 y el valor esperado de chinchetas hacia arriba de 68, con una desviación típica de 4,7. Por tanto, se puede considerar que el sujeto presenta una buena concepción o intuición del valor esperado si el valor medio de las cuatro respuestas que proporciona es cercano a 68. A este respecto, se considerarán cercanas aquellas respuestas cuyos valores, para el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba, se localicen dentro del intervalo (63,73), que se calcula al determinar la media más/menos una desviación típica. Este es el intervalo de valores que contiene el 68% de las observaciones más probables en la distribución normal (la distribución binomial en este caso se aproxima bien por la normal, debido al tamaño de la muestra). El alumno que proporcione estimaciones en este rango, debe también reconocer la ausencia de equiprobabilidad, por la asimetría física del dispositivo (puesto que la cabeza pesa más, es más probable que la chincheta caiga con la punta hacia arriba).

Para analizar la comprensión que muestran los estudiantes de la variabilidad de la frecuencia relativa y el valor esperado en diferentes muestras, se estudia el rango de los cuatro valores proporcionados en la respuesta a la tarea, es decir, se calcula la diferencia entre el valor máximo y el mínimo proporcionados. Como se ha indicado, la desviación típica en este experimento es aproximadamente igual a 5; por lo tanto, el intervalo obtenido sumando y restando a la media dos veces la desviación típica y que contiene el 95% de los valores, corresponde a las estimaciones de entre 58 y 78 chinchetas con la punta hacia arriba, que corresponde a un rango de amplitud de 20. Siguiendo a Gómez et al. (2014), asumiremos que la percepción de la variabilidad es adecuada cuando el rango de las estimaciones dadas por los estudiantes se encuentre en un intervalo entre dos y cuatro desviaciones típicas, esto es, aproximadamente entre 10 y 20. Si está entre cuatro y seis veces la desviación típica (entre 20 y 30) se considera alta, pero aceptable, y si es mayor excesiva. Si es menor que 10 se considera demasiada concentración y quiere decir que no se comprende la variabilidad muestral.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para analizar la estimación del número esperado de chinchetas que caen con la punta hacia arriba realizada por los alumnos se calculó, en primer lugar, el valor medio de las cuatro estimaciones para cada alumno. Seguidamente se analizó la distribución estadística del conjunto de valores medios calculados por este procedimiento, que se representa gráficamente en la Figura 1a. La media global de dicha distribución arrojó un valor de 57,9, muy similar al obtenido en el trabajo de Gómez et al. (2014), que obtuvo un valor medio de 57,7 para dicha distribución. En los dos estudios este valor es inferior al valor medio esperado, que es 68 (línea vertical señalada la Figura 1a). Ello se explica porque un grupo de estudiantes proporcionan una estimación del número medio de chinchetas que caen hacia arriba sesgada hacia el valor 50, debido a que no tienen en cuenta la información frecuencial.



a. Número medio b. Rangos

Figura 1. Distribución del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba

Además, se observan claramente dos intervalos con alta frecuencia en la distribución. Por un lado, el 24,5% de la muestra proporciona valores medios que se localizan en el intervalo (45, 55). Estos estudiantes presentan el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en considerar como equiprobables resultados de un experimento aleatorio que claramente no lo son, como el caso de la chincheta. Entre ellos, se incluye un 3,9% de respuestas en las que existe ausencia de variabilidad total; es decir, escriben la cuaterna (50, 50, 50, 50), respuesta que también aparece en el trabajo de Gómez et al. (2014). Por otro lado, si analizamos la frecuencia de los valores medios próximos al valor esperado (63,73), observamos que el 32,4% de estudiantes proporcionan una buena estimación del valor esperado en el experimento. Otros alumnos (13,9%) muestran una tendencia a dar valores medios más bajos del 50%, es decir, consideran que el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es menor. Esta tendencia se traduce en la intención de compensar el resultado dado en el enunciado, mostrando la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982).

Por otro lado, la Figura 1b muestra la distribución estadística de los rangos asociados al conjunto de las cuatro respuestas de cada alumno, la cual permite analizar la comprensión de la variabilidad del muestreo en estos estudiantes. Como se ha indicado anteriormente, y siguiendo a Gómez et al. (2014), se considera adecuada la variabilidad cuando el rango se encuentra entre dos y cuatro desviaciones típicas, aproximadamente entre 10 y 20; alta, pero aceptable, si está entre 20 y 30; y en caso de ser mayor que 30, excesiva y si es menor que 10, se considera demasiada concentración. Observamos que la mayoría de los estudiantes produce una variabilidad excesiva (superior al valor 30, marcado con una línea en el gráfico). En concreto, el 40,4% de los estudiantes de la muestra proporcionan respuestas con una dispersión muy alta (mayor que 30). Además, el 20,8% de los alumnos proporcionan datos con apenas variabilidad (pues el rango de las cuatro estimaciones dadas es menor que 10); mientras el resto, dan una variabilidad adecuada o alta, pero razonable. Por tanto, son muchos los estudiantes que no comprenden el efecto del tamaño de muestra sobre la variabilidad del muestreo, en línea con las investigaciones de Serrano (1996).

Comparación por curso

A continuación se analizan las respuestas según el curso participante, a través de los dos gráficos presentados en la Figura 2. Dicha información se complementa con las Tablas 2 y 3, que presentan la frecuencia y porcentaje de alumnos que proporcionan algunas respuestas que consideramos sesgadas, tanto para el estudio del valor medio como del rango.

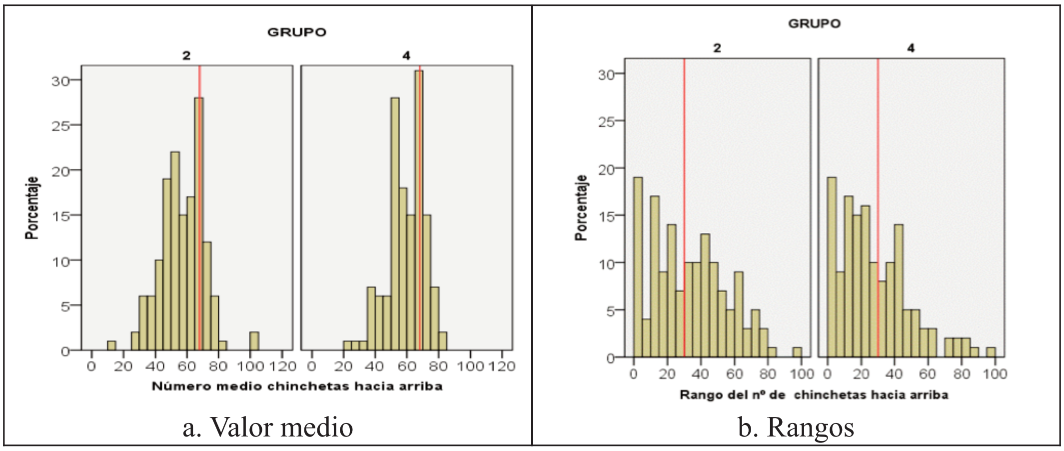


Figura 2. Distribuciones del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba según el curso

En primer lugar se comparan las distribuciones de los valores medios en las cuatro estimaciones en los dos grupos de estudiantes (Figura 1a), cuyo análisis evidencia que en ambos grupos hay alumnos que no identifican la diferente probabilidad de los resultados del experimento, puesto que en ambos gráficos hay dos intervalos de alta frecuencia, uno de ellos asociado a la probabilidad teórica (en torno a 69 chinchetas con la punta hacia arriba) y el otro asociado a la equiprobabilidad (50 con la punta hacia arriba).

La media global de dicha distribución en el grupo de 2ºESO (56,9) es menor que el de 4ºESO (58,9), lo que puede corresponderse tanto a la presencia del sesgo de equiprobabilidad como de la heurística de la representatividad, citados anteriormente.

Para analizar este punto presentamos la Tabla 2, donde clasificamos las estimaciones de los estudiantes en diferentes categorías, bien correctas o aceptables o que muestren diferentes sesgos. En otros casos se engloban tanto las respuestas de los alumnos que son incorrectas por diferentes razones, como aquellos alumnos que no responden al ítem. Los sesgos de equiprobabilidad y la heurística de la representatividad, también hallados en las muestras de sujetos que participan en la investigación de Gómez et al. (2014) y de Serrano (1996) se presentan con frecuencia apreciable, sobre todo el primero. Observamos que la proporción de sesgos, así como de respuestas inadecuadas o en blanco (otros casos en la tabla) es mayor en 2º curso, aunque con pequeñas diferencias respecto al 4º curso. También la frecuencia de estimaciones correctas es inferior en 2º curso que en 4º curso.

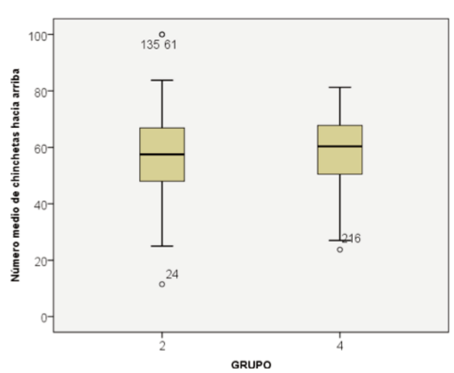
Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de alumnos según intervalo en que se sitúa la media de los valores dados

	2ºESO		4ºESO	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Hasta 45-Representatividad	26	16,5	16	11,0
45-55. Equiprobabilidad	40	25,5	34	23,5
63-73 Correcto	46	29,3	52	35,9
Otros valores aceptables	35	22,3	36	24
Otros casos	10	6,4	7	4,8

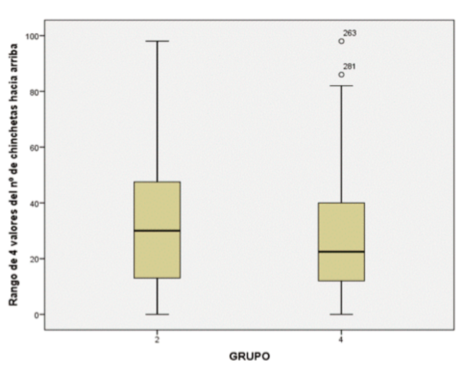
En segundo lugar, analizamos la comprensión de la variabilidad del valor esperado por los estudiantes, a partir del rango de las cuatro estimaciones que aportan. Para ello, en la Figura 2b se representa la distribución de dicho rango según el curso, donde se observa que ambos grupos de estudiantes conceden una variabilidad extrema a las estimaciones proporcionadas. De hecho, aproximadamente el 50% de los alumnos de 2ºESO que participan en el estudio muestran una comprensión pobre acerca de la variabilidad asociada mostrando una variabilidad excesiva en sus estimaciones, siendo este porcentaje menor en el otro grupo estudiado.

En los dos cursos el grupo mayor de estudiantes se sitúa entre los que proporcionan estimaciones con una variabilidad excesiva. Además, en 2º curso el segundo grupo más numeroso lo forman aquellos alumnos cuyas estimaciones tienen un rango menor que 10, lo cual implica una concentración elevada de los valores estimados para el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba, que también ocurre en un alto porcentaje de estudiantes en 4º curso. Por tanto, se repiten las dificultades con la idea de variabilidad observada en las investigaciones de Orta y Sánchez (2013) y Sánchez, García y Medina (2014). Son minoría en los dos grupos los estudiantes que proporcionan estimaciones con una variabilidad adecuada o bien alta pero aceptable.

Para completar el análisis, presentamos en la Figura 3 los gráficos de caja de las distribuciones del valor medio y el rango de las cuatro estimaciones proporcionadas por cada alumno en los dos grupos. El diagrama de caja asociado al valor medio en cada grupo (Figura 3a) indica, por un lado, que la mediana es algo más baja en los alumnos de segundo. Este resultado, junto a los descritos anteriormente se debe a que estos alumnos dan valores cercanos al 50% con mayor frecuencia que en 4º curso. Son los alumnos que conciben que los dos resultados son equiprobables, en vez de usar la información frecuencial aportada en la tarea.



a. Valor medio



b. Rangos

Figura 3. Diagramas de caja del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba.

Por otro lado, la dispersión mostrada en este gráfico (variabilidad del valor medio de las cuatro estimaciones) es similar en los dos grupos, aunque levemente mayor en 2º curso, siendo las gráficas relativamente simétricas, aunque algo sesgadas inferiormente. Aparecen algunos valores atípicos, que se corresponden con respuestas cuyos valores para el número de chinchetas se sitúa en los extremos del rango de respuestas posibles, como se observa en las siguientes respuestas de los estudiantes:A61 y A135: (100, 100, 100, 100), A24: (22, 0, 8, 16) y A216: (20, 40, 20, 15), siendo A61 el alumno 61 que responde al cuestionario. Como señala Gómez et al. (2014), estos dos últimos resultados pueden indicar una creencia en la compensación entre los resultados, mostrando la heurística de la representatividad ya comentada.

En la Figura 3b se presenta la distribución de los rangos de las cuatro estimaciones proporcionadas por los estudiantes, en la que se muestra menor mediana y menor tercer cuartil en el grupo de alumnos de 4º de la ESO, confirmando que es mayor la proporción de estudiantes en este curso que conceden menor variabilidad a las estimaciones, comprendiendo, por tanto que dicha variabilidad no debe ser muy alta en muestras grandes. Análogamente, en dichas gráficas se identifican algunos valores atípicos, entre los que destaca la respuesta de A263: (99, 1, 50, 60). Dicho estudiante muestra una concepción errónea de la variabilidad del valor esperado, puesto que no tiene en cuenta el efecto del tamaño de la muestra, lo que conduce a la aceptación, como una repuesta probable, de cualquier respuesta que se localice en el rango de valores posibles (0-100).

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de alumnos que son casos extremos por la ausencia de variabilidad

Caso extremo. Ausencia de variabilidad	2ºESO		4ºESO	
	Frec.	% (respecto al total de alumnos de 2ºESO)	Frec.	% (respecto al total de alumnos de 4ºESO)
(50, 50, 50, 50)	7	4,5	5	3,4
(68, 68, 68, 68)	6	3,8	1	0,7
(70, 70, 70, 70),(80, 80, 80, 80)	1	0,6	2	1,4
(100, 100, 100, 100)	2	1,3		
Total	16	10,2	8	5,5

Para finalizar nuestro estudio, en la Tabla 3se presenta la frecuencia y porcentaje de estudiantes que responden a la tarea con una cuaterna constituida por valores con variabilidad nula. Constituyen el 10% de estudiantes en 2º de ESO y el 5% en 4º de ESO, una proporción aceptable si se tiene en cuenta que estos estudiantes están interpretando el experimento aleatorio en forma determinista, lo que podría ser indicativo del enfoque en el resultado aislado (Konold, 1991). El profesor debiera estar alerta de estos sesgos si desea lograr un aprendizaje significativo a partir del enfoque frecuencial de la probabilidad.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Tras la aplicación del cuestionario y el análisis de los datos, es relevante reflexionar sobre los resultados obtenidos, ya que el análisis de los documentos curriculares (MECD, 2015) muestra que se debería considerar la introducción de las ideas necesarias para la comprensión adecuada y profunda de la probabilidad en el enfoque frecuencial. Sin embargo, en nuestra experiencia, solamente una parte de los grupos participantes mostró un aprendizaje significativo de la probabilidad desde este enfoque. Aunque los datos se recogieron el primer año de la aplicación de la LOMCE, los contenidos de probabilidad del Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2007) eran casi idénticos, por lo que la omisión de su enseñanza no se justifica por el cambio curricular y sea posiblemente debido a la falta de tiempo, debido a la extensión de los contenidos curriculares.

El análisis de los datos muestra una gran proporción de respuestas incorrectas en la estimación de los resultados a la tarea propuesta. Además, el análisis de los datos revela que la muestra de alumnos presenta tanto el sesgo de equiprobabilidad como los derivados de la heurística de la representatividad. Esta última se identifica en aquellos casos en los que el alumno trata de compensar los resultados, proporcionando muestras en las que el número de chinchetas que caen con la punta hacia abajo sea mayor, al igual que ocurrió en el estudio de Gómez et al. (2014). Esta heurística conduce a la estimación errónea de la frecuencia esperada.

Por otro lado, el estudio realizado refleja que la mayoría de los alumnos tiene una comprensión insuficiente de la variabilidad intrínseca al proceso de muestreo, que se ha puesto de manifiesto en el ítem propuesto para este estudio con muestras cuyo tamaño es grande (n = 100). En este ítem, la mayoría de las respuestas de los estudiantes presentan muestras cuyos valores quedan caracterizados por una variabilidad excesiva. Por tanto, se confirma una mayor dificultad en la idea de variabilidad, como ocurre también en la investigación de Orta y Sánchez (2013) en problemas relacionados con el contexto de riesgo y en la de Sánchez, García y Medina (2014) sobre la distribución binomial. También encontramos la presencia de respuestas en la que se identifica una ausencia total de la variabilidad.

A pesar de que se esperaba que los alumnos de 4ºESO obtuvieran mejores resultados, debido a factores tales como la mayor edad y su conocimiento, el análisis de las respuestas apenas revela diferencias entre los dos cursos escolares, aunque los participantes de 4ºESO han obtenido mejores resultados. En síntesis, los resultados ponen en relieve la desconexión existente entre los contenidos descritos en los documentos curriculares y el conocimiento que los estudiantes muestran sobre dichos contenidos matemáticos. Además, los resultados obtenidos coinciden con las investigaciones previas, por tanto se subraya la necesidad de iniciar una instrucción sobre los conceptos asociados al muestreo con la finalidad de favorecer su comprensión. En este sentido, el proceso de enseñanza y aprendizaje debería comenzar desde los primeros cursos de la secundaria, de modo que se fortalezcan y desarrollen de manera gradual los contenidos asociados con el bloque de estadística y probabilidad. Por otro lado, es relevante la puesta en marcha de investigaciones que no solamente se preocupen en la identificación de sesgos o las dificultades del alumnos, sino también en el diseño de materiales que favorezcan una mejora para el aprendizaje del alumno.

Agradecimientos: Proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime, 8*(3), 247-264.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability.* NewYork: Springer.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, *28*(48), 209-229.

Gómez, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Orta, J. A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, 422-430.

Sánchez, E., García, J. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P.Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.

RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ESTUDIO DE CASO

Reasoning and argumentation in the resolution of geometric problems in children education: a case study

Berciano, A.[a], Jiménez-Gestal, C.[b] y Salgado, M.[c]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibersitatea,
[b]Universidad de La Rioja, [c]Universidade de Santiago de Compostela

Resumen

En esta comunicación presentamos un estudio de caso con un niño de 4 años, acerca de la visualización de objetos tridimensionales y sus propiedades. El objetivo del trabajo es analizar cuáles son las estrategias de razonamiento y argumentación dadas por un infante de 4 años cuando se le pide explicar qué es un cilindro. Para dicho análisis se han tenido en cuenta los niveles de Van Hiele y los distintos tipos de aprehensión de Duval. Del estudio concluimos que la intervención guiada gradual de la maestra fomenta un incremento en el tipo de razonamiento y argumentación por parte del niño, llegando a mostrar un nivel 2 de Van Hiele y aprehensión operativa (superior a la esperada en esta etapa educativa).

Palabras clave: *visualización, argumentación, resolución de problemas, geometría, educación infantil*

Abstract

In this paper, we present a case study with a 4-year-old boy about the visualization of three-dimensional objects and their properties. The goal of this study is to identify the strategies of reasoning and argumentation given by a four years old child when asked to explain what a cylinder is. For this analysis we have taken into account the levels of Van Hiele and the different types of apprehension considered by Duval. From the study we conclude that the gradual guided intervention of the teacher encourages an increase in the type of reasoning and argumentation used by the child, who shows a level 2 of Van Hiele and operational apprehension (higher than the expected at this stage of education).

Keywords: *visualization, argumentation, problem solving, geometry, childhood education*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

El diccionario de la RAE define aprehensión como el acto de captar la forma de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar. Con esta definición en mente, según Duval (1998), se pueden definir 3 tipos de aprehensión: 1) aprehensión perceptiva, caracterizada por la identificación simple de una configuración; 2) aprehensión discursiva, definida por el establecimiento de asociaciones entre la configuración dada y afirmaciones matemáticas; y 3) aprehensión operativa, caracterizada por la realización de modificaciones mentales o físicas de la configuración original.

Igualmente, Duval (1998) plantea la dificultad de la enseñanza de la geometría debida a la complejidad cognitiva que presenta la actividad geométrica. Describe tres tipos de procesos cognitivos implicados: procesos de visualización, que hacen referencia a mirar la representación espacial para la ilustración de una idea o para la exploración heurística de una situación compleja; procesos de construcción con herramientas, que pueden servir para modelizar cómo las acciones se relacionan con los objetos mate-

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

máticos; y procesos de razonamiento, en relación al proceso discursivo de extensión del conocimiento. Aunque estos tres procesos están fuertemente conectados y es preciso que se desarrollen paralelamente para la competencia en geometría, no son interdependientes, es decir, se puede llegar a las figuras sin saber cómo se construyen y aunque la visualización puede dar una idea intuitiva de cómo llegar a una demostración, el razonamiento no depende más que del corpus de proposiciones disponible.

A lo largo de los últimos años, diversas investigaciones se han centrado en analizar el tipo de aprehensión que tiene el alumnado y la caracterización de la misma cuando el ámbito de conocimiento es la geometría; por ejemplo, Prior Martínez y Torregrosa Gironés (2013) analizan la interacción entre los procesos de razonamiento y los procedimientos de verificación que utiliza el alumnado de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la resolución de problemas de geometría en contexto de lápiz y papel; Clemente y Llinares (2013) identifican características del conocimiento de geometría especializado en estudiantes para maestro en relación con el razonamiento configural.

Para el caso de la visualización, destacamos el trabajo de Torregrosa Gironés, Quesada Vilella y Penalva Martínez (2010), en el que se identifican los procesos de visualización de estudiantes para maestro, cuando resuelven problemas de geometría, que requieren una prueba matemática. Por otro lado, atendiendo a Fernández (2013), son varios los trabajos realizados en los últimos años con el fin de determinar qué niveles de razonamiento intervienen en las habilidades de visualización, dando lugar a estudios que analizan la relación entre los niveles de Van Hiele y las habilidades de visualización; pero, aun así, no conocemos estudios que se centren en analizar o caracterizar la aprehensión en razonamiento geométrico en la etapa educativa de 3 a 6 años.

Para la etapa de Educación Infantil, si nos fijamos en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez, 2012), aunque éstos se plantean como niveles de aprendizaje no ligados a la edad cronológica de los sujetos, en la mayoría de los casos los niños y las niñas sólo alcanzan el nivel 1, pero se consideran alcanzables los niveles 1 y 2:

- En el Nivel 1 se considera que la persona es capaz de reconocer las figuras geométricas por su forma globalmente, pero no diferencia partes de ellas ni es capaz de explicar propiedades determinantes de las figuras. Hace descripciones visuales, táctiles, etc. y es capaz de compararlas con objetos de su entorno.
- En el Nivel 2 la persona ya es capaz de reconocer y analizar las partes y propiedades de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas. El establecimiento de las propiedades se produce de forma empírica, a través de la manipulación y la experimentación.

Por otro lado, Dina y Pierre Van Hiele establecen que para poder adquirir de modo gradual un nivel de razonamiento cada vez mayor, el aprendizaje debe estar guiado por parte de la docente acorde a las siguientes fases (Gutiérrez, 2012): 1) información (se plantean actividades que sirvan como toma de contacto y favorezcan la identificación de conocimientos y formas de razonamiento); 2) orientación dirigida (se ponen ejemplos, construir con distintos materiales, comparaciones con objetos del entorno,…); 3) explicitación (se deben explicar los resultados obtenidos y justificar las afirmaciones hechas); 4) orientación libre (se debe profundizar en los conceptos aprendidos con actividades más abiertas, más generales, aplicaciones, …); 5) integración (los contenidos aprendidos deben ser integrados con otros anteriores, favoreciendo el establecimiento de conexiones/relaciones entre ellos).

En este sentido, volviendo a la Educación Infantil, la NCTM (2000) plantea que para que el aprendizaje de la matemática sea significativo, ésta debe tratarse de modo global, trabajando una serie de procesos matemáticos independientemente de la etapa educativa en la que estemos. En concreto, destacamos dos: la resolución de problemas y el razonamiento y demostración; éste último íntimamente ligado con la aprehensión definida por Duval (1998). De hecho, la NCTM puntualiza que para que se produzca un aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas, la actividad planteada en el aula debe fomentar: i) la construcción de nuevo conocimiento matemático, ii) el planteamiento de problemas matemáticos o de otros contextos; iii) que se puedan aplicar y adaptar estrategias variadas. Por otro lado, para que en la actividad elegida se pueda producir un proceso de "razonamiento y demostración", el profesorado debe pedir a su alumnado reflexione sobre sus respuestas, las expliquen y justifiquen y, además, la actividad debe dar lugar a: i) formular e investigar conjeturas matemáticas; ii) desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos y iii) elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

El objetivo de esta investigación es identificar qué tipo de razonamiento realizan los niños de 3-5 años cuando la maestra guía el aprendizaje de un concepto geométrico nuevo haciendo uso de las fases de Van Hiele. En particular, en este artículo analizamos un caso extraído de una actividad de aula, en la que tras plantear un problema, los niños deben dar respuesta al mismo; para ello, se han tenido en cuenta los ítems que definen los niveles 1 y 2 de Van Hiele, las propiedades fundamentales de los tipos de aprehensión definidos por Duval para categorizar los argumentos del infante y, por otro lado, se han cruzado con las fases de aprendizaje de Van Hiele definidas por la maestra.

METODOLOGÍA

Para este trabajo, realizamos una investigación cualitativa desde un paradigma interpretativo, realizando un estudio exploratorio con 15 niños y niñas de educación infantil con edades comprendidas entre los 3 y los 5 años, del C.E.I.P. Sigüeiro. En concreto, nos centramos en el estudio de caso de un niño de 4 años. La elección de dicho niño se debe a: i) tener una edad intermedia; ii) actitud positiva de participación en clase; y iii) interés en responder a las preguntas de las maestras.

Problema planteado y secuenciación

El problema planteado ha sido enmarcado con el título "Importancia social de la rueda: ¿por qué algunos objetos ruedan y otros no?". Con este título, se pretende realizar un acercamiento comprensivo al concepto de cilindro, sus características y propiedades y construcción del mismo desde un rectángulo. Desde el punto de vista metodológico, es una actividad que cumple las características descritas por NCTM (2000) necesarias para fomentar acciones relacionadas con la resolución de problemas y razonamiento y demostración a través de conversaciones semi-guiadas con la maestra.

Secuenciación de la actividad:

La primera parte se desarrolla en Asamblea:

1. Importancia y necesidad de la rueda. Reproducción del vídeo "la pantera rosa y la rueda" y planteamiento de interrogantes: objetos que ruedan, cómo movemos las cosas, cómo andan los coches. ¿por qué algunos objetos ruedan y otros no?
2. Turno de respuestas y justificación de las mismas (si se puede).
3. Con cada uno de los niños que participan de modo espontáneo, establecimiento de una conversación guiada por parte de la maestra.

Posteriormente, en pequeños grupos:

4. Construcción del cilindro dada una hoja de papel.
5. Exploración de sus propiedades físicas.

De manera individual:

6. Conversación con cada individuo, para favorecer la verbalización de las conclusiones a las que ha llegado mediante la actividad, acerca de las características del cilindro.

Instrumentos de recogida y análisis de datos

Para la recogida de datos y su posterior análisis se han realizado grabaciones en vídeo de los niños y niñas en las distintas fases de la realización de la tarea planteada. Posteriormente, se han transcrito las conversaciones y actuaciones de aprendices y maestra.

Para el análisis de las transcripciones se ha definido una rúbrica determinada por: i) los ítems que caracterizan los niveles 1 y 2 de Van Hiele (Gutiérrez, 2012) y ii) los tipos de aprehensión definidos por Duval.

Esta tabla de doble entrada nos ha permitido establecer qué tipo de argumentación realizaba el niño junto con su nivel discursivo.

Tabla 1. Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval

Niveles de Van Hiele \ Tipo de Aprehensión de Duval		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos Consideraciones visuales Consideraciones táctiles Descripción de propiedades globales			
2	Análisis informal de relaciones Análisis informal de propiedades Definiciones de estructura lógica simple Demostraciones de tipo empírico Experimento basado en ejemplo			

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación mostramos parte de la transcripción de la actividad llevada a cabo en el aula y el análisis de las conversaciones con el niño seleccionado (a partir de ahora R). Para facilitar su seguimiento se han numerado las intervenciones, englobando bajo el mismo número el diálogo que puede corresponder a varias preguntas y respuestas si corresponden al mismo nivel de Van Hiele y el mismo tipo de aprehensión de Duval. También dividimos el análisis respecto a las diferentes fases del aprendizaje guiadas por la maestra.

Fase 1 de aprendizaje: Información

El desarrollo de la primera parte de la actividad se lleva a cabo en asamblea y corresponde a la Fase 1 de aprendizaje, que permite a la maestra identificar conocimientos y formas de razonamiento de los aprendices. Se propicia un debate en el que van surgiendo los conceptos que se quieren trabajar y del que se recogen a continuación los momentos más relevantes para nuestro estudio.

1. P1: ¿Qué es un cilindro? ¿Alguien sabe lo que es un cilindro? ¿O qué creéis que es un cilindro?

   R: Es una cosa muy redonda.

La maestra interpela a la clase para obtener más respuestas. Ante la afirmación de uno de los niños que dice que es una cosa cuadrada nuestro sujeto reacciona inmediatamente. R: ¡Nooo! ¡Es redondo!

2. P1: Pues hoy vamos a ver lo que es un cilindro, ¿vale? Porque algunos no la habíamos escuchado nunca. Es una forma geométrica. ¿Alguien conoce formas geométricas?, ¿figuras planas?, ¿formas planas?, ¿no conocéis figuras planas?

   R: Siii, conozco un rectángulo que se hace plano.

[...] En la clase se nombran más formas planas y la maestra plantea la cuestión de si un cilindro es una forma plana. Llegan a la conclusión de que no es plano porque es gordo.

3. R: Tiene muchos redondos.

4. P1: Tiene muchos redondos. Cuéntame R, ¿tiene muchos redondos? Como es eso, cuéntame.

R: Bueno, los cilindros que tienen papel de cocina normalmente tienen muchos redondos.

P1: ¿Y si no es de papel de cocina? ¿Tiene menos redondos o tiene más redondos?

R: Si es papel higiénico tiene menos redondos.

P1: ¿Y por qué?

R: Porque a diferencia del papel de cocina que es más alto que el papel higiénico, pues cada uno cilindro tiene sus círculos.

5. P1: El cilindro es un cuerpo geométrico, no es plano. (Muestra un rollo de cello y pregunta) ¿Esto es un cilindro?

R: No, es redondo. Es solo un redondo.

6. P1: ¡Ah! Tiene un solo redondo, es un redondo. Es plano. Pero ven aquí a mirarlo y dile a la profe si es un cilindro.

R: Esto no es un cilindro. Porque tiene sólo un redondo y los cilindros tienen más redondos.

7. P1: Busca un cilindro.

R coge un rollo de papel higiénico y lo compara con el rollo de cello.

P1: ¿Cuál es el cilindro?

R: Mira, es este (señalando el rollo de papel higiénico), pero este no tiene la misma diferencia el cello que esto porque el cello se parece al papel higiénico.

8. R: (Compara una moneda de chocolate con el rollo de cello) No, aunque es más pequeño, aunque es pequeño, aunque tiene la misma forma y es redondo no tiene el mismo tamaño.

9. P1: Vamos a cortar este cilindro porque dijo R que tenía muchos redondeles, entonces

R: Además, (cogiendo el rollo de cello) que este es redondo, que ya sabemos que es un cilindro con un solo redondo.

10. R: Y también es como un cilindro, pero si lo cortamos, pero si lo cortamos tiene menos redondos aún.

[...]

11. P1: Y que rueda, por eso apareció la figura del cilindro, porque si no ¿cómo iban a aparecer los coches? ¿Los coches tienen ruedas? ¿y qué más tiene ruedas?

La clase da diferentes respuestas

R: Pero también, pero los que no son vehículos no tienen ruedas.

P1: Claro pero las ruedas se inventaron para llegar antes a los sitios, ¿a que sí?

E1: Y las carreteras se inventaron para que anden los coches.

12. P1: ¿El folio qué forma tenía, que dijisteis antes?[...] ¿ por qué es un rectángulo y no un cuadrado?

R: Porque tiene dos partes y otras dos partes iguales.

La Tabla 2 recoge las intervenciones producidas en esta primera fase atendiendo a las dos características observadas.

Tabla 2. Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval (Fase 1)

Niveles de Van Hiele \ Tipo de Aprehensión de Duval		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos	1	2	
	Consideraciones visuales	5		
	Consideraciones táctiles		7, 8	
	Descripción de propiedades globales	3	4, 6, 9	10
2	Análisis informal de relaciones	12	11	
	Análisis informal de propiedades			
	Definiciones de estructura lógica simple			
	Demostraciones de tipo empírico			
	Experimento basado en ejemplo			

Fase 2 de aprendizaje: Orientación dirigida

Después de ver el vídeo, continúa la asamblea y comienza la Fase 2 de aprendizaje en la que se pide a las niñas y niños que con un folio de papel construyan un cilindro.

13. P1: Entonces, a partir de un rectángulo se construye un cilindro, pero ¿cómo podemos construirlo?

R: Con muchos círculos dibujados.

P1: Pues coge el lápiz y ponte a dibujaros, a ver si sabes. A ver quien más me dice alguna idea. [...]

R: (dibuja círculos pequeños, tangentes unos a otros a lo largo del centro del papel) Lo estoy haciendo. Pero aún no terminé. Mi cilindro va a ser para papel de cocina.

14. P1: Sí, ¿pero eso va a rodar, R?

R: No sé, hasta que no probemos.

La clase sigue haciendo cilindros y los usan como catalejos.

15. P1: R, ¿ya tienes tu cilindro? A ver.

Figura 1. Hilera de círculos

R: (Le muestra el papel con la hilera de círculos Figura 1) Pero está pegado, pero hay que cortarlo antes.

16. P1: ¿Tú crees que así recortando con eso vas a hacer un cilindro?

R: No sé como. Si está así. Primero voy a recortar unos círculos.

17. P1: La carrera tiene que comenzar R, vete acabando porque todos tienen ya su cilindro.

R: Creo que esto no va a poder rodar.

P1: No, porque es plano.

18. R: Bueno, pues lo hago como todos. Pero no puedo hacerlo con este folio. Porque no puedo hacerlo destrozado.

P1: Porque tu folio ahora, ¿es un rectángulo?

R: No.

P1: No es un rectángulo. Entonces coge ahora otro folio.

19. R: A ver. Ahora solo tengo que ponerlo. Así, ¡ay! (lo pliega en lugar de enrollarlo Figura 2)

Figura 1. Hilera de círculos

R: Jo, es que no sé cómo hacerlo.

P1: Piensa R.

R: Como todos, pero... alguien tiene que guardarme la tijera. ¡Ajá! ¡Ya lo tengo!

Tabla 3. Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval (Fase 2)

Niveles de Van Hiele \ Tipo de Aprehensión de Duval		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos			
	Consideraciones visuales			
	Consideraciones táctiles			
	Descripción de propiedades globales			13, 15
2	Análisis informal de relaciones			
	Análisis informal de propiedades		17	16
	Definiciones de estructura lógica simple		18	
	Demostraciones de tipo empírico		14	
	Experimento basado en ejemplo			19

Fase 3 de aprendizaje: Explicitación

Comienza un primer momento de Fase 3 de aprendizaje con la explicitación de los resultados obtenidos, en primer lugar de forma colectiva. Recogemos la clasificación de las expresiones utilizadas, tanto en la parte colectiva como en la individual de esta fase, en la Tabla 4.

20. P1: Todos los cilindros no son iguales, ¿a que no?

R: Algunos son más gordos.

P1: Unos son más gordos, otros son más delgados, a ver, el de R es más gordo, el de I es más delgado. Por lo tanto los círculos son más anchos o más estrechos. Otros, ¿qué les pasa?, ¿son más qué?, los estáis viendo.

R: Son más cortos.

21. P1: Unos son más cortos, otros son más largos. Mi pregunta es, ¿cuál es el más rápido?

R: Lo probamos en una carrera.

22. P1: Y los círculos que decía R, ¿cómo son, pequeños o grandes? ¿Son grandes? Mirad a ver.

R: No, medianos. Pero el de I es más delgado por eso tiene los círculos más pequeños.

Tabla 4. Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval (Fase 3)

Niveles de Van Hiele \ Tipo de Aprehensión de Duval		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos			
	Consideraciones visuales			
	Consideraciones táctiles			24
	Descripción de propiedades globales			
2	Análisis informal de relaciones	20		
	Análisis informal de propiedades			25
	Definiciones de estructura lógica simple		23	22
	Demostraciones de tipo empírico			21, 26
	Experimento basado en ejemplo		28	27

Continúa la Fase 3 del aprendizaje mediante entrevistas individuales. Describimos la entrevista de nuestro sujeto.

23. P1: Y, ¿cómo has construido tu cilindro R? Cuéntanos.

R: Circulando y luego pegando cello.

24. P1 ¿Me puedes decir qué es "circulando"?

R: (Coge un cilindro de papel que tiene en la mesa por uno de sus extremos y toca la zona en la que se juntan los dos extremos del papel) Pues poner algo junto y luego ponerle cello.

25. P1: ¿Qué propiedades crees que tiene tu cilindro? Piensa. ¿Qué puede hacer tu cilindro?

R: Pues, por ejemplo rodar. También sujetarse de pie. Tambalearse. También a veces pierde carreras.

26. P1: ¿Los cilindros se pueden poner unos encima de otros? ¿qué crees? ¿Por qué?

R: No sé si se pueden poner unos encima de otros (tiene un cilindro vertical delante y señala hacia arriba mientras piensa)

P1: Prueba con ese otro que tienes ahí al lado.

R: A ver, pero primero hay que hacerle unos... a ver (Con su cilindro en vertical trata de colocar el otro encima, pero como es más estrecho se mete dentro). No, que se mete para adentro.

27. P1: Porque es más estrecho, pero ¿tú crees que se sujetarían unos encima de otros?

R: No sé, los gordos encima de los gordos.

P1: ¿Y en el otro sentido? Ponlos en horizontal a ver qué pasa.

R: (Coloca los dos cilindros uno al lado del otro en paralelo en horizontal y trata de poner uno encima del otro) También se caen.

P1: Ah, entonces no se pueden apilar.

R: No.

28. P1: Mira, ¿tú sabes para qué vale un cilindro?

R: Si, también vale para sujetar papel higiénico y de cocina.

P1: ¿Y para qué más?

R: Eh, no sé para qué más.

P1: Piensa, ¿conoces cosas que tengan cilindros?

R: ¡Ah sí! Las pisonadoras. Las pisonadoras aplastan cosas con un cilindro tan gordo que aplasta las cosas más amasadas. Y el cilindro que llevan adelante es tan, tan pesado que puede aplastar las bolas de queso gigantes.

Evolución de la argumentación a través de las distintas fases de aprendizaje

En la Tabla 5 se recogen los fragmentos de discurso correspondientes a cada cruce de la tabla. Los fragmentos 1 al 12 se desarrollan durante la fase 1 de aprendizaje; del 13 al 19 durante la fase 2 y del 20 al 28 corresponderían a la fase 3.

Tabla 5. Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval

Niveles de Van Hiele		Tipo de Aprehensión de Duval: Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos	1	2	
	Consideraciones visuales	5		
	Consideraciones táctiles		7, 8	24
	Descripción de propiedades globales	3	4, 6, 9	10, 13, 15
2	Análisis informal de relaciones	12, 20	11	
	Análisis informal de propiedades		17	16, 25
	Definiciones de estructura lógica simple		18, 23	22
	Demostraciones de tipo empírico		14	21, 26
	Experimento basado en ejemplo		28	19, 27

Durante la primera fase del aprendizaje, que está enfocada a que la maestra identifique los conocimientos y formas de razonamiento de los aprendices, se observa una evolución en las argumentaciones del niño estudiado, que van desde la primera observación ("es una cosa muy redonda"), clasificada aprehensión perceptiva de un concepto básico, a la descripción de propiedades globales del objeto mostrando una aprehensión operativa (ej. afirmación nº 10: "y también es como un cilindro, pero si lo cortamos tiene menos redondos aún"), e incluso llega a realizar un análisis informal de relaciones de tipo discursivo (p.e. afirmaciones nº 11: "pero los que no son vehículos no tienen ruedas y las carreteras se inventaron para que circulen los coches").

En cuanto a las respuestas del niño en la segunda fase hemos observado que predomina la aprehensión discursiva, produciéndose en esta fase argumentaciones referentes tanto al análisis informal de relaciones y propiedades como a definiciones de estructura lógica simple y demostraciones empíricas. También aparece la aprehensión operativa relacionada con el análisis informal de propiedades y el experimento basado en ejemplo.

En el desarrollo de la tercera fase, cuando se pretende que el alumno verbalice los resultados de la actividad, observamos que la aprehensión discursiva se hace presente cuando se trata de hacer un análisis informal de relaciones ("es más delgado por eso tiene los círculos más pequeños"), pero se complementa con una aprehensión operativa, que podríamos relacionar con consideraciones táctiles en el primer nivel de Van Hiele y que a su vez también está relacionada con el análisis informal de propiedades o las demostraciones de tipo empírico y los experimentos basados en ejemplo que son característicos del nivel 2.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Tal como hemos visto en el apartado de resultados, el caso que hemos analizado muestra como las distintas fases de aprendizaje seguidas por la maestra exigen al niño una mayor comprensión del concepto matemático que se pretende estudiar en el aula, ayudándole a interiorizar los conceptos ya asimilados e incentivándole a desgranar en mayor medida las propiedades del objeto y a argumentar de modo más complejo, mostrando una evolución positiva en el tipo de aprehensión mostrado (Duval 1998), comenzando en una aprehensión de tipo perceptivo para acabar mostrando rasgos de una aprehensión de tipo operativo.

Acorde con Gutiérrez (2012), esta enseñanza guiada en fases llevada a cabo por la maestra ayuda al niño a incrementar su nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele, llegando en algunos casos a realizar argumentaciones y justificaciones características del nivel 2, nivel poco frecuente en educación Infantil.

Estos dos hechos nos han permitido determinar en qué fase de aprendizaje se hace un cambio significativo de argumentación, tanto con respecto a la tipología de aprehensión mostrada como al nivel de Van Hiele, determinando que en este caso ha sido fundamental la fase 3 para determinar el tipo de razonamiento más alto de este niño.

Igualmente, debemos hacer hincapié en el diseño de la actividad que, debido a su estructura metodológica (siguiendo indicaciones de la NCTM; 2000) y su secuenciación (basada en las fases de aprendizaje de Van Hiele; Gutiérrez, 2012), fomenta en todo momento la interacción de los niños con el mundo real y matemático e incentiva a los mismos a justificar y razonar sus afirmaciones. Este último apartado de gran interés para la formación de profesorado de Educación Infantil.

Referencias

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar. Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En Planas, N. (ed.); *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Graó: Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Prior Martínez, J. y Torregrosa Gironés, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 339-368.

Torregrosa Gironés, G., Quesada Vilella, H. y Penalva Martínez, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 327-340.

CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE 6 A 12 AÑOS

Characteristics of geometric shapes' understanding on students from 6 to 12 years old

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar la comprensión de alumnos de educación primaria de las figuras geométricas como elementos de una clase. La coordinación de las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1995) con la idea de concepto figural (Fischbein, 1993) han sido usadas para analizar entrevistas clínicas realizadas a 45 alumnos de educación primaria en las que se pedía que, a partir del reconocimiento de atributos en las figuras proporcionadas, realizaran clasificaciones. Los resultados indican que el control de la componente conceptual sobre la perceptual en la comprensión de las figuras como elementos de una clase es progresivo y depende de los atributos considerados. Estos datos apoyan la existencia de un "nivel sincrético" (Clements et al, 1999) en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas.

Palabras clave: *pensamiento geométrico, reconocer figuras geométricas, perspectiva perceptual, perspectiva conceptual y clasificar figuras geométricas.*

Abstract

The aim of this research is to characterise the geometric shapes' understanding of primary education's scholars of geometric shapes as elements of a class. The coordination of the perceptual, discursive and operational apprehensions (Duval, 1995) with the idea of figural concept (Fischbein, 1993) have been used to analyse clinical interviews with 45 primary education's scholars which requested, first of all the recognition of attributes in provided figures and after them, the classification of the figures. Results show the control of the conceptual component on the perception, in the geometric shapes' understanding as element of a class, is progressive and depends on attributes. These information supports the existence of a "syncretic level" (Clements et al., 1999) in the development of the understanding of geometric shapes.

Keywords: *geometrical thinking, recognize of geometric shapes, perceptual perspective, conceptual perspective and classify of geometric shapes.*

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo del pensamiento geométrico, el reconocimiento de atributos de las figuras y la relación de estos desempeña un papel relevante para realizar clasificaciones de las figuras (Arnas y Aslam, 2010; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh y Psamir, 2011; Yesil-Dagli y Halat, 2016). Asimismo, en el proceso de reconocer las figuras pertenecientes a las clases establecidas, el uso de figuras prototípicas impone ciertas limitaciones (Scaglia y Moriena, 2005). Ejemplos de figuras prototípicas pueden ser los cuadrados, triángulos equiláteros dibujados con la base paralela al borde de la hoja o cualquier otro polígono regular.

El estudio relacionado con el aprendizaje de las figuras abordando diferentes cuestiones relacionadas

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

con ellas, tales como aspectos de visualización, demostración, etc., ha sido estudiado y tratado tanto a nivel internacional como nacional (Fernández, 2013; Guillen y Figueras, 2004; Gutiérrez, 1998). En particular, algunas de las investigaciones realizadas tienen como referencia los niveles de Van Hiele, como el trabajo de Sarasua (2013) sobre la posible conexión entre las destrezas de representación externa de las figuras planas y los niveles de razonamiento.

Investigaciones previas indican que los niños suelen distinguir unas figuras geométricas mejor que otras cuando las emparejan con figuras prototípicas, pero tienen dificultades con ejemplos no familiares de algunas figuras geométricas y con la consideración de contraejemplos (Clements et al., 1999; Tsamir, Tirosh y Levenson, 2008). Sin embargo, el hecho de que los niños puedan reconocer algunos atributos de las figuras geométricas, como por ejemplo la concavidad y convexidad, aunque no usen los términos geométricos específicos, ha llevado a los investigadores a plantear la hipótesis de la interacción entre lo perceptual y el reconocimiento de algunos atributos mediante una perspectiva analítica en un primer nivel de desarrollo (Clements et al., 1999). En este sentido, la manera en la que los niños pueden explicar la pertenencia o no a una determinada clase, muestra los conflictos existentes entre el uso de la figura prototípica como referente y el análisis de sus propiedades y componentes en función del tipo de figura empleada en la actividad. De esta manera, el desarrollo del reconocimiento de las figuras geométricas se vincula al proceso por el cual los niños empiezan a generar relaciones entre los atributos y los dotan de significado. Por ejemplo, cuando empiezan a comprender la idea de polígono vinculado a figuras cerradas y con lados rectos.

En este desarrollo, la presencia de ejemplos prototípicos de las figuras favorece la generalización y la posibilidad de añadir a los conceptos características vinculadas solo a lo perceptual, sin embargo, impide el desarrollo de la categorización matemática, esto es, la consideración de una figura como parte de una clase. Por ejemplo, los niños tienen dificultad en considerar los cuadrados como subclase de los paralelogramos.

Esta característica de la interrelación entre la perspectiva perceptual y analítica, que Clements y sus colegas (1999) denominan "nivel sincrético" para diferenciarlo, simplemente, de la consideración de aspectos perceptuales (nivel visual en términos de los niveles de van Hiele), se manifiesta cuando los niños, ante actividades de clasificar triángulos, consideran a los triángulos isósceles "figuras alargadas", como "casi triángulos". La relación entre lo perceptual y lo conceptual fue estudiado por Fischbein (1998) con estudiantes de secundaria (14-17 años), concluyendo que solamente los que tenían una fuerte formación matemática eran capaces de superar las aparentes contradicciones entre el procesamiento de la información perceptual y las propiedades derivadas de la definición de las figuras geométricas, que caracterizan la perspectiva conceptual. Sin embargo, son menos conocidas las características de la interacción entre lo perceptual y lo conceptual en los alumnos de educación primaria.

La información sobre las interacciones entre lo perceptual y la consideración de atributos relevantes en el proceso de categorización de las figuras geométricas (proceso por el cual una figura se considera parte de una clase) puede ser relevante para empezar a generar trayectorias hipotéticas de aprendizaje de las figuras geométricas alrededor de las cuales organizar la enseñanza. La investigación presentada tiene como objetivo identificar características del desarrollo de la comprensión de los alumnos de educación primaria (6-12 años) de las figuras geométricas como elementos de una clase, en concreto, investigar las relaciones entre las propiedades perceptuales (figurales) y las conceptuales en el proceso por el cual los niños consideran las figuras como elementos de una clase. Por consiguiente, la pregunta de investigación que nos planteamos es: ¿qué factores determinan la interacción entre las perspectivas perceptual y conceptual en la comprensión de las figuras geométricas como elementos de una clase de figuras en la educación primaria?

MARCO TEÓRICO

Los trabajos de Duval (1995, 1999) subrayaron el papel de la coordinación entre las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa en el aprendizaje de la geometría. La *aprehensión perceptual* es la capacidad para reconocer o percibir, en un plano o en profundidad, las figuras y ser capaz de nombrarlas y reconocerlas dentro de un subconjunto formado por varias figuras; la *aprehensión discursiva* es la capacidad que tiene un individuo de vincular hechos geométricos a las figuras, así como realizar declaraciones sobre la denominación, definición y reconocimiento de las propiedades geométricas; y finalmente, la *aprehensión operativa* es la capacidad de poder modificar una figura para resolver problemas geométricos, como por ejemplo, cambiar la posición u orientación de la figura. La coordinación de estas aprehensiones está en la base del desarrollo del pensamiento geométrico que permite asumir el vínculo entre las imágenes perceptuales y las propiedades teóricas que definen la inclusión de la figura en una categoría (Fischbein, 1993, 1998).

Fischbein (1998) señaló que las figuras geométricas se caracterizan por propiedades perceptuales y conceptuales que reflejan las diferencias entre los conceptos y las imágenes. Para Fischbein una figura geométrica es una entidad abstracta cuyo significado está determinado por una definición, pero que, al mismo tiempo, es una imagen con características perceptuales (tamaño y orientación). De esta manera, en el desarrollo del razonamiento geométrico se entrelazan lo perceptual y lo conceptual. El papel que desempeña lo conceptual para gobernar las imágenes perceptuales es una competencia que se desarrolla a lo largo del tiempo. Para Fischbein esta interacción genera una tercera categoría de representaciones mentales, denominada concepto figural, que posee, simultáneamente, rasgos de lo perceptual y de lo conceptual.

Consideraremos manifestaciones de la coordinación de las aprehensiones perceptual, operativa y discursiva a la manera en la que podemos manipular las representaciones físicas de las figuras y vincularlas a propiedades geométricas que evidencian la existencia del concepto figural en la mente de los estudiantes. La capacidad de los estudiantes para realizar estas coordinaciones pone de manifiesto que las figuras geométricas son entidades que poseen tanto propiedades conceptuales como perceptuales (Fischbein, 1998). Desde este punto de vista, la simbiosis que proporciona la comprensión configural de las figuras geométricas permite que los estudiantes puedan realizar manipulaciones de las figuras (aprehensión perceptual y operativa) mientras que la componente conceptual proporciona el control lógico de estas operaciones (aprehensión discursiva). La caracterización de este proceso en educación primaria no es bien conocida hasta el momento.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

El estudio se plantea como un estudio piloto que nos permita comprobar la potencialidad o no de las actividades diseñadas ad hoc para evidenciar posibles relaciones que puedan existir entre las percepciones perceptuales y las conceptuales que utilizan los niños de primaria a lo largo del proceso de clasificación de figuras geométricas. La metodología es de tipo cualitativo, en la investigación han participado 45 alumnos de primero a sexto de educación primaria (6-12 años) pertenecientes al mismo centro (Tabla 1), elegidos por sus maestros teniendo en cuenta su rendimiento académico y su capacidad comunicativa.

Tabla 1. Participantes de la investigación. Número de alumnos por curso/edad

Curso	1º	2º	3º	4º	5º	6º	TOTAL
Edad (años)	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	6-12 años
Participantes	10	10	10	5	5	5	45 alumnos/as

Si bien la metodología de enseñanza puede variar entre los diferentes cursos, en el centro básicamente se sigue el libro de texto, el cual los profesores pueden llegar a completar con actividades preparadas por ellos y uso de materiales manipulables. Los maestros se ciñen al curriculum de educación primaria el cual, en relación a las figuras geométricas, se centra en la identificación, construcción y clasificación de las mismas siguiendo algún criterio; y en la introducción progresiva del vocabulario específico de geometría.

Instrumento y procedimiento

El instrumento de recogida de datos consistió en una entrevista clínica con actividades entre las que había algunas de ellas diseñadas *ad hoc* y otras adaptadas de investigaciones previas (Clements et al., 1999; Sarama y Clements, 2009). El guion de la entrevista clínica fue el mismo para todos los cursos, a excepción del correspondiente al primer curso en el que no se presentaron las tareas relacionadas con la identificación de atributos de los triángulos (longitud de los lados y la amplitud de sus ángulos), al no tratarse de un contenido curricular del curso. Las entrevistas fueron grabadas en video. La entrevista constaba de 17 actividades agrupadas en dos tipos: 9 actividades de reconocimiento (Figura 1) y 8 de clasificación. En las actividades de reconocimiento se incluían el reconocimiento de atributos y las diferencias entre figuras, el reconocimiento de una figura a partir de un listado de atributos y, la distinción entre polígonos/no polígonos. En las actividades de clasificación se incluían 6 actividades de clasificación de un grupo de figuras de forma libre y atendiendo a un criterio del entrevistador y, 2 actividades de clasificación de un grupo de polígonos considerando dos criterios simultáneamente proporcionado por el entrevistador. Los atributos considerados en las figuras fueron: polígonos/no polígonos, y sus propiedades: lados rectos/curvos, figuras cerradas/abiertas, lados cruzados/no cruzados, número de lados y la concavidad/convexidad.

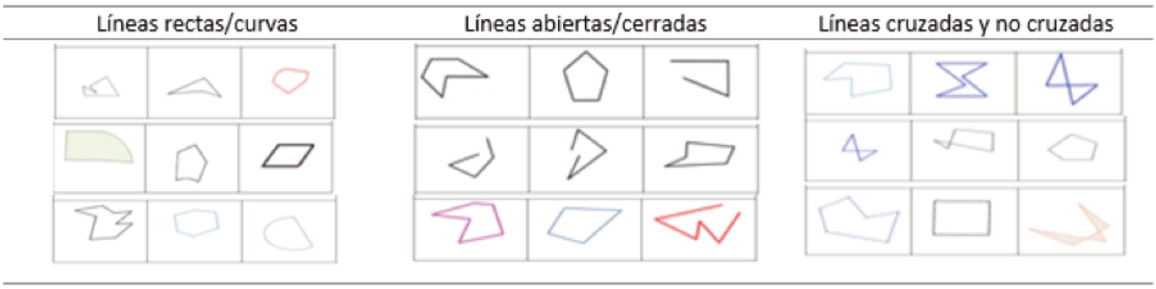


Figura 1. Ejemplos de figuras para reconocer atributos

Análisis

Para el análisis de los datos, inicialmente se visualizaron los vídeos de las entrevistas y analizaron las transcripciones para identificar los aspectos relevantes del proceso de resolución de las tareas A partir de las transcripciones de las entrevistas clínicas realizadas a los niños de primaria para su análisis se siguió un método inductivo que nos permitió generar descriptores y categorías de observación para obtener evidencias del pensamiento de los alumnos (Clement, 2000). En el análisis, se tuvieron en cuenta las aprehensiones ejecutadas por los niños (perceptual, discursiva y operativa) junto con los atributos reconocidos y usados en cada tarea. Así, para cada alumno describimos la manera en la que resolvía cada tarea considerando las aprehensiones que ponía en práctica (perceptual, discursiva y operativa), y los atributos considerados (número de lados, concavidad/convexidad, figuras cerradas/abiertas, lados rectos/curvos, y/o cualquier otra diferencia mencionada por los niños). A continuación, generamos una inferencia de lo que parecía significar la conducta del niño desde la perspectiva del reconocimiento de diferentes atributos de las figuras y cómo los clasificaba.

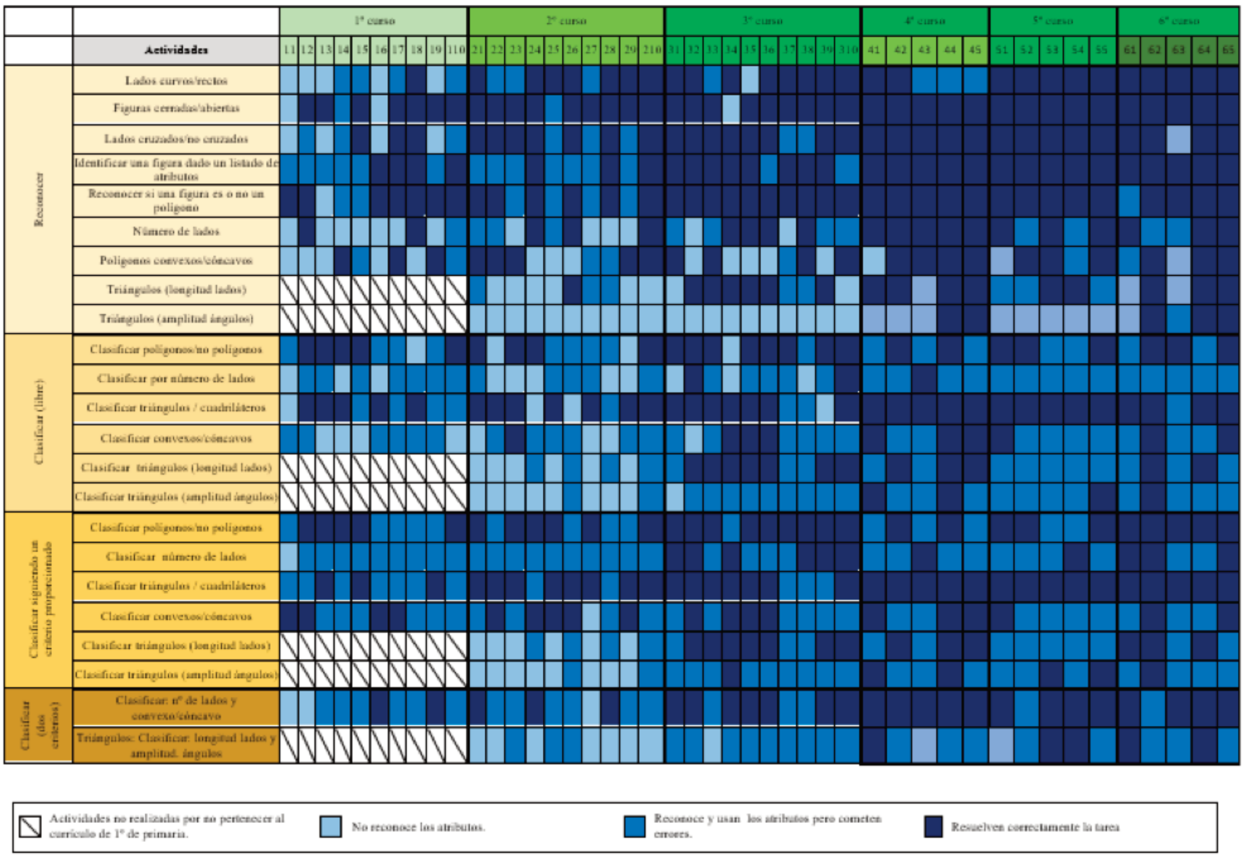
Los códigos generados fueron asociados a los mecanismos cognitivos referidos a las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa considerando los atributos de las figuras mencionados por los niños como una manera de poner de manifiesto el carácter progresivo de la interacción entre lo perceptual y lo conceptual. A partir de estos códigos, generamos categorías explicativas del proceder de los niños. Estas características son las que describiremos en la sección de resultados.

RESULTADOS

La tabla 2 muestra la evolución de los niños en el reconocimiento de los diferentes atributos de las figuras, el reconocimiento de las figuras a partir de una lista de atributos dados y, en la clasificación de las figuras siguiendo un criterio (libre o dado) o atendiendo a dos criterios.

Los resultados indican que, para los alumnos de primaria entrevistados, el reconocimiento de atributos como lados curvos/rectos, figuras abierta/cerradas mejora a lo largo de los años. Sin embargo, este progreso dependía del atributo considerado, mostrando el carácter progresivo de la interacción entre lo perceptual y lo conceptual. Por ejemplo, la concavidad/convexidad de los polígonos fue un atributo difícil de reconocer. Para estos niños de primaria, el atributo más fácilmente reconocible fue el de figura abierta/cerradas, mientras que el que presentó más dificultades fue el criterio de lados curvos/rectos, el número de lados y figuras cóncavas/convexas. Los niños de tercero, ya reconocían sin dificultad los atributos de manera aislada que presentaban dificultades en los primeros cursos (lados curvos/rectos, cerrados/abiertos, cruzados/no cruzados, número de lados), aunque se mantuvo la dificultad en diferenciar los polígonos cóncavos de los convexos. Finalmente, los niños de sexto curso reconocieron todos los atributos de manera aislada. En relación a los triángulos, la longitud de los lados fue el atributo que reconocieron inicialmente para diferenciar un grupo de triángulos entre sí; sin embargo, la amplitud de los ángulos presentó más dificultades, sólo algunos niños de sexto curso pudieron reconocerlo con ayuda.

Tabla 2. Realización de las actividades de reconocer y clasificar de 1º a 6º



En relación al proceso de reconocer varios atributos simultáneamente, los niños de los primeros cursos tuvieron muchas dificultades, y mostraron cierta limitación para considerar varios atributos al mismo tiempo. Sin embargo, la capacidad de usar una lista de atributos para reconocer figuras progresó en los cursos siguientes. Esta capacidad es relevante para determinar la manera en la que los niños y las niñas llegaron a reconocer cuándo una figura era o no un polígono (figura cerrada, lados rectos y no cruzados).

Con respecto a las actividades de clasificar figuras geométricas libremente, hubo cierto progreso a lo largo de los cursos en la capacidad de clasificar polígonos/no polígonos, y en triángulos/cuadriláteros. Sin embargo, considerar el número de lados como un criterio de clasificación fue difícil para los niños de todos los cursos, siendo menor el progreso de esta capacidad. En este caso, los niños solían incluir figuras que no correspondían con el número de lados que tenían. El otro criterio de clasificación que también mostró un menor progreso fue la clasificación de polígonos cóncavos/convexos. La clasificación de los triángulos por la longitud de sus lados y por la amplitud de sus ángulos tuvo menor progresión y se evidenció como el de mayor dificultad el atributo relacionado con la amplitud de sus ángulos. Todas estas dificultades estuvieron presentes a lo largo de todos los cursos de primaria. Respecto a las tareas de clasificar siguiendo un criterio proporcionado, la evolución fue similar a las de clasificar de manera libre.

Con respecto a las tareas de clasificar siguiendo dos criterios, se puso nuevamente de manifiesto la dificultad de los niños de los primeros cursos de primaria en reconocer las figuras cóncavas o convexas y en contar el número de lados. No fue hasta cuarto donde se empezó a ver cierta evolución en la capacidad para reconocer estos atributos, combinarlos y poder clasificar adecuadamente las figuras. Con los triángulos, a partir de quinto hay una cierta evolución en la capacidad de combinar la longitud de los lados y la amplitud de sus ángulos para clasificar, si bien se trató de una tarea de especial dificultad para los niños de quinto curso.

Teniendo en cuenta el tamaño de la muestra, y sin pretender establecer generalizaciones, podemos avanzar que estos resultados definen dos ámbitos que nos aportan información para ayudarnos a comprender cómo progresan los niños/as de 6 a 12 años desde el reconocimiento perceptual de las figuras (la figura como un todo) a su comprensión conceptual (reconociendo sus atributos y combinándolos): (a) la influencia de lo perceptual sobre el concepto figural demostrado en las actividades de reconocer figuras, y (b) la forma en la que los niños/as de 6 a 12 años admiten las figuras como elementos de una clase.

La influencia de lo perceptual sobre el concepto figural en el reconocimiento de figuras

En los primeros años, el reconocimiento de las figuras por parte de los niños era básicamente perceptual y reconocían la figura como un todo (aprehensión perceptual) sin reconocer sus partes o atributos. Por ello, no llegaron a reconocer, ni a clasificar, muchas de las figuras que se alejaban de la figura prototípica. Un ejemplo de la respuesta de los niños que evidencia la perspectiva meramente perceptual (Figura 1) se dio en el caso de las figuras convexas de muchos lados, que eran identificadas como círculos o figuras con lados curvos (Figura 1).

I: Vale, ¿en que se parecen estas dos que se diferencian de esta?

E2-2: Esta son líneas curvas (tercera figura) y estas no (primera y segunda figura).

Figura 1. Tarea de reconocimiento de atributos

Además, en los primeros cursos solían comparar algunas figuras no prototípicas con objetos de la vida cotidiana mostrando la perspectiva perceptual y no analítica. A continuación, mostramos un ejemplo que evidencia lo anterior (Figura 2).

I: ¿En qué se parecen estas dos figuras que se diferencian de esta?

Figura 2. Tarea de reconocimiento de atributos

E1-3: Porque estas dos no tienen ninguna línea cruzada (izquierda) y esta hace como un reloj de arena (derecha).

En las tareas de clasificar (Figura 3), los niños de los cursos iniciales no reconocieron las propiedades de las figuras, y acabaron agrupándolas por su semejanza perceptual.

I: Vale, explícame, ¿por qué has agrupado así?

E1-2: Porque estas se parecen (las de la izquierda) y estas no (las de la derecha).

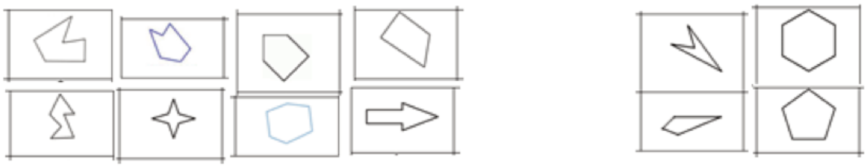


Figura 3. Tarea de clasificar polígonos en cóncavos y convexos sin proporcionar criterio

Así, en muchas clasificaciones, reconocían figuras con pocos o muchos picos, cuando agrupaban según el número de lados, o en figuras que se parecen a círculos o que tienen picos, para agrupar las figuras cóncavas y convexas, tal y como se evidencia en el protocolo siguiente (Figura 4).

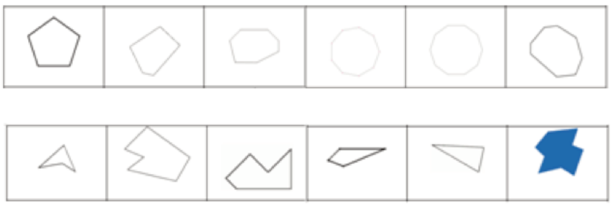


Figura 4. Tarea de clasificación de polígonos por número de lados sin proporcionar criterio

I: ¿Por qué has agrupado así?

E1-4: He agrupado las que se parecen más a un círculo en un sitio (arriba) y las que más se parecen a triángulos o a cuadrados o figuras raras como esta (señalando el eneágono cóncavo) en otro sitio (abajo).

Conforme avanzan los cursos, la perspectiva analítica empieza a complementar a la perspectiva perceptual lo que hace que los alumnos se fijaran más en las partes de las figuras (aprehensión perceptual y discursiva). Por ejemplo, a partir de tercero de primaria, ya no usaban el criterio de agrupación de “porque se parecen”, sino que indicaban cuál había sido el atributo usado para realizar dicha agrupación. Lo mismo sucedió al agrupar atendiendo al número de lados (Figura 5), los niños ya no se referían a “muchos o pocos picos”, sino que consideraron el número de lados de las figuras.

I: Explícame, ¿por qué has agrupado así?

E3-10: Porque tienen los segmentos iguales. Estos que tienen nueve segmentos los he puesto juntos (1), estos tienen cinco segmentos los he puesto juntos (2), este que tiene diez segmentos como no hay ninguna más que tiene diez segmentos la he puesto sola (3), esta que tiene tres segmentos la he puesto sola porque no hay ninguna más de tres segmentos (4), esta de ocho segmentos no la he puesto con ninguna porque tampoco tenía pareja (5), y esta de siete segmentos tampoco había otro de siete segmentos y se ha quedado sola (6).

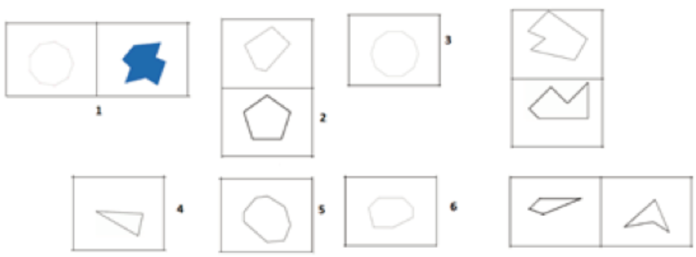


Figura 5. Tarea de clasificación de polígonos por número de lados sin proporcionar criterio

Sin embargo, los niños/as podían cometer errores al contar el número de lados, pues en las actividades de clasificar podían incluir un octógono con un eneágono o un eneágono con un decágono. Lo mismo sucedía en las agrupaciones de figuras cóncavas y convexas, ya que incluían las figuras de la estrella y la flecha en el grupo de los convexos, cuando ambas son cóncavas.

I: Vale, ¿cuál ha sido tu criterio para agrupar?

E3-3: Porque estas tienen los picos para fuera (izquierda) y estas tienen picos para dentro (derecha).

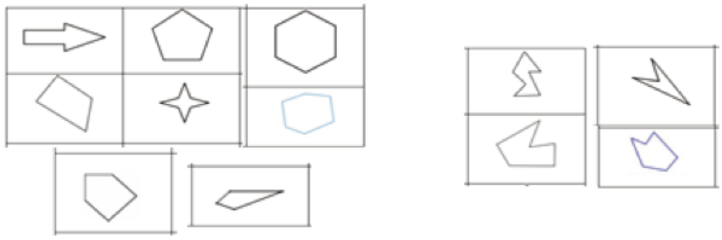


Figura 6. Tarea de clasificar polígonos en cóncavos y convexos sin proporcionar criterio

La influencia de la perspectiva analítica sobre la perceptual fue progresando a lo largo de los cursos siempre vinculada a los atributos considerados. En los últimos cursos, las respuestas de los estudiantes mostraban una presencia cada vez mayor del uso de los atributos, lo que desde nuestro punto de vista evidenciaba el control de la componente conceptual sobre la perceptual en las actividades de clasificar. Así por ejemplo, los niños a partir de 10 años, mostraron mayor habilidad para contar los lados de los polígonos lo que les permitió clasificarlos según el número de lados sin cometer errores y, en relación a las figuras cóncavas y convexas, desapareció la confusión que tenían con las figuras cóncavas en cursos anteriores (flecha y la estrella), lo que favoreció que los niños entre 11-12 años pudieran analizar las figuras, reconocer sus características y clasificarlas, atendiendo a sus propiedades.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados indican que el control de la componente conceptual sobre la perceptual, en la comprensión de las figuras como elementos de una clase, es progresivo y depende de los atributos considerados. Estos datos apoyan la existencia de un "nivel sincrético" (Clements et al., 1999) en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas que muestra cómo el reconocimiento progresivo de los atributos que refleja la perspectiva analítica va superando a la perspectiva perceptual, y nos obliga a profundizar en esta línea de trabajo aumentando la muestra. Este avance de la perspectiva analítica en las actividades de reconocer y clasificar figuras lo podemos entender como un mayor control de la componente conceptual y, por tanto, como una mejor constitución del concepto figural (Fischbein, 1993).

El dominio de la perspectiva perceptual en los primeros cursos impide a los niños poder reconocer los atributos de las figuras geométricas. Este hecho se apoya en el papel que desempeñan las figuras prototípicas como anclaje de la perspectiva perceptual, lo que impide el desarrollo de la perspectiva analítica (Scaglia y Moriena, 2005). Por ejemplo, los niños están acostumbrados a reconocer triángulos equiláteros con la base paralela al borde de la hoja por mera percepción de la figura como un todo (aprehensión perceptual).

Los resultados de esta investigación indican la existencia de la complementariedad de lo perceptual y lo conceptual, en los primeros cursos de educación primaria, para reconocer atributos y clasificar las figuras. A lo largo de los años, los niños progresan evidenciando un mayor control de lo conceptual frente a lo perceptual, superando la influencia de las figuras prototípicas. Esta complementariedad vinculada a los diferentes atributos que podemos considerar en las figuras, apoyan la existencia de un nivel "sincrético" entre lo perceptual y lo analítico en una clasificación por niveles más generales (Clements, et al., 1999; Fujita, 2012; Hershkowitz et al., 1990; Yesil-Dagli y Halat, 2016). Nuestros resultados indican que conforme avanzan los cursos, mayor es la capacidad para analizar las figuras geométricas y menor la influencian de la perspectiva perceptual (aprehensión perceptual); sin embargo, esta progresión no es uniforme para los diferentes atributos de una figura (Walcott, Mohr y Kastberg, 2009).

Por otra parte, nuestros resultados ponen de relieve que el control del concepto de polígono (cuyo significado es fijado por la definición de figura cerrada de lados rectos y no cruzada) sobre la variedad de posibles ejemplos usados, es relevante y evidencia la constitución del concepto configural por parte de los estudiantes. El uso de diferentes atributos en los polígonos (número de lados, cóncavos/convexos) puso de manifiesto esta progresión a través de la habilidad de controlar los diferentes ejemplos particulares de polígonos usados mediante el conjunto de atributos dados por la definición del concepto de polígono. Además, esta evolución en la manera en la que lo conceptual empieza a gobernar a la perspectiva perceptual tuvo un reflejo en un empleo cada vez más consciente de los términos específicos para los atributos. Los niños progresivamente justificaban sus acciones, usando los términos más acordes al contexto y empleando expresiones más adecuadas. Esta cuestión genera cuestiones de investigación adicionales en relación al papel que desempeña el lenguaje en las acciones cognitivas de control de la componente conceptual sobre la componente perceptual en el desarrollo de comprensión de las figuras como elementos de una clase (como una evidencia del desarrollo del pensamiento categorial).

Finalmente, y desde un punto de vista didáctico, estos resultados sugieren que los alumnos de primaria deberían aprender a analizar los atributos que caracterizan las figuras geométricas y decidir su pertenencia a una determinada clase de figuras según la definición (lo conceptual) independientemente de la información perceptual, como una manera de desarrollar un tipo de pensamiento a través de las categorías que va más allá de la educación matemática (Gagatsis et al., 2010; Guillem y Figueras, 2004; Hershkowitz et al., 1990; Levenson et al., 2011).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

Referencias

Arnas, Y. A. y Aslam, A. G. D. (2010). Children’s classification of geometric shapes. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 19*(1).

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 547-589.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children’s concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192–212.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142- 157.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* . Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE, pp. 3-26.

Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children’s understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal, 11*(2), 43-61.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1193-1211.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panoura A. y Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitaties Comenianae Matematics, 10*, 33-50.

Guillen, G. y Figueras, O. (2004). Un estudio exploratorio sobre la enseñanza de la Geometría en Primaria. Elaboración de una encuesta. En E. Castro y E. de la Torre (eds.) *Investigación en Educación Matemática VIII*, La Coruña: SEIEM.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in *"Encuentro de Investigación en Educación Matemática"*, TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, manuscript.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. y Vinner, S. (1990). Psychological En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ICMI Studies, pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Pressaspects of learning geometry.

Levenson, S. Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research and Practical Perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43-65). Bilbao: SEIEM.

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, *17*(3), 105-120.

Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 81-95.

Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 30-40.

Yesil-Dagli, U. y Halat, E. (2016). Young Children's conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(2), 189-202.

CONOCIMIENTO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO Y CÓMO RECONOCEN CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Pre-service teachers' knowledge of proportional reasoning and how they recognize characteristics of students' understanding

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina el conocimiento del razonamiento proporcional de estudiantes para maestro (EPM) y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. 92 EPM resolvieron 12 problemas vinculados a 12 sub-constructos del razonamiento proporcional y analizaron tres respuestas de estudiantes a cada uno de los problemas anteriores. Los resultados indican que los EPM resuelven los problemas correctamente y reconocen la comprensión de los estudiantes en algunos sub-constructos vinculados al esquema fraccionario, pero tienen dificultades para resolver y reconocer la comprensión en los sub-constructos relacionados con la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales y con la comparación de razones. Estos resultados sugieren que el conocimiento del razonamiento proporcional y el reconocimiento de evidencias de la comprensión de los estudiantes dependen de cada sub-constructo considerado.

Palabras clave: *razonamiento proporcional, conocimiento de matemáticas, mirada profesional, comprensión de los estudiantes*

Abstract

This study examines pre-service teachers' knowledge of proportional reasoning and how they recognize characteristics of student's understanding. Ninety-two pre-service teachers solved 12 problems related to the 12 sub-constructs of proportional reasoning and analyzed three students' answers to each of the above problems. Results indicate that pre-service teachers solve problems correctly and recognize students' understanding in some sub-constructs linked to the fractional scheme but have difficulty in solving and recognizing students' understanding in the sub-constructs related to the discrimination between proportional and non-proportional situations and the ratio comparison. These results suggest that the knowledge of proportional reasoning and the recognition of students' understanding relay on the sub-constructs considered.

Keywords: *proportional reasoning, mathematical knowledge, professional noticing, students' mathematical thinking*

INTRODUCCIÓN

Identificar aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas es una competencia relevante del maestro en su labor docente (Mason, 2002). Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes a través de tres destrezas inte-

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). Zaragoza: SEIEM.

rrelacionadas: describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los detalles matemáticos importantes; interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir qué actividades proponer. Algunos estudios han proporcionado información considerando dicha caracterización en diferentes dominios matemáticos como la generalización de patrones (Callejo y Zapatera, 2016), la derivada (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015), los números racionales (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013), la medida (Ribeiro, Badillo, Sánchez-Matamoros, Montes y Gamboa, 2017) o la proporcionalidad (Rivas, Godino y Castro, 2012; Son, 2013). Estos estudios subrayan la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes en la caracterización de esta competencia. La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores interpretar las respuestas de los estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes (Bartell et al., 2013; Rivas et al., 2012; Son, 2013).

Dentro de esta línea de investigación, y teniendo en cuenta el currículum de primaria y secundaria, un foco de interés es el desarrollo del razonamiento proporcional. Algunos estudios previos muestran que enseñar la idea de razón y proporción que subyacen en el razonamiento proporcional no es una tarea fácil para los maestros (Lamon, 2007). Algunas de las dificultades identificadas están vinculadas a desarrollar formas de razonar en relación a la unidad y a la identificación de una unidad de referencia (Buforn y Fernández, 2014; Lee, Brown y Orril, 2011), a resolver e interpretar problemas de comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011), a dotar de sentido a las estrategias usadas para resolver problemas de proporcionalidad directa (Valverde y Castro, 2009) y a discriminar problemas proporcionales y no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014). Estas investigaciones previas aportan información para caracterizar el conocimiento para enseñar de fracción, razón y proporción (que son ideas implicadas en el razonamiento proporcional) pero es necesario examinar el papel de los diferentes sub-constructos vinculados al razonamiento proporcional en la competencia de reconocer características del desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes.

El razonamiento proporcional

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes sub-constructos: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento up and down y proceso unitizing). Pitta-Pantazi y Christou (2011) amplían y validan esta caracterización considerando la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y Buforn y Fernández (2014) añaden la capacidad de discriminar las situaciones proporcionales y no proporcionales. En nuestro estudio organizamos este modelo del razonamiento proporcional en 3 dominios: (i) esquema fraccionario, (ii) razón y comparación de razones, y (iii) discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales.

El esquema fraccionario consiste en 6 sub-constructos: el sub-constructo *parte-todo* se define como la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo. La fracción como número asignado a una medida permite considerar la *recta numérica* como una representación adecuada e introduce la idea de *densidad* de los números racionales. El sub-constructo *cociente* se vincula al proceso y resultado de un reparto equitativo. El *operador* es visto como una función aplicada a un número, objeto o conjunto. Y el *razonamiento up and down* implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple con la idea de fracción unitaria como unidad iterativa ($a/b = a \times 1/b$).

La razón y comparación de razones implica las ideas de: *razón* como un índice comparativo; *pensamiento relacional* vinculado al reconocimiento de comparaciones absolutas y relativas; *proceso unitizing* en el que es necesaria la construcción de una unidad de referencia y su uso para comparar situaciones; y covarianza que determina la relación entre dos cantidades de manera que, cuando una cantidad cambia, la otra también cambia de manera proporcional con respecto a la primera cantidad.

Finalmente, dado que el razonamiento proporcional implica no solo comprender la relación multiplicativa entre las cantidades en una situación proporcional, sino tener la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008), consideramos la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales como un dominio del conocimiento del razonamiento proporcional.

En este estudio examinamos el conocimiento de estudiantes para maestro de los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional y cómo reconocen evidencias de la comprensión de los estudiantes en estos sub-constructos.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 91 estudiantes para maestro (EPM) matriculados en el tercer curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Alicante. En los años previos habían cursado una asignatura centrada en el sentido numérico y otra centrada en el sentido geométrico. En el momento de la recogida de datos estaban cursando una asignatura relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Los datos fueron recogidos durante el módulo sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y del razonamiento proporcional.

Los datos se recogieron mediante dos cuestionarios. El Cuestionario 1 estaba formado por 12 problemas organizados en tres bloques (Figura 1) teniendo en cuenta los dominios de contenido matemático considerado: seis problemas sobre el esquema fraccionario (bloque A), dos problemas sobre discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B), y cuatro problemas de comparación de razones (bloque C). Los problemas utilizados en este cuestionario procedían de investigaciones previas (Buforn y Fernández; 2014; Lamon, 2007; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) o fueron modificados o diseñados ad hoc. El Cuestionario 2 consistía en 12 tareas en las que se presentaban tres respuestas de estudiantes a cada uno de los problemas que habían resuelto en el Cuestionario 1 que mostraban diferentes características de la comprensión de los estudiantes y cuatro cuestiones relacionadas con las destrezas identificar, interpretar y decidir que caracterizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

La figura 2 muestra la tarea relacionada con el sub-constructo razón. En este problema la razón puede ser vista como una medida (cuando la razón es más próxima a 1, el loft es más cuadrado). En relación a las respuestas de los estudiantes, en la respuesta 1 el estudiante calcula las razones e interpreta que el loft que tiene la razón más próxima a 1 es más cuadrado. Es decir, cuantifica la idea de ser más cuadrado mediante la aproximación de la razón a 1. En la respuesta 2 el estudiante calcula las razones entre los lados pero proporciona una justificación basada en relaciones aditivas entre los lados. La expresión “existe menor diferencia, por lo que será más cuadrado al tener lados más iguales” lleva a pensar que el estudiante está considerando la diferencia entre los lados y lo próxima que está esta diferencia a cero. Finalmente, en la respuesta 3 el estudiante usa relaciones aditivas identificando *ser más cuadrado* como la diferencia menor entre los lados (es decir, la que se aproxima más a 0).

Las dos primeras cuestiones que debían contestar los estudiantes para maestro pedían identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema (cuestión a) y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes (cuestión b). Las otras dos cuestiones pedían proponer actividades (o modificar el problema presentado) para ayudar al estudiante a avanzar en su comprensión (cuestiones c y d). En este trabajo solamente nos centraremos en las cuestiones *a* y *b*.

Análisis

Los datos son las respuestas de los 91 estudiantes para maestro al Cuestionario 1 y las respuestas a las cuestiones a y b de las tareas del Cuestionario 2. El proceso de análisis siguió dos fases. En la primera,

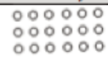
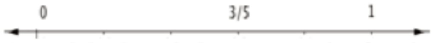
Bloque A: esquema fraccionario (6 problemas)
1. Parte-todo: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado? 
2. Medida-recta numérica: Localiza 2/10 en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta. 
3. Medida-densidad: Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5.
4. Reparto equitativo-Cociente: Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma cantidad de pizza? Haz un dibujo que muestre lo que le toca a cada persona.
5. Razonamiento "up and down": La parte sombreada de esta figura representa 3+2/3. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños? 
6. Operador: El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?
Bloque B: discriminación de situaciones proporcionales (2 problemas)
7. Problema valor perdido proporcional: La máquina R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J?
8. Problema valor perdido no proporcional: Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 120 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?
Bloque C: comparación de razones (4 problemas)
9. Pensamiento relativo-absoluto: José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?
10. Proceso "unitizing": La caja de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja es más barata?
11. Razón: En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes: a) 7.5 metros por 11.4 metros, b) 4.55 metros por 5.08 metros, y c) 18.5 metros por 24.5 metros. ¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?
12. Covarianza: Responde a los siguientes apartados: a) Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor? b) Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor?

Figura 1. Problemas Cuestionario 1

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:
a) 7.5 metros por 11.4 metros b) 4.55 metros por 5.08 metros c) 18.5 metros por 24.5 metros
¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales.

Respuesta 3

* El cuadrado se caracteriza por tener los lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tenga menos distancia de metros, en decir:

• $11'4 - 7'5 = 03'9$ • $5'08 - 4'55 = 0'53$ • $24'5 - 18'5 = 06'0$

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

a) ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.
b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas? Justifica tu respuesta.
c) Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.
d) Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.

Figura 2. Ejemplo de tarea en el Cuestionario 2: problema relativo al sub-constructo razón del Cuestionario 1, tres respuestas de estudiantes y las 4 cuestiones profesionales nos centramos en el Cuestionario 1, codificando con un 1 si el estudiante para maestro había resuelto y justificado correctamente el problema y con un 0 si la resolución era incorrecta o lo había dejado en blanco. En la segunda fase del análisis nos centramos en cómo los estudiantes para maestro identificaban los elementos matemáticos relevantes de cada problema y reconocían características de la comprensión sen las respuestas de los estudiantes. Con este proceso generamos dos categorías relativas a la identificación de los elementos matemáticos (cuestión a): si el estudiante para maestro identifica los elementos matemáticos relevantes del problema o no los identifica; y dos categorías para el reconocimiento de la comprensión de los estudiantes (cuestión b): si el estudiante para maestro usa los elementos matemáticos para reconocer características de la comprensión o si el estudiante para maestro no reconoce características de la comprensión proporcionando comentarios generales basados en la corrección de las respuestas. Finalmente, se agruparon a los estudiantes para maestro según si identificaban y reconocían la comprensión en cada sub-constructo del razonamiento proporcional generando cuatro perfiles (grupos) como rasgos que caracterizan el comportamiento de los estudiantes para maestro.

RESULTADOS

La Tabla 1 muestra el porcentaje de éxito de los estudiantes para maestro en cada uno de los problemas del Cuestionario 1. Más de la mitad de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente los problemas relacionados con el proceso unitizing (71%), problema de valor perdido proporcional (84%), medida-recta numérica (91%), repartos equitativos-cociente (96) y parte-todo (98%). Sin embargo, menos de un tercio resolvieron correctamente los problemas relacionados con el significado de operador (5%), razón como índice comparativo (9%), pensamiento relacional (12%), razonamiento up and down (20%), medida-densidad (26%), problema de valor perdido no proporcional (30%) y covarianza-cualitativo (32%).

Tabla 1. Porcentaje de los estudiantes para maestro que resolvieron con éxito los problemas (N=91)

Problema	Sub-constructo	Número de EPM	Porcentaje de éxito (*)
6	Operador	5	5%
11	Razón	8	9%
9	Pensamiento relacional	11	12%
5	Razonamiento up and down	18	20%
3	Medida – Densidad	24	26%
8	Problema valor perdido no proporcional	27	30%
12	Covarianza – cualitativo	29	32%
10	Proceso unitizing	65	71%
7	Problema valor perdido proporcional	76	84%
2	Medida - recta numérica	83	91%
4	Cociente	87	96%
1	Parte – todo	89	98%

(*) Los porcentajes han sido redondeados a la unidad más próxima

Los resultados muestran que el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro varía en relación a los sub-constructos considerados. Los estudiantes para maestro parecen que son competentes en tres de los sub-constructos del esquema fraccionario (parte-todo, cociente y medida-recta numérica), en el problema de valor perdido proporcional y en el problema de comparación de razones vinculado al proceso unitizing. Sin embargo, tienen dificultades con el resto de sub-constructos vinculados al esquema fraccionario (operador, razonamiento up and down y densidad), con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales (problema de valor perdido no proporcional), y con los sub-constructos relacionados con la comparación e interpretación de razones (razón, pensamiento relacional y covarianza-cualitativo). Estos resultados sugieren que los estudiantes para maestro tuvieron un mayor éxito en los problemas que se pueden resolver a través de procedimientos como la división o la regla de tres y tuvieron dificultades en los problemas que implicaban tener en cuenta las relaciones entre las cantidades.

Respecto al Cuestionario 2 sobre el reconocimiento de características de la comprensión de los estudiantes, de los 92 estudiantes para maestro, las respuestas de 72 de ellos a las cuestiones a y b reflejaban alguna relación entre los elementos matemáticos que identificaron en cada problema y cómo reconocían características de la comprensión de los estudiantes (en los otros 20 no se puedo identificar ningún tipo de relación). Las relaciones identificadas nos permitieron agrupar a los estudiantes para maestro en cuatro perfiles (Tabla 2).

Tabla 2. Perfiles de estudiantes para maestro

	Relación entre la identificación de los elementos matemáticos y el reconocimiento de características de la comprensión de los estudiantes	Nº EPM
Perfil 0	No identifica los elementos matemáticos de cada problema del razonamiento proporcional y no reconoce características de la comprensión de los estudiantes en ningún problema del razonamiento proporcional.	20
Perfil 1	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down y operador) y reconoce algunas características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	17
Perfil 2	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (incluido el razonamiento up and down pero no el operador) y de la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y reconocen características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	19
Perfil 3	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto operador), de la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y de la razón en situaciones de comparación y reconocen características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	16

Los perfiles muestran que los sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional no fueron identificados por los estudiantes para maestro de la misma manera, y esto influyó en cómo reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes. Está característica ayudó a definir los perfiles 1, 2 y 3. La diferencia entre los perfiles 1 y 2 la generó el conocimiento del razonamiento up and down y la discriminación de las situaciones proporcionales y no proporcionales y cómo se usaban al referirse a la comprensión de los estudiantes. La diferencia entre los perfiles 2 y 3 la generó el conocimiento de la covarianza-cualitativo, el pensamiento relacional y la razón, que completan el dominio de comparación de razones. Así, los elementos matemáticos usados con más facilidad para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes son los relacionados con el esquema fraccionario, mientras que, los relacionados con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales fueron más difíciles, y estos, a su vez, fueron más fáciles que los elementos matemáticos relacionados con las situaciones de comparar razones. Por tanto, los problemas de comparar razones fueron los más difíciles a la hora de identificar los elementos matemáticos del problema y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes. Los perfiles identificados muestran que los estudiantes para maestro tuvieron más dificultades en reconocer características de la comprensión de los estudiantes en los problemas en los que las respuestas de los estudiantes mostraban una comprensión conceptual vinculada al significado del sub-constructo, en lugar de una resolución procedimental basada en algún algoritmo.

Presentamos a continuación un ejemplo del comportamiento de un estudiante para maestro del Perfil 1 en el cuestionario sobre conocimiento matemático y en el cuestionario sobre reconocer la comprensión de los estudiantes. Este estudiante para maestro resuelve correctamente los problemas del Cuestionario 1 del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador), el problema sobre el proceso unitizing y el problema de valor perdido proporcional pero no el resto de los problemas, es decir, resuelve con éxito los problemas más procedimentales. En el problema *parte-todo* realiza fracciones equivalentes, en *medida-recta numérica, medida-densidad* y *proceso unitizing* usa divisiones y en el *problema de valor perdido proporcional* usa la idea de "triple", pero no discrimina las situaciones no proporcionales ya que en el *problema de valor perdido no proporcional* usa la idea de "doble" incorrectamente. En el problema sobre *pensamiento relacional* usa una estrategia aditiva y una estrategia sin sentido en el problema de *razón*. Además no resuelve correctamente los problemas de reconstrucción de la unidad (*razonamiento up and down* y *operador* inverso) ni sabe resolver el problema de *covarianza-cualitativo*.

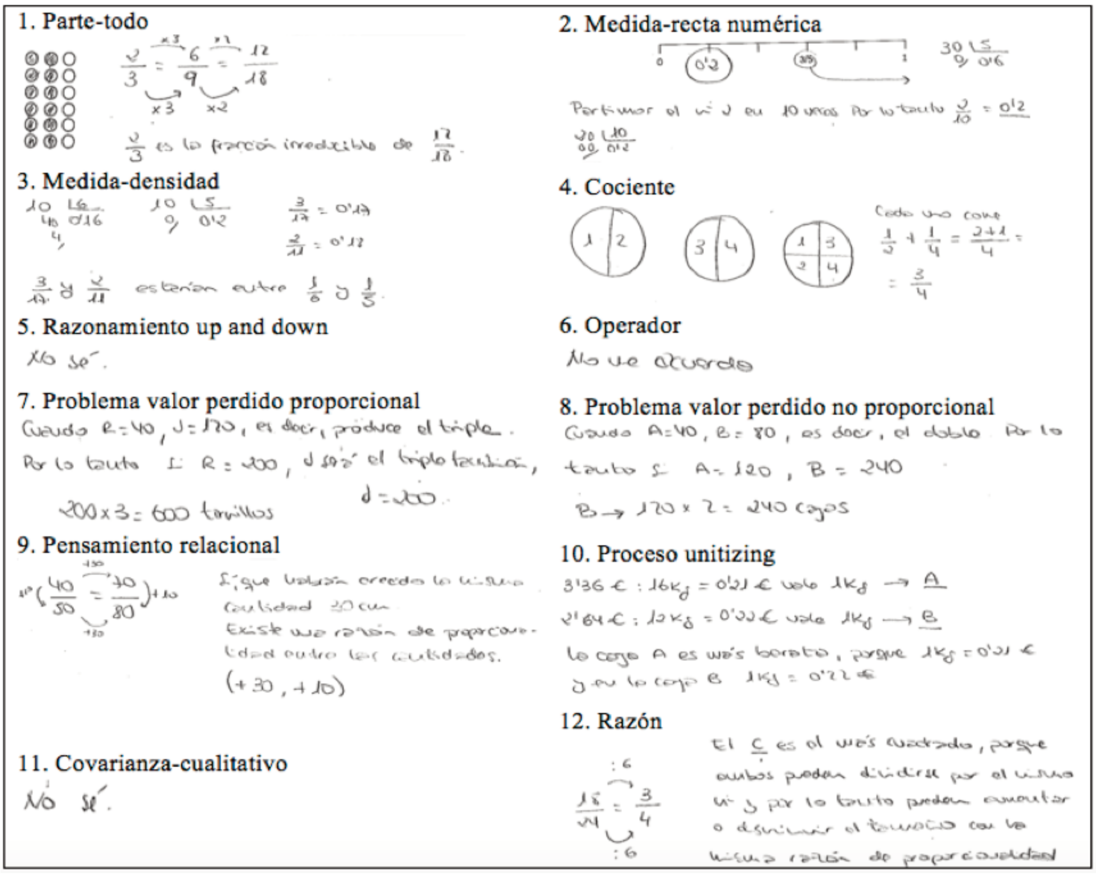


Figura 3. Respuesta del E008 al Cuestionario 1

En cuanto al Cuestionario 2 (identificar los elementos matemáticos relevantes del problema y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes) (Figura 4), este estudiante identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador) y reconoce algunas características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas. Sin embargo, no identifica ni reconoce características de la comprensión en el resto de sub-constructos (característica del Perfil 1). Así en relación a las diferentes respuestas de los estudiantes a los problemas indica que, en el problema *parte-todo* reconoce la relación entre el todo y las partes congruentes, el uso del operador por parte del estudiante 2 "al coger 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas", y que el estudiante 3 "no tiene en cuenta el todo". En el problema *medida-recta numérica* reconoce el uso de la fracción unitaria y la búsqueda de la unidad en la respuesta del estudiante 1 y el uso del operador en la respuesta del estudiante 2, y en la respuesta 3 la identificación incorrecta del todo. En el problema de *medida-*

densidad reconoce la necesidad de obtener varias fracciones equivalentes para encontrar las fracciones comprendidas entre las dadas. Y en el problema *cociente* reconoce las diferentes estrategias usadas por los estudiantes ("adjudica 1 pizza para cada persona" y "de cada pizza le da un trozo a cada persona").

Sin embargo, este estudiante para maestro no reconoce características de la comprensión de los estudiantes del problema *operador* ni del *razonamiento up and down* pertenecientes también al esquema fraccionario (en la respuesta 3 comenta "justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador" y entre las otras dos no diferencia que un estudiante no representa la fracción pedida). Tampoco reconoce diferencias en cómo los estudiantes resuelven los problemas de discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales ni en los problemas de comparación de razones, proporcionando una descripción basada en los procedimientos y dejando algunas respuestas en blanco sin mostrar evidencias de las características entre cada una de las respuestas (problemas de valor perdido proporcional y no proporcional).

1. Parte-todo "a) Es necesario saber interpretar la parte-todo y medida, porque necesitan reconocer el todo y dividir un todo en partes congruentes. También necesitan conocer el contexto discreto. b) R1: Utiliza la fracción como parte-todo y lo hace de forma correcta, porque identifica los 2 grupos necesarios dentro del conjunto que se le da. R2: Utiliza la fracción como operador, porque modifica la situación inicial para conseguir la final. Lo hace correcto porque interpreta que 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas. R3: La respuesta es incorrecta. Cree que cada grupo tienen 3 bolas y que tiene que coger dos grupos. No tiene en cuenta el todo que se la ha dado."	**2. Medida-recta numérica** "a) Fracciones y fracciones equivalentes. b) R1: Identifica la fracción unitaria. Busca la unidad y después da el resultado. R2: Utiliza la fracción como operador. R3: Identifica incorrectamente el todo y dice que es X es 15/19 veces esa fracción." **3. Medida-densidad** "a) Fracciones. Fracciones equivalentes. b) R1: Busca fracciones equivalentes y después las fracciones comprendidas entre estas nuevas fracciones obtenidas. R2: Saca fracciones equivalentes, pero necesita obtener más; porque este resultado no le permite averiguar 2 fracciones, solo una. R3: Saca el m.c.m., pero necesita obtener más fracciones equivalentes para poder resolver el ejercicio."
4. Cociente "a) Es necesario interpretar la fracción como cociente, ya que hay que hacer un reparto equitativo. b) R1: Hace partes congruentes, porque son 4 personas. El reparto la hace de forma que adjudica 1 pizza para cada persona y lo que le sobra para la otra persona que le falta. R2: El reparto es diferente a los demás. Divide cada pizza en 4 partes (según las personas) y de cada pizza le da un trozo a cada persona. R3: Hace el m.c.m entre pizzas y personas para saber en cuántas partes tiene que dividir las pizzas y así saber cuánto le toca a cada uno. No hace partes congruentes"	**5. Razonamiento up and down** "a) Es necesario interpretar la fracción como parte-todo e identificar el todo. b) R1: Justifica la respuesta buscando la unidad, utilizando la fracción como parte-todo. R2: Lo hace igual que el anterior, es decir, utilizando la fracción como parte-todo pero de forma gráfica. R3: Justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador." **6. Operador** "No se lo que hay que hacer."
7. Problema valor perdido proporcional "a) Proporcionalidad, razones externas o internas. b) R1: Utiliza el enfoque funcional, relacionado los tornillos de R y los de J. R2: R3: Utiliza una estrategia incorrecta para un problema de proporcionalidad."	**8. Problema valor perdido no proporcional** "a) No es un problema de proporcionalidad, es aditivo. b) R1: Utiliza una estrategia aditiva. R2: R3: Utiliza la proporcionalidad para un problema aditivo por lo tanto es incorrecto."
9. Pensamiento relacional "a) Proporcionalidad, cambios relativos. b) R1: Cambios absolutos. R2: Cambios relativos R3: Cambios relativos." **10. Proceso unitizing** a) Proporcionalidad, razones internas y externas. b) R1: Relaciona ambas magnitudes (€ y kg) mediante relaciones externas. R2: Realiza una regla de 3, calculando cuánto valdrían 12kg de la caja A y después lo relaciona con los 12kg de la caja B. R3: Lo hace fe forma incorrecta, porque es un problema de proporcionalidad y utiliza una estrategia aditiva.	**11. Covarianza-cualitativo** "a) Proporcionalidad. b) R1: Correcto, utiliza un pensamiento proporcional. R2: Ambas respuestas son incorrectas. R3: Establece relaciones, pero no concluye de forma correcta." **12. Razón** "a) Razones internas (metros – metros) b) R1: Relaciona ambas cantidades mediante una razón interna y lo hace de forma correcta. R2: Calcula razones internas, pero su explicación no es correcta porque se fija en la diferencia entre las cantidades. R3: No relaciona cantidades, solamente indica las diferencias entre las cantidades obtenidas."

Figura 4. Respuesta del E008 al Cuestionario 2

DISCUSIÓN

Este estudio tiene como objetivo analizar el conocimiento de los estudiantes para maestro de los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes como una característica de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Mason, 2002). Los resultados obtenidos indican que el reconocimiento de las características de la comprensión de los estudiantes en este dominio matemático depende de los diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. En particular, los resultados sugieren que el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión en los estudiantes está vinculada al carácter procedimental o conceptual de los sub-constructos considerados en los problemas planteados (Hiebert y Lefevre, 1986; Star, 2005).

De esta manera, pudimos identificar diferentes rasgos que caracterizan el comportamiento de los estudiantes para maestro. Estos rasgos que permiten definir diferentes perfiles son: la forma en la que los estudiantes para maestro utilizaron el sub-constructo razonamiento up and down, la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y las razones en situaciones de comparación (pensamiento relacional, covarianza-cualitativo y razón como índice comparativo) y no utilizaron el sub-constructo operador. Así, para los estudiantes para maestro fue más fácil identificar y usar los elementos matemáticos para describir características de la comprensión en los problemas relacionados con el esquema fraccionario (excepto operador y razonamiento up and down), mientras que los relacionados con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el razonamiento up and down fueron más difíciles, y estos, a su vez, fueron más fáciles que los elementos matemáticos relacionados con las situaciones de comparar razones. Además, los sub-constructos en los que fue más difícil reconocer características de la comprensión de los estudiantes coinciden con los sub-constructos en los que los estudiantes para maestro tuvieron menos éxito en el Cuestionario 1 sobre el conocimiento matemático.

Los resultados indican que el conocimiento del razonamiento proporcional y el reconocimiento de características de la comprensión están vinculados a la naturaleza procedimental o conceptual de las situaciones planteadas para cada sub-constructo. Los estudiantes para maestro tuvieron éxito en los problemas en los que podían aplicar un procedimiento previamente aprendido, pero tenían dificultades en los problemas que requerían comprender los significados vinculados a la relación entre las cantidades y en los que no se tenía un procedimiento (los problemas razonamiento up and down, operador, problema de valor perdido no proporcional (no discriminan), pensamiento relacional, razón y covarianza-cualitativo). De la misma manera, tenían mayores dificultades en reconocer características de la comprensión de los estudiantes en aquellas situaciones en las que las respuestas de los estudiantes mostraban una comprensión conceptual y no estaban basadas en procedimientos. Esta dificultad de los estudiantes para maestro en reconocer evidencias de la comprensión en los estudiantes cuando estas no reflejan un procedimiento ha sido reconocida en otros dominios matemáticos reflejando una característica de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell et al., 2013; Son, 2013; Son y Crespo, 2009).

Estos resultados sugieren que los formadores de maestros debemos diseñar oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para maestro que les permita reflexionar sobre cómo el conocimiento de carácter procedimental o conceptual de algunos dominios curriculares determina la manera en la que pueden reconocer características de la comprensión de sus estudiantes.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Lee, S. J., Brown, R. E. y Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198-220.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2) 22-43.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Ribeiro, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., Montes, M. y Gamboa, G. (2017). Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self-practice: the case of Carla. *Proceedings of the X CERME*. Dublin: Irlanda.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *BOLEMA, 26*, 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, *13*, 1305-1329.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Son, J., y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning about students' non-traditional strategies when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 236-261.

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

RECONOCIMIENTO DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN UNA TAREA DE PROPORCIONALIDAD POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA[1]

Recognizing algebrization levels in a proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers

Burgos, M.[a], Giacomone, B.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Godino, J.D.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

Se realiza el análisis a priori de la resolución de una tarea de proporcionalidad por varios métodos, identificando los conocimientos puestos en juego e identificando los niveles de algebrización implicados. Además, se analizan las respuestas dadas a la tarea por una muestra de 33 estudiantes de un máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria, interpretándolas mediante el análisis a priori realizado. Los resultados indican que los conocimientos y competencias especializadas de los estudiantes sobre proporcionalidad presentan lagunas específicas que pueden dificultar la enseñanza del tema. Como implicación para la formación de profesores, el análisis a priori presentado de la tarea se revela como un instrumento clave, que permite al formador realizar análisis pormenorizados de la actividad matemática escolar e identificar conflictos, potenciales y efectivos, de aprendizaje.

Palabras clave: *formación de profesores, razonamiento proporcional, conocimiento especializado*

Abstract

The a priori analysis of solving a proportionality task by several methods is performed, identifying the knowledge and algebrization levels involved. In addition, the analysis of answers given to the task by a sample of 33 students of a secondary mathematics teachers' master degree is carried out, interpreting them through the a priori analysis performed. The results indicate that students' specialized knowledge and competence on proportionality have specific shortcomings that can make teaching the subject difficult. As an implication for teachers' education, the a priori task analysis presented can be considered as a key instrument, which allows teacher educators to perform detailed analyses of school mathematics activity, and to identify potential and effective learning conflicts.

Keywords: *teacher education, proportional reasoning, specialized knowledge*

INTRODUCCIÓN

El planteamiento de problemas, su solución por diversos métodos y el análisis de los conocimientos puestos en juego en los mismos, forma parte de las competencias profesionales del profesor de matemáticas. En el marco del modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos), desarrollado por Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), los conocimientos y competencias mencionados forman una parte esencial de la facetas epistémica y cognitiva de dicho modelo, ya que permiten al profesor, graduar la complejidad de las tareas que propone a sus estudiantes, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Sin duda, el trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de tipos de conocimientos, competencias y habilidades (Chapman, 2014). Así, desde esta perspectiva, se vienen diseñando, experimentado y evaluando secuencias de problemas, como parte de un proyecto de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, con el objetivo de avanzar hacia un profesorado que sea competente en el análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas.

En este trabajo, se informan de los resultados de la fase de evaluación de un proceso formativo específico, focalizado en la resolución de una tarea de proporcionalidad utilizando métodos diversos, seguido del análisis de los conocimientos puestos en juego en cada método y su respectivo reconocimiento de niveles de algebrización (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015), por futuros profesores de matemáticas de secundaria.

A continuación, se presenta el marco teórico, problema de investigación y antecedentes, los cuales justifican la tarea propuesta, seguido del método de investigación en la sección 3. En la sección 4 se muestra un análisis *a priori* de la tarea empleada. En la sección 5 se discuten los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes para profesor. Finalmente, a modo de síntesis, se exponen las conclusiones e implicaciones para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA Y ANTECEDENTES

El desarrollo del razonamiento algebraico debe ser un objetivo a lograr progresivamente desde la Educación Primaria, como proponen diversas investigaciones y orientaciones curriculares. Es necesario que los profesores tengan una visión ampliada del álgebra (Cai y Knuth, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática propuesto por Godino et al. (2015) puede ayudar a que los profesores conozcan las características del razonamiento algebraico elemental mediante el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos propios del mismo.

Se considera necesario que los profesores aprovechen las oportunidades que ofrecen el currículo y los libros de texto usuales, organizando los contenidos y empleando los recursos adicionales que consideren necesarios para promover el razonamiento algebraico en sus estudiantes, lo cual supone que discriminen la actividad matemática propiamente aritmética de la algebraica, y dentro de la algebraica reconozcan distintos niveles de desarrollo del razonamiento algebraico.

Niveles de razonamiento algebraico

En el marco del EOS se ha propuesto una caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria basada en la distinción de tres niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. En Godino et al. (2015), se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria. Estos niveles están basados en la consideración de, en primer lugar, el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; en segundo lugar, el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. En los trabajos citados se describen los rasgos característicos de cada uno de los niveles, los cuales son aplicados en esta comunicación al análisis de la actividad matemática que se realiza para resolver una tarea de proporcionalidad directa.

Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor

Como se indican en Godino et al. (2016), en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2012), se ha hecho un esfuerzo por reorganizar las dimensiones, facetas y componentes que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos y proponiendo el denominado modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos. En este trabajo focalizamos la atención en la faceta epistémica del modelo CCDM en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Hill, Ball y Schilling (2008) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque desde el EOS es posible distinguir un desglose analítico de sus elementos constituyentes.

En el marco de una investigación de diseño, cuyo objetivo es desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas (Godino et al., 2016), uno de cuyos ciclos se describe en Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2016), en este trabajo centramos la atención en evaluar la competencia lograda cuando las tareas propuestas involucran la noción de proporcionalidad e implican el uso de diferentes niveles de algebrización.

El antecedente más próximo de este trabajo es Giacomone et al. (2016) en cuanto a la aplicación de la técnica de análisis de prácticas, objetos y proceso en la resolución de tareas matemáticas. En este trabajo se aplica la herramienta *configuración ontosemiótica* a una tarea de visualización espacial, en el contexto de formación de profesores de secundaria; en nuestro caso la aplicamos a una tarea que implica el uso del razonamiento proporcional. El ejemplo seleccionado permite establecer conexiones entre los diferentes niveles de algebrización, desde el nivel 0 propiamente aritmético, a un primer encuentro con el nivel 4 (introducción de parámetros).

Previamente a la evaluación cuyos resultados se presentan y analizan en este trabajo, los estudiantes fueron instruidos en el modelo de análisis de la actividad matemática mediante el reconocimiento de la secuencia de prácticas, objetos y proceso implicados en la resolución de tareas matemáticas, así como en el modelo de niveles de algebrización.

MÉTODO

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas*. Han participado en el estudio 33 estudiantes. La recogida de información se basa en el análisis de contenido de las respuestas dadas por escrito a una actividad en la que se solicita resolver una tarea sobre proporcionalidad, identificar los conocimientos puestos en juego, asignar niveles de razonamiento algebraico implicado en cada solución y enunciar variantes de la tarea que implique diferentes niveles de algebrización. El perfil académico de los estudiantes es variado: solo 12 (33,3 %) tienen el grado de Matemáticas; 15 son Ingenieros de Caminos o Arquitectos (44,1%), 3 son Físicos y 3 proceden de otras Ingenierías. 19 estudiantes declaran que tienen alguna experiencia de enseñanza de matemáticas en clases particulares; el resto no la tienen.

La acción formativa (un taller de dos horas de duración) comprendía tres momentos:

1. Presentación de las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basados en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015).
2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:
   - 2.1. Resolver tareas matemáticas, propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras. (Se propusieron 8 tareas).
   - 2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

Instrumento de recogida de datos

La situación-problema planteada a los estudiantes se basa en la resolución del siguiente problema de proporcionalidad directa:

> Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Para este problema se solicitan las siguientes cuestiones:

1. Resolver el problema usando varios métodos.
2. Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se realiza en cada caso.
3. Enunciar variantes en el enunciado de la tarea, cuya solución implique cambios en el nivel de algebrización puesto en juego.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA TAREA

Aunque el enunciado inicial del problema se puede resolver mediante un razonamiento aritmético es posible aplicar otros procedimientos que involucran los niveles protoalgebraicos 1 y 2, así como el nivel 3 de algebrización (Burgos y Godino, 2017). Así mismo, se pueden proponer variantes del enunciado inicial de tal manera que supongan un primer encuentro con el uso de parámetros, lo que implica el nivel 4 de algebrización. Aunque la resolución se pueda hacer de una manera esquemática y sintética, se requiere al resolutor la descomposición de la misma en prácticas elementales, según se muestra en las soluciones esperadas que se incluyen a continuación.

Solución 1. Nivel 0 de algebrización: aritmética

1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina. Es decir, siempre que recorre 100 km, su consumo en esta distancia es de 8,4 litros.
2) Por tanto, cuando haya recorrido 200 km, el consumo de gasolina será el doble del que ha consumido al recorrer 100 km y cuando haya recorrido 300 km, habrá gastado el triple de gasolina.
3) Si consumió 8,4 litros al recorrer 100 km, consumiría 8,4 × 2 = 16,8 litros al recorrer 200 km y 8,4 × 3 = 25,2 litros al recorrer 300 km.
4) Por tanto, con 25,2 litros puede recorrer 300 km.

Solución 2. Nivel 1 de algebrización: reducción a la unidad

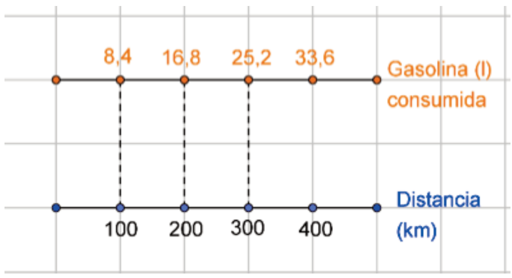
1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina.
2) Por lo tanto, la relación entre las magnitudes ‘volumen’ de gasolina consumida y ‘distancia’ recorrida es de proporcionalidad directa.
3) Calculamos primero los kilómetros que recorre el coche por cada litro consumido, dividiendo 100 entre 8,4:

   100/8,4 = 11,904761…, aprox. 11,905

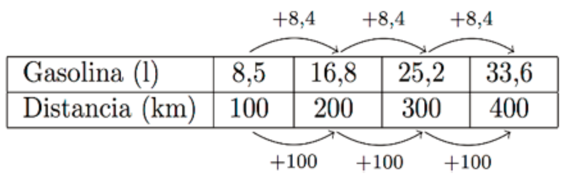
   11,905 son los kilómetros que puede recorrer el coche por litro.
4) Si por cada litro recorre 11,905 km, con 25,2 litros recorrerá, 11,905 × 25,2 = 300 km

Solución 3. Nivel 1 de algebrización: uso de diagramas

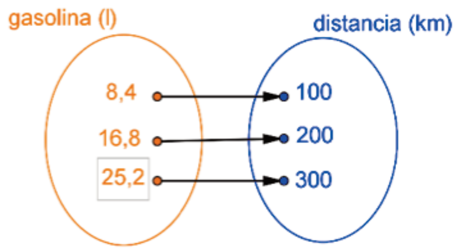
En la Figura 1 se recogen 4 tipos de soluciones diagramáticas al problema; por motivos de espacio, no es posible exponer, para cada una de ellas, una secuencia de prácticas discursivas, necesarias para su correcta interpretación.



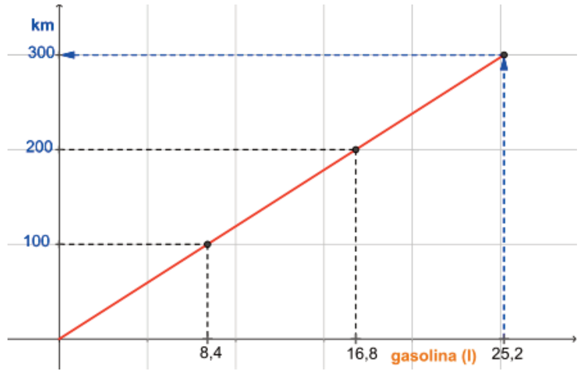
a. Diagrama lineal



b. Diagrama tabula



c. Diagrama sagital



d. Gráfico cartesiano

Figura 1. Representación diagramática de la solución a la tarea

Solución 4. Nivel 2 de algebrización: regla de tres

1) En el enunciado se supone establecida una correspondencia de proporcionalidad directa entre dos magnitudes: 'distancia' recorrida por el coche y 'volumen' de gasolina consumida.

2) Por tanto, la razón de cantidades que se corresponden se mantiene constante:

$$\frac{100\ km}{8{,}4\ l} = \frac{x}{25{,}2\ l}$$

3) Teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción,

$$x = \frac{100\ km \times 25{,}2\ l}{8{,}4\ l} = 300\ l$$

4) Es decir, el coche recorrerá 300 kilómetros con 25,2 litros de gasolina.

Variante 1. Nivel 3 de algebrización

Mi coche y el de mi padre tienen el mismo consumo. El volumen de mi tanque es de 60 litros y el de mi padre es de 82 litros. Si mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche antes de volver a repostar, ¿cuál es el consumo de mi coche?

Una solución para esta nueva situación-problema está dada por la siguiente secuencia de prácticas:

1) Se asume una relación de proporcionalidad entre el consumo de combustible y la distancia recorrida.

2) Llamemos x a los kilómetros que puede recorrer mi coche con un litro de combustible.

3) Puesto que la capacidad de mi tanque es de 60 litros, con todo el depósito podré recorrer $60x$ kilómetros.
4) El consumo del coche de mi padre es el mismo que el mío, de modo que, si su tanque tiene una capacidad de 82 litros, hasta volver a repostar podrá recorrer $82x$ kilómetros.
5) Mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche, es decir, $82x = 60x + 220$.
6) Luego, $82x – 60x = 220$. De aquí, $(82 – 60)x = 220$, es decir, $22x = 220$, y finalmente $x = 220/22 = 10$ es el número de kilómetros que podemos recorrer con un litro de combustible.
7) Por tanto, el consumo es de 10 litros a los 100 kilómetros.

Variante 2. Nivel 4 de algebrización: generalización; uso de un parámetro

Un concesionario de coches necesita saber si puede viajar entre diferentes ciudades con una cantidad dada de gasolina, teniendo en cuenta el consumo por cada 100 km. Para facilitar el cálculo quiere encontrar una fórmula que permita calcular los kilómetros que puede recorrer un coche si tiene como dato conocido el consumo por cada 100 kilómetros y la cantidad de gasolina disponible. ¿Cuál sería la fórmula que tendría que utilizar?

La solución a esta nueva variante, implica el nivel de algebrización 4:

Suponemos una correspondencia de proporcionalidad directa entre las cantidades de las magnitudes, distancia recorrida e, y litros de gasolina disponibles, x. Se supone, además, que el consumo es k litros por cada 100 km. Por tanto, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{k}{100} = \frac{x}{y}$$

En consecuencia, la fórmula $y = 100x/k$ expresa los kilómetros que puede recorrer un coche que consume k litros de gasolina cada 100 km con x litros.

RESULTADOS

En la situación de evaluación que se ha planteado a los futuros docentes de secundaria, se espera que éstos resuelvan la tarea y una vez identificados los conocimientos puestos en juego, asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados en cada solución aportada. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

Esta situación de evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes fue aplicada tras la fase de instrucción en la que el formador introdujo el tema usando ejemplos para explicar los criterios que delimitan los niveles de algebrización. El modelo de instrucción implementado tiene un carácter dinámico, en el sentido de que las interacciones entre los estudiantes y el formador permitían identificar los conflictos de significados que emergían y su solución dialógica.

De las 8 tareas que se propusieron para su resolución en equipos, y posterior discusión colectiva en clase solo se abordaron 2 en la sesión de trabajo presencial (2 horas de duración). La realización de las otras 6 tareas fue dejada como tarea complementaria que los estudiantes debían realizar en la siguiente semana del curso, enviando la resolución por medio de la plataforma Moodle. El modelo didáctico implementado pretendía mostrar a los estudiantes ejemplos prototípicos del tipo de análisis cuya realización se pretendía promover.

Dadas las limitaciones de espacio no es posible presentar el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a las 8 tareas propuestas, ni el tipo de institucionalización realizada por el formador. En todo caso se puede afirmar que las dos horas dedicadas a la presentación y discusión del tema en clase fueron insuficientes.

Métodos de solución y niveles de algebrización

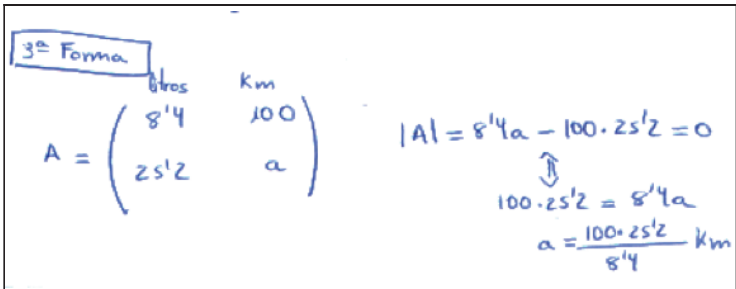
La mayoría de los futuros profesores, concretamente, 24 de los 33, elaboran 3 soluciones distintas al problema. Entre los restantes, 5 estudiantes proporcionan 2 soluciones distintas y solo 4 de ellos presentan 4. En la Tabla 1 incluimos los tipos de soluciones dadas por los estudiantes en formación, el nivel de algebrización de las mismas, número de soluciones de cada tipo facilitadas y en cuántas de ellas el nivel de algebrización fue identificado apropiadamente.

Tabla 1. Tipos de soluciones y niveles de algebrización identificados

Tipos de soluciones	Nivel de algebrización	Número de soluciones		Identificaciones correctas del nivel de algebrización	
		Frecuencia	%	Frecuencia	%
Aritmética	0	13	13,5	10	20,8
Diagramática	1	18	18,8	8	16,7
Reducción a la unidad	1	12	12,5	7	14,6
Regla de tres-Proporcionalidad	2	39	40,6	17	35,4
Algebraico-funcional	3	14	14,6	6	12,5
Totales	–	96	100,0	48	100,0

Las soluciones correspondientes al nivel 2 de algebrización son en su mayoría, un total de 30, desarrolladas por medio de la regla de tres, frecuentemente degenerada, esto es, sin mencionar la serie de números proporcionales implicada en la situación y la igualdad de razones correspondiente, o incorrecta. Esto supone, que casi todos los estudiantes resolvieron el problema por medio de la regla de tres, además de otros métodos. También se incluyen soluciones basadas en el reconocimiento de la relación de proporcionalidad directa bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones. Algunos estudiantes plantean como soluciones distintas, *igualdades equivalentes entre dos fracciones* (interpretadas en este caso como razones) que se derivan de la misma proporción entre las magnitudes.

Un estudiante (procedente del grado de Matemáticas) propone una solución sofisticada al problema basada en el reconocimiento de la relación de dependencia lineal entre las magnitudes litros de gasolina consumidos y kilómetros recorridos (Figura 2). Elabora una matriz 2×2, siendo una de sus columnas los litros de gasolina consumidos y la otra la distancia recorrida. La confusión como parámetro del papel de la letra , que interviene como una incógnita, lleva a este estudiante a considerar esa práctica matemática como de nivel 5 de algebrización.



Como ambas variables (litros y kilómetros) son linealmente dependientes, entonces el determinante de la matríz tiene que ser igual a cero, y de esta forma sacamos el valor del parámetro *a*

Figura 2. Procedimiento matricial

Para muchos de los futuros profesores, el nivel de algebrización queda determinado por la aparición o no de variables, a pesar de los ejemplos previamente discutidos en clase. Asocian nivel de algebrización 0 a cualquier actividad en la que no aparezcan los símbolos literales, independientemente del uso que se establezca de ellos, lo cual indica que la formación recibida no ha sido suficiente para superar las ideas previas sobre algebrización, asociada al simbolismo algebraico.

La mayor parte de los estudiantes que facilitaron respuestas diagramáticas en sus diferentes opciones (tabular y gráfica) y que identificaron erróneamente su nivel de algebrización, les asignaron nivel 0, aludiendo a la ausencia de incógnitas (*"no opera con ninguna variable"*), o que la elaboración de las mismas tan solo requiere de operaciones aritméticas (*"simplemente con la suma de números particulares"*, *"va multiplicando litros y distancia por una constante hasta que el número de litros coincide"*). El mismo error aparece cuando los estudiantes resuelven el problema mediante reducción a la unidad y le atribuyen un nivel 0 de algebrización.

Gran parte de los estudiantes que no identificaron adecuadamente el nivel de algebrización en las soluciones por regla de tres o igualdad de razones, le asignaron nivel 1 de algebrización (*"porque se empieza a esbozar un planteamiento algebraico al definir una incógnita 'x' cuyo valor corresponde al número de km que deseamos hallar"*, *"no se opera con elementos algebraicos"*).

Algunos estudiantes obtienen una solución algebraico-funcional, sin razonar cómo obtienen la constante de proporcionalidad (tanto por uno). Otros, no evalúan la función para determinar la solución al problema, sino que recurren a la representación gráfica para determinar la imagen. La mayoría de los estudiantes que no reconocieron apropiadamente el nivel de algebrización en la solución de tipo algebraico-funcional, le asignaron un nivel 2 de algebrización (*"porque utiliza lenguaje simbólico, utiliza ecuaciones de la forma, y trabaja con variables como incógnitas, pero no opera con ellas"*).

No hay una diferencia significativa entre las respuestas dadas por alumnos del grado de Matemáticas y las de aquellos que cursaron otros estudios. Podemos mencionar que tuvieron menos dificultades para identificar correctamente los niveles de algebrización (de las 29 soluciones distintas que proporcionaron dichos alumnos, asignaron correctamente el nivel de algebrización en 20 de ellas).

Enunciado de variantes del problema

Actualmente hay numerosas investigaciones en torno a la creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos y varias de ellas, hacen mención explícita a la vinculación de esta tarea con las competencias docentes (Malaspina, Mallart y Font, 2015; Silver, 2013).

En general, los estudiantes de nuestra muestra tienen dificultades para elaborar variantes del problema inicial. Ocurre que, o bien la tarea que proponen está incompleta o no tiene solución, o bien es un enunciado que nada tiene que ver con el propuesto inicialmente. También en su intento de conseguir un determinado nivel de algebrización, sacrifican la significatividad del enunciado.

Salvo dos estudiantes, todos los demás propusieron variantes al enunciado del problema. De las tareas propuestas, 6 de ellas se alejaban demasiado del contexto inicial y 10 estaban mal planteadas (la solución estaba implícita en el enunciado, carecía de sentido o bien la información que facilitaba el enunciado no permitía responder a la pregunta). En la Tabla 2 resumimos la información relativa a la pertinencia de los enunciados de las variantes propuestas correctamente (15 en total) por los estudiantes.

Tabla 2. Pertinencia de los enunciados de las variantes del problema

Tipo de enunciado	Número de respuestas
Enunciado pertinente	8
Enunciado poco pertinente	3
Enunciado nada pertinente	4
Total	15

(De los 8 enunciados pertinentes, 5 los produjeron estudiantes con el grado de Matemáticas)

Los tipos de problemas propuestos por los estudiantes tienen mayoritariamente tres contextos: a) obtener una expresión general; b) relacionar el consumo de dos marcas de coches; c) relacionar el consumo con velocidades, tiempo o gastos en gasolina.

A la hora de establecer variantes del enunciado inicial que suponga un cambio en el nivel de algebrización, los estudiantes recurren a parámetros para elaborar variantes de un nivel 4 de algebrización (Figura 3).

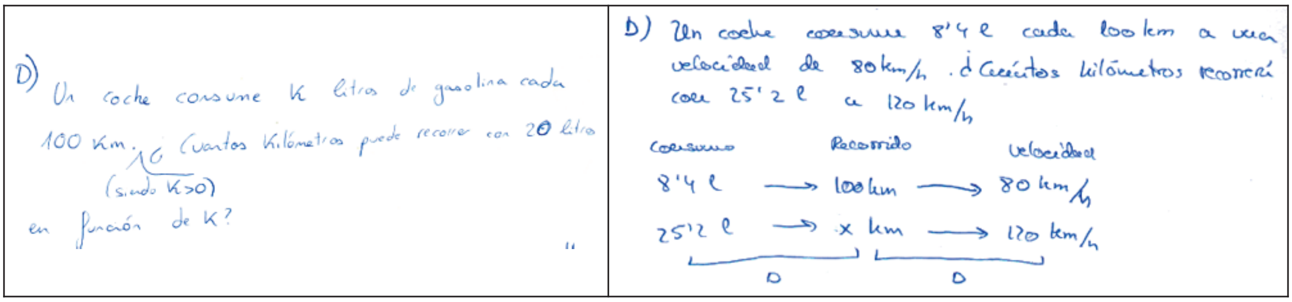


Figura 3. Ejemplos de enunciados variantes de la tarea inicial

Se interpreta que introducir nuevas variables, coeficientes, …, supone un incremento del nivel de algebrización, si bien la solución plantee tareas propias de un nivel de algebrización inferior al pretendido. Se manifiesta la creencia de que una mayor dificultad en la resolución del problema tiene necesariamente asociado un mayor nivel de algebrización. Mencionamos a este respecto el comentario de un estudiante: *"Dado dicho enunciado, se pueden añadir elementos que hagan algo más complejo el análisis y planteamiento, como nuevas variables (tiempo, coste económico). Así pues, el hecho de establecer una relación entre más variables haría subir el nivel de algebrización de la tarea"*.

CONCLUSIONES

El reconocimiento de los distintos niveles de algebrización en la solución de problemas de proporcionalidad que aquí se ha ejemplificado debería ser una competencia del profesor de matemáticas, para que pueda identificar los niveles de complejidad y competencia matemática en los estudiantes de secundaria y promover su desarrollo. También, "la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni debe considerarse que los problemas a trabajar en clases sean únicamente los que figuran en los libros o en internet. Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente" (Malaspina, 2017, p. 2).

Hemos constatado que la breve acción formativa implementada sobre el tema es insuficiente para lograr que los estudiantes, sean capaces de descomponer las soluciones en secuencias de prácticas operativas y discursivas para describir y justificar dichas soluciones; que reconozcan de manera pertinente los distintos niveles de algebrización, y que formulen variantes pertinentes de un problema dado. Como afirman Wilhelmi, Godino y Lasa (2014, p. 581) para el caso de la comprensión de las nociones de variable y ecuación por estudiantes similares a los de nuestra muestra,

> no se trata de deficiencias en el nivel de desarrollo cognitivo sino de carencias en el currículo de formación didáctico-matemática de los estudiantes. Estos pueden superar los estudios de grado de matemáticas con estas carencias conceptuales, pero el desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados.

Por último, se ha podido constatar que el análisis *a priori* de la tarea implementada con sus posibles soluciones y variantes, ha permitido al profesor del curso, tomar conciencia de las relaciones complejas entre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, siendo un instrumento clave en el análisis de las respuestas de los estudiantes.

Referencias

Burgos, M. y Godino, J. D. (2017). Niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/posters/burgos.pdf

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* .
Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Praga, República Checa.

Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

[1] Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 (MINECO) y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

CONCEPCIONES SOBRE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN EN UN GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Conceptions on addition and subtraction on a Primary Teaching Degree

Castro, A.[a], Prat, M.[b] y Gorgorió, N.[b]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Las concepciones que poseen los estudiantes para maestro sobre los conceptos matemáticos son una valiosa información para ayudar a los formadores de maestros a desarrollar el conocimiento del contenido. Este artículo presenta parte de los resultados de un estudio más amplio en el que se evalúan las concepciones de 203 estudiantes para maestro que aún no han iniciado sus estudios en didáctica de la aritmética. Presentamos las concepciones generales sobre los significados de la adición y la sustracción, y la relación entre ambas, que surgen del análisis en conjunto del conocimiento de los diferentes aspectos evaluados. Los resultados sugieren que los futuros maestros inician su formación con un conocimiento aditivo inadecuado, evidenciado en concepciones estereotipadas y/o erróneas sobre los significados de la suma y la resta, así como de la relación entre estas operaciones.

Palabras clave*: concepciones, adición y la sustracción, relaciones suma y resta, formación de maestros.*

Abstract

Student-teachers' conceptions of mathematical concepts are valuable information to help teacher educators to develop mathematical content knowledge. This article presents part of the results of a larger study that evaluates the conceptions of 203 student-teachers who have not yet begun their courses in didactics of arithmetic. We present the general conceptions about the meanings of addition and subtraction, and the relationship between the two, arising from the joint analysis of the knowledge of the different aspects evaluated. The results suggest that future teachers begin their training with inadequate additive knowledge, evidenced in stereotyped and / or erroneous conceptions about the meanings of addition and subtraction, as well as the relationship between these operations.

Keywords: *conceptions, addition and subtraction, relationship addition and subtraction, teacher education.*

INTRODUCCIÓN

Las concepciones, entendidas como el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto, describen la naturaleza de los objetos matemáticos y de las diferentes imágenes de éstos en la mente (Martínez y Gorgorió, 2004). Gómez (2010) señala que las concepciones que los estudiantes construyen de los diferentes conceptos matemáticos dependen de la aproximación o de los enfoques que la enseñanza pone a su alcance. En algunos casos, las concepciones llegan a constituir obstáculos para el aprendizaje en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Gómez (2010) señala que el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza, ayudando a determinar qué es lo que realmente se está aprendiendo, orientando sobre qué y cómo enseñar.

Los formadores de maestros necesitan ser conscientes de las concepciones que poseen sus estudiantes, y estar preparados para tomarlas como punto de partida para ayudarlos a desarrollar el conocimiento del contenido matemático (Thanheiser, 2009; 2010; Thanheiser, Browning, Lo, Kastberg y Edson, 2013). No obstante, tal y como señalan Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) sorprende la escasez de trabajos que se han centrado en estudiarlas. Si bien se han realizado algunos estudios que analizan las

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2017). Concepciones sobre la adición y la sustracción en un grado de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 187-196). Zaragoza: SEIEM.

concepciones que poseen los maestros en formación sobre algunos aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción, como por ejemplo la comprensión de las operaciones aritméticas (Chapman, 2007) o sobre la adición con varios dígitos (Thanheiser, 2009; 2010), coincidimos con Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) en que se requiere investigación adicional para entender mejor las concepciones que los estudiantes poseen cuando ingresan en nuestros programas de formación, y para comprender como estas se desarrollan.

En el contexto de la formación de maestros, al impartir las asignaturas de matemática y su didáctica, observamos en nuestros alumnos limitaciones en su pensamiento aditivo similares a las que se detalla en la literatura al respecto. En particular, en la comprensión del significado de estas operaciones evidenciado, entre otros aspectos, en el planteamiento de problemas aditivos en los que la palabra clave es indicador de la operación a realizar (Castro, Gorgorió y Prat, 2014b). El conocimiento sobre los significados y relaciones de las operaciones es un aspecto básico que el futuro maestro debe poseer (Cañadas y Castro, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004; Maza, 2001; entre otros). Esto motivó nuestro interés por profundizar en su estudio, incluyendo otras dimensiones del conocimiento del significado y la relación de estas operaciones. Considerando el potencial que tiene para la formación de maestros la identificación de las concepciones que los futuros maestros poseen sobre un determinado concepto, en este estudio analizamos las concepciones de 203 estudiantes para maestro sobre los significados y la relación de la adición y la sustracción. Para, sobre la base de dicho análisis, generar perfiles de concepciones acerca de la adición y la sustracción.

SIGNIFICADOS Y RELACIÓN DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN

La adición y la sustracción pueden tomar diversos significados. Una primera distinción considera el significado basado en la acción realizada por una persona en una situación dada y su significado como objeto matemático. El significado basado en la acción, sobre un número o un objeto inicial, puede tener una concepción unitaria y una binaria: a) concepción unitaria si hay una cantidad inicial que experimenta un cambio cuando se le añade o se le quita una segunda cantidad; o b) concepción binaria si hay dos cantidades iniciales que se unen o combinan para obtener un resultado. En el lenguaje matemático formal, encontramos diferentes tipos de definiciones para la adición y la sustracción de números naturales. Entre las más utilizadas están las definiciones en base a las operaciones de unión y diferencia de conjuntos, los axiomas de Peano y los desplazamientos en la recta numérica (e.g. Baroody y Ginsburg, 1986; Cañadas y Castro, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004; Maza, 2001; entre otros).

La variedad de significados que se dan a la adición y la sustracción puede ayudar a los niños a comprender la relación entre estas operaciones y sus propiedades básicas, preparándolos para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2004). No obstante, sus fundamentos matemáticos no siempre están presentes en las definiciones de suma y resta como, por ejemplo, las que aparecen en algunos los libros de texto. En estos, las definiciones de suma y resta tienden a ser simplificadas usando verbos de acción como aumentar, añadir y unir para el caso de la suma, y quitar o disminuir para la resta, dificultando que el alumno pueda inferir sus propias estrategias para realizar estas operaciones (e.g. Broitman, 1999; Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Por otra parte, no se pueden englobar todos los problemas aditivos dentro de estas acciones, existiendo diferentes tipos de problemas en los que agregar y quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar (e.g. Vicente, Orrantia y Verschafel, 2008). Nesher (1999) propuso un esquema del desarrollo del conocimiento aritmético en los niños, subyacente a la resolución de los diferentes tipos de problemas aditivos. En este modelo, el éxito en la resolución de problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o aumentando, o los de combinación en los que la incógnita está en la cantidad final, no requieren de un conocimiento aritmético avanzado que requiera la compresión de estas operaciones como procedimientos distintos. Mientras que los problemas en los que agregar y quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar, como algunos problemas de igualación o comparación, requieren un conocimiento más profundo se estas operaciones, exigiendo de la compresión de la conexión entre la suma y la resta, igualdades y desigualdades.

El planteamiento y la resolución de problemas aditivos han sido utilizados para analizar el conocimiento sobre los significados de la adición y la sustracción. Chapman (2007) analizó la compresión de las operaciones aritméticas en 20 estudiantes para maestro que, hasta ese momento, no habían trabajado de manera específica los significados de las operaciones y problemas aritméticos. Sus resultados sugieren que el conocimiento inicial de los alumnos era inadecuado para enseñar las operaciones aritméticas con profundidad puesto que estaba basado en la comprensión procesal de las estructuras matemáticas y semánticas del problema, al centrarse por ejemplo en las palabras indicadoras aisladas y descontextualizadas de operaciones con un significado similar. Castro, Gorgorió y Prat (2014a) implementaron una secuencia de formación con 78 estudiantes para maestro que iniciaban sus estudios en didáctica de la aritmética. Tenía como objetivo que los futuros maestros descubriesen que plantear problemas aditivos va más allá de enunciar situaciones que contengan los verbos “añadir” o “juntar” para la suma y “quitar” o “separar” para la resta. Sus resultados sugieren que al inicio de la secuencia los estudiantes basaban la formulación de sus enunciados en palabras clave como indicador de la operación a realizar, y rechazaban la idea de la utilización de este tipo de palabras con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. No obstante, al finalizar la secuencia, los problemas propuestos por los alumnos presentaron un mayor número de estructuras aditivas, y el uso de palabras clave como indicador de la operación a realizar disminuyó considerablemente.

EL ESTUDIO

El presente estudio es de tipo cualitativo descriptivo y se aborda desde una perspectiva interpretativa. Se enmarca dentro de la investigación cualitativa orientada a la compresión, teniendo como objetivo describir, analizar, comprender e interpretar la realidad particular (Bisquerra, 2009) de los estudiantes del Grado de Educación Primaria al inicio de su formación. Participan 203 estudiantes de primer y segundo año del GEP de una Universidad pública española que aún no habían cursado la primera asignatura en que se trabaja de manera específica el pensamiento aditivo.

El proceso de análisis de los datos tiene rasgos de la teoría Emergente de Datos - Grounded Theory- (Trinidad, Carrero y Soriano, 2006). Los instrumentos de análisis, emergen del trabajo con los datos, la organización y el análisis de las respuestas que los alumnos dan a las tareas propuestas, por lo que el análisis y los resultados obtenidos en este estudio se presentan de manera conjunta.

Instrumento y recogida de datos

Los datos que aquí presentamos, forman parte de un estudio más amplio que tiene como objetivo establecer perfiles de conocimiento aditivo. Para ello, se elaboró y aplicó un cuestionario que recoge diferentes aspectos matemáticos fundamentales relacionados con el pensamiento aditivo, que emergen de la revisión teórica sobre las investigaciones que analizan el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas (ver Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

Las preguntas del cuestionario fueron validadas por expertos y se distribuyeron estratégicamente antes de fijar su versión final, incluyéndose de manera intercalada preguntas de distintos bloques temáticos. El cuestionario contenía preguntas referidas a contenidos distintos que se complementan entre sí, con la intención de triangular las respuestas de los alumnos y así descartar una incorrecta interpretación de las respuestas obtenidas.

Los alumnos del estudio respondieron el cuestionario en una sesión de la asignatura *Didáctica de las matemáticas* que es la primera asignatura de los estudios del Grado de Educación Primaria, en la que se trabaja específica el pensamiento aditivo. El cuestionario fue administrado en la sesión previa al inicio de la didáctica de la aritmética, en presencia del profesor que dictaba la asignatura. Los alumnos disponían de 1 hora para responder individualmente el cuestionario. No se permitía el uso de calculadora y los alumnos debían realizar todos los cálculos en el propio cuestionario con la finalidad de recoger al máximo la riqueza de sus respuestas. Durante su administración sólo se respondieron por parte del investigador preguntas que no eran de contenido matemático. Al final de la sesión, por petición de los profesores que dictaban la asignatura, se les entregó una copia del cuestionario para discutir con los alumnos las dificultades a las que se enfrentaron durante su aplicación.

Pregunta	Aspecto a evaluar
1) Explica qué entiendes por: a) Sumar b) Restar	(*Principal*) Significados de la adición y la sustracción (*Secundario*) Relación entre la adición y la sustracción
2) ¿Cuál o cuáles de los siguientes verbos asocias con sumar? Organiza los verbos según el criterio del cuadro. a) Juntar b) Recibir c) Agregar d) Combinar e) Unir f) Obtener g) Ganar g) Aumentar h) Incrementar i) Añadir Verbos que asocias claramente con suma. Verbos que no asocias con la suma Verbos que pueden ser de suma.	(*Principal*) Concepciones de la adición basadas en la acción (*Secundario*) Uso de palabras clave
3) Utilizando sólo números naturales, elabora: a) dos problemas de suma, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí. b) dos problemas de resta, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí.	(*Principal*) Significados y relaciones de la adición y la sustracción (*Secundario*) Uso de palabras clave
4) ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de suma con la palabra menos? ¿Por qué? Da un ejemplo.	(*Principal*) Relación de la adición y la sustracción (*Secundario*) Uso de palabras clave
5) ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de resta con la palabra añadir? ¿Por qué? Da un ejemplo.	

Tabla 1. Preguntas que evalúan los significados de la adición y la sustracción y la relación entre ambas

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Concepciones de los futuros maestros sobre los significados de la adición y la sustracción y la relación entre ambas

Para determinar las concepciones sobre estas operaciones de los alumnos de este estudio, se analizan las respuestas y las justificaciones que éstos dan a las preguntas del cuestionario bajo un enfoque cualitativo desde una perspectiva interpretativa. Los instrumentos de análisis emergen del trabajo con los datos, a partir de la organización y el análisis de las respuestas que los alumnos dan a las tareas propuestas.

El proceso de análisis se desarrolla en dos fases. En una primera fase, se realiza un análisis pregunta a pregunta. Para ello, se recogen en una planilla Excel las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las 5 preguntas y se analizan las explicaciones y, cuando corresponde, se analizan también los enunciados que los alumnos dan a las tareas propuestas. Seguidamente se identifican las concepciones emergentes sobre el conocimiento de los distintos aspectos evaluados en los que se centra cada pregunta. En una segunda fase, se realiza un análisis relacional de las 5 preguntas en conjunto del cual emergen las concepciones de los alumnos en relación a la adición y la sustracción. Para ello, se recogen las concepciones emergentes en los distintos aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción evaluados en cada pregunta. Seguidamente, se organizan en una planilla Excel las distintas concepciones que emergen en cada una de las preguntas recogidas por alumno y se recogen el número de alumnos que se sitúa en cada uno de los tipos de concepciones que emergen de los distintos aspectos evaluados. Finalmente, se realiza un análisis en conjunto de los distintos tipos de concepciones emergentes en cada una de las preguntas y se establecen concepciones generales sobre los significados y la relación de la adición y la sustracción que muestran los alumnos en base a todos los aspectos evaluados.

El análisis realizado sugiere que podemos identificar 5 tipos de concepciones sobre los significados y la relación de la suma y la resta, dependiendo de si estas operaciones son interpretadas como procedimientos distintos o si se establece una conexión entre ambas.

La suma y la resta como procedimientos distintos

Concepciones esencialmente basadas en la acción:cambio de estado unitario para la suma y la resta / binario para la suma

Un 70.9% de los alumnos encuestados (144 de 203) evidencia una concepción de suma y la resta que tiene un significado esencialmente basado en la acción, en la que estas operaciones se interpretan como procedimientos distintos. Estos alumnos no proponen problemas aditivos que involucren el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo más allá de los problemas de combinación con incógnita en el todo, como las estructuras de igualación, comparación y combinación con incógnita en una parte del todo. Tampoco incluyen en sus definiciones para el caso de la resta la idea de complemento. En su mayoría asocian claramente la suma con al menos uno de los verbos que suelen asociarse con palabras clave para la suma, como ganar, obtener y/o conseguir; y construyen enunciados basados en el uso de palabras clave como indicador de la operación a realizar. En concreto, vemos que:

- El 15.3% de estos alumnos evidencia sólo una concepción unitaria de estas operaciones, basada en las acciones de añadir y quitar. Estos alumnos sólo interpretan la suma y la resta como añadir y quitar, números, cifras, cantidades, elementos, un objeto inicial o no especificando qué (*"Sumar es añadir números"*). Asocian la suma de manera clara sólo con verbos que implican un cambio de estado como añadir, incrementar o aumentar, y en ocasiones con algunos verbos que son asociados con palabras clave para la suma, como los verbos regalar, obtener y/o conseguir. No creen o no están seguros de que verbos que implican una combinación o unión de elementos sean de suma. Proponen problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado, aumentando o disminuyendo, del tipo: *"María tiene 5 lápices, pero pierde 3, ¿cuántos lápices tiene ahora?*, en los que la palabra clave siempre es indicador de la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, proponen realizar más de una operación; utilizar estas palabras sin relevancia para la suma/resta (*"Porque puedes restar y posteriormente sumar"*); o señalan que no es recomendable pues resultaría confuso para los alumnos (*"Porque menos ya hace referencia a restar. Para crear un problema debes utilizar palabras apropiadas y que no confundan a los niños"*); que no es posible ("*No se puede porque en una resta no tiene lugar la acción de añadir"*); no respondiendo claramente la pregunta (*"Según como se plantee"*); señalando que no saben cómo hacerlo; o no contestan. 4 alumnos evidencian en sus explicaciones sobre lo que entienden por sumar y restar un significado distinto, basado en la noción de contar hacia delante y hacia atrás (*"Sumar es hacer el recuento del total de los números que haya"*), o de la suma y la resta como operación (*"Operación matemática en la que le sacas x a y"*).

- El 81.9% de los alumnos restantes (118) incluye la idea de unión o combinación para el caso de la suma, en sus explicaciones sobre lo que es sumar (*"Sumar es poner juntos los números para conseguir un total"*), en sus elecciones para los verbos que asocian o no, claramente con suma y/o los PAEV aditivos que proponen (*"Mi madre tiene 35 años y yo 8, ¿cuántos tenemos entre las dos?"*). 15 de los alumnos que conforman este grupo incluyen en sus explicaciones sobre lo que entienden por sumar y restar un significado distinto al basado en la acción. 1 alumno incluye la noción de contar hacia delante y hacia atrás (*"Restar es contar en negativo de número mayor a una menor"*), otro como distancia (*"Restar es saber que distancia hay entre dos números"*), mientras que los 13 alumnos restantes como operación (*"La suma es la operación que consiste en obtener un resultado superior a los números que tenemos para operar"*).

Conexiones entre la suma y la resta

Concepciones basadas en la acción: conexiones parciales o incompletas

Un 26.1% de los alumnos evidencia una concepción de la suma y la resta basada esencialmente en la acción, en la que se establecen relaciones parciales o incompletas entre ambas operaciones.

Conexiones parciales

En concreto vemos que de los 39 alumnos que establecen conexiones parciales:

- 18 de ellos evidencian el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo al proponer problemas aditivos con estructuras de igualación, comparación, combinación con incógnita en una parte o cambio con incógnita en el cambio, en las que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar (*"Elisa tiene 4 años menos que su hermano que tiene 18. ¿Cuántos años tiene Elisa?"*). No obstante, sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar se basan en las acciones de añadir y quitar, y sus argumentos ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos, y uno de resta con el verbo añadir, evidencian el manejo de conceptos erróneos y su interpretación como procesos distintos, señalando por ejemplo que: *"Añadir implica automáticamente una suma, no una resta"*, o que no debe hacerse pues es muy confuso y puede confundir a los alumnos (*"No es adecuado porque si el resultado es una suma y añadimos, el menos puede crear confusión y no saber lo que piden"*).
- 4 alumnos consideran que existe una conexión entre la suma y la resta al interpretarlas en base a las acciones de añadir, unir, quitar y la idea de comparar (*"Restar es quitar, hacer la diferencia entre dos números"*). No obstante, sus elecciones de los verbos que asocian con suma, los problemas aditivos que proponen, y la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al lenguaje natural sugieren una interpretación de las operaciones como procedimientos independientes. Estos alumnos asocian claramente la suma sólo con aquellos verbos que implican un cambio de estado y al menos uno de los verbos ganar, obtener y/o recibir. Son alumnos que proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado y/o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final, en los que los indicios verbales siempre coinciden con la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, proponen su utilización sin relevancia para la suma/resta o señalan que enunciados de este tipo no son recomendables al resultar confusos para quien resuelve el problema (*"Porque puedes usar esa palabra y que sea irrelevante para el problema", "podemos hacer equivocar al alumno"*).
- Los 17 alumnos restantes no evidencian el uso de distintas relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta en los problemas aditivos que proponen ni tampoco lo hacen en sus explicaciones sobre qué entienden por sumar o restar. Estos sólo proponen problemas que involucran un cambio de estado de aumento o disminución, y una combinación de elementos en los que la incógnita está en el todo, siendo en todos los casos la palabra clave indicador de la

operación a realizar. Sus explicaciones sobre que entienden por sumar o restar muestran una interpretación en base a las acciones de añadir y/o juntar para la suma, quitar para la resta y en base a verbos como ganar, recibir, obtener y/o dar y perder. Sólo una de las explicaciones dadas sobre la posibilidad de realizar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir evidencia el manejo de alguna relación del tipo parte-parte-todo más allá de la combinación con la incógnita en la cantidad final (*"En un problema en el que sepas en resultado e insinuemos que era menor que antes dando uno de los sumandos"*). En general, las explicaciones y los ejemplos que proponen para el uso del verbo añadir o la palabra menos implican su utilización como palabra clave para la operación a realizar incluyendo más de una operación, o su utilización como información complementaria, sin que afecte la resolución del problema (*"Puedes hacer una resta y luego que haya que sumar", "Oscar tiene 8 caramelos menos que Álvaro que tiene 20, es decir 12. ¿Cuántos caramelos tienen en total?"*).

Conexiones incompletas

De los 14 alumnos que establecen una relación incompleta entre estas operaciones:

- 7 muestran el uso de relaciones basadas en un esquema parte-parte-todo para la suma y la resta en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, mostrando una concepción binaria y/o unitaria de estas operaciones (*"Juntar, agregar cosas a algo que ya había", "Separar una parte de un todo"*). Además, 5 de ellos refuerzan esta concepción en las explicaciones que dan cuando se les pregunta acerca de la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, estableciendo alguna relación del tipo parte-parte-todo (*"Se puede pedir una comparación"*), aunque muestran una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en todos los aspectos restantes (*"Porque cuando sumas estas añadiendo, no quitando"*). Los 2 alumnos restantes, muestran el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo tanto en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar como en los problemas aditivos que proponen. No obstante, sus elecciones para los verbos que asocian con sumar, junto con la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye el lenguaje natural, sugieren que interpretan las dos operaciones como procedimientos distintos. Estos alumnos asocian sumar de manera clara sólo con los verbos que implican un cambio de estado aumentando y alguno de los verbos regalar, obtener y conseguir. Proponen utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta utilizándolas como palabras clave para la operación a realizar haciendo más de una operación (*"María tiene 3 juguetes en su habitación. Pablo le quita 2 y los añade a su habitación. ¿Cuántos juguetes le quedan a María?"*).
- Los 7 alumnos restantes establecen una conexión entre estas operaciones en las explicaciones que dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir (*"Cuando hacemos una resta obtenemos la diferencia que hay entre dos números, es decir la cantidad que hay que añadir al menor para obtener el mayor"*). No obstante, proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o quitando, o una combinación con la incógnita en la cantidad final. En sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, y en los verbos que asocian claramente con suma, sólo evidencian una interpretación basada en la acción unitaria para ambas operaciones.

Concepciones basadas en la acción: conexiones completas

Un 3% de alumnos que participa en este estudio evidencia una concepción de la suma y la resta esencialmente basada en la acción, en la que se establece una relación entre estas operaciones. Vemos que:

- 4 de los 6 alumnos que conforman este grupo muestran el uso de un esquema parte-parte-todo, tanto en los problemas aditivos que proponen, que involucran el uso de estructuras de cambio, combinación y comparación, como también en las explicaciones que dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y un enunciado de resta con el verbo añadir. Proponen enunciados que involucran diferentes estructuras aditivas, en las que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar (*"Necesito 80 folios y tengo 43 en clase, ¿cuántos tendré que comprar?"*). Ante la posibilidad de redactar enunciados de suma con la palabra menos y de resta con el verbo añadir sus argumentos se basan en el uso flexible de un esquema parte-parte-todo (*"En una resta puedes quitar al total o bien puedes partir del total y una cantidad que añadida a otra y no sabemos lo que resulta en ese total. Para descubrirla debemos restarle al total la cantidad que sabemos"*). En cambio, sus explicaciones acerca de lo que entienden por sumar y restar evidencian una interpretación que puede reflejar una concepción unitaria para ambas; unitaria para la suma y la resta, y binaria para la suma; binaria para ambas; o, su interpretación como operaciones matemáticas.

- Los 2 alumnos restantes evidencian el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo en una o ambas de las explicaciones que dan ante la posibilidad de utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta, y/o en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una interpretación basada en la acción unitaria y binaria para la suma y la resta y los problemas aditivos que proponen (*"Lo planteas como cuantas unidades hay que añadir para que te de un número", "Manuel tiene 6 cromos y Alba 10. ¿Cuántos cromos tiene que Añadir Manuel a su colección para tener los mimos que Alba?"*).

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio confirman el bajo desempeño evidenciado por los estudiantes para maestro en estudios similares (Chapman, 2007; Thanheiser, 2009; 2010; entre otros). Vemos que los futuros maestros inician su formación con un conocimiento aditivo inadecuado, evidenciado en concepciones estereotipadas y/o erróneas sobre los significados de la suma y la resta, así como de la relación entre estas operaciones. La mayoría de los estudiantes para maestro parecen interpretar estas operaciones como procedimientos distintos, reduciendo su significado a las acciones de añadir, unir y/o juntar para el caso de la suma y quitar para el caso de la resta. En la mayoría de los casos, estas operaciones también son definidas o asociadas claramente a acciones como, dar, recibir, ganar, obtener y/o perder, entre otras. Otras interpretaciones de ambas operaciones como pueden ser, la de la suma y la resta basada en los desplazamientos en la recta numérica, su interpretación en base a la noción de contar hacia adelante y hacia atrás, o la resta como sumando desconocido, son casi inexistentes.

La concepción estereotipada de la suma y la resta, y su interpretación como procedimientos distintos, se ven reflejadas entre otros aspectos en los problemas aditivos que proponen. Siendo problemas que esencialmente involucran un cambio de estado aumentando o disminuyendo, o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final. En muy pocas ocasiones involucran estructuras aditivas que requieran la utilización de relaciones del tipo parte-parte-todo para su resolución, así como la utilización de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. Cabe destacar que las concepciones erróneas evidenciadas por los futuros maestro de este estudio, como que restar nunca implica añadir, o que el tipo de palabras utilizadas en los problemas aditivos que se proponen a los alumnos siempre deben corresponderse con la operación a realizar, pueden tener repercusiones didácticas importantes. Exponer a los alumnos a un mismo de tipo de problemas aditivos centrado en el uso de indicios verbales como indicador de la operación a realizar limita su desarrollo del cálculo relacional y los centra en el aprendizaje del cálculo numérico (Vergnaud, 1991).

Finalmente, cabe señalar que los resultados obtenidos en este estudio ofrecen una aproximación a los alumnos con los que se espera trabajar las matemáticas y su didáctica. La diversidad de perfiles identificados sugiere distintos grados de conocimiento e ideas preconcebidas sobre estos conceptos que deben considerase en el momento de planificar las asignaturas de matemáticas y su didáctica. En esta dirección autores como Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) señalan que las concepciones que poseen los estudiantes para maestro sobre los conceptos matemáticos pueden ayudar a los formadores de maestros a desarrollar el conocimiento matemático del contenido. Así pues, tal y como apuntan estos autores, tareas como las diseñadas y utilizadas en este estudio son un instrumento que pueden contribuir a que los formadores de maestros puedan: (i) determinar las concepciones iniciales que poseen los estudiantes para maestro, (ii) planificar en base a concepciones sus cursos, y (iii) pensar y prever como estas concepciones se pueden desarrollar con el tiempo. En este sentido, la diversidad de concepciones descritas en este estudio puede ayudar a los formadores de maestros a poner énfasis en los errores e ideas incompletas que tienen los futuros maestros en relación a los significados de la suma y la resta, así como acerca de la relación entre ambas operaciones, pudiendo planificar qué estrategia resulta más adecuada para ayudarles a construir un conocimiento sólido del contenido para la enseñanza de las matemáticas en el aula de primaria.

Referencias

Baroody, A. y Ginsburg, P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp.75-112). Hillsdale. NJ: Lawrence Associates.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Broitman, C. (1999). Sumar no es siempre agregar ni restar es siempre quitar. En *Las operaciones en el primer ciclo* (pp. 9 – 21). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas

Cañadas, M.C. y Castro E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, C. (2004). Didáctica de los sistemas de numéricos para maestros. Adición y sustracción; Multiplicación y división. En Godino (coord.). *Didáctica para Maestros* (pp.187-219). Proyecto Edumat-Maestros.Granada: ReproDigital.

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014a). Una secuencia de formación para maestros: reflexionado acerca de los PAEV aditivos de una etapa. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 28*. (pp. 1475-1482). Barranquilla: RELME.

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014b). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226). Salamanca: SEIEM.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.

Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 341–349.

Godino, J. D., Font V. y Wilhelmi, M., R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *número especial*, pp. 131-155.

Gómez, A. (2010). Concepciones de los números decimales. *Revista de Investigación en Educación, 8*, 97-107.

Martínez, M. y Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6* (1). Consultado el 10 de febrero de 2015 en: http://redie.uabc.mx/vol6no1/contenido-silva.html

Maza, C. (2001). Adición y sustracción. Estructura multiplicativa. En Castro E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 177-200). Madrid: Síntesis.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma, 31*, 19-26.

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in mathematics Education, 40*(3), 251-281.

Thanheiser, E. (2010). Investigating further preservice teachers' conceptions of multidigit whole numbers: refining a framework. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 241-251.

Thanheiser, E., Browning, C. A., Lo, J. J., Kastberg, S. y Edson, A. J. (2013). Building a knowledge base: Understanding prospective elementary school teachers' mathematical content knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac. uk/journal/thanheiser.pdf.

Thanheiser, E., Whitacre, I. y Roy, G. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Whole-Number Concepts and Operations. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2). Available at: http://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss2/4

Trinidad, A., Carrero, V. y Soriano, R. M. (2006). *Teoría fundamentada «Grounded Theory». La construcción de la teoría a través del análisis interpretacional*. Madrid: CIS.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje, 31*(4), 463-483.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO, ENSEÑANZA DE FRACCIONES Y FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Pedagogical knowledge, teaching of fractions and initial teacher training

Castro-Rodríguez, E. y Rico, L.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de casos que analiza el conocimiento didáctico que un grupo de futuros profesores de primaria puso en juego al abordar cuestiones relativas a la enseñanza del concepto de fracción. A través de entrevistas se profundiza en la capacidad de los participantes para diseñar tareas escolares, enunciar objetivos y prever posibles limitaciones de los escolares sobre el significado de fracción. Los resultados destacan los contenidos prioritarios que dichos sujetos consideran en esa enseñanza.

Palabras clave: *análisis didáctico; formación inicial de profesores; enseñanza de fracciones; relación parte-todo.*

Abstract

In this paper we present a case study that analyzes the pedagogical knowledge that a group of future primary teachers demonstrate when dealing with issues related to the teaching of the concept of fraction. Through interviews, we study the participant ability to design school tasks, enunciate objectives and anticipate possible limitations in the students about the meaning of the fraction. The results show the priority content that these subjects consider in that teaching.

Keywords: *didactical analysis; preservice teacher training; fractions instruction; part-whole relationship.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática se conoce como una profesión técnicamente exigente y compleja, que fundamenta sus conocimientos en disciplinas con contenidos diversos. Un amplio dominio por el profesor de los contenidos matemáticos específicos no garantiza, por si solo, un buen desempeño en la práctica docente (Tirosh, 1999). La formación experta del profesor de matemáticas requiere así mismo de conocimientos didácticos, conceptuales y profesionales, sustentados en contenidos propios de didáctica de la matemática, cuya demarcación ocupa a especialistas e investigadores. Precisar qué conocimientos profesionales específicos necesita un profesor competente en matemáticas responde a ese propósito (Sánchez, 2011).

La mayoría de los expertos hacen una primera distinción entre conocimiento del contenido, que se refiere a los distintos contenidos disciplinares de la matemática escolar, y el conocimiento didáctico, correspondiente a aquellos contenidos necesarios para planificar la enseñanza y orientar el aprendizaje sobre un tópico matemático determinado. Entendemos que los conocimientos didácticos y los específicos de la matemática escolar están estrechamente ligados y hacen parte, conjuntamente, del conocimiento profesional del profesor. Dentro de este campo, desde la perspectiva del profesor de matemáticas, se ha analizado cuidadosamente la naturaleza de ese conocimiento profesional (Bromme, 1994; Escudero-Ávila et al., 2015; Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005).

Castro-Rodríguez, E. y Rico, L. (2017). Conocimiento didáctico, enseñanza de fracciones y formación inicial de maestros. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 197-206). Zaragoza: SEIEM.

Esos trabajos estudian el conocimiento profesional del profesor considerando sus diversas dimensiones. La distinción general comúnmente aceptada diferencia entre conocimientos en matemáticas y conocimientos en didáctica de la matemática (INEE, 2012, pp. 91-113). Cada uno de esos conocimientos tienen fundamentos disciplinares distintos, que se denominan contenidos matemáticos y contenidos didácticos, respectivamente.

Al trabajar sobre formación de profesores, los conocimientos de cada sujeto vienen dados por su dominio de los contenidos matemáticos y de los contenidos didácticos tal y como los expresan esos sujetos en respuesta a determinadas tareas, mediante contraste con aquellos establecidos curricular y profesionalmente.

Cada tema matemático que se enseña en el aula de primaria es parte de dicho contenido; por eso el maestro lo estudia y trabaja durante su formación inicial, para hacerlo parte de su conocimiento. Entre los tópicos curriculares destacados por los investigadores se encuentran las fracciones (Cramer y Lesh, 1988; D'Ambrosio y Mendoça, 1992; Domoney, 2001). También estos estudios se basan en aquellos contenidos didácticos que fundamentan el correspondiente conocimiento profesional del profesor sobre cada tema, que ayudan al diseño de tareas y la toma de decisiones para su enseñanza y aprendizaje escolar, junto con la mejora de la práctica en el aula de matemáticas. Este tipo de trabajos son necesarios ya que, a pesar de los avances en investigación sobre conocimiento profesional de los profesores, se mantiene la preocupación por la desconexión existente entre la teoría y la práctica educativa (Loughran y Hamilton, 2006).

Este trabajo se centra en el conocimiento didáctico relativo al aprendizaje de las fracciones tal y como lo entienden e interpretan un grupo de maestros en formación, desde el método del análisis didáctico (Rico, 2013). El análisis didáctico sobre el aprendizaje de las fracciones identifica el conocimiento sobre ese tópico por el estudio de las respuestas de los profesores y su tipificación mediante una serie de categorías. Dichas categorías proporcionan una estructura sobre el aprendizaje de las fracciones, un marco teórico para su diseño y práctica docente. El contenido viene dado por la concreción de esa estructura teórica, específica al tema de fracciones. El conocimiento del profesor en formación lo establecen los conceptos y procedimientos finalmente identificados y expresados por el profesor ante determinadas demandas, en relación con dicho tópico (Rico, 2016, pp. 85-112).

El contenido sobre aprendizaje de un tópico matemático escolar determinado se estructura, en este marco, mediante tres categorías u organizadores curriculares: expectativas de aprendizaje, limitaciones en el aprendizaje y oportunidades de aprendizaje, que se sintetizan en el diseño de tareas. Son tres contenidos que han sido ampliamente trabajados a lo largo de la formación inicial de los maestros. Con la perspectiva del análisis didáctico, este trabajo tiene como objetivo indagar el conocimiento que muestra un grupo de maestros en formación inicial sobre aprendizaje de las fracciones cuando se proponen tareas, plantean objetivos y se les pide detectar posibles errores y dificultades de los escolares sobre dicho tema. Particularmente, dentro del concepto de fracción, este trabajo se fundamenta en la noción elemental que surge de la relación parte-todo, por ser fundamento y primer acercamiento a las fracciones (Behr et al, 1983; Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1993; Streffland, 1991).

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico entendemos un método de investigación en Didáctica de la Matemática, cuyo interés y funcionalidad se extiende a otros ámbitos de actuación de esta disciplina. El análisis didáctico se estructura sobre una fundamentación curricular y se articula mediante distintos niveles de análisis, cada uno de los cuales está determinado por un sistema propio de categorías que identifican unos componentes y contenidos. Las dimensiones que aquí consideramos son: análisis conceptual, análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo (Rico, 2013).

La necesidad de una metodología para el diseño y realización de nuestro estudio, nos llevó a seleccionar el análisis didáctico con esta finalidad. En particular, este trabajo ha utilizado las categorías del análisis del contenido y cognitivo, mediante las cuales hemos clasificado e interpretado las respuestas de los sujetos relativas al aprendizaje escolar de las fracciones, que han permitido establecer su conocimiento didáctico.

Resumimos las categorías, contenidos didácticos y elementos de cada uno de ellos en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías del Análisis Didáctico

Dimensiones	Conceptual/Contenido	Cognitiva/Aprendizaje
Método de análisis:	Análisis significados	Análisis cognitivo
Objeto de estudio:	Significados de los conceptos matemáticos escolares	Condiciones y orientación del aprendizaje matemático escolar
Organizadores o componentes curriculares:	1. Estructura conceptual 2. Sistema de representación 3. Sentidos y modos de uso	1. Expectativas de aprendizaje 2. Limitaciones 3. Oportunidades de aprendizaje
Contenidos didácticos:	1. Propiedades formales/ funcionalidad cognitiva; actitudes emocionales, morales y éticas 2. Representaciones simbólicas/ gráficas/numéricas 3. Términos/ contextos/ fenómenos/ situaciones	1. Objetivos/ competencias/ compromisos 2. Errores/ dificultades/ bloqueos 3. Condiciones/ demandas/ retos
Síntesis:	Significados prioritarios para el aprendizaje y la enseñanza	Estructura de cada tarea matemática relativa al aprendizaje esperado

Análisis del contenido

Mediante el análisis del contenido se establecen y organizan los significados de los conceptos y procedimientos de cada tema matemático escolar (Rico, 2016). El análisis del significado del concepto de fracción, a través de las tres componentes que articulan dicho análisis, lo hemos acreditado desde las producciones de un grupo de profesores en formación, donde se identifican distintos conocimientos didácticos para esa dimensión (Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016).

Análisis cognitivo

El análisis cognitivo trata de organizar el aprendizaje de determinados conocimientos sobre un tópico. El análisis cognitivo se estructura en torno a aquellos conocimientos que el profesor espera que aprendan los escolares, aquello que puede interferir en ese aprendizaje y las opciones que facilitan a los escolares el aprendizaje y al profesor su observación efectiva (Lupiáñez, 2009).

MÉTODO

Para dar respuesta al objetivo planteado: indagar el conocimiento que muestra un grupo de maestros en formación inicial sobre el aprendizaje de las fracciones cuando se proponen tareas, plantean objetivos y se detectan posibles errores y dificultades de los escolares sobre dicho tema, seguimos una metodología de estudio de casos mediante la realización de entrevistas individuales. Tratamos de profundizar en la riqueza de la información que proporcionan los sujetos, en su diversidad y alcance; en esta ocasión no buscamos la cantidad ni estandarizar la información que esos datos proporcionan.

Sujetos

En este estudio participaron nueve maestros en formación que cursaban los estudios universitarios del Grado de Maestro en Educación Primaria durante el año académico 2012-2013 en la Universidad de Granada. Los sujetos eran estudiantes del tercer curso de dicha titulación, matriculados en la asignatura "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en Educación Primaria". Los estudiantes fueron seleccionados entre un grupo más amplio de 82 sujetos que habían participado en un trabajo previo realizado durante el año anterior cuando cursaban la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria". Durante dicho periodo, además de finalizar tal asignatura, los participantes realizaron sus prácticas docentes en los centros escolares. Dicho trabajo consistía en redactar un texto cuyo propósito era iniciar a unos hipotéticos escolares en la noción de fracción. En dicho estudio, los sujetos seleccionados presentaron resultados heterogéneos.

Recogida de datos e instrumento

La recogida de datos la hemos realizado mediante entrevistas personales individualizadas con cada uno de los participantes. El trabajo se centra en caracterizar el conocimiento profesional de los maestros en formación sobre contenidos didácticos acerca del aprendizaje de las fracciones. Por esta razón, la entrevista comienza situando a esos profesores en formación en una situación escolar de aprendizaje de las fracciones. Para esta contextualización se entregó a cada sujeto una narración elaborada individualmente por cada uno con carácter previo, realizada en un trabajo anterior sobre cómo iniciar a los escolares de primaria en el concepto de fracción. Tras la nueva lectura de esa narración personal se plantearon preguntas relativas a los tres organizadores del análisis cognitivo ya mencionados: tareas, objetivos y errores y dificultades (ver Tabla 2).

Tabla 2. Preguntas de la entrevista sobre el análisis cognitivo

Contenido didáctico	Pregunta realizada
Diseño de tareas	Para finalizar la explicación sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, propón alguna tarea, actividad o problema.
Errores y dificultades	(Errores) ¿En qué se pueden equivocar?
	(Dificultades) ¿Por qué crees que se pueden equivocar?
Expectativas de aprendizaje	Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos, ¿qué crees que aprenderán?

Procedimiento

Las entrevistas se realizaron de manera individual, en una habitación aislada, para que el sonido de la grabación de audio fuese óptimo. Para detectar posibles fallos en el diseño y aplicación de la entrevista, se realizó un ensayo piloto con dos de los sujetos seleccionados, tres semanas antes de realizar las entrevistas definitivas

El entrevistador era el docente que impartía la asignatura "Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en Educación Primaria", que los estudiantes entrevistados se encontraban cursando. La relación con el entrevistador permitió un ambiente natural y facilitó su colaboración.

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Las entrevistas fueron transcritas para su análisis. Con los datos obtenidos, realizamos un análisis de contenido cualitativo. Para ello, usamos dos tipos de categorías: cognitivas y de significado. Esas categorías, junto con los datos obtenidos se muestran en los siguientes apartados.

Diseño de tareas

Todos los sujetos fueron capaces de proponer de manera natural algún tipo de tarea. Las tareas fueron en todos los casos enunciados verbales de problemas. En general, se pueden considerar apropiadas de acuerdo al tema de iniciación a las fracciones, a excepción de la planteada por el sujeto S6, quien propuso un enunciado de estructura aditiva de cambio.

Tabla 3. Respuestas dadas por los sujetos sobre diseño de tareas

	Respuestas
S1	Realizaremos una actividad basada en el reparto. Vamos de camino al Parque de las Ciencias y hemos tirado por un camino recto para llegar antes. Cuando hemos llegado al primer semáforo que nos encontramos, llevamos recorrido 1/3 del camino. ¿Cuánto nos queda para llegar si ya no hay ningún semáforo más?
S2	Si tenemos una tarta partida en 4 trozos y yo me he comido ¾ ¿cuántos trozos quedan? Exprésalo en forma de fracción.
S3	Tenemos una cuerda demasiado grande. Queremos dividir esa cuerda para 3 personas de forma que cada uno tenga un trozo, los trozos tienes que ser del mismo tamaño ¿qué parte de la cuerda me corresponderá tener?
S4	Si Carlos tiene un pastel y quiere repartírselo a sus 6 amigos por igual, representa en forma de fracción cómo lo harías.
S5	A Marta se le ha olvidado el bocadillo para el recreo, pero su amigo Daniel decide compartirlo con ella. Si Daniel ha dividido su bocadillo en 3 trozos y se ha comido 2, ¿qué parte del bocadillo se ha comido Marta?
S6	Carolina ha hecho una tarta de chocolate por mi cumpleaños, si somos 6 y la dividimos en 6 partes iguales y yo me como la primera, ¿cuántos trozos de tarta quedan? Dibújalos.
S7	Tenemos una cinta de colores que hemos comprado entre 3 amigos ¿qué parte le correspondería a cada a amigo?
S8	Mi madre parte el bizcocho en 3 partes iguales. Si mi hermano se come dos tercios del bizcocho ¿cuánto queda para comerme yo?
S9	María tiene en su casa una barra de pan dividida en tres trozos. Si coge 1/3 de la barra partida en trozos, ¿cuántos quedan para su hermana y su madre?

En el análisis de los enunciados anteriores, se usaron como categorías de análisis los siguientes elementos. Primero, *complejidad cognitiva* de la demanda planteada en la tarea: reproducción, conexión o reflexión. En segundo lugar, *competencia matemática* a la que contribuye la tarea.

En relación a las categorías de tipo cognitivo, todos los participantes inventaron tareas en las que se formulan problemas o retos, sin llegar a plantear un nivel mayor de reflexión como analizar o interpretar la respuesta. Con respecto a la categoría competencia, las tareas propuestas contribuyen al desarrollo de la competencia matemática *resolución de problemas* y en menor medida, algunas de las tareas, a la competencia *representar*.

Con respecto a las categorías de significado: estructura conceptual, sistema de representación y sentido, en la primera de ellas encontramos que en todos los casos las tareas implican como significado la relación parte-todo, no obstante, algunos de ellos no incluyen relaciones parte-todo multiplicativas (S3, S5 y S7). Por ejemplo, en la respuesta del alumno S5, no se indica que la solución haya de expresarse como una fracción en lugar de un número natural. En una ocasión, se plantea un problema aditivo de cambio, como hace el alumno S6.

Con respecto a la categoría sistema representación, la mayoría de los sujetos (S1, S3, S5, S7 y S8) no especificaron qué tipo de representación se requiere. Dos de los participantes (S2 y S4) especifican que se haga a través de la representación numérica-fraccionaria, y un sujeto (S6) indica que se haga tanto de forma numérica como gráfica.

Por último, en la categoría sentido, a excepción del enunciado de estructura aditiva, el resto de respuestas se corresponden con tres contextos: Reparto (S3, S4 y S7), Hallar la parte complementaria (S1) y Reconstruir la unidad (S2, S5, S8 y S9).

Tabla 4. Respuestas de los sujetos a la pregunta sobre expectativas de aprendizaje

	Respuestas sobre expectativas
S1	Aprender a diferenciar las partes que tenemos o cogemos, de un total.Aprender a repartir un camino en 3 trozos.
S2	Aprender las fracciones.
S3	Aprender las fracciones a partir de la división en partes iguales de una cuerda.
S4	Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones.
S5	Aprender a desenvolverse con las fracciones que se utilizan en la vida cotidiana, a utilizarlas en la vida cotidiana y aprender su utilidad, aunque no lo expresen de forma escrita.
S6	Aprendan a dividir de una forma exacta y creativa. Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.
S7	Que comprendan primeramente las fracciones, y que sea un lenguaje sencillo y de la vida real, que les sea a ellos útil.
S8	Dividir un objeto en partes iguales.Que la suma de las partes representa la totalidad del principio.
S9	Ser capaces de dominar las operaciones con las fracciones, en este caso el dominio de las restas.

Expectativas de aprendizaje

La mayoría de los sujetos no encontraron excesivas dificultades para enunciar expectativas de aprendizaje asociadas a su narración, manifestando algún tipo de expectativa acorde al tema. Solamente el sujeto S11 manifestó una expectativa ajena al tema de iniciación a las fracciones, que hacía referencia a las operaciones, particularmente, la resta de fracciones. Estas respuestas las recogemos en su totalidad en la Tabla 4.

Las categorías de tipo cognitivo y de significado consideradas en el análisis de las respuestas y sus resultados se presentan a continuación:

- *Capacidad cognitiva* a la que hace mención, que toma los valores *imprecisa*, si es una capacidad genérica o poco definida; *definida*, si es una capacidad cognitiva singular; *elaborada*, si se plantean varias capacidades cognitivas. Con respecto a esta categoría, destacan en las respuestas los términos "aprender" y "comprender". El sujeto S2 fue el único que formuló una expectativa genérica "aprender las fracciones". Tres de los sujetos (S3, S8 y S10) plantearon expectativas elaboradas, cuya expresión incluye dos capacidades situadas en enunciados independientes. El resto de sujetos planteó expectativas específicas que expresan una única capacidad cognitiva.
- *Estructura conceptual*, donde se observa que no existe predominio de los tipos de contenidos en las respuestas de los participantes. Se presentan expectativas relativas a conocimientos conceptuales como "Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc." y procedimentales "Dividir un objeto en partes iguales". Dos participantes, S1 y S6, plantearon expectativas considerando ambos tipos de conocimientos, conceptual y procedimental, en sus respuestas. Otros dos participantes (S5 y S7) incluyen contenidos de tipo actitudinal reconociendo la importancia de conocer y apreciar la utilidad de las fracciones.
- *Representaciones*, en el que sólo un alumno hace mención a la representación de fracciones, sin especificar el sistema requerido (S4) "Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones".

- *Sentido*, donde las expectativas expresan los contextos de división de objetos, reparto y reconstrucción de la unidad. Otras expectativas como "diferenciar las partes del todo" son generales y no especifican un contexto particular (Ruiz Hidalgo, 2016).

Limitaciones

En la última pregunta referente a las limitaciones de aprendizaje, los participantes reflexionaron acerca de los errores en que pueden incurrir los escolares al realizar su tarea y las dificultades que pueden originar esos errores. Estos sujetos encontraron limitaciones y carecieron de precisión para enunciar posibles errores en que pueden incurrir los escolares en las tareas que plantearon, así como en vincular y justificar tales errores a las dificultades que eventualmente los pudieran originar. Algunos participantes no llegaron a formular errores y dificultades, otros formularon dificultades muy genéricas o se limitaron a repetir la misma respuesta dada a la pregunta sobre errores. Las respuestas se encuentran recogidas en la Tabla 5.

Tabla 5. Respuestas dadas por los sujetos sobre limitaciones

	Respuestas sobre errores	Respuestas sobre dificultades
S1	Confundirse a la hora de saber qué lugar ocupa cada dato en la resta.	Repartir el camino. Dividir el camino en tres partes iguales y tener que coger alguna.
S2	Que no sepan resolverlo o si lo resuelven pondrían algo al azar.	Porque es complejo, si yo tengo 4 trozos, en vez de ver 4 puedo verlo como 4/4 aunque sé que el resultado sea 1 que representa el total. Entonces puedo decir tengo 4 trozos y me he comido ¾, 4 menos ¾ y pondrá algo al azar. Porque hay que enseñarles si tenemos una tarta en 4 trozos que eso representa el total que es igual a 4/4. Entonces el alumno si no sabe eso pondrá 4 - 3/4 llevándole a cometer un error.
S3	Al dividir una unidad entre tres ya que tres es un número impar.	Porque los números impares siempre crean más problemas que lo pares, los números pares los niños los ven mucho mejor. Dividir una unidad entre un número par lo asocian mejor que si lo tienes que dividir entre números impares. Porque si tú divides 4 entre 2 sabes que te dan partes iguales… pero 1 entre 3 da cero como algo y el cero como algo puede que no lo manejen. Los niños tienen más facilidad para dividir una unidad entre un número que sea par que entre un número que sea impar.
S4	Al sumar, que sumasen también los denominadores por lo que dirían que saldría 6/36.	Por despiste porque si el profesor se lo ha explicado… muchas veces están centrado en el resultado de arriba y lo de abajo se te va, a mí me ha pasado muchas vece. Se preocupan más por sumar los numeradores que luego hacen la misma operación con los denominadores.
S5	Fallo en la comprensión. En lugar de dividir el bocadillo en tres partes iguales se dividiese en dos, ya que hay dos niños a los que repartir.	Porque haya un fallo de comprensión en la lectura.
S6	Dividir en partes iguales y que realmente no vean bien lo que cogen o dan.	A lo mejor de la regla de las medidas… ahí veo que hay mucha dejadez, que tu le digas divide una tarta en 3 partes iguales, y que cada uno la divida como quiera, no, hay una forma correcta de dividirla para después que haya una solución correcta. Porque no hagan una división exacta de la tarta y la dividan como ellos crean.Falta de utilizar las medidas, reglas.

S7	La correspondencia de gráficamente los tres trozos, a que a cada uno le corresponda un tercio. En dividir en tres partes iguales no le costaría. Sería la correspondencia gráfica a la numérica.	Porque no es tan gráfico si no es más… de razonamiento, y tienen que verdaderamente comprender las fracciones, si no comprenden las fracciones no podrán hacer la equivalencia entre lo gráfico y lo numérico.
S8	En la colocación de las fracciones a la hora de restar.	Al ver fracciones, al ver un número encima de otro no se piensa que son restas normales, pueden pensar que esto (2/3) es mayor que esto (3/3). Al ver las fracciones pueden confundir los números y pensar que da igual el orden de colocación.
S9	Los alumnos podría tener dificultad a la hora de plantear el problema sin las fracciones y realizarlo con ellas, quizás también podrían tener problemas con la operación y equivocarse con numerador y denominador.	Porque no he especificado cómo tendrían que hacerlo, yo he puesto que tengo tres trozos y pueden directamente quitarle dos y se ha acabado, no plantear que tengo 3 de 3 y si le quito uno tener 2/3. Porque puede ser que no lleguen a comprender del todo el enunciado y realizar la operación simple sin obtener el resultado por medio de las fracciones

Las respuestas recogidas sobre errores y dificultades se analizaron según tres categorías:

Tipo de limitación la cual examina si el enunciado corresponde a un error, a una dificultad, a un obstáculo, a una ausencia de conocimiento o no es una limitación. Dependiendo del valor de esta variable, se analiza la respuesta según la variable tipo de dificultad o tipo de error.

Tipo de dificultad, de acuerdo con las categorías acotadas por Socas (1997), toma los valores (a) asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, (b) asociada a los procesos propios de la actividad matemática, (c) asociada a los procesos de enseñanza, (d) asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, (e) asociada a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Tipo de error, que toma los valores (a) datos mal utilizados, (b) interpretación incorrecta del lenguaje, (c) inferencias no validas lógicamente, (d) teoremas o definiciones deformados, (e) falta de verificación de la solución, (f) errores técnicos, y (g) no es un error.

Respecto a los errores planteados, los participantes hicieron referencia a errores técnicos o datos mal planteados recurriendo a posibles fallos en los algoritmos de suma y resta de fracciones, a pesar de que en ninguna tarea es necesaria la realización de tales operaciones para su resolución. Otros errores dados, en relación a definiciones deformadas del concepto de fracción, fue la desigualdad de las partes al dividir el todo, y en relación con datos mal utilizados, dividir el todo en un número incorrecto de partes.

Las respuestas dadas sobre dificultades se centran en los procesos propios de la actividad matemática, particularmente en los procesos de división y reparto, procesos de desarrollo cognitivo con problema en la comprensión lectora, procesos de enseñanza debido a que el profesor no específica bien cómo resolver la tarea, y dificultad de los objetos matemáticos por la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones.

Destaca en las respuestas el sujeto S2, ya que fue el único que respondió a las preguntas sobre limitaciones con ausencia de conocimiento “que no sepa resolverlo o si lo resuelven pondría algo al azar”.

En las categorías de significado, los sujetos S1, S3, S4, S6, S7, S8 y S9 plantean errores y dificultades relativos a contenidos procedimentales, como algoritmos o dividir en partes. Por otro lado, en las respuestas de los sujetos S2, S5 y S7, se observan dificultades en relación a contenidos conceptuales. En relación a las representaciones, sólo un sujeto (S7) menciona dificultades en la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones. Por último, en la categoría sentido, cuatro de los participantes incluyen contextos de división (S1, S3, S5 y S6) y reparto (S1) en sus respuestas.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha sido elucidar aspectos básicos del conocimiento didáctico relativo al significado y al aprendizaje de las fracciones mediante la relación parte-todo de los profesores en formación. Particularmente, hemos destacado el diseño de tareas, el enunciado de expectativas de aprendizaje y la identificación de las limitaciones para entender el concepto de fracción, debido a su papel fundamental en la planificación de la enseñanza (Lupiáñez, 2009). En ambos casos hemos obtenido información sobre el conocimiento didáctico de los participantes que se muestra relevante.

Como balance de los resultados obtenidos, sobre diseño de tareas, destacamos que los participantes proponen en todos los casos enunciados de problemas cuando se pide plantear de manera espontánea una tarea sobre fracciones. Sin embargo, en algunos casos su apego a los números naturales, hizo que planteasen problemas de estructura aditiva.

Otro de los aspectos estudiados, el diseño de expectativas de aprendizaje, muestras respuestas acertadas, ya que la mayoría de los sujetos son capaces de enunciar objetivos específicos al tema. Estas expectativas hacen referencia a contenidos procedimentales y conceptuales, y a aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y la utilidad de las fracciones. Consideramos así que esas capacidades, están desarrolladas por este grupo de profesores en formación inicial. Al respecto subrayamos que en su segundo curso de formación universitaria los estudiantes habían cursado una asignatura de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en que se trataron estos aspectos.

En otra perspectiva, se encuentra el estudio de las limitaciones de aprendizaje. Los sujetos ejemplificaron de manera natural tareas adecuadas para el aprendizaje de las fracciones redactadas en forma de problemas; aún así tuvieron dificultades para enunciar posibles errores en que pudieran incurrir los escolares en tales tareas y en vincular justificadamente los errores a dificultades que pudieran originarlos. De los 11 sujetos, sólo 5 plantearon errores, principalmente recurren a errores técnicos referidos a fallos en los algoritmos en la suma y resta de fracciones. En consecuencia, los sujetos no desarrollaron este conocimiento durante su formación.

Los planes de formación inicial de los maestros incluyen asignaturas de carácter general y específico, donde los sujetos trabajan contenidos didácticos ligados a la elaboración de unidades didácticas, como es el caso de objetivos de aprendizaje. Sin embargo, otros contenidos igualmente relevantes para la práctica, como el diseño de tareas o la detección de errores y dificultades son relegadas a un segundo plano. Atendiendo a los resultados, parece pertinente que los responsables de elaborar los programas para la formación de maestros tengan en cuenta incentivar esos contenidos didácticos durante la formación de los futuros profesores.

Finalmente, destacamos que las categorías del análisis didáctico propuestas han mostrado su utilidad para identificar, caracterizar y delimitar el conocimiento didáctico de los profesores en formación sobre el aprendizaje escolar de las fracciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con apoyo del proyecto de investigación «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I y se ha llevado a cabo en el Grupo "FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Referencias

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knoweledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Kluwer Academic.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92*, 129-146.

Cramer, K. y Lesh, R. (1988). Rational number knowledge of pre-service elementary education teachers. En M. Behr (Ed.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 425-431). DeKalb, Il.: PME.

D'Ambrosio, B. S. y Mendonca-Campos, T. N. (1992). Pre-service teachers' representations of children's understanding of mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 213- 230.

Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Vol. 21, num. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Kieren, T. E. (1993, January). *The Learning of Fractions: Maturing in a Fraction. Paper presented at the Conference Fraction Learning and Instruction*, University of Georgia.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2012), TEDS-M. *Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español*. Madrid (España): Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Loughran, J. y Hamilton, M. L. (2016). *International handbook of teacher education*. Washington DC: Springer.

Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16- 32.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *número 33*, pp. 11-27.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En: L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, pp. 85-101. Madrid (España): Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En: L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, pp. 139-151. Madrid (España): Pirámide.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Steffe, L. P. y Olive, J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. En G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME* (pp. 59-66). Mexico: CONACYT.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D. (2000). Enhancing preservice teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathmatics Education, 31*(1), 5-25

CONSTRUCCIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA EVALUAR LA INTERPRETACIÓN CRÍTICA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS POR FUTUROS PROFESORES

Construction of a questionnaire to evaluate the critical interpretation of statistical graphics by future teachers

Contreras, J.M., Molina-Portillo, E., Godino, J.D., y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

La formación de profesores para enseñar estadística en educación primaria debe estar orientada a capacitarles para que desarrollen la cultura estadística en los alumnos de los primeros niveles educativos. Uno de los aspectos fundamentales de la "cultura estadística" (statistical literacy), es la interpretación de gráficos estadísticos, acción que cualquier ciudadano debe poder realizar para desenvolverse plenamente en la actual sociedad de la información. En este trabajo se describe la construcción de un cuestionario para evaluar los conocimientos sobre interpretación crítica de las informaciones dadas en los medios de comunicación basada en el uso de gráficos estadísticos elementales. El cuestionario se aplica a una muestra de 45 futuros maestros revelando carencias importantes en esta competencia. Se concluye con la necesidad de revisar los programas de formación para mejorar la cultura estadística de los futuros profesores.

Palabras clave: *alfabetización estadística, gráficos estadísticos, futuros maestros.*

Abstract

The training of teachers to teach statistics in primary education should be oriented to enable them to develop the students' statistical literacy since the first educational levels. One fundamental foundations of "statistical literacy" is the interpretation of statistical graphs, that any citizen must be able to realize in order to fully developing in the current information society. This paper describes the construction of a questionnaire to evaluate the knowledge about critical interpretation of media information I based on the use of elementary statistical graphs. The questionnaire is applied to a sample of 45 future teachers revealing important deficiencies in this competency. We conclude with the need to review te training programs to improve the statistical literacy of future teachers.

Keywords: *statistical literacy, statistical graphs, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

Los gráficos son un elemento de gran importancia en la cultura o alfabetización estadística, al ser el tipo de resumen de la información más utilizado, ya que permite interpretar y evaluar críticamente la información estadística de forma visual. Por tanto, es necesario un conocimiento profundo de su problemática educativa, ya que un gráfico sesgado o mal construido provocará que la información no llegue de forma correcta al ciudadano que debe interpretar los datos estadísticos.

Los gráficos de los medios de comunicación, por lo general, utilizan terminología técnica adecuada, pero también pueden contener elementos estadísticos ambiguos o erróneos, empleando convenciones de comunicación de los resultados estadísticos que pueden llevar a una mala interpretación. Por tanto, se plantea la necesidad de que los profesores entiendan que la información estadística que aparece en

Contreras, J.M., Molina-Portillo, E., Godino, J.D., y Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207-216). Zaragoza: SEIEM.

los medios de comunicación puede estar sesgada, ya sea porque la validez de los mensajes, su naturaleza, la credibilidad de la información o las conclusiones que presentan no sean correctas, y que se debe promover acciones para facilitar la interpretación gráfica.

En este trabajo evaluamos aspectos importantes de la cultura estadística de futuros profesores de educación primaria, como es la interpretación crítica de las informaciones estadísticas dadas en los medios de comunicación mediante gráficos estadísticos elementales. La aplicación de un cuestionario a una muestra de estudiantes, al comienzo de su formación, nos ha permitido obtener información valiosa para los formadores al revelar el estado inicial de desarrollo de la mencionada cultura estadística, y servir de base para centrar la atención en puntos críticos del aprendizaje.

MARCO TEÓRICO

Diversos autores han descrito los aspectos que se deben incluir en la noción de “cultura estadística” o “alfabetización estadística” (Wallman, 1993, Batanero, 2002). Para nuestro trabajo adoptaremos la descripción desarrollada por Gal (2002), con algunas adaptaciones, referida a los conocimientos estadísticos y disposiciones hacia el uso de la estadística que se espera tengan los adultos que viven en las sociedades industrializadas. En una primera aproximación Gal (2002) distingue dos componentes interrelacionados:

> (a) la habilidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos basados en datos, o los fenómenos estocásticos, que pueden encontrar en diversos contextos, y cuando sea relevante (b) su habilidad para discutir o comunicar sus reacciones a la información estadística, tales como su comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información, o sus preocupaciones relativas a la aceptabilidad de las conclusiones dadas (Gal, 2002, pp. 2-3).

Estas capacidades y conductas están fundadas en varias bases de conocimientos relacionados entre sí y disposiciones que se resumen en la Tabla 1. En dicha tabla sintetizamos la propuesta de Gal (2002), aunque también la interpretamos y completamos en algunos aspectos. Para el componente del contexto nos parece útil tener en cuenta la clasificación usada en los informes PISA, donde se distinguen los contextos: personal, profesional, social y científico; y para los elementos de disposición y evaluación crítica de las informaciones estadísticas los incluimos como parte de la dimensión afectiva. En la dimensión afectiva, de acuerdo al modelo tetraédrico que proponen DeBelis y Goldin (2006) distinguimos cuatro tipos de entidades afectivas: actitudes, emociones, creencias y valores (p. 135), descritas según se indica en la Tabla 1.

Tendremos también en cuenta los niveles de lectura de gráficos definidos por Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001):

- *C1: Leer los datos:* Lectura literal de la información representada en el gráfico.
- *C2: Leer dentro de los datos:* Lectura de una información basada en los datos del gráfico, pero que no está representada explícitamente, para lo cual se necesita comparar varios datos o hacer operaciones con ellos.
- *C3: Leer más allá de los datos:* Realización de inferencias con la información presentada en el gráfico, más allá de cálculos y/o comparaciones, como, por ejemplo, efectuar predicciones. Por ejemplo, si se pide interpolar un valor entre dos dados o extrapolar (antes del primer valor o después del último).
- *C4: Leer detrás de los datos,* que consiste en la valoración crítica de los datos (forma en que fueron obtenidos, conclusiones, conocimiento del contexto, etc.). Supone no sólo tener comprensión gráfica, sino además conocer el contexto de los datos.

Tabla 1. Componentes de la cultura estadística (síntesis del modelo Gal, 2002, con adaptaciones propias)

DIMENSIÓN COGNITIVA	*DIMENSIÓN AFECTIVA*
Lengua natural (literacy skills): Destrezas sobre la lengua natural, procesamiento textual, tabular y gráfico.	Actitudes: Orientaciones o predisposiciones hacia ciertos patrones de conducta. (Adoptar una posición de cuestionamiento hacia mensajes cuantitativos que pueden inducir a error, ser sesgados o incompletos; evaluación crítica de gráficos)
Estadística: 1. Conocer por qué se necesitan los datos y cómo se obtienen. 2. Familiaridad con los términos e ideas básicas sobre la estadística descriptiva. 3. Familiaridad con las visualizaciones gráficas, tabulares y su interpretación (competencia gráfica). 5. Comprensión de nociones básicas de probabilidad. 5. Conocer cómo se obtienen las conclusiones e inferencias estadísticas.	Emociones: Estados rápidamente cambiantes de sentimientos experimentados de manera consciente o que ocurren de manera preconsciente o inconsciente ante determinadas situaciones.
Matemáticas: 1. Números y operaciones 2. Proporcionalidad 3. Geometría 4. Álgebra 5. Funciones	Valores: Se refieren a 'verdades personales' o compromisos profundamente apreciados por los individuos, incluyendo componentes éticos y morales. Ayudan a motivar elecciones a largo plazo o a establecer prioridades a corto plazo.
Contextos: 1. Personal 2. Profesional 3. Social 4. Científico	Creencias: Ideas u opiniones individuales sobre un tema, o dominio, sobre uno mismo, o un contexto social; implican la atribución de algún tipo de verdad o validez externa al sistema de proposiciones u otras configuraciones cognitivas.

El problema que se aborda en esta investigación consiste en describir el estado inicial de un aspecto importante de la "cultura estadística" de los estudiantes que inician los estudios de magisterio, como es la capacidad de interpretación crítica de gráficos estadísticos elementales usados en los medios de comunicación. Usaremos el modelo de cultura estadística de la Tabla 1 como guía para la selección y análisis de las tareas que incluimos en el cuestionario.

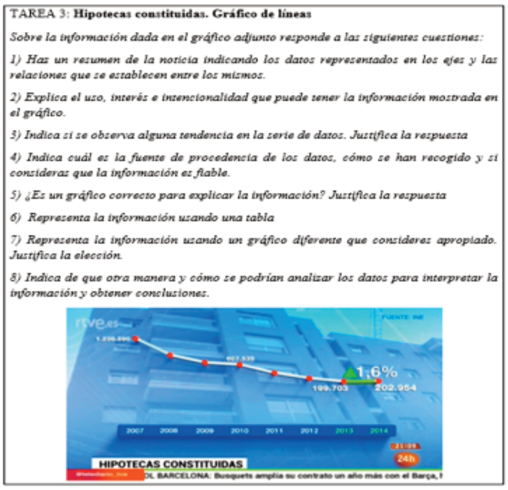
ANTECEDENTES

Las escasas investigaciones centradas en la comprensión gráfica de los profesores se resumen en su mayoría en González, Espinel y Ainley (2011) y Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2012). Entre ellos destacamos el de Bruno y Espinel (2005) que analizan la construcción de gráficos por futuros profesores a partir de una lista de datos. Los errores cometidos incluyen intervalos mal representados, omisión de intervalos de frecuencia nula, o uso de rectángulos no adosados en variables continuas. En el polígono de frecuencias, no unen las marcas de clase, omiten el intervalo de frecuencia nula o confunden la frecuencia y el valor de la variable. Espinel (2007) evalúa la interpretación de gráficos en futuros profesores, comparando los resultados con los de estudiantes universitarios americanos con un mismo cuestionario, convenientemente traducido. Encontró mayor dificultad en los futuros profesores, sobre todo al predecir la forma de un gráfico a partir de la descripción verbal de variables conocidas o al leer los histogramas. Todos estos errores se reproducen en los estudios de Arteaga y Batanero (2010) y Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016). Monteiro y Ainley (2007) estudian la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, encontrando que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. Indican que la dificultad es debida a que la interpretación de gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión. Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) analizaron los niveles de lectura según la clasificación de Curcio (1987) y Friel et al. (2001) indicando que pocos de estos profesores alcanzaron el nivel más alto de "lectura más allá de los datos" donde se requiere realizar inferencias sobre datos no incluidos en el gráfico.

METODOLOGÍA

El instrumento para la recogida de datos está constituido por un conjunto de 8 tareas, cada una de las cuales está formada por ítems que evalúan aspectos de la cultura estadística relacionada con la interpretación de gráficos estadísticos elementales (diagramas de barras, líneas y de sectores). Un ejemplo de tarea relativa al gráfico de líneas se muestra en la Figura 1.

Los apartados 1, 6, 7 y 8 ponen en juego conocimientos estadísticos básicos sobre gráficos estadísticos; el apartado 2 evalúa el conocimiento del contexto y la competencia de expresión verbal; los apartados 3, 4 y 5 el nivel alcanzado en la lectura crítica de los gráficos de acuerdo a Curcio (1989), Friel, Curcio y Bright (2001) y conocimientos estadísticos básicos. En concreto las preguntas 4 y 5 requieren el nivel de lectura detrás de los datos y el resto de las preguntas al menos el nivel de leer dentro de los datos.



TAREA 3: **Hipotecas constituidas. Gráfico de líneas**

Sobre la información dada en el gráfico adjunto responde a las siguientes cuestiones:

1) Haz un resumen de la noticia indicando los datos representados en los ejes y las relaciones que se establecen entre los mismos.

2) Explica el uso, interés e intencionalidad que puede tener la información mostrada en el gráfico.

3) Indica si se observa alguna tendencia en la serie de datos. Justifica la respuesta

4) Indica cuál es la fuente de procedencia de los datos, cómo se han recogido y si consideras que la información es fiable.

5) ¿Es un gráfico correcto para explicar la información? Justifica la respuesta

6) Representa la información usando una tabla

7) Representa la información usando un gráfico diferente que consideres apropiado. Justifica la elección.

8) Indica de que otra manera y cómo se podrían analizar los datos para interpretar la información y obtener conclusiones.

Fig. 1. Ejemplo de tarea

Cada tarea hace referencia a un tipo de gráfico simple creado de forma incorrecta por algún medio de comunicación.

1. Gráfico de dos barras adosadas, que informa de una serie temporal de dos variables estadísticas que indica para los años del 2008 al 2012 el número de sociedades creadas y disueltas en España, en el cual se ha omitido el eje de coordenadas y las escalas con las que se representan las dos funciones (años – cantidades de empresas) comparadas tienen distintas proporciones.
2. Gráfico circular que representa las votaciones realizadas por un político durante su mandato, en el que el título del diagrama no refleja bien el contenido, la suma de los porcentajes suman 115% y las áreas de los sectores no guardan la proporción expresada en los %.
3. Gráfico de líneas que representa el número total de hipotecas constituidas en España desde 2007 hasta 2014, en el que el eje de ordenadas no ha sido incluido, y, por tanto, no se indica la escala que se usa para representar las cantidades y la representación no respeta la proporcionalidad entre los distintos valores de la variable y las alturas a las cuales se dibujan los puntos correspondientes.

4. Diagrama de barras que representa los porcentajes que le asignan los encuestados a la mejor candidata de un partido a la alcaldía de Madrid, en el que la escala de las barras no está proporcionada, dando una visión equivocada de los resultados de la encuesta; además falta el eje de frecuencias, con lo que se pierde la perspectiva a la hora de comparar las distintas barras.
5. Gráfico de líneas que representa la variación del número de desempleados desde 2007 a 2014, en el que se ha querido resaltar el descenso del paro en el año 2014 respecto a 2012 y 2013; se asigna una posición en la gráfica muy inferior a la real y en la que la falta del eje de frecuencias no permite una perspectiva clara a la hora de comparar los distintos valores del eje temporal.
6. Un gráfico de áreas (variedad del de líneas) que representa el coste de las remuneraciones de asalariados de las administraciones públicas desde 1985 a 2011. Se quiere el crecimiento del gasto en remuneraciones en el periodo 1985 – 2008, principalmente 1985-2000, y el estancamiento, reducción mínima respecto al aumento experimentado, en los años 2008-2011. Se toman intervalos de igual amplitud, pero que representan periodos de años diferentes, 15 años en el primer intervalo, 5 en el segundo y 3 en el tercero, y uno en el resto. Con ello se logra un incremento en la pendiente de las rectas que no coincide con el incremento real, que es menos paulatino.
7. Un pictograma que refiere a las ventas de vinos españoles en siete países en tres años consecutivos (2006, 2007 y 2008). En el gráfico no se representa el eje de ordenadas, lo cual dificulta la interpretación, además la imagen en perspectiva de las botellas, así como el orden en que están colocadas, también dificultad la interpretación de la importancia relativa de las cantidades representadas.
8. Un diagrama de barras de uno de los ítems liberados por PISA que muestra el incremento de robos desde 1998 a 1999, en el que se ha truncado el eje de coordenadas para dar la impresión de mayores diferencias.

En el conjunto de tareas se consideran un total de 53 ítems. Como cada ítem puntúa hasta 2, al asignar puntuación 1 a las respuestas parcialmente correctas, la puntuación total es de 106. Se han definido seis subescalas, sumando para las ocho tareas la puntuación en cada uno de los ítems considerados en las mismas:

1. Resumen (Ítem 1 de cada tarea): El alumno ha de resumir la noticia indicando los datos representados en los ejes y las relaciones que se establecen entre los mismos. Esta subescala se obtiene sumando las puntuaciones en todas las tareas en la primera pregunta.
2. Interés (Suma de las respuestas el Ítem 2 en cada tarea): El alumno ha de explicar el uso, interés e intencionalidad que puede tener la información mostrada en el gráfico.
3. Tendencia (Suma de las respuestas el Ítem 3 en cada tarea): El alumno ha de justificar si observa alguna tendencia en la serie de datos.
4. Procedencia (Suma de las respuestas el Ítem 4 en cada tarea): El alumno ha de indicar cuál es la fuente de procedencia de los datos, cómo se han recogido y si considera que la información es fiable.
5. Gráfico correcto (Suma de las respuestas el Ítem 5 en cada tarea): El alumno ha de indicar si es un gráfico correcto para explicar la información justificando su decisión.
6. Tabla (Suma de las respuestas el Ítem 6 en cada tarea): El alumno ha de representar la información usando una tabla.
7. Otro gráfico (Suma de las respuestas el Ítem 7 en cada tarea): El alumno ha de representar la información usando otra gráfica.
8. Otra forma (Suma de las respuestas el Ítem 8 en cada tarea): El alumno ha de indicar de qué otra manera y cómo se podrían analizar los datos para interpretar la información y obtener conclusiones.

Población y muestra

La población de interés en esta investigación son futuros profesores españoles del Grado en Maestro en Educación Primaria. El cuestionario ha sido aplicado en forma piloto a un grupo de 45 estudiantes de la asignatura "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en educación primaria", que se imparte en el tercer curso del Grado de Primaria de la universidad de Granada. Estos estudiantes han cursado dos asignaturas previas relacionadas con la matemática y su didáctica, en las cuáles han estudiado los gráficos estadísticos considerados en el trabajo, aunque el tiempo dedicado a ello ha sido una o dos semanas por curso.

RESULTADOS

Tras la comprobación de la normalidad de las puntuaciones totales y de las subescalas, se han estudiado algunas características psicométricas del cuestionario. Posteriormente se ha realizado un estudio descriptivo de las respuestas de los alumnos para los diferentes ítems., clasificado los resultados en función de si la respuesta es correcta, parcialmente correcta o incorrecta (Tabla 2).

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de tipos de respuestas a los ítem

ITEM	*Incorrecto*	*Par. correcto*	*Correcto*	*ITEM*	*Incorrecto*	*Par. correcto*	*Correcto*
1.1	5 (11,1)	7 (15,6)	33 (73,3)	5.1	37 (82,2)	3 (6,7)	5 (11,1)
1.2	5 (11,1)	25 (55,6)	15 (33,3)	5.2	42 (93,3)	2 (4,4)	1 (2,2)
1.3	13 (28,9)	18 (40,0)	14 (31,1)	5.3	40 (88,9)	2 (4,4)	3 (6,7)
1.4	5 (11,1)	14 (31,1)	26 (57,8)	5.4	41 (91,1)	3 (6,7)	1 (2,2)
1.5	3 (6,7)	38 (84,4)	4 (8,9)	5.5	40 (88,9)	1 (2,2)	4 (8,9)
1.6	1 (2,2)	0 (0)	44 (97,8)	5.6	44 (97,8)	0 (0)	1 (2,2)
1.7	13 (28,9)	12 (26,7)	20 (44,4)	5.7	37 (82,2)	3 (6,7)	5 (11,1)
1.8	17 (37,8)	12 (26,7)	16 (35,6)				
2.1	24 (53,3)	12 (26,7)	9 (20,0)	6.1	37 (82,2)	3 (6,7)	5 (11,1)
2.2	20 (44,4)	18 (40,0)	7 (15,6)	6.2	42 (93,3)	2 (4,4)	1 (2,2)
2.3	28 (62,2)	12 (26,7)	5 (11,1)	6.3	40 (88,9)	2 (4,4)	3 (6,7)
2.4	9 (20,0)	24 (53,3)	12 (26,7)	6.4	41 (91,1)	3 (6,7)	1 (2,2)
2.5	4 (8,9)	35 (77,8)	6 (13,3)	6.5	40 (88,9)	1 (2,2)	4 (8,9)
2.6	5 (11,1)	4 (8,9)	36 (80,0)	6.6	44 (97,8)	0 (0)	1 (2,2)
2.7	10 (22,2)	4 (8,9)	31 (68,9)				
2.8	29 (64,4)	5 (11,1)	11 (24,4)				
3.1	21 (46,7)	10 (22,2)	14 (31,1)	7.1	6 (13,3)	1 (16)	23 (51,1)
3.2	21 (46,7)	11 (24,4)	13 (28,9)	7.2	9 (20,0)	20 (44,4)	16 (35,6)
3.3	27 (60,0)	9 (20,0)	9 (20,0)	7.3	14 (31,1)	22 (48,9)	9 (20,0)
3.4	23 (51,1)	10 (22,2)	12 (26,7)	7.4	9 (20,0)	31 (68,9)	5 (11,1)
3.5	26 (57,8)	17 (37,8)	2 (4,4)	7.5	4 (8,9)	3 (6,7)	38 (84,4)
3.6	24 (53,3)	4 (8,9)	17 (37,8)	7.6	15 (33,3)	13 (28,9)	17 (37,8)
3.7	36 (80,0)	2 (4,4)	7 (15,6)				
4.1	29 (64,4)	10 (22,2)	6 (13,3)	8.1	10 (22,2)	9 (20,0)	26 (57,8)
4.2	30 (66,7)	9 (20,0)	6 (13,3)	8.2	12 (26,7)	14 (31,1)	19 (42,2)
4.3	33 (73,3)	10 (22,2)	2 (4,4)	8.3	12 (26,7)	23 (51,1)	10 (22,2)
4.4	33 (73,3)	12 (26,7)	0 (0)	8.4	15 (33,3)	13 (28,9)	17 (37,8)
4.5	33 (73,3)	2 (4,4)	10 (22,2)	8.5	29 (64,4)	9 (20,0)	7 (15,6)
4.6	35 (77,8)	2 (4,4)	8 (17,8)				

Posteriormente, se ha realizado el cálculo de la puntuación media de los ítems del cuestionario y su dispersión, en función de la asignación de las puntaciones 0, 1, 2, según el grado de corrección de las respuestas se utiliza el valor medio de la puntuación. Todo ello nos permite medir el índice de dificultad y discriminar si existen diferencias significativas entre los alumnos con resultados inferiores al percentil 33 (el grupo de bajo rendimiento) y los alumnos con resultados superiores al percentil 66 (grupo de alto rendimiento). Para este último análisis se ha realizado un contraste de hipótesis de igualdad de medias para muestras relacionadas. Los resultados muestran que, en general, hay una adecuada discriminación ($p<0.05$), en la mayoría de los ítems, Tabla 3.

Tabla 3. Análisis descriptivo de las puntuaciones y discriminación por rendimiento P33-P66

ITEM	*Media*	*D. típica*	*t*	*p*	*ITEM*	*Media*	*D. típica*	*t*	*p*
1.1	1,62	0,684	-0,691	0,495	5.1	0,36	0,743	-2,496	0,024
1.2	1,22	0,636	-2,957	0,006	5.2	0,24	0,609	-2,002	0,054
1.3	1,02	0,783	-0,058	0,954	5.3	0,18	0,535	-1,768	0,096
1.4	1,47	0,694	-1,282	0,210	5.4	0,20	0,548	-1,852	0,083
1.5	1,02	0,398	-1,655	0,108	5.5	0,07	0,252	-0,938	0,356
1.6	1,98	0,149	0,000	1,000	5.6	0,13	0,457	-1,725	0,104
1.7	1,16	0,852	-1,698	0,100	5.7	0,04	0,298	-0,938	0,356
1.8	0,98	0,866	0,165	0,870					
2.1	0,67	0,798	-0,825	0,416	6.1	0,29	0,661	-1,433	0,163
2.2	0,71	0,727	-1,517	0,141	6.2	0,09	0,358	-1,725	0,104
2.3	0,49	0,695	1,016	0,318	6.3	0,18	0,535	-2,426	0,027
2.4	1,07	0,688	0,000	1,000	6.4	0,11	0,383	-2,063	0,056
2.5	1,04	0,475	-1,369	0,181	6.5	0,20	0,588	-2,496	0,024
2.6	1,69	0,668	0,078	0,939	6.6	0,04	0,298	-0,938	0,356
2.7	1,47	0,842	-1,470	0,154					
2.8	0,60	0,863	-1,417	0,167					
3.1	0,84	0,878	-3,444	0,002	7.1	1,38	0,716	-0,823	0,417
3.2	0,82	0,860	-6,813	0,000	7.2	1,16	0,737	-0,365	0,718
3.3	0,60	0,809	-3,300	0,003	7.3	0,89	0,714	0,410	0,685
3.4	0,76	0,952	-4,876	0,000	7.4	0,91	0,557	0,966	0,342
3.5	0,47	0,588	-6,983	0,000	7.5	1,76	0,609	1,725	0,104
3.6	0,84	0,952	-7,884	0,005	7.6	1,04	0,852	0,253	0,802
3.7	0,36	0,743	-3,250	0,005					
4.1	0,49	0,727	-4,694	0,000	8.1	1,36	0,830	-1,845	0,077
4.2	0,47	0,726	-4,235	0,000	8.2	0,96	0,706	-1,594	0,122
4.3	0,31	0,557	-2,009	0,054	8.3	1,04	0,852	-1,021	0,317
4.4	0,27	0,447	-4,781	0,000	8.4	0,51	0,757	-3,051	0,006
4.5	0,49	0,843	-2,203	0,037	8.5	39,6	9,766	-11,301	0,000
4.6	0,40	0,780	-1,822	0,080					

La puntuación media obtenida en el total del cuestionario ha sido de 39,6 (error típico, 9,766) (sobre una puntuación máxima de 106), lo cual indica que dichos conocimientos se pueden calificar de muy insuficientes. De hecho, únicamente cuatro ítems han tenido un valor medio superior a 1,5, contra los 49 con índice inferior a este nivel; además, 35 ítems tienen una puntuación media inferior a 1. El índice de dificultad, que indica el porcentaje de aciertos resultante de los grupos analizados (bajo y alto rendimiento) respecto del total, se representa en la Tabla 4, por tanto, a mayor índice más facilidad de la cuestión. En la tabla se observa que los gráficos que más dificultad plantean para los futuros profesores son los referentes a las tareas 4, 5 y 6 con un índice de dificultad nunca superior al 14%, al igual que ocurre en Espinel, Bruno, y Plasencia (2010). En cambio, los ítems que con más facilidad interpretan son los referentes a la transnumeración de gráfico a tabla en las dos primeras tareas.

Tabla 4. Índice de dificultad

Item	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8
1	46,67	13,33	20,00	13,33	8,89	8,89	37,78	42,22
2	22,22	8,89	22,22	13,33	6,67	2,22	28,89	35,56
3	15,56	6,67	11,11	2,22	4,44	6,67	11,11	17,78
4	40,00	13,33	17,78	13,33	6,67	2,22	8,89	26,67
5	6,67	13,33	4,44	11,11	0	8,89	64,44	13,33
6	71,11	55,56	26,67	13,33	4,44	2,22	26,67	
7	28,89	51,11	13,33		2,22			
8	22,22	13,33						

Al calcular la puntuación media en cada subescala se obtiene un valor máximo de 16, considerando 2 puntos en cada ítem. El análisis comparativo de los resultados de las puntuaciones de los futuros profesores de educación primaria (Tabla 5), en función de las distintas subescalas muestra que la única escala donde los resultados fueron positivos fue la que hace referencia a la representación tabular (ítem 6 de cada tabla); por tanto, los estudiantes muestran una competencia razonable para transformar los gráficos en tablas. En el resto de los ítems no se llega a alcanzar la media teórica de 8 puntos. En la última fila de la tabla se ha realizado una transformación para adaptar las medias de los resultados a una escala [0,10] para poder comparar las escalas de forma más simple. En la tabla se observa que los peores resultados se obtienen para la escala "realizar un gráfico correcto" con una media de 3,1 (sobre 10), aunque no hay mucha diferencia con los resultados del resto de escalas que no alcanzan valores positivos, ya que oscilan entre 3 y 4,4 sobre 10.

Tabla 5. Análisis descriptivo de las subescalas

	Resumen [0-16]	*Interés [0-16]*	*Tendencia [0-12]*	*Proced .[0-10]*	*G. Correc. [0-16]*	*Tabla [0-16]*	*O.Gráf [0-16]*	*Otra f. [0-4]*
Media	7,00	5,87	4,31	3,80	4,82	8,13	5,02	1,58
Des. T.	2,772	2,573	1,975	1,914	1,435	2,085	2,718	1,357
Mínimo	0	1	0	0	3	3	0	0
Máximo	14	12	10	9	8	14	12	4
Media (sobre 10)	4,4	3,7	3,6	3,8	3,0	5,1	3,1	3,9

Para comprobar si existen diferencias significas entre las diferentes escalas se ha realizado una matriz de correlaciones (valores sin paréntesis) y un contraste de medias para muestras relacionadas (valores con paréntesis), Tabla 6. En ella se observa que no existen correlaciones estadísticamente significativas entre la escala "tendencia" con la escala "procedencia", "gráfico correcto" y "construir otro gráfico" y entre la escala "construir otro gráfico" con la escala "interés", "gráfico correcto" y con la ya comentada "tendencia". En el resto de contrastes los resultados muestran correlaciones estadísticamente significativas entre las escalas. La intensidad de la correlación es superior a 0,5 en el caso de las escalas "resumen" e "interés", "resumen" y "gráfico correcto" y "interés" y "gráfico correcto" aunque no son muy altas.

En concreto, aparece una relación entre saber hacer un resumen y conocer el interés y funcionalidad del gráfico, así como traducirlo correctamente a otro gráfico o a una tabla y entre traducirlo correctamente a una tabla o a otro gráfico. La detección de la tendencia se correlaciona ligeramente con conocer el interés. El resto de las preguntas no se relacionan entre sí.

Tabla 6. Matriz de correlaciones y valores p resultados del contraste de medias para muestras relacionada

	Resumen	Interés	Tenden.	Proced.	G.Correc.	Tabla	O.Gráf.	Otro
Resumen		0,510	0,133	0,313	0,509	0,393	0,229	–0,018
		(0,006)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)	(0,000)
Interés	0,510		0,406	0,331	0,615	0,262	0,111	0,140
	(0,006)		(0,000)	(0,000)	(0,001)	(0,000)	(0,116)	(0,000)

Tendencia	0,133 (0,000)	0,406 (0,000)		0,167 (0,179)	0,204 (0,125)	0,067 (0,000)	0,011 (0,160)	–0,043 (0,000)
Procedencia	0,313 (0,000)	0,331 (0,000)	0,167 (0,179)		0,318 (0,001)	0,104 (0,000)	0,097 (0,013)	–0,226 (0,000)
G. Correc.	0,509 (0,000)	0,615 (0,001)	0,204 (0,125)	0,318 (0,001)		0,570 (0,000)	0,397 (0,597)	0,182 (0,000)
Tabla	0,393(0,008)	0,262 (0,000)	0,067 (0,000)	0,104 (0,000)	0,570 (0,000)		0,389 (0,000)	–0,012 (0,000)
O.Gráf.	0,229 (0,000)	0,111 (0,116)	0,011 (0,160)	0,097 (0,013)	0,397 (0,597)	0,389 (0,000)		0,317 (0,000)
Otro	–0,018 (0,000)	0,140 (0,000)	–0,043 (0,000)	–0,226 (0,000)	0,182 (0,000)	–0,012 (0,000)	0,317 (0,000)	

INTERPRETACIÓN

Aunque los resultados son provisionales, al tratarse de una muestra piloto, son descorazonadores al mostrar la escasa comprensión gráfica de los estudiantes participantes en el estudio. Son muy pocos los estudiantes que alcanzan los niveles más altos en la lectura de gráficos señalados por Curcio (1989), Friel, Curcio y Bright (2001), coincidiendo con los resultados de los trabajos de Batanero, Arteaga y Ruíz (2010), aunque en dicha investigación los estudiantes interpretaban los gráficos construidos por ellos mismos.

En nuestro caso, como en el estudio de Monteiro y Ainley (2007) se pide a los profesores interpretar gráficos tomados de la prensa diaria. Al igual que dichos autores, nuestros resultados apuntan a que los participantes no alcanzan suficiente conocimiento matemático o competencia gráfica para llevar a cabo dicha lectura.

Son un poco mejores los resultados de traducir el gráfico a una tabla o a otro gráfico, en particular en aquellos estudiantes que son capaces de hacer un resumen del gráfico y de describir su utilidad. Estos dos puntos no han sido tenidos en cuenta en la investigación previa, pero pensamos que son parte de la cultura estadística (Gal, 2002) que debe tener todo futuro profesor. Sería necesario realizar este tipo de actividades en la formación de profesores, que pensamos, tienen para ello interés, al tratarse de la interpretación de información tomada de los medios de comunicación.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se describe la construcción de un cuestionario orientado a evaluar aspectos relevantes de la cultura estadística, como es la interpretación de informaciones dadas por los medios de comunicación basada en el uso de diversos gráficos estadísticos. No conocemos antecedentes de este cuestionario, por lo cual nuestra investigación aporta un primer resultado a este respecto. Por supuesto el cuestionario se encuentra en una fase inicial de su construcción y somos conscientes de la necesidad de continuar su depuración, así como el estudio de los índices de validez y fiabilidad. Las siguientes fases del estudio se orientan en esta dirección.

Sin embargo, encontramos de interés presentar en este contexto su aplicación a una muestra piloto de estudiantes del grado de Educación Primaria, lo cual ha revelado el bajo nivel alcanzado en las puntuaciones, tanto en la prueba globalmente, como en las distintas subescalas definidas. Estos resultados proporcionan información para los formadores de profesores sobre la necesidad de plantear intervenciones sistemáticas orientadas a mejorar la educación estadística de los futuros maestros.

Dado el carácter limitado de la muestra usada, y el bajo índice de discriminación de algunos ítems, se concluye que se requiere proceder a la revisión y posible reformulación de los ítems y su aplicación a muestras de mayor tamaño y representatividad. La investigación también se puede ampliar con la construcción de nuevos cuestionarios que contemplen la inclusión de otros elementos de la cultura estadística considerados en la Tabla 1, tanto circunscritos al problema de la interpretación crítica de gráficos estadísticos como de otros conceptos y procedimientos estadísticos.

Referencias

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G. (2012). Understanding statistical graphs: A research survey. *BEIO, 28*(3), 261-277.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 15.40.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas interamericanas de enseñanza de la estadística*, 5-7.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

Curcio, F. R. (1989). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematic*s, *63*(2), 131-147.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). La Laguna, España: SEIEM.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. doi: 10.2307/749671

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

González, M. T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 187-197). NY, USA: Springer.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 187-207.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*, 1-8.

LECTURA DE PICTOGRAMAS POR ESTUDIANTES CHILENOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Reading of pictograms by Chilean primary school students

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo estudiamos las respuestas y el nivel de lectura que alcanza un grupo de 380 estudiantes de 6º grado de Educación Primaria de Chile sobre pictogramas. Para recoger los datos se aplicó un cuestionario que tenía dos actividades sobre pictogramas, previamente validado por expertos, y tomadas de acuerdo con los resultados de un estudio en libros de texto. En la primera de ellas se debe comprobar la veracidad de dos afirmaciones según la información mostrada en el pictograma y, en el segundo caso, traducir la información de un pictograma a una tabla. El estudio muestra que los estudiantes no presentan mayores dificultades para cambiar la información de un pictograma a una tabla, mientras que un menor porcentaje alcanza el nivel de lectura adecuado para discutir las afirmaciones relacionadas con la información mostrada en el pictograma.

Palabras clave: *pictogramas, lectura, comprensión, Educación Primaria.*

Abstract

In this work we study the responses and graph reading levels reached by a group of 380 6th grade Chilean students when they dealt with pictograms. We used a questionnaire to collect the data that had two activities based on pictograms, previously validated by experts, and taken according to the results of a study with textbooks. In the first case, the veracity of two statements must be checked according to the information shown in the pictogram and, in the second case, the students had to translate the information from a pictogram to a table. The study shows that students do not present greater difficulties to change information from a pictogram to a table, while a lower percentage of students reach the appropriate reading level to discuss the statements related to the information shown in the pictogram.

Keywords: *pictograms, reading, understanding, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

Una parte importante de la información a la que accedemos en diferentes medios de comunicación, como en diarios y revistas, en las redes sociales, la publicidad o en los noticiarios, viene presentada en gráficos estadísticos, cuya interpretación es con frecuencia necesaria para la toma de decisiones (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011; Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010). Ello implica la necesidad de contar con una suficiente competencia de lectura de los gráficos para comprender la información ofrecida a los ciudadanos por las agencias internacionales y oficinas de estadísticas, pues la sociedad actual requiere que estos sean capaces de valorar dicha información, es decir, sean estadísticamente cultos (González, Espinel y Ainley, 2011).

Las razones anteriores han llevado a países como España (MECD, 2014) y Chile (MINEDUC, 2012) a introducir la enseñanza de los gráficos estadísticos, y de otros temas de estadística y probabilidad, en el currículo y los libros de texto desde los primeros cursos de Educación Primaria (Díaz-Levicoy,

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Lectura de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 217-226). Zaragoza: SEIEM.

Arteaga y Batanero, 2015). Sin embargo, son muy pocos los estudios que proporcionen evidencia empírica del grado en que los niños comprenden dichos gráficos al finalizar la Educación Primaria. Con la idea de obtener dicha información, este trabajo tiene como objetivo analizar el éxito y nivel de lectura que alcanzan los niños chilenos en el último año de la Educación Primaria (6º grado) al trabajar con pictogramas. Nos centramos en este tipo de gráfico estadístico, ya que es uno de los contemplados con más intensidad en el currículo, explicitado de primer a cuarto grado (MINEDUC, 2012) y libros de texto (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2016), solo superado por el gráfico de barras, y hay pocas investigaciones previas relacionadas a esta representación. Además, en el estudio de Díaz-Levicoy et al. (2016) sobre libros de texto se observa su presencia en todos los cursos, excepto en quinto, destacándose los altos porcentajes en los cuatro primeros grados.

En las siguientes secciones se describen los fundamentos, antecedentes, metodología y resultados del estudio, así como conclusiones del estudio.

FUNDAMENTOS

Los pictogramas son gráficos estadísticos que representan los valores de una variable cualitativa mediante iconos de tamaño proporcional a la frecuencia de cada modalidad, o bien repitiendo dicho icono en función de su frecuencia. Además, el icono puede tomar un valor fijo, distinto de la unidad, y repetirse las veces que sean necesarias, hasta representar la frecuencia considerada; en tal caso se debe indicar el valor numérico de la frecuencia que representa el icono (Martins y Ponte, 2010). La sencillez de su lectura hace que se haya recomendado para difundir información al público en general (Tijus, Barcenilla, De Lavalette y Meunier, 2007). Pueden ser trabajados desde los primeros cursos de Educación Primaria, ya que tiene una estructura similar a los gráficos de barras, donde las barras pueden ser reemplazadas por la cantidad de iconos que permita completar las frecuencias y como hemos indicado, se incluyen en el currículo chileno (MINEDUC, 2012).

Para analizar las respuestas de los estudiantes tendremos en cuenta algunas investigaciones sobre comprensión gráfica. En primer lugar, que la lectura del gráfico implica una interpretación semiótica de cada componente en particular y pasar de la interpretación de cada dato al de la distribución de los mismos (Konold, Higgins, Russell y Khalil, 2015). Diferentes autores han definido niveles en esta lectura de los gráficos, según el grado de competencia que alcanza el estudiante en dicha lectura; de entre ellos, en nuestro trabajo utilizaremos los propuestos por Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001) que son los siguientes:

- *Nivel 1. Leer los datos*. El estudiante, que alcanza en este nivel, puede leer literalmente la información que se presenta en el gráfico, por ejemplo, leer una ordenada dada la abscisa o leer el título del gráfico. Pero no avanza más en la interpretación del mismo.
- *Nivel 2. Leer dentro de los datos*. En este nivel el estudiante, además de hacer una lectura literal, puede obtener información que no está explicitada en el gráfico, a partir de procesos matemáticos sencillos. Por ejemplo, es capaz de determinar el número total de objetos que están siendo representados, sumando las frecuencias de todos los valores de la variable, o localizar la moda comparando todas las frecuencias y hallando el valor de la variable que tiene frecuencia mayor.
- *Nivel 3. Leer más allá de los datos.* Cuando se alcanza este nivel el estudiante puede extrapolar o interpolar la información, para predecir valores que no se muestran en el gráfico. Por ejemplo, puede estimar la producción del próximo mes en una empresa de acuerdo con la producción de los últimos meses.
- *Nivel 4. Leer detrás de los datos.* Corresponde a la valoración crítica del gráfico, de la forma en que se ha construido o bien de las informaciones que se hacen respecto a su contenido.

Antecedentes

Entre las escasas investigaciones relacionadas con la comprensión de los gráficos por parte de los niños, solo la de Cruz (2013) utiliza los pictogramas, dentro de su estudio con 21 niños de 3º curso de Educación Primaria en Lisboa (8-9 años). La investigación consideró un proceso de instrucción, al finalizar el cual, se aplicó un cuestionario para analizar el nivel de lectura de Curcio (1989), de varios tipos de tablas y gráficos. El 82% de los niños completó correctamente las actividades de lectura de nivel 1, un 72% llegaron al nivel 2 y un 26% al nivel 3. Una de las actividades propuestas pedía trabajar con un pictograma donde cada icono solo representaba la frecuencia unitaria. Obtuvo 88% de respuestas correctas a las preguntas de nivel 1 y el 70% a las de nivel 2. También pide justificar la veracidad de una afirmación hecha respecto a un gráfico de sectores, y ningún estudiante logra abordar la actividad de forma correcta o parcialmente correcta.

Respecto a otros tipos de gráficos, Evangelista (2013) evalúa la comprensión de gráficos de barras y líneas simples y dobles con 60 estudiantes de 5º curso de Educación Primaria en Brasil (10-11 años). Sus resultados muestran que los niños contestan correctamente el 51% de las actividades planteadas, siendo mejores los resultados en los gráficos de barras y peores en un diagrama de líneas dobles. En promedio, los estudiantes responden correctamente el 59% de las actividades sobre gráficos de barras y el 43% de los gráficos de líneas. Las preguntas de nivel 1 tienen un logro de 60%, y las de nivel 2 entre el 51% y el 41%.

Las anteriores investigaciones se han desarrollado en el contexto brasileño y portugués, y apenas consideran los pictogramas. Además, la edad de los niños es diferente de la considerada en nuestro trabajo, por lo que consideramos que podemos proporcionar nueva información. Una versión piloto del estudio se ha presentado en Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero (2017) con una muestra de 140 estudiantes (la mitad de 6º y la otra mitad de 7º grado). Puesto no se observaron grandes diferencias en los dos grupos, en este estudio nos restringimos a 6º curso, ampliando la muestra.

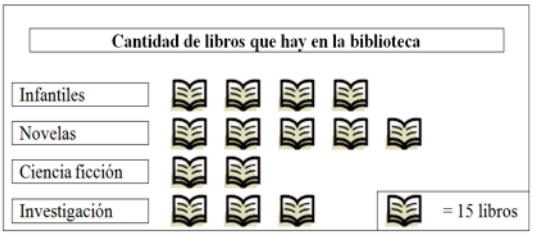
METODOLOGÍA

La muestra considerada en este estudio fue de 380 estudiantes de 6º grado de Educación Primaria en Chile (11-12 años), pertenecientes a 11 centros educativos diferentes, a los que se accedió mediante la autorización de los directores de los centros y de los profesores de aula a los que agradecemos su colaboración. Se ha considerado este grado porque significa el término de un ciclo educativo, en el cual han trabajado diferentes tipos de gráficos estadísticos, entre ellos los pictogramas, que están presentes en los libros de texto de cinco de los seis grados de la Educación Primaria chilena. Los estudiantes de la muestra habrían estudiado pictogramas en los cuatro primeros cursos de Educación Primaria y también en sexto grado.

El cuestionario propuesto (Figura 1) estuvo compuesto de dos ítems adaptados de libros de texto de Educación Primaria de Chile de 3º y 4º curso, eligiéndose estos textos para asegurar que los ítems fuesen sencillos para los niños participantes que cursaban el 6º curso. En ellos se utilizan pictogramas, donde cada símbolo representa un valor uniforme y definido, por tanto, *a priori*, han de ser sencillos para los estudiantes. En el primer ítem fue adaptado de Charles et al. (2014, p. 253) y pide decidir si dos afirmaciones son falsas o no. La primera de ellas es falsa (pues en total hay 30 libros de ciencia-ficción) y la segunda verdadera (hay 60 libros infantiles). Para responderlas el estudiante debe reconocer la fila correspondiente a cada uno de los valores de la variable "tipo de libro" y comprender que la frecuencia sería la cantidad de iconos multiplicado por la frecuencia representada por cada uno de ellos. Por tanto, en primer lugar, tiene que *leer dentro de los datos*, nivel 2, según Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001), ya que ha de realizar cálculos con los valores leídos. Además, el estudiante debe confirmar si la afirmación cierta o rebatir la falsa con un argumento correcto; por tanto, se hace una lectura crítica de las afirmaciones realizadas sobre el gráfico, llegando al nivel 4, leer detrás de los datos. En este ítem no se evalúa el nivel 3, *leer más allá de los datos*, porque no se realiza extrapolación con la información del gráfico estadístico.

En el segundo ítem, extraído y adaptado de Batarce, Cáceres y Kükenshöner (2013, p. 343), el estudiante debe traducir la información de un pictograma a una tabla, para lo cual, además de leer la cantidad de iconos que corresponde a cada valor de la variable, ha de realizar cálculos; en este caso, se usan dos tipos de iconos que representan 10 o 5 horas. El alumno ha de llegar al nivel 2, leer entre los datos, y completar la tabla, calculando el total de la misma.

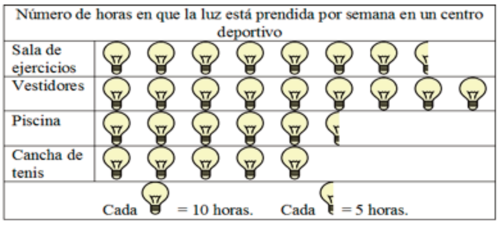
Ítem 1. La bibliotecaria del colegio hizo un inventario de los libros que hay en la biblioteca



Marca si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, explicando tu respuesta

	Verdadero	Falso
1. Sólo hay dos libros de ciencia ficción		
2. Hay 60 libros infantiles		

Ítem 2. Completa la siguiente tabla con la información mostrada en el gráfico



Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	*Nº de horas*
Sala de ejercicios	
Vestidores	
Piscina	
Cancha de tenis	
Total	

Figura 1. Actividades sobre pictogramas para evaluar la compresión sobre gráficos

RESULTADOS

Resultados en el ítem 1

Para analizar los resultados asociados al ítem 1, estudiaremos la corrección de la respuesta y el nivel de lectura que alcanzan al relacionarla con su respectiva justificación.

Porcentaje de respuestas correctas

En la Tabla 1 observamos el porcentaje de respuestas correctas respecto a la verdad o falsedad de las dos afirmaciones consideradas en este ítem. En ella observamos que en los dos apartados el nivel de éxito es superior al 65%, y que la diferencia es poca, ya que el porcentaje de éxito en la segunda afirmación solo aumenta en un punto. Los resultados aparentemente son inferiores a los obtenidos por Cruz (2013) en la lectura de pictogramas, pero en dicho trabajo solo se plantean preguntas hasta nivel 2 de lectura y cada icono solo representa una unidad, mientras en nuestro ítem cada icono representa 15 unidades; por ello, nuestros ítems son comparativamente más difíciles.

Tabla 1. Porcentaje de respuestas correctas en cada afirmación del ítem 1

Afirmación	Respuestas correctas (n = 380)
1. Sólo hay dos libros de ciencia ficción	65,6
2. Hay 60 libros infantiles	66,8

Nivel de lectura

Seguidamente analizamos el nivel de lectura al que llegó el estudiante al indicar la veracidad y falsedad de la afirmación y al justificar de dicha elección. Estas respuestas se han clasificado de acuerdo a los niveles de lectura de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001), descritos en los fundamentos, que se interpretan en la forma siguiente:

- Se alcanza el nivel 0 si no se lee la información pedida en la pregunta o la lectura del gráfico es incorrecta (ni siquiera leen bien la cantidad de iconos). Hemos agregado este nivel, pese a que Curcio y cols. no lo consideran, ya que ellos solo consideran la evidencia de compresión.
- Las justificaciones de los estudiantes se clasifican el nivel 1 si simplemente leen el número de iconos en el valor de la variable indicado en el apartado, sin realizar cálculos. El estudiante ha identificado la línea del gráfico que corresponde al valor de la variable, y ha contado el número de iconos que corresponde. Sin embargo, no tiene en cuenta que cada icono representa 15 libros, y no realiza los cálculos necesarios para determinar la frecuencia que corresponde a cada categoría. Algunos ejemplos son los siguientes:

  Verdadero, porque solamente hay 2 libros y no hay más (Estudiante 64, pregunta 1)

  Es falso porque solo hay cuatro libros (Estudiante 1, pregunta 2)
- Se llega al nivel 2 de lectura, si responden correctamente la afirmación y, aparentemente, se han realizado los cálculos requeridos para determinar la frecuencia de una categoría, multiplicando el número de iconos por 15. El niño es capaz de interpretar correctamente el pictograma, pero no argumenta en forma suficiente la veracidad o falsedad de la afirmación que se le ofrece. También hemos considerado dentro del nivel 2 aquellas respuestas en que los estudiantes realizan una argumentación incompleta, es decir, no explicitan las operaciones aritméticas realizadas. Por ejemplo:

  Falso, porque son 30 libros (Estudiante 24, pregunta 1).

  Verdadero, porque si hay 60 libros infantiles (Estudiante 27, pregunta 2).
- El nivel 3 no observado en este ítem, ya que no se realizan predicciones o extrapolaciones con los datos del gráfico.
- Consideramos que la respuesta del estudiante alcanza el nivel 4 si ha realizado los cálculos requeridos para determinar la frecuencia de la categoría e interpreta correctamente el pictograma. Además, alcanza una lectura crítica, pues puede dar un argumento claro que apoye si la afirmación es correcta, o bien puede rebatir razonadamente la afirmación incorrecta.

  Falso, hay 30 libros, porque un libro equivale a 15 de los libros del tema. Y $15\times 2 = 30$ (Estudiante 40, pregunta 1).

  Porque si, cada dibujo [icono] de libro vale 15 y $15\times 4 = 60$ (Estudiante 10, pregunta 2).

En la Figura 2 mostramos un gráfico de barras apiladas con la distribución de los niveles de lectura alcanzados por el total de estudiantes de 6º grado que han participado del estudio, puestos de manifiesto en sus argumentos para mostrar su acuerdo o desacuerdo con las dos afirmaciones. En ella observamos que el nivel de lectura más frecuente en las dos preguntas es el segundo, leer dentro de los datos, que supone hacer comparaciones y operaciones con la información del gráfico estadístico. Le sigue el primer nivel, leer los datos, que supone la lectura literal de los datos, pero son muy pocos los que llegan al nivel de lectura crítica, algo más en la segunda afirmación. En el trabajo de Cruz (2013) sus estudiantes llegaron a nivel 1 en el 82 % de los casos; en nuestro estudio llegarían todos, excepto los de nivel 0, es decir, el 98,2% en la primera pregunta y el 97,9% en la segunda. En el estudio de Evangelista (2013) con gráficos de barras y líneas respondieron a nivel 1 el 60%; un porcentaje algo menor que el nuestro. Al nivel 2 llegarían todos menos los que se quedan en nivel 0 y 1, es decir, el 62,6% en la primera parte y el 66,6% en la segunda, mientras en el trabajo de Cruz llegan el 70% y en de Evangelista entre el 41% y el 51% dependiendo del gráfico. Al nivel 4 globalmente solo llegan el 5,5% en la primera pregunta y el 10,8% en la segunda. Aparentemente también en el nivel de lectura los resultados son peores que los de Cruz, en otro tipo de actividades, pero en actividades similares en gráficos de sectores nuestros resultados son mejores (las que están consideradas en el nivel 3). Además, esta autora considera un pictograma en que cada icono solo representa una unidad.

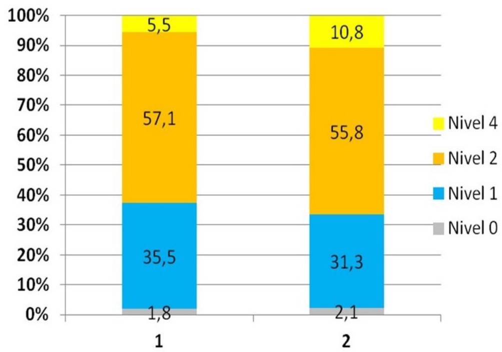


Figura 2. Porcentaje de niveles de lectura máximo alcanzado por los niños en el ítem 1

Al comparar las dos preguntas entre sí, observamos que las respuestas de los estudiantes están más frecuentemente en nivel 1 en la primera afirmación que en la segunda, situación similar que ocurre con el nivel 2, y con mayor frecuencia en el nivel 4 en la segunda. Todo esto si consideramos que los estudiantes que alcanzan el nivel 1, que está compuesto por los que llegan hasta ese nivel, más los que logran llegar al 2 y al 4, ya que se entiende que lo superan. Situación similar ocurre para el nivel 2.

De ambas afirmaciones, la que presenta mejores resultados es la afirmación 2 (hay 60 libros infantiles), la que a nivel general alcanza un 66,6% de las respuestas en nivel 2 y 4, levemente superior al 62,6% de la afirmación 1. Pensamos que ello se debe a que la primera se puede obtener por medio de una lectura directa y puede confundir a los estudiantes.

Resultados en el ítem 2

A continuación, describimos los resultados alcanzados en la capacidad de traducción del pictograma a una tabla de datos y, seguidamente, el nivel de lectura.

Construcción de la tabla

En primer lugar, analizamos la traducción que realizan los estudiantes de la información contenida en el pictograma a una tabla de datos. Las respuestas entregadas por los estudiantes se han clasificado de acuerdo a los siguientes criterios:

- *Tabla correcta.* Cuando el estudiante ha traducido correctamente todos los datos del pictograma a la tabla. Además, ha calculado correctamente el total de la tabla. Ejemplo de esta construcción lo vemos en la tabla de la Figura 3.

Número de horas por semana que está prendida la luz

Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75
Vestidores	90
Piscina	55
Canchas de tenis	50
Total	270

Figura 3. Porcentaje de niveles de lectura máximo alcanzado por los niños (Estudiante 2)

- *Tabla parcialmente correcta*. Cuando el estudiante hace una traducción parcialmente correcta de la información mostrada en el pictograma o se cometen errores en el total. La tabla es, en general, correcta, pero se comete algún error u omisión. Estos errores son los siguientes: a) tienen en cuenta un icono más o menos para el cálculo de la frecuencia; por ejemplo, consideran 4 bombillas y media en lugar de 5 y media para calcular el número de horas de luz en la piscina; b) cometer un error en el cálculo del total de horas; c) considerar que el icono que representa media bombilla equivale a 15 horas de consumo, en lugar de a cinco; d) considerar que uno de los iconos representa una hora de consumo, aunque el resto se ha traducido bien por 10 horas; e) comenzar a realizar la tabla correctamente, pero no completarla; f) no calcular el total, aunque construye la tabla correctamente; g) comete dos de los anteriores errores. En el ejemplo de la Figura 4 vemos que el estudiante ha calculado correctamente cada una de las horas de consumo eléctrico, pero se equivoca en calcular el total.

Número de horas por semana que está prendida la luz

Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	75 horas
Vestidores	90 horas
Piscina	55 horas
Canchas de tenis	50 horas
Total	260 horas

Figura 4. Tabla parcialmente correcta: error en el cálculo del total (Estudiante 311)

- *Tabla incorrecta.* Cuando todas o la mayoría de las filas de la tabla son incorrectas, lo que ocurre, en particular, todos los alumnos que solo llegan al nivel de lectura 1. Tal como observamos en la Figura 5, donde el estudiante considera cada icono con valor unitario o medio, sin considerar los valores que se han consignado en el mismo gráfico.

Número de horas por semana que está prendida la luz

Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	7,5
Vestidores	9
Piscina	5,5
Canchas de tenis	5
Total	28

Figura 5. Tabla incorrecta (Estudiante 160)

- *No completa la tabla.* Cuando el estudiante no desarrolla la actividad o cuando los estudiantes alcanzan parcialmente el nivel 1.

En la Tabla 2 observamos la distribución de las respuestas que han dado los estudiantes a la tarea de traducción (cambio de registro de representación). Se puede observar que gran parte de los estudiantes han realizado la tarea con éxito, con un porcentaje cercano al 75%, seguido de aquellas traducciones en los que se cometen diferentes errores, pero que indican el dominio de los convenios de lectura de un pictograma. Evangelista y Cruz no contemplan este tipo de actividades, en la que hay que traducir información de un pictograma a una tabla de datos.

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes según la construcción de la tabla

Tipo de tabla construida	Porcentaje (n = 380)
Correcta	74,4
Parcialmente correcta	20,8
Incorrecta	3,7
No completan la tarea	1,1

Nivel de lectura

En segundo lugar consideramos el nivel de lectura alcanzado, usando los siguientes criterios:

- *En el nivel 0* están las respuestas en blanco y no aborda la actividad.
- *En el nivel 1* (leer los datos) se han considerado aquellas respuestas en que los estudiantes realizan una lectura literal de los datos (bien de todos ellos o de una parte). Por ejemplo, algunos alumnos consideran que cada bombilla representa una unidad; han sabido identificar la línea del pictograma que corresponde a cada categoría de la variable, pero no llegan a realizar los cálculos necesarios (multiplicar por 10 o 5, según el icono) para obtener la frecuencia de la categoría. Más concretamente, en la Figura 5 vemos que el estudiante considera la bombilla como unidad o mitad, según corresponda, pero no llega a multiplicar por el valor estadístico del icono.
- *En el nivel 2* (leer dentro de los datos) están aquellas respuestas en que los estudiantes logran identificar la cantidad de iconos correspondientes a cada valor de la variable y además, multiplican este número por 10 o 5 para obtener la frecuencia correspondiente. Ejemplo de este nivel lo vemos en la Figura 3 y 4, donde se contabiliza correctamente la cantidad de icono y estos se relacionan su valor correspondiente.

En la Tabla 3 observamos la distribución del nivel de lectura alcanzado por las respuestas entregadas por los estudiantes ante la actividad en que debían traducir la información mostrada de un pictograma a una tabla de datos, según los niveles de Curcio descritos anteriormente. En ella se muestra el alto porcentaje de respuestas que se ubican en el nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos). Más del 90% de los estudiantes es capaz de leer correctamente el pictograma a nivel 2, le siguen aquellas respuestas de nivel 1 (leer los datos), con tal solo un 5,5%.

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes que alcanza cada nivel de lectura

Nivel de lectura	Porcentaje (n = 380)
0	0,8
1	5,5
2	93,7

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global, se ha dado una puntuación a cada apartado, en la forma siguiente:

- En la primera tarea se ha puntuado cada apartado la elección del valor de verdad (0: no responde; 1: incorrecto; 2: correcto) y el nivel de lectura (0 a 4 puntos, sin considerar el 3), pudiendo alcanzar hasta 12 puntos.
- En la segunda pregunta se ha puntuado por un lado el nivel de lectura (0 a 2) y por otro la corrección de la tabla (0: no hace; 1: incorrecta, 2: parcialmente incorrecta; 3: correcta). Por tanto, en el primer ítem se pueden alcanzar 5 puntos.
- Finalmente, se ha sumado la puntuación en los dos ítems para obtener una puntuación total (hasta 17 puntos).

En la Tabla 4 mostramos la puntuación media y desviación típica de las puntuaciones en cada ítem y su suma. Como resultado vemos que el ítem 2, en que se debe pasar de un pictograma a una tabla, fue sencillo para los estudiantes, puesto que la media del grupo es próxima al máximo teórico. El primer ítem fue más difícil, pero de todos modos la media del grupo supera la media teórica (que serían seis puntos). Hay que tener en cuenta que el nivel de lectura (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001) para alcanzar la máxima puntuación en cada apartado de este ítem fue el nivel 4 (que implica una lectura crítica), mientras que el segundo ítem requería el nivel de lectura 2.

Tabla 4. Puntuación según ítem

Ítem	Máximo Teórico	Media	D. Típica
1	12	6,86	2,39
2	5	4,58	0,94
Total	17	11,44	2,78

En la Figura 6 presentamos un diagrama de barras adosadas y un gráfico de caja de la puntuación total de la muestra de 6º grado de Educación Primaria. En el primero observamos que la mayoría de estudiantes alcanzan 13 puntos, seguido de 9 y 12 puntos. En todo caso la mayoría de alumnos en los dos grupos se sitúa por encima del valor teórico medio que sería 8,5 puntos, lo que indica un buen resultado. Al observar el gráfico de caja vemos que la mediana es de 13 puntos, coincidiendo con el tercer cuartil.

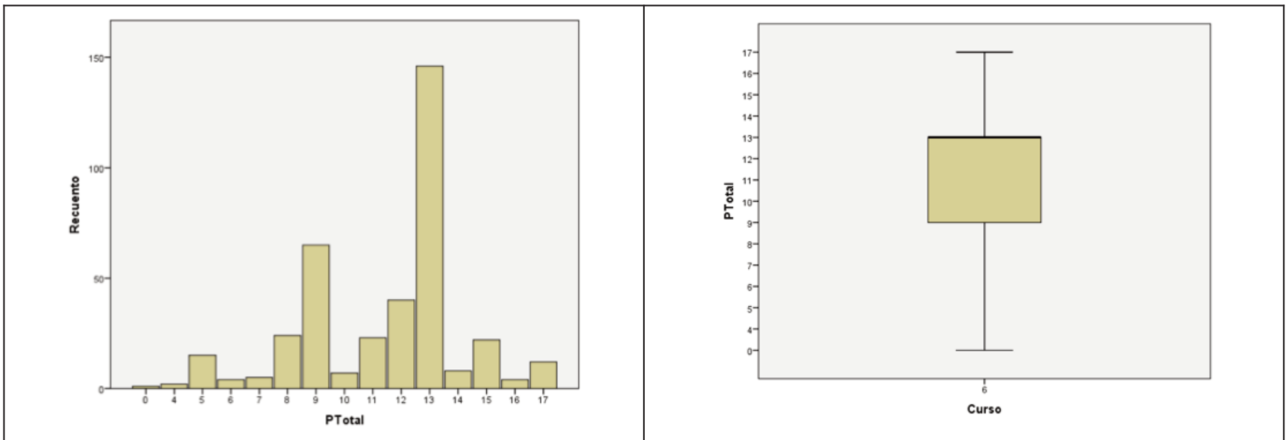


Diagrama de barras adosadas | Gráfico de caja

Figura 6. Distribución de la muestra total

CONCLUSIONES

En esta investigación aportamos información sobre el trabajo que realizan estudiantes de 6º grado de Educación Primaria en Chile sobre la lectura de pictogramas y la traducción de información de un pictograma a una tabla de datos, así como los niveles de lectura que alcanzan con sus respuestas, complementando estudios previos. En relación con el trabajo de Cruz (2013) hemos utilizado pictogramas más complejos, pues cada icono representa varias unidades, mientras que en los propuestos por la autora cada uno simbolizaba una unidad. En relación al trabajo de Evangelista (2013) con gráficos de barras y líneas los resultados en los niveles 1 y 2 son algo mejores.

Se ha aumentado el nivel de lectura en la categorización de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001), planteando en la primera tarea preguntas en que se puede alcanzar hasta el nivel 4, mientras Cruz solo llegaba al segundo nivel de lectura. Ello explica que aparentemente nuestros resultados sean inferiores, en algunos aspectos, a los de Cruz. Sin embargo, la segunda actividad propuesta en nuestro estudio ha sido muy sencilla, tanto en la lectura del pictograma como en la traducción a tabla, tarea no propuesta por Cruz. En esta tarea nuestros resultados son mejores que los de la citada autora.

Los errores en la primera tarea propuesta se explican en parte porque se pide a los estudiantes rebatir o confirmar una afirmación, lo cual implica una lectura crítica, a la vez que un dominio suficiente de la argumentación. Algunos estudiantes pudieron estar condicionados en su respuesta por la afirmación, propuesta; es decir, tendieron a verificarla visualmente a partir de los iconos, sin atender a la condición de que cada uno representa en realidad 15 libros.

En general una parte importante de los niños han interpretado correctamente el pictograma, lo traducen correctamente a una tabla y alcanzan niveles adecuados de lectura, salvo el nivel último que ha sido difícil para ellos. Resultados que están de acuerdo a lo esperado, ya que son actividades adaptadas de libros de texto de cursos inferiores, confirmando la importancia que declaran las directrices curriculares y los libros de texto sobre estas representaciones. Esta información puede ser utilizada por el profesor para planificar la enseñanza del tema, poniendo en particular especial atención a la lectura crítica de los datos.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (FEDRE, AEI), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT PFCHA 72150306.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números, 76*(1), 55-67.

Batarce, Y., Cáceres, B. y Kükenshöner, C. (2013). *Matemática 4º Básico. Tomo II*. Santiago: Santillana.

Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. y Guimarães, G. (2010). Gráficos na mídia impressa. *BOLEMA, 23*(36), 733-751.

Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Ramirez, A., Sammons, K., Schielack, J., Tate, W. y Van de Walle, J. (2014). *Matemática 3º Educación Básica. Texto del estudiante*. Santiago: Pearson.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Cruz, A. (2013). *Erros e dificuldades de alunos de 1.º ciclo na representação de dados estatísticos*. Tesis de Máster. Universidade de Lisboa.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017, Febrero). *Chilean primary school students levels in reading pictograms*. Trabajo presentado en el 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 10). Dublin, Irlanda.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *BOLEMA, 30*(55), 713-737.

Evangelista, M. B. (2013). Atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas: o que sabem os alunos do 5º ano? En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), A*ctas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 121-128). Granada: UGR.

Friel, S., Curcio, F.R. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

González, M. T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, C. Reading y G. Burrill (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 187-197). New York: Springer.

Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. y Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 305-325.

Martins, M. E. G. y Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Tijus, C., Barcenilla, J., De Lavalette, B. C. y Meunier, J. G. (2007). The design, understanding and usage of pictograms. En D. Alamargot, P. Terrier y J. M. Cellier (Eds.), *Written documents in the workplace* (pp. 17-31). London: Brill.

DISEÑO Y EVALUACIÓN DE UN CURSO DE FORMACIÓN CONTINUA EN MODELIZACIÓN[1]

Design and evaluation of a modelling teacher training course

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M.

Departament de Didàctica de la Matemàtica – Universitat de València

Resumen

Durante los últimos años se promueve, desde diferentes organismos internacionales, el uso de la modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, hasta el momento, su aplicación efectiva en las aulas es escasa, en parte debido a la escasa formación de los profesores en servicio. El objetivo del trabajo es presentar el diseño de un curso de formación en modelización dirigido a profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria. El diseño del curso se fundamenta en las necesidades identificadas en trabajos previos que asimismo servirán como punto de partida para analizar los resultados del curso. El análisis se centrará en identificar cómo ha evolucionado la percepción de los participantes respecto a la enseñanza de las matemáticas a través de la modelización. Además, trataremos de clasificar el tipo de tareas diseñadas por éstos.

Palabras clave: *modelización, formación continua, Educación Secundaria Obligatoria.*

Abstract

During the last years, the use of modelling as a teaching tool for mathematics has been promoted from different international organizations. However, so far, its effective application in classrooms is scarce, due to, in part, the poor modelling training of in-service teachers. The main objective of this work is to present the design of a training course in modelling aimed at teachers of Secondary School. The design of the course is based on the needs identified in previous works which will serve as a starting point to analyse the obtained results. The analysis performed will focus on identifying how participants' perceptions regarding the teaching of mathematics have evolved through modelling and, in addition, this work will try to classify the tasks designed by the course' participants.

Keywords: *modelling, continuous training, Secondary School.*

INTRODUCCIÓN

Durante las dos últimas décadas, se está desarrollando una línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas basada en estudiar el impacto de incorporar en las clases de matemáticas tareas matemáticas abiertas, complejas y definidas en un contexto real, llamadas tareas de modelización. Este movimiento, descrito en el estudio número 14 de la *International Commission on Mathematical Instruction* (Blum et al., 2002), se inicia realmente a finales de los años 60 a partir de los trabajos de Pollack (1969) y Freudenthal (1968). Sin embargo, aunque muchos trabajos aportan argumentos suficientes para la integración de tareas de modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas (véase Kaiser, 2007 y Blum y Niss, 1991), todavía son pocos los profesores que implementan este tipo de actividades en las aulas (Blum et al., 2002). En efecto, diferentes trabajos empíricos muestran que muchos profesores no tienen conocimientos claros sobre la modelización y, por tanto, no son capaces de integrarla como herramienta de enseñanza en sus clases (Maaß y Gurlitt, 2009).

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño y evaluación de un curso de formación continua en modelización. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 227-236). Zaragoza: SEIEM.

Algunas investigaciones, entre las que destacan los trabajos de Borromeo Ferri y Blum (2013) y Ferrando y Cabassut (2015), se han centrado en estudiar cuáles son las dificultades de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas y el uso de la modelización en sus clases. Para el diseño del curso de formación del profesorado que hemos desarrollado, y que describiremos en la primera sección nos hemos basado en los estudios citados, pues sus resultados ofrecen claves para dar respuesta a las necesidades de los participantes. Además, nos hemos basado en experiencias previas descritas en la literatura donde se distinguen diferentes competencias relativas a la modelización (Borromeo y Blum, 2009).

En el trabajo de Borromeo y Blum (2009, p. 2047) se mencionan cinco competencias que hay que tener en cuenta a la hora de diseñar un curso de formación en modelización. Estas competencias son las siguientes: *Competencia teórica* (conocimiento sobre diferentes ciclos de modelización, tipos de tareas de modelización y objetivos del uso de la modelización); *Competencia relativa a las tareas* (habilidad para resolver, analizar y crear tareas de modelización); *Competencia de enseñanza* (habilidad para planificar secuencias de modelización y conocimiento sobre la gestión del aula); *Competencia diagnóstica* (habilidad para identificar el progreso en el ciclo de modelización por parte de los alumnos, así como para identificar dificultades) y *Competencia en evaluación* (habilidad para diseñar herramientas de evaluación). Hemos diseñado el curso en base a estas competencias, incluida la competencia en evaluación, que Borromeo y Blum no incorporaron en el curso que diseñaron en su publicación.

Cabe destacar que las tres primeras competencias se relacionan con el diseño de tareas de modelización. En efecto, siguiendo los trabajos de Krauss et al. (2008) y Chapman (2007), estos autores consideran necesario que los profesores sean expertos modelizadores para crear secuencias que impliquen de forma activa a los estudiantes en la modelización. Es por ello que, en nuestro análisis de las producciones de los participantes en el curso, consideraremos clave clasificarlas.

Así, los objetivos de este trabajo de investigación se pueden resumir en las siguientes preguntas:

- ¿Cómo diseñar un curso de formación continua en modelización en base a estudios previos?
- ¿Cómo evoluciona la percepción de los participantes del curso respecto al uso de la modelización?
- ¿Qué tipo de tareas de modelización, en el sentido de Maaß (2006), plantean los participantes del curso?

METODOLOGÍA

La experiencia que vamos a describir se ha realizado entre los meses de diciembre de 2016 y de febrero de 2017. En primer lugar, durante diciembre de 2016, realizamos, apoyándonos en trabajos sobre las dificultades de los profesores, el diseño de cada uno de los cinco módulos que componen el curso de formación en línea. La descripción detallada se mostrará en el siguiente apartado. El curso se implementó durante cinco semanas, a partir de mediados de enero. Al finalizar el primer módulo, los participantes contestaron la encuesta diseñada por Cabassut y Ferrando (2015). Las respuestas nos han permitido identificar el perfil de los 19 participantes cuya la descripción se detalla en el apartado de resultados. Además, al finalizar el curso, los participantes cumplimentaron un cuestionario anónimo de evaluación en el que se incluyeron algunas preguntas planteadas en el cuestionario inicial lo que nos ha permitido identificar la evolución de su percepción respecto al uso de la modelización en las aulas.

Diseño del curso

El curso que hemos diseñado se estructura en cinco módulos que han sido implementados en línea a través de la plataforma Moodle. El Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos (CEFIRE) Específico de Ámbito Científico, Tecnológico y Matemático de la Comunidad Valenciana lo ofertó y acreditó como acción formativa, con una duración total estimada de 20 horas, para todos los profesores de matemáticas de Educación Secundaria de dicha comunidad autónoma. Dado que el curso se dirige a profesores que no necesariamente conocen el uso de la modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas, en el diseño del curso se ha considerado dedicar una parte importante a introducir diferentes perspectivas sobre la modelización a través de ejemplos.

Hemos intentado, en la medida de lo posible, aprovechar las opciones que ofrece la plataforma Moodle para compartir material y para realizar diferentes tareas en línea. Con el fin de aclarar el uso de materiales y la realización de tareas asociadas, cada módulo se encabeza con unas instrucciones que resumen los objetivos del mismo y programan la secuencia de documentos y actividades que deben leerse y realizarse para completar el módulo. A continuación, pasamos a describir cada uno de los cinco módulos que componen el curso.

El objetivo del *primer módulo* es dar la oportunidad a los participantes de conocer cuáles son las características de las tareas de modelización. Así, en la primera parte del módulo se incluye una presentación en la cual se muestran diferentes tareas, extraídas del proyecto Lema (2006-2009), que los participantes deben resolver. La intención es que descubran, de manera autónoma y antes de recibir ninguna instrucción, algunas características de las tareas de modelización. Una vez los participantes han resuelto las tareas deben realizar a través de Moodle un análisis de cuatro aspectos fundamentales: contexto, conocimiento matemático implicado, soluciones esperadas y actividad del resolutor. Nos hemos ceñido a estos cuatro elementos de análisis establecidos por el proyecto Lema porque, en nuestra opinión, son útiles y claros para profesores que, hasta ahora, no habían trabajado con este tipo de tareas. Siguiendo la taxonomía establecida por Borromeo (2006), en este módulo los participantes están desarrollando la capacidad de diferenciar y analizar diferentes tipos de tareas de modelización. Se trabaja, por tanto, la competencia teórica y la competencia relativa a las tareas. Desde el punto de vista de los estudios previos sobre dificultades, pretendemos que, a través de este primer módulo, los participantes se familiaricen, mediante la resolución autónoma de diferentes tareas, con las características de las tareas de modelización. En efecto, tal y como se muestra en el trabajo de Borromeo y Blum (2013), muchos docentes desconocen las características propias de una tarea de modelización. La última parte de este primer módulo introductorio consiste en completar el cuestionario en línea diseñado por Cabassut y Ferrando (2015). Las respuestas a este cuestionario nos permitirán obtener una idea aproximada del perfil de los participantes al curso y de su percepción inicial respecto al uso de la modelización.

El *módulo 2* pretende profundizar en las ventajas y los inconvenientes del uso de la modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje, aspectos que ya habían sido tratados por los participantes en la última actividad del módulo anterior. El segundo módulo tiene dos partes bien diferenciadas. En la primera se propone a los participantes la lectura de un artículo que trata el interés de introducir tareas con contexto real. Se trata del artículo de Alsina (2007) que, en cierta forma, se puede leer como una adaptación al contexto nacional del trabajo de Pollack (1969). El interés del trabajo de Alsina es doble ya que, además de describir el proceso de resolución de una tarea de modelización, también se ofrecen diferentes ejemplos de contextos reales que pueden dar ideas a los estudiantes para crear sus propios recursos. A continuación, los participantes deben basarse en la lectura realizada para analizar el proceso de resolución de una de las tareas presentadas en el primer módulo. Para ello, deben escoger aquellas características que, según ellos, se ajusten mejor a las características propias de una tarea de modelización, pudiendo basarse en la descripción de las fases del ciclo de modelización que Alsina presenta en su trabajo. La segunda parte del módulo trata de forma explícita las ventajas y los inconvenientes del uso de la modelización. En primer lugar, se presentan una serie de obstáculos y oportunidades del uso de la modelización extraídos del trabajo de Blomhoj (2004) y se propone a los estudiantes la lectura de un extracto de un artículo de Blum y Niss (1991). A partir de toda esta información, los participantes debían realizar un análisis de Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades, llamado análisis DAFO (Learned et al. 1969) relativo al uso de la modelización. En esta segunda parte del segundo módulo se profundiza en el desarrollo de la competencia teórica al trabajarse en cierto detalle la descripción del ciclo de modelización. La actividad basada en el análisis DAFO pretende promover la reflexión crítica respecto al uso de este tipo de tareas por parte de los participantes. Consideramos fundamental que, antes de enfrentarse a implementar tareas de modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas, los profesores sean conscientes de los aspectos positivos y negativos intrínsecos (debilidades y fortalezas) y de aquellos que se relacionan con agentes externos (amenazas y oportunidades).

El *tercer módulo* también tiene dos partes diferenciadas. En la primera parte, pretendemos aportar a los participantes diferentes ideas para que puedan buscar sus propios recursos para introducir la modelización en las aulas. Se muestran, a través de una presentación con enlaces a webs, diferentes sitios con repositorios de actividades de modelización: Lema[2], Mascil[3], Primas[4] y Scientix[5]. En efecto, uno de los obstáculos para introducir la modelización en las aulas, en base al trabajo de Schmidt (2011, p. 646), es la carencia de recursos. Es por ello que, en el diseño de nuestro modelo de formación, hemos pretendido proporcionar a los participantes diferentes vías para diseñar, recopilar o modificar recursos. Además, dado que los estudios relativos a las dificultades muestran que los profesores consideran que no disponen del tiempo suficiente para trabajar tareas de modelización (Schmidt, 2011, p. 649) y que, en muchos casos, consideran que no es fácil ajustarlas a contenidos curriculares, en este módulo se pretende mostrar que la modelización es una herramienta versátil y que, por tanto, se pueden buscar tareas de modelización que se ajusten a determinadas necesidades docentes. Así, la segunda parte del módulo se centra en mostrar la versatilidad de la modelización como herramienta para enseñar matemáticas. En este módulo, siguiendo la clasificación de competencias establecida por Blum y Borromeo (2009), se pretende que los participantes desarrollen la competencia relativa a las tareas. Además, se incluye, para cada uno de los ejemplos mostrados, algunas producciones de alumnos de secundaria o, al menos, se aportan detalles sobre la organización de la tarea en el aula. En ningún caso el módulo se limita a aportar únicamente el enunciado de las tareas, hemos pretendido así que los participantes desarrollen la competencia diagnóstica, analizando en detalle las producciones de los alumnos. Obviamente, dado que se trata de un curso de iniciación a la modelización y que no contempla ninguna parte de práctica de aula, esta competencia no puede desarrollarse en profundidad.

Una vez los participantes ya conocen diferentes recursos para introducir la modelización en el aula, se considera oportuno comenzar a desarrollar la competencia de enseñanza. Así, en el *módulo cuatro*, se presentan aspectos que han de ser tomados en consideración al implementar una tarea de modelización en el aula centrando la atención tanto en la gestión de la clase (agrupamientos, debates y presentación de resultados) como en la utilización de recursos (toma, búsqueda y representación de datos). Se propone, además, la lectura del trabajo de Gallart et. al (2015) en el que el autor reflexiona sobre el rol del profesor y se propone una actividad consistente en diseñar una tarea de modelización y hacer una previsión previa a la implementación en el aula.

El *quinto y último módulo* del curso intenta dar respuesta a otra de las dificultades identificadas en estudios previos, aquella asociada a la evaluación de las tareas de modelización. De esta forma se pretende desarrollar la competencia de evaluación en modelización y, por tanto, este módulo está centrado en ese aspecto. En primer lugar, se muestra, a través de una presentación, tres formas distintas de evaluar el trabajo de los alumnos al desarrollar una tarea de modelización: *Evaluación centrada en el producto* -inspirada en las llamadas Modelling Elliciting Activities (Lesh et al (2000)-, *Evaluación centrada en el proceso* (inspirada en el ciclo de modelización y extraída del proyecto LEMA) y *Rúbrica de evaluación* que considera tanto el proceso como el producto (desarrollada en Gallart, 2016). Dado que en el módulo anterior los participantes diseñaron una tarea y reflexionaron sobre diferentes aspectos para poder desarrollarla en un aula, como actividad final del módulo se requiere que completen ese diseño obteniendo una rúbrica que se ajuste bien a la tarea diseñada.

En la Tabla 1 detallamos cómo hemos estructurado el diseño del curso de formación en base a las competencias identificadas en el trabajo de Borromeo y Blum (2009).

Tabla 1: Estructura del curso de formación

	Competencia teórica	Competencia relativa a las tareas	Competencia de enseñanza	Competencia diagnóstica	Competencia en evaluación
Módulo 1	X	X			
Módulo 2	X				
Módulo 3		X		X	
Módulo 4			X		
Módulo 5					X

RESULTADOS

En esta sección vamos a realizar una descripción de los resultados desde dos perspectivas diferentes. En primer lugar, partiendo del perfil de los participantes al curso, vamos a analizar cómo el desarrollo del mismo les ha permitido evolucionar respecto a sus ideas previas sobre el uso de la modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas. En este punto describiremos también los resultados sobre la valoración del curso de formación para identificar aquellos aspectos que pueden ser mejorados en futuras ediciones.

Por otro lado, consideramos, en línea con otros autores tales como Krainer (1993) y Bruder (2009), que es fundamental en el diseño de propuestas de desarrollo profesional, introducir el diseño y el análisis de tareas. Es por ello que vamos realizar un análisis de las producciones de los participantes en aquellas actividades que implican diseñar tareas de modelización. Para analizar sus producciones nos basaremos en la clasificación de tareas de modelización descrita por Maaβ (2006, 2010).

Perfil de los participantes y evaluación de los resultados del curso

En Ferrando y Cabassut (2015) se hace una clasificación en clusters tomando como variables diferenciadoras la dificultad de los docentes frente a la enseñanza de las matemáticas (negativo, neutral y positivo) y la predisposición de los mismos a utilizar la metodología de modelización en sus clases (negativo, neutral y positivo). De las nueve combinaciones posibles mediante esta graduación y estas dos variables diferenciadoras, los autores destacan 4 subconjuntos principales donde se concentra su población de estudio. El *primer grupo* (1C) representa gente que tiene dificultades en matemáticas y tienen una actitud negativa frente a la modelización. El *segundo grupo* (2C) representa gente que tiene una actitud positiva frente a la modelización y que además no sienten que tengan problemas a la hora de enseñar matemáticas. El *tercer grupo* (3C) representa a los profesores que tienen una actitud positiva frente a la modelización pero que se muestran neutrales frente a sus dificultades en matemáticas y el *cuarto grupo* (4C) representa a los profesores que tienen una actitud neutral hacia la modelización y sus dificultades.

Los autores, una vez reconocidos los distintos grupos de estudio, realizan un análisis más profundo, teniendo en cuenta características sociales dentro de cada uno de ellos (sexo, edad, nivel educativo en el que imparten, nacionalidad, etc.). Para nuestro estudio, utilizaremos los mismos grupos asociados al trabajo de Ferrando y Cabassut (2015) mencionado sin recurrir a estas variables ya que todos son profesores de matemáticas secundaria de la Comunidad Valenciana.

Tabla 2: Grupos de personas en el presente estudio

		Dificultad en matemáticas		
Modelización		–	O	+
	+	2C: 32% personas	3C: 11% personas	
	O	42%	4C: 0% personas	
	–	16%		1C: 0% personas

Como puede observarse en la Tabla 2, en nuestro estudio, aparecen porcentajes significativos en los grupos 2C y 3C. Sin embargo, no aparece ningún profesor en los grupos 1C y 4C. Por otra parte, hay que destacar la presencia importante de profesores que muestran una actitud indiferente o negativa frente a la modelización, pero consideran que no tienen ningún problema a la hora de enseñar matemáticas (42% y 16% respectivamente).

Al finalizar el curso de formación los participantes podían, voluntariamente y de forma anónima, responder a una encuesta para evaluar diferentes aspectos trabajados en el curso. De los 19 participantes al curso, 16 completaron esta encuesta con lo que tenemos una muestra suficientemente amplia para evaluar los resultados de la formación impartida. Las preguntas relativas a la evaluación del curso se contestaban a través de una escala Likert 1-5, donde 1 es nada satisfecho y 5 es muy satisfecho). Comentamos brevemente a continuación las respuestas de los participantes.

Un primer aspecto que nos preocupaba al realizar el diseño del curso es que los contenidos del curso pudieran resultar útiles para los participantes en su práctica de aula. Es por ello que planteamos las preguntas: “Los contenidos del curso se ajustan a mis necesidades de aula” y “Creo que lo aprendido puede resultar útil en mis clases”. En ambos casos la totalidad de las respuestas toman valores entre 3 y 5 con lo que deducimos que, aunque sin duda el diseño se puede mejorar en futuras ediciones, hemos logrado ajustarnos a las expectativas de los participantes dando respuesta a una necesidad real.

Otro aspecto de importancia es la necesidad de aportar al profesorado en activo herramientas nuevas que den respuesta a las necesidades de su práctica profesional. Así, a las preguntas relativas a si los participantes han descubierto, a través del curso, herramientas nuevas que les permitan desarrollar la competencia matemática de sus alumnos, hemos obtenido un nivel de satisfacción de 76%. Además, más de un 80% de los participantes manifiesta estar satisfecho o muy satisfecho con la utilidad del curso tal y como lo hemos diseñado.

El último aspecto que nos interesaba medir era la evaluación de la percepción de la modelización como herramienta de enseñanza de las matemáticas. Es por ello que, en el cuestionario final, incluimos algunas preguntas planteadas en el cuestionario inicial y, además, una pregunta explícita en la que los participantes debían decir si la realización del curso les había modificado su percepción sobre la modelización. A esta pregunta contestaron afirmativamente el 87,5% de los participantes.

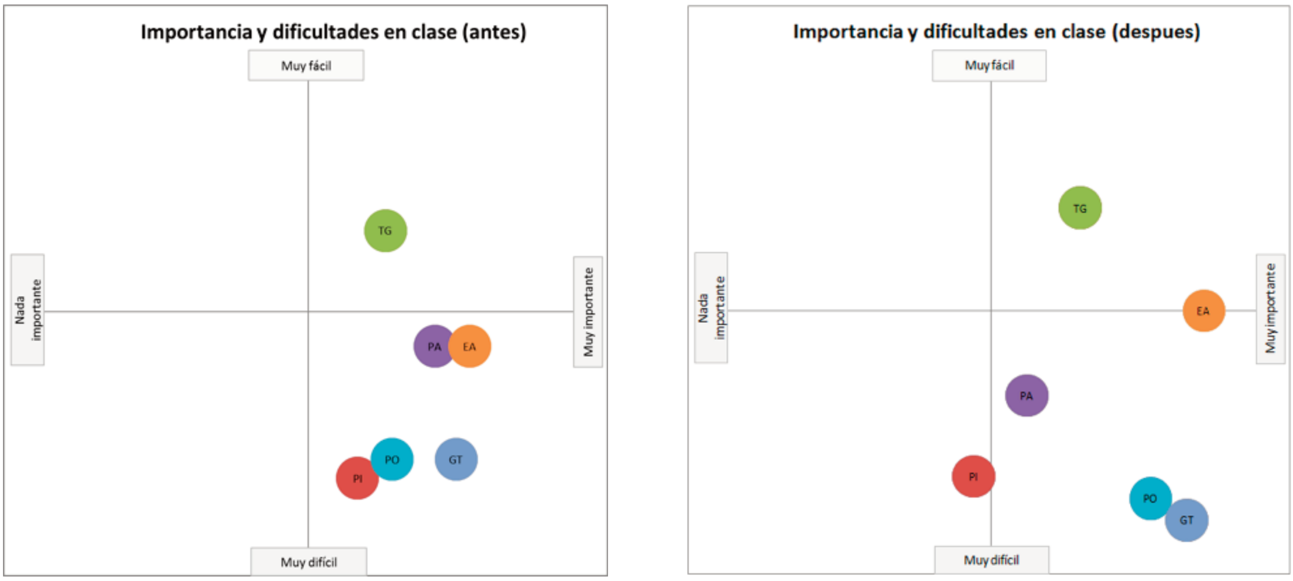


Figura 1: Importancia y dificultades en clase

En la Figura 1 se representan los resultados obtenidos en el cuestionario inicial y final respecto a la importancia y dificultades que los participantes dan a diferentes aspectos en su práctica habitual de aula. Se han estudiado las siguientes categorías: Proyectos de investigación (PI); Trabajo en grupo (TG); Resolución de problemas abiertos (PA); Aplicación del programa oficial (PO); Evaluación de alumnos (EA); Gestión del tiempo (GT). Contrariamente a lo afirmado en la pregunta general analizada previamente (sobre la percepción de la modelización como herramienta de enseñanza), en estos aspectos que, de alguna forma, se relacionan con las tareas de modelización, no se observa una evolución clara, únicamente se intuye que, al finalizar el curso de formación, los participantes dan más importancia al uso proyectos de investigación y de problemas abiertos en el aula. En cualquier caso, la muestra considerada no es suficiente para poder extrapolar conclusiones significativas respecto a las ventajas e inconvenientes sobre el uso de la modelización.

Análisis de las producciones de los participantes

En el trabajo de Maaß (2006), en base a diferentes trabajos previos, se proponen cinco categorías para clasificar tareas en las que se apliquen las matemáticas en otro contexto. Tres de las cinco categorías se asocian al contexto de la tarea y las otras dos establecen un marco pedagógico. Nos hemos basado en esta categorización para analizar las producciones de los participantes al curso en el *módulo 4*. A continuación presentamos de forma resumida la taxonomía establecida por Maaß (2006):

Relevancia y autenticidad: la autora distingue cinco niveles distintos, desde aquellas tareas en que el contexto no tiene ninguna importancia ("problemas verbales insertados en la realidad", p. 1) hasta las tareas que tratan de dar respuesta a cuestiones auténticas en un contexto realista.

Utilidad de las matemáticas: en este apartado la autora diferencia entre usos posibles de las matemáticas, desde los más directos ("cálculos necesarios en la vida cotidiana", p. 2) hasta los más completos que incluyen, por ejemplo, el usar las matemáticas para resolver problemas de otras áreas y que, según la autora, permiten "aumentar nuestra percepción del uso, cada vez más amplio, que se hace de las matemáticas en varios campos" (p. 3)

Cercanía a los estudiantes: esta categoría está relacionada con las dos anteriores, sin embargo, pone el foco en la relación entre los estudiantes y el contexto de la tarea. La autora distingue cuatro niveles, desde las tareas no realistas e irrelevantes para los estudiantes, hasta aquellas que son relevantes para la vida cotidiana de éstos.

Nivel de complejidad: aquí se distinguen tres tipos de tareas a partir de las competencias necesarias para abordarlas, desde tareas simples (sobre o sub determinadas) hasta proyectos de modelización.

Grado de apertura de la tarea: distingue entre tareas de respuesta y procedimiento único, tareas cerradas, y tareas que admiten formas de resolución diversas (o varias soluciones), tareas abiertas.

Dado que en las cinco categorías establecidas por Maaß se identifica cierta graduación, hemos seguido el orden establecido por la autora para organizar los resultados del análisis de las producciones de los participantes al curso. En la Tabla 3 mostramos los porcentajes de tareas producidas en cada una de las cinco categorías.

En base al análisis realizado observamos que, en lo relativo al contexto, la mayoría de participantes han creado tareas con contextos reales, auténticas, relevantes para los estudiantes y que permiten dar sentido a contenidos matemáticos en relación con otras disciplinas. Muchas de estas tareas, por su alta complejidad, entran en la categoría de proyectos y, al plantearlas en el aula, deberían dirigirse a alumnos que tuvieran cierta experiencia en modelización. Sin embargo, un porcentaje importante de participantes ha diseñado tareas adecuadas para principiantes. Se trata, en la mayoría de los casos, de problemas de estimación de grandes cantidades que, tal y como muestran diferentes trabajos (Gallart et al. 2015), no requieren una experiencia excesivamente amplia en modelización por parte de los alumnos.

Tabla 3: Resultados del análisis de las producciones de los participantes

Relevancia y autenticidad	Problemas verbales insertados en la realidad	Insertados en la realidad	Relacionados con la realidad	Realista y didácticamente relevante	Realista y cuestión interesante	Realista y auténtico
	0%	6%	17%	17%	6%	56%
Utilidad matemáticas	Cálculos vida cotidiana	Comunicación vida cotidiana	Cuestionar críticamente	Uso amplio de las matemáticas		
	22%	0%	22%	56%		
Cercana a vida de los estudiantes	Ni realista ni relevante		Auténtica y no relevante	Contexto interesante	Relevante	
	0%		44%	6%	50%	
Complejidad	Principiantes	Avanzados	Proyectos			
	44%	11%	44%			
Apertura	Cerradas			Abiertas		
	6%			94%		

CONCLUSIONES

Para lograr que la modelización se integre de forma efectiva en las aulas es fundamental empezar por integrar formación específica en modelización y aplicaciones en los programas de formación de profesorado. En efecto, tal y como muestran los resultados analizados en este trabajo, muchos profesores en activo todavía desconocen las oportunidades ofrecidas por la introducción de tareas abiertas, complejas con contextos reales y datos auténticos. Además, introducir este tipo de tareas puede resultar un reto para muchos profesionales de la educación porque implica, en muchos casos, enfrentarse a dinámicas de aula nuevas tales como la gestión del trabajo en grupo, de los debates o del trabajo con diferentes recursos tecnológicos.

El objetivo del diseño de la formación continua descrito en este trabajo pretende dar respuesta a estas necesidades que habían sido estudiadas en investigaciones previas. En vista de los resultados del curso, consideramos que la fundamentación teórica en que nos hemos basado ha sido suficiente. Sin embargo, hay algunos aspectos que se deben considerar en futuras ediciones. En su trabajo sobre las competencias profesionales respecto al uso de la modelización Borromeo y Blum (2009), los autores afirman que hay algunas competencias que están fundamentalmente ligadas a la práctica (competencias de enseñanza, diagnóstica y de evaluación). Al tratarse de un curso de formación que se ha realizado exclusivamente en línea, no ha sido posible desarrollar de forma satisfactoria y completa estas competencias y por tanto ya estamos trabajando en el diseño de un curso en el que se introducirá una parte práctica que incluirá la implementación de tareas de modelización en el aula para su posterior análisis.

Respecto a los resultados del análisis en base a las producciones de los participantes, hemos observado que la gran mayoría de ellos son capaces de diseñar tareas abiertas, complejas y contextualizadas en la realidad de los alumnos. Sin embargo, en línea con lo comentado previamente, los resultados no son concluyentes ya que el formato del curso no ha permitido a los participantes más que realizar una reflexión metacognitiva sin tener necesariamente indicios sobre los resultados prácticos de las tareas diseñadas. Es por ello que, en una edición posterior de este mismo curso podría ser interesante introducir el análisis de otras tareas a través de vídeos. De esta forma, los participantes podrían reflexionar sobre cómo otros docentes implementan tareas similares a las suyas en el aula. Para ello, sería interesante grabar vídeos con situaciones reales de aula en los que los alumnos resolvieran tareas de modelización. Así, mediante la reflexión sobre la práctica real, se podría desarrollar la competencia diagnóstica (analizando el progreso en el ciclo de modelización por parte de los alumnos) y la competencia de enseñanza (analizando en este caso el rol del profesor como gestor de una actividad de modelización en un aula ordinaria). Existen experiencias grabadas en el marco de diferentes proyectos europeos (véase la web del proyecto Lema[6]) pero se trata de situaciones que no se ajustan necesariamente al contexto de nuestro país y que, por tanto, pueden resultar menos útiles.

Referencias

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación, 43*, 85-101.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Blum et al. (2002) Applications and modelling in mathematics education - Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149–17.

Borromeo, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Borromeo, R. y Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education–experiences from a modelling seminar. *CERME 6–WORKING GROUP 11*, 2046.

Borromeo Ferri, R. y Blum, W. (2012). Barriers and Motivations of Primary Teachers for Implementing Modelling in Mathematics Lesson. En *Proceeding of 8th Congress of European Research in Mathematics Education*. Recuperado de http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg_papers.html, by 25 May 2017.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – a theory for practice. En Clarke, B. et al. (Eds.) *International perspectives on learning and teaching mathematics*. (pp 145-160). Göteborg University, Sweden: National Center for Mathematics Education.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (2015). Conceptions in France about mathematical modelling: Exploratory research with design of semi-structured interviews. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.) (2015). *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME9, 4-8 February 2015) (pp. 827-833). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 325- 332.

Ferrando, I. y Cabassut, R. (2015a) Dificultades en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas: una comparativa franco-española. En *17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Actas JAEM 015.* http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n110.pdf

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1-2), 3-8.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números, 88*, 93-103.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2015). Una herramienta para la caracterización de modelos producidos en la resolución de problemas de Fermi. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX*, (pp. 269-278). Alicante: SEIEM.

Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. Tesis Doctoral, UPV, Valencia. Disponible en línea: https://riunet.upv.es/handle/10251/68492#

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 110–119). Chichester: Horwood.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. y Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716.

Learned, E. P., Christensen, C. R., Andrews, K. R. y Guth, W. D. (1969). *Business policy: Text and cases*. Homewood, IL: RD Irwin.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *The handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–646). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Maaß, K. (2006). Classification of modelling tasks. *Mathematics meets reality, International Society for Design and Development in Education Conference (ISDDE)* 4-7 September 2006. University of Nottingham.

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2009). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En *Proceedings of CERME 6-Working group 11*, 2056. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 2*(2), 393-404.

Proyecto Lema (2006-2009). Recuperado de http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php

Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: obstacles from the teacher's perspective. En G. Kaiser et al. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 641–652). New York: Springer.

[1] Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y los Fondos FEDER a través del proyecto de investigación EDU2015-69731-R, además de la Consellería de Educación y Ciencia de la Generalitat Valenciana a través del proyecto GVPROMETEO2016-143.

[2] http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/dvd_2009/english/homepage.html

[3] http://www.mascil-project.eu/

[4] http://www.primas-project.eu/es/index.do

[5] http://www.scientix.eu/

[6] http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/dvd_2009/spain/video.html

FORMACIÓN DIDÁCTICA DEL PROFESORADO UNIVERSITARIO: ANÁLISIS DE UN CURSO

Lecturer education: a course proposal

Florensa, I.[a], Bosch, M.[b] y Gascón, J.[c]

[a]Escola Universitaria Salesiana de Sarrià, Univ. Autònoma de Barcelona,
[b]IQS School of Managament. Univ. Ramon Llull,
[c]Dep. de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona

Resumen

La actividad profesional de los profesores universitarios se caracteriza, como mínimo, por dos tipos de tareas: la investigación y la docencia. En cambio, su desarrollo profesional se basa principalmente en méritos de investigación. Además, cuando se proponen cursos para mejorar la docencia universitaria, estos suelen priorizar el estudio de aspectos generales del ámbito pedagógico. Consideramos que desde la investigación en didáctica de las matemáticas se pueden hacer propuestas de formación del profesorado que permitan a los profesores cuestionar, analizar y reorganizar el contenido a enseñar con el objetivo de superar dificultades docentes específicas. Presentamos el diseño, experimentación y análisis de un curso de formación del profesorado universitario en una escuela de ingeniería. Los resultados del análisis se utilizan para mejorar el curso de cara a futuras experimentaciones.

Palabras clave: *didáctica, formación del profesorado universitario, investigación.*

Abstract

Lecturers' professional activity is characterized by, at least, two aspects: research and teaching. However, their professional development is generally mostly based on research achievements. In addition, the professional development courses offered only deal with general pedagogical aspects. We consider that specific proposals for lecturers should emerge from research in didactics of mathematics. In fact these proposals may help lecturers to question and reorganize the knowledge to be taught in order to overcome specific didactic facts. We present in this paper the design, experimentation and analysis of a professional development course for lecturers designed for and experienced in an Engineering School in Barcelona. The results obtained are used to propose concrete modifications of the course for subsequent course redesigns.

Keywords: *didactics, lecturer education, inquiry.*

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, los cursos de formación del profesorado universitario no se han considerado relevantes en el campo de la investigación en la formación del profesorado. Este es un fenómeno esperable, teniendo en cuenta los criterios que aplican las universidades y agencias de calidad cuando se contratan y evalúan profesores que están en activo. Habitualmente se priorizan los méritos del ámbito de la investigación, siendo la formación didáctica o pedagógica relativamente ignorada o, a lo sumo, considerada como un complemento positivo.

La ausencia de formación de docentes universitarios es un fenómeno mundial con pocas excepciones. En 2003 en el Reino Unido, la Academia de Educación Superior (HEA), el UK Professional Standards

Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2017). Formación didáctica del profesorado universitario: análisis de un curso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 237-246). Zaragoza: SEIEM.

Framework (UKPSF) y su proceso de acreditación hicieron un primer intento de incorporar la formación de profesores como requisito para enseñar en las universidades del Reino Unido (Department for Education and Skills, 2003). Sin embargo, este programa que se consideraba central en el desarrollo profesional de los profesores ha terminado como un programa de formación y acreditación de carácter voluntario, tanto para individuos como para instituciones que participan en la enseñanza superior (The Higher Education Academy, 2011).

Teniendo en cuenta el carácter doble de la profesión de profesor universitario (investigación –docencia) consideramos que además de la formación tradicional en investigación (Máster y Doctorado), los profesores también necesitan una formación explícita en pedagogía y didáctica que se apoye en resultados de la investigación en esta área. De hecho, las universidades se encuentran entre las pocas instituciones de enseñanza reglada que no exigen a sus profesores un curso de formación didáctica. En este sentido, Monereo (2014) considera urgente la propuesta de alternativas a la formación tradicional que, en los últimos años, se ha limitado a enseñar al profesorado a cumplir exigencias burocráticas del proceso de convergencia europeo. Nuestro trabajo de investigación se propone así estudiar las condiciones de existencia de un curso universitario de formación de profesores centrado en la materia objeto de enseñanza y que utilice de forma directa herramientas específicas de la investigación en didáctica.

Con el fin de disponer de un primer conjunto de datos empíricos para evaluar las condiciones de existencia de una propuesta formativa de este tipo para profesores de nivel universitario, presentamos el diseño, experimentación y análisis de un curso para profesores implementado en una escuela de ingeniería de Barcelona (www.euss.es). Los 14 profesores que participaron representaban el 30% de la plantilla y su materia de enseñanza era: Cálculo (3), Resistencia de Materiales (4), Física (2), Tecnología Electrónica (2) e Informática (2). Nuestra propuesta toma como punto de partida los "recorridos de estudio y de investigación para la formación del profesorado" (REI-FP) basados en investigaciones recientes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para la formación inicial o continua de profesores de primaria y secundaria (Ruiz-Olarría, 2015). El curso se impartió en febrero de 2016 por parte de los tres autores de este trabajo. Presentamos aquí el diseño y los resultados de esta primera edición, así como el posterior rediseño de nuevas ediciones, para superar las dificultades experimentadas y aprovechar sus potenciales fortalezas.

Las grandes cuestiones que guían nuestra propuesta se puede formular en los términos siguientes:

- C1. ¿Es posible adaptar la metodología de los REI-FP experimentados hasta la fecha con profesores de Infantil, Primaria y Secundaria, al caso del profesorado universitario? ¿Qué nuevas condiciones se requieren y que diferencias surgen? ¿Cómo evaluar su grado de aceptación y eficacia?
- C2. ¿Qué herramientas de análisis utilizadas en la investigación en didáctica de las matemáticas pueden ser útiles en la formación del profesorado universitario? ¿En qué sentido y con qué limitaciones los REI-FP aparecen como un dispositivo de formación apropiado al respecto?
- C3. ¿Hasta qué punto es sostenible el tipo de formación que proponen los REI-FP en el caso del profesorado universitario? ¿Qué aspectos de la experimentación parecen reproducibles en otras instituciones y cuáles serían específicos del caso analizado?

INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL CAMPO DE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO UNIVERSITARIO

Existe muy poca literatura sobre la formación del profesorado universitario y las pocas experiencias publicadas tienen en cuenta solamente contenidos pedagógicos generales que no consideran la naturaleza, organización y cuestionamiento de los conocimientos específicos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es importante resaltar que no se presentó ningún documento sobre este tema en el último CERME9 (ni en el TWG 14, sobre educación matemática a nivel universitario, ni en los TWG 18, 19 y 20, sobre conocimientos, prácticas y formación del profesorado) ni en el ICME 13, salvo en una versión preliminar de este trabajo (Florensa, Bosch y Gascón, 2016). La estructura de los Grupos Temáticos de Trabajo sobre la formación del profesorado del ICME13 es especialmente reveladora: hubo cuatro grupos de los cuales dos (formación inicial y continua) centrados en primaria y dos en secundaria, pero ninguno en nivel universitario. En los recientes congresos sobre educación matemática en Estados Unidos de América, sólo Ellis presentó resultados de investigación sobre la formación de los profesores universitarios que están en período de prácticas, encargados de apoyar al profesor titular de la asignatura (Ellis, 2014, 2015).

En cuanto a la presencia de artículos en revistas sobre formación del profesorado, hemos encontrado muy poca producción: sólo dos trabajos (Guasch, Alvarez y Espasa, 2010; Postareff, Lindblom-Ylänne y Nevgi, 2008) y el Handbook for Teaching and Learning in Higher Education (Fry, Ketteridge y Marshall, 1999). Estos datos son fruto de una búsqueda exhaustiva desde el año inicial de publicación hasta finales de 2015 en las siguientes revistas: *Educational Studies in Mathematics, Higher Education, Journal of Mathematics Teacher Education, Mathematical Thinking and Learning, Journal of Teacher Education, Recherches en Didactique des Mathématiques, REDIMAT, RELIME*.

Consideramos que la investigación en didáctica debe ser considerada como base para el diseño de cursos de formación de profesores sobre procesos de enseñanza y aprendizaje en los que el contenido a enseñar, su organización y cuestionamiento juegue un papel determinante. Asumimos como hipótesis inicial que los resultados que emergen de la formación de profesores de secundaria pueden ser utilizados a nivel universitario, de hecho, uno de los objetivos del presente trabajo es confirmar parcialmente esta hipótesis. Los *Solid Findings in Mathematical Education* en el ámbito de la formación del profesorado (Education Committee of the EMS, 2012) establecen explícitamente que el "conocimiento del contenido" (CK, por sus siglas en inglés) es necesario pero no suficiente para la enseñanza. El informe del Comité de Educación subraya como nociones cruciales que se deben desarrollar en la formación de los profesores el "conocimiento del contenido pedagógico" (PCK, por sus siglas en inglés) (Shulman, 1987) y las diferentes dimensiones del "conocimiento matemático para la enseñanza"(MKT, por sus siglas en inglés) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Ambos enfoques claramente van más allá de la concepción tradicional de la enseñanza como transmisión del conocimiento y, en consecuencia, piden cambios en la formación del profesorado, también en el ámbito universitario, en cuanto a la forma en que se debe tratar con el conocimiento matemático a enseñar.

En este trabajo, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se utiliza como marco principal para el diseño, la experimentación y el análisis del curso. Las últimas investigaciones sobre la formación docente en la TAD muestran que el uso de nociones como el PCK y el MKT no asegura que los profesores en formación cuestionen la naturaleza, selección y organización de los contenidos a enseñar, que a menudo son la base de problemas docentes (Ruiz-Olarría, 2015). Bajo el enfoque de la TAD, el papel de la formación docente no se limita a enriquecer el ámbito pedagógico de los docentes (conocimiento aplicable a cualquier conocimiento por enseñar), sino también a proveerles de herramientas para cuestionar la llamada epistemología dominante y emanciparse de ella al diseñar procesos de estudio que superen problemáticas profesionales específicas (Gascón, 2014).

Este cuestionamiento y reorganización de los conocimientos por enseñar no es un proceso espontáneo para los profesores de secundaria (ni para los universitarios) pues tienden a asumir como propia la epistemología dominante en la institución. La manera propuesta por parte de la TAD para situar esta actividad en el centro de los procesos educativos ha evolucionado mucho en esta última década. Comenzó con una primera experiencia en la formación del profesorado de secundaria basada en las "preguntas de la semana" (Cirade, 2006) y hoy en día toma la forma de un dispositivo basado en la investigación denominado "recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado" (REI-FP) el cual parte de una problemática que surge en el campo de la profesión docente y conduce a la búsqueda, desarrollo y análisis de propuestas de enseñanza alternativas (Barquero, Bosch y Romo, 2015, 2016). La idea principal del REI-FP es iniciar un trabajo de cuestionamiento de las actividades profesionales vinculadas a la pregunta inicial del profesor combinando aspectos prácticos y teóricos. Este dispositivo se estructura en cinco módulos:

- M0: Formulación y búsqueda inicial de respuestas a la pregunta generadora Q_0 del REI-FP, por ejemplo, una pregunta del tipo: "¿Qué enseñar y cómo enseñar (en relación a un contenido específico)?" Al final del REI-FP se generará una respuesta parcial.
- M1: Vivir un "recorrido de estudio e investigación" (REI) en la posición de estudiante. El objetivo principal es hacer que los profesores en formación vivan una actividad de investigación iniciada por una cuestión generatriz Q_0 que podría plantearse en una clase normal del nivel educativo considerado.
- M2: Análisis matemático-didáctico del REI vivido en M1 utilizando herramientas metodológicas propias de la TAD tales como dialéctica del medio-media, mapas de cuestiones y respuestas entre otros.
- M3: Adaptación del REI vivido para ser experimentado en una situación real en las instituciones de origen de los profesores en formación. Durante este trabajo, es esperable que se hagan explícitas muchas de las restricciones institucionales que deben afrontar los docentes. Por lo tanto, pueden analizarse desde una perspectiva epistemológica, didáctica y ecológica (qué puede "vivir" y bajo qué condiciones en un entorno educativo determinado). Experimentar, gestionar y realizar un análisis *in vivo* y *a posteriori* de la propuesta de enseñanza adaptada.
- M4: Elaboración conjunta de un análisis crítico de las prácticas docentes tradicionales y las posibilidades (y limitaciones) de introducir nuevas propuestas, así como la generación de una respuesta parcial a Q_0.

En las sucesivas experimentaciones del REI-FP para profesores de secundaria, se ha desarrollado una herramienta epistemológica para facilitar el análisis del REI vivido y el análisis y cuestionamiento del contenido por enseñar: los "mapas de preguntas-respuestas". De acuerdo con otros autores, consideramos que estos mapas, que se utilizan como una herramienta metodológica en la investigación de la TAD, pueden ser un poderoso instrumento para la formación del profesorado:

> We hypothesize that such a representation is sufficiently close to teachers' concerns, and also captures such essential parts of a didactic design, that one could use it as a tool for collaboration and communication with and among teachers, regarding concrete teaching designs (Winsløw, Matheron y Mercier, 2013, p. 281)

Existen experiencias preliminares y prometedoras del uso de estos mapas en los cursos de formación de profesores para describir los aspectos dinámicos y colectivos de la actividad matemática (Barquero et al., 2016; Florensa et al., 2016; Jessen, 2014). El trabajo con los mapas parece ser útil para los profesores: les permiten describir el conocimiento en las actividades de investigación y actúan como un contrapunto de la organización curricular oficial de los contenidos.

CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN

Consideramos que el trabajo presentado es un diseño exploratorio en el sentido de Singh (2007). Este tipo de estudio permite obtener y analizar un primer conjunto de datos empíricos con el fin de analizar el curso implementado y rediseñarlo y mejorarlo para ser aplicado en otra edición del curso. Las preguntas concretas de investigación que presentamos aquí hacen referencia a la cuestión de investigación C2 presentada más arriba:

- C2a. ¿De qué forma y hasta qué punto los "mapas de preguntas y respuestas" introducidos en la formación docente del profesorado universitario han resultado ser herramientas de análisis apropiadas para ayudar a los profesores a describir, analizar y cuestionar los conocimientos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje? ¿Qué limitaciones presentan?

- C2b. ¿De qué forma y hasta qué punto el curso ha permitido a los profesores identificar la naturaleza dinámica y colectiva de las disciplinas por enseñar, en contraste con la concepción dominante, estática, individual y compartimentada del conocimiento?

DESCRIPCIÓN DEL CURSO

La escuela de ingeniería donde se implementó el curso mantiene una franja de cuatro horas sin enseñanza para todos los profesores todos los miércoles: este tiempo se consagra al desarrollo profesional, reuniones, cursos o actividades pedagógicas. De hecho, el centro es una escuela de ingeniería salesiana con una especial preocupación por la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como por la evolución personal de los alumnos. El curso se estructuró en seis sesiones de dos horas durante tres semanas, y la pregunta generatriz del REI-FP fue: Q_0, "¿Pueden las actividades de modelización ser centrales en mi asignatura? ¿Qué condiciones permiten y qué limitaciones dificultan esta actividad de modelización? "

Debido a la restricción de tiempo, la estructura de cinco módulos del REI-FP tuvo que adaptarse. Las seis sesiones nos parecieron inicialmente como un curso demasiado corto, aunque al final resultaron ser suficientes para el trabajo planificado. De todas formas, el "trabajo real" se desarrollará posteriormente, en el momento en que los profesores decidan introducir nuevas propuestas en sus materias en base al trabajo llevado a cabo en el curso. Durante esta fase de aplicación posterior al curso algunos de los profesores que implementaron el REI pidieron ayuda a los formadores, extendiendo de esta manera la duración real del curso. El curso fue planificado de la siguiente manera:

- 1ª sesión: Explicitar la pregunta profesional inicial Q_0 y presentar brevemente el marco de la TAD incluyendo nociones tales como: praxeología, esquema herbartiano y dialéctica medio-media, topogénesis, mesogénesis y cronogénesis (Barquero y Bosch, 2013)
- 2ª y 3ª sesiones: Se propuso vivir un REI en grupos de hasta tres profesores iniciado por la siguiente cuestión generatriz. "Teniendo en cuenta el índice de incidencia de los últimos 9 meses de un brote de dengue: ¿podríais pronosticar el índice de incidencia para los próximos 3 meses (cuyos datos ya son conocidos)?" (Figura 1)

Año	**Índice de incidencia**
0	31
1	179
2	438
3	454
4	587
5	1176
6	1543
7	1859
8	2373
9	696
10	0,1
11	0,05
12	0

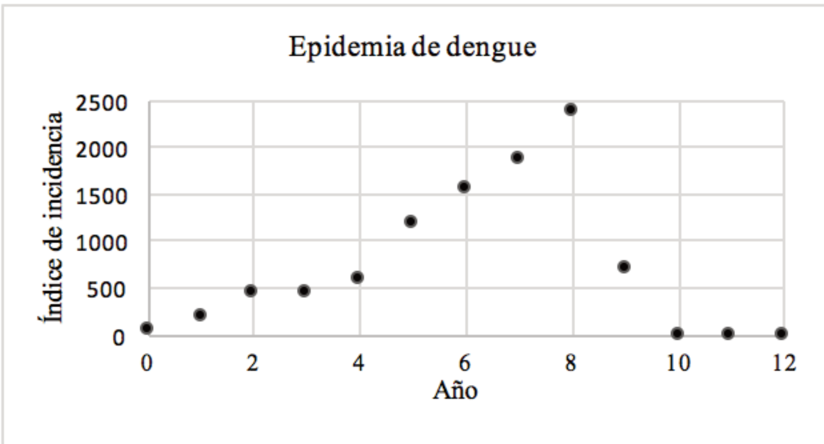


Figura 1: Datos utilizados para la modelización del REI

- 4ª sesión: Los participantes generaron un mapa de preguntas y respuestas del REI vivido. Uno de estos mapas puede verse en la Figura 2.

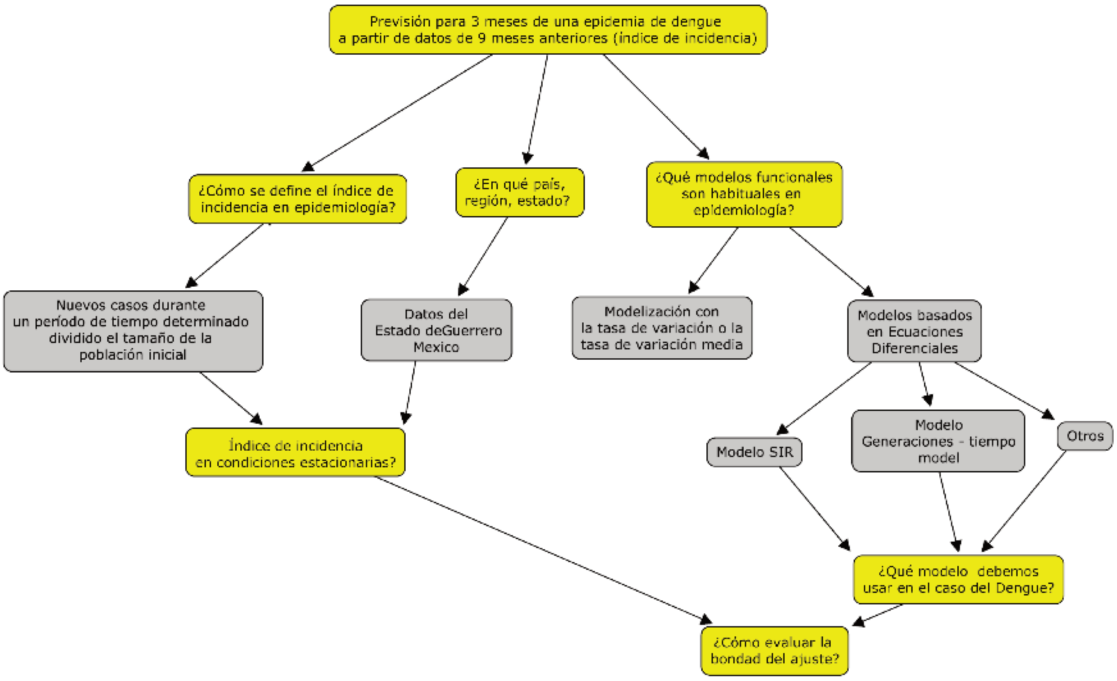


Figura 2: Mapa de cuestiones-respuesta de uno de los grupos

- 5ª sesión: Los profesores, trabajando en grupos por afinidad de las asignaturas impartidas, diseñan un REI para ser experimentado en las asignaturas en las que tienen docencia. Para ello, eligen una pregunta generatriz con la intención de superar algunas de las dificultades didácticas observadas tales como la ausencia de razón de ser, la compartimentación de temas o la pobreza del trabajo experimental en las prácticas universitarias, entre otros.
- 6ª sesión: Compartir en gran grupo las posibles propuestas de enseñanza de los diferentes grupos y las conclusiones del curso. Se pretende acabar el curso proponiendo una respuesta provisional a la cuestión generatriz Q_0 del REI-FP.

Durante la primera parte de la 5ª sesión, se pidió a los participantes que identificaran las problemáticas didácticas que les gustaría superar a través de la implementación de una nueva propuesta didáctica. El objetivo del diseño de una nueva propuesta didáctica no es implementar la propuesta como un fin en sí mismo, sino identificar cómo la *epistemología dominante* en la institución se relaciona con estos fenómenos problemáticos y proponer, de forma aproximada, nuevas posibles organizaciones epistemológicas y didácticas para enfrentarlos. Los mapas de preguntas y respuestas fueron la herramienta que se proporcionó a los profesores para llevar a cabo este trabajo. Durante la implementación del curso, algunos de los contenidos que inicialmente consideramos difíciles tuvieron una recepción más fácil de lo esperado (especialmente la noción de dialéctica medio-media) y, por el contrario, algunas nociones básicas eran difíciles de compartir con los participantes: por ejemplo, la descripción de los contenidos en términos de preguntas en lugar de temas.

Con el fin de obtener datos para evaluar el curso, se recogieron todos los mapas de preguntas-respuestas de todos los grupos, tanto del análisis de la actividad de modelización vivido como del diseño *a priori* de la propuesta de REI diseñada. También hemos obtenido los datos de una encuesta final completada por todos los profesores que participaron en el curso. La encuesta se estructuró en tres bloques principales. El primer bloque abordó aspectos generales del curso tales como duración, equilibrio entre el trabajo individual y en equipo, la distribución temporal, etc. El segundo bloque cuestionaba acerca de aspectos relacionados con el contenido del curso tales como el trabajo desarrollado con mapas de preguntas y respuestas y con la dialéctica medio - media. Finalmente, la encuesta abordaba cuestiones relativas a las posibles consecuencias del curso en sus actividades docentes. Entre estas pueden esperarse cambios en la concepción propia del conocimiento por enseñar, la concepción del conocimiento como actividad dinámica y colectiva y la disponibilidad o necesidad de nuevas herramientas de diseño, gestión y evaluación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las dos cuestiones de investigación planteadas hacen referencia, en primer lugar, al potencial de los mapas de preguntas y respuesta como herramienta para el análisis de los contenidos de enseñanza (C2a) y, en segundo lugar, al potencial del curso para cuestionar la concepción dominante, estática, individual y compartimentada del conocimiento (C2b). Para poder generar una primera respuesta parcial y limitada a una primera experiencia se analizan tres tipos de datos: los mapas del REI vivido por los profesores, los datos de una encuesta y los mapas del análisis *a priori* de los REI propuestos por los profesores. Por cuestiones de espacio el análisis en este artículo se limita a dos mapas. Respecto los mapas de preguntas y respuestas que modelizan el REI vivido por los participantes sobre la epidemia de dengue muestran cómo el trabajo de los participantes fue capaz de conectar campos normalmente desconectados en la organización curricular tradicional de los contenidos. Para la experiencia vivida, en los mapas de varios grupos y en concreto en el mostrado en la Figura 2, las cuestiones y respuestas relativas a las funciones, a las ecuaciones diferenciales, a la regresión, a la tasa media de cambio y a las nociones epidemiológicas están profundamente interrelacionadas: la combinación de ellas permite generar una respuesta a la cuestión generatriz. Un hecho destacable observado durante la actividad de los docentes surgió al analizar diferentes mapas de diferentes grupos de trabajo: en función de su formación de base y ámbito de docencia: dependiendo de este hecho el problema fue abordado de manera muy diferente. Por ejemplo, el trabajo de los profesores de Matemáticas se centró en encontrar un modelo matemático que ajustara los datos, mientras que el trabajo de los profesores de Química evolucionó alrededor de los datos epidemiológicos, la noción de "índice de incidencia" y la literatura científica sobre otros brotes similares. El uso de los mapas permitió a los profesores en formación describir esta conexión de ámbitos generalmente desconectados.

La segunda parte de la encuesta sobre el contenido del curso revela que el trabajo desarrollado por los profesores con los mapas de preguntas y respuestas y la dialéctica medio-media les resultaba difícil (más del 70% de los profesores lo consideraba difícil o muy difícil). Al mismo tiempo identificaron este trabajo como "fácilmente aplicable para diseñar y gestionar nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje" (más del 70% de los profesores encontraban contenidos y herramientas del curso fáciles de usar e implementar). En cuanto a las consecuencias del curso sobre las prácticas docentes de los profesores, la encuesta mostró que ayudó (más del 90% totalmente de acuerdo) a cambiar su concepción anterior del conocimiento hacia una concepción dinámica-colectiva en términos de actividades de modelización.

La tercera fuente de evidencias para el análisis son los mapas generados por los profesores como un análisis *a priori* para un REI a ser experimentado en las asignaturas en las que tienen docencia. En total, los profesores construyeron seis mapas, todos ellos con una pregunta generatriz y haciendo explícitos los hechos didácticos que se pretende superar. El mapa de cuestiones y respuestas de la Figura 3 muestra la propuesta desarrollada por profesores de matemáticas y física de primer curso de ingeniería. Uno de los aspectos a superar detectado por parte de los profesores de matemáticas era la falta de razón de ser de las ecuaciones diferenciales. De hecho, los profesores de matemáticas consideraban que las ecuaciones diferenciales se presentaban de forma aislada de cualquier fenómeno ingenieril, mientras que en realidad la mayoría de modelos utilizados en ingeniería están gobernados por ecuaciones diferenciales. En cambio, los profesores de física que participaban en el grupo, ponían de manifiesto el hecho de que los alumnos eran capaces de resolver algorítmicamente ecuaciones diferenciales tipo, pero que la interpretación de resultados quedaba fuera de su abasto. El mapa utilizado como herramienta de análisis *a priori* permite a los profesores en formación la potencialidad del REI propuesto. La descripción mediante el mapa parece superar de manera preliminar y parcial estos fenómenos: por un lado, mediante la existencia de un medio de validación del resultado (¿Podré saltar, es lógico que la cuerda tenga un cierto porcentaje de elongación?) y, por otro, superando la presentación de las ecuaciones diferenciales como independientes de los procesos de modelización.

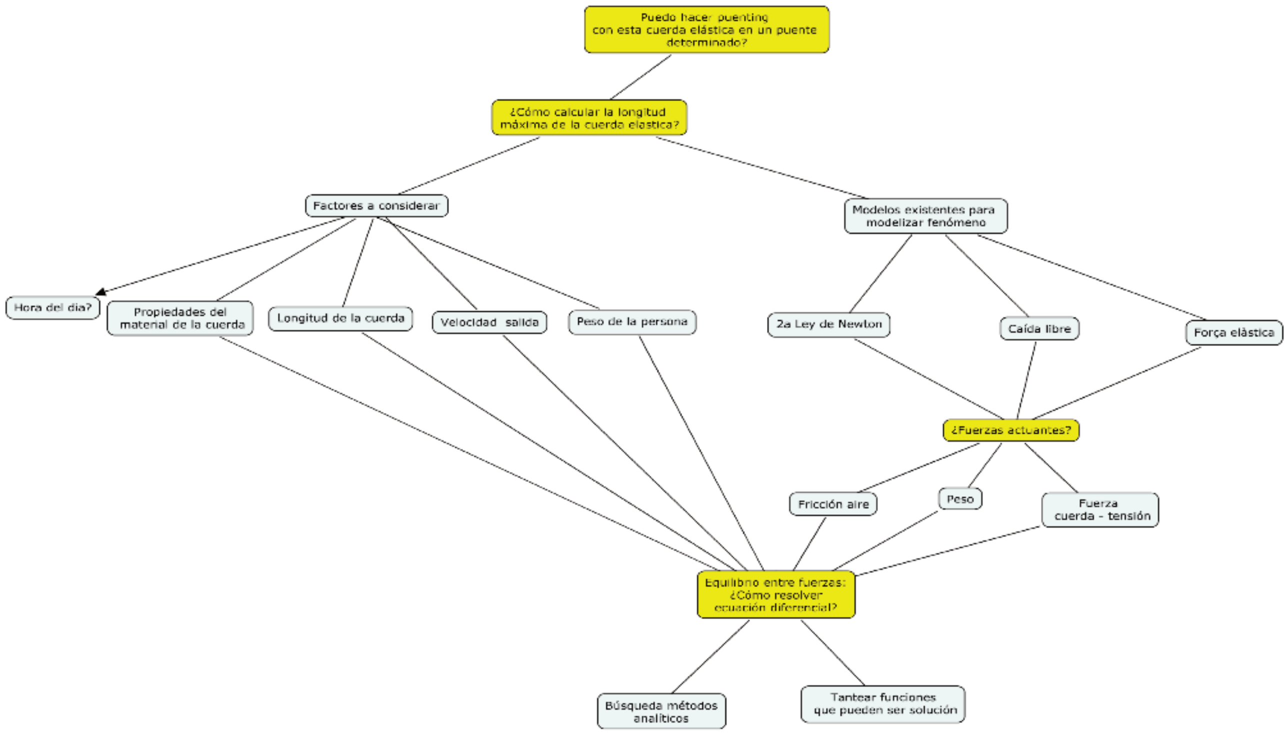


Figura 3: Mapa de cuestiones y respuestas generado por uno de los grupos de profesores

Dos de estos diseños *a priori* de REI han sido experimentados durante el semestre posterior al curso de formación del profesorado. Estos dos REI emergentes han sido experimentados y gestionados sólo por profesores que siguieron el curso y no han tenido ninguna otra experiencia o formación en didáctica. Este hecho es especialmente interesante porque con el análisis de estas experiencias se puede recopilar un primer conjunto de datos sobre las condiciones de existencia de los REI a nivel universitario incluyendo su diseño, gestión y análisis por parte de profesores que no tienen relación directa con la investigación en didáctica. Esta primera experiencia en la enseñanza de los profesores parece validar preliminarmente a Winsløw et al. (2013) sobre el uso de mapas de preguntas y respuestas en la formación docente y confirma los presentado en Barquero et al. (2016). Los profesores han trabajado con los mapas y los han utilizado para modelar un proceso de estudio y para analizar *a priori* su propio diseño. Por otra parte, los mapas se han utilizado para comparar el conocimiento movilizado durante un REI específico y el conocimiento oficial a enseñar.

En relación con la segunda cuestión de investigación planteada, también podemos afirmar, aunque con cierta cautela debido al carácter exploratorio muy inicial de nuestra investigación, que el curso parece iniciar un trabajo de cuestionamiento y de explicitación de la epistemología dominante en la universidad. El uso de los mapas como descriptores del conocimiento a enseñar contrasta con la concepción del conocimiento habitual en la enseñanza universitaria (sesiones de teoría, resolución de problemas y prácticas en laboratorio). Este contraste entre la concepción misma saber a enseñar hizo emerger cuestiones sobre la viabilidad de los REI en las condiciones habituales de enseñanza universitaria. El inicio del cuestionamiento de la epistemología dominante descrito debe validarse en futuras implementaciones del curso con el objetivo de que el uso de los mapas facilita este hecho observado. En la última sesión, el problema de cómo describir el saber a enseñar y las implicaciones en la práctica docente derivó hacia el problema de qué conocimientos deben enseñarse en la universidad y cómo podría considerarse la actividad de modelización con su dinámica y aspectos colectivos. Aunque las posiciones de los participantes eran distintas, nos sorprendió en gran medida que ninguno adoptara una postura rígida de imposibilidad de cambio. Al contrario, dos profesores incluso tomaron el curso como una oportunidad para rediseñar sus actividades docentes para el siguiente semestre con docencia en sus asignaturas. En concreto se implantaron nuevas propuestas didácticas en las asignaturas de Resistencia de Materiales y Sistemas de Información para la Dirección. Nuestro optimismo es sin embargo limitado. Es importante tener en cuenta que uno de los formadores del curso es también profesor en la escuela de ingeniería considerada, lo que ciertamente afectó la buena predisposición de los asistentes debido a su liderazgo personal en la institución. Esta condición particular tiene que ser considerada en nuevas ediciones del curso y la cuestión de su reproducibilidad permanece totalmente abierta.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Barquero, B., y Bosch, M. (2013). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education- ICMI Study 22* (Springer I, pp. 249–273).

Barquero, B., Bosch, M., y Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 809–815). Prague: Charles University in Prague and ERME.

Barquero, B., Bosch, M., y Romo, A. (2016). An online course for inservice mathematics teachers at secondary level about mathematical modeling. En *13th International Conference in Mathematics Education*. Hamburg.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM . Les mathématiques comme problème professionnel.* (Tesis Doctoral). Université d'Aix-Marseille.

Department for Education and Skills. (2003). *White paper on The future of higher education. (Secretary of State fo Education and Skills*, Ed.). Norwich, UK: HMSO.

Education Committee of the EMS. (2012). It is necessary that teachers are mathematically proficient , but is it sufficient ? Solid findings in mathematics education on teacher knowledge. *Newsletter of the European Mathematical Society, (83)*, 46–50.

Ellis, J. (2014). Graduate students Teaching Assistants' (GTAs') beliefs, instructional practices, and student success. En *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 609–616).

Ellis, J. (2015). Preparing future professors: highlighting the importance of graduate student professional development programs in calculus instruction. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)* (Vol. 53, pp. 1689–1699). Vancouver, Canada: PME.

Florensa, I., Bosch, M., y Gascón, J. (2016). A posteriori analysis of a SRP-TE as a teachers training tool. En T. Á. Sierra Delgado (Ed.), *5th International Conference of the Anthropological Theory of the Didactic*.

Fry, H., Ketteridge, S., y Marshall, S. (Eds.) (1999). *A Handbook for Teaching and Learning in Higher* (3rd ed.). Oxon: Taylor y Francis.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99–123.

Guasch, T., Alvarez, I., y Espasa, A. (2010). University teacher competencies in a virtual teaching/learning environment: Analysis of a teacher training experience. *Teaching and Teacher Education, 26*(2), 199–206. http://doi.org/10.1016/j.tate.2009.02.018

Jessen, B. E. (2014). How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 199–224.

Monereo, C. (2014). Las competencias del profesor universitario del siglo XXI: hacia una identidad profesional docente. En C. Monereo (Ed.), *Enseñando a enseñar en la Universidad. La formación del profesorado basada en incidentes críticos* (pp. 39–61). Barcelona: Universitat de Barcelona-Institut de Ciències de l'Educació.

Postareff, L., Lindblom-Ylänne, S., y Nevgi, A. (2008). A follow-up study of the effect of pedagogical training on teaching in higher education. *Higher Education, 56*(1), 29–43.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–23.

Singh, K. (2007). *Quantitative social research methods* (Vol. 1). Thousand Oaks: Sage Pub.

The Higher Education Academy. (2011). *The UK Professional Standards Framework for teaching and supporting learning in higher education*. Recuperado el 2 de Agosto 2016, from http://www.heacademy.ac.uk/ukpsf

Winsløw, C., Matheron, Y., y Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 267–284.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN UN TRABAJO DE FIN DE MÁSTER DE UN FUTURO PROFESOR[1]

Didactic analysis in a final work of a master for mathematics teachers in pre-service

Font, V.[a], Breda, A.[b] y Pino-Fan, L.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidad de Los Lagos

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar cómo se utilizan los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos en un proceso de formación de futuros profesores. Para ello, se realiza el estudio del trabajo de fin de máster de una futura profesora de secundaria de matemáticas. El análisis muestra que la futura profesora considera que mejoró su competencia de análisis e intervención didáctica como resultado de la reflexión sobre su propia práctica utilizando los criterios de idoneidad didáctica.

Palabras clave: *idoneidad didáctica, formación de profesores, trabajo fin de máster.*

Abstract

The aim of this paper is to present how are used the didactical suitability criteria proposed by the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction in one processes of preservice teacher training. For that matter a case study was performed, whose object of study is the master thesis conducted by a Math teacher in pre-service. The analysis of this final master thesis shows the improvement of didactical analysis and intervention competency as a result of reflection about their own practice using the didactical suitability criteria.

Keywords: *didactic suitability, Teacher training, final master thesis.*

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presenta aquí forma parte de una investigación más amplia realizada en en diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Venezuela y Argentina (Breda, 2016; Breda, Font y Lima, 2016; Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2016;Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Ferreres y Vanegas, 2015; Giménez, Font y Vanegas, 2013; Giménez, Vanegas, Font y Ferreres, 2012; Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Ramos, 2006; Ramos y Font, 2008; Seckel, 2016) que tiene como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007), como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica. Uno de los espacios de formación investigados en esta amplia investigación es el Trabajo de Fin de Máster (TFM).

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio de caso que analiza el uso de los criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el EOS, en el proceso de reflexión (explicado en su TFM) de una futura profesora (Ruiz, 2014), con el fin de mejorar la implementación de una unidad didáctica sobre la función de segundo grado en el cuarto año de la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

(ESO). El uso de los criterios de idoneidad didáctica fue enseñado en el proceso formativo de esta futura profesora como una herramienta metodológica para promover y apoyar la reflexión sobre su práctica.

Estamos presentando un resultado que coincide con otras investigaciones que han puesto de relieve: 1) que dar a los profesores la oportunidad de reflexionar sobre su práctica no basta; 2) que los profesores necesitan herramientas para dirigir su atención hacia aspectos relevantes de los episodios de enseñanza, y 3) que estas herramientas se pueden enseñar como parte de la formación del profesorado (por ejemplo, Nilssen, 2010; Star y Strickland, 2008; Turner, 2012; Sun y van Es, 2015).

MARCO TEÓRICO

La noción de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son *buenas matemáticas*. 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar. 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5) Idoneidad afectiva, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción. 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos concordamos que es necesario implementar unas buenas matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) aportan un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, los cuales están pensados para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. Dado que el profesor de este estudio de caso hace una propuesta para la etapa secundaria, hemos considerado pertinente utilizar la adaptación de dichos componentes y descriptores para la etapa de secundaria que se propone en Breda, Pino-Fan y Font (en prensa). Por cuestiones de espacio a continuación solo se reproduce la tabla correspondiente al criterio de idoneidad epistémica (Tabla 1).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para alcanzar el objetivo propuesto se ha seguido una metodología de investigación cualitativa, de acuerdo con Ludke y André (1986), que se basa en la comprensión e interpretación de los datos. Optamos por realizar un estudio de caso (Ponte, 1994) donde se investiga el análisis didáctico realizado por un profesor de matemáticas en formación en su Trabajo Fin de Máster.

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica

Componente	Descriptor
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales implementados (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales implementados (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para los significados parciales implementados, muestra representativa de problemas. Para los significados parciales implementados, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Contexto de la investigación

> En las orientaciones generales del Trabajo Fin de Máster que se dan a los alumnos, en el caso del Máster de Formación de Profesorado que ha cursado la futura profesora Ruiz, se dice que debe ser un trabajo original, autónomo e individual que permite al estudiante mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias generales asociadas al título de Máster en Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas, y debe contribuir a reflexionar y profundizar en el análisis de su propia práctica, posibilitando proponer elementos de mejora de la misma. Dicha mejora se debe justificar a partir de la reflexión de la comunidad de investigación en Educación Matemática sobre el tema que se ha desarrollado en su periodo de prácticas.

Un elemento clave del TFM es su relación directa con la experiencia escolar realizada previamente (el diseño y la implementación de una unidad didáctica). Otra de las características importantes es que se asigna un mismo tutor al periodo de prácticas (donde se ha diseñado e implementado la unidad didáctica) y al Trabajo Fin de Máster, para facilitar la continuidad de las prácticas y el proceso de reflexión sobre ellas, y poder reconocer los progresos alcanzados. Durante este proceso, se realizan, como mínimo cuatro reuniones, entre el estudiante y su tutor. Dos de ellas durante su práctica escolar, y al menos dos encuentros tutoriales durante la realización del TFM.

El TFM es la culminación de un ciclo formativo en el que, primero, el alumno ha planificado e implementado una unidad didáctica en el periodo de prácticas. Para después (en el TFM) realizar el análisis y valoración de la idoneidad de la unidad didáctica implementada y formular una propuesta de mejora justificada de dicha unidad didáctica. Para la parte final de este ciclo, se sugiere a los futuros docentes que en su análisis consideren responder a preguntas como las siguientes:

a) ¿He enseñado unas matemáticas de calidad? ¿Se puede mejorar esta calidad? ¿Cómo? b) Los alumnos podían aprender con las actividades propuestas? ¿Han aprendido? ¿Por qué no? c) ¿Se podría mejorar la gestión de la clase? d) ¿Usé los recursos adecuados? ¿El tiempo estuvo bien gestionado? e) ¿Cómo se ha considerado una perspectiva ecológica en las condiciones generales del trabajo? Para responder a estas preguntas en las diferentes asignaturas que intervienen en el ciclo se presentan elementos de valoración de la calidad de los procesos de estudio, en concreto los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), así como la pauta de componentes y descriptores de dichos criterios que permite aplicarlos (Breda y Lima, 2016).

En su TFM, la futura profesora Ruiz escribe comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. Se trata de una valoración que ha hecho la profesora y que ha sido triangulada con su tutor. Por otra parte, posteriormente en la presentación oral de su valoración ante el tribunal del TFM hay una segunda triangulación. Estos comentarios son el foco de nuestro análisis, el cual se explica con detalle en el siguiente apartado. Se trata, pues, de un análisis del contenido en las que las categorías han sido fijadas previamente (criterios, componentes y descriptores de la idoneidad didáctica).

USO DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN EL TFM

La futura profesora Ruiz (2014), en su TFM presenta la valoración y el rediseño de una propuesta didáctica sobre la función de segundo grado, para un grupo de alumnos del cuarto año de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) (15-16 años de edad). Este TFM está organizado en cinco capítulos; en el primero se realiza una introducción al TFM, en el segundo se presenta un resumen de la implementación de la unidad didáctica (la explicación detallada se halla en su memoria de prácticas). En el tercer capítulo se explica la valoración de los seis criterios de idoneidad didáctica. En el cuarto capítulo se especifican los aspectos que se proponen mejorar en una futura implementación y se detalla el rediseño de las tareas para ello. El último capítulo termina con unas consideraciones finales sobre el TFM y sobre su experiencia en el máster.

Cuando la futura profesora Ruiz tiene que reflexionar sobre una nueva propuesta didáctica que implica un cambio y una mejora sobre su práctica anterior, explícitamente utiliza los criterios de idoneidad didáctica. A continuación mostramos el uso que ella hace de dichos criterios (sus componentes y descriptores) para justificar que su nueva propuesta representa una mejora con relación a la unidad didáctica implementada en su periodo de prácticas.

Idoneidad epistémica

La futura profesora Ruiz (2014, p. 3) valora la idoneidad epistémica de su unidad didáctica con un 3,4 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): errores (5), ambigüedades (4), riqueza de procesos (3) representatividad y conectividad de los contenidos (1,6). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora Ruiz realiza diferentes reflexiones. Con relación a los errores, explica que en su implementación no observó errores, en particular comenta que corrigió con sus comentarios uno que se hallaba en el libro de texto y en alguno de los videos utilizados (errores fotográficos al confundir la parábola con una catenaria).

Con relación a las ambigüedades comenta que observó que el uso del programa dinámico GeoGebra propició la metáfora de la gráfica de una función como camino que deja un punto que se mueve sobre la misma. También comenta que en la implementación de la unidad didáctica usó tablas de valores triples (la misma abscisa y dos columnas de ordenadas para dos funciones) lo cual también creo ambigüedades (en particular, porque utilizó la misma letra para las dos funciones). En el rediseño decide que no usará este tipo de tablas (Figura 1).

Con relación al componente riqueza de procesos afirma:

> La secuencia de actividades es “rica” en cuanto a los procesos matemáticos que activa, aunque que la disposición de un solo ordenador para toda la clase genera un nivel de procesos de manipulación / experimentación /exploración / ensayo y error bajo, ya que el alumno ha tenido un papel pasivo receptor en vez de que sea él el que “haga cosas”. El nivel de formulación, enumeración y conjeturación ha estado en general flojo, mientras que argumentación, explicación, justificación, demostración y la comunicación en términos de institucionalización ha sido alto. (Ruiz, 2014, p. 35).

El componente al que otorga menor puntuación es al que hace referencia a la representatividad y lo justifica con afirmaciones como las siguientes:

> El principal significado parcial que se ha trabajado en la UD ha sido el de la representación de la función explicita, por lo que no podemos considerarlos como una muestra representativa de la complejidad de la función cuadrática. Han faltado significados parciales y sus conexiones. (Ruiz, 2014, p. 35-36).
>
> La muestra de actividades presentadas en la UD no ha sido representativa. Han faltado problemas de contextos significativos de la aplicación de la parábola, como pueden ser de tiro parabólico, de fuentes (por ejemplo Montjuïc), de luz de faros, etc. (Ruiz, 2014, pp. 35-36).

	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^2+3$
x	f(x)	f(x)
-2	4	7
-1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7

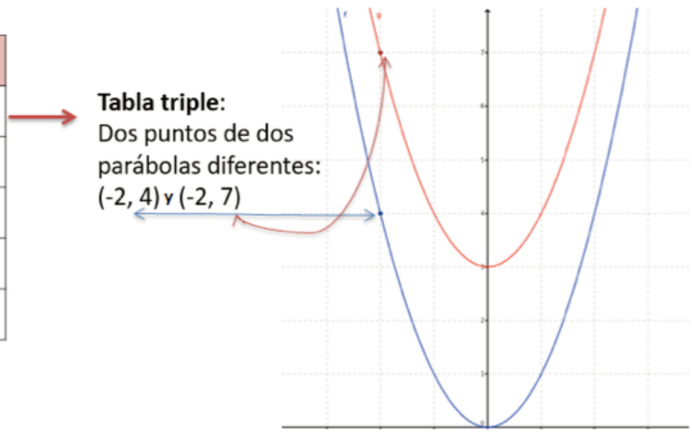


Figura 1. Fuente: Ruiz (2014, p. 15)

Idoneidad cognitiva

La futura profesora Ruiz (2014, p. 4) valora la idoneidad cognitiva de su unidad didáctica con un 2,2 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): conocimientos previos (4,5), adaptaciones curriculares (1), aprendizaje (1). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora realiza diferentes comentarios sobre los componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.

Conocimientos previos. La futura profesora explica que dado que había asistido a esta clase, por un amplio espacio de tiempo, antes de comenzar la unidad didáctica sobre la función cuadrática ya sabía que los alumnos tenían los conocimientos previos necesarios sin necesidad de una evaluación inicial.

Adaptaciones curriculares. La futura profesora explica que no se contemplaron actividades de refuerzo ni de ampliación dadas las características del grupo.

Aprendizaje. Con relación a este componente, la autora del TFM se muestra poco satisfecha y afirma lo siguiente: “La evaluación efectuada no ha sido competencial, tal como se ha pretendido enfocar la UD, por lo que no es informativa, aunque los resultados alcanzados en el examen propuesto han sido satisfactorios.” (Ruiz, 2014, p. 37).

Alta demanda cognitiva. Con relación a este componente la futura profesora no hace comentarios.

Idoneidad interaccional

En el TFM analizado se valora la idoneidad interaccional de la implentación realizada con un 4 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): interacción profesor - alumno (4,6), interacción entre alumnos (5), autonomía (3), evaluación formativa (3,5). Se justifican estas puntuaciones con comentarios como los siguientes.

Con relación al componente *interacción profesor - alumno* "En general se han reconocido y resuelto los conflictos de significado, aunque en algún caso no se aprovecha la interacción para generar y resolver una duda cognitiva en un alumno (conexión parábola con la pendiente de una recta)". (Ruiz, 2014, p. 38). Con relación al componente *interacción entre alumnos*:

> Mediante el trabajo en grupo, la disposición de la clase y el buen ambiente que existía en clase se ha favorecido el diálogo y la comunicación entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor.
>
> Se ha creado un ambiente que favorecía la inclusión de los alumnos en grupo, evitando la exclusión. (Ruiz, 2014, p. 38).

Con relación al componente *autonomía*, se afirma: "La metodología de trabajo (trabajo en grupo, actividades individuales, exposiciones de los alumnos) ha contemplado momentos que han favorecido que los alumnos asuman responsabilidades de estudio." (Ruiz, 2014, p. 38). Con relación al componente *evaluación formativa*, se afirma:

> No se ha incidido bastante en la observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos. Aunque diariamente se han controlado los deberes que han realizado los alumnos de manera autónoma y se han realizado actividades en clase, estos no han servido para evaluar el progreso cognitivo personal de cada alumno. (No se han tomado apuntes / comentarios diarios de los resultados de las actividades por alumno). (Ruiz, 2014, p. 39).

Idoneidad mediacional

En el TFM de la futura profesora se valora la idoneidad mediacional de su unidad didáctica con un 4,3 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): recursos materiales (3,5), número de alumnos, horario y condiciones del aula (4,5), tiempo (5). Para justificar estas puntuaciones, con relación al componente recursos, la futura profesora afirma que utilizó diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio (GeoGebra, proyección de un vídeo, calculadora científica, etc.). También afirma que el número de alumnos, el horario y las condiciones del aula fueron adecuados. Con relación al componente tiempo, afirma que invirtió el tiempo en los aspectos clave del tema y en los que presentaban más dificultad para los alumnos.

Idoneidad afectiva

En el TFM analizado se valora la idoneidad afectiva de la unidad didáctica con un 4,3 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): intereses y necesidades (3,5), actitudes (5), emociones (4,5). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora realiza comentarios como los siguientes:

Con relación al componente *intereses y necesidades*:

> Se ha intentado que la contextualización de las actividades fuera de interés para los alumnos y que la metodología empleada fuera amena y atractiva. Trabajar con GeoGebra les ha supuesto a los alumnos una novedad y una metodología innovadora en clase que les ha motivado mucho, igual que proyectar un video actual sobre las parábolas. (Ruiz, 2014, p. 41).

Con relación al componente *actitudes*: "Se ha favorecido la argumentación trabajando las actividades en grupos y exponiendo los resultados por los propios alumnos al resto de la clase." (Ruiz, 2014, p. 41).

Con relación al componente *emociones*, se afirma que se ha intentado en todo momento motivar al alumnado promocionando su autoestima y evitado el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.

Idoneidad ecológica

En el TFM de Ruiz se valora la idoneidad ecológica de la unidad didáctica implementada con un 3,5 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): adaptación al currículum (3), abertura hacia la innovación didáctica (4), Adaptación socio-profesional y cultural (5), Conexiones intra e interdisciplinarias (2). Dichas puntuaciones se justifican con comentarios como los siguientes:

Adaptación al currículum: “Aunque los significados se han correspondido con las directrices curriculares, Ha habido un bajo hincapié en los procesos de contextualización que indica el currículo. La evaluación no se ha correspondido con la idea competencial del currículo.” (Ruiz, 2014, p. 42).

Con relación al componente *abertura hacia la innovación didáctica*, se afirma que se tuvo en cuenta la incorporación de las TIC. Con relación al componente adaptación socio-profesional y cultural, se afirma que se ha presentado el tema de manera que permita a los alumnos entender la importancia de las funciones, y en particular al función cuadrática, como un tema relevante y de importancia en el mundo real, necesario en su camino para convertirse en ciudadanos constructivos, reflexivos y capaces de emitir decisiones bien fundadas. Con relación al componente *conexiones intra e inter*, se afirma: “La contextualización de las actividades ha propiciado escasas conexiones con otros contenidos interdisciplinarios como la física, las ciencias sociales o la historia.” (Ruiz, 2014, p. 42).

Valoración global de la idoneidad didáctica de la implementación realizada

Para representar la valoración global que hace de su práctica, la futura profesora usa un esquema en forma de hexágono (Figura 2) siguiendo el modelo de figura que se había comentado con los futuros profesores durante el ciclo formativo. Se trataba de una figura con dos hexágonos En esta figura, el hexágono regular exterior representa un proceso de enseñanza ideal ya que se habrá conseguido una alta idoneidad simultánea de las seis idoneidades parciales, mientras que el hexágono irregular interior representa la idoneidad de un proceso de instrucción efectivamente implementado. Siguiendo este modelo, en la figura 2, Ruiz supone que todas las idoneidades parciales tienen un mismo valor representado por el segmento que une el centro con el vértice. A partir de ello, construye el polígono irregular que representa las idoneidades parciales que ella considera que ha conseguido.

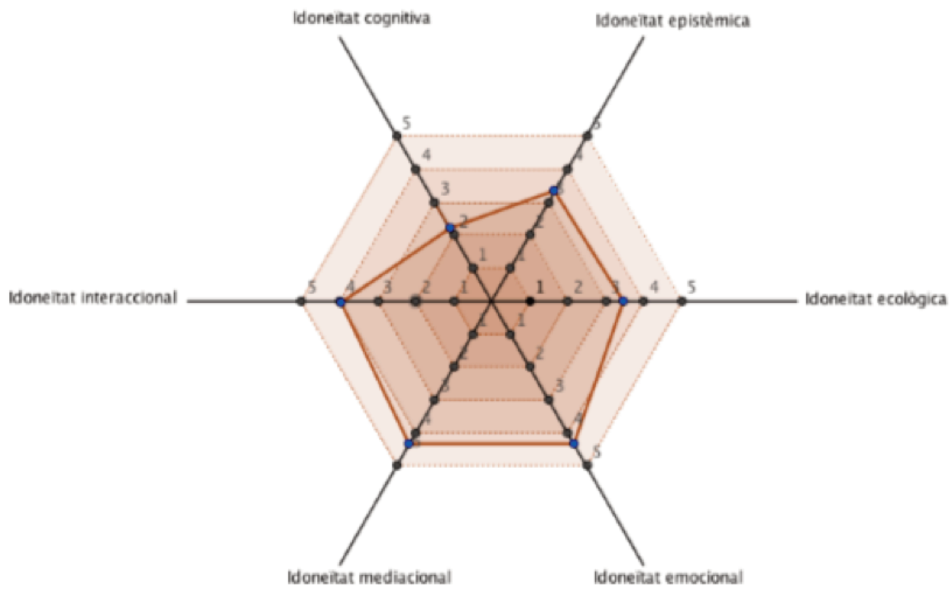


Figura 2. Hexágono de idoneidad (Ruiz, 2014, p. 6)

Un aspecto a resaltar es que el constructo criterios de idoneidad se les explicó a los futuros profesores no como un constructo que trataba de medir la idoneidad de un proceso de instrucción sino que se les explicó como un constructo que permitiera al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se iba a realizar el proceso de instrucción a partir de la determinación cualitativa de los aspectos que se deberían y podrían mejorar. A pesar de esa explicación Ruiz, de acuerdo con su tutor de TFM, decidió realizar una medida del grado de idoneidad de cada uno de los criterios de idoneidad didáctica sin contar con un referente institucional de evaluación. El método que siguió fue valorar cada uno de los componentes de uno de los seis criterios con una escala de 1 a 5 y después hizo la media de estas puntuaciones que represento en cada uno de los segmentos de la Figura 2 para construir el polígono irregular de la figura 2.

La conclusión a la que llega la futura profesora es:

> Mediante esta valoración global se puede observar que los valores asignados a los criterios de idoneidad interaccional, mediacional y emocional son altos, pero no he incidido bastante en la idoneidad epistémica y cognitiva ni, en menor medida, en la idoneidad ecológica, concretamente, en la representatividad y conectividad de los contenidos y las adaptaciones curriculares y la evaluación, y en la adaptación de los procesos curriculares y las conexiones intra e interdisciplinarias. (Ruiz, 2014, p. 6).

Propuesta de rediseño de su unidad didáctica

Ruiz concluye que hay que mejorar su unidad didáctica en los aspectos que obtiene menor puntuación. Por cuestiones de espacio no abordamos en esta comunicación la amplia y profunda reflexión que realiza esta futura profesora para justificar su propuesta de rediseño. Nos limitaremos a mostrar un ejemplo de como sus propuestas se justifican a partir de la lectura de artículos:

> Trabajaremos la conexión de la función cuadrática con la función lineal y la pendiente: conectaremos el parámetro a de la parábola con la pendiente de ‘una recta (Conexión “Parábola – Recta”). Pera ello, nos basaremos en el artículo de Amick, H L. (1995) Sharing Teaching Idees: *A Unique Slope for a Parabola*. (Ruiz, 2014, p. 9).

CONSIDERACIONES FINALES

El análisis realizado en este trabajo muestra que el uso de los criterios de idoneidad didáctica es un instrumento metodológico útil para promover y apoyar su reflexión sobre su propia práctica. También muestran que los profesores necesitan herramientas para dirigir su atención a los aspectos más destacados de los episodios de enseñanza y que estas herramientas pueden ser enseñadas como parte de la formación del profesorado. Las reflexiones de Ruiz son una evidencia de estas conclusiones ya que ella reconoce la utilidad de la herramienta criterios de idoneidad cuando afirma:

> Como conclusión quiero resaltar la importancia de analizar de una manera sistemática y organizada las prácticas que he realizado.
>
> A través del estudio de la calidad didáctica de mi unidad didáctica he podido percatarme de la complejidad del tema y he llegado a reconocer problemas en un contexto profesional que durante las prácticas no fui consciente de tenerlos.
>
> La mayoría de nosotros ha tenido una grata experiencia durante el periodo de prácticas y valoró su experiencia como muy positiva, muy buena, etc. Pero creo que llegados a este punto como profesores tenemos que ir más allá de una valoración de este tipo y comprobar que no sólo nos sentimos cómodos en clase y nos gusta involucrarnos en el aprendizaje de los alumnos, sino que, además, somos capaces de autoevaluarnos, ser críticos con nosotros mismos y de hacer una reflexión sobre lo que hemos hecho. El uso de estos criterios empleados para analizar nuestra propia unidad didáctica nos han permitido afinar y ser más precisos en el análisis y valoración. (Ruiz, 2014, p. 29-30).

Por otra parte, en este máster también se les pide a los futuros profesores que hagan una autovaloración competencial en la que, dada la lista de competencias que se deben desarrollar en el máster, para cada una de ellas deben señalar cuál era, según su criterio, su nivel de entrada y cuál es su nivel de salida. En esta autovaloración, con relación a la competencia 14 (Análisis de secuencias didácticas) Ruiz comenta lo siguiente:

> El grado de conocimiento de técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad que poseía antes del Master era prácticamente nulo.
>
> En el Master he aprendido a diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora

En esta autovaloración Ruiz comenta que valorar su unidad didáctica implementada utilizando los criterios de idoneidad didáctica le ha permitido desarrollar su competencia de análisis didáctico de manera significativa.

Referencias

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no rio grande do sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil

Breda, A., Font, V., y Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 8*(1), 4-41.

Breda, A.; Font, V y Lima, V. M. (2016). Análise das Propostas de Inovação nos Trabalhos de Conclusão de Curso de um Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*(2), 53-72.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education, 5*, 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2016). Establishing criteria for teachers' reflection on their own practices. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 283). Szeged, Hungary: PME.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Ferreres, S., y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia, 196*, 219-225.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 581-590). Oxford: ICMI studies.

Giménez, J., Vanegas, Y., Font, V. y Ferreres, S. (2012). El papel del trabajo final de Máster en la formación del profesorado de Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 61*, 76-86.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127 – 135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Recuperado de: http://www.ugr.es /~jgodino/funciones-emioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Ludke, M. & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária.

Nilssen, V. (2010). Encouraging the habit of seeing in student teaching. *Teaching and Teacher Education, 26*(3), 591-598.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Educatio*n. doi: 10.1007/s10857-016-9349-8

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 11*(2), 233-265.

Ruiz E. (2014). *Funcions quadràtiques*. Tesis de máster no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis de Doctorado. Universitat de Barcelona, España.

Star, J. R. yStrickland, S. K. (2008). Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 107-125.

Sun, J., y van Es, E. A. (2015). An exploratory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers' classroom practice. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 201-214.

Turner, F. (2012). Using the knowledge quartet to develop mathematics content knowledge: The role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education, 14*(3), 253-271.

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y Fondecyt Nº 11150014 (CONICYT, Chile).

ANÁLISIS DE LOS RASGOS DE LA ACTIVIDAD PROFESIONAL DEL PROFESOR[1]

Analysis of the features of the professional activity of a professor

García-Honrado, I.[a], Fortuny, J.M.[b], Morera, L.[b] y Rodríguez, R.[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En esta comunicación analizamos, los rasgos de un profesor que se muestran en una discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas en el que se utiliza GeoGebra para su resolución. Completaremos el análisis desde un punto de vista pragmático evidenciando el aprovechamiento que realizan sus alumnos de algunas oportunidades de aprendizaje generadas en dicha discusión, para ello mostraremos con detalle el análisis del caso de una alumna.

Palabras clave: *aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje, geometría, gradación de los rasgos profesionales.*

Abstract

In this communication, we analyze the features of a professor that are shown in a whole group discussion of a problem of geometric transformations in which GeoGebra is used for its resolution. We complete the analysis from a pragmatic point of view studying the advantage the students take of some learning opportunities generated in this discussion, in this communication, we show in detail the analysis of the case of a student.

Keywords: *degrees of teacher's features, geometry, taking advantage of a learning opportunity.*

INTRODUCCIÓN

En estudios previos se han analizado por separado los distintos rasgos de actividad profesional del profesorado como en Schoenfeld (2013) y Espinoza-Vázquez, Verdugo-Hernández, Zakaryan, Carrillo, y Montoya-Delgadillo (2016) y las oportunidades de aprendizaje del alumnado como en (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). En este artículo consideramos que, para analizar la relevancia de la calidad de la actividad profesional del profesorado, necesitamos completar los rasgos del profesorado con el aprovechamiento que hagan sus alumnos de las oportunidades de aprendizaje. Bajo nuestro punto de vista, el análisis pragmático de la actividad profesional del docente ha de recoger el impacto que produce en sus alumnos, por ello, además de considerar los rasgos óptimos de un profesor en una discusión en gran grupo, relatamos la interacción que se produce con sus alumnos, lo que nos permitirá revelar una posible relación entre la buena etopeya de un profesor y el aprovechamiento por parte de sus alumnos de las oportunidades de aprendizaje generadas.

MARCO TEÓRICO

Para este trabajo tomamos como referencia un sistema de dos ejes teóricos: el de las etopeyas y los rasgos del profesor, y el de generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

Sobre la etopeya y rasgos del profesor

Entendemos la etopeya de un profesor como el conjunto de acciones, conductas y prácticas docentes que se pueden evidenciar a través del discurso que realiza en el aula. La etopeya del profesor define

García-Honrado, I., Fortuny, J.M., Morera, L. y Rodríguez, R. (2017). Análisis de los rasgos de la actividad profesional del profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 257-266). Zaragoza: SEIEM.

su carácter, a través de sus palabras (Nystrand y Duffy, 2003). Las acciones docentes importantes que pueden crear oportunidades de aprendizaje, las interpretamos como rasgos del profesor. En este artículo consideramos la etopeya como el conjunto de rasgos característicos que muestra el profesor. Un rasgo es una propiedad distintiva que permite caracterizar al docente en un momento determinado de su actividad. En este sentido, una de las finalidades de este trabajo, es analizar una posible gradación de los "rasgos" de un profesor que se pueda inferir del extracto de su discurso en determinados episodios docentes.

En el transcurso del discurso del profesor en la discusión en gran grupo podemos distinguir, siguiendo a Schoenfeld (2013) y Morera (2013), cinco rasgos característicos que focalizan su actividad profesional: el *foco matemático*, la *demanda cognitiva*, el *acceso* al conocimiento, la *autoridad y responsabilidad,* y el uso del seguimiento y la *adaptación de su enseñanza al diagnóstico* del alumnado, que el profesor realiza, estando atento o en alerta a lo que manifiesta el alumno en un momento de su aprendizaje. A continuación, presentamos los cinco rasgos:

1. La valoración del rasgo del *foco matemático* refleja las oportunidades para los alumnos de motivarse con contenidos y actividades matemáticas importantes. También refleja si las exposiciones del profesor en la discusión de la resolución de un problema intentan ayudar a los alumnos a establecer conexiones matemáticamente pertinentes.
2. El rasgo de *demanda cognitiva* muestra si las matemáticas han sido consideradas, si la implicación de los estudiantes ha sido casi nula, o, por el contrario, si los estudiantes se implican en "retos productivos" mientras trabajan en matemáticas, para tratar de aprovechar las oportunidades de aprendizaje matemático.
3. En el rasgo de *acceso* se trata de mostrar si los alumnos han tenido acceso a la participación activa en clase, a partir de una promoción de acciones discursivas entre los estudiantes y profesor. Se muestra si durante las exposiciones del profesor, a menudo se da la palabra a estudiantes, o se pregunta su opinión, invitando a la participación, potenciando la atención y propiciando momentos interactivos consubstanciales con las actividades matemáticas.
4. En cuanto al rasgo de *autoridad*, se contempla si se incita a los alumnos a recapitular y establecer consensos.
5. Se considera el rasgo de seguimiento y *adaptación de la enseñanza al diagnóstico* del alumnado; si el profesor hace uso de los razonamientos de los estudiantes durante sus exposiciones; si intenta conectar y ayudar a reflexionar sobre aspectos que se han dicho o realizado durante el trabajo previo.

Sobre la generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje

Se parte de la concepción social del aprendizaje de Palincsar (1998), considerando que el aprendizaje surge durante las interacciones que se producen entre distintos miembros de la comunidad de aprendizaje: alumnos, profesor y a la utilización de artefactos tecnológicos. Entendemos las oportunidades de aprendizaje matemático como la relación entre contenidos matemáticos, acciones discursivas del profesor y del alumnado, y la mediación de recursos tecnológicos (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). Consideramos el aprovechamiento como la modificación del conocimiento matemático, bien sea conceptual o procedimental, de manera que el estudiante es capaz de elaborar un discurso o protocolo escrito, que nos permita afirmar que se ha producido un cambio desde el punto de vista epistémico (Ferrer, Doorman y Fortuny, 2015).

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Los datos se tomaron en una clase de 3º de la E.S.O. de un Centro de Educación Secundaria que pertenece a un ámbito sociocultural medio-alto y está situado en Barcelona (Ferrer, 2016). La docente de la clase, con pseudónimo Sara, era una profesora con 8 años en el momento de la investigación (curso 2013-2014), involucrada en la anticipación de los aprendizajes de sus alumnos, así como en la preparación y la gestión de la discusión en gran grupo. La clase contaba con 16 alumnos de los cuales destacaremos a una alumna, Alba.

Para propiciar que una discusión en gran grupo, se plantea la resolución de un problema que permita aplicar sus saberes a una situación nueva para ellos. El problema que se aborda en esta comunicación consiste en explicar qué transformaciones se necesitan para pasar de una figura a otra (Figura 1). Los alumnos han de conocer el giro y la homotecia y deben identificar en el dibujo los elementos que definen ambas transformaciones, para ello, abordan el problema con GeoGebra (http://www.geogebra.org) como artefacto, que media en su resolución y con la que estaban familiarizados.

Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha?

Explica con detalle tu respuesta.

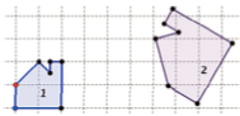


Figura 1. Enunciado del problema objeto de estudio

¿La resolución del problema se plantea siguiendo una secuenciación en tres fases: antes de la discusión en la que los alumnos trabajan por parejas, durante la discusión en el grupo completo y después de la discusión en la que los alumnos trabajan de forma individual. De la primera y de la última fase disponemos de los ficheros generados en GeoGebra, con las notas aclaratorias hechas por los alumnos. En cuanto a la segunda fase de discusión, realizamos una trascripción de la discusión en gran grupo.

DATOS OBTENIDOS

La detección de oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, se realiza a partir del análisis de la interacción entre los participantes y sus acciones. Organizamos las intervenciones dentro del episodio diferenciándolas según el participante que realiza la intervención (Morera, 2013).

En la Tabla 1, recogemos extractos de dos episodios de una discusión sobre la resolución del problema, elegimos algunos turnos de la interacción de la profesora con Alba. Se asocian, los turnos de la discusión de la profesora, con los descriptores de los rasgos listados en la sección sobre la etopeya y rasgos del profesor del marco teórico y los correspondientes grados de adquisición (Tabla 1). Se analiza el hecho de gestionar la toma de decisiones e identificar las transformaciones geométricas y averiguar los elementos que las caracterizan. Dividimos la transcripción de la discusión en episodios atendiendo a las dimensiones discursiva e instrumental. Utilizamos esta codificación de episodios para ejemplificar oportunidades de aprendizaje matemático, generadas por los participantes en la discusión profesor y alumnado y el artefacto considerado.

Tabla 1. Extractos de dos episodios de la discusión

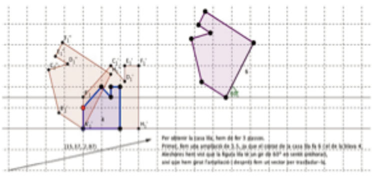
Turnos			*Descriptores*	*Rasgos*
		Extracto del Episodio 2: Estudio de estrategias para resolver o argumentar		
87	Profesora:	¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación?	[Petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas]	Demanda Cognitiva Acceso
88	Alba:	Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden.		
89	Profesora:	No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.	[Explicitación de propiedades de una homotecia]	Matemáticas

90 Alba:	Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.		
91a Profesora:	Muy bien. ¿Entendéis este razonamiento? Alba ha visto que al no tener la misma medida seguro que necesitaré la homotecia, que es de las cuatro transformaciones la única que me cambia las medidas, pero entonces piensa que ¿solo con una homotecia podré ir? No, porque une los puntos homólogos y no se cortan en el centro de la homotecia.	[Recapitulación sobre las propiedades de una homotecia]	Autoridad
91b Profesora:	Visualmente alguien tendría otro argumento de por qué no puedo ir solo con una homotecia?	[Invitación a la búsqueda de alternativas]	Diagnóstico Acceso
Extracto del Episodio 4: Conexiones con otras situaciones			
139 Profesora:	Es que el 60 este… lo hemos visto muy claro, pero el 60 este… era cuando estaba aquí para llevarlo aquí abajo, pero ahora para llevarlo de aquí a aquí no tiene por qué ser 60.	[Complemento de explicación sobre la amplitud del ángulo de giro]	Matemáticas
140 Alba:	Lo podemos hacer con un deslizador		
141 Profesora:	¿Cómo lo podríamos…? Bueno, con un deslizador lo podríamos hacer hasta que encaje. Pero, ¿qué tenemos aquí?	[Validación y petición de explicación sobre la obtención del ángulo de giro]	Diagnóstico
142 Alba:	Podemos hacer una circunferencia porque podremos calcular el ángulo.		
143 Profesora:	A ver, primero de todo vamos a comprobarlo. Si yo hago una circunferencia por aquí que pase por aquí, ¿me pasa por dónde me tiene que pasar?	[Petición de comprobación sobre la construcción de una circunferencia] con GeoGebra	Demanda Cognitiva

En este extracto de dos episodios se observó la oportunidad de aprendizaje *argumentativa* que caracterizamos por ‘Darse cuenta que la resolución de un problema matemático puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro’. Del mismo modo se recoge otra oportunidad de aprendizaje *argumentativa*, caracterizada por ‘Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de un problema geométrico’. Consideramos también la oportunidad de aprendizaje *procedimental* consistente en utilizar GeoGebra para realizar una homotecia y un giro. En el resto de la discusión, que duró 1 hora se identificaron otros tipos, pero que solo mostramos como ejemplo la que acabamos de describir.

Para analizar el aprovechamiento que han hecho los estudiantes de las citadas oportunidades de aprendizaje estudiaremos los protocolos escritos de los alumnos del aula recogidos en ficheros de GeoGebra antes y después de la discusión en gran grupo. A modo de ejemplo recogemos en este apartado las resoluciones de la alumna Alba en las que prestaremos atención a los hallazgos realizados tanto en relación al giro como a la homotecia.

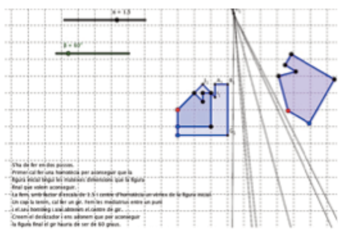
En la Figura 2, mostramos la resolución previa a la discusión en gran grupo en la cual explica razonadamente tanto el ángulo de giro como la razón de homotecia que además perfeccionará en las sucesivas fases. Toma como centro de giro y de homotecia un vértice de la figura. En esta fase, la alumna consigue resolver el problema de una forma intuitiva, ayudándose de traslaciones y evitando un cálculo reflexivo de los centros de cada transformación.



[Para obtener la casa de la derecha hay que hacer 3 pasos. Primero, hacemos una ampliación de razón 1.5, ya que el lado de la casa violeta hace 6 y el de la azul 5. Entonces, hemos visto que la figura violeta tiene un giro de 60º en sentido antihorario, así que hemos girado la ampliación y después hacemos un vector para trasladarla.

]Figura 2. Resolución de Alba antes de la discusión

Después de la discusión, la alumna explica la trasformación de homotecia, muestra una mayor profundización en la obtención de los elementos característicos de cada trasformación. Define el centro de giro a través del cálculo de mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos y utiliza deslizadores introducidos en la discusión (ver Tabla 1, turno [140]) para justificar el ángulo de giro y la razón de homotecia. Estos elementos corroboran empíricamente su primer razonamiento (Figura 3).



[Se tiene que hacer en dos pasos. Primero hay que hacer una homotecia para conseguir que la figura inicial tenga las mismas dimensiones que la figura final que queremos conseguir. La hacemos con factor de escala de 1.5 y centro de homotecia un vértice de la figura inicial. Una vez la tenemos, hay que hacer un giro. Hacemos las mediatrices entre un punto y su homólogo y así obtenemos el centro de giro. Creamos el deslizador y nos damos cuenta de que para conseguir la figura final el giro tendría que ser de 60 grados.]

Figura 3. Resolución de Alba después de la discusión

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En primer lugar, analizamos el discurso del profesor focalizándonos en los rasgos, para lo que aplicaremos una rúbrica construida ex profeso para valorar la etopeya de un profesor. En la Tabla 2 se muestra una rúbrica que recoge los diferentes grados o niveles que se pueden alcanzar de cada uno de los rasgos enumerados en el marco teórico, con la finalidad de poder realizar el análisis de la observación de la etopeya del profesor en episodios de discusión. La rúbrica muestra descriptores de las diferentes actuaciones con relación a los distintos grados de consecución. Para cada rasgo se presentan tres grados o niveles de dominio. El primer nivel de dominio establece un grado de adquisición del rasgo cercano al perfil de novel; el segundo nivel de dominio se plantea para un perfil avanzado, y el tercer nivel de dominio considera que se trata de un perfil de experto.

En segundo lugar, analizaremos como los alumnos aprovechan las oportunidades de aprendizaje que se ha inferido de los datos, para lo que tendremos en cuenta los distintos niveles que hacen en sus justificaciones sobre la necesidad de cada una de las transformaciones y el conocimiento que muestran relativo a los elementos característicos de cada trasformación y su nivel de adquisición.

En particular, distinguimos la elaboración de una tarea inmediata el primer nivel (1) de los tres que distinguimos, como puede ser indicar cualquier centro de giro, y luego realizar una translación; con la aplicación del conocimiento de que el centro de giro está a la misma distancia de un punto y su girado, y proceder a su identificación por medio de la construcción a través de la intersección de dos rectas mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos de la figura original y la girada, el nivel más avanzado (3).

Basándonos en lo anterior, proponemos una rúbrica (ver Tabla 3) para evaluar el aprovechamiento de los alumnos, en particular las oportunidades de aprendizaje que acabamos de identificar en estos episodios, que indique el nivel de adquisición a distintos niveles:

- Nivel 1 = no menciona ningún argumento explicativo,
- Nivel 2 = hace una explicación sin reflexión,
- Nivel 3= hace una explicación propia basada en pruebas empíricas o deducción formal.

Tabla 2. Grados de los rasgos para observar el discurso del profesor

Rasgo \ Grados	1	2	3
Matemáticas	Foco en las capacidades; poca atención en hacer notar los conceptos, conexiones o actividades matemáticas.,	Se pone más atención en los conceptos y a las conexiones matemáticas, pero sigue dándose una mínima importancia a las actividades matemáticas.	Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar actividades matemáticas.
Demanda cognitiva	La memorización es el procedimiento básico para aprender los contenidos.	Los estudiantes tienen oportunidades para hacer conexiones o para involucrarse en actividades, pero mucha parte del reto está acompañado por una guía estricta.	Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una actividad productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en actividades matemáticas.
Acceso	No hay un esfuerzo aparente para mejorar el acceso y hay claros patrones desiguales de participación de los estudiantes.	Se ven algunos esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar.	Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes.
Autoridad y responsabilidad	El profesor presenta la información y valora el trabajo de los estudiantes.	Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. El profesor sigue siendo la autoridad.	Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes.
Enseñanza por diagnóstico	No hay evidencias de recoger o usar los razonamientos de los alumnos.	Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen cuando cometen errores.	Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando la estructura de la clase preparada de antemano.

Aplicaremos una rúbrica para analizar los protocolos escritos de los alumnos en la primera y última fase, es decir, antes y después de la discusión en gran grupo.

En el caso de la alumna Alba, recogemos en la Tabla 3 los valores obtenidos en la rúbrica a partir de las resoluciones mostradas en las Figuras 2 y 3. Alba consigue en la primera fase distintas valoraciones en cada ítem de la rúbrica (1, 1, 1, 1, 3 y 3) ya que simplemente muestra la necesidad de hacer un giro y una homotecia, asocia a cada trasformación un centro en la propia figura y explica a través de una deducción formal tanto el ángulo de giro como la razón de homotecia. Por lo tanto, la valoración aditiva total es de 10, (1+1+1+1+3+3 = 10) y el nivel medio alcanzado en la primera fase es de 1,67. En la tercera fase, observamos una mejora en la identificación de la homotecia y de su centro de homotecia y sobretodo una deducción formal del centro de giro, en esta fase muestra un nivel medio de 2,5.

Tabla 3. Rúbrica previa a la discusión del trabajo de la alumna

	Antes de la discusión	Después la discusión
Identifica que se necesita un giro	1	1
Identifica que se necesita homotecia	1	3
Localiza centro de giro	1	3
Localiza centro de homotecia	1	2
Averigua el ángulo de giro	3	3
Averigua la razón de homotecia	3	3
Media de niveles	10/6 = 1,67	15/6 = 2,5

RESULTADOS

En la Tabla 2, se recogen la descripción de los distintos grados o niveles en los que muestra los rasgos característicos del profesor en cada una de sus intervenciones. Por ejemplo, si nos fijamos en la transcripción del extracto del episodio 2, turnos [87] a [91b], aparecen los rasgos del foco matemático y la demanda cognitiva con grado (3), el rasgo de autoridad, el uso de adaptación de la enseñanza al diagnóstico con grado (2), y el rasgo de acceso con grado 2 (turno [91b]) y con grado 3 (turno [87]) mientras que en las transcripciones del episodio 4, turnos [139] a [143], aparecen con grado (2) los rasgos del foco matemático, y la demanda cognitiva y el uso de adaptación de la enseñanza al diagnóstico. Estos cinco rasgos se pueden agrupar en tres dimensiones, en las que encuadrar la actividad profesional en el transcurso del discurso del profesor: *la implementación de actividades*, que agrupa a los rasgos f*oco matemático y demanda cognitiva*, *la gestión del aula*, como el uso de rutinas generales y ejemplos específicos, que agrupa los rasgos de *acceso y autoridad,* y la *adaptación de su enseñanza al diagnóstico* del alumnado, que el profesor realiza estando atento o en alerta a lo que manifiesta el alumno en un momento de la clase.

La Tabla 4 recoge los rasgos clasificados en estas tres dimensiones y calcularemos la relevancia de cada uno de estos tres niveles en el discurso realizado por Sara. En relación al foco matemático, al conseguir una valoración de 3 en el turno [89] y 2 en el turno [139] de un total de 22 puntos de valoración, consideramos que el peso que tiene el foco matemático en la etopeya de Sara es del 22,5%. Análogamente se computa la influencia de cada rasgo y se agrupan esos pesos por dimensiones. En la Figura 5 se muestra una visualización grafica de la graduación a grandes rasgos de la etopeya de Sara, a partir de los datos de la tabla anterior. Analizando análogamente toda la discusión de una hora de clase obtendremos los correspondientes perfiles. Evidentemente lo que aquí se muestran son solo resultados locales en un intervalo de tiempo muy pequeño, pero que nos ilustran la metodología de observación de las actividades profesionales del docente.

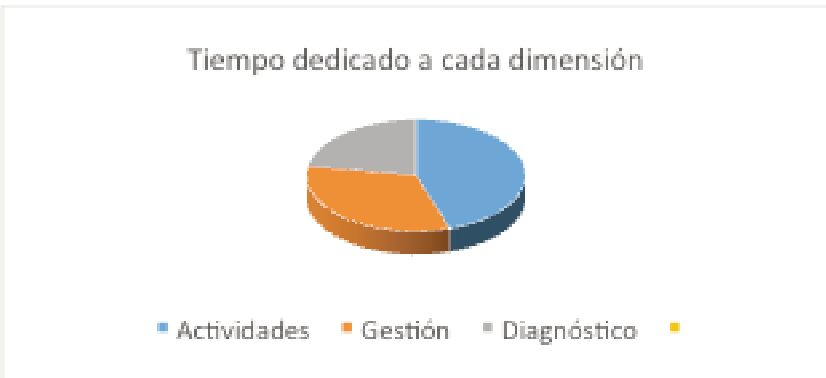


Figura 5. Representación de la etopeya de Sara por dimensiones

El enfoque de Sara está centrado más de la mitad de su tiempo docente en un porcentaje del 45,5% a la actividad y el contenido. Sara supone que, si los estudiantes tienen las experiencias "correctas", aprenderán mejor, proporcionando maneras más ricas para que los estudiantes puedan participar con el contenido. Sara dedica un menor porcentaje de su tiempo docente el 32,5%, a trabajar con nomas y hábitos escolares para controlar la gestión de la clase. Va desarrollando varias rutinas que le permite gestionar el trabajo de aula y centrarse en momentos clave del aprendizaje especifico. El estar atenta, durante un 22,5% porcentaje de su tiempo, diagnosticando lo que sus alumnos, en estos episodios Alba, entiende del contenido, incluyendo sus malentendidos, es un punto de partida para las actividades de clases de Sara. Considera los conocimientos de la alumna, como las estructuras mentales de acogida sobre las que basa la generación de su aprendizaje.

Tabla 4. Relación ente los grados de etopeya y dedicación del tiempo docente

Dimensiones	Rasgos	Grados	Grado relativo	Grado relativo
Implementación de la actividades	Foco matemático	(3) turno [89] (2) turno [139]	(3+2)/22 ≈ 0,225 = 22,5%	*Actividades: 45%*
	Demanda cognitiva	(3) turno [87] (2) turno [143]	(3+2)/22 ≈ 0,225 = 22,5%	
Gestión del aula	Acceso	(3) turno [87] (2) turno [91b]	(3+2)/22 ≈ 0,225 = 22,5%	*Gestión: 32,5 %*
	Autoridad	(2) turno [91a]	2/22 ≈ 0,1 = 10%	
Enseñanza por diagnóstico	Enseñanza por diagnóstico	(3) turno [87] (2) turno [91b]	(3+2)/22 ≈ 0,225 = 22,5%	*Diagnóstico: 22,5 %*
	Recuento total	3+2+3+2+3+2+2+3+2=**22**		

Además, podemos calcular la media de los niveles de todos los rasgos, considerando que nos ofrece una aproximación la valoración global de la etopeya de Sara. Definiendo la etopeya en los valores análogos a cada rasgo (del 1 al 3), en este episodio de la discusión, Sara consigue una valoración media de 22/9 = 2,44. De estas gradaciones de las dimensiones, podemos inferir que su etopeya es alta, lo que constataremos con el aprovechamiento de sus alumnos.

En la Tabla 5 se muestran por filas los resultados de los estudiantes con nombres ficticios. El análisis se ha realizado del mismo modo que se ha detallado en el apartado anterior para el caso de Alba. Observamos que de media los alumnos incrementan su nivel medio alcanzado después de la discusión respecto al nivel medio que tenían antes de la discusión en 0,56 puntos de un total de 3, es decir, un 18,6%. Además, el impacto de la discusión ha sido positivo en el 68,75% del alumnado y nunca ha tenido un impacto negativo. En concreto, observamos que Alba ha hecho un aprovechamiento creciente de la oportunidad de aprendizaje conceptual 'Identificar las transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro con una homotecia', llegando a un grado entre 2 y 3. Por lo tanto, se podría hablar de una variación de niveles de 2,5 – 1,67 = 0,83, llegando a aumentar casi un punto de un máximo de 3.[2]

Por lo tanto, evidenciamos con estos resultados que los alumnos, en particular Alba, han realizado un aprovechamiento de la discusión en gran grupo gestionada por la docente que muestra una etopeya alta.

Tabla 5. Estudio del aprovechamiento de la oportunidad de aprendizaje detectada

Alumno	Antes de la discusión	Después la discusión	Incremento
Adriá	1	1	0
Álex	1	1,83	0,83
Carla	1,67	2,33	0,67
Alba	1,67	2,5	0,83
Mireia	0,67	2	1,33
Anna	0,67	1,83	1,16
Belén	0,67	1,83	1,16
Saray	0,67	1,83	1,16
Berta	1,83	1,83	0
Irene	1,83	2,17	0,34
Eduardo	1,5	2	0,5
Javier	1,5	1,5	0
Isabel	1	1,67	0,67
María	1	1	0
Martí	1,5	1,5	0
Oriol	1,5	1,83	0,33
Medias	1,23	1,79	0,56

CONCLUSIONES

En este estudio hemos articulado la noción de etopeya, como un constructo que nos permite observar la actividad profesional de un profesor, a partir de considerar distintos rasgos de su actuación docente. Se ha propuesto además una rúbrica, que ha permitido la gradación de dichos rasgos. A partir del análisis del discurso en una discusión sobre la resolución de un problema, se ha analizado conjuntamente la gradación de los rasgos con el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

Este estudio nos ha proporcionado evidencias de los rasgos del profesor y del impacto de su actividad docente en sus alumnos. En particular, la profesora Sara, ha iniciado el proceso comunicativo conectando con los actuales modos de dar sentido y significado de sus alumnos, concretamente mostramos el caso de Alba, y les ha ayudado a ver y mirar de una manera matemáticamente atractiva. Al analizar conjuntamente los rasgos de la etopeya de un profesor con el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje del conjunto de sus alumnos, nos permite relacionar un alto grado de puntuación en los rasgos del profesor con el aprovechamiento que hacen sus alumnos de las oportunidades de aprendizaje provistas en la discusión.

Aunque los datos que hemos mostrado son para un corto periodo de tiempo, en extractos de dos episodios, podemos aventurar, para una futura línea de investigación, que una etopeya alta genera oportunidades de aprendizaje, y que, en un entorno más amplio, también se propician a que se aprovechen.

Referencias

Espinoza-Vázquez, G., Verdugo-Hernández, P., Zakaryan, D., Carrillo, J. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a través del concepto de función. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 197-206). Málaga: SEIEM.

Ferrer, M. (2016). *Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas*. Manuscrito de tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, España.

Ferrer, M., Doorman, M. y Fortuny, J. M. (2015). The classroom discussion and the exploitation of opportunities to learn mathematics. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Hobart, Australia: PME.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 385-405.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 253-264) Málaga: SEIEM

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Manuscrito de tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, España.

Nystrand, M. y Duffy, J. (2003). *Towards a Rhetoric of Everyday Life: New Directions in Research on Writing, Text, and Discourse*. University of Wisconsin Press.

Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 45*, 345-375.

Schoenfeld, A.H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *Mathematics Education ZDM* 45(607). doi:10.1007/s11858-012-0483-1

Triviño, G. y Sugeno, M. (2013). Towards linguistic descriptions of phenomena. *International Journal of Approximate Reasoning, 54*(1), 22-34.

[1] Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P del Ministerio de Economía y Competitividad.

[2] En (García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer M. y Morera, L., 2016) se había estudiado el nivel adquirido por Alba en cada una de las fases a través de conjuntos borrosos, y a través de sistemas de reglas articulado bajo el paradigma Granular Linguistic Model of a Phenomenon (Triviño y Sugeno, 2013) se infiere el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje a partir de los valores de cada nivel, obteniéndose un resumen lingüístico del aprovechamiento realizado por Alba. En este caso, se obtenía un aprovechamiento global alto de las oportunidades de aprendizaje, que lingüísticamente se podía resumir con el siguiente párrafo: "La alumna Alba ha obtenido un nivel alto de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el Giro y un nivel medio de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con la Homotecia. Por lo tanto, se considera que el aprovechamiento total ha sido alto."

COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD CLÁSICA Y FRECUENCIAL POR FUTUROS PROFESORES

Prospective teachers' understanding of classical and frequentist approaches to probability

Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas de 60 futuros profesores de Educación Primaria en España al trabajar, en parejas y de modo individual, sobre una situación de enseñanza basada en los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad. De los resultados obtenidos destacamos su escaso razonamiento combinatorio mostrado en la dificultad de enumerar correctamente los sucesos que conforman el espacio muestral, así como la dificultad en estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso en cierto número de ensayos.

Palabras clave: *probabilidad (significado clásico y frecuencial), futuros profesores.*

Abstract

In this paper, we analyse the responses of 60 primary education prospective teachers in Spain, part of which work in pairs and others individually, on a teaching situation based on the classical and frequentist approach of probability. We emphasize the participants' scarce combinatorial reasoning suggested by the difficulty of correctly enumerating the events that make up the sample space, as well as the difficulty in estimating the expected frequency of times that a number occurs in a certain number of runs.

Keywords: *probability (classic and frequency meaning), prospective teacher.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la probabilidad se inicia actualmente en España en la Educación primaria para fomentar la experiencia del alumno, que es la clave para su desarrollo cognitivo y emocional en esta etapa. Los conocimientos a desarrollar se refieren a la identificación de situaciones aleatorias, la estimación y cálculo de la probabilidad de un suceso y a establecer conexiones entre la realidad y el conocimiento matemático en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida (MECD, 2014). Además, se sugiere trabajar con los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

El profesor, encargado de impartir estos conocimientos, ha de diferenciar y dominar elementos que caracterizan estas aproximaciones y ser capaz de relacionarlas, comprendiendo las exigencias de cada enfoque y la diferencia entre estimación a partir de la frecuencia relativa y probabilidad teórica (Batanero, 2005). El objetivo de este trabajo es evaluar este conocimiento en una muestra de futuros profesores. Para ello se analizan sus respuestas escritas a una actividad práctica que se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), completando su análisis y analizando únicamente el componente matemático, dentro del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor utilizado por estos autores. En lo que sigue se exponen los fundamentos, método, resultados y conclusiones de nuestro estudio.

Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

FUNDAMENTOS

El concepto de probabilidad ha recibido diferentes interpretaciones a lo largo de su historia, siendo dos de los principales los enfoques clásico y frecuencial, por su papel en el currículo de Educación Primaria (MECD, 2014).

La definición clásica de la probabilidad surge desde los juegos de azar, debida, en particular, a la correspondencia entre Pascal y Fermat en la década de 1650, aunque la primera definición formal de este concepto es debida a de Moivre (1967) en *The Doctrine of Chances*:

> Si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (p. 1).

La definición más conocida bajo esta aproximación es aportada por Laplace (1995) como: "una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles" (p. 28). Como establecen Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición es circular pues el término "equiprobable" se incluye en la definición y solo se puede aplicar a experimentos con un número finito de posibilidades. Sin embargo, se usa mucho en la escuela a propósito de los juegos, motivadores y fáciles de aplicar, pero el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es muy limitado.

El enfoque frecuencial surge al tratar de superar los inconvenientes y controversias filosóficas del enfoque clásico. El primer autor que sugiere que la probabilidad de un suceso se puede estimar con la precisión que se desee a partir de la frecuencia relativa, observada en una serie grande de ensayos del mismo experimento, fue Bernoulli (1987), quien demuestra la ley débil de los grandes números, que establece esta convergencia. La demostración de Bernoulli se consideró en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Además, amplía la posibilidad de aplicar el cálculo de probabilidades, pues no se exige la equiprobabilidad de los sucesos elementales (Batanero, 2005). La utilidad de esta definición en la enseñanza es clara pues, permite establecer la unión entre la estadística y la probabilidad al utilizar el concepto de frecuencia relativa de la estadística aplicándolo en el cálculo de probabilidades (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Además, gracias a la tecnología, es muy sencillo aplicar este enfoque usando la simulación para repetir un cierto experimento un número grande de veces y observar empíricamente la convergencia. Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma.

Sin embargo, esta definición presenta algunos problemas pues, al partir de la frecuencia relativa, no obtenemos un valor exacto de la probabilidad sino una estimación de la misma, por tanto, puede variar cada vez que tratamos de estimarla. La segunda cuestión es que, en la mayor parte de los casos, es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y hay circunstancias (por ejemplo, en medicina, en inversiones, etc.) donde con seguridad sabemos que las condiciones de una y otra repetición son diferentes. Por último, es difícil comprender cuál es el número de experimentos que debemos realizar para que el valor de la probabilidad estimado sea válido o considerado bueno.

Investigaciones previas

Como se indica en Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016), la investigación sobre formación de profesores para enseñar probabilidad es muy escasa. Sin embargo, el futuro profesor, como recomienda el currículo, ha de enseñar en la Educación Primaria con estos dos enfoques y requiere un conocimiento adecuado para ofrecer una enseñanza de calidad a sus alumnos (Vasquez y Alsina, 2015). Estos autores construyen un cuestionario para analizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor, encontrando un conocimiento muy deficiente de la probabilidad en una muestra de 93 profesores de primaria chilenos. Resultados similares son obtenidos por Mohamed (2012) en su investigación con 283 futuros profesores de Educación Primaria pues, estos estudiantes presentan dificultades y utilizan heurísticas erróneas en conocimientos fundamentales del tema, entre otros, cita la confusión entre suceso seguro y posible, la falta de razonamiento combinatorio o ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios, de percepción de la independencia y dificultades asociadas al experimento compuesto. Azcárate (1995), por su parte, estudió las respuestas a un cuestionario de 57 futuros profesores de Educación Primaria, indicando que la mayoría relacionaron la aleatoriedad con la causalidad, no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiar los fenómenos aleatorios. También observó el predomino de esquemas causales, así como dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial en la cuantificación de probabilidades y en la idea de juego equitativo.

Serrano (1996) planteó otro cuestionario a 130 futuros profesores para evaluar tres componentes de su conocimiento sobre la probabilidad: a) las propiedades atribuidas a las secuencias de resultados aleatorios; b) la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial; y c) el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Encontró una fuerte presencia de la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y del enfoque en el resultado (Konold, 1989), es decir, interpretar un problema de probabilidad en forma no probabilística.

La influencia de desarrollar actividades de simulación en la formación de los futuros profesores fue estudiada por Batanero, Cañizares y Godino (2005) en una muestra de 132 participantes. Se observó que la heurística de la representatividad, el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y el enfoque en el resultado disminuyen bastante después del desarrollo de estas tareas, al dar oportunidad a los estudiantes de interaccionar con el problema gracias a la tecnología.

El trabajo más completo sobre conocimiento de la probabilidad por futuros profesores es el de Gómez (2014) que, con base a un estudio detallado del currículo y los libros de texto, construye un cuestionario con una metodología rigurosa que aplica a 157 futuros profesores. Además, evalúa el conocimiento diferenciado de las aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. En los resultados obtenidos, los futuros profesores presentaron un conocimiento adecuado respecto al enfoque clásico de la probabilidad; por ejemplo, al enumerar el espacio muestral y en el cálculo de probabilidades sencillas. Presentaron mayores dificultades en el desempeño del enfoque frecuencial, donde muchos participantes no perciben la variabilidad de las pequeñas muestras o caen en el sesgo de equiprobabilidad.

Ninguno de los trabajos anteriores trata de analizar la forma en que los futuros profesores de Educación Primaria integran los significados clásico y frecuencial de la probabilidad. Si hemos encontrado algunas investigaciones con estudiantes, como el de Smith y Hjalmarson (2013), que investiga la comprensión de los procesos aleatorios por los profesores y la de Sánchez y Valdés (2017), en que analiza el trabajo de 30 estudiantes cuando abordan una situación de muestreo en que deben predecir o bien la composición de la población, o bien los resultados en diferentes muestras, donde se caracteriza las ideas informales de aleatoriedad, variabilidad e independencia.

Para completar las investigaciones previas, en este trabajo analizamos las respuestas escritas de una muestra de futuros profesores cuando se enfrentan a un problema con datos empíricos sobre un juego que contradicen las probabilidades calculadas en sentido clásico. La actividad se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), quienes también la utilizaron en la formación de profesores pero en la pizarra por el profesor. En dicho estudio se describe este proceso de resolución colectiva, junto a las sugerencias esporádicas de alumnos aislados. En nuestro caso, completamos este análisis y estudiamos las respuestas en un pequeño grupo de estudiantes que las resuelven individualmente por escrito y las comparamos con otro grupo que las resuelven en pareja, para comparar cuál de estos tipos de agrupaciones produce mayor número de respuestas correctas.

METODOLOGÍA

El estudio se llevó a cabo en una muestra de 60 estudiantes de segundo curso del Grado de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Granada, como actividad práctica al finalizar la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria. En esta asignatura se abordan los fundamentos de la Didáctica de las matemáticas, así como los aspectos cognitivos y didácticos referidos al sentido matemático en los distintos núcleos temáticos; además, los estudiantes habían cursado en primer curso los contenidos relativos a la probabilidad durante aproximadamente una semana.

Raquel es maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus estudiantes asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación, Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de estudiantes que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Número de veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas: ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 1. Ficha de trabajo de los estudiantes

Para explicar la actividad y facilitar la recogida de datos, se diseñó una ficha de trabajo que incluía la secuencia de enseñanza de la probabilidad llevada a cabo por una maestra (tomada de la investigación de Rivas y Godino, 2015), que se muestra en la Figura 1. Las preguntas que debían responder por escrito los futuros profesores, referidas a dicha secuencia de enseñanza son:

1. Analiza la actividad 1. Indica quién tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.
2. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?
3. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

Recogidas las respuestas se realizó un análisis cualitativo de las mismas, partiendo de las categorías descritas por Rivas y Godino (2015) que se completaron mediante un proceso cíclico.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resolución del problema desde el significado clásico de probabilidad

Para resolver la primera actividad mostrada en la Figura 1, se puede utilizar la enumeración sistemática del espacio muestral del juego y representar los sucesos posibles en una tabla de doble entrada o diagrama de árbol. Dado que no todas las sumas de puntos de los dados tienen la misma probabilidad de ocurrir, son más probables las sumas intermedias, que justamente corresponden a las posibilidades de ganar el jugador A, siendo menos probables las posibilidades extremas, que corresponden a las posibilidades de ganar el jugador B. Aplicando el principio de indiferencia, pues todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad de ocurrir, se deduce que B gana 16 veces de 36 y A gana 20 veces de 36 (ver ejemplo de respuesta correcta en la Figura 2). Utilizando la regla de Laplace, como cociente entre casos favorables y posibles, se obtienen las probabilidades teóricas de A: P(A)= 20/36=0,55 y B: P(B)= 16/36= 0,45. Por tanto, el jugador A tiene ventaja en este juego.

A continuación, se describen las respuestas de los futuros profesores a la tarea, categorizadas según su corrección o tipo de error cometido, así como las estrategias o recursos que fueron utilizados.

R1. Respuesta correcta. Los futuros profesores identifican correctamente los sucesos correspondientes a las sumas en las que ganan A y B, y calculan las probabilidades correspondientes aplicando la regla de la suma, o bien el suceso complementario. Mostramos en la Figura 2 un ejemplo en que el estudiante usa una tabla de doble entrada para formar el espacio muestral producto, marcando con colores los sucesos favorables al jugador A o B, y al margen de la tabla calcula las probabilidades aplicando la regla de Laplace. Otros estudiantes utilizan otros recursos para hacer la enumeración sistemática de casos posibles teniendo en cuenta el orden.

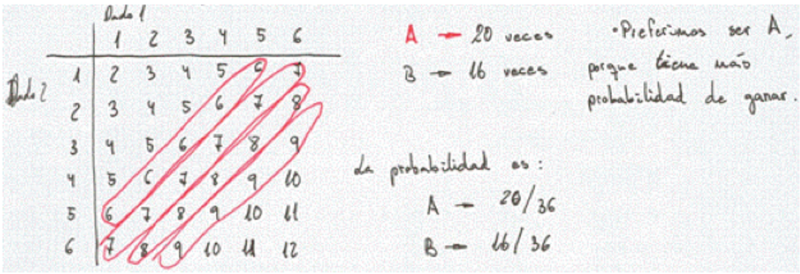


Figura 2. Enumeración sistemática del espacio muestral mediante la tabla de doble entrada

R2. Respuesta correcta relacionando los dos enfoques de la probabilidad. Un estudiante calcula la probabilidad de ganar el juego los jugadores A y B, pero también indica que si se tienen en cuenta los resultados de la suma, sin considerar los diferentes resultados para obtenerla, aparentemente ganaría B y se cometería un error. Se trata de una solución correcta y más avanzada que la anterior, puesto que pone en relación los dos enfoques de la probabilidad. Como se muestra en la Figura 3, el estudiante analiza, en primer lugar, los resultados empíricos del juego (donde B gana) e indica que este resultado lleva a cometer un error, pues en la probabilidad teórica, el que gana el juego es A con probabilidad 20/36 frente a B, con probabilidad 16/36.

R3. Parcialmente correcta. Cuando el estudiante afirma que A tiene ventaja sobre B, observando que es más probable que al lanzar dos dados la suma de puntos sea favorable al jugador A, pero el argumento utilizado no es totalmente correcto, como se muestra en el siguiente ejemplo: "A tiene ventaja porque aunque tiene sólo un 36% (aproximado) de posibilidades de ganar sería raro que salieran dos números pequeños o dos números grandes, que son los números que necesita B para ganar." Este estudiante da una respuesta correcta, pero su argumentación no lo es, ya que por un lado considera los sucesos equiprobables (Lecoutre, 1992) y deduce que A tiene una probabilidad de ocurrencia de 4/11 (un 36% aproximadamente) y B de 7/11 (un 64% aproximadamente). Por otro lado, indica que es difícil o raro que salgan dos números pequeños o dos grandes en el lanzamiento de los dados para que gane B, lo que muestra una limitación en su razonamiento según el sesgo de disponibilidad, descrito por Kahneman, Slovic y Tversky (1982).

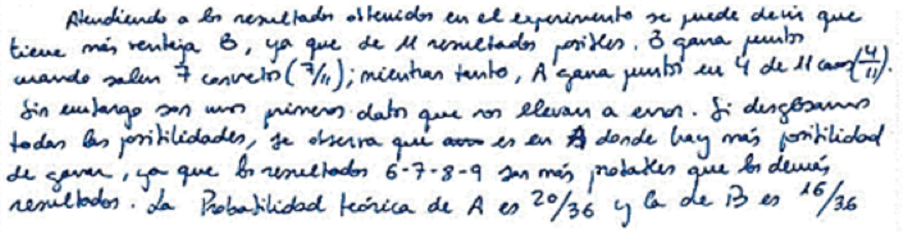

Atendiendo a los resultados obtenidos en el experimento se puede decir que tiene más ventaja B, ya que de 11 resultados posibles, B gana puntos cuando salen 7 concretos (7/11); mientras tanto, A gana puntos en 4 de 11 casos (4/11). Sin embargo son unos primeros datos que nos llevan a error. Si desglosamos todas las posibilidades, se observa que ahora es en A donde hay más posibilidad de ganar, ya que los resultados 6-7-8-9 son más probables que los demás resultados. La Probabilidad teórica de A es 20/36 y la de B es 16/36

Figura 3. Respuesta a la cuestión 1 mediante lenguaje verbal y simbólico

R4. Respuesta incorrecta con sesgo de equiprobabilidad. Muchos estudiantes indican que B tiene ventaja en el juego, pues consideran que todas las posibles sumas de los dos dados tienen igual probabilidad de ocurrencia, es decir, son consideradas sucesos equiprobables (Lecoutre, 1992). La diferencia con el caso anterior, es que también fallan en identificar el jugador que tiene ventaja en el juego.

R5. Respuesta incorrecta por error de orden (espacio muestral reducido). Un estudiante muestra en su respuesta el error de orden (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1997) al considerar como único suceso la ocurrencia de dos sumas con distinto orden de sumandos. En el caso que nos ocupa, este error es comprensible, pues la suma tiene la propiedad asociativa pero, a pesar de ello, hay que diferenciar los resultados según el orden en que ocurren en los dados para el cálculo de probabilidades pues, si se comete este error, el espacio muestral queda reducido.

En la Figura 4 se muestran los resultados obtenidos a esta cuestión, donde se observa que la mayoría de futuros profesores contestaron correctamente (40% de los estudiantes en forma individual y el 90% de quienes responden en pareja), aunque solo uno relaciona los dos significados de probabilidad en su respuesta. Los resultados son mejores en aquellos que trabajan en parejas.

En las respuestas incorrectas, el error más frecuente es el sesgo de equiprobabilidad (50% de los estudiantes que responden de modo individual y el 5% de quien responde en pareja) y solo un estudiante respondió incorrectamente por error del espacio muestral reducido. Pocos estudiantes responden de modo parcialmente correcto (5% de estudiantes de manera individual y 5% en pareja) y sus argumentos muestran el sesgo de equiprobabilidad. Al comparar los resultados de esta pregunta con la experiencia de aula de Rivas y Godino (2015), destacamos que en ambos trabajos predominan los mismos errores, el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido, aunque los autores no indican la frecuencia en sus estudiantes.

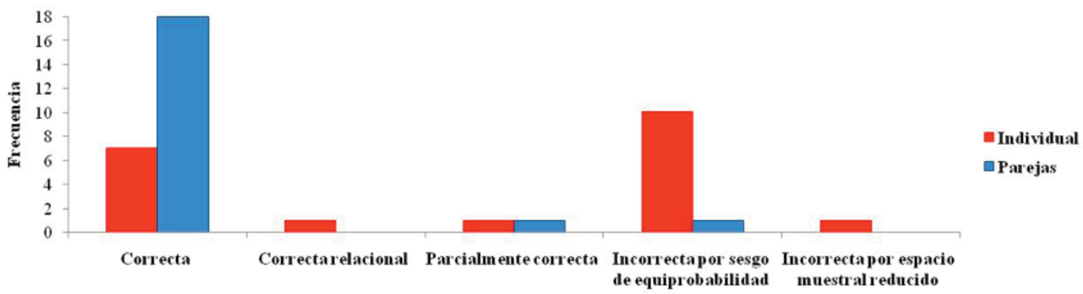


Figura 4. Frecuencia de respuestas de los estudiantes a la primera tarea

De los recursos utilizados por los futuros profesores para responder a la cuestión, en la Figura 5 se muestran las diferentes representaciones utilizadas, así como su tendencia de uso según los estudiantes respondieron en parejas o individualmente. Las representaciones más utilizadas fueron el lenguaje verbal y simbólico y la tabla de doble entrada o los esquemas/tablas de recuento de resultados, el diagrama de árbol sólo fue utilizado por un estudiante.

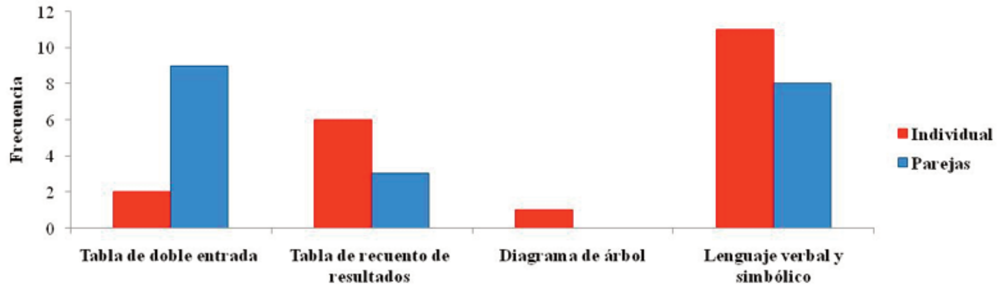


Figura 5. Frecuencia de recursos utilizados por los estudiantes en la primera tarea

Resolución del problema desde el significado frecuencial de probabilidad

Se espera que los futuros profesores posean una comprensión, al menos intuitiva, de la ley de los grandes números y argumenten que la variabilidad de éxito en la ganancia en 10 jugadas no se tiene que repetir si el experimento se realizase unas 100 veces. Además, como la frecuencia esperada de un suceso S en n repeticiones de un experimento ($F_e(S)$) viene dada por su probabilidad ($P(S)$) mediante la expresión: $F_e(S) = n * P(S)$, los futuros profesores debieran obtener las frecuencias esperadas utilizando dicha fórmula, puesto que calcularon la probabilidad teórica de cada jugador en la cuestión anterior. Por otro lado, si se piensa en lanzar los dos dados 36 veces, y teniendo en cuenta los casos favorables para cada suma, se deduce que *A* ganaría 20 veces de 36 frente a 16 de cada 36 que ganaría *B*; o lo que es igual, 5 veces de 9 para *A* frente a 4 veces de 9 para *B*. A continuación, se describen las categorías de respuestas de los futuros profesores a esta actividad.

R1. Respuesta correcta. La mayoría de estudiantes utilizaron los resultados de la pregunta 1 para dar un valor correcto a la frecuencia esperada de resultados en que gana *A* y *B*, utilizando uno u otro de los métodos expuestos anteriormente. Como se muestra en el siguiente ejemplo, se indican las probabilidades teóricas y frecuencias esperadas en nueve experiencias, por tanto, se ha usado el cálculo de probabilidades del primer apartado: "*A* = 0,55; 5 de cada 9. *B* = 0,44; 4 de cada 9".

R2. Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad. La mayoría de futuros profesores que mostraron el sesgo de equiprobabilidad en la primera actividad lo mantuvieron al resolver estas cuestiones, como se muestra en la siguiente respuesta: "Las sumas de los valores de *B* seguirían saliendo con más frecuencia acercándose a 7/11 de posibilidades que salieran. Con más frecuencia ganaría *B* que *A*".

R3. Incorrecta por espacio muestral reducido. Se encontraron más respuestas en esta categoría que en la cuestión anterior, al pedir a los futuros profesores estimar los resultados para los jugadores *A* y *B* con muchas tiradas. En su mayoría, utilizan las respuestas de la pregunta 1, donde omiten posibilidades en la enumeración del espacio muestral quedando reducido a sólo 11 posibilidades (cuando, sin tener en cuenta el orden deberían ser 21 y 36 teniéndolo en cuenta).

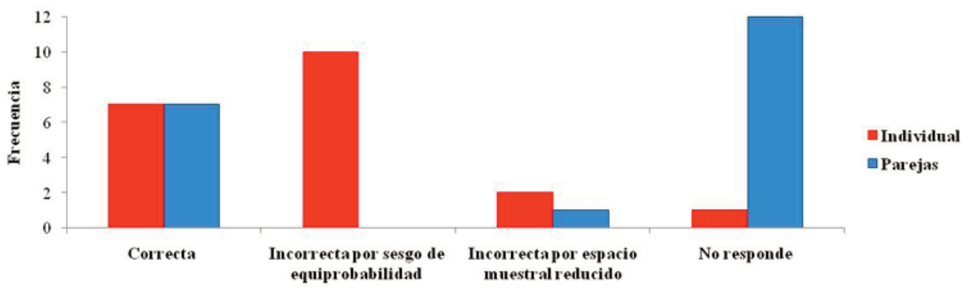


Figura 6. Frecuencia de respuestas de los estudiantes a la segunda tarea

En la Figura 6 se puede observar la dificultad de los futuros profesores en afrontar con éxito la tarea. En relación a la actividad anterior, los errores son más abundantes, así como la ausencia de respuesta (25 de los 60 estudiantes). Los estudiantes que contestaron correctamente, 21 de los 60, supone sólo la tercera parte, y no hay respuestas parcialmente correctas. El error más frecuente fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en 10 estudiantes de la muestra y 4 estudiantes contestaron incorrectamente por espacio muestral reducido. Rivas y Godino (2015) no plantean esta pregunta.

Relación entre los significados clásico y frecuencial de la probabilidad

Al comparar los datos que se presentan en la secuencia de enseñanza (se reúnen los resultados de las 10 experiencias de los 10 grupos que organizó la maestra) y el caso teórico (analizado en la primera pregunta), se pueden observar grandes diferencias (Figura 7).

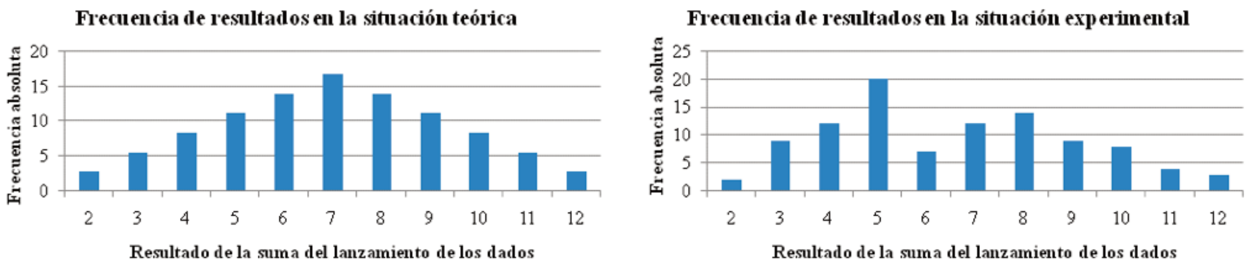


Figura 7. Distribución de frecuencias en 100 experiencias del juego (teóricas y en el caso planteado)

Se espera que el estudiante rechace la posibilidad de estimar las probabilidades de ganar cada jugador mediante la frecuencia relativa y que argumente que no serían suficientes los datos de esta tabla pues la estimación de la frecuencia teórica es mala. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas de acuerdo a las siguientes categorías:

R1. Respuesta correcta. La mayoría de futuros profesores responde correctamente, indicando que no es suficiente la tabla con los datos de toda la clase para obtener conclusiones del experimento realizado. Los argumentos se basan en el número de veces que gana *B* en dicha tabla, pues es superior al de *A*, con lo que la probabilidad teórica y su estimación empírica no coinciden.

R2. Parcialmente correcta. Algunos estudiantes responden correctamente a una de las dos preguntas planteadas, por lo que poseen un conocimiento adecuado pero sólo en parte. En el siguiente ejemplo se muestra la respuesta de un estudiante que considera que las tiradas de los dados en la tabla son suficientes para determinar un ganador en el juego pero, por otro lado, responde correctamente que no se debe considerar la probabilidad de ganar *A* según la frecuencia relativa, pues ésta indica solo las veces que gana *A* y no su probabilidad:

> — Sí, considero que las tiradas que se hacen son suficientes para determinar un ganador.
>
> — No, porque la probabilidad es la opción que se tiene de sacar "x" resultados y la frecuencia es el número de veces que se repite un valor, es decir, las veces que gana.

R3. Respuesta incorrecta. Serían los estudiantes que responden incorrectamente a las dos preguntas del apartado, como en la siguiente respuesta, donde se muestra la poca capacidad argumentativa del estudiante: "Sí, porque realiza bastantes tiradas y obtiene buenos resultados. Sí, porque es el número de veces que gana".

En la Figura 8 se muestra la frecuencia de estudiantes que respondió a la tercera pregunta, de las cuales 48 fueron correctas, lo que muestra una buena comprensión de la relación entre la probabilidad en sentido clásico y su estimación frecuencial. Encontramos respuestas parcialmente correctas en seis estudiantes que, aunque responden bien una de las preguntas, son inconsistentes en sus argumentaciones. Los resultados son mejores en aquellos que trabajan en parejas.

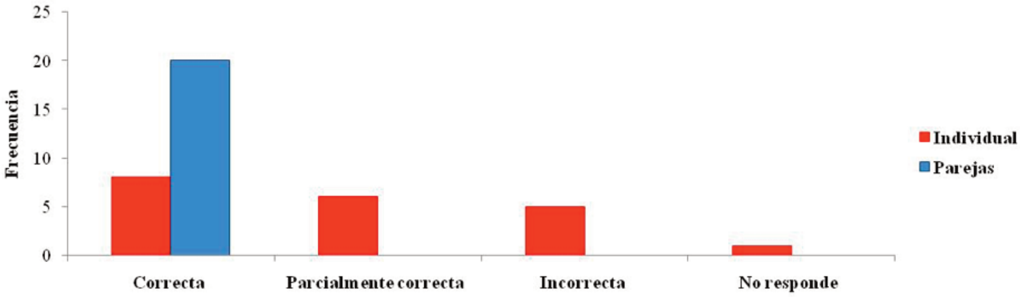


Figura 8. Respuestas de los estudiantes a la tercera tarea

CONCLUSIÓN

La secuencia de enseñanza escogida para este estudio ha promovido el trabajo de los futuros profesores con la estimación de resultados y la argumentación de las decisiones y estrategias heurísticas, además de poner en relación los significados clásico y frecuencial de la probabilidad. Según Batanero (2005), ambos significados han de ser comprendidos por los estudiantes, para que puedan ser enseñados de manera significativa al alumnado.

Los futuros profesores mostraron falta de capacidad de enumeración sistemática de sucesos, error típico del razonamiento combinatorio de acuerdo a Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997), así como dificultad en estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso en cierto número de tiradas. Al comparar los resultados con la experiencia en aula de Rivas y Godino (2015), hacemos notar que en ambos trabajos predominan los mismos errores en el cálculo de probabilidades: el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido.

Todos estos resultados nos plantean una problemática como es la formación de los profesores que han de enseñar la probabilidad bajo estos dos enfoques en la Educación Primaria (MECD, 2014). Como sugieren Ortiz, Mohamed y Serrano (2013), debemos proponer a los futuros profesores situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas de los conceptos probabilísticos que transmitimos en los cursos de formación; en este sentido, la experiencia propuesta en este trabajo contribuye a la adquisición del significado de estos enfoques.

Así mismo, Huerta (2015) plantea la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica, como un contexto apropiado para la formación de futuros maestros y profesores en didáctica de la probabilidad. Como indica el autor, la resolución de problemas es adecuada por tratarse de estudiantes que deben dominar el contenido, pero además, para entender “aspectos que relacionan el proceso de resolución de problemas de probabilidad con la construcción del pensamiento matemático (probabilístico) del estudiante, y para aprender a ser gestores del proceso de resolución de problemas en las aulas” (Huerta, 2015, p. 107). Experiencias como la descrita en este trabajo tratan de acercarse a este enfoque, donde su resolución y reflexión didáctica pueden contribuir en su formación docente.

Agradecimientos

Proyecto de investigación EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo de investigación FQM126 de la Junta de Andalucía.

Referencias

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247- 263.

Batanero, C., Cañizares, M. J., y Godino, J.D. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability.* New York: Springer.

Bernoulli, J. (1987). *Ars Conjectandi- 4ème partie*. Rouen: IREM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases.* New York, NY: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.

Laplace P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilities*. Paris: Jacques Gabay.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568.

MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York, NY: Chelsea Publishing.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1997). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2013). Componentes del conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 431-438). Bilbao: SEIEM.

Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López-Martín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 339-346). Granada: Grupo de IVALDvestigación en Educación Estadística.

Sánchez, R. y Valdés, J. C. (2017). Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11*, (en prensa).

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Smith, T. M. y Hjalmarson, M. A. (2013). Eliciting and developing teachers’ conceptions of random processes in a probability and statistics course. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(1), 58-82.

Vásquez, C. y Alsina, C. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48.

INTERACCIÓN ENTRE PARES: TERRENO DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DE 'EMPATÍA MATEMÁTICA'

Peer Interaction: Arena of Mathematical Learning and 'Mathematical Empathy'

Gómez-Lázaro, H.D. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I. P. N., México.

Resumen

El trabajo versa sobre el intercambio de resoluciones a una tarea de comparación de razones que llevan a cabo parejas de estudiantes de tercer grado de secundaria. Siguiendo los principios de la teoría fundamentada y del análisis de los argumentos de Toulmin, en el documento se argumenta que para que una interacción sea provechosa son necesarios los conocimientos matemáticos así como una actitud de 'empatía matemática'. Se sugieren también algunas 'características notables' para que una interacción sea cognitivamente útil y enriquecedora para la pareja, características que pueden ser interesantes referencias para futuras investigaciones y de utilidad para los docentes.

Palabras clave: *interacción entre pares, convencimiento, comparación de razones, empatía matemática.*

Abstract

The paper reports on exchanges amongst peers in 3rd year of secondary school, concerning their resolutions of a task on ratio comparison. Following the principles of Grounded Theory and Toulmin's argument analysis, the paper argues that the mathematical knowledge and an attitude of 'mathematical empathy' are necessary if an interaction is to be fruitful. The paper moreover suggests some of the notable characteristics needed for an interaction to be cognitively useful and fruitful, characteristic that may be interesting references for future research and useful to teachers.

Keywords: *peer interactions, convincement, ratio comparison, mathematical empathy.*

ANTECEDENTES, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

El trabajo que aquí se expone versa sobre el intercambio de resoluciones de una tarea de comparación de razones, que llevan a cabo parejas de estudiantes de 3er grado de secundaria, y se basa en el supuesto de que la interacción entre pares es propiciatoria de ciertos aprendizajes pero sólo bajo ciertas condiciones. Distintos investigadores sobre el tema (Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han descrito los diversos factores que intervienen para que una interacción entre parejas de estudiantes resulte provechosa, aceptando que no siempre se presentan casos de éxito.

Sobre el aprendizaje que se da en el marco de la interacción entre pares, Smith (2015) revisa las diferentes modalidades que existen, complementando el trabajo desarrollado por Topping (2005). Ambos autores manejan diferentes tipos de interacción entre pares tales como la tutoría, asistencia, instrucción, agrupamiento, monitoreo o revisión. Estos trabajos cierran con una serie de sugerencias didácticas dirigidas a docentes o tutores, a quienes se les propone seguir reportando las dificultades encontradas, para que esto permita el re-diseño de nuevos cursos a docentes o el diseño y aplicación de nuevas estrategias. Goos, Galbraith y Renshaw (2002) también se centran en la investigación sobre la interacción entre pares y sobre la relación que guarda ésta con la zona de desarrollo próximo descrita por Vigotsky. Ellos puntualizan cómo es que las interacciones entre alumnos no siempre son productivas, aduciendo

Gómez-Lázaro, H.D. y Rigo-Lemini, M. (2017). Interacción entre pares: terreno de aprendizaje matemático y de 'empatía matemática'. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 277-286). Zaragoza: SEIEM.

que las interacciones llegan a producir conflictos y que sus alcances llegan a ser limitados. Con base en evidencias empíricas de casos de interacción entre pares que resultan ser obstáculos para sus aprendizajes, y en el mismo tenor que los anteriores autores, Stacey (1992) asevera que "dos cabezas no siempre son mejores que una".

Con el objetivo de profundizar en el tema se busca responder a la pregunta sobre ¿Cuáles son las características notables de las interacciones entre pares, que las hacen cognitivamente provechosas?; en el trabajo se argumenta que para que una interacción sea provechosa no sólo se necesita poner en la mesa de discusión conceptos y elementos de la matemática, sino también y de manera muy importante, lo que en este documento se denomina 'empatía matemática', la cual está relacionada, entre otras cosas, con la posibilidad que tienen los participantes de apuntar hacia los sustentos (garantías y respaldos) de los argumentos a rebatir para conseguir el convencimiento del interlocutor. En la comunicación también se argumenta que una interacción puede promover el aprendizaje de conocimientos matemáticos y de actitudes de 'empatía matemática' sólo bajo la guía de tutores sensibilizados al respecto y cuando la interacción entre pares cumple con lo que aquí se llaman 'características notables'. Para sustentar de manera rigurosa lo que aquí se arguye, se introduce un análisis de caso realizado con las herramientas propuestas por Toulmin, a partir de las cuales se definen conceptos teóricos siguiendo los principios de la teoría fundamentada.

MARCO TEÓRICO

Sobre comparación de razones. En el trabajo de Gómez y García (2014) y en el de Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo (2013) se sugieren variables que determinan las estrategias de resolución de tareas de comparación de razones, entre ellas están las de contexto, que los autores le llaman variable de los referentes. Por otra parte, se lleva a cabo un proceso de homogeneización de las normalizaciones cuando, considerando los datos y cuidando el factor de escala o la equivalencia, se cambia la forma en que originalmente se presentan las razones –e.g., en forma de porcentaje, fracción o número decimal- para poder hacerlas comparables (Cf. Fernández Lajusticia, 2009). Lamon (1999) por su parte, considera que para el razonamiento proporcional es fundamental una perspectiva relativa, en la que se incluyen relaciones multiplicativas, a diferencia de las perspectivas absolutas, en la que están involucradas solamente las estructuras aditivas.

Análisis funcional de los argumentos propuestos por Toulmin. En el ámbito de la investigación educativa que emplea el modelo de Toulmin (Pinochet, 2015), se afirma que un argumento se refiere a los discursos que un estudiante produce cuando trata de justificar sus conclusiones o explicaciones. Toulmin (2003) establece que se puede diferenciar la *afirmación* (C, por *claim*) cuyo valor se trata de establecer y los elementos justificatorios que se alegan como base de la afirmación, a los que denomina *datos* (D). Al presentar un conjunto determinado de datos como base para una afirmación estos pueden ser cuestionados. Para sostener la postura, aparecen proposiciones de diferente tipo: reglas, principios enunciados, etc., que permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional; éstas son las *garantías* (W, por *warrant*). La garantía es incidental, explicativa y general; mientras que a los datos se apela explícitamente, a las garantías se apela implícitamente. Detrás de las garantías puede haber otras certezas que las impregnan de autoridad y de vigencia: el *respaldo* de las garantías (B, por *backing*). El tipo de respaldo alegado por las garantías varía de un campo de argumentación a otro y se puede presentar más de un tipo de respaldo por garantía. Éstos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos y no siempre son explícitos. Por otra parte, los cualificadores modales (Q por q*ualifier*) son elementos del modelo de Toulmin que indican el grado de fuerza con el que se sostiene la garantía. Para desarrollar el análisis de datos utilizando este método propuesto por Toulmin, en el presente trabajo se consideraron como afirmaciones a las respuestas que defendieron los estudiantes; como datos, los procedimientos o sustentos con los que los alumnos respaldaron la respuesta que defendieron; como garantías a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo (Ver: *Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea*); como respaldos a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como cualificadores modales a los estados internos de convencimiento (que en lo que sigue se definen como ‘estados epistémicos de convencimiento’), los que se identifican con base en los criterios que aparecen en la Tabla 1.

Sobre los estados epistémicos. Como parte importante del análisis que se desarrolla aquí, se utiliza la propuesta de Martínez y Rigo (2014) para el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas. A esos estados internos les denominan ‘estados epistémicos’, e indican que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En suma, proponen un instrumento para distinguir estados epistémicos en que consideran que se vivencia un grado de certeza, de presunción o duda, cuando se dan muestras de cubrir, en algún grado, los criterios que describen: Mitigadores o Enfatizadores del Lenguaje, Acción, Determinación, Interés o Consistencia. En la tabla 1 aparece el instrumento completamente desglosado.

Tabla 1. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). Cuando recurre a mitigadores del lenguaje el grado de compromiso es menor (e.g., convendría)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico durante un proceso de argumentación son: – Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. – Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. – Claras y precisas.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

INSTRUMENTOS Y MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN EMPÍRICA

La investigación está inspirada en los principios de la teoría fundamentada (*Grounded Theory*) (Corbin y Strauss, 2015). Fieles a esos principios, la elaboración y el desarrollo de conceptos se ha hecho con base en los datos empíricos recabados en la investigación, mediante comparaciones constantes entre dichos datos, y aplicando continuamente un proceso iterativo de triangulación entre los conceptos de los investigadores, los datos empíricos y los términos teóricos tomados de la bibliografía.

La investigación consta de tres fases. En la primera se aplicó un cuestionario; del análisis de resultados se desprendió un conjunto de categorías de resolución. En la segunda fase se llevaron a cabo interacciones en las que parejas de estudiantes intercambiaron las resoluciones de la tarea que individualmente expusieron en el primer cuestionario. En la tercera fase los alumnos resolvieron de manera personal un cuestionario semejante al inicial.

Primera Fase: Cuestionario y Sujetos

Figura 1. La tarea de comparación de razones

Se aplicó a cada estudiante un cuestionario inicial que incluye una tarea de comparación de razones (con reajustes de la propuesta en Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo 2013) (ver figura 1). Se pregunta ¿Cuál de las ofertas es la que más conviene? Como se puede observar, cada oferta se presenta con una normalización diferente, además de que la primera se diferencia de las otras dos por el referente del número de videojuegos que se ofertan en conjunto y por el referente del ordinal del videojuego sobre el que recae la oferta. Una resolución correcta conlleva un proceso de relativización para homogeneizar normalizaciones y referentes. Este instrumento se aplicó a los estudiantes de dos grupos de tercero de secundaria (de edades entre 14 y 15 años) de dos escuelas técnicas con un buen nivel de desempeño general (una que está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México y otra dentro del 25%), con el objeto de que se tuvieran respuestas correctas y alumnos con capacidad de argumentar y contra-argumentar; el tercero de secundaria se eligió porque de acuerdo con el currículum, los alumnos ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando en temas de proporcionalidad.

Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea

Tabla 2. Claves de categorización de las resoluciones de la tarea

CO	MC	RJC	ROD	OC	Clave
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	S/Problemas	R7
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Valor unitario	$R6^{VU}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Building up	$R6^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	C/Problemas	R6
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R5_O$
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O	Building up	$R5_O^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R5_J$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$	Building up	$R5_J^{Bu}$
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R4
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$	Building up	$R4^{Bu}$
A_O	R_C	Rf_J	Rf_O		R3
A_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R2_O$
A_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R2_J$
A_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R1
R_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A6
R_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A5_O$
R_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A5_J$
R_O	A_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		A4
A_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A3
A_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A2_O$
A_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A2_J$
A_O	A_C	$-Rf_JJ$	$-Rf_O$		A1

En la primera fase del estudio se identificaron sub-categorías que hacen referencia a las estrategias más frecuentemente empleadas por los alumnos al resolver la tarea. Las sub-categorías identificadas son: *Compara ofertas* (C_O): implica que en la resolución se lleva a cabo una comparación relativa entre las ofertas (R_O si se lleva a cabo; A_O si no se realiza). *Manipula componentes* (MC): implica la manipulación multiplicativa de los componentes internos de la tarea (e.g., que proponga costo por juego y luego trate de escalar el número de juegos para comparar) (R_C si manipula; AC no lo hace). *Referente juegos en conjunto* (RJC): Hace referencia al número de juegos en conjunto por oferta (–Rf_J significa que muestra dificultades al descomponer el número de juegos que se ofertan y utiliza un referente inadecuado para comparar, e.g., escala a 3 o 4 juegos; Rf_J indica que no se dejan ver dificultades). *Referente del ordinal al que se le aplica el descuento* (ROD): Hace referencia al número ordinal del juego sobre el que recae la oferta (–Rf_O aparece cuando la resolución denota dificultades con la posición numérica del objeto sobre el que recae la oferta, e.g. indica que un juego extra a los ofertados conservaría el descuento; Rf_O indica que no se revelan dificultades). OC alude a *otras consideraciones*, ya sea que se haya utilizado la estrategia building up, que se hayan identificado algunos problemas ajenos a la razón y proporción o que no se hayan identificado dificultades de ningún tipo.

El tipo de resolución como categoría se utilizó como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron en cada una de las fases de la investigación sobre el tema de comparación de razones, asociado como garantía del argumento que se expuso. En la tabla 2 se muestra como se obtienen las claves de categorización de las resoluciones de la tarea con la combinación de todos los casos posibles y aparecen sombreadas las caracterizaciones de los tipos de resolución a las que recurrieron los alumnos cuyas interacciones aquí se analizan.

Segunda Fase: Interacciones, método y sujetos

En esta fase se determinó trabajar con la segunda escuela antes mencionada, ya que ahí se presentaron procesos de resolución más variados que en la otra. Con base en las categorías definidas en la fase anterior, se eligieron de entre los alumnos a cinco parejas con la característica de que mantuvieran posturas encontradas en relación a la resolución o solución de la tarea y que en su cuestionario inicial hayan ofrecido explicaciones amplias de lo que ahí habían hecho, con la intención de detonar durante la interacción el intercambio de ideas y procedimientos. En la interacción se solicitó que cada quien tratara de convencer a su compañero de que el procedimiento realizado por ellos en el cuestionario inicial era el más adecuado. El autor 1 actuó como mediador de las intervenciones.

Tercera Fase: Cuestionario final individual

Se propuso a los estudiantes que resolvieran de manera individual y por escrito una tarea semejante a la planteada en el cuestionario inicial, con la finalidad de detectar las posibles modificaciones en sus procedimientos de resolución y en sus cualificadores modales después de la interacción.

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES

Categorías para el análisis de las interacciones

Las categorías con las que se interpretan las interacciones fueron resultado de un proceso de triangulación, como ya se explicó. No obstante, para fines de claridad se exponen antes del análisis.

Con base en una re-definición de la idea de *account* (recogida de Krummheuer, 1995, quien la toma de Garfinkel) y en los datos empíricos recabados en la investigación, en este documento se define la noción de ‘*account completo*’ (a diferencia del ‘*account parcial*’ caracterizado en otro escrito de los autores) que se da cuando a partir de un intercambio comunicativo el incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla se presenta, de manera sincrónica, con el incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha. En este escrito se dice que cuando se da un proceso de *account completo* se ha generado una actitud de 'empatía matemática'. Con base en los grados de *accountability*, en la investigación se distinguen tres tipos de intercambio (productivo, de menor productividad y neutrales), de los cuales aquí sólo se describe uno:

I*ntercambio productivo (IP).* Se presenta cuando (al menos) uno de los participantes pone en juego un account completo y por tanto una actitud de empatía matemática.

Análisis empírico de las interacciones. Interacción Raúl-José

Con base en los conceptos antes expuestos (intercambios productivos y no productivos, y *account*) se presenta en lo que sigue un análisis de la interacción de una pareja de alumnos, análisis del cual se desprenden algunas 'características notables' que pueden eventualmente promover el éxito en las interacciones entre pares (ver *Resultados de la investigación*).

En la tabla 3 aparece el análisis funcional de los argumentos desarrollados durante la interacción que se dio entre José y Raúl. Se respeta el espíritu analítico propuesto por Toulmin; sin embargo, aparece en forma tabular para dar cuenta de las relaciones que guardan las garantías y los respaldos en los que Raúl apoya sus afirmaciones, en relación con las garantías y respaldos en los que José sustenta sus contra-argumentos, y en los que se apoya el investigador.

Raúl, primera intervención. Los procedimientos de Raúl se encuentran muy apegados a perspectivas de tipo absoluto y aditivo (las garantías, tanto de su cuestionario inicial como las de sus intervenciones subsecuentes, corresponden a la categoría $A5_O$); pareciera que el principal problema de este alumno consiste en que no considera el referente del número de juegos en su conjunto ($-Rf_J$); esto lo llevó a segmentar las ofertas y a pensar que tiene sentido, en el contexto de la tarea, el comprar juegos sueltos, posicionándose así en una postura absoluta a partir de la cual pierden significado las comparaciones multiplicativas y, por supuesto, la proporcionalidad. En su primera intervención Raúl preservó las garantías y los respaldos que ya estaban presentes en el argumento de su cuestionario; ahí se observa lo dicho: él ignoró las ventajas que le ofrece cada oferta, considerando que es indistinto comprar cualquier número de juegos. A pesar de que en esa intervención intentó mostrar un alto grado de presunción, al usar un lenguaje corporal muy expresivo, una postura erguida y abierta, alto volumen de voz, cubriendo criterios de acción y determinación, es posible que en el fondo no haya estado tan convencido de su argumento matemático, ya que su estrategia, no sólo en esta intervención sino a lo largo de toda su participación, consistió en ofrecer argumentos matemáticos (los ya comentados, que por cierto no son los más correctos y eficientes) complementados con razones extra-matemáticas (e.g, 'en la oferta 3×2 te regalan uno') como 'para reforzar', contraponiéndose así al criterio de consistencia.

Raúl y el investigador. El investigador contra-argumentó a Raúl con la intención de hacerle ver que podía escalar el número de juegos hasta conseguir un número adecuado para comparar todas las ofertas. Sin embargo, los planteamientos del investigador no apuntaron ni a las garantías ni a los respaldos de tipo matemático empleados por el alumno, es decir, no pusieron en entredicho que en el marco de la tarea, carece de sentido el concebir los juegos aisladamente, dejando de considerar las relaciones que éstos guardan con el resto de juegos incluidos en cada oferta; el investigador, por otra parte, tampoco cuestionó las garantías y los respaldos de tipo extra-matemático argüidos por Raúl.

Por lo antes dicho, se puede entender perfectamente que, como respuesta a las intervenciones del investigador, Raúl en su segunda participación (Ri2) no sólo no cuestionó su estrategia de adiciones sucesivas, sino que la fortaleció. Esto se observa en la afirmación RC3, en la que tiene frente a él dos soluciones a la tarea que resultan contradictorias entre sí. Raúl acepta sin conceder el argumento matemático propuesto por el investigador, pero apoya decididamente el suyo apelando a recursos extra-matemáticos ("nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta"), siendo consistente con su anterior respuesta y complementando y reforzando esa postura. En su siguiente intervención

Tabla 3. Análisis Funcional. Interacción Raúl-José

<table>
<tr><th>S.</th><th>Datos</th><th>Cualificadores Modales</th><th>Gar.</th><th>Respaldo</th><th>Afirmación</th></tr>
<tr><td>Rin</td><td>RD1:
<table><tr><td colspan="3">$1000 por juego.</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo de dos juegos</td><td>Costo de tres juegos</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1500</td><td>2500</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1300</td><td>2300</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>2000</td></tr></table></td><td></td><td>RW1: A5o</td><td>RBm1:
Estrategia de tipo absoluto. Ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe1:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC1:
3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno.</td></tr>
<tr><td>Ri1</td><td>RD2:
<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>Total</td><td>Ícono</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>¡Gratis!</td><td>2000</td><td>☺</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>2500</td><td>☹</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>2300</td><td>☺</td></tr></table>“sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original” “por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos.”</td><td>RQ2:
Alta presunción:
Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto.
Utiliza íconos que reflejan su pensar sobre las ofertas.
Acción; Determinación; Consistencia.</td><td>RW2: A5o</td><td>RBm2:
Estrategia absoluta, ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe2:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC2:
En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.</td></tr>
<tr><td>Ii1</td><td>Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?</td><td>IQ1:
Consolida el argumento de R y no cuestiona RW1 ni RW2.</td><td>IW1: A5o</td><td>IBe1:
Incita a completar estrategia Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri2</td><td>RD3:
Ok… si queremos cuatro… otros 1000, entonces serían supuestamente 3000…
<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>J4</td><td>Total</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>Gratis</td><td>1000</td><td>3000</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>500</td><td>3000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>300</td><td>2600</td></tr></table></td><td>RQ3:
Presunción:
Acción; Consistencia; Determinación. “Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está”
No cuestiona su procedimiento.
Lenguaje corporal abierto y muy expresivo.
Mitigadores del lenguaje: “En este caso te convendría…”</td><td>RW3: A5o</td><td>RBm3:
Estrategia de adiciones sucesivas, no relativiza.

RBe3:
No acepta resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.</td><td>RC3:
En este caso te convendría mejor la número tres.
Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón dónde está marcada la oferta 3x2).</td></tr>
<tr><td>Ii2</td><td>¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?</td><td></td><td>IW2: A5o</td><td>IBm2:
Incita a completar estrategia tipo Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri3</td><td>RD4:
Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos… Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)… entonces son 4500… ¡sí! mmm… (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro… ya, 3900…</td><td>RQ4:
Alta presunción:
Acción.
Determinación.
No muestra cambios de perspectiva sobre el referente del número de juegos en conjunto.</td><td>RW4: A5o</td><td>RBm4:
Completa análisis por adiciones sucesivas.

RBe4:
Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento.</td><td>RC4:
Sí quiero llevarme seis juegos conviene más la tercera oferta.</td></tr>
<tr><td>Jr</td><td>JD1:
(Raúl) no sabía explicarlo y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.</td><td></td><td></td><td></td><td>JC1: No me convence el procedimiento de Raúl.</td></tr>
<tr><td>Jin</td><td>JD2:
<table><tr><td colspan="4">Descarta la 2a por la 3a;
propone precio: $1000</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo x2</td><td>Costo x3</td><td>Costo x4</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>$2000</td><td>$4000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>$1300</td><td></td><td>$2600</td></tr></table></td><td></td><td>JW2: $R5_J^{Bu}$</td><td>JBm2:
Estrategia Building up incorrecta, normaliza e identifica la diferencia entre porcentajes.</td><td>JC2: Es mejor la oferta 70% en 2° porque pagas menos por 4 juegos.</td></tr>
<tr><td>Ji1</td><td>JD3a:
Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serian 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serian 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres.

JD3b:
La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.</td><td>JQ3:
Certeza:
Acción; Determinación; Consistencia; Interés.
Cambia la perspectiva de resolución.</td><td>JW3: $R6^{VU}$</td><td>JBm3a:
Estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar.

JBm3b:
Descarta una oferta por comparación de porcentajes.

JBe3:
Indica “no te van a dar nada gratis” y “hay un presupuesto para cada videojuego”</td><td>JC3:
650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: “te convendría”</td><td>RW5: A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: “te convendría”</td><td>RW5: A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rf</td><td>RD6:
Se infiere propuesta de precio: $1000
<table><tr><td>Oferta</td><td>No. de juegos</td><td>Costo</td><td>Costo por juego</td></tr><tr><td>4x3</td><td>4</td><td>3000</td><td>750</td></tr><tr><td>1 1/4</td><td>4</td><td>2500</td><td>625</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>4</td><td>2600</td><td>650</td></tr></table>Por obvias razones es mejor un %75 que un 70% solamente.</td><td>RQ6:
Casi certeza con enfatizadores de lenguaje “por obvias razones”</td><td>RW6: $R6^{Bu}$, $R6^{Vu}$</td><td>RBm6:
Estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.</td><td>RC6:
Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente</td></tr>
</table>

Participantes: R: Raúl; J: José. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. Análisis funcional: C: afirmación; D: dato; Q: cualificador; W: garantía; B: respaldo afirma “Si quiero llevarme seis juegos entonces conviene más la tercer oferta” (RC4); no obstante, no parece tomar conciencia de la contradicción entre esa postura y la asumida por él, porque da la impresión de que no comprende lo que está en el fondo de la resolución que le propone el investigador, la que acepta por concesión y por tratarse de “un caso particular y específico” distinto al que él plantea. Hasta este momento la postura de Raúl parece inamovible; en él no hay incremento en el conocimiento ni generación de duda.

José y Raúl. A diferencia de la intervención del investigador, José puso el acento justo en la garantía inconveniente (RW2: A5O) que implícitamente asume Raúl, conforme a la cual él considera que puede comprar cualquier número de juegos; se enfoca también en los respaldos de Raúl (RBm3 y RBm4) que refuerzan su estrategia de adiciones sucesivas. José muestra que es capaz de cuestionar el procedimiento y los argumentos de Raúl, y muestra también que ha escuchado atentamente a su compañero y que tiene la sensibilidad para entender sus argumentos: con su propuesta de utilizar el valor unitario como estrategia que respeta las relaciones de proporcionalidad (JW3, JBm3a) apunta hacia la garantía con la que Raúl sustenta su estrategia de resolución de tipo aditivo y cuando indica, entre otras cosas, que “no te van a dar nada gratis” (JBe3) apunta directamente hacia el respaldo extra-matemático de Raúl (RBe2).

A pesar de lo anterior, Raúl sigue empeñado en defender su postura y se niega a aceptar frente a su compañero que fue convencido; sin embargo, se infiere que en Raúl existen indicios de duda debido al contraste entre la manera en la que él sostiene la afirmación RC3 “yo sé que van a escoger ésta” (con cierta firmeza) y la forma de sustentar el argumento extra-matemático RC5, en el que utiliza “te convendría”, que es un mitigador del lenguaje que denota duda (Martínez y Rigo, 2014). Aunque Raúl entiende la parte matemática, está muy apegado a su respuesta y hace lo necesario, como pasar por encima de argumentos matemáticos y argüir razones extra-matemáticas, para soportar su respuesta. Sin embargo, este asomo de duda se convierte en conocimiento y seguramente en alta presunción cuando muestra, en su cuestionario final, una respuesta contundente en la que utiliza las estrategias que le explicó José: utiliza el valor unitario (retomando la garantía de José JW3a: R6VU) y compara porcentajes como lo hace su compañero en su intervención (JBm3b). Abandona además todas sus posturas retóricas y sus argumentos extra-matemáticos, centrándose sólo en los argumentos matemáticos. Lo anterior permite sugerir un posible cambio de estado epistémico a raíz del cambio de estrategia con la que se le cuestionan sus afirmaciones, garantías y respaldos.

José. En José también se observa una evolución. Él pasa de una resolución basada en Building up (con error) y descarte de ofertas por comparación de porcentajes, a una del tipo de valor unitario que utiliza al tomar la decisión de afrontar el reto que Raúl le plantea. En ese sentido, se considera que la explicación de Raúl es un detonador importante en este proceso de trabajo matemático. Aunque en su cuestionario final José regresa a la estrategia Building Up, su comprensión de las posibles resoluciones de este tipo de tarea de comparación de razones queda al descubierto cuando opta por una estrategia que no deja lugar a dudas para tratar de convencer a su compañero.

Consideraciones sobre la interacción. Lo antes dicho deja ver que la interacción de José (en relación a Raúl) es de tipo productivo, que la de Raúl (en relación a José) resultó un detonador y que la del investigador es neutral. Como se puede colegir de los datos empíricos antes expuestos, en la interacción de tipo productivo se presentan las siguientes condiciones: Raúl (R) incluyó en su planteamiento algo que para José (J) representó un reto; R puso en duda su planteamiento en algún momento; J se interesó por asumir el reto de convencer a R; y de manera muy relevante y significativa, J puede identificar las garantías y los respaldos en los que el R soporta su argumento, y contra-argumentar en consecuencia; finalmente, R utiliza los procedimientos explicados por su compañero para resolver una tarea similar.

En relación al *account* que vivencia José se puede decir que es de tipo completo, ya que él se convence a sí mismo y convence a su compañero de que su procedimiento de resolución es el más adecuado para resolver este tipo de tareas, al tiempo que incrementa su comprensión y la de su compañero, ya que Raúl, como se vio, utiliza los procedimientos de José en el cuestionario final. Con todo ello, José no sólo muestra que es capaz de utilizar el lenguaje matemático de su compañero y también el coloquial. Revela que en el fondo, José es sensible a las dificultades que en el ámbito matemático exhibe su compañero, relacionadas con el tema de la comparación de razones que se pone en juego al resolver la tarea, y que es sensible también a ciertas necesidades afectivas de Raúl. A esa sensibilidad que un alumno muestra hacia el otro, en la que se complementa lo disciplinar con lo afectivo, en este documento se denomina ‘empatía matemática’.

RESULTADOS: CARACTERÍSTICAS NOTABLES PARA UNA INTERACCIÓN PRODUCTIVA

A partir de los datos empíricos recabados y del análisis del caso aquí expuesto, se sugiere que una interacción entre dos estudiantes A y B es productiva si se presentan las ‘características notables’ que a continuación se describen:

- Que B exponga argumentos que representen un reto para A.
- Que A escuche, entienda y se ponga en el lugar de B, comprometiéndose a superar el reto que le presenta su compañero.
- Que a partir de lo anterior, A sea capaz de identificarlas garantías y los respaldos sobre los cuales B sostiene sus argumentos y los refute sin dejar lugar a dudas.
- Que B escuche y entienda a su compañero y, en ese proceso, incremente su comprensión y cambie su convencimiento y que dé muestras de ello, utilizando alguno(s) argumentos que le ha explicado A.
- Que a partir de una actitud de empatía matemática, uno de los participantes (A) obtenga *account* completo, es decir, que en el proceso de tratar de convencer y de incrementar la comprensión del otro (B) se incremente su propia comprensión y su convencimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

Sobre los resultados de un trabajo previo, en el que se desvelan las características de las resoluciones de alumnos de 14 y 15 años de edad sobre una tarea de comparación de razones, y siguiendo los principios de la teoría fundamentada, la presente investigación hace una propuesta para identificar, definir y sistematizar características notables que hacen que un proceso de interacción, en el que dos alumnos intercambian resoluciones de dicha tarea, resulte productivo, neutral o no productivo, así como identificar, re-definir y caracterizar los procesos denominados *account* y *empatía matemática*. Como se ha visto a lo largo de este escrito, estas categorías teóricas permiten avanzar algunas explicaciones posibles sobre un fenómeno interesante en la didáctica de las matemáticas, pero poco aclarado en la literatura, relacionado con el éxito (o fracaso) de las interacciones entre pares; estas categorías permiten también sugerir una serie de estrategias, dirigidas al profesor, para promover interacciones provechosas entre sus alumnos. Sin duda, los procesos socio-educativos aquí estudiados resultan opciones muy ricas y propicias para el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es importante considerar los diversos pormenores que se pueden presentar, ya que no son una alternativa que garantiza el éxito. Entre otras cosas, los docentes deben de tener ‘sensibilidad matemática’ para identificar los componentes de los argumentos de los alumnos, pero también una ‘sensibilidad emocional’ para identificar y promover actitudes de empatía matemática entre ellos.

Referencias

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for development Grounded Theory*. 4e. Los Angeles: Sage.

Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*, Valencia, España: Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González; M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*, (pp. 193-223).

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM

Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência & Educação, Bauru, 21*(2), 307-327.

Smith, T. (2015). *Peer Interaction. Research Starters: Education* (Online Edition). Recuperado de: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ers&AN=89164361&lang=es&site=edslive>.

Stacey, K. (1992) Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *The Journal of Mathematical Behavior, 11*(3) 261-275

Topping, K. (2005). Trends in Peer Learning. *Educational Psychology, 25*(6). 631-645

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

¿MIDEN LONGITUDES CON UNA REGLA LOS NIÑOS Y NIÑAS DE 4 A 7 AÑOS?

Do measure length 4-7 years old children with a standard ruler

Gómezescobar Camino, A. y Fernández-Cézar, R.

Dpto. de Matemáticas, Facultad de Educación de Toledo, UCLM

Resumen

El presente trabajo es una parte de un estudio más amplio sobre la medida de longitud en edades tempranas. Se analiza aquí el uso de la regla estándar que hacen los niños de entre 4 y 7 años. Para ello se trabaja con una muestra de 104 niños y se les enfrenta a una situación de medida de objetos reales. Se estudia la posible influencia de la edad y los factores socioculturales sexo y origen familiar en el éxito en dicha medida. También se estudia la relación que pueda darse entre el hecho de que realicen correctamente la medida de longitud y la demostración o no de su pensamiento conservativo. El rango de edad es de interés porque abarca el cambio de etapa de Educación Infantil a Primaria en el contexto español. Los resultados indican que no existe asociación entre la conservación y la medición exitosa con la regla. Tampoco entre esta última y los factores sexo y origen familiar. Sin embargo, sí existe entre la adquisición de conservación y la edad.

Palabras clave: *medida longitud, regla, Educación Infantil, Educación Primaria.*

Abstract

The present work is part of a wider study on length measurement in childhood. This report analyses the use of the standard ruler made by 4 to 7 year-old children, 104 students are asked to measure real objects. It is studied the possible influence of age and sociocultural factors such as sex and family origin, as well as the possible association between correct length measurement and their conservative thinking. The age range chosen includes the change from Childhood to Primary Education in the Spanish context. The results show that there is not association between conservation and success in measuring length with the ruler, neither is between the latter and the analyzed factors, sex and family origin. However, the association between conservation and age is observed.

Keywords: *length measurement, ruler, Childhood Education, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

Las magnitudes y la medida representan una parcela de conocimiento inherente al hombre prácticamente desde su aparición sobre la Tierra. El hecho de poder estimar lo lejos que se encontraba una presa, las crecidas del río en los campos de cultivo, los días de camino que separaban poblaciones o los intercambios comerciales, representan hitos decisivos en el desarrollo de la humanidad. Sin embargo, parece que en la escuela no se le otorga la misma importancia (Belmonte, 2005). La longitud es la magnitud que primero se enseña en el contexto escolar y por tanto a la que mayor tiempo se le dedica, ya que a partir de ella se abordan las demás magnitudes de una manera prácticamente sistemática. Por ello se hace necesario aumentar el conocimiento sobre las concepciones que tiene el alumnado sobre la longitud.

A la hora de medir longitudes, son varios los autores que destacan la clara preferencia de los niños por los instrumentos de medida estándar (Boulton-Lewis, 1987; Boulton-Lewis, Wilss y Mutch, 1996;

Gómezescobar Camino, A. y Fernández-Cézar, R. (2017). ¿Miden longitudes con una regla los niños de 4 a 7 años? En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 287-294). Zaragoza: SEIEM.

Clements, 1999; Kotsopoulos, Makosz, y Zambrzycka, 2015; Nunes, Light y Mason, 1993; Zöllner y Benz, 2016). Desde una perspectiva Vygotskiana, se pueden asumir las herramientas estándar como instrumentos culturales que los niños prefieren, pero ¿los usan significativamente? Hay autores que creen que sí (Clements y Stephan, 2004), y sin embargo hay otros estudios (Castle y Needman, 2007; Bragg y Outhred, 2000; Hiebert, 1984) que descartan que el uso correcto de una herramienta de medida como pueda ser una regla, implique comprender el proceso de medida en su totalidad.

Conservación y transitividad

La comprensión de la conservación y la transitividad, se encuentran entre los aspectos del desarrollo de modelos mentales para las mediciones de longitud que se consideran cruciales por parte de los expertos, (Battista, 2006; Belmonte, 2005; Boulton-Lewis, 1987; Chamorro y Belmonte, 1991; Clements, 1999; Hiebert, 1981; Lehrer, 2003; Nunes et al. 1993; Piaget, 1978; Piaget et al., 1960; Stephan y Clements, 2003), junto con la percepción de longitud, iteración de la unidad, relación con el número y origen en el punto cero.

No obstante, en los trabajos más recientes realizados con niños de edades tempranas sobre el concepto de longitud (Battista, 2006; Clements y Stephan, 2004; Nührenbörger, 2002; Zöllner y Benz, 2016) se enfatiza la importancia del estudio de la conservación. Se entiende conservación como la comprensión de que al desplazar un objeto, su longitud no cambia. Asociado a la conservación, está el razonamiento transitivo, el cual conlleva varias implicaciones en el ámbito de las comparaciones en la medida de longitud (Stephan y Clements, 2003):

- Si la longitud del objeto 1 es igual a la del objeto 2 y el objeto 2 es de la misma longitud que el objeto 3, entonces el objeto 1 es de la misma longitud que el objeto 3
- Si la longitud del objeto 1 es mayor que la del objeto 2 y el objeto 2 es mayor que el objeto 3, entonces el objeto 1 es mayor que el objeto 3
- Si la longitud del objeto 1 es menor que la del objeto 2 y el objeto 2 es menor que el objeto 3, entonces el objeto 1 es menor que el objeto 3.

Parece que no existe consenso sobre la edad y orden el que se alcanza la comprensión de la conservación, la transitividad y la medida de longitud. Para Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) la transitividad es imposible para los niños que aún no conservan, pues para éstos, una vez que se desplaza el objeto, la longitud no tiene por qué ser la misma.

Elkind (1967) y Acredolo (1982) diferencian entre la operacionalización de la conservación en el formato equivalencia y la conservación en el formato identidad. La conservación en el formato equivalencia traslada a los trabajos de Piaget, y supone comparar *dos bandas* respecto a su longitud. Se desplaza una de las dos bandas y se vuelve a preguntar por la equivalencia de la longitud de las dos bandas. Por otro lado, la conservación en el formato identidad, según Elkind (1967), tiene lugar con *una sola banda*, cuya posición es alterada y se comprueba si los niños asumen que su longitud no cambia. Al parecer, en ciertas tareas, los niños se dejan llevar por su percepción visual y probablemente sean conscientes de la conservación en un nivel cognitivo, pero al desplazar una de las dos bandas que son iguales en longitud, indican que una es más larga que otra. De acuerdo con Elkind (1967), los niños adquieren mucho antes la conservación en el formato de identidad, porque su percepción les hace asumir que el desplazamiento de una banda aislada no causa alteración alguna en su longitud. Igualmente, Hiebert (1981) sostiene que cuando los niños utilizan un objeto intermedio en comparaciones indirectas, transitividad, no se plantean la posibilidad de que éste pueda cambiar su longitud durante los desplazamientos.

Para Boulton-Lewis (1987) y Kamii y Clark (1997) los niños deben razonar transitivamente antes de entender la medida, y Copeland (1974) afirma que la conservación es necesaria pero no implica una plena compresión de la medida. Las únicas tareas donde transitividad y conservación si son necesarias, según Clements (1999), son en aquellas relacionadas con la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de éstas, y con la necesidad de usar unidades de igual longitud cuando se mide.

Por otro lado, Boulton-Lewis (1987), Carpenter y Lewis (1976), Clements (1999) e Hiebert (1981) anuncian que la conservación y la transitividad no son necesarias para resolver cuestiones básicas sobre medida. Es decir, los niños utilizan intermediarios para comparar dos longitudes sin una explicación transitiva o mueven una unidad para medir sin preocuparse por la conservación de su longitud. Es decir, son capaces de resolver tareas simples de medida sin un razonamiento conservativo y/o transitivo general. Clements y Stephan (2004) sostienen que la idea piagetiana de que los niños deben conservar antes de medir, puede ser un tanto exagerada en el sentido de que los niños no estén en condiciones de interpretar sistemas preparados para ser leídos (ready-make systems) como puedan ser las reglas.

Dado que en distintos trabajos se ofrecen distintas informaciones sobre el orden en el que se alcanzan los estadíos de conservación y medida de longitud, en este trabajo pretendemos determinar si estos dos estadíos se alcanzan en un orden determinado o si se dan de manera aleatoria en cada niño, así como si los niños están preparados o no para interpretar herramientas de medida estándar.

Se considera que los niños pueden desarrollar capacidades y habilidades cognitivas cuando se les ofrecen situaciones reales en las que puedan utilizar las manos y desarrollar su intuición sobre medida. Además, teniendo en cuenta la teoría de Piaget y el hecho de que en España la transición entre Educación Infantil y Educación Primaria tiene lugar entre los 5 y los 6 años, (González, Muñoz y Zubizarreta, 2011; Kamii y Clark, 1997), nos interesa estudiar edades cercanas a esta transición. Por todo ello, en este estudio se enfrenta a niños de edades entre 4 y 7 años a situaciones de medida con regla de un objeto real.

Objetivo

El objetivo del presente trabajo es analizar el uso de la regla estándar y la adquisición de la conservación de longitud en niños de edades anteriores y posteriores a la transición entre Educación Infantil y Primaria, concretamente de 4 a 7 años. Se explorará la posible influencia de factores como la edad, y dado que podría haber implicaciones socioculturales, el sexo y el origen familiar.

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes son 104 alumnos (51 niñas y 53 niños) de dos colegios públicos de la provincia de Toledo (España). Del total de la muestra, 13 alumnos tienen origen inmigrante (12,5%). Se definen tres grupos de edad: segundo (N = 38) y tercer grado (N = 31) de Educación Infantil (4-5 años y 5-6 años) y primero de Educación Primaria (6-7 años; N = 35). La edad media de cada grupo es 4,74, 5,66 y 6.75 años respectivamente. Se eligen estos grupos de edad por encontrarse en ese rango la transición entre Educación Infantil y Educación Primaria en España.

Consultadas las maestras de los distintos grupos de edad, podemos indicar que en ninguno de ellos se han realizado mediciones de longitud empleando la regla convencional en el aula. Se ha hecho uso del instrumento solo para el trazado de líneas rectas. La instrucción sobre medida en los grupos de Educación Infantil se basa en la comparación longitudes de objetos (“más corto que” y “más largo que”) mediante actividades manipulativas y vivenciadas. En el grupo de Educación Primaria conocen el nombre de las unidades de medida estándar centímetro, metro y kilómetro, y debaten en clase cuál es la más apropiada para medir objetos, por ejemplo un libro, una puerta o un campo de fútbol, sin vivenciación de dichas situaciones. En este último grupo realizan mediciones reales de objetos del entorno con unidades antropométricas, como pies o palmos.

Preguntados los niños si saben lo que es medir, la mayoría contesta afirmativamente y argumentan su respuesta.

Procedimiento

Se entrevista y graba a cada niño individualmente. Primero se les entrega una banda de 8 centímetros de largo para que ellos la midan libremente con la regla estándar (medición libre), después la entrevistadora coloca la banda en el cero y vuelve a preguntar cuánto mide la banda (medición desde cero).

Para estudiar su comprensión de la conservación se emplea la propuesta de equivalencia: se les muestran dos bandas de igual longitud, y se les pregunta si son iguales cuando se sitúan primero con los extremos alineados y después desplazadas. Si con las bandas desplazadas responden que no son igual de largas, se considera que no conservan; si la respuesta es afirmativa, se considera que si conservan. Esto se hace con posterioridad a la medición con la regla.

Análisis estadístico

Los datos obtenidos se analizan con Statistical Package for Social Sciences, SPSS, v. 22. Se cuantifica el porcentaje de respuestas correctas o aciertos en cada grupo de edad. Se explora la normalidad de la distribución de aciertos respecto de los factores a analizar: edad, sexo y origen familiar. Al ser esta no normal, los contrastes de hipótesis se analizan mediante estadísticos no paramétricos: U de Mann-Whitney y Kruskal-Wallis.

Se eligen estos factores socioculturales porque cabría esperar alguna influencia del entorno familiar, ya que la medida de longitud es habitualmente empleada en todos los ámbitos de nuestra vida, a veces en el familiar incluso antes que en el entorno escolar, y podría hacerse de manera diferente con niños y niñas.

RESULTADOS

Los datos respecto a si los niños y niñas tienen adquirido el sentido de conservación de la longitud por equivalencia, pueden observarse en la tabla 1, donde se muestra el porcentaje de niños que contestan afirmativamente al desplazar las bandas entre sí. Cuando las bandas se muestran con extremos coincidentes, el 100% de los niños contestan que son iguales. El contraste de igualdad de porcentaje de niños que conservan con la variable edad se hace mediante Kruskal-Wallis ($\chi^2(2, N=104) = 7{,}29$, *$p = {,}03$)*, y confirma que sí existen diferencias entre los grupos.

Tabla 1. Porcentaje de conservación

	Conservación
4-5 años	0
5-6 años	3,2
6-7 años	14,3
Total	5,8

La tabla 2 muestra el porcentaje de respuesta correcta al medir con la regla estándar, tanto en la medición libre como en la medición desde cero, separado por grupo de edad.

El contraste de hipótesis (Kruskal-Wallis) descarta diferencias entre los grupos de edad tanto para medición libre ($\chi^2(2, N=104) = 1{,}108$, $p = {,}58$) como en la medición desde cero ($\chi^2(2, N=104) = 5{,}47$, $p = {,}07$).

Tabla 2. Porcentaje de respuesta correcta

	Medición libre	*Medición desde cero*
4-5 años	15,8	47,4
5-6 años	25,8	58,1
6-7 años	22,9	74,9
Total	21,2	59,6

Respecto de los factores socioculturales analizados, el contraste de hipótesis mediante U de Mann-Whitney no encuentra diferencias significativas entre medición libre y sexo (U = 1288,50, p = ,56), ni entre aquella y origen familiar (U = 500,50, p = ,21). Respecto a la medición desde cero, tampoco se asocian los aciertos con ninguno de los dos factores anteriores (U = 1122,50, p = ,08; U = 500,50, p = ,29).

Por último, se estudia la posible asociación entre la conservación y la medición con regla. Empleamos la variable *conserva* como dicotómica asignando 0 o 1 según no conserven o si conserven, respectivamente. Señalamos que no se encuentran diferencias entre conservación y medición libre (U = 280,00, p = ,78) ni tampoco entre conservación y la medición desde cero (U = 220,00, p = ,23).

DISCUSIÓN

Los resultados en cuanto a conservación confirman la asociación entre esta y la edad (Piaget et al., 1960). Ningún niño de segundo curso de Educación Infantil (4-5 años) conserva, y sí lo hace el 3,2% del tercer curso (5-6 años) y el 14,3% de 1º de Educación Primaria (6-7).

En el porcentaje total de aciertos, se observa que cuando miden desde cero (59,6%) casi se triplican las mediciones exitosas respecto a cuando son ellos los que sitúan el objeto para medirlo (21,2%) en la medición libre. Podría justificarse pensando que estuvieran empleando una estrategia de lectura del punto final, que puede resultar exitosa siempre que se alinee el objeto con el cero, pero que no resulta tal al no tener esa alineación. Podría ser que solo unos pocos de los alumnos que usan esta estrategia de lectura del punto final supieran en realidad lo que están haciendo al medir, y son los que resultan exitosos en la medición libre. Estos serían conscientes del papel que desempeña la alineación del objeto con los distintos puntos de la regla. Los que hacen la lectura de manera mecánica, al medir por ellos mismos y alinear el objeto con otro punto de la regla distinto al cero, darán un resultado erróneo, aumentando el número de respuestas incorrectas. Es decir, estos últimos estarían mostrando que realizan un razonamiento no conservativo, confiando en su percepción visual pero fijándose solo en el extremo final, y, por lo tanto, errando en la medida. En un estudio paralelo se están analizando cuáles son las estrategias que utilizan los niños en sus mediciones.

En las mediciones desde cero se observa que el porcentaje de acierto es ascendente respecto al grupo de edad (47,4%, 58,1%, 74,3%). Sin embargo, para las mediciones libres realizadas, se produce un descenso en los aciertos del grupo de 5-6 años (25,8%) al de 6-7 (22,9%), hito coincidente con el cambio de etapa de Educación Infantil a Primaria en el currículum español. Cabría preguntarse si este hecho corresponde o no a diferencias en el proceso de enseñanza entre los cursos tercero de infantil y primero de primaria, como hemos detectado en las explicaciones sobre el mismo aportadas por las maestras implicadas, que se corresponde fundamentalmente con una menor manipulación en la Educación Primaria. Este hecho conllevaría la observada disminución de aciertos. No podemos achacar dicha disminución a la diferente familiaridad con la regla convencional, ya que en ningún caso los niños han sido instruidos específicamente en la medida con este instrumento.

Al encontrarse la mayoría de los niños y niñas de la muestra en un estadio previo a la conservación, según Piaget, no se esperaría que los niños midieran correctamente con la regla. Sin embargo, Boulton-Lewis (1987), Carpenter y Lewis (1976), Clements (1999) y Hiebert (1981), no consideran esto un obstáculo para que los niños midan con la regla. Eso es lo que nosotros observamos en todos los grupos de edad, pues el porcentaje de niños que conservan por equivalencia es muy inferior al de niños que miden correctamente. Por lo tanto diríamos que hay niños que miden correctamente sin haber adquirido la idea de conservación por equivalencia. Podría analizarse en un estudio posterior si fuera posible que sí tuvieran adquirida la idea de conservación por identidad.

Por último, ninguno de los factores socioculturales del estudio (sexo y origen familiar) influyen en el hecho de que ejecuten la medición correctamente. Los estudios consultados no mencionan la influencia de los factores sexo y origen familiar, por lo tanto no se puede contrastar con otras investigaciones, pero esperamos profundizar en este aspecto en estadíos posteriores en la continuación de nuestro trabajo.

CONCLUSIONES

El uso que hacen los niños de 4 a 7 años de la regla es notablemente mejor cuando se les coloca el objeto en el punto cero de la regla que cuando son ellos los que colocan el objeto. Suponemos que es porque desconocen el uso correcto del instrumento de medida que están utilizando y se limitan a leer sobre la regla el número más cercano al extremo final del objeto sin tomar conciencia de dónde se sitúa el punto de partida. Pensamos que este comportamiento es consecuencia de la falta de razonamiento conservativo o de la falta de instrucción sobre el uso de una herramienta de medida convencional. Cabe destacar un decrecimiento de aciertos en la medición libre coincidente con el cambio de etapa de Educación Infantil a Primaria, que podría estar relacionada con la perspectiva pedagógica, ya que ningún niño de la muestra ha recibido, al menos en el ámbito escolar, formación específica sobre el uso de la regla convencional. González et al. (2011) definen una pedagogía más global en Educación Infantil y más academicista en Educación Primaria, así como recursos didácticos más variados en cuanto a tipología y procedencia en Infantil que en Primaria.

Respecto a la influencia de la edad, el origen familiar, y el sexo sobre las mediciones desde cero o sobre las mediciones libres se determina que no es significativa estadísticamente hablando.

En cuanto a la conservación, el hecho de no relacionarse con una correcta medida podría descartar la necesidad de tener un pensamiento conservativo para medir adecuadamente. Sin embargo, la baja tasa de acierto en la medición libre respecto a la medición desde cero podría apuntar más a la confianza en la percepción visual respecto del extremo final que en la aplicación de la idea de conservación.

Para la mejora de ejecución de la tarea que se expone en el siguiente estudio, coincidimos con Stephan y Clements (2003) cuando dicen que, a pesar de la falta de consenso de los investigadores sobre el orden de adquisición de ciertas ideas de medida, sería más productivo involucrar a los niños en una variedad de actividades de medida concreta que esperar hasta que desarrollen estos conceptos de razonamiento. Para muchos niños, la compresión de la conservación y la transitividad se desarrollará junto con su compresión de medida (Hiebert, 1981)

Por último, lejos de apoyar la simple enseñanza de procesos empíricos para la enseñanza de la medida de longitud (Kamii, 2006), se propone potenciar el razonamiento lógico y la exploración conceptual (Nogueira, Blanco, Rodríguez-Vivero y Diego-Mantecón, 2016) junto a la motivación mediante necesidades reales de medida, como por ejemplo averiguar si las mesas de nuestra clase son más pequeñas o más grandes que las de la clase de al lado; en vez de realizar preguntas tipo "¿cuántos pasos mide la clase?", ya que, el maestro espera una respuesta numérica y eso es lo que le proporcionan sus alumnos. Es importante también, y aunque puede escasear en los libros de texto (Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2016), pero el docente lo puede enfatizar en el aula; la descripción oral, gráfica y escrita de la medida y el análisis de las distintas estrategias de medida.

Referencias

Acredolo, C. (1982). Conservation – Nonconservation: Alternative Explanations. En C. J. Brainerd (Ed.), *Children's Logical and Mathematical Cognition*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1–31. American Association for the Advancement of Science. (2001). *Atlas of Science Literacy*. Washington, D.C.: AAAS y NSTA.

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. T*eaching Children Mathematics, 13*(3), 140-146.

Belmonte, J. M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. *En Didáctica de las matemáticas para educación infantil* (pp. 315-345). Pearson Educación.

Boulton-Lewis, G. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal of Educational Psychology, 57*(3), 330-42.

Boulton-Lewis, G. M., Wilss, L. A. y Mutch, S. L. (1996). An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(3), 329-347.

Bragg, P. y Outhred, L. (2004). A measure of rulers-The importance of units in a measure. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 159–166). Bergen, Norway: Bergen University College.

Carpenter, T. P. y Lewis, R. (1976). The development of the concept of a standard unit of measure in young children. *Journal for research in Mathematics Education*, 53-58.

Castle, K., y Needham, J. (2007). First graders' understanding of measurement. *Early Childhood Education Journal, 35*(3), 215-221.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid, España: Síntesis.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics, 99*(1), 5-11.

Clements, D. H. y Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 Mathematics. En D. H. Clements, J. Sarama, y A. -M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 299-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Copeland, R. (1974). *How children learn mathematics: Teaching implications of Piaget's research* (2nd ed.). New York: Macmillan.

Elkind, D. (1967). Piaget's conservation problems. *Child development, 38*, 15–27.

González, J. A., Muñoz, M. P. E. y Zubizarreta, A. C. (2011). Metáforas de la transición: la relación entre la escuela infantil y la escuela primaria y la perspectiva de futuros docentes de educación infantil. *Educación XXI, 14*(1), 135.

Hiebert, J. (1981). Cognitive development and learning linear measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(3) 197-211.

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts?. *The Arithmetic Teacher, 31*(7), 19-24.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? *Teaching children mathematics, 13*(3), 154-158.

Kamii, C. y Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*(3), 116-121.

Kellman, P. J. y Massey, C. M. (2013). Perceptual learning, cognition, and expertise. *Psychology of Learning and Motivation, 58*, 117–159.

Kotsopoulos, D., Makosz, S. y Zambrzycka, J. (2015). Number Knowledge and Young Children's Ability to Measure Length. *Early Education and Development*, 1-14.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). Málaga: SEIEM.

Nogueira, I. C., Blanco, T. F., Rodríguez-Vivero, D. y Diego-Mantécon, J. M. (2016). Aproximación ontosemiótica de prácticas de aula sobre la medida en educación primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 387-396). Málaga: SEIEM.

Nunes, T., Light, P. y Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction, 3*(1), 39-54.

Piaget, J. (1978). *Psicología del niño*. Madrid: Morata.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Basic Books.

Stephan, M. y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in Prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 Yearbook* (pp. 3–16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Zöllner, J. y Benz, C. (2016). "I Spy with My Little Eye": Children Comparing Lengths Indirectly. En *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 359-370). Springer International Publishing

INTENCIÓN DE CAMBIO Y CONOCIMIENTO TECNOLÓGICO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO DEL FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO DE CASO

Intention to change and technological pedagogical content knowledge of pre-service mathematics teachers: a case study

González-Ruiz, I. y González, M.J.

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

Resumen

En este trabajo, utilizamos la Teoría del Comportamiento Planificado (TPB) para explorar la intención de cambio que manifiesta un futuro profesor de secundaria sobre la incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas. También identificamos, utilizando el modelo de Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), las componentes de conocimiento que pone de manifiesto al elegir entre tareas matemáticas con y sin tecnología. Relacionando estas dos facetas, afectiva y cognitiva, observamos que, aunque el futuro profesor tiene una intención de cambio favorable que le lleva a seleccionar una tarea con tecnología, su conocimiento no le permite identificar los aspectos de la tarea más valiosos desde el punto de vista cognitivo. Concluimos que es necesario aportar una formación que coordine explícitamente las componentes de conocimiento tecnológica, pedagógica y del contenido.

Palabras clave: *Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), enseñanza de las matemáticas con tecnología, formación inicial de profesores de matemáticas, intención de cambio, Teoría del comportamiento planificado (TPB).*

Abstract

In this paper, we use the Theory of Planned Behaviour to examine the intention to change of one pre-service secondary mathematics teacher. We also use the Technological Pedagogical Content Knowledge framework (TPACK) to determine the knowledge components that he activates when choosing between mathematical tasks with or without technology. Linking these affective and cognitive dimensions, we obtain that our pre-service secondary mathematics teacher has a favourable intention to change that leads him to choose a task with technology. However, his knowledge does not allow him to identify the most adequate elements of the task from the cognitive point of view. We conclude that teacher training programmes focused in the integration of technology, pedagogy and content knowledge are required.

Keywords: *intention to change, pre-service mathematics teachers training, teaching mathematics with technology, Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), Theory of Planned Behavior (TPB).*

INTRODUCCIÓN

Las autoridades educativas vienen fomentando en los últimos años la utilización de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, numerosos estudios apuntan a que estos recursos siguen sin tener un impacto significativo en la práctica docente (ver, por ejemplo, Hoyles y Lagrange, 2010, o Eurydice, 2013). Las causas de este escaso uso de la tecnología son variadas. Centrándonos en la figura de profesor, se pueden analizar estas causas desde dos puntos de vista complementarios: afectivo y cognitivo.

González-Ruiz, I. y González, M.J. (2017). Intención de cambio y conocimiento tecnológico pedagógico del contenido del futuro profesor de matemáticas: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 295-304). Zaragoza: SEIEM.

Desde el punto de vista afectivo, las actitudes del profesor, sus creencias o su percepción del entorno, generan grandes resistencias al cambio. En el marco de la teoría psicológico-social del comportamiento planificado (TPB) (Ajzen, 1991), se define la intención de cambio como la predisposición de una persona a modificar su conducta. Una intención de cambio favorable se considera el antecedente inmediato del cambio real en el comportamiento. Esta teoría se ha mostrado útil para identificar la predisposición de los profesores a usar tecnología en la enseñanza (Lee, Cerreto, y Lee, 2010; Waspe, 2013; Sugar, Crawley y Fine, 2005). En el caso concreto de las matemáticas, Pierce y Ball (2009) han mostrado que algunos de los obstáculos que se perciben los profesores –como el coste económico de la tecnología y la falta de tiempo para cubrir los programas– son dominantes a la hora de determinar su intención de cambio.

Desde el punto de vista cognitivo, el conocimiento del profesor también juega un papel esencial en sus decisiones sobre el uso de tecnología. Hay que tener en cuenta que la tecnología disponible actualmente es accesible y de manejo sencillo, pero puede ser muy compleja desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje. El conocimiento que el profesor pone en juego al valorar la enseñanza con tecnología es una combinación compleja de distintas componentes de conocimiento. El modelo de conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK) (Mishra y Koehler, 2006) considera las componentes de conocimiento disciplinar, pedagógica y tecnológica, así como las nuevas formas de conocimiento que se generan en las intersecciones entre dichas componentes. Este modelo se viene utilizando profusamente como referente teórico para la investigación educativa y como modelo para organizar los programas de formación de profesores en tecnología (Chai, Koh y Tsai, 2013). En el caso particular de la formación inicial, se han identificado dificultades de los futuros profesores para establecer relaciones consistentes entre los factores tecnológico y pedagógico, y se han desarrollado ideas para que los futuros profesores lleven a cabo esta integración de conocimientos (Koh, Chai y Tsai, 2010).

Los dos puntos de vista, cognitivo y afectivo, se han tratado de relacionar en distintos trabajos. Sabemos, por ejemplo, que aunque un profesor tenga un sólido desarrollo de la componente de conocimiento TPACK, sus creencias condicionan el modo en que dicho conocimiento se pone de manifiesto en el aula (An y Shin, 2010); por otro lado, aunque un profesor tenga una actitud muy favorable hacia el uso educativo de la tecnología, para poder obtener provecho de este medio tendría que desarrollar las componentes de conocimiento adecuadas (Waspe, 2013). Así pues, tal como reconocen Chai et al. (2013), es necesario seguir profundizando en el modo en que estos dos puntos de vista se relacionan. En el caso concreto los profesores en formación inicial, si bien hay cursos de formación diseñados según modelos que integran la tecnología, la pedagogía y el contenido, se necesitan estudios que analicen cómo se relacionan los factores afectivos y el conocimiento de la tecnología desde el punto de vista del aprovechamiento cognitivo. En los últimos tiempos venimos trabajando en esta línea (ej., González y González-Ruiz, 2017), que ha contado con cierta presencia en los últimos simposios de SEIEM (ej., Moreno y Llinares, 2015; Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2016); si bien, desde enfoques complementarios al que proponemos.

En este entorno situamos la contribución de este trabajo. Concretamente, tenemos el propósito de establecer relaciones entre las componentes de conocimiento del modelo TPACK que el profesor de matemáticas de secundaria pone de manifiesto al seleccionar tareas docentes y su intención de cambio sobre el uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas según la teoría TPB; asimismo, queremos determinar qué actitudes y qué componentes de conocimiento se corresponden con una selección de tareas óptima desde el punto de vista del aprovechamiento de los recursos tecnológicos.

REFERENTES TEÓRICOS

En la teoría psicológico-social del comportamiento planificado (TPB) (Ajzen y Fishbein, 1980; Ajzen, 1991), la intención de cambio se describe como la motivación de un sujeto para llevar a cabo un comportamiento nuevo y es el factor principal que permite predecir si realmente el sujeto va a modificar su conducta. La intención de cambio se analiza a través de tres dimensiones: la actitud, la norma subjetiva y el control percibido de la conducta. Pierce y Ball (2009) han reformulado las tres dimensiones de la teoría TPB para adaptarlas al ámbito de la enseñanza de las matemáticas con tecnología. Así, la actitud del profesor hacia la enseñanza de las matemáticas con tecnología capta la disposición positiva o negativa del profesor hacia este tipo de enseñanza; por ejemplo, tiene actitud positiva el profesor que cree que esa forma de enseñanza mejora la comprensión de los estudiantes. La norma subjetiva capta la presión, a favor o en contra, que siente el profesor en su entorno sobre el tipo de recursos que debe utilizar en el aula; por ejemplo, la presión de los compañeros o las expectativas de los padres sobre el uso de estos recursos. El control percibido de la conducta se refiere a la percepción del profesor sobre cuáles son los factores que facilitan u obstaculizan el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo, la percepción del profesor sobre su propio manejo de la tecnología o el coste económico de este tipo de recursos. Vemos que las tres dimensiones tienen una interpretación positiva y otra negativa. Pierce y Ball (2009) constatan un hecho esperado: cuanto más positiva es la actitud, cuanto mayor es la presión a favor que percibe el profesor y cuantos más factores facilitadores percibe, más favorable es su intención de cambio hacia el uso de tecnología en su práctica docente y, de hecho, más cambia su conducta en ese sentido.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor, el modelo TPACK[1] considera siete componentes de conocimiento que intervienen en la enseñanza eficaz con tecnología (Mishra y Koehler, 2006). Estas componentes se forman al considerar por separado las componentes de contenido (CK), pedagógica (PK) y tecnológica (TK), junto con las nuevas formas de conocimiento que se generan en las intersecciones, es decir, el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), el conocimiento tecnológico-pedagógico (TPK), el conocimiento tecnológico del contenido (TCK), y el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK). Si bien todas las componentes del modelo son importantes, la última de ellas, la componente TPACK, se considera esencial para la enseñanza eficaz con tecnología. Esta componente resalta la integración entre el contenido a enseñar, los procesos de enseñanza de ese contenido y el uso de la tecnología en ese contexto

FOCOS DEL ESTUDIO

En este trabajo tenemos el propósito de determinar, utilizando la teoría TPB, qué intención de cambio tiene un profesor de matemáticas de secundaria para incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

También queremos averiguar, utilizando el modelo TPACK, si este profesor es capaz de valorar las aportaciones de la tecnología. Concretamente, queremos determinar qué componentes de conocimiento pone de manifiesto al elegir entre dos tareas matemáticas parejas, una de las cuales lleva incorporado un applet, y si esas componentes de conocimiento le llevan a seleccionar las tareas más valiosas desde el punto de vista cognitivo. En particular, queremos ver si realmente pone en juego el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido necesario para determinar la potencialidad del applet.

Por último, partiendo de la hipótesis de que las dos dimensiones afectiva y cognitiva pueden estar relacionadas, queremos analizar si hay dimensiones de la intención de cambio y componentes de conocimiento que se corresponden con una selección de tareas que denominaremos óptima desde el punto de vista del aprovechamiento de los recursos tecnológicos para el aprendizaje. Así, queremos determinar si una intención de cambio favorable está relacionada con una mayor presencia de la componente TPACK en las manifestaciones del profesor al seleccionar la tarea matemática con tecnología.

¿A QUÉ TECNOLOGÍA NOS REFERIMOS?

Las cuestiones que analizamos en este trabajo requieren que, por un lado, miremos la tecnología desde un punto de vista general y, por otro lado, concretemos a qué tecnología nos referimos con un gran nivel de detalle.

El punto de vista general es necesario para valorar la intención de cambio del futuro profesor. Esta noción se conforma a partir de sus percepciones sobre el medio tecnológico. El profesor conforma estas ideas a partir de su experiencia personal con la tecnología. Por tanto, al valorar la intención de cambio nos referiremos a la idea general de tecnología que el futuro profesor haya desarrollado.

El punto de vista específico se necesita para poder determinar el conocimiento que el futuro profesor pone en juego a la hora de tomar decisiones concretas sobre el uso de la tecnología en la enseñanza. Son muchas las herramientas tecnológicas útiles en un aula de matemáticas. En este trabajo, nos centraremos en el uso de applets interactivos integrados en enunciados matemáticos. Denominaremos *tarea-TIC* al enunciado de un problema matemático que involucra el uso de una escena interactiva en la que aparecen sistemas de representación de tipo gráfico y/o simbólico. Desde el punto de vista cognitivo, una tarea-TIC promueve el papel activo de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, plantea cuestiones que implican al estudiante en procesos de razonamiento propios de la actividad matemática y hace que se materialicen objetos matemáticos abstractos, dando así un valioso soporte material a los procesos de razonamiento del estudiante.

METODOLOGÍA

Hemos llevado a cabo un proceso metodológico basado en la indagación sistemática, utilizando múltiples datos y dirigido a interpretar las valoraciones que un sujeto realiza en un contexto singular; así pues, corresponde al estudio de un caso. Este tipo de metodología es adecuada a la indagación sobre el conocimiento del profesor en el modelo TPACK (Koehler, Shin y Mishra, 2011). Respecto de la teoría TPB, aunque inicialmente es una teoría adaptada al uso de métodos cuantitativos, también ha sido ampliamente utilizada con metodologías de tipo cualitativo como la que utilizamos (Renzi y Klobas, 2008).

Muestra

Hemos realizado la experiencia con los alumnos del "Máster Universitario en formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato" en la especialidad de Matemáticas en una universidad pública española, un total de seis estudiantes. Limitamos este trabajo a exponer los resultados que afectan a uno de ellos. La elección del sujeto que nos ocupa se debe a que resulta representativo del grupo de 6 estudiantes investigados, tanto por su perfil académico como por el contenido y tipo de respuestas que aporta en los cuestionarios que seguidamente presentamos. La formación inicial en matemáticas de nuestro sujeto es la propia de los estudios de grado en ingeniería y su formación didáctica se reduce a la que está recibiendo como estudiante del máster indicado. En el momento de participar en esta investigación, no había recibido formación específica sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con tecnología. Consideramos que en esta situación, el sujeto no se veía coaccionado hacia la utilización de tecnología.

Cuestionario 1: recogida de datos sobre la intención de cambio del futuro profesor

Una revisión bibliográfica sobre los cuestionarios elaborados en el ámbito de la teoría TPB nos llevó a seleccionar y a adaptar a nuestros propósitos los 6 ítems que aparecen en la Tabla 1, y que conforman el cuestionario 1. Hemos elegido estos ítems adaptando a nuestro contexto el cuestionario utilizado por Pierce y Ball (2009). Concretamente, hemos utilizado seis ítems de respuesta abierta que pueden ser respondidos mencionando tanto las ventajas como los inconvenientes que el sujeto percibe. Estos ítems se corresponden, a priori, con las tres dimensiones del TPB, según se indica en la segunda columna de la Tabla 1.

Cuestionario 2: recogida de datos sobre el modelo de conocimiento TPACK del futuro profesor

El segundo instrumento de recogida de datos es un cuestionario elaborado por los autores, en el que buscamos identificar el conocimiento del futuro profesor en una situación profesional habitual en la práctica docente: la selección de tareas para la enseñanza de un tema de matemáticas. Este método de

Tabla 1. Ítems del cuestionario 1 y correspondencia con dimensiones TPB

Ítems	TPB
1. ¿Qué opinión tiene, en general, sobre el uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas?	Actitud
2. ¿Qué recursos utilizaría habitualmente en clase de matemáticas (libro de texto, apuntes propios, otros materiales educativos, etc.)?	Actitud Norma subjetiva
3. Estaría realmente tecnología de forma cotidiana en el aula?	Actitud
4. ¿Estaría dispuesto/a a hacer uso de un recurso tecnología desconocido para usted?	Control percibido de conducta
5. ¿Cuándo cree que es apropiado para los estudiantes utilizar tecnología (i.e., calculadora, ordenador, etc.) en las clases de matemáticas?	Actitud Norma subjetiva
6. ¿Qué ventajas y desventajas para el estudiante percibe en el uso de tecnología en el aula?	Actitud Control percibido de conducta

indagar en los procesos de toma de decisiones del futuro profesor en situaciones particulares de enseñanza ha sido usado con éxito para identificar las componentes de conocimiento del modelo TPACK (Burgoyne, Graham y Sudweeks, 2010:Niess, 2005).

El cuestionario 2 consiste en ofrecer al sujeto una pareja de tareas matemáticas que comparten los mismos objetivos matemáticos, siendo una de ellas una tarea-TIC y la otra no. El sujeto ha de elegir una de las tareas y argumentar las razones que le llevan a realizar esa selección. Independientemente de cuál sea la tarea elegida, en el proceso de seleccionar y argumentar vemos si el futuro profesor identifica las potencialidades del applet desde el punto de vista cognitivo, conocimiento que se corresponde con la componente TPACK, así como las demás componentes de conocimiento que el sujeto emplea para realizar su selección. En definitiva, se trata de identificar las componentes del modelo de conocimiento TPACK que moviliza el futuro profesor al seleccionar una tarea, localizando en el conjunto de argumentos que manifiesta aquellos que están inequívocamente asociados a dichas componentes. Esto nos dará información acerca de si su elección es la óptima.

El cuestionario 2 versa sobre el tema de sucesiones algebraicas para el nivel de 3º ESO (ver Tabla 2). En el protocolo del cuestionario se puso al sujeto en antecedentes, situándole las tareas en un contexto de aula simulado. En este sentido, se le indicó que "*los alumnos han realizado ya, junto con el profesor, tareas de carácter rutinario en relación a los conceptos de numerabilidad, progresión aritmética, término general de una progresión aritmética, suma de una progresión aritmética y representación grafica de progresiones aritméticas*", precisando también el contenido matemáticos visto sobre sucesiones algebraicas.

Como se ha apuntado previamente, la pareja de tareas se ha elegido de modo que las dos tareas aborden los mismos contenidos matemáticos (cálculo de un término cercano de una progresión y de otro lejano; y suma de n términos de una progresión aritmética, con n pequeño y con n grande). Asimismo, ambas tareas comparten los mismos objetivos: identificar los datos de un problema de progresiones aritméticas en contexto (primer término, término n-ésimo, diferencia, suma) y reconocer la necesidad de usar las fórmulas para resolver cómodamente problemas de generalización lejana.

Con base en esta característica, hablaremos de la selección óptima según el criterio siguiente: seleccionar la tarea-TIC solo cuando el applet aporta una mejora relevante al aprendizaje del estudiante en el contexto de la resolución de la tarea; en otro caso, la selección óptima es optar por la tarea que no tiene applet.

Tabla 2. Cuestionario 2

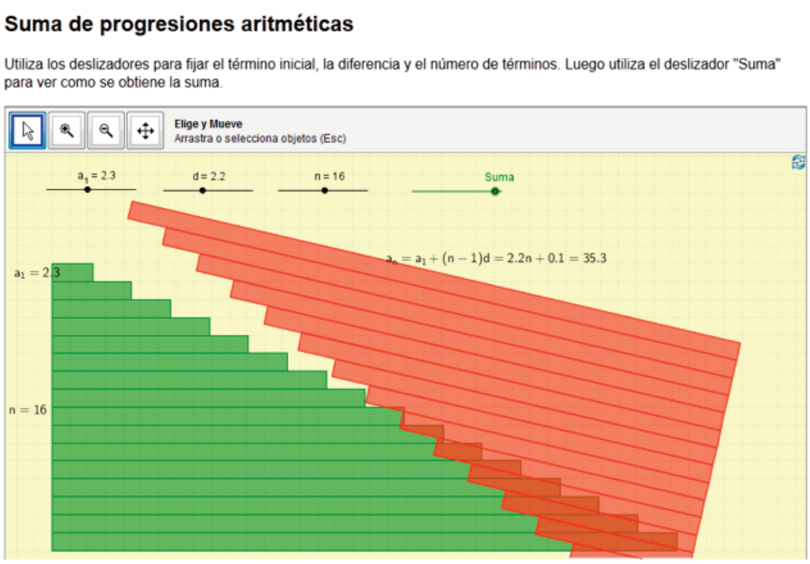
¿Cuál de las dos tareas siguientes elegirías para iniciar la enseñanza del tema de sucesiones? Justifica tu respuesta.

Tarea 1

Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena. Para ello, quiere hacer cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:
– ¿Cuántos ejercicios tendrá que hacer el día 15 de septiembre?
– ¿Cuántos ejercicios hará en total?

Tarea 2

Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide aumentar el entrenamiento 10 minutos cada día.
– ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días?
– ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?
Dispones del siguiente applet para resolver esta tarea.



http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Suma_progr_aritm.html

La aportación más destacada del applet de la tarea-TIC de la Tabla 2 (correspondiente a la Tarea 2) es que muestra una forma visual de demostrar la fórmula de la suma de la progresión aritmética; esta demostración resulta muy intuitiva, puesto que el estudiante solo tiene que desplazar unos deslizadores para verla. No obstante, esta es una cualidad que no se requiere en la tarea. Además, en el applet se muestra la fórmula de la suma y los deslizadores le evitan tener que hacer la sustitución de valores en dicha fórmula; pero en el contexto en el que se plantea esta tarea, el estudiante debe mostrar que conoce la fórmula de la suma y que sustituye adecuadamente los valores en ella. Por ello, la selección óptima en este caso es la tarea 1. Si el futuro profesor utilizase la argumentación anterior para seleccionar la tarea 1 de esta pareja, estaría poniendo de manifiesto un conocimiento asociado a la componente TPACK y estaría usándolo para realizar la selección óptima.

Es importante señalar que el futuro profesor puede poner de manifiesto un conocimiento asociado a la componente TPACK, pero este conocimiento puede ser erróneo o incompleto en el contexto en el que se plantea la tarea. Distinguiremos esta posibilidad indicando que el conocimiento asociado a la componente TPACK que manifiesta el sujeto no es adecuado a la situación. Por ejemplo, en el applet anterior, se podría argumentar que los deslizadores evitan tener que hacer la sustitución de valores en la fórmula y así facilitan al estudiante la realización de las operaciones, sin darse cuenta de que los propósitos de la tarea se ven perjudicados por esta cualidad.

Implementación de los cuestionarios

Los dos cuestionarios se implementaron consecutivamente. El futuro profesor de matemáticas dispuso de una hora para rellenarlos ambos, primero el cuestionario 1 y después el 2. El investigador atendió preguntas de tipo técnico para aclarar en qué consistía el applet y, si el sujeto lo deseaba, tenía un ordenador delante en el que podía manipularlo.

En los dos cuestionarios, se han aportado las respuestas de forma abierta. Para analizar estas respuestas hemos utilizado los criterios que explicamos a continuación y hemos obtenido los resultados que siguen.

Cuestionario 1

Para identificar las tres dimensiones del TPB en las respuestas al cuestionario 1 separamos las respuestas en frases que tuviesen significado respecto de alguna de dichas dimensiones y seguimos un proceso interpretativo basado en la definición de la propia dimensión. Puesto que cada dimensión del TPB tiene una interpretación positiva y otra negativa (actitud positiva o negativa; percepción sobre la presión del entorno a favor o en contra; y percepción de factores que facilitan u obstaculizan), también añadimos a cada frase el sentido positivo o negativo asociado a la dimensión.

Mediante este proceso obtuvimos un listado de frases asociadas a cada dimensión del TPB en sentido positivo o negativo. Los resultados se muestran en la figura 1, donde cada barra representa la cantidad de frases positivas (gris) y negativas (negro). Interpretaremos estos resultados en la sección siguiente.

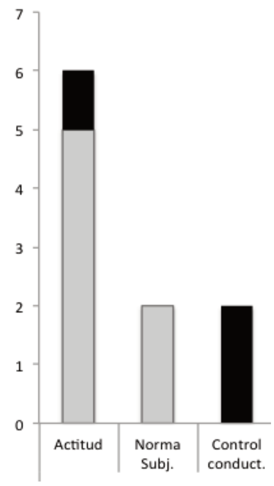


Figura 1. Resultados del cuestionario 1

Cuestionario 2

Para analizar los resultados del cuestionario 2 hemos registrado los siguientes aspectos: los tipos de conocimiento que pone de manifiesto en la justificación; en los casos en los que pone de manifiesto la componente TPACK, la valoración sobre si este conocimiento es adecuado a la situación; si selecciona o no tareas-TIC; si realiza o no la selección óptima. En la Tabla 3 mostramos los resultados obtenidos sobre estos aspectos.

Tabla 3. Resultados del cuestionario 2

Número de frases	Tipos de Conocimiento	TPACK adecuado	Selección de Tarea-TIC	Selección óptima
9 frases	PTK, PK, CK, PK, TPACK, PK, PTK, PK, PCK	no	si	no

Para identificar el tipo de conocimiento puesto de manifiesto, hemos separado las respuestas que aporta el futuro profesor de matemáticas en frases que tuviesen significado respecto del modelo TPACK y hemos asignado a cada frase el tipo de conocimiento que el sujeto pone en ella, teniendo en cuenta la descripción de cada componente de conocimiento adaptada a nuestro contexto. A modo de ejemplo, mostramos un segmento de sus respuestas originales en la Figura 2.

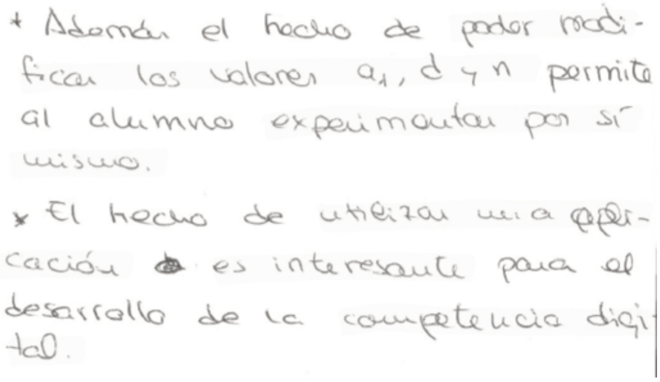

* Además el hecho de poder modificar los valores a_1, d y n permite al alumno experimentar por sí mismo.
* El hecho de utilizar una aplicación es interesante para el desarrollo de la competencia digital.

Figura 2. Ejemplo respuesta en el cuestionario 2

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

El futuro profesor de matemáticas manifiesta una actitud positiva hacia el uso de tecnología, tal y como queda reflejado en las 5 frases positivas, de un total de 6, que aporta en esta línea; por ejemplo, indica: "*Mejoran la motivación y el interés del estudiante. Dan sentido a los contenidos" o "su uso debería extenderse a todos los cursos*". Percibe que es importante usar tecnología en el actual entorno de enseñanza de las matemáticas, manifestando 2 frases en dimensión 2: "*Preparan al alumno para su futuro profesional y personal" y "el uso de tecnología en esta etapa es imprescindible*". Solo menciona algunas dificultades genéricas asociadas al uso de tecnología en la enseñanza, registradas en 2 frases en dimensión 3: "*Carencia de recursos en la práctica" y "la tecnología requiere, generalmente, de un conocimiento adicional por parte del profesor*".

Selecciona la Tarea 2, que corresponde con la tarea-TIC. El conocimiento que manifiesta en su selección es mayoritariamente pedagógico (PK en 5 de 9 ocasiones). Hace referencia a las posibilidades cognitivas de las tareas pero sin mencionar el contenido: "*El ser capaz de usar diferentes metodologías para resolver un problema es una manera muy efectiva de adquirir conocimiento significativo" y expresa el interés de conectar la tecnología con otras disciplinas:* "… "*es interesante para el desarrollo de la competencia digital*". También muestra, de forma asilada, conocimiento del contenido (CK): "*…hay que aplicar la fórmula para su resolución…*". Llega a manifestar conocimiento de tipo TPACK, pero no es adecuado, ya que menciona un aspecto que no es significativo para los propósitos que persigue la tarea: "*…el hecho de poder modificar [mediante un deslizador] los valores a1, d y n permite al alumno experimentar por sí mismo*". En líneas generales, manifiesta de forma disjunta conocimiento pedagógico-tecnológico (TPK): "*…trabajan…la comprensión y aplicación a una herramienta real, [Geogebra]*", y pedagógico del contenido (PCK): "*…trabajo de los contenidos a través de una aplicación real*". Cabe decir que también manifiesta conocimiento pedagógico-tecnológico (TPK) en sentido negativo: "*…cómo funciona el applet… puede suponer para el alumnado un camino sin salida*".

En suma, se trata de un futuro profesor cuya intención de cambio hacia el uso de tecnología es favorable. Todo el conocimiento que manifiesta tiene una componente pedagógica, la mayoría de las veces de carácter general. El conocimiento que manifiesta asociado a la componente TPACK no es adecuado. Su actitud favorable le lleva a seleccionar la tarea-TIC, pero no logra seleccionar la tarea óptima. Todo ello hace que no valore la adecuación de los conceptos y propiedades relativas a las sucesiones algebraicas, requeridas en la tarea, en el entorno de la TIC.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos explorado la intención de cambio de un futuro profesor sobre el uso de tecnología y hemos identificado las componentes de conocimiento que ha puesto de manifiesto en un proceso de selección de tareas. En particular, hemos analizado si su conocimiento le ha ayudado a realizar una valoración óptima de las aportaciones de un applet en relación con los propósitos de la tarea a la que acompaña.

Los resultados muestran que una intención de cambio favorable al uso de tecnología no se acompaña de una reflexión adecuada sobre la potencialidad de las tareas. El conocimiento tecnológico pedagógico del contenido que pone de manifiesto el futuro profesor no le permite realizar la selección óptima. Es su intención de cambio, y no su conocimiento, el factor dominante que le lleva a seleccionar tareas-TIC.

Su preparación puede considerarse insuficiente para llevar a cabo una enseñanza con tecnología que realmente aproveche la potencialidad de este medio para el aprendizaje de las matemáticas. Cabe recordar que el sujeto que ha formado parte de la muestra aun no había recibido formación específica sobre enseñanza de las matemáticas con tecnología, aunque sí había recibido formación pedagógica. En este sentido, confirmamos las conclusiones de otros estudios, en los que se plantea precisamente el modelo TPACK argumentando que el tipo de conocimiento asociado a la componente TPACK no se desarrolla de forma espontánea por el hecho de desarrollar conocimiento independiente asociado, por separado, a las tres componentes de conocimiento, tecnológica y pedagógica. Por tanto, sugerimos que los programas de formación inicial de profesores pongan el énfasis en el desarrollo de la componente TPACK. De esta forma, la intención de cambio favorable que manifiestan los futuros profesores puede verse acompañada de una formación que les permita realizar una valoración adecuada sobre la tecnología disponible para el aprendizaje de las matemáticas y una selección óptima de tareas TIC.

Referencias

Ajzen, I. (1991). The theory of planned behavior. *Organizational Behavior and Human Decision Processes 50*(2): 179–211.

Ajzen, I. y Fishbein, M. (1980). *Understanding attitudes and predicting social behavior.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

An, H. y Shin, S. (2010). The impact of urban district field experiences on four elementary pre-service teacher's learning regarding technology integration. *Journal of Technology Integration in the Classroom, 2*(3), 101-107.

Burgoyne, N., Graham, C. R. y Sudweeks, R. (2010). *Assessing the Validity and Reliability of an Instrument Measuring TPACK*. Paper presented at the Proceedings of Society for Information Technology Teacher Education International Conference 2010.

Chai, C. S., Koh, J. H. L. y Tsai, C. C. (2013). A Review of Technological Pedagogical Content Knowledge. *Educational Technology & Society, 16*(2), 31–51.

Eurydice (2013). Cifras clave sobre el uso de las TIC para el aprendizaje e innovación en lo centros escolares de Europa 2011. Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

González, M. J. y González-Ruiz, I. (2017). Behavioural Intention and Pre-Service Mathematics Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(3), 601-620.

Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Nueva York: Springer.

Koehler, M. J., Shin, T.S. y Mishra, P. (2011). How do we measure TPACK? Let me count the ways. En R. N. Ronau, C.R. Rakes, y M. L. Niess (Eds.), *Educational Technology, Teacher Knowledge, and Classroom Impact: A Research Handbook on Frameworks and Approaches* (pp.16-31). Information Science Reference, Hershey PA.

Koh, J. L., Chai, C. S. y Tsai, C. C. (2010). Examining the technological pedagogical content knowledge of Singapore preservice teachers with a large-scale survey. *Journal of Computer Assisted Learning, 26*(6), 563-573.

Lee, J., Cerreto, F. A., y Lee, J. (2010). Theory of planned behavior and teachers' decisions regarding use of educational technology. Educational Technology & Society*, 13*(1), 152–164.

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Moreno, M. y Llinares, S. (2015). Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 413-421). Alicante: SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2016). Validación de un instrumento para evaluar el Máster en Formación del Profesorado: estudio piloto en la especialidad de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 377-386). Málaga: SEIEM.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 509–523.

Pierce, R. y Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 299-317.

Renzi, S. y Klobas, J. (2008). Using the Theory of Planned Behavior with Qualitative Research (Version Working Paper Number 12): Centre for Research on Social Dynamics (DONDENA), Università Commerciale Luigi Bocconi,Working Papers 012.

Sugar, W., Crawley, F. y Fine, B. (2005). Critiquing theory of planned behaviour as a method to assess teacher's technology integration attitudes. *British Journal of Educational Technology, 36*(2), 331–334.

Waspe, T. (2013). *Beliefs of the district e-learning coordinators in the GDE about the pedagogical integration of ICTs in Gauteng Online schools*. Tesis Doctoral. Universidad del Witwatersrand.

---

[1] Es frecuente utilizar las siglas TPACK para referirse a dos aspectos diferentes: por un lado, se habla de modelo TPACK para denominar al modelo de conocimiento formado por 7 componentes; por otro lado, se habla de componente TPACK para denominar a una de dichas componentes. En este trabajo seguiremos dicha terminología

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL LENGUAJE DEL AZAR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Exploratory study about the language of chance in secondary education

Hernández-Salmerón, E.[a], López-Martín, M.M.[b] y Batanero, C.[b]

[a]IES Mediterráneo de La Línea de la Concepción, [b]Universidad de Granada

Resumen

Nuestro estudio se orienta a la evaluación del conocimiento de los términos verbales asociados con los sucesos aleatorios y la probabilidad en una muestra de 56 alumnos de 1º y 2º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se observan carencias de vocabulario relativo al azar y dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles. Igualmente se perciben dificultades para proceder a valorar la probabilidad de diversas situaciones cotidianas con una especial confusión entre los términos "imposible" e "improbable" que tratan como sinónimos.

Palabras clave: *probabilidad, lenguaje, alumnos de educación secundaria obligatoria.*

Abstract

Our study is oriented to the evaluation of the knowledge of the verbal terms associated with random events and the probability, in a sample of 56 students in the 1st and 2nd year of the Compulsory Secondary Education. We observe some deficiencies in the vocabulary relative to chance and also difficulty in finding synonyms of expressions related to probability at different levels. Difficulties are also perceived to assess the probability of different everyday situations with a special confusion between the terms "impossible" and "improbable" that are treating as synonyms.

Keywords: *probability, language, students of compulsory secondary education.*

INTRODUCCIÓN

Los contenidos de probabilidad aparecen en la Educación Secundaria Obligatoria en España (MECD, 2015), dentro del Bloque 5, Estadística y probabilidad, donde se presentan los estándares de aprendizaje, contenidos y criterios de evaluación sobre este tema para cada uno de los niveles educativos y orientaciones de la enseñanza. En concreto, para el 1º y 2º curso, se presentan los siguientes contenidos:

> Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos (MECD, 2015, p. 413).

Dentro de este tema destacamos el importante papel dado al lenguaje y otras representaciones de los objetos matemáticos por Duval (1993), no sólo son indispensables para la comunicación del trabajo matemático, sino también para el desarrollo de la misma actividad matemática. Este importante papel es reconocido en el citado documento curricular cuando se contempla la importancia de que el alumno pueda "comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas" (p. 407), o cuando se indica "En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras, la comunicación lingüística, al leer de forma comprensiva los enunciados

Hernández-Salmerón, E., López-Martín, M.M. y Batanero, C. (2017). Estudio exploratorio sobre el lenguaje del azar en Educación Secundaria Obligatoria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 305-314). Zaragoza: SEIEM.

y comunicar los resultados obtenidos" (p. 408) e igualmente en varios estándares de aprendizaje evaluables, tales como "Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada" (p. 409). Será por tanto necesario asegurar un correcto conocimiento del lenguaje en cada tema abordado y en particular, para el aprendizaje de la probabilidad, con el fin de asegurar tanto la comprensión de los estudiantes como su competencia en la resolución de problemas.

El objetivo del trabajo es realizar un estudio para conocer la terminología que los estudiantes asocian a los fenómenos aleatorios y la probabilidad los estudiantes en los primeros dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Las investigaciones sobre comprensión del lenguaje de probabilidad se han llevado a cabo en un periodo en que la probabilidad no se enseñaba en la escuela primaria y se han realizado en muchos casos con entrevistas; en otras, como las de Green (1983) y Cañizares (1997) se han utilizado cuestionarios escritos. Pero estos cuestionarios estaban centrados en un contenido más amplio y el conocimiento del lenguaje se evaluaba en pocos ítems y era un tema marginal en dichas investigaciones. Además, estaba pensado para niños desde los 10 años a 14; no concretamente en los de 12-15 que sería la edad en que se centra nuestro estudio. En consecuencia nuestro trabajo contribuye a ampliar los resultados de investigación sobre esta temática.

MARCO TEÓRICO

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático es el lenguaje verbal, que, iniciándose a partir del lenguaje cotidiano, progresivamente se transforma en otro de mayor nivel de abstracción (Schleppegrell, 2007). Según este autor los desafíos lingüísticos del lenguaje matemático incluyen el carácter multi-semiótico de muchos términos, los procesos relacionales implicados en las frases nominales y el significado preciso de las conjunciones. Son también importantes las relaciones lógicas implícitas que enlazan los elementos del discurso matemático, en especial en los libros de texto (Lemke, 2003; O'Halloran, 2003). En el caso de la probabilidad un ejemplo aplicable sería cuando el estudiante debe relacionar elementos verbales y numéricos con gráficos, tablas y símbolos y las relaciones entre estas diversas representaciones son con frecuencia implícitas. Además el uso de las estructuras lingüísticas varía en matemáticas respecto al lenguaje cotidiano (Adams, 2003).

La doble función, representacional e instrumental, del lenguaje matemático es resaltada por Godino, Batanero y Font (2007), pues el lenguaje permite designar objetos abstractos que no podemos percibir y ayuda a operar con ellos. Estos autores, en su teorización, asumen que los objetos matemáticos emergen de las prácticas realizadas para resolver problemas. También indican que el lenguaje matemático es la parte perceptible (ostensiva) de las prácticas. Además, dicho lenguaje matemático tiene un gran poder de comunicación, al ser conciso y preciso y tener una amplia variedad (notaciones, palabras y expresiones, símbolos, tablas, etc.). El lenguaje matemático es considerado en sí mismo como una de las categorías primarias de objetos en esta teorización, pero su papel esencial se deduce de su uso como soporte tanto a las situaciones-problemas y argumentos como a las definiciones, procedimientos y proposiciones y estas tres últimas, a su vez, regulan el uso del lenguaje.

De acuerdo a Godino, Batanero y Font (2003) el lenguaje matemático permite representar informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve relaciones no directamente observables y permitiendo realizar predicciones. Por ello los alumnos deben tener suficiente dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar las soluciones encontradas y justificarlas a otras personas o al profesor. Este dominio, en el caso particular de la probabilidad elemental es el que tratamos de evaluar para los estudiantes de nuestra muestra.

ANTECEDENTES

Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías de lenguaje verbal en matemáticas:

- Términos o expresiones de la vida cotidiana, cuyo significado no varía al utilizarlos en matemáticas; por ejemplo, en probabilidad la palabra "dado".
- Aquellas expresiones o palabras usadas en la vida diaria, pero cuyo significado puede variar cuando se utilizan en las matemáticas; sería el caso de las palabras "seguro" o "Imposible".
- Términos que sólo se utilizan en la matemática, como, por ejemplo, varianza.

En nuestro estudio nos centramos en la segunda categoría, es decir, consideramos aquellos términos que aun formando parte del lenguaje cotidiano, también tienen un significado probabilístico bien marcado, y que muchas veces el alumnado confunde con el atribuido en la vida real, no tan preciso. La dificultad ligada a la interpretación de estos términos ha sido remarcada por los algunos investigadores. Destacamos, en primer lugar a Green (1983), quien elaboró un cuestionario con el que recogió datos de cerca de 3000 alumnos ingleses de 11 a 16 años para conocer su grado de conocimiento en conceptos probabilísticos e intuiciones aleatorias. Uno de los apartados de su cuestionario, denominado razonamiento verbal, evaluaba el conocimiento del lenguaje verbal probabilístico del alumnado y su uso en situaciones de incertidumbre. Constaba de cinco ítems diferentes; algunos de ellos han sido adaptados para nuestra investigación. Estos ítems evalúan la comprensión de los siguientes términos: "muy probable", "improbable", "probable", "poco probable", "imposible", "posible", "poca posibilidad", "igual posibilidad", "sucede al azar" y "seguro". En unos ítems se pide al niño explicar con sus propias palabras qué significa el término; en otros dar sinónimos de las palabras o escribir una frase utilizándola; o finalmente indicar cuántas veces entre 10 o entre 100 ocurrirá el suceso calificado con dicha palabra.

Como réplica de esta investigación, Cañizares (1997), identifica el grado de comprensión del lenguaje probabilístico de un grupo 350 de alumnos de entre 10 y 14 años de varios centros públicos de Jaén utilizando el test de Green indicado anteriormente. Cañizares obtiene resultados positivos comparándolos con los obtenidos por Green en Inglaterra en algunos ítems, siendo los resultados en otros ligeramente inferiores. En la mayoría de los ítems obtiene más del 50% de respuestas correctas. Como principal dificultad destaca la diferenciación entre "imposible" e "improbable" y entre "muy probable" y "seguro" o la comprensión de "sucede al azar" y donde se obtuvieron peores resultados que en el trabajo de Green (1983). También destaca un alto porcentaje de respuestas confusas, debido a la poca capacidad de comunicación escrita de los niños o a la confusión entre suceso y experimento.

Son también importantes los estudios del lenguaje probabilístico en los libros de texto en España. Resaltamos, entre otros, el elaborado por Gómez, Contreras y Batanero (2015) con dos series de libros, donde se identifican los términos relacionados con la probabilidad y se seleccionan las siguientes variables para el análisis: expresiones verbales, símbolos, expresiones numéricas, representaciones tabulares y gráficas. A lo largo de los cursos, la riqueza en el vocabulario usado y la complejidad de las representaciones aumenta, aunque en los libros de texto se observa un uso continuado de expresiones cotidianas. El lenguaje verbal se usa para referenciar conceptos, propiedades procedimientos o para sugerir un significado específico de la probabilidad. Por ejemplo, los términos *caso favorable* o *juego equitativo* están ligados al significado clásico, mientras que frecuencia, repetición están ligados al frecuencial. La mayoría de los términos se usan con el mismo sentido en el lenguaje ordinario, pero no siempre y hay otros específicos (como regla de Laplace, fracción) propios de la matemática.

Respecto a los textos de educación secundaria un trabajo reciente es el de Ortiz, Albanese y Serrano (2016), quienes analizan el lenguaje de la estadística y probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados el pasado año. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

MÉTODO

La investigación se enmarca dentro de los diseños de tipo descriptivo y aplicado (Bisquerra, 1989), concretamente, se ha llevado a cabo un estudio exploratorio con el fin de evaluar los conocimientos básicos en lenguaje del azar que tienen los estudiantes seleccionados. En una primera fase de la investigación se ha elaborado un cuestionario que se ha utilizado como principal herramienta, a continuación se ha pasado a la recogida de datos para, posteriormente, analizar y obtener nuestras conclusiones. Sobre las respuestas de los estudiantes se realizó un análisis de contenido de los ítems de respuesta abierta (Bernete, 2013). Mediante un proceso inductivo se obtuvieron las listas de palabras y expresiones verbales ofrecidas por los estudiantes, revisando la codificación varias veces para asegurar la fiabilidad.

Muestra

La muestra seleccionada en el estudio está formada por 56 estudiantes de primero y 33 de segundo curso de ESO de un instituto de La Línea de la Concepción con edades comprendidas entre los 12 y 15 años. Cuarenta y cuatro estudiantes eran chicas y la distribución de chicos y chicas en cada curso era muy similar. El instituto tiene características similares a otros centros, en las variables relacionadas con el perfil económico, cultural y social de los padres.

Los estudiantes de primero provienen de tres centros de Educación Primaria distintos es por ello que varios de ellos reconocen no haber tenido ninguna toma de contacto con el tema a evaluar en esta investigación. En el caso de segundo curso nos encontramos con una situación similar ya que algunos de los estudiantes no estudiaron el tema de estadística y probabilidad en el primer curso.

El cuestionario se pasó a los estudiantes entre los meses de abril y mayo según la disponibilidad del grupo para no interferir en su ritmo habitual de clase. Con la colaboración de los docentes de estos grupos, se le mostró al alumnado una síntesis de la importancia de la investigación hoy en día, máxime en un centro educativo y se les explicó cómo ellos iban a ser protagonistas de un estudio en su misma aula. Entendida esta importancia, se continuó ofreciendo el cuestionario a todos los alumnos que se encontraban en la clase y se les dio todo el tiempo necesario hasta completarlo. La mayoría finalizó en 30 minutos o antes, necesitando algunos más de 40 minutos

Cuestionario

La elaboración del cuestionario está basada en los trabajos desarrollados por Cañizares (1997) y Green (1993) quienes plantearon preguntas similares a estudiantes con edades comprendidas entre 10 y 14 años. En nuestro caso, se han propuesto cuatro ítems orientados a analizar el vocabulario que los alumnos han adquirido en relación con los fenómenos aleatorios además, en la elaboración del mismo se ha evitado usar un lenguaje formal. Los ítems propuestos se recogen en la Figura 1.

Todos los ítems tratan de valorar el vocabulario adquirido por el alumno sobre los fenómenos aleatorios. Los dos primeros se toman de los trabajos de Cañizares (1997) y Green (1993) quienes plantearon preguntas similares a niños de entre 10 y 14 años, observando que algunos niños daban un significado inapropiado a algunas palabras relacionadas con el azar.

En el ítem 1 está enfocado en ver el número de palabras que el alumno propone y de ellas, cuáles podrían corresponder a un vocabulario elemental sobre los fenómenos aleatorios (el alumno podría también proponer otras inapropiadas).

La elaboración del ítem 2 está orientada en queremos ver si el alumno es capaz de dar un sinónimo correcto o una frase con el mismo significado para cada una de las palabras incluidas en la actividad. También se verá cuáles de todas las expresiones se comprenden correctamente y si en alguna hay una confusión respecto a su significado.

El ítem 3 trata de ver si el alumno comprende la expresión "cincuenta por ciento de posibilidades", y como consecuencia analizar su comprensión y discriminación de los conceptos de porcentaje y probabilidad. Las respuestas correctas serían la T*iene tantas posibilidades de éxito como de fracaso, Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir* y *Sucede más o menos 5 de cada 10 veces*. Pero algunos alumnos podrían interpretarlo como alguna de las otras frases o bien considerar incorrecta *Sucede más o menos 5 de cada 10 veces* al esperar una ocurrencia exacta del 50%.

El último ítem ha sido adaptado de un ejercicio propuesto en Batanero y Godino (2004) y pide a los alumnos usar el vocabulario que ya conocen para dar una valoración cualitativa de probabilidades. Los alumnos han de utilizar su conocimiento del contexto (su experiencia con la meteorología en su ciudad), junto con el vocabulario para completarla. No hemos encontrado estudios que evalúen la comprensión de este ítem con estudiantes, por lo que este es un punto original de nuestro trabajo.

Ítem 1. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.

Ítem 2. Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que: imposible, posible, igual probabilidad, poca posibilidad, seguro, inseguro, imposible, muy posible.

Ítem 3. Indica con una cruz (X) aquellas frases que quieren decir lo mismo que "**tiene un cincuenta por ciento de posibilidades**": Puede ocurrir o no, tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso, sucederá 50 veces de cada 50, puede suceder algunas veces, tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir, sucede más o menos 5 de cada 10 veces.

Ítem 4. El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones:
– Lloverá todo el día
– Lloverá solo un rato
– La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor
– Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados
– Mañana nevará en La Línea
– Lloverá tanto que habrá inundaciones
Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases del Ítem 2). Usa como ejemplo la siguiente: "**Es poco probable** que llueva todo el día".
a. ____ que llueva solo un rato.
b. ________________ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.
c. ______________que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.
d. _________________________________ que mañana nieve en La Línea.
e. ____________________________que llueva tanto que haya inundaciones.

Figura 1. Tareas propuestas en el cuestionario

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados del ítem 1 que fue de especial dificultad para el alumnado, se presentan en la Tabla 1, que indica la necesidad de mejora de la competencia lingüística y de la expresión escrita. En general, los estudiantes de primer curso han ofrecido un mayor número de palabras, se ha contabilizado por alumno 1,6 palabras mientras que en segundo disminuye a 0,8. Sin embargo, el análisis del porcentaje de alumnos que no dan respuesta alguna al ítem es ligeramente mayor en primero (44,6%) que en segundo (39,4%). De la lista de palabras aportadas por el alumnado, destaca el uso continuado de los términos "suerte", "casualidad" y "aleatorio" y de las expresiones de probabilidad "seguro", "poco probable" y "muy probable" (véase Figura 2). En algunos casos, se han encontrado situaciones en los que los estudiantes incluyen objetos que son empleados en experimentos aleatorios como dados o cartas, este hecho puede ser originado por una confusión entre el objeto y la realización del experimento, pero en todo caso la respuesta es deficiente. Los resultados obtenidos en este ítem coinciden con los obtenidos por Cañizares (1997).

Tabla 1. Resumen de respuestas al ítem 1

	1º curso (n = 56)	2º curso (n = 33)
Número de palabras correctas	88	28
Número de palabras incorrectas	11	23
No responden	25 alumnos	13 alumnos

Por otro lado, se ha detectado la aparición de frases como "elegir sin pensar", "espontáneo" y "rápido"; sin embargo destacamos la presencia de descripciones imprecisas de algunos conceptos debido a la falta de vocabulario (véase tercera respuesta incluida en la Figura 3, donde se incluye una frase que no se refiere al azar en sí mismo sino a la comparación de dos probabilidades).

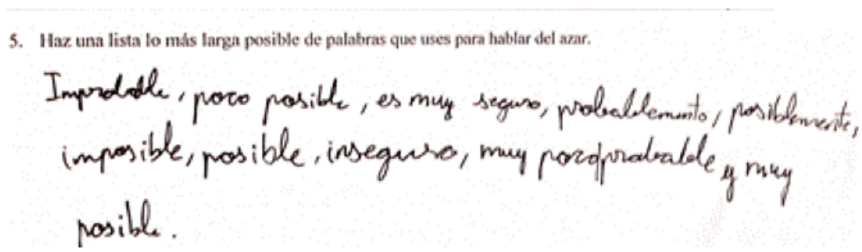


Figura 2. Respuesta al ítem 1 del alumno 29 (1º ESO)

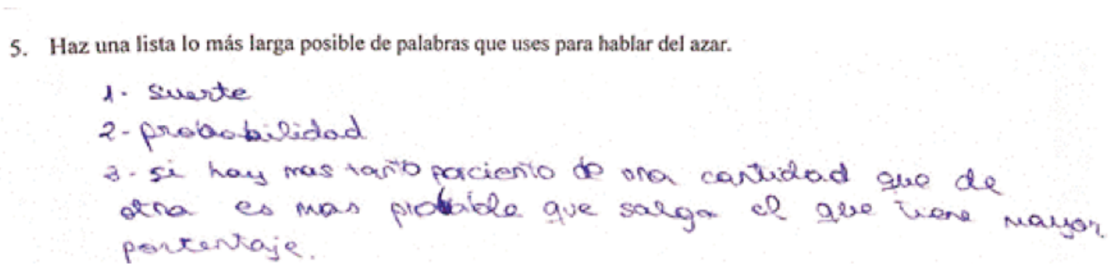


Figura 3. Respuesta al ítem 1 del alumno 36 (1º ESO)

Recordemos que el ítem 2 está diseñado para que los estudiantes faciliten dos sinónimos o frases que signifiquen lo mismo que algunos términos de probabilidad. De la información recogida en la Tabla 2 podemos concluir que las palabras que presentan, en mayor proporción, algún sinónimo (2 y 1) corresponden, en el caso de primero con imposible (51,8%) e inseguro (41,1%) mientras que para el segundo curso han sido imposible (66,7%) y posible (63,7%). Comparando los resultados obtenidos en este ítem con los hallados por Cañizares (1997) observamos ciertas diferencias ya que la autora señaló las dificultades que mostraron los estudiantes en la identificación del término "imposible". En el resto, son mayoría los que han dejado el ejercicio sin realizar, por lo que se deduce la existencia de cierta dificultad a la hora de expresar conceptos conocidos y emplear expresiones diferentes a las que están habituados.

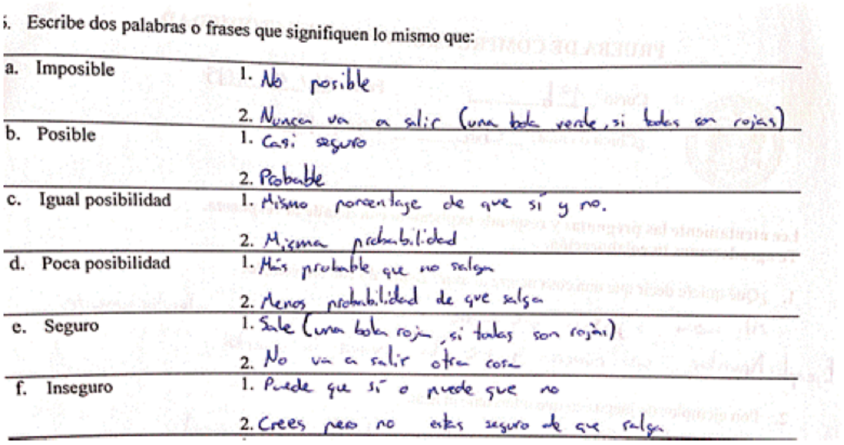
Tabla 2. Porcentaje de alumnos según número de respuestas correctas al ítem 2

	1º ESO			2º ESO		
	2	1	0	2	1	0
1. Imposible	21,4	30,4	48,2	18,2	48,5	33,3
2. Posible	10,7	28,6	60,7	6,1	57,6	36,4
3. Igual posibilidad	3,6	21,4	75,0		39,4	60,6
4. Poca posibilidad	8,9	32,1	58,9		33,3	66,7
5. Seguro	10,7	16,1	73,2	9,1	30,3	60,6
6. Inseguro	16,1	25,0	58,9		42,4	57,6
7. Muy posible	8,9	21,4	69,6		24,2	75,8

Aunque se observa que los estudiantes de segundo curso tienen menor porcentaje de apartados sin ninguna respuesta, es notable que la proporción de dos respuestas correctas siempre sea mayor en primero, por lo que se intuye que este alumnado comprende mejor las expresiones indicadas y les resulta más fácil encontrar otros sinónimos.

A la hora de responder, muchos alumnos han decidido usar palabras sinónimas o incluso cambiar palabras como "inseguro" a "no es seguro", lo que conlleva un significado parecido de forma sencilla. También se ha observado algunas expresiones coloquiales como "sí o sí" para un suceso "seguro" o "puede que sí o puede que no" para "inseguro".

Por el contrario, se destaca la presencia de un vocabulario más complejo con el uso de palabras como "factible", o "inviable" para describir "posible" e "imposible". Además, algunos de los estudiantes han hecho uso de los términos probabilísticos "50% de probabilidades" o "10 de cada 20" para expresar "igual probabilidad" e incluso, un alumno finaliza la tarea añadiendo un experimento para representar el mismo significado de la frase. Un ejemplo de respuesta a esta pregunta se presenta en la Figura 4, donde el alumno en ocasiones presenta un ejemplo de una situación en que se aplica la palabra (en el caso de imposible y seguro). También utiliza la negación (no posible para imposible) y sinónimos (igual posibilidad e igual probabilidad). Todas las respuestas son correctas, excepto el caso en que indica que posible significa casi seguro, una confusión que también encontró Cañizares (1997).


Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que:

a. Imposible	1.	No posible
	2.	Nunca va a salir (una bola verde, si todas son rojas)
b. Posible	1.	Casi seguro
	2.	Probable
c. Igual posibilidad	1.	Mismo porcentaje de que sí y no.
	2.	Misma probabilidad
d. Poca posibilidad	1.	Más probable que no salga
	2.	Menos probabilidad de que salga
e. Seguro	1.	Sale (una bola roja, si todas son rojas)
	2.	No va a salir otra cosa
f. Inseguro	1.	Puede que sí o puede que no
	2.	Crees pero no estás seguro de que salga

Figura 4. Respuesta al ítem 2 del alumno 24 (1º ESO)

El análisis del Ítem 3 nos ha permitido concluir que un alto porcentaje de estudiantes de primero consideran las respuestas "1. Puede ocurrir o no" (85,7%), "2. Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso" (82,1%) y "5. Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no" (78,6%) correctas. En el caso de primero los resultados son similares, pero con la diferencia de que el 100% de los estudiantes consideran adecuada la frase "tiene igual posibilidad de ocurrir que de no".

De los resultados recogidos en la Tabla 3 se tiene que de las tres respuestas correctas (respuestas 2, 5 y 6) algunos estudiantes no reconocen "6. Sucede más o menos 5 de cada 10 veces" como expresión equivalente a "Tiene un cincuenta por ciento de posibilidades" (41,1% en primero y 21,2% en segundo). Señalamos que un alto porcentaje de estudiantes, tanto de primero como de segundo, señalan la respuesta 1 como sinónima asignando un 50% de probabilidad de ocurrencia cuando en realidad no es conocida. Esta respuesta ha generado gran confusión entre los estudiantes ya que muchos de ellos, aun teniendo correctas todas las demás respuestas, han errado en esta. Pudiera haber implícito el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) por la que muchos sujetos consideran que los sucesos aleatorios son siempre equiprobables.

Por otro lado, si se realiza el estudio comparativo entre ambos grupos se tiene que los estudiantes de primero han tenido mayor problema a la hora de llevar a cabo el ejercicio, ya que más de un tercio de los estudiantes consideran, además de la 1, las respuestas 3 y 4 como correctas, mientras que en el caso de segundo no supera el 13%.

Tabla 3. Porcentaje de alumnos que respondieron "Si" al ítem 3

50% de probabilidad	1º curso	2º curso
1. Puede ocurrir o no	85,7	84,9
2. Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso	82,1	87,9
3. Sucederá 50 veces de cada 50	33,9	9,1
4. Puede suceder algunas veces	37,5	12,1
5. Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir	78,6	100
6. Sucede más o menos 5 de cada 10 veces	58,9	78,8

Por último, el ítem 4 estaba orientado a que los estudiantes asignen uno de los términos presentados en el ítem 2 a un suceso de contexto meteorológico de su ciudad. Cada una de las opciones ofrecidas marca un nivel distinto a la probabilidad de ese suceso, por lo que para hacer la asignación deben comprender las diferencias entre cada una de estas palabras y utilizarlas correctamente, además de realizar una estimación aproximada de la probabilidad del suceso.

Los resultados en este ítem se presentan en la Tabla 4. A diferencia de los ítems realizados anteriormente, en este se ha detectado un mayor interés en su elaboración, ya que únicamente 5 alumnos de los 89 no han completado el ejercicio. Estos resultados pueden venir motivados por el contexto en el que se ha enmarcado el ítem. El estudio comparativo de las respuestas de ambos cursos no muestra grandes diferencias a la hora de seleccionar el término que exprese mejor la probabilidad del suceso representado por cada una de las frases incluidas en el ítem. La máxima discrepancia aparece cuando los estudiantes califican a los sucesos "Más de 40 grados" con 50% de probabilidad e "Inundaciones" como "Poco probable".

Tabla 4. Porcentaje de alumnos que califica cada suceso con diferente probabilidad

	Imposible		Poco probable		50%		Muy probable		Seguro	
	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º
Llover un rato	13,7	18,2	21,6	30,3	52,9	48,5	9,8	3		
Más de 40 grados	54,9	48,5	29,4	24,2	5,9	27,3			5,9	
10-20 grados	5,9	9,1	11,8	9,1	54,9	57,6	19,6	15,2	7,8	9,1
Nevar	88,2	100	9,8				2			
Inundaciones	45,1	51,5	35,3	18,2	13,7	30,3	2		3,9	

Las respuestas al ítem vienen motivadas por el lugar y la época del año en el que se llevó a cabo el cuestionario, ya que este se está aplicando en una zona de clima generalmente bueno durante todo el año y en primavera, Si se analizan cada una de las frases que se propusieron se observa lo siguiente

- El suceso "Llover un rato" mayoritariamente se ha calificado con la probabilidad "50%", seguido de poco probable;
- El suceso "Más de 40 grados" generalmente es considerado como "Imposible" o poco probable, aunque llama la atención, tal y como se ha comentado antes, que el 27,3% de los estudiantes de segundo de ESO asignan la probabilidad "50%" lo que muestras la falta de diferenciación entre poco probable y 50% de probabilidad;
- En el caso del suceso "10-20 grados" más de la mitad de los estudiantes de ambos grupos consideran una probabilidad de "50%" seguido de "Muy probable";
- Los estudiantes califican el suceso "Nevar" como "Imposible" y tanto el "50%" como "Seguro" no es seleccionado por ningún alumno, concretamente, todos los estudiantes del segundo úni-

camente consideran la opción de “Imposible”; de hecho el suceso no es totalmente imposible, pero sería muy raro que nevara en primavera. Vemos acá la confusión entre imposible y muy poco probable descrita por Cañizares (1997) y Green (1983).

- En el caso del suceso “Inundaciones” observamos que existe más variabilidad en las respuestas, pero en general se tiende a seleccionar la probabilidad “Imposible” en ambos cursos, de nuevo indicando la confusión señalada.

CONCLUSIONES

El cuestionario ha resultado rico por la información proporcionada y sencilla de comprender y completar por parte de los estudiantes de ambos cursos. Nuestros resultados corroboran los observados en las investigaciones de Cañizares (1997) y Green (1983) en un periodo en que no se enseñaba probabilidad en la educación primaria. Los currículos actuales recomiendan esta enseñanza y los libros de texto presentan actividades dirigidas a familiarizar a los niños con el lenguaje del azar (Gómez, Contreras y Batanero, 2015). Sería importante asegurar que se realiza una enseñanza efectiva de este tema para mejorar el vocabulario probabilístico de los alumnos.

Las principales carencias que se ha podido constatar mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes han sido:

- Limitaciones de vocabulario relativo al azar y dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles.
- Dificultades para proceder a valorar la probabilidad de diversas situaciones cotidianas con una especial confusión en los términos “Imposible” e “Improbable” que tratan como sinónimos.

Destacamos los resultados del ítem 4, respecto al cual no hemos encontrado investigaciones previas. Como errores más destacados en el Ítem 4 aparecen ciertas confusiones entre los términos imposible y poco probable, resultados similares a los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1993) en los ítems 1 a 3, pero que se han confirmado en este nuevo ejercicio.

Ejemplo de ello lo tenemos en la asignación de una expresión probabilística para el suceso “Más de 40 grados”, donde se cree que los estudiantes han tenido en cuenta las temperaturas templadas de la ciudad en la época en que se pasó el cuestionario y en el suceso “Nevar”, debido al hecho de que hace más de 60 años que no nieva en La Línea de la Concepción. Con respecto al suceso “Inundaciones” destacamos las respuestas “Muy probable” y “Seguro” de los estudiantes de 1º de ESO, pensamos que estas respuestas están influenciadas por la no asistencia a clase de muchos de los alumnos los días de lluvias fuertes.

Agradecimientos

Proyecto de investigación EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo de investigación FQM126 de la Junta de Andalucía.

Referencias

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher, 56*(8), 786–795.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Bernete, F. (2013). *Análisis de contenido. Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de datos*. Madrid: Universidad Complutense.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: P.P.U.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gómez, E., Contreras. J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp.766-783). Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215–234). Ottawa: Legas.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

O'Halloran, K. L. (2003). Educational implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow,S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185–214). Brooklyn, NY y Ottawa, Ontario: Legas.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*,139-159.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

USO DE UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE SOBRE FRACCIONES PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

Using a learning trajectory for fractions to develop the skill of noticing

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

Mirar profesionalmente es una de las competencias que un maestro debe desarrollar. Las investigaciones en formación de maestros han mostrado que esta competencia puede empezar a desarrollarse en los programas de formación inicial. En este estudio, analizamos las respuestas de 31 estudiantes para maestro a dos tareas en las que debían interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria usando una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones. Nuestros resultados indican que la trayectoria de aprendizaje de las fracciones dotó a los estudiantes para maestro de un discurso matemático profesional para interpretar el pensamiento de los estudiantes de primaria ayudándoles a focalizar su atención en los detalles de las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, pensamiento fraccionario, formación de maestros, trayectoria de aprendizaje.*

Abstract

Noticing has been identified as one of the key skills that a teacher must develop. Research on teacher education has shown that noticing could be developed in teacher education programs. In this study, we analyse answers of 31 pre-service primary school teachers to two tasks in which they had to interpret primary school students' fractional thinking using a learning trajectory of fractions. Our results show that the learning trajectory provided pre-service teachers with a professional mathematical discourse to interpret students' mathematical thinking and helped them focus their attention on the details of students' answers.

Keywords: *professional noticing, fractional thinking, teacher education, learning trajectory*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas obligan a los maestros a distinguir y elegir entre aquellas que pueden tener un mayor potencial para desarrollar el aprendizaje de sus estudiantes. En este contexto, la competencia mirar profesionalmente es relevante para el maestro (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Para Mason (2011) "mirar profesionalmente implica un cambio o un movimiento en la atención" (p. 45) identificando distintas maneras de prestar atención: i) holding holes implica atender a algo pero sin discernir detalles, ii) discernir detalles (discerning details) implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) reconocer relaciones (recognizing relationships) implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) percibir propiedades (perceiving properties) consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y, v) razonar en función de las propiedades (reasoning on the basis of agreed properties) implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás (Mason 2011, p.47). Jacobs, Lamb y Philipp

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

(2010) se han centrado en un aspecto particular de esta competencia: mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos autores han conceptualizado esta competencia a través de tres destrezas interrelacionadas: identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes (discernir detalles), interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los detalles matemáticos identificados previamente (establecer relaciones), y decidir cómo continuar teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes (percibir propiedades).

En las últimas décadas se ha desarrollado una extensa agenda de investigación internacional con el objetivo de identificar diferentes contextos favorables para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016). Estos estudios han mostrado que esta competencia puede ser desarrollada por los estudiantes para maestro en los programas iniciales de formación, aunque esta no es una tarea sencilla sin unas referencias que guíen qué y cómo mirar (Levin, Hammer y Coffey, 2009; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Schack et al., 2013; Tyminsky, Land, Drake, Zambak y Simpson, 2014; Wilson, Sztajn, Edgington, y Confrey, 2014). En este sentido, investigaciones recientes han mostrado que las trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos son un instrumento capaz de ayudar a los maestros a focalizar la atención sobre aspectos relevantes en las respuestas de los estudiantes e interpretar su pensamiento matemático (Edgington, Wilson, Sztajn, y Webb, 2016; Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012; Wilson, Mojica y Confrey, 2013).

Nuestro estudio se centra en esta línea de investigación y trata de analizar cambios en la manera en la que los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en un módulo de formación diseñado para desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento fraccionario de los estudiantes, usando una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones. Nuestra hipótesis de trabajo es que la trayectoria de aprendizaje sobre fracciones puede actuar como marco teórico de referencia para ayudar a los estudiantes para maestro a reconocer lo que es relevante de las respuestas de los estudiantes.

Una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones

Simon (1995) conceptualizó una trayectoria de aprendizaje como un camino hipotético por el que los estudiantes podrían avanzar en su aprendizaje que está formada por tres elementos: *un objetivo de aprendizaje, la descripción de un proceso de aprendizaje y actividades de enseñanza*. En este estudio hemos elaborado una trayectoria de aprendizaje considerando, y adaptando al contexto español, las investigaciones sobre cómo se desarrolla el pensamiento de los estudiantes de Educación Primaria en el dominio de las fracciones (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe y Olive, 2010).

En la trayectoria diseñada, el objetivo de aprendizaje proviene del currículum de educación primaria: dar sentido a la idea de fracción y su interpretación como parte-todo y comprender el significado de las operaciones de fracciones. Por lo que respecta al proceso de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones, hemos considerado seis niveles de comprensión. Presentamos las principales características de los cuatro primeros niveles, que son las implicadas en las dos tareas de esta comunicación, atendiendo a la comprensión de los elementos matemáticos que los caracterizan: i) nivel 1, no reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, ii) nivel 2, reconocen que las partes pueden ser diferentes en forma pero congruentes en relación al todo en contexto continuo (identifican y representan fracciones en contexto continuo), iii) nivel 3, identifican y representan fracciones en contexto discreto, reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes y consideran una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como unidad iterativa iv) nivel 4, resuelven las operaciones con fracciones y problemas aritméticos sencillos con ayuda de una guía (Ivars, Fernández y Llinares, 2016).

Además, se incluyen actividades de identificación, comparación y representación de fracciones y operaciones con fracciones como actividades de aprendizaje para apoyar la transición de los estudiantes de educación primaria a través de los niveles del proceso de aprendizaje establecidos en la trayectoria de aprendizaje.

MÉTODO

Participantes e instrumento

En este estudio participaron 31 estudiantes para maestro (EPM) de tercer curso del grado de Maestro en Educación Primaria que se encontraban cursando una asignatura relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Uno de los objetivos de esta asignatura es desarrollar la competencia mirar profesionalmente. Las tareas de este estudio estaban incluidas en el módulo de enseñanza-aprendizaje de las fracciones. Estos EPM habían cursado previamente dos asignaturas de contenido matemático, una sobre sentido numérico y otra sobre sentido geométrico.

El módulo de fracciones constaba de 7 sesiones. En la primera sesión se presentaron los elementos matemáticos implicados en las actividades de fracciones a través de la resolución de actividades de educación primaria (identificación de fracciones, representación de fracciones, comparación, operaciones con fracciones…). En la sesión 2, se analizaron resoluciones de estudiantes de primaria (video) a este tipo de actividades con el fin de identificar qué elementos matemáticos estaban implicados en sus respuestas. En la sesión 3 se les presentó la trayectoria de aprendizaje (objetivo, niveles de comprensión y actividades para el desarrollo de la comprensión). En las sesiones 4, 5 y 6 los EPM resolvieron 3 tareas donde tenían que analizar respuestas de estudiantes con distinto nivel de comprensión usando la trayectoria de aprendizaje (una de identificación de fracciones, otra de comparación de fracciones y la última de operaciones con fracciones). En la sesión de evaluación (sesión 7), los EPM resolvieron una tarea similar a la de las sesiones 4, 5 y 6.

Los datos de este estudio son las respuestas de los EPM a la tarea de la sesión 4 (tarea de identificación de fracciones – *Tarea 1*) y a la tarea de la sesión de evaluación (*Tarea 2*). Ambas tareas seguían una estructura similar, se presentaban diferentes respuestas de estudiantes de primaria a una actividad que evidenciaban características de los distintos niveles de comprensión sobre fracciones de la trayectoria de aprendizaje y, a continuación, los estudiantes para maestro debían responder a las siguientes preguntas:

- Describe la tarea en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los elementos matemáticos que el resolutor debe usar para resolverla?
- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista.

En la tarea 1 (la Figura 1 recoge parte de esta tarea), los elementos matemáticos involucrados son: las partes de un todo han de ser congruentes (elemento 1) y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte (elemento 2). Las respuestas de los estudiantes de educación primaria reflejaban diferentes características de los niveles de la trayectoria de aprendizaje (Ivars et al., 2016): Xavi y Víctor (pareja 1) no tienen en cuenta que las partes del todo deben ser congruentes al decir que l*as figuras A, B, C y D representan ¾* (nivel 1). Joan y Tere (pareja 2) identifican que las partes deben ser congruentes en contextos continuos, pero no reconocen que una parte puede ser dividida en otras partes. Esta última característica se evidencia cuando dicen que la Figura E no representa 3/4 porque está dividida en 24 partes iguales y hay 18 sombreadas (nivel 2). Finalmente, Álvaro y Félix (pareja 3) consideran que las partes deben ser congruentes y que una parte puede estar dividida en otras partes (escogen las Figuras B, D, E y F como representaciones de ¾) (nivel 3). Para resolver esta primera tarea (sesión 4) los estudiantes para maestro disponían de un documento teórico en el que se reflejaban las características de la trayectoria de aprendizaje.

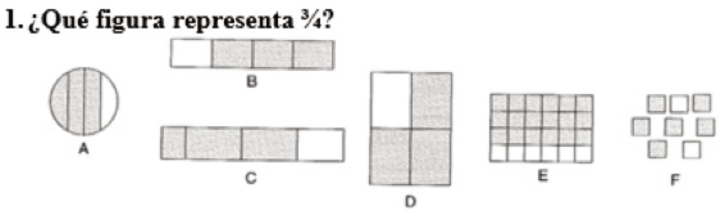


Figura 1. Actividad de identificación de fracciones (Battista, 2012)

La tarea 2 consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a dos actividades con fracciones, la primera de ellas era una actividad de identificación de fracciones y la segunda una actividad de reconstrucción de la unidad en la que, además de los elementos matemáticos 1 y 2 implícitos en la tarea 1, está implicado el elemento matemático 3, considerar una parte como unidad iterativa que les permite construir otras fracciones (Figura 2).

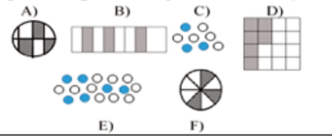
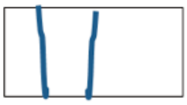
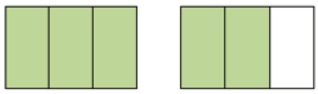
	Estudiante 1	**Estudiante 2**	**Estudiante 3**
¿Qué figuras representan 3/8? 	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*
Esta figura representa 5/3 de la unidad. Representa la unidad 	*Esto son 3 partes* 	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 	*Si nos muestran 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

Figura 2. Tarea 2: identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

En relación a las respuestas de los estudiantes, el estudiante 1 muestra características del Nivel 1 de la trayectoria de aprendizaje ya que, en la primera actividad identifica A y B como 3/8 mostrando que no tiene en cuenta que las partes en que se divide el todo han de ser congruentes en contexto continuo, ni tampoco en discreto (no considera la figura C como 3/8). Al no considerar D y E como 3/8 indica que no que no usa la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. Además, en la segunda actividad no tiene en cuenta la congruencia de las partes (no divide la figura en partes congruentes) y tampoco identifica ni utiliza la fracción unitaria como unidad iterativa.

El estudiante 2 muestra características del nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje porque, en la primera actividad, usa adecuadamente la idea de que las partes deben ser congruentes en contextos continuos (reconoce que en A y B las partes no son congruentes, pero sí lo son en F), pero no en discretos (no considera C como 3/8). Como no señala las figuras D y E como 3/8 entendemos que no considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. En la segunda actividad no reconoce el rectángulo como la representación de 5/3 por lo que evidencia la no comprensión de 5/3 como 5 veces 1/3, no siendo capaz por tanto de reconstruir la unidad. Finalmente, la respuesta del estudiante 3 muestra características del Nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje porque, en la primera actividad, utiliza la idea de que las partes deben ser congruentes, en contextos continuos (no considera como representación de 3/8 las figuras A y B y sí la figura F) y en discretos (considera C como 3/8). También considera que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte, ya que elige las representaciones D, y E, como 3/8. Además, en la segunda actividad considera la representación de 5/3 como 5 veces 1/3, por lo que divide la figura en 5 partes congruentes utilizando la idea de que las partes deben ser congruentes para encontrar la fracción unitaria (1/3) para después utilizarla como unidad iterativa para representar 5/3 (iterando 5 veces 1/3) lo que le permite reconstruir la unidad (3 veces 1/3).

Datos y análisis

Las respuestas de los EPM a las dos tareas fueron analizadas por tres investigadores individualmente considerando cómo i) usaron los elementos matemáticos del concepto de fracción para describir las respuestas de los estudiantes de primaria (discernir detalles), ii) interpretaron la comprensión de los estudiantes de primaria usando los elementos matemáticos identificados (establecer relaciones entre los elementos identificados en las respuestas de los estudiantes y el nivel de comprensión propuesto en la trayectoria de aprendizaje) y iii) proponían actividades para que el estudiante progresara en su comprensión. Posteriormente se compararon los análisis individuales discutiéndose las diferencias y similitudes hasta que se consensuó un acuerdo. En esta comunicación solo nos centramos en los cambios en relación a la destreza interpretar entre la tarea 1 y la 2, por lo que se muestran únicamente las categorías obtenidas en este análisis (Tabla 1).

Tabla 1. Categorías obtenidas tras el análisis sobre cómo los EPM interpretaban la comprensión

Categorías (interpretar comprensión)	Subcategorías	Descripción
No relacionan		No relacionan los elementos matemáticos de las respuestas de los estudiantes con los niveles de comprensión
Establecen relaciones	Elemento matemático 1 (E1) *Con evidencias*	Relacionan el elemento matemático 1 con el nivel de comprensión del estudiante aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Con evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión del estudiante, aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Añadiendo información*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión de los estudiantes, aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes, pero añaden información.
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Sin evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión de los estudiantes sin aportar evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1, 2 y 3 (E1, 2 y 3) *Con evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1, 2 y 3 con el nivel de comprensión de los estudiantes aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación.

RESULTADOS

El análisis realizado a la tarea 1 y la tarea 2 nos permitió establecer comparaciones entre las respuestas de los EPM a cada una de ellas e identificar cambios en la manera en que los estudiantes para maestro reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes de primaria usando como referencia teórica la trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones (Tabla 2).

En la tarea 1, 30 de los 31 EPM fueron capaces de relacionar los elementos *las partes de un todo deben ser congruentes* (elemento 1) y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte (elemento 2) identificados en las respuestas de los estudiantes con los niveles de comprensión propuestos en la trayectoria de aprendizaje. Sin embargo, el análisis realizado reveló que no todos los EPM que establecieron relaciones en la tarea 1 lo hicieron del mismo modo. Los resultados señalan diferencias en el discurso escrito por los EPM que nos permiten identificar tres subcategorías: ocho EPM generaron un discurso matemático menos detallado en el que no se incluían evidencias de las respuestas de los estudiantes como justificación de su interpretación (*Sin evidencias*), dos EPM generaron un discurso matemático más elaborado en el que se incluían evidencias de las respuestas de

Tabla 2. Número de EPM en cada categoría identificada en relación a cómo interpretaban el pensamiento fraccionario de los estudiantes en las tareas 1 y 2

TAREA 1 \ TAREA 2		No relacionan	Establecen relaciones (E1)	Establecen relaciones (E1y2)	Establecen relaciones (E1,2y3)	Total Tarea 1
			Con evidencias	Con evidencias	Con evidencias	
No relacionan				1		1
Establecen	Añaden				2	2
relaciones	Sin evidencias			3	5	8
(E1y2)	Con evidencias	2	1	7	10	20
Total Tarea 2		2	1	11	17	

los estudiantes para justificar su interpretación, pero también añadieron información que no se podía inferir desde las respuestas de los estudiantes y, finalmente, 20 EPM generaron un discurso matemático más elaborado aportando evidencias desde las respuestas de los estudiantes (*Con evidencias*).

Sin embargo, los resultados de la tarea 2 muestran que 29 de los 31 EPM fueron capaces de establecer relaciones y además lo hicieron utilizando un discurso matemático elaborado en el que aportaban evidencias de las respuestas de los estudiantes de educación primaria para justificar sus interpretaciones (*Con evidencias*). Mostramos como ejemplo extractos de las respuestas del E03 en los que se observa cómo cambió el discurso entre la tarea 1 y la tarea 2.

En la tarea 1 la estudiante para maestro E03 describió el pensamiento fraccionario de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 (las partes de una fracción deben ser congruentes y una parte puede estar dividida en otras partes) y los diferentes niveles de la trayectoria de aprendizaje, pero no aportó evidencias de las respuestas de los estudiantes, sino que simplemente elaboró un listado de características:

> Víctor y Xavi: No tienen en cuenta la congruencia de las partes. Desconocen el contexto discreto. Conocen el contexto continuo. Se encuentran en el nivel 1.
>
> Joan y Tere: Tienen en cuenta la congruencia de las partes. Desconocen el contexto discontinuo. Se encuentran en el nivel 2.
>
> Félix y Álvaro: Tienen en cuenta la congruencia de las partes. Conocen el contexto discreto. Consideran un grupo de partes como una parte. Se encuentran en el nivel 3.

Aunque esta EPM estableció relaciones entre los diferentes elementos matemáticos y los distintos niveles de la trayectoria de aprendizaje, no proporcionó detalles específicos de las respuestas de los estudiantes para apoyar su interpretación. Sin embargo, en la tarea 2, generó un discurso en el que establecía relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de comprensión en la trayectoria de aprendizaje incluyendo evidencias desde las respuestas de los estudiantes (énfasis añadido):

> Estudiante 1: En el problema 1 no tiene en cuenta que todas las partes han de ser congruentes porque escoge las figuras A y B. Solo reconoce el contexto continuo porque no escoge ni la opción C ni E. No reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes ya que, no escoge ni al D ni la E. Por lo tanto, no comprende la idea de equivalencia 6/18 = 3/8. En el problema 2 no tiene en cuenta que las partes han de ser congruentes. No reconoce la unidad porque divide el rectángulo en 3 partes en vez de dividirlo en 5 partes y coger 3. El estudiante 1 estaría en el nivel 1 pues no sabe que todas las partes han de ser congruentes.
>
> Estudiante 2: En el problema 1 tiene en cuenta que las partes han de ser congruentes porque descarta las figuras A y B. Desconoce el contexto discreto ya que no sabe interpretar la figura C ni E. No ve que una parte puede estar dividida en otras partes y que 6/16 es equivalente a 3/8 (idea de equivalencia). En el problema 2 tiene en cuenta la congruencia de las partes. No reconoce la unidad puesto que ha

> sombreado 5/3 en vez de 3/3. No tienen en cuenta que el todo no varía y por eso ha dibujado dos rectángulos de 3/3 cada uno. El estudiante 2 estaría en el nivel 2. Solo conoce el contexto continuo y sabe que las partes han de ser congruentes.
>
> Estudiante 3:En el problema tiene en cuenta que las partes deben ser congruentes y descarta las figuras A y B. Conoce ambos contextos continuo y discreto. Comprende que una parte puede estar dividida en otras partes y a que ve 6/16 como 3/8 en las figuras D y E (idea de equivalencia comprendida). En el problema 2, tiene en cuenta la congruencia de las partes. Reconoce la unidad porque sombrea 3/3. Conoce que el todo no varía y por eso divide el todo dado en 5 partes y luego coge la unidad (3/3). El estudiante 3 estaría en el nivel 3. Sabe que las partes han de ser congruentes, sabe trabajar en ambos contextos, conoce la idea de equivalencia, sabe trabajar con diferentes fracciones como unidad iterativa y reconoce que el todo no varía.

El cambio en el discurso entre la tarea 1 y 2 parece sugerir que las tareas propuestas en el módulo en las que los EPM tenían que usar una trayectoria de aprendizaje para interpretar el pensamiento matemático de estudiantes de primaria les ayudó a estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional con el que interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes.

Por otra parte, no todos los EPM, que en la tarea 1, fueron capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes estableciendo relaciones entre los dos elementos matemáticos involucrados y los niveles de comprensión, fueron capaces de hacerlo en la tarea 2 (Tabla 2). De los 29 EPM que establecieron relaciones en la tarea 2, solo 17 lo hicieron con los tres elementos matemáticos implicados en la tarea. Los otros EPM relacionaron únicamente el elemento 1 y el elemento 2 con los niveles de la trayectoria de aprendizaje. Mostramos, a modo de ejemplo un extracto de las respuestas de un EPM que en la tarea 1 estableció relaciones entre los dos elementos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes y los niveles de comprensión caracterizados en la trayectoria de aprendizaje. Sin embargo, este mismo EPM en la tarea 2 únicamente estableció relaciones con estos mismos elementos (elementos 1 y 2) pero no fue capaz de considerar el elemento 3 implicado en la tarea de reconstruir el todo cuando se da la representación de una fracción impropia. En el siguiente extracto se observa como el EPM interpretó la comprensión del estudiante 1 en la tarea 2 estableciendo relaciones con los elementos matemáticos 1 y 2.

> El estudiante 1: En el problema 1 no reconoce que las partes deben ser congruentes ya que dice que las figura A y B son 3/8 (cuando A y B no tienen partes congruentes). Además, no reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes (figuras D y E por ej.). Por lo que tienen dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes. En el problema 2 no reconoce que las partes deben ser congruentes ya que no divide la figura en 3 partes iguales. Muestra dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes.
>
> Estudiante 1: Se encuentra en nivel 1 dado que no reconoce que las partes deben ser congruentes (por las figuras A y B cuyas partes no son congruentes y porque en el rectángulo no ha dibujado partes congruentes). Además, tampoco reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes (figuras C, D y E). Ni reconoce una parte como una unidad iterativa (iterar el 1/3 5 veces en la fracción impropia).

Sin embargo, cuando interpretó la comprensión de los estudiantes 2 y 3, escribió lo siguiente:

> El estudiante 2: Problema 1: reconoce que las partes deben ser congruentes porque dice que las figuras A y B, no tienen partes congruentes y la figura F sí que las tiene. No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes (no ven la figura C como 3/8, no ven la figura D (6/18) como 3/8 o tampoco ven la figura E (6/16) como 3/8. En el problema 2: reconoce que las partes deben ser congruentes. Además, reconoce una parte como una unidad iterativa, por ello, sabe representar la fracción impropia.
>
> Estudiante 2, está en el nivel 2 ya que reconoce que las partes deben ser congruente (dice que las figuras A y B no lo son) y también divide el rectángulo [todo] en partes iguales [en el problema 2]. Sigue sin reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes (no reconoce las figuras C, D y E). En cambio, representa bien 5/3 de la figura.

> Estudiante 3: Problema 1: Reconoce que las partes deber ser congruentes. Figuras A y B las partes no son congruentes y en la figura F las partes sí lo son. Reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte porque reconoce las figuras C, D y E como 3/8. Problema 2: reconoce que las partes deben ser congruentes ya que divide en partes iguales el rectángulo. Muestra dificultades con la fracción unitaria, por ello no sabe representar la fracción impropia 5/3 y representa 3/5.
>
> Estudiante 3: está en el nivel 3 ya que considera que una parte puede estar dividida en otras partes, figuras C, D y E y que las partes deben ser congruentes (figura F). Sin embargo hace mal la fracción propia.

El EPM interpreta que el estudiante 2, "reconoce una parte como una unidad iterativa, por ello, sabe representar la fracción impropia" y que el estudiante 3 "muestra dificultades con la fracción unitaria, por ello no sabe representar la fracción impropia 5/3 y representa 3/5", lo que indica que el EPM toma la parte (5/3) por el todo (3/3) evidenciando dificultades con la reconstrucción de la unidad desde una parte a un todo donde la parte es $f > 1$.

Este tipo de respuestas subrayan las dificultades que deben afrontar los EPM a la hora de considerar el elemento matemático 3 (considerar una parte como una unidad iterativa, de manera que permita construir otras fracciones), como un paso necesario para reconstruir el todo cuando se les proporciona una fracción impropia. Estos EPM establecieron relaciones en las dos tareas entre los elementos matemáticos 1 y 2 y los niveles de comprensión descritos en la trayectoria de aprendizaje, sin embargo, tuvieron dificultades para interpretar las respuestas de los estudiantes de primaria en las tareas que implicaban el elemento considerar una parte como una unidad iterativa (tareas de reconstruir la unidad).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es analizar cambios en la manera en la que los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes utilizando una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones en un módulo diseñado para desarrollar la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento fraccionario en estudiantes de primaria.

Los resultados de esta investigación muestran cambios en el discurso elaborado por los EPM entre la tarea 1 y la tarea 2 tras la participación en el módulo diseñado. En primer lugar, la trayectoria de aprendizaje les ayudó a estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional. En segundo lugar, algunos de estos cambios estuvieron vinculados a los elementos matemáticos que intervenían en la tarea, mostrando la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro y el desarrollo de la destreza de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Estas dos ideas las elaboramos a continuación.

Respecto a la primera idea, en la tarea 1, 20 EPM desarrollaron un discurso estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 (*las partes de un todo deben ser congruentes, elemento 1, y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte, elemento 2*) que intervenían en la tarea de identificar fracciones y los niveles de comprensión de los estudiantes caracterizados en la trayectoria de aprendizaje, aportando evidencias desde las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, en la tarea 2, fueron 29 EPM los que establecieron estas relaciones incluyendo también evidencias de las respuestas de los estudiantes. Este cambio en el discurso sugiere que la trayectoria de aprendizaje utilizada como marco de referencia para interpretar el pensamiento de los estudiantes les permitió focalizar su atención (Mason, 2002) centrándose en los detalles de las respuestas de los estudiantes. Además, pone de manifiesto que la trayectoria de aprendizaje dotó a los EPM de elementos para generar un discurso matemático específico para interpretar el pensamiento de los estudiantes (Wickstrom, Baek, Barrett, Cullen y Tobias, 2012). Los resultados indican que la trayectoria de aprendizaje sobre fracciones, utilizada como marco de referencia para interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes, es una buena herramienta para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, ya que permitió a los EPM estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional con el que interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria.

En relación a la segunda idea, el hecho de que en la tarea 2 sólo 17 EPM de los 31 fueran capaces de establecer relaciones entre el elemento matemático 3 y los niveles de la trayectoria de aprendizaje en la actividad de reconstruir el todo, pone de manifiesto el vínculo entre el conocimiento de matemáticas de los EPM y su capacidad de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de educación primaria. Las evidencias aportadas sugieren que estos EPM tuvieron dificultades para resolver la actividad de reconstrucción de la unidad mostrando, por tanto, la falta de conocimiento matemático específico necesario. Este hecho implica, que disponer del conocimiento matemático específico necesario para resolver la actividad sobre fracciones, resulta un factor determinante para que los EPM reconozcan evidencias de la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones adecuadas entre dichas respuestas y su nivel de comprensión (es decir, desarrollen la destreza de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes).

Aunque hemos mostrado cómo el uso de una trayectoria de aprendizaje ayudó a los EPM a generar un discurso sobre el pensamiento fraccionario de los estudiantes, apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, investigaciones previas han identificado la destreza proponer decisiones de acción, como la más difícil de desarrollar por los EPM (Choy, 2016; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Ivars y Fernández, 2016). Por tanto, y en relación a futuras investigaciones, sería interesante comprobar la influencia del aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje en la toma de decisiones de acción.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España) EDU2014-54526-R y por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para la Formación de Profesorado Universitario (España) FPU14/07107 (primer autor).

Referencias

Battista, M.T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.

Choy, B.H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 421-440.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747-759.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Narratives and the development of the skill of noticing. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 19–26. Szeged, Hungary: PME.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Pre-service teachers' learning to notice students' fractional thinking: The design of a learning environment through a Learning Trajectory. ERME. *European Society for Research in Mathematics Education*. Berlin. https://www.hu-berlin.de/de/einrichtungen-organisation/wissenschaftliche-einrichtungen/zentralinstitute/pse/erme/scientific-programme-1/papers

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs y R.A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. (pp.35-50). New York: Routledge.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education 13*(6), 1305–1329.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(5), 379-397.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer Science & Business Media.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J.J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Springer International Publishing.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-595.

Wickstrom, M., Baek, J., Barrett, J. E., Cullen, C. J. y Tobias, J. M. (2012). Teacher's noticing of children's understanding of linear measurement. En L.R. Van Zoest, J.J. Lo y J.L. Kratky (Eds.), *Thirty-fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(2), 149-175.

INFLUENCIA DE UN ENTORNO VIRTUAL DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN LA AFECTIVIDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA: ESTUDIO DE CASOS

Influence of a Virtual Learning Environment on Affectivity towards Mathematics of Secondary School Students: Case Study

Jorge-Pozo, D.[a], Jiménez-Gestal, C.[b] y Murillo, J.[b]

[a]C.P.C. Escuelas Pías, [b]Universidad de La Rioja

Resumen

Presentamos un estudio de casos sobre cómo afecta el uso de un Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA) en la afectividad hacia las matemáticas de un grupo de alumnos de secundaria. Para esta investigación se ha diseñado un EVEA basado en la programación, cuya estructura básica la constituyen Scratch, Edmodo, PowToon y actividades específicas correspondientes al currículo de Matemáticas de E.S.O. La metodología es experimental, con un grupo de contraste, un pre-test, un post-test y análisis de las respuestas obtenidas con un cuestionario diseñado ad-oc. Podemos concluir que se produjo un aumento de la afectividad y como consecuencia un cambio semi-positivo en los resultados académicos.

Palabras clave: *matemáticas, afectividad, entorno virtual de enseñanza y aprendizaje, programación, aritmética.*

Abstract

We present a case study on how the use of a Virtual Learning Environment (EVEA acronym in Spanish) affects in the affectivity towards mathematics of a group of secondary education students. For this research a programming based EVEA has been designed, whose basic structure consists of Scratch, Edmodo, PowToon and specific activities corresponding to the mathematics syllabus of Secondary Education. The methodology is experimental, with a contrast group, a pre-test, a post-test and analysis of the answers obtained with a questionnaire designed ad-oc. We can conclude that there is an increase of affectivity and, consequently, a semi-positive change on the academic results.

Keywords: *mathematics, affectivity, virtual learning environment, programming, arithmetic.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

El entorno actual de los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria está repleto de oportunidades de interacción con TIC. Podemos ver esto como una amenaza o como una oportunidad para favorecer la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas. Nuestros alumnos se muestran más predispuestos a trabajar cuando saben que van a utilizar herramientas informáticas en el desarrollo de la clase. Esto nos lleva a investigar sobre las consecuencias que el uso sistemático y estructurado de la tecnología, en concreto de un Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA), puede tener sobre la afectividad (actitudes y reacciones emocionales) del alumnado hacia las matemáticas y su aprendizaje.

Jorge-Pozo, D., Jiménez-Gestal, C. y Murillo, J. (2017). influencia de un entorno virtual de Enseñanza aprendizaje en la afectividad hacia las matemáticas de estudiantes de secundaria: estudio de casos. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 325-334). Zaragoza: SEIEM.

En Caballero, Guerrero y Blanco (2011) se establece que hay una relación directa entre los factores afectivos de los estudiantes para maestro y su capacidad, tanto para gestionar e impartir una clase de matemáticas, como para aprender la materia y para la resolución de problemas. En la misma línea se manifiesta Gómez-Chacón (2000) cuando afirma que:

> En el caso de estudiantes de fracaso escolar, en el que la historia de la dimensión afectiva en los sujetos es desfavorable, la ansiedad, el miedo y la inseguridad generan procesos de negación y de evitación que habitualmente se dan en el mismo momento de presentación de la actividad que el alumno ha de realizar. (p.154)

y para que se pueda producir un avance en el estudiante, deben interrumpirse los sentimientos negativos.

Dos aspectos influyentes en la afectividad son las creencias y la motivación. Según Martínez Padrón (2003) las creencias como tales crean una serie de consecuencias en el aprendizaje, muchas de esas veces, consecuencias negativas. Algunas de estas creencias y miedos vienen infundidos por los docentes (Godino, 1993), lo que unido a la impopularidad de las matemáticas en el mundo de la educación secundaria nos da como resultado los bajos rendimientos de algunos de los alumnos.

Una de las razones de mayor éxito en el ámbito de las matemáticas son las utilidades prácticas del día a día, como dicen Hidalgo, Maroto, y Palacios (2006) «parece claro que el alumnado comprende la necesidad y utilidad de las matemáticas para su vida futura, y este factor debe ser aprovechado como elemento motivador que promueva su aprendizaje».

Respecto a los distintos componentes de las actitudes hacia las matemáticas Palacios, Arias y Arias (2014) describen la construcción y validación de un instrumento de medida en el que consideran cinco factores: agrado-gusto por las matemáticas, ansiedad hacia las matemáticas, percepción de dificultad, utilidad percibida y autoconcepto matemático.

En Gómez-Chacón (2010) se estudian las actitudes hacia las matemáticas y el ordenador en estudiantes de 4º. de secundaria y 1º. de bachillerato y se describen diferentes perfiles de estudiantes que "indican una relación entre estilos de trabajo con el ordenador y actitudes matemáticas de los estudiantes en aprendizaje matemático con tecnología". Asimismo evidencian la relación entre la competencia tecnológica con la herramienta usada y la afectividad hacia las matemáticas y plantea la necesidad de tener en cuenta el tipo de actividades planteadas a la hora de hacer análisis cualitativos en este ámbito.

En Fortuny, Iranzo y Morera (2010) se hace una revisión de las aportaciones de investigación en el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y se plantea la teoría de la instrumentación como marco teórico para el desarrollo de situaciones de enseñanza-aprendizaje con tecnología.

En Valverde, Fernández y Garrido (2015)se muestra por un lado la influencia del uso de lenguajes de programación para el desarrollo de diferentes habilidades matemáticas y por otro la efectividad de diferentes plataformas de comunicación o programación colaborativa para la mejora de la autoestima y la autoconfianza de los aprendices. En este trabajo se describe la introducción del pensamiento computacional y los lenguajes de programación dentro de un currículum de secundaria y recalca la importancia de la colaboración con sus iguales en la construcción de lo que llama "ecología de aprendizaje", que motiva a la participación y colaboración.

Consideramos como entorno de aprendizaje «un espacio educativo capaz de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas para trabajar matemáticamente y capaces de promover y soportar el cambio cognitivo de los alumnos» como se define en Murillo, Jiménez, Arnal y Marcos (2011). La idea de utilizar un entorno virtual de aprendizaje de modo colaborativo en el que puedan escribir sus dudas, contactar con sus compañeros, consultar la teoría, incluso descargarse las actividades, parte de las evidencias mostradas por Marcos (2008) acerca de la mejora del desarrollo de las competencias matemática y comunicativa. Además, basándonos en lo que dicen Michalchik, Llorente, Lundh y Remold (2008) las habilidades y capacidades que se pueden llegar a desarrollar con un EVEA están muy relacionadas con la confianza y la afectividad que los alumnos van a tener con la asignatura de matemáticas.

La programación es una de las herramientas que debemos explotar en el aula ya que, gracias a ella, se organiza el pensamiento de los alumnos y se da la posibilidad de encontrar diferentes soluciones a la hora de enfrentarnos a un problema. Vivimos en una sociedad cambiante y que demanda unas habilidades diferentes a las que se han necesitado hasta ahora. Si queremos hacer del pensamiento computacional algo que nos sirva en el día a día y que podamos aplicarlo en las aulas debemos pararnos a pensar en cómo introducirlo en el currículo. Como dicen Valverde, Fernández y Garrido (2015) debemos ver el pensamiento computacional como una competencia más del currículo. Tenemos que tener en cuenta que es una competencia compleja y que por el contrario de lo que se piensa, muchas veces no será necesario a la hora de empezar, tener un ordenador para trabajarla. «Además tenemos que ver que se puede utilizar para resolver problemas de manera inteligente e imaginativa y que posee la característica de combinar abstracción y pragmatismo puesto que se fundamenta en las matemáticas». El pensamiento computacional ya forma parte del currículo en algunos sitios como Reino Unido, donde tienen el currículo Q2L, que ya está estructurado para el desarrollo de esta asignatura, o en la Comunidad de Madrid, donde aparece como uno de los ejes sobre los que se articula la materia «Tecnología, programación y robótica». Salen, Torres, Wolozin, Rufo-Tepper, y Shapiro (2011) muestran cómo se puede combinar el contenido de las asignaturas con la programación de videojuegos.

OBJETIVO

El principal objetivo de la investigación es comprobar cómo puede mejorar la afectividad de los alumnos de secundaria hacia la asignatura de matemáticas, utilizando un EVEA basado en la programación.

Sub-objetivos de la investigación

Relacionar la afectividad hacia la asignatura con los resultados académicos obtenidos por los estudiantes; comprobar si nuestro EVEA desarrolla las competencias en matemáticas y aumenta la motivación en los alumnos; y por último, introducir el pensamiento computacional en el currículo de secundaria a través del uso de la programación informática en las aulas de la asignatura de matemáticas.

METODOLOGÍA

Se ha realizado un estudio exploratorio, a través del estudio de casos, del grado de afectividad de los alumnos hacia las matemáticas y su evolución en una clase de primero de E.S.O. en el grupo de refuerzo curricular, en el C.P.C. Escuelas Pías de Logroño, en La Rioja. Se ha elaborado un test para evaluar la afectividad, tanto antes como después de la intervención educativa, y se ha creado un EVEA con una colección de actividades adaptadas al nivel de la clase.

Las modificaciones más llamativas del currículo ordinario se presentan en la Resolución de 27 de marzo de 2015, de la Dirección General de Educación, que organiza el primer curso del Programa de Refuerzo Curricular, hacen referencia fundamentalmente a la organización de las asignaturas en ámbitos, el número reducido de alumnos y los objetivos y contenidos a alcanzar. Las asignaturas de Matemáticas y C. Naturales constituyen el ámbito científico-matemático, Lenguaje y C-Sociales se unen para dar forma al ámbito socio-lingüístico y el Inglés pasa a llamarse ámbito de lenguas extranjeras. En la Resolución se regulan asimismo las horas de dedicación a cada uno de los ámbitos, estableciéndose para el científico-matemático 8 horas semanales.

En relación a los contenidos concretos del programa de refuerzo, se señalaba que cada centro es el responsable de establecerlos, con la exigencia de incluir al menos los “mínimos” exigidos en los cursos de referencia de la ESO.

Los contenidos desarrollados a lo largo de la investigación han sido: Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Potencias de números enteros y exponente natural.

Para el desarrollo de las actividades por parte de los alumnos se han utilizado no sólo las herramientas convencionales, sino fundamentalmente el EVEA, diseñado por el equipo investigador. El profesor ha invertido tiempo en asegurarse del aprendizaje y correcto manejo de cada programa o aplicación utilizada, pues no se puede dar por sentado el dominio de las TIC, para que el uso correcto de las mismas facilite el aprendizaje y no constituya un obstáculo.

Utilizar software libre y gratuito en el diseño de la plataforma hace que sea asequible a todos los alumnos. Entre las opciones de plataformas disponibles que permitían trabajar y comunicarnos con los alumnos decidimos utilizar Edmodo.

El proceso de trabajo en el EVEA incluye la resolución de las tareas propuestas y la posibilidad de visualizar una serie de videos-presentación de la teoría correspondiente, elaborados por el profesor. Estos videos contemplan aspectos de la materia que, aunque pueden haber sido explicados previamente en clase, son útiles para resolver las tareas y se considera adecuado que los alumnos puedan volver a ellos cuando los necesiten .

Una vez que se ha explicado la teoría, los alumnos deberán realizar las actividades. Éstas están centradas en que el alumno desarrolle algún tipo de programa informático que le pueda dar la solución al problema propuesto. Uno de los aspectos a tener en cuenta siempre, es que por muy bien desarrollado que esté el programa, es necesario tener un planteamiento correcto del mismo. Terminados los programas, los alumnos los cuelgan en la plataforma y el profesor los comprueba. Para la evaluación se tiene en cuenta el desarrollo de los mismos, además de la realización de las actividades y por último las pruebas evaluativas similares a las utilizadas durante el curso.

Para la selección de los alumnos que mostramos se han tenido en cuenta factores relativos a su entorno mas cercano, su situación familiar y su situación emocional por la vinculación entre los factores sociales y educativos y el proceso educativo. También se han tenido en cuenta los resultados obtenidos en un pre-test y la visión del profesor en cuanto a los resultados académicos anteriores de cada uno de ellos y cómo el profesor ve la respuesta de los alumnos ante la materia.

Descripción de los alumnos

La investigación se ha desarrollado en una clase formada por diecisiete alumnos, ocho chicas y nueve chicos, con necesidades especiales. Están cursando unas matemáticas de refuerzo dónde los contenidos son los mínimos establecidos por el departamento de matemáticas del propio colegio. Es una clase muy heterogénea en cuanto a la procedencia de sus componentes, seis nacionalidades distintas; en cuanto a la edad, entre 12 y 15 años; y respecto al nivel académico, alumnos con nivel alto cuyo rendimiento no se acerca al mínimo exigido debido a circunstancias personales, y otros que tienen serias dificultades para escribir y comprender correctamente el castellano. Las anteriores circunstancias hacen que sea difícil llevar a cabo una tarea que pueda atraer a todos y cada uno de los alumnos. En gran parte de estos alumnos a la situación académica en la que se encuentran, hay que sumar las situaciones sociales, económicas y culturales que viven, que no son las más optimas para el desarrollo de un adolescente en el mundo socio-cultural en el que nos encontramos hoy en día y que van a influir en el desarrollo del pensamiento del alumno.

Respecto a los alumnos seleccionados, hemos elegido tres alumnos de diferentes perfiles, teniendo en cuenta los resultados del pre-test acerca de la afectividad hacia las matemáticas, el desarrollo de la asignatura del alumno durante el curso, la situación socio-cultural del mismo y los resultados académicos obtenidos. Describimos brevemente las características de los tres alumnos (los nombres son ficticios).

Álvaro es un alumno con serias dificultades académicas y con un entorno familiar muy desestructurado. Ha repetido curso tanto en primaria como en secundaria y no tiene ninguna motivación por los estudios. Sus resultados en el pre-test muestran una afectividad hacia las matemáticas que podemos considerar baja.

Borja, el segundo de los alumnos elegidos, también ha repetido curso en primaria y en secundaria, su familia está estructurada pero no encuentra motivación alguna, aunque su capacidad y sus resultados académicos anteriores son muy positivos. Los resultados del pre-test sugieren una afectividad hacia las matemáticas que podríamos considerar indiferente.

Carlos, tercer y último alumno, ha repetido un curso en primaria y en secundaria, este alumno tiene una familia en proceso de desestructuración y su motivación es nula por los estudios. Tiene capacidad para la asignatura, pero no lo ha demostrado al cien por cien por el momento. Sus resultados académicos anteriores son bajos y sus resultados en el pre-test presentan oscilaciones que no permiten afirmar nada concreto acerca de su afectividad hacia las matemáticas.

Herramientas utilizadas

Test

Para la evaluación del grado de afectividad hacia las matemáticas de nuestros alumnos hemos elaborado, basándonos en Hidalgo Alonso, Maroto Sáez y Palacios Picos (2011), Palacios (2014) y Palacios, Hidalgo, Maroto y Ortega (2013), un test con diecinueve ítems; en él hemos utilizado los siguientes indicadores: ansiedad hacia la asignatura, actitudes hacia las matemáticas, utilidad de las matemáticas, autoconcepto y dificultad de la asignatura percibida por el alumno. Las preguntas referidas a cada indicador se han intercalado de modo aleatorio para no centrar la atención del alumno en ninguno de ellos. El test se ha pasado antes de realizar las experimentación con el EVEA para medir el grado de afectividad inicial, y los resultados obtenidos del pre-test han sido utilizados para seleccionar a los alumnos para el estudio de casos. También se ha pasado a posteriori para ver la afectividad hacia la asignatura tras el desarrollo de las tareas y poder sacar conclusiones acerca de su evolución.

Las respuestas a cada uno de los ítems se recogen mediante una escala Likert de seis puntos en la que el número uno significará totalmente en desacuerdo y el número seis totalmente de acuerdo. Estas escalas, en contraposición a las de las preguntas dicotómicas con respuesta sí o no, nos permiten medir actitudes y conocer el grado de conformidad del alumno respecto a las afirmaciones o cuestiones propuestas. Nos resultará muy útil utilizarla en este tipo de cuestiones donde queremos conocer la opinión concreta del alumno. De esta manera las categorías de respuesta nos servirán para valorar la intensidad de lo afectivo hacia las afirmaciones relacionadas con las matemáticas. En cuanto al número de posibles respuestas nos hemos decantado por seis, número par, para que de esta manera el alumno no pueda responder de manera indiferente con un grado intermedio. Es decir, si una de las afirmaciones o cuestiones no le supone una decisión hacia ninguno de los lados y le es un poco indiferente, hacemos que decida si será hacia el lado más positivo o hacia el lado más negativo.

Entorno de aprendizaje

El entorno virtual de enseñanza aprendizaje elegido ha sido una combinación de recursos de software gratuitos como son Edmodo, Scratch y Powtoon.

Edmodo es una plataforma digital educativa preparada para conectar mediante un entorno muy sencillo a los alumnos de una misma aula tanto entre ellos como con el profesor. Es una herramienta muy versátil que permite crear pruebas evaluativas, crear foros de debate, incluso que los alumnos puedan compartir archivos, insertar diferentes tipos de archivos, como los pdf dónde redactaremos las actividades y a las cuales tienen acceso los alumnos, y además tiene la posibilidad de subir vídeos.

Powtoon es una herramienta para crear animaciones y presentaciones, con la que hemos creado lo que se puede considerar la parte teórica que tiene el contenido a desarrollar y que será la que los alumnos deberán visualizar al inicio de la actividad para poder empezar a trabajar.

Scratch es una herramienta de programación por bloques con la que los alumnos han elaborado los diferentes programas que después han utilizado para resolver las actividades propuestas. Tras realizar la programación, los alumnos debían subir el archivo a la plataforma. Esta herramienta está diseñada para que la programación sea sencilla y no es preciso teclear código como en los lenguajes de programación tradicionales. Tiene una interfaz sencilla en la que la pantalla se muestra dividida en varias zonas con diferentes funciones. Las operaciones básicas y las instrucciones más utilizadas aparecen en bloques que hay que arrastrar con el ratón a una zona específica de la pantalla para crear el código y en otra zona se puede ver lo que se está programando con los objetos implicados en tiempo real.

Actividades

Las actividades están estructuradas de forma común para todos los contenidos. El desarrollo de las mismas está propuesto de forma tal que el alumno comienza por hacer una actividad sencilla en el papel, la cual introduce el contenido que vamos a trabajar con esta actividad y a continuación se desarrollarán unas actividades las cuales deberá resolver mediante la programación de un algoritmo que resuelva el ejercicio.

Como actividad motivadora final, cada alumno tenía la posibilidad de programar algo libre y que les motivara siempre y cuando utilizasen lo aprendido, todos los alumnos eligieron programar videojuegos clásicos (Arkanoid o similares), muy sencillos a la hora de jugar pero que tienen su complejidad a la hora de programarse desde cero. Esto fue una motivación extra para todos ellos, ya que querían aprender y hacer todo lo relacionado con el programa para poder desarrollar sus propios videojuegos.

Para llegar a este punto hemos trabajado la construcción de actividades de forma que haya un aprendizaje progresivo y en función al nivel de cada alumno, ya que un alumno que acabe con el ejercicio tiene otro propuesto que profundiza lo anterior.

Las actividades están desarrolladas en función del currículo correspondiente a este programa de refuerzo curricular de secundaria e intentando cumplir con el contenido, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje según la programación didáctica del curso.

En cuanto a las competencias clave que indica el currículo, las actividades están enfocadas de modo que al menos favorezcan el desarrollo de la competencia matemática, la competencia digital y la competencia aprender a aprender.

Respecto a la competencia matemática, con los contenidos seleccionados tratamos de contribuir al desarrollo del pensamiento y razonamiento, más concretamente en el pensamiento lógico y computacional o algorítmico. Además de tratar de comprender y analizar los resultados obtenidos, siendo críticos con ellos. El desarrollo de esta competencia es básico en nuestra actividad puesto que los contenidos a tratar del currículo son de la asignatura ámbito científico-matemático, más concretamente la parte de aritmética de matemáticas.

En cuanto a la competencia digital, se trabaja desde dos aspectos importantes. Por un lado con el manejo del propio EVEA, que requiere del desarrollo de destrezas digitales para el manejo del software integrado y por otro con la parte de programación que se pide a los alumnos y que contribuye a alcanzar el desarrollo del pensamiento computacional.

Una de competencias en la que más hincapié intenta hacer la LOMCE es la competencia de aprender a aprender. La estructura de las actividades planteadas hace que contemplemos esta competencia constantemente. Uno de los objetivos buscados por esta competencia es aprender a partir de experiencias propias y qué mejor manera que con la programación. La experiencia en programar en cualquier lenguaje, muestra que cuántos más programas se realizan y más errores se cometen, se va adquiriendo una mayor destreza tanto en el planteamiento de la solución como en el código utilizado, de manera que cada vez es mejor el código utilizado, menor el tiempo consumido y menos los recursos consumidos. Con las actividades propuestas, los alumnos tienen la oportunidad de crear sus programas en una escala ascendente en cuanto a la dificultad, por lo que se equivocarán más de una vez y esto les servirá para que en el siguiente programa que resuelva la siguiente actividad tengan el error asumido y lo puedan solventar con mejor código y planteamiento. Otro de los objetivos que busca esta competencia es el trabajo cooperativo fomentando el proceso reflexivo que permita la detección de errores a la hora de la autoevaluación, aumentando así la autoestima del alumno y por lo tanto aumentando además de la motivación, desde nuestro punto de vista el interés hacia la asignatura de las matemáticas a la vez que adquieren esta competencia.

La estructura principal de las actividades son ejercicios con diferentes niveles de dificultad:

Empezamos por ejercicios clásicos con cálculos sencillos. De esta manera lo que se quiere conseguir es animar tanto a aquellos alumnos que tienen más dificultad, viendo la posibilidad de evolucionar como a los alumnos a los que les motiva menos la asignatura, que les servirán como desafío, retando al alumno a conseguir algo tan sencillo como resolver estas actividades para de esta manera hacerle entrar en la dinámica de hacer ejercicios. Sin embargo, para aquellos alumnos motivados y que no tienen dificultad con la asignatura, este tipo de actividades no nos servirán como gancho puesto que para ellos es algo muy sencillo. Por esta razón las hojas realizadas mezclan la programación con el cálculo, para poder cubrir la diversidad del alumnado del aula. Además, las actividades crecerán en dificultad a medida que avancemos con las entregas.

Las siguientes actividades implican cálculos más complicados. Para ello se propone la creación de un programa informático que se encargue de los cálculos y que solo tengamos que introducir algún dato de entrada para poder resolver el enunciado planteado. Es imprescindible para que el alumno pueda construir el programa, que tenga claro el planteamiento de lo que quiere lograr y la parte teórica que debe aplicar. En esta fase del desarrollo de la actividad se aprecia la utilidad de que la teoría esté disponible en la plataforma para que la puedan consultar en cualquier momento y se pretende que sean conscientes de que esta es la base del conocimiento que deben adquirir para desarrollar el programa adecuado.

Una vez realizados los ejercicios se plantean hojas con problemas, acordes con el nivel académico de la clase en que se realiza la investigación, lo que fuerza a que sean cortos y claros, además de inspirados en situaciones reales, ya que la demanda de la utilidad de la asignatura es una constante en grupos como este.

Evaluación

La evaluación de las actividades propuestas ha sido realizada mediante la entrega de los programas realizados a través de la plataforma Edmodo y de algunas de las hojas realizadas en el aula. La valoración de los programas se ha relacionado con la facilidad a la hora de "escribir" el código y con la solución dada al enunciado del problema y todos los ejercicios de la hoja correspondiente al contenido que se estaba trabajando en ese momento.

En cuanto a la evaluación de los contenidos, se ha realizado mediante una prueba general de conocimientos en la que tenían que aplicar lo aprendido en un contexto completamente diferente al entorno en el que habían aprendido, volviendo a la evaluación tradicional. Tal y como indica la legislación vigente, debemos hacerlo mediante los estándares de aprendizaje, que no evalúan contenido a contenido sino que los agrupa y considera más de uno en un mismo estándar.

RESULTADOS

Como resultados del test podemos decir que Álvaro, nuestro primer sujeto, aumenta ligeramente su afectividad hacia las matemáticas, observándose cambios importantes en dos de las dimensiones consideradas, ansiedad y autoconcepto. Lo curioso de este caso es que al tiempo que disminuye su ansiedad hacia las matemáticas su autoconcepto empeora. Respecto a nuestro segundo alumno, Borja, existe un aumento de la afectividad hacia las matemáticas muy importante, mejorando todos los aspectos observados. La variación registrada en el test de nuestro tercer sujeto, Carlos, es sorprendente, aunque se aprecia una ligera mejora en el autoconcepto y la ansiedad, empeoran los resultados en el resto de indicadores.

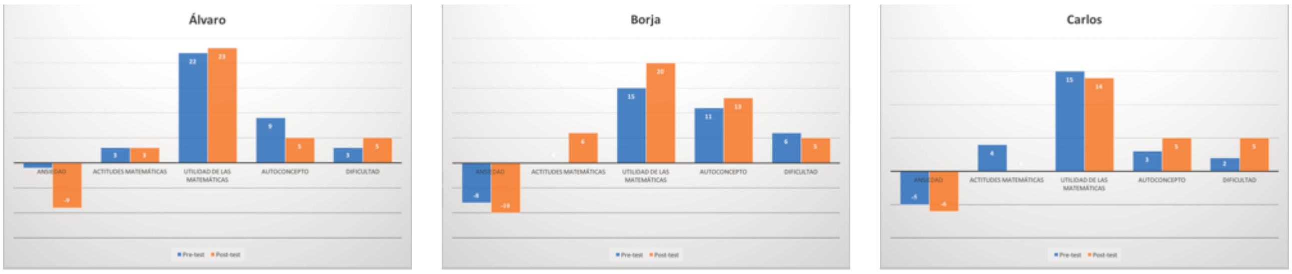


Figura 1. Comparativa de resultados de pre-test y post-test

En cuanto a los resultados académicos, podemos destacar que fueron muy diferentes los obtenidos en la primera evaluación y en la evaluación final. Los primeros resultados de Álvaro y Carlos fueron muy bajos, mientras que los resultados de Borja fueron buenos, la prueba realizada fue una prueba final que abordaba todos los contenido vistos en esa evaluación.

En la evaluación final, la tercera, tras realizar la actividad propuesta con el entorno virtual de enseñanza y aprendizaje elegido y desarrollar los programas para la resolución de los problemas propuestos, los resultados de Borja y Carlos mejoraron notablemente, mientras que los resultados del alumno Álvaro, mejoraron en cuanto al trabajo diario, ya que era de los alumnos más motivados a la hora de hacer programación con Scratch, pero cuando llegó la hora del hacer la prueba evaluativa el alumno se negó a hacer el examen. En cambio sus ejercicios entregados estaban realizados a tiempo y bien hechos, con programas sencillos que resolvían los problemas. Los tres alumnos elegidos tuvieron una motivación muy alta y unos resultados de trabajo diario muy por encima de lo esperado.

Tanto Álvaro como Carlos con todas sus dificultades familiares, llegaban al aula con muchas ganas de trabajar con Scratch. Los tres alumnos completaron el trabajo propuesto a tiempo y en sus momentos libres tras haber acabado con las actividades diseñaron unos video-juegos que al principio de la actividad veían como imposibles. Los tres alumnos quedaron enganchados a la programación y demandaban más trabajo relacionado con ello. Debido a la falta de tiempo y a que el resto de la clase no tenía el mismo ritmo que ellos, ya que eran los más rápidos y eficaces, no pudimos diseñar más actividades.

CONCLUSIONES

Con esta investigación nos planteábamos verificar cómo el uso de un Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje basado en la programación puede mejorar la afectividad de los alumnos de secundaria hacia las matemáticas. De los resultados observados podemos inferir que se ha apreciado una evolución positiva de la afectividad hacia la asignatura utilizando el EVEA en los casos estudiados, si bien no podemos concluir que el aumento de esa afectividad repercuta directamente en el resultado académico.

El modelo de EVEA sorprendió a la clase por el modo en que impartía la docencia y por cómo se enfocaba la matemática desde el punto de vista de la programación, para lo que fueron relevantes las orientaciones de Salen et. al. (2011) acerca de cómo combinar el contenido de las asignaturas con la programación de videojuegos.

La motivación llegó paulatinamente a todos, a medida que la clase se desarrollaba durante los sucesivos días, aquellos alumnos que no se encontraban cómodos con la programación no le encontraban sentido al principio, pero trabajaron y se esforzaron por llegar al final de la actividad y poder realizar su propio videojuego. Esto sugiere que los videojuegos pueden ser utilizados como motivación o incluso como algo útil a la hora de enseñar.

El incremento de la motivación general se apreciaba en la disposición de los alumnos al comenzar a impartir la materia, ya que mientras antes había que estar constantemente insistiendo en que prepararan el material, en estas sesiones todos estaban preparados y dispuestos a recibir su ordenador para programar. Esto corroboraría la tesis de Marcos (2008) acerca de la influencia positiva que tienen los EVEA sobre la motivación.

El resto de objetivos perseguidos se han conseguido de manera indirecta, como el uso de herramientas tecnológicas que aumentaran la motivación y la autoconfianza con los entornos digitales. El pensamiento computacional se ha desarrollado a la hora de enseñar como debían estructurar sus programas para que pudieran resolver el problema sin tener que variar la programación didáctica. Incluir la programación en el currículo de secundaría como plantean Valverde, Fernández y Garrido (2015) puede ser positivo para motivar a los alumnos.

El diseño de las actividades con grado de dificultad ascendente y en funcionamiento de Scratch, -donde los bloques de programación tienen una función concreta, la programación es lineal y el programa va leyendo línea por línea para poder realizar la tarea propuesta- hacen que los alumnos hayan ido desarrollando su propio conocimiento a la hora de crear sus programas y sean conscientes de que tienen que aplicar en la tarea siguiente lo que han aprendido en la anterior.

Las características especiales del grupo-clase en el que se ha llevado a cabo esta investigación hacen que las conclusiones obtenidas sean relevantes pero no generalizables. El incremento en la motivación logrado en estudiantes que viven en un entorno socioeconómico difícil, con situaciones familiares conflictivas y que tienen un historial escolar nada favorable, induce a pensar que un EVEA con características similares al aquí implementado podría tener efectos beneficiosos en otro tipo de estudiantes, lo que daría pie a una investigación más amplia.

Referencias

Caballero, A., Guerrero, E. y Blanco, L. J. (2011).Problem Solving and Emotional Education in Initial Primary Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(4), 281-292.

Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010) Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida: SEIEM.

Godino, J.D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática, *Quadrante, 2*(2), 69–79.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I.M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 227-244.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2006). *Gusto por las Matemáticas. Aptitudes y conocimientos en Educación Infantil*. First Internacional Conference on Logical Mathematical Thinking, Madrid.

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A. y Palacios Picos, A. (2011) Actitudes y competencias en el aprendizaje de las matemáticas. En J.M. Román Sánchez, M.A. Carbonero Martín y J.D Valdivieso Pastor (Compiladores) *Educación Aprendizaje y Desarrollo en una Sociedad Multicultural*. Madrid: Ediciones de la Asociación Nacional de Psicología y Educación. ISBN 978-84-614- 8296

Marcos, G. (2008). *Modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo*. (Tesis doctoral). Universidad de La Rioja, Logroño.

Martínez Padrón, O. (2003). *El dominio afectivo en la educación matemática: Aspectos teórico-referenciales a la luz de los encuentros edumáticos*. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro, Turmero, (2003).

Michalchik, V., Llorente, C., Lundh, P. y Remold, J. (2008). *A Place to Be Your Best: Youth Outcomes in the Computer Clubhouse*. Boston, MA: Center for Technology in Learning - SRI International.

Murillo, J., Jimenez, C., Arnal, P.M. y Marcos, G. (2011). Instrumentos y criterios para evaluar los aprendizajes en geometría (ag) y el desarrollo de la competencia comunicativa (cc) en un entorno interactivo de aprendizaje. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 29- 57). Lleida.

Palacios, A., Arias, V. y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica, 19*(1), 67-91.

Palacios, A., Hidalgo, S., Maroto, A. y Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales, *Enseñanza de las Ciencias, 31*(2), 93-111.

Salen, K.S., Torres, R., Wolozin, L., Rufo-Tepper, R. y Shapiro, A. (2011). *Quest to learn: developing the school for digital kids*, Cambridge, Mass: MIT Press.

Valverde, J., Fernández, Mª R. y Garrido, Mª del C. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED,* 46 (3). doi: 10.6018/red/46/3.

ANÁLISIS DE PROCESOS DIDÁCTICOS PARA LOGRAR CONVENCIMIENTO EN UN CONOCIMIENTO MATEMÁTICO BIEN FUNDAMENTADO

Analysis of didactic processes to achieve convincement of well-grounded mathematical knowledge

Martínez Navarro, B. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Resumen

Con base en los principios de la Teoría Fundamentada en este escrito se analiza la interacción -a distancia- entre un tutor y un estudiante. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones entre el convencimiento que experimenta un estudiante en torno a una respuesta, la adecuación de dicha respuesta a la acepción matemática aceptada y su fundamento. Se desprende de este análisis una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, se identifican procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado.

Palabras clave: *convencimiento, comprensión, procesos didácticos, argumentación matemática.*

Abstract

Based on the principles of Grounded Theory, this paper analyzes the interaction –distance- between a tutor and a student. At an initial level, a microanalysis is performed of the relations that exist among the convincement experienced by a student with respect to an answer, the adjustment of that answer to the accepted mathematics meaning and its foundation. A characterization of arguments stems from the analysis. Then at a second level, processes are identified in which a student experiences convincement of a well-grounded knowledge.

Keywords: *convincement, understanding, didactic processes, mathematical argumentation.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En investigaciones diversas se ha destacado el peso que tiene el convencimiento en los hechos de las matemáticas que los agentes de clase vivencian durante los procesos didácticos. Por ejemplo, Krummehuer (1995) resaltó el convencimiento asociado a los soportes de los argumentos, para cuyo análisis utilizó el Modelo de Toulmin; despunta en su aplicación la omisión de los calificadores modales Q, ausencia que señalaron Inglis, Mejía Ramos y Simpson (2007). Estos autores sostienen que una mejor categorización de la argumentación matemática la proporciona el uso del esquema completo de Toulmin (que incluye a los calificadores Q). En su propuesta los investigadores mostraron que estudiantes de posgrado talentosos frecuentemente usan garantías no deductivas que reducen su incertidumbre sobre la conclusión de un argumento, pero no la anula (p. 9). Esos estudiantes, continúan los autores, eliminan su incertidumbre en una conclusión solo si se desprende de una prueba formal. El estudio permitió a Inglis et al, incluir al razonamiento informal (e. g. intuitivo o inductivo) como parte de la gama completa de la argumentación matemática; les permitió también desprender como consideración didáctica que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades de los estudiantes para igualar “adecuadamente” tipos de garantías con calificadores modales Q (p.3). Afín a esta sugerencia educativa, un artículo reciente sobre los estados de confianza que se dan en estudiantes de niveles básicos, realizado

Martínez Navarro, B. y Rigo Lemini, M. (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 335-345). Zaragoza: SEIEM.

por Foster (2016), sugiere que un alumno "bien calibrado" en un tema es aquel que confía en sus respuestas correctas y duda de las que no lo son. Foster advierte, sin embargo, que en escenarios reales un estudiante puede mostrar altos niveles de confianza y competencia en un procedimiento sin entender las matemáticas que hay detrás de dicho procedimiento. Al respecto, el autor apunta que se deben encontrar maneras para que los profesores puedan apoyar a que sus alumnos experimenten altos niveles de confianza y competencia en los conceptos que hay detrás de sus procedimientos (p. 286). En correspondencia con los temas relativos al convencimiento antes descritos, y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) (Corbin y Strauss, 2015), el objetivo general de este escrito es explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado. Para tal fin se examina, de acuerdo a dos niveles de análisis, una interacción a distancia entre un tutor y un estudiante en un contexto de álgebra de niveles básicos. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones que en un argumento se pueden dar entre el convencimiento de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y su fundamento. De este análisis se desprende una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, en el que se incorpora el proceso al análisis, se da cuenta de estrategias que permitieron a un profesor que un estudiante llegara a experimentar confianza en un conocimiento bien fundamentado. Así, en el escrito se busca responder ¿Cómo se pueden explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado? ¿Cómo se pueden caracterizar los argumentos que emergen de esos procesos?

MARCO TEORICO

Para analizar las participaciones de los estudiantes se recurrió al Modelo de Toulmin. En este modelo, un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D), garantías (W), un soporte (B), y calificadores (Q). Enseguida se expone la interpretación de esos elementos en este escrito.

Los calificadores Q

Toulmin, Rieke y Janik (1984) consideran que Q consiste en "el grado de confianza que puede ser adjudicado a las conclusiones dados los argumentos disponibles para apoyarlas" (p. 85, 1984). En esta interpretación de Q se supone implícitamente un sujeto experto que califica. A diferencia, en el presente escrito se acepta explícitamente que es el sujeto que argumenta el que califica la fuerza de los componentes del argumento, y se considera que ese sujeto (que participa en un foro virtual) vivencia un estado de convencimiento, o bien de presunción o duda en un enunciado matemático –los que Rigo (2013) denomina "estados epistémicos de convencimiento"–, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1 (Martínez y Rigo, 2014).

Tabla 1: Instrumento teórico-metodológico para distinguir estados epistémicos

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: – *Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. – *Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. – *Claras y precisas.*
Consistencia	La persona muestra consistencia en distintas intervenciones.

Garantías (W): adecuación entre las acciones y el significado matemático aceptado

El contenido matemático de los fragmentos elegidos para este estudio es el de la resolución de ecuaciones lineales. En este escrito se considera al Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005) como el procedimiento paradigmático escolar para encarar ese tipo de tareas. De acuerdo a ese modelo, los aspectos de la variable como incógnita específica que un estudiante debe poner en juego cuando se resuelven ecuaciones lineales son: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de valores específicos (aspecto I1); determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos (aspecto I4) y sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero (aspecto I3). En este escrito, las garantías (W) que subyacen las acciones de los estudiantes revelan si esas acciones son acordes a los aspectos antes mencionados.

El soporte del argumento B

Al resolver una ecuación lineal los estudiantes pueden fundar sus argumentos en diferentes soportes; los soportes pueden estar conformados por constituyentes diversos, uno de los cuales coincide con lo que Rigo (2013) llama "esquemas epistémicos" de sustentación. Según la autora, mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como las instanciaciones de reglas generales, otros se articulan en torno a consideraciones extra-matemáticas, como los esquemas operatorios que se activan cuando se introduce una regla sin justificación, basada posiblemente en la autoridad que se le otorga a las matemáticas. Por tanto, se pueden presentar soportes matemáticos y soportes extra-matemáticos para los argumentos.

Otro de los constituyentes hace referencia al carácter aritmético o algebraico del argumento. En este escrito se sugiere (cf. Martínez y Pedemonte, 2014) que la resolución de una ecuación se basa en el álgebra cuando el sistema de referencia en los datos contiene literales, y el "núcleo del argumento" (i.e., sus D y su C) presenta una estructura de tipo deductivo, la que es posible explicitar a través de las garantías, ya que éstas descubren la estructura que articula el argumento. Se dirá que una resolución se soporta en la aritmética cuando el sistema de referencia en los datos se da por ensayo y error numérico, y el núcleo del argumento presenta una estructura inductiva. Otro indicador para determinar si el soporte contiene constituyentes aritméticos o algebraicos está relacionado con los elementos conceptuales que el alumno pone en juego cuando realiza el aspecto I3. I3 presupone el desarrollo, aunque sea sólo de manera intuitiva y tácita, del siguiente argumento: a) Considerar en la ecuación $ax + b = 0$ un valor específico para x, i.e., que $x = r$, $r \in \mathbb{R}$; b) Instanciar en la ecuación, i.e., $a(r) + b = 0$; c) Realizar operaciones aritméticas; d) Derivar (eventualmente) una tautología aritmética: $m = m$; e) Desprender de d) que a) es una suposición correcta (de otro modo no se derivaría de ella una tautología), y que $a(r) + b = 0$ es una proposición verdadera, esto es, que r hace verdadera a la proposición $ax + b = 0$ (la cual es abierta, ya que carece de un valor de verdad), y que por tanto, r es una solución para dicha ecuación. Cuando el alumno procesa I3 con la conciencia de lo que significa que un valor específico $r \in \mathbb{R}$ "satisface una ecuación y resuelve el problema" (Ursini et al, 2005, p. 27), esto es, cuando tiene algunas intuiciones relacionadas con los pasos a) al e) del argumento antes expuesto, en este documento se considera que I3 coadyuva a su comprensión de la variable y que el soporte de su argumento contiene un constituyente algebraico. Cuando I3 queda sólo como un argumento incomprensible y rutinario para el estudiante que va sólo del paso a) al d) y él lo aplica solamente con el propósito de verificar ("en la aritmética", terreno seguro para el alumno) si los valores obtenidos son correctos, aquí se considera que ese aspecto I3 coadyuva poco a la comprensión de la variable y que el soporte de su argumento incluye constituyentes aritméticos.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El estudio, inspirado en los procedimientos de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), se llevó a cabo en un diplomado -a distancia- cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Los datos que se usaron para el estudio quedaron registrados en la plataforma Moodle para su posterior análisis y forman parte de la interacción que un tutor mantuvo con sus estudiantes (en particular, con Belarmina). El tutor, quien propuso y guió las actividades, es uno de los autores de este trabajo. En trabajos anteriores, los autores han desarrollado los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos utilizando como herramienta analítica "comparaciones constantes" entre conjuntos de datos. Como parte de los productos, se diseñó un instrumento para sugerir cuándo una persona está convencida. De acuerdo a Corbin y Strauss, el desarrollo de una teoría formal se basa en añadir propiedades y dimensiones a conceptos conocidos y agregar nuevos conceptos que no se pudieron derivar de estudios previos. En el trabajo actual, se utiliza la categoría de argumento para estructurar los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos. Para tal fin, se consideraron los contextos de interacción, interacción que se separó en fragmentos (distinguidos con un numeral) y se organizó en argumentos, los cuales se analizaron conforme al Modelo de Toulmin. En un primer nivel de estudio, se realiza un micro análisis de las relaciones que en un argumento se puedan dar entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático (Q), la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (revelada en W), y el fundamento del mismo (que se desvela en B). Las relaciones entre Q, W y B se concentran en una tabla, con el fin de obtener una perspectiva general y de tipificar los argumentos (v. Tablas 2,3,4). En un segundo nivel, el proceso se incorporó al análisis de datos. Los procesos son cambios adaptativos en el flujo de la acción interacción que se adoptan como respuesta a variaciones en las condiciones. Dichos cambios se consideran necesarios para alcanzar un objetivo. El análisis de los datos tomando en cuenta el proceso requiere que el analista siga el curso de la acción/interacción, tenga en cuenta cualquier cambio y lo relacione con las condiciones. En este estudio, el objetivo del profesor consistió en que la estudiante experimentara convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado, y las medidas que él adoptó como respuesta a las condiciones cambiantes tuvieron como objeto esa finalidad. De modo que, a diferencia de otras investigaciones, en ésta se consideran las relaciones entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y el fundamento del mismo, relaciones que se suponen como parte de un proceso dinámico en el que pueden modificarse como respuesta a condiciones cambiantes. Como resultado de este nivel de análisis se identifican y se da cuenta de procesos generales en los que el alumno puede llegar a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado. Cabe mencionar que aun cuando los procedimientos de la Teoría Fundamentada pueden dar licencia para generalizar los resultados, el objetivo de este documento es tratar de construir explicaciones iniciales para una interacción en la cual un tutor logró que una estudiante experimentara convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado.

MICROANÁLISIS DE RELACIONES ENTRE CONVENCIMIENTO EN ENUNCIADOS MATEMÁTICOS, SU ADECUACIÓN Y FUNDAMENTO. PRIMER NIVEL ANALÍTICO

1a participación de Belarmina: expresión de una tendencia algebraica y operatoria

A manera de diagnóstico, el tutor propuso resolver a los estudiantes: Rosa tiene una balanza en equilibrio, de un lado una pesa de 5 kg y del otro una pesa de 2kg y un bulto de fierro. ¿Cómo puede hacer para saber el peso del fierro? En la Figura 1 se muestra la respuesta de Belarmina.

1.1	$5=2+x$ donde x es el bulto de fierro	**D1.** a: $5=2+x$ donde x es el bulto de fierro; b: $x=5–2$ →	**C1.** 3kg
1.2	entonces $x=5\text{-}2=3$kg.	**W1.** a: La solución de la ecuación se encuentra al lado derecho del signo igual (I1); b: Trasposición de términos (I4)	
		B1. a: Esquemas operatorios y álgebra (I1); b: Esquemas operatorios y álgebra (I4)	

Figura 1. Análisis de la primera participación de Belarmina. Argumento 1

En su primera intervención, Belarmina experimentó seguridad en la aplicación de I1e I4, la cual se deja ver en el uso del enfatizador “es” en 1.1, al actuar con base en las expresiones que derivó y mostrar determinación por publicar su respuesta. La aplicación de I1 e I4 la hizo conforme a esquemas operatorios (que se revelan por el carácter implícito de las reglas que enunció) y a una perspectiva algebraica, que se refleja a través de la estructura deductiva y el sistema de referencia algebraico en los datos.

Intervención del tutor: Cuestionamiento del soporte

2.2	Una vez planteada la ecuación acostumbramos a usar “trasposición de términos”, pero ¿por qué funciona? Para averiguarlo realicemos la siguiente actividad.
2.3	Da clic en el interactivo, arma la ecuación en la balanza y llega a la solución. Describe paso por paso cómo llegaste a la solución. Por ejemplo: $-2x-4=4x-4$; Para dejar sola a la x realizo lo siguiente: 1.- Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: $-2x=4x$; 2.- Sumo a los dos miembros $2x$. La ecuación nos queda: $0=6x$; 3.- Divido a los dos miembros entre 6. La ecuación nos queda: $0=x$. La solución es 0.

Como respuesta a Belarmina, el tutor cuestionó (v. 2.2) el constituyente operatorio sobre el cual la estudiante apoyó I4 (v. B1b). En la Figura 2 aparece lo que la alumna respondió.

2a participación de Belarmina: Seguridad en el sustento algebraico y operatorio

3.1	Para dejar sola a la x en: $-4x-4=8x-4$	**D3**. La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3) → **C3.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)
3.2-3.3	Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: $-4x=8x$	
3.4-3.5	Sumo a los dos miembros $4x$. La ecuación nos queda: $0=12x$	**W3.** Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1)
3.6-3.7	Divido a los dos miembros entre 12. La ecuación nos queda: $0=x$	
3.8	La solución es x!!!	**B2.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1) b: Razones operatorias y aritmética (I3)

Figura 2. Análisis de la segunda participación de Belarmina. Argumento 2

Belarmina desarrolló I4 con base en las reglas promovidas por el tutor (v. W2b-f), y apoyada en un soporte algebraico y matemático (v. B2b-f), extendiendo su comprensión en este aspecto. Pero nuevamente, la alumna también afianzó su argumento en esquemas operatorios (B2g) cuando en el paso de D2g a C2 dio una interpretación incorrecta del signo igual (v. W2g) que la llevó a contravenir I1. Sobre la aplicación de W2g (relacionada con I1) e I4, Belarmina experimentó seguridad que mostró con el uso de enfatizadores (!!!), al actuar siguiendo las reglas que enunció y al mostrar determinación e interés por publicarlas. Como respuesta, el tutor cuestionó el uso implícito de la garantía W2g relacionada con I1: 1. ¿Qué entiendes por la solución de una ecuación? 2. ¿La solución de una ecuación puede expresarse con literales? ¿Por qué? En la Figura 3 se analizan las respuestas dadas por Belarmina.

3a participación de Belarmina: Duda asociada a la aparición de razones matemáticas

4.1	1.- [La solución es] Encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad	**D3.** La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3) → **C1.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)
4.2	2.- Tutor, tengo duda en esta pregunta pero checando la pregunta de arriba entonces no se puede expresar con literales porque vamos a encontrar su valor. Corríjeme.	**W3.** Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1) **B3.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1) b: Razones operatorias y aritmética (I3)

Figura 3. Análisis de la tercera participación de Belarmina. Argumento 3

En su participación, Belarmina parafraseó con seguridad I3 (ver en 4.1 el uso indicativo de los verbos y el empleo de I3 para derivar otra regla) en su versión aritmética, lo cual hizo conforme a esquemas operatorios y aritméticos. De esta versión escolar de I3, la estudiante dedujo con duda (ver 4.2) una conclusión C3 acorde con I1, conforme a una garantía soportada en razones matemáticas y algebraicas, ayudando a su comprensión de I1. Con el fin de que la estudiante aplicara las proposiciones que enunció, el tutor preguntó: 1.- ¿Cuál es el valor de la incógnita?; 2.- ¿Cómo comprobamos que ese valor es solución de la ecuación? En la Figura 4 se analizan las respuestas de Belarmina.

4a participación de Belarmina: Duda al aplicar una nueva regla

5.1	1.- [El valor de la incógnita] sería 0	**D4.** a: D2g y C3; b: Sustituimos el valor en la ecuación; c: $-4x-4=8x-4$; d: $-4(0)-4=8(0)-4$; e: $-0-4=0-4$; f: $-4=-4$; g: Existe igualdad	**C4.** Sería 0
5.2	2.- Espero y estar bien, si no, me corrigen. [Para comprobar] lo sustituimos en la ecuación.		
5.3	$-4x-4=8x-4$; $-4(0)-4=8(0)-4$; $-0-4=0-4$; $-4=-4$	**W4.** a: W3 (I1); b-g: Versión aritmética de I3 (I3)	
5.4	Existe una igualdad en ambos lados.	**B4** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-g: Razones operatorias y aritmética (I3)	

Figura 4. Análisis de la cuarta participación de Belarmina. Argumento 4

En 5.1, Belarmina aplicó C3, relacionado con I1, con cierta inseguridad (ver el uso del mitigador “sería”) que en su participación anterior soportó en razones matemáticas y bajo una perspectiva algebraica. En 5.3 la estudiante aplicó D3, relacionado con I3, bajo esquemas operatorios y aritméticos y lo hizo con duda (ver 5.2). A continuación, el tutor solicitó resolver: Bety tuvo que cobrar \$178 de un billete de \$200. Ella le preguntó al cliente si traía cambio y él le dijo que traía \$3. Ella aceptó. ¿Cuánto tiene que regresar? Esta tarea, similar a la que Belarmina enfrentó en su primera participación, la planteó el tutor para identificar posibles cambios que se dieron en su resolución después de la interacción. En la Figura 5 se analiza cómo Belarmina enfrentó la tarea.

5a participación de Belarmina: Seguridad en un soporte algebraico

6.1	procedemos a despejar la incógnita;	**D5.** a: $200+3=178+x$; b: $203=178+x$; c: $203-178=178-178+x$	**C5.** $x=25$
6.2	$200+3=178+x$;		
6.3	$203=178+x$; $203-178=178-178+x$;	**W5.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-c:Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)	
6.4	$x=25$ que es el cambio que tiene que regresar Bety	**B5** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-c: Razones matemáticas y álgebra (I4)	

Figura 5. Análisis de la quinta participación de Belarmina. Argumento 5

Belarmina aplicó I1 (aún cuando D5c pudo activar W2g) e I4 (esta vez con las propiedades de la igualdad), aspectos que previamente re-construyó con el tutor bajo un soporte matemático. En esta participación, ella los administró con seguridad, estado que dejó ver mediante el uso de enfatizadores (“procedemos”, “es”), de acciones congruentes con lo que enunció y la determinación e interés que exhibió al publicar su respuesta. Sin embargo, la estudiante dejó de aplicar I3, la cual construyó y empleó en sus contribuciones precedentes (v. D3 y D4). Así que el tutor cuestionó su solución C5: ¿Cómo podemos comprobar que el valor que obtuviste para la incógnita es solución de la ecuación? La respuesta a esta pregunta se expone en la Figura 6.

6a participación: Seguridad al aplicar una nueva regla

7.1	Sustituyendo lo que vale x, que en este caso es 25, en la ecuación 200+3=178+x	**D6.** a: 200+3=178+x; 200+3=178+25; 203=203 → **C6.** x=25
7.2	200+3=178+25; 203=203	**W6.** a: Si al sustituir un valor en una ecuación existe una igualdad, entonces ese valor es solución de la ecuación
7.3	de esta manera podemos comprobar que es correcto porque en ambos lados es la misma cantidad.	**B6** a: Esquemas operatorios y Aritmética

Figura 6. Análisis de la sexta participación de Belarmina. Argumento 6

En esta participación, Belarmina parafraseó tácitamente la versión aritmética de I3 y la aplicó en D6 bajo esquemas operatorios y aritméticos. En esta ocasión, ella mostró seguridad en esa versión de I3, al utilizar enfatizadores (e. g. "es") cuando la enunció, actuar conforme a ella (en 7.1 y 7.2) y mostrar determinación e interés por explicitarla. Enseguida, el tutor le pidió resolver:$-4x - 16 = 9x + 1$. En la Figura 7 aparece lo que la alumna respondió.

7a participación: Omisión de un procedimiento aritmético

8.1	Tutor, esta es mi respuesta	**D7.** a: $-4x-16=9x+1$; b: $-4x-16+16=9x+16+1$; c: $-4x=9x+17$; d: $-4x-9x=9x-9x+17$; e: $13x=17$ → **C7.** $X=17/13$
8.2	Ecuación: $-4x$-16=9x+1	
8.3	$-4x-16+16=9x+16+1$ (propiedad usada suma); $-4x=9x+17$; $-4x-9x=9x-9x+17$ (propiedad usada resta); $13x=17$ (propiedad usada división)	**W7.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-e: Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)
8.4	$X=17/13$	**B7** a: Razones matemáticas y Álgebra (I1) b-e: Razones matemáticas y Álgebra (I4)

Figura 7. Análisis de la séptima participación de Belarmina. Argumento 7

Para resolver la ecuación, Belarmina activó los aspectos I1 e I4 siguiendo con puntualidad el procedimiento sustentado algebraicamente que construyó con el tutor. Como en las ocasiones previas, asociado a este esquema la estudiante pareció experimentar convencimiento; se ve al usar el indicativo de los verbos cuando presentó su respuesta ("esta es"), actuar conforme a las reglas que enunció y mostrar determinación e interés por publicar y explicar su respuesta. Pero nuevamente, ella dejó de aplicar I3.

ANÁLISIS DE RESULTADOS. TIPIFICACIÓN DE ARGUMENTOS

Para obtener una perspectiva general, en las Tablas 2, 3 y 4 se sintetizan las relaciones que en un argumento se pueden encontrar entre los estados epistémicos que un estudiante experimenta en torno a un enunciado matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (W) y los esquemas epistémicos que representan el marco general en el que se funda su argumento (que revela B). Se desglosan los aspectos I4, I1 e I3.

Tabla 2: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I4

Categoría / Argumento	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	Seguridad	Seguridad	No aplica	No aplica	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Acorde	No aplica	No aplica	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio Álgebra	Matemática Álgebra	No aplica No aplica	No aplica No aplica	Matemática Álgebra	No aplica No aplica	Matemática Álgebra

Tabla 3: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I1

Categoría / Argumento	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	Seguridad	Seguridad	Duda	Duda	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Discorde	Acorde	Acorde	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Operatorio	Matemática	Matemática	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 4: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I3

Categoría / Argumento	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	No aparece	No aparece	Seguridad	Duda	No aparece	Seguridad	No aparece
Adecuación	No aparece	No aparece	Acorde	Acorde	No aparece	Acorde	No aparece
Soporte	No aparece	No aparece	Operatorio	Operatorio	No aparece	Operatorio	No aparece
	No aparece	No aparece	Aritmética	Aritmética	No aparece	Aritmética	No aparece

En las Tablas 2 y 3 se observa que inicialmente el tutor identificó convencimiento en respuestas correctas pero basadas en esquemas extra-matemáticos y dirigió sus acciones para que la estudiante experimentara convencimiento no sólo en respuestas correctas sino además bien fundamentadas. Este hecho sugiere redefinir el constructo "bien calibrado" de Foster, el cual involucra sólo el convencimiento y la adecuación de las respuestas. Tomar en cuenta el soporte del argumento, en este estudio, da lugar a una gama más amplia de argumentos. Con esta perspectiva, el objeto de la instrucción es que los estudiantes experimenten seguridad cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas matemáticos (SAM para abreviar), y que duden cuando actúan de forma discorde a un aspecto (fundado ya sea en esquemas matemáticos o extra-matemáticos: DDM o DDEM para abreviar) o cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas extra-matemáticos (DAEM para abreviar). Los argumentos 5 y 7 para los aspectos I1 e I4 son ejemplos de argumentos SAM; el argumento 4 para el aspecto I3 es DAEM. Los argumentos antes descritos se nombran aquí como *argumentos consistentes*. Dado que en una interacción el objetivo del profesor es construir junto con sus estudiantes un argumento SAM, se puede llamar a éste *argumento objetivo*. Los argumentos que presentan una variación con respecto a los argumentos consistentes, en este escrito se conocen como *argumentos inconsistentes*. Por ejemplo, en el Argumento 1 para los aspectos I1 e I4 se asocia seguridad a una respuesta correcta basada en esquemas extra-matemáticos (SAEM para abreviar), en el Argumento 2 para el aspecto I1 se asocia seguridad a una respuesta discorde fundada en esquemas extra-matemáticos (SDEM para abreviar) o en el Argumento 3 para el aspecto I1 se asocia duda a una respuesta acorde fundada en esquemas matemáticos (DAM para abreviar).

ANÁLISIS DE RESULTADOS. DEFINICIÓN DE PROCESOS

Una vez definida la anterior tipificación de argumentos, una pregunta natural es ¿Bajo qué condiciones pueden surgir los distintos tipos de argumentos? El objetivo del tutor para que la estudiante experimentara seguridad en un conocimiento bien fundamentado lo llevó a realizar acciones que eventualmente modificaron el comportamiento de la alumna. A continuación se elabora un diagrama para explicar bajo qué condiciones pueden surgir dichos comportamientos.

Un diagrama se puede utilizar como un método para visualizar relaciones entre conceptos y explicar fenómenos (Corbin y Strauss, 2015). Los diagramas se construyen para cada fenómeno con una categoría en cada caja. La condición inicial se coloca en la parte superior del diagrama, las consecuencias en la parte inferior y las acciones/interacciones en el medio. Debajo de cada categoría se enumeran las propiedades. Las flechas indican el curso de las acciones/interacciones. En el Diagrama 1, la condición inicial es la elaboración de un argumento por parte del estudiante ante una actividad propuesta por el profesor. Esta condición da lugar a que el profesor identifique el tipo de argumento que construyó el estudiante. Con base en lo anterior, el profesor publica una intervención la cual puede consistir en una actividad que se desarrolla en un contexto (e.g. la balanza, resolución de problemas o de ecuaciones) y con un nivel de dificultad (e.g. ecuaciones con una incidencia de la literal o con dos incidencias); en un cuestionamiento a la conclusión, garantía o soporte del argumento del estudiante o en la introducción y solicitud de aplicación de nuevas reglas. Ante estas nuevas condiciones, el estudiante puede construir un nuevo argumento el cual puede ser un argumento objetivo (SAM) o no, y mostrar o no cambios con respecto al anterior. A continuación, el profesor puede realizar una nueva intervención y el ciclo se repite. En lo que sigue, se utiliza este diagrama para explicar las trayectorias de interacción entre Belarmina y el tutor.

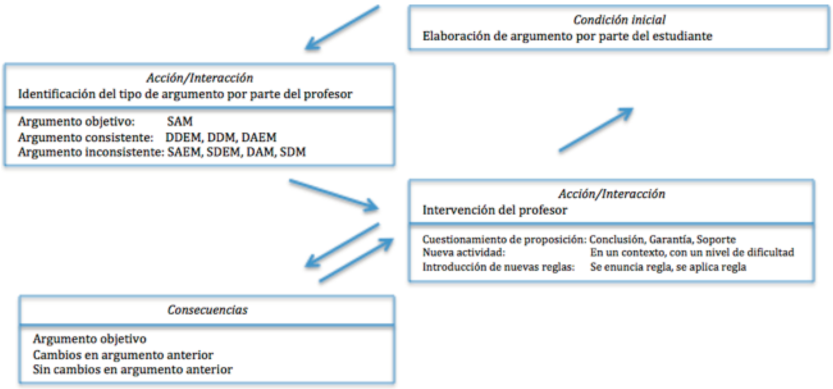


Figura 8. Diagrama 1: Proceso de los argumentos

La trayectoria de I4 comenzó con la solicitud del tutor para resolver una situación problemática que involucró una ecuación lineal con una incidencia de la literal. Como respuesta, Belarmina construyó un argumento en su primera participación. Esta condición inicial llevó al tutor a identificar una estructura SAEM en dicho argumento. Para seguir con el diagrama, a continuación el tutor publicó una intervención. Específicamente, él cuestionó el soporte extra-matemático B1b del argumento y publicó una nueva actividad en la que modificó el contexto (de la resolución de problemas a la balanza) y la dificultad (de una incidencia de la literal a dos) para introducir nuevas reglas (W2b-f) relacionadas con las propiedades de la igualdad. Estas nuevas condiciones, llevaron a la estudiante a construir en su segunda participación el argumento objetivo SAM para I4. Esto revela la prontitud con la que la estudiante asimiló las garantías (W2b-f) relativas a I4 y que un aumento de comprensión puede ir acompañado de seguridad. Una vez que la estudiante construyó el argumento objetivo SAM bajo las condiciones antes mencionadas, el tutor realizó nuevas intervenciones en las que él cambió el contexto (primero, de la balanza a la resolución de problemas y luego, de la resolución de problemas a la resolución de ecuaciones) y la dificultad (primero, de dos a una incidencia de la literal en las ecuaciones y luego, de una a dos incidencias) de las actividades. Cada vez que el tutor modificó las características de las actividades, la estudiante construyó argumentos que él identificó como SAM para I4. A esta trayectoria en la que para construir el argumento SAM no se registran cambios en los estados epistémicos en este escrito se llamará *trayectoria suave*.

Para el aspecto I1, en su primera participación Belarmina experimentó seguridad cuando aplicó la regla W1a según la cual la solución está a la derecha del signo igual apoyada en un esquema operatorio que, en conjunción con la trasposición de términos, la llevó a obtener una respuesta acorde con I1. Enseguida el tutor identificó un argumento SAEM en esa primera participación. Cuando el tutor cuestionó el soporte de I4 y colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad para introducir nuevas reglas relacionadas con las propiedades de la igualdad, la estudiante construyó un argumento SAM para dicho aspecto I4, pero ella mantuvo su seguridad en torno a la regla W1a relacionada con I1 y la aplicó, lo que la condujo a trasgredir I1 y, en suma, a construir una argumento que el tutor identificó como SDEM para I1 en su segunda participación. Lo anterior revela que la consistencia para un aspecto puede no transferirse automáticamente a otro aspecto. La identificación del argumento SDEM llevó al tutor a publicar una nueva intervención en la que cuestionó la garantía W1a. Esto condujo a la estudiante a construir en su tercera participación un argumento en el que ella explicitó reglas W3 acordes con I1 bajo esquemas matemáticos ayudando a su comprensión. Sin embargo aquí Belarmina dudó. Enseguida el tutor identificó aquí un argumento DAM para I1. Esto desvela que el actuar conforme a un conocimiento bien fundamentado no va necesariamente aparejado de un fomento en la seguridad, porque lo primero va acompañado de reacomodos cognitivos que suelen propiciar estados de inseguridad. Ante estas nuevas condiciones, el tutor realizó una nueva intervención en la que solicitó a la estudiante aplicar la regla W3 que ella construyó, pero la duda de Belarmina continuó en su cuarta participación y el tutor identificó nuevamente una estructura DAM en el argumento. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto (de la balanza a la resolución de problemas) y la dificultad (de dos incidencias de la literal a una). Como respuesta, la estudiante elaboró un argumento en su quinta participación cuya estructura el tutor identificó como SAM para I1, la cual se mantuvo en su séptima participación aun cuando el tutor modificó nuevamente la actividad. A trayectorias en las que para construir el argumento SAM se dan cambios sucesivos en los estados epistémicos se llamarán aquí *trayectorias intrincadas*.

Hasta aquí se han definido procesos que culminan en un argumento SAM. Pero pueden encontrarse trayectorias que finalizan con alguna variación de ese argumento. Considérese la trayectoria de I3. La estudiante dejó de poner en juego I3 hasta su tercera participación cuando, como respuesta al cuestionamiento que el tutor hizo a la garantía W1a relacionada con I1, la estudiante parafraseó la versión aritmética de I3 en un argumento con una estructura que el tutor identificó como SAEM para ese aspecto. Así que el tutor solicitó a Belarmina aplicar dicha versión aritmética de I3, la cual ella empleó en su cuarta participación, pero lo hizo con duda, en un argumento que el tutor identificó como DAEM. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad, pero la estudiante dejó de acudir a I3 en su quinta participación. Ante estas condiciones, en una nueva intervención, el tutor cuestionó la solución C5 que Belarmina obtuvo. Como respuesta, en su sexta participación, la estudiante aplicó la versión aritmética de I3 pero esta vez con seguridad en un argumento que el tutor identificó como SAEM. Sin embargo, cuando el tutor colocó una nueva actividad, ella dejó de aplicar nuevamente I3 en su séptima participación. A estas trayectorias en las que los estados epistémicos cambian pero la adecuación de la respuesta y su fundamento permanecen sin variaciones se llamarán en este escrito, *trayectorias improductivas.*

CONSIDERACIONES FINALES

Con base en el marco teórico-interpretativo y siguiendo los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada se analiza la interacción entre un profesor y una estudiante que participan en un foro virtual sobre álgebra básica. En un primer nivel, se revela que a lo largo de una interacción se puede identificar una diversidad de argumentos. Por ejemplo, se puede asociar duda a una respuesta acorde fundada en razones matemáticas o asociar convencimiento a una respuesta discorde a un aspecto basado en consideraciones extra-matemáticas. Lo anterior motivó una tipificación de argumentos para niveles básicos. Sin embargo se propone que, como uno de los objetivos del profesor es que los estudiantes experimenten convencimiento en un conocimiento bien fundamentado, se relacione a los argumentos SAM con la comprensión (cf. la idea de estado 'bien calibrado' de Foster, 2016). En un segundo nivel se definen distintos procesos que puede desarrollar un profesor a lo largo de una interacción. En dicha interacción pueden surgir procesos en los que el alumno, durante la dinámica de ese proceso, llegue a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado (v. trayectoria suave o intrincada). En esos procesos la seguridad coligada a una respuesta incorrecta basada en esquemas extra-matemáticos, por ejemplo, puede requerir cuestionar el soporte, la construcción de nuevas reglas y su aplicación; la inseguridad aunada a una respuesta bien fundada puede requerir de su aplicación en diferentes contextos.

Referencias

Corbin, J., y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 271-288.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Martínez, B. y Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca, España: SEIEM.

Martínez, V. y Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 125-149.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.

Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México D.F., México: Editorial Trillas.

MODELIZACIÓN COMO PROCESO BÁSICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS: UN ANÁLISIS DE NECESIDADES

Modelling as a basic process when solving context problems: needs analysis

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N.,
Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C.

Universidad de Córdoba

Resumen

Este trabajo explora las necesidades formativas del alumnado de primer curso del grado en Educación Primaria en el ámbito de la modelización matemática y la resolución de problemas contextualizados. Se ha puesto el foco en el análisis de las estrategias seguidas por el alumnado para abordar un problema, así como en la detección de los errores cometidos; todo ello con el objeto de diagnosticar las necesidades de formación y elaborar un perfil del alumnado que permita adaptar su instrucción a su conocimiento. Los resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar estrategias para resolver problemas, el pensamiento visual y el manejo de unidades de medida.

Palabras clave: *Modelización matemática; Resolución de problemas; Análisis de errores.*

Abstract

This work explores the formative needs of pre-service teachers in the field of mathematical modeling and solving contextualized problems. This study focuses on the analysis of students' strategies to address one of the problems, as well as on the detection of mistakes; all in order to diagnose the training needs and develop a student profile enabling to adapt their instruction to their knowledge. Results show the necessity of teaching solving problems strategies, visual thinking and measure units.

Keywords: *Mathematical modelling; Problem solving; Analysis of errors;*

Introducción

Esta comunicación presenta una investigación para explorar las necesidades formativas del alumnado de primero de grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, con respecto a la modelización como herramienta para la resolución de problemas contextualizados.

El interés en este análisis surgió en el contexto de una investigación más amplia, que estuvo motivada por la necesidad de conocer *qué Matemáticas* deben tener cabida en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria, teniendo en cuenta la gran diversidad de bagaje matemático que presenta el alumnado, procedente de diferentes bachilleratos y diversos ciclos formativos. Estas circunstancias invitaron a plantear una evaluación inicial de la competencia matemática del alumnado novel que permitiera diseñar un perfil de qué Matemáticas saben y facilitara plantear la instrucción matemática desde su propio conocimiento. El diseño de la prueba inicial se basó en el modelo de competencia matemática que evalúa PISA 2012 (OECD, 2013a) y los resultados pusieron de manifiesto dificultades para la resolución de los problemas planteados que no tenían que ver con el conocimiento de conceptos o procedimientos asociados a contenidos, sino que parecían estar vinculadas a un insuficiente dominio de ciertos procesos matemáticos, en concreto, a convertir situaciones de la vida real en Matemáticas (Figura 1).

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

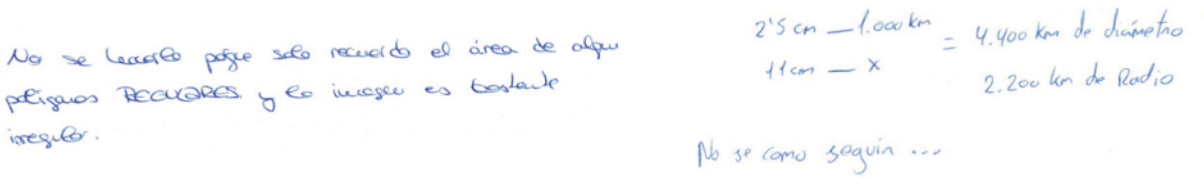


Figura 1. Ejemplos de respuestas al problema objeto de estudio
(puede verse en el Apéndice I) que motivaron nuestra investigación

Desde los años ochenta han proliferado los autores que subrayan la importancia para la formación matemática de destrezas que no se reduzcan al trabajo con conceptos y procedimientos. Pollak (1987) propuso cinco objetivos para los estudiantes de Matemáticas, entre los que incluye convertirse en resolutores de problemas y aprender a comunicarse y a razonar matemáticamente. Poco más tarde, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) señaló que 'saber' Matemáticas es 'hacer' Matemáticas y que la instrucción debería enfatizar insistentemente el 'hacer' más que el 'saber'" (p. 7), y propuso un conjunto de estándares para la formación matemática escolar que incluían procesos como resolución de problemas, comunicación, razonamiento y conexiones. Estas ideas se consagraron diez años más tarde (NCTM, 2000), con un nuevo conjunto de estándares donde estos procesos (junto con la destreza de representación) recibieron la misma relevancia que los contenidos para la formación matemática. Desde entonces, la importancia de los procesos en la formación matemática ha sido creciente. En este trabajo reconocemos esta relevancia en especial en el trabajo con problemas contextualizados. Gravemeijer y Doorman (1999) destacan la importancia de trabajar las matemáticas escolares en torno a problemas contextualizados por su poder motivacional, ya que los niños ven la utilidad de las Matemáticas en su vida cotidiana. Desde la posición de formación de maestros, el trabajo con este tipo de problemas se hace, por tanto, necesario, especialmente en lo que concierne a la transformación de situaciones reales en Matemáticas, es decir, la modelización. Surge la cuestión de cómo abordar el aprendizaje de la modelización para la formación de maestros, lo que reincide en la motivación inicial del planteamiento: un análisis pormenorizado de la resolución de problemas por parte de los alumnos puede dar información útil para profundizar en su formación. Por todo lo expuesto, esta investigación pretende categorizar las estrategias seguidas por el alumnado a la hora de afrontar un problema contextualizado y detectar los errores más frecuentes; todo ello con el objeto de diagnosticar necesidades de formación y trazar pautas para el planteamiento del trabajo en el aula.

MARCO TEÓRICO

La modelización matemática es uno de los aspectos de la educación matemática que se ha discutido y propagado con mayor intensidad durante las últimas décadas (Blum y Borromeo, 2009). Este hecho tiene repercusión a nivel de diseño de currículos nacionales y a nivel internacional, ya que la modelización es considerada una de las destrezas principales que componen la competencia matemática (NCTM, 2000; Niss y Hojgaard, 2011; OECD, 2013a). Existen diferentes autores que han discutido sobre qué debe entenderse por modelización. Castro y Castro (1997) defienden que la modelización es "fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real; pero […] que conlleva la consideración del problema como un todo" (p. 110). Niss y Hojgaard (2011) interpretan la modelización como una competencia del individuo que es capaz de estructurar y matematizar la situación a modelar, trabajar con el modelo y analizar críticamente tanto los resultados como el proceso seguido, entre otras destrezas. En esta investigación se adopta la interpretación de Blum y Borromeo (2009), que definen la modelización como "el proceso de traducción entre el mundo real y las Matemáticas en ambos sentidos" (p. 1) para detectar las habilidades asociadas a este proceso que deben potenciarse en la formación de maestros. El desarrollo de estas habilidades implica una mayor comprensión de la realidad, fortalece las conexiones entre conceptos matemáticos y hace palpable la utilidad de las matemáticas en situaciones contextualizadas. Sin embargo, esta relevancia no se ve reflejada en la práctica diaria del aula. Diversos autores (Freudenthal, 1973; DeLange, 1987; Burkhardt, 2004; Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) consideran que esto se debe al hecho de que la modelización no es solo difícil para los alumnos, sino también para los maestros, ya que la enseñanza se vuelve más abierta y menos predecible. Para los estudiantes, la dificultad principal es la complejidad que suele envolver las situaciones en las que es necesario introducir un modelo matemático. De hecho, la modelización está inseparablemente ligada a otras competencias matemáticas, como la comunicación, el diseño de estrategias de resolución de problemas o el trabajo matemático (Niss, 2003).

Borromeo (citado por Blum y Borromeo, 2009) analiza diferentes modelos teóricos relacionados con la modelización matemática, aunque se ha considerado particularmente útil el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007). Este modelo se articula en torno a siete fases de forma que (i) la situación-problema tiene que ser entendida, es decir, se tiene que construir un modelo de la situación (fase de comprensión y construcción); (ii) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada (fase de simplificación y estructuración), dando lugar a un modelo real de la misma; (iii) la fase de matematización transforma el modelo de la situación en un modelo matemático; (iv) la fase de trabajar matemáticamente produce resultados (matemáticos) que (v) se interpretan en el mundo real (fase de interpretación); (vi) una fase de validación de estos resultados puede indicar la necesidad de iniciar el bucle una segunda vez. El ciclo incluye una séptima etapa de exposición, que no se tiene en cuenta en esta investigación debido a las características de nuestro instrumento de recogida de información (prueba escrita).

El ciclo de modelización puede no definir una trayectoria lineal de pensamiento, es decir, un individuo puede resolver un problema pasando por diferentes fases del ciclo sin seguir el orden expuesto anteriormente. Borromeo (citado por Blum y Borromeo, 2009) asocia la trayectoria que sigue el individuo en la resolución del problema con diferentes estilos de pensamiento. Este enfoque, que resulta enriquecedor para el propósito del presente estudio, define tres estilos de pensamiento matemático. El primero de ellos es un pensamiento de tipo visual, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo real más que sobre el modelo matemático, muestra tendencia a abordar los problemas de forma global y prefiere las representaciones pictóricas. En el otro extremo está un pensamiento de tipo analítico, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo matemático más que sobre la realidad, muestra tendencia a utilizar representaciones simbólicas o verbales y prefiere estructurar paso a paso el procedimiento seguido. En un punto intermedio entre ambos extremos se encuentra el pensamiento de tipo integrado, mediante el cual el individuo es capaz de combinar elementos de los otros dos tipos de pensamiento.

Las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007) constituyen puntos de referencia para el análisis de las estrategias de modelización, que permiten estructurar la búsqueda y categorización de los errores. El estudio de dichas estrategias y de los errores junto con la identificación de los tipos de pensamiento proporcionan herramientas para un proceso de análisis-síntesis que permita elaborar el perfil y detectar necesidades formativas en los alumnos participantes. Existen diferentes investigaciones empíricas centradas en el análisis de soluciones a problemas que involucran destrezas de modelización y constituyen referencias para desarrollar este trabajo. En educación secundaria Socas, Ruano y Hernández (2016) analizaron, desde el enfoque Lógico Semiótico, los errores cometidos por los alumnos resolviendo problemas que involucraban modelización. Gallart, Ferrando y García-Raffi (2014) estudiaron las estrategias adoptadas para resolver problemas abiertos en términos de las trayectorias de modelización (Blum y Borromeo, 2009) y la eficacia del uso de este tipo de problemas para mejorar la competencia matemática PISA. Mousoulides, Christou y Sriraman (2008) obtuvieron un modelo teórico para el comportamiento de los estudiantes ante problemas que involucran modelización en torno a los procesos que siguieron, las habilidades que demostraron y otros factores externos. En formación de profesores de Matemáticas, Bukova-Güzel (2011) examinó los enfoques que planteaban los estudiantes en el diseño de problemas de modelización matemática y en qué medida implementaban el proceso de modelización al resolver los problemas que proponían. Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-

Güzel (2017) analizaron las soluciones que estudiantes para profesores de secundaria daban a un problema concreto diseñado para trabajar la modelización matemática, prestando especial atención a las fases de modelización propuestas por Blum y Leiss (2007). Estas investigaciones sirven de precedente para contextualizar e interpretar los resultados que se obtienen en el presente análisis.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Analizar las necesidades formativas respecto a las destrezas de modelización de los alumnos del primer curso de grado en Educación Primaria en virtud del marco teórico desarrollado. Más específicamente:

- Categorizar las estrategias con las que el alumnado abordó la modelización matemática e identificar el tipo de pensamiento (Borromeo, citado por Blum y Borromeo, 2009) que se refleja en estas estrategias.
- Detectar los errores cometidos en el proceso de modelización en términos del ciclo de Blum y Leiss (2007) y clasificarlos según los procedimientos elementales que estos no completan.
- Proporcionar un perfil del alumnado en función de la información recogida sobre su conducta y utilizar este perfil para detectar las necesidades formativas que permitan definir pautas de trabajo en el aula.

METODOLOGÍA

Participaron en el estudio un total de 227 alumnos del primer curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, que se enfrentaron a una prueba escrita consistente en cinco ítems liberados de pruebas PISA que en conjunto abarcan todos los bloques de contenidos del currículo de Educación Primaria y todos los procesos y capacidades PISA 2012. Los estudiantes tenían permitido el uso de la calculadora para resolver los problemas de la prueba. Para el presente estudio se analizaron las respuestas a un solo ítem que consistía en un problema cuya resolución requería destrezas de modelización (puede verse en OECD, 2013b, p.178).

El análisis se llevó a cabo mediante la revisión de las soluciones que dieron al problema cada uno de los participantes a partir de la descripción de la estrategia utilizada para resolver el problema, el tipo de pensamiento que dicha estrategia manifestaba, la identificación de los errores respecto a las fases del ciclo de modelización y la interpretación de los mismos en términos de los procedimientos elementales asociados los contenidos. Concretamente, para alcanzar el primer objetivo específico se describió cualitativamente la estrategia seguida por cada alumno, se agruparon estrategias similares seguidas por diferentes estudiantes y se utilizaron esos grupos para elaborar los descriptores de cada categoría (se pueden observar en la tabla 1). Para lograr el segundo objetivo se elaboró una lista de indicadores asociados a los procedimientos elementales necesarios para completar la modelización del problema: (I1) Aplica correctamente la escala (expresa datos necesarios en unidades reales); (I2) Descompone el mapa en figuras planas de área calculable; (I3) Calcula correctamente las áreas que muestra el dibujo hecho y las suma si fuera el caso; (I4) En la explicación relaciona el área de las figuras con el área total; (I5) Mide correctamente los datos del dibujo necesarios; (I6) Expresa correctamente el resultado al problema obtenido. La observación e interpretación de los errores cometidos por cada estudiante reveló la fase de Blum y Leiss (2007) que el alumno no dominaba y permitió identificar los procedimientos que dicho alumno no completó adecuadamente usando los indicadores que no se satisficieron. Para abordar el tercer objetivo, finalmente, se sintetizó la información recabada durante el análisis para trazar el perfil del alumnado y sus necesidades formativas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estrategias de modelización y tipos de pensamiento

Del total de los estudiantes que realizaron la prueba, 161 dejaron el problema en blanco o no dejaron evidencias de la estrategia seguida. Este hecho corrobora los resultados de Socas et al. (2016), dejando patente que muchos estudiantes carecen de recursos para diseñar una estrategia de resolución en una situación contextualizada. Entre el resto de alumnos, sin embargo, se observó cierta riqueza en cuanto a las estrategias de modelización, que se detallan en la tabla 1. Algunas de las más significativas se pueden ver en la Figura 2.

Tabla 1. Estrategias de resolución observadas y tipos de pensamiento asociados. "V" indica los alumnos en los que predomina un pensamiento visual, "A" un pensamiento analítico e "I" un pensamiento integrado

			Pensamiento		
	Estrategia de estimación	*Nº Personas*	V	A	I
E1	Toma el área de un rectángulo que incluye completamente a la isla.	15	2	9	4
E2	Toma el área de un cuadrado que cubre parcialmente la isla, compensando el área de las zonas de mar dentro del cuadrado con el área de las zonas de la isla fuera de él.	12	1	11	0
E3	Toma el área de un rectángulo de características análogas a las del cuadrado anterior.	14	3	7	4
E4	Suma las áreas de diferentes polígonos en los que ha descompuesto la isla.	6	1	0	5
E5	Toma el área de un círculo de similares características a las de los polígonos de E2 y E3.	5	0	3	2
E6	Toma la diferencia entre el área de un rectángulo que incluye totalmente a la isla y el área de las zonas de mar (que ha estimado matematizando la zona con diferentes figuras).	5	1	0	4
E7	Traza una retícula de lado igual a la longitud de la escala gráfica, contabiliza los cuadrados interiores a la isla y matematiza los trozos de isla "sobrantes" usando polígonos.	2	2	0	0
E8	Descompone el rectángulo que incluye totalmente a la isla en cuatro rectángulos iguales, estima que el área de la zona de mar es igual al área de uno de los rectángulos y toma tres veces el área de esos rectángulos.	1	0	0	1
E9	Toma como área una medida unidimensional	8	4	4	0

La estrategia dominante consistió en aproximar el área de la isla mediante el área de una única figura plana, bien de un cuadrilátero o de un círculo (E1, E2, E3 y E5) con mayor o menor precisión. La mayoría de los estudiantes que implementaron esta estrategia exhibieron un pensamiento de tipo más analítico mostrando simplemente cálculos o texto y sin dejar evidencias de trabajo sobre la imagen (no trazaron la figura). En cambio, los alumnos que utilizaron estas estrategias asociadas a un pensamiento más visual mostraron haber trabajado con la escala gráfica directamente sobre la imagen o indicaron las medidas reales sobre la figura utilizada. Es destacable que los estudiantes que optaron por E1 denotaron un enfoque del problema simplista que proporcionaba un resultado sobredimensionado. La estrategia de descomposición en polígonos (E4) fue utilizada por 6 participantes. Salvo un caso que solo evidenció pensamiento visual (se limitó a descomponer la superficie de la isla sin efectuar cálculos), el uso de esta estrategia implica un pensamiento integrado. Igual sucede con la estrategia E6, que denota un enfoque similar. Las estrategias E7 y E8 son casos singulares, ya que solo fueron utilizadas por dos y un participante, respectivamente, y ninguna con éxito completo. Los alumnos que plantearon E7 no fueron capaces de completar los cálculos necesarios. Especialmente significativo es el caso de la estrategia E8, en la que la estudiante estimó (sin dejar muestras de cómo) el área de la zona de mar por la cuarta parte del rectángulo en el que enmarcaba la imagen completa. Por último, las estrategias etiquetadas como E9 implican una concepción errónea del concepto de área, ya que la estiman utilizando longitudes. Dos de los participantes estimaron el área por medio de la longitud del perímetro y otros dos se limitaron a medir un "diámetro" de la isla y dieron el resultado de la medición como aproximación del área.

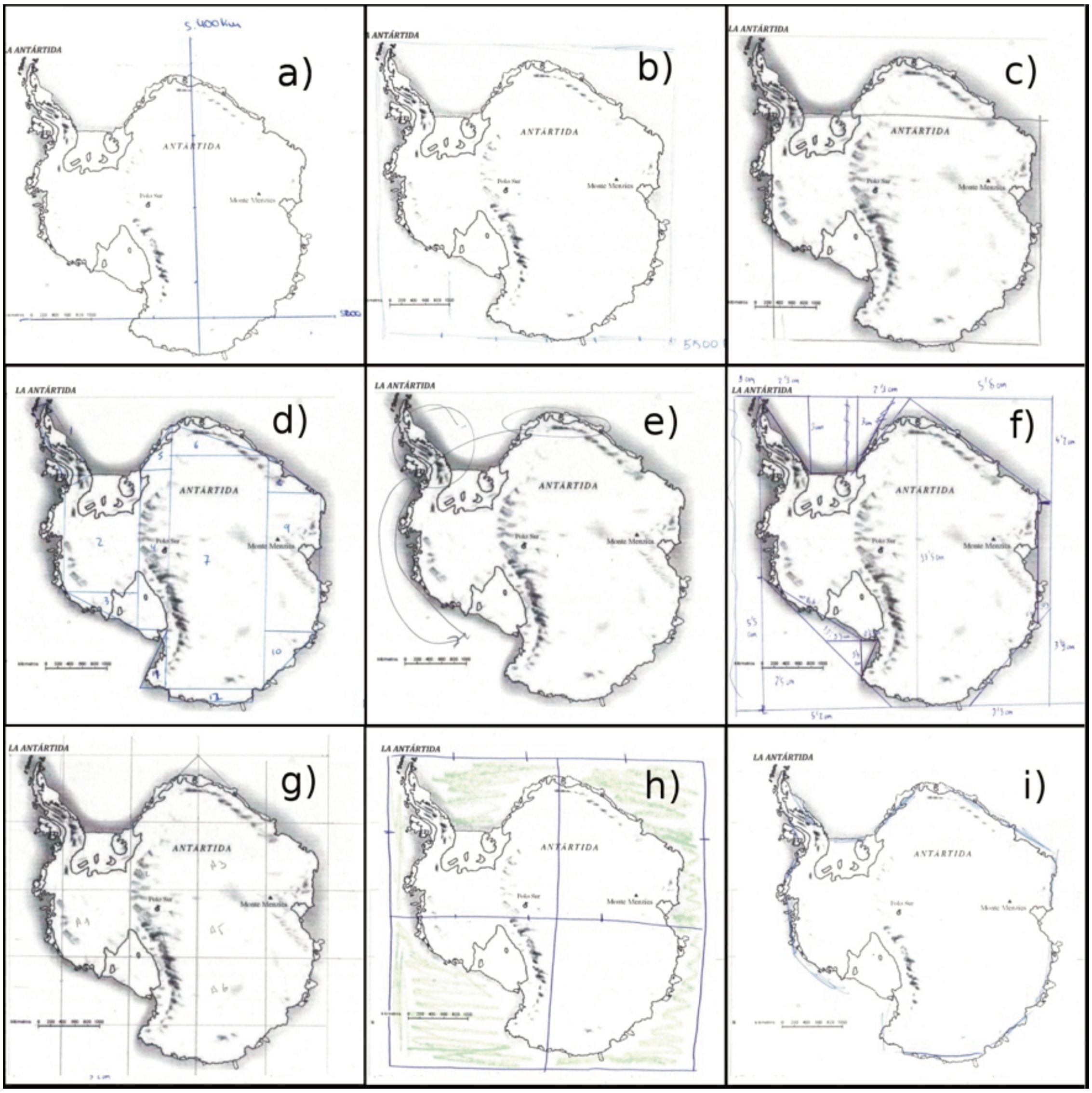


Figura 2. Algunos ejemplos de los esquemas de las estrategias de resolución al problema objeto de estudio. El alumno del dibujo f) no ha hecho ningún cálculo

Análisis de errores

La clasificación de los errores se ha hecho según las categorías que se detallan en la tabla 2. La primera categoría engloba un grupo de errores asociados a un uso incorrecto de las unidades de medida, tales como expresar áreas con unidades de longitud (error más frecuente, cometido por 17 personas), volumen u otro tipo y omitir las unidades. Esta categoría incluye también otro grupo de errores vinculados a mediciones inexactas (cometido por 10 personas). En la segunda categoría están incluidos errores tales como cálculos de áreas obtenidas sumando las dimensiones del rectángulo correspondiente, error obtenido por Socas et al. (2016), o aplicando fórmulas no válidas y estimación de áreas a través de longitudes de perímetros o de diámetros, así como la asunción de que una figura de dimensiones

$n \times n$ tiene área n. La tercera categoría está formada esencialmente por dos tipos de errores. El primero de ellos consiste en identificar con 1 cm la longitud total de la escala gráfica (2,5 cm) o la partición más pequeña de la misma (0,5 cm). Este tipo de errores puede verse ilustrado en las Figuras 3a) y 3b), respectivamente. El segundo incluye alumnos que no cometieron errores en el cálculo del área en centímetros cuadrados y transformaron de manera errónea las unidades: bien multiplicando por 1000 (sin evidenciar alguna lógica) o utilizando el factor de escala lineal cm – km en lugar del cuadrático. Errores de este tipo relacionados con el cambio de unidades también fueron identificados por Hıdıroğlu et al. (2017). Por último, la cuarta categoría hace alusión a errores de cálculo, que fueron poco frecuentes posiblemente porque estaba permitido utilizar la calculadora durante la prueba.

Tabla 2. Categorías de los errores detectados y frecuencia

	Categoría	*Nº Personas*
C1	Errores asociados a la medida	33
C2	Errores asociados al concepto de área	17
C3	Errores asociados al cambio de escala	13
C4	Errores de cálculo	2

Los participantes que no alcanzaron la fase de comprensión dieron respuesta a preguntas que no esta-

Tabla 3. Fases de modelización y número de participantes que evidenciaron no completar la fase

Fase	*Nº Personas*
Fase 1: Comprensión / Construcción	3
Fase 2: Simplificación / Estructuración	17
Fase 3: Matematización	12
Fase 4: Trabajo matemático	27
Fase 5: Interpretar	23
Fase 6: Validar	7

ban formuladas, como distancias entre dos puntos de la isla o indicar las dimensiones de un polígono en lugar del área (Figura 3c)). Aquellos que evidenciaron no completar la fase 2 son, esencialmente, estudiantes que adoptaron la estrategia E1, el modelo de la situación que plantearon podía ser adecuado pero no mostraron haber hecho hipótesis para trabajar sobre el problema (Figura 3d)). En la categoría de los que no ejecutaron la fase 3 se incluyen aquellos que aproximaron áreas utilizando medidas de longitud (utilizaron un modelo matemático que no permite dar solución adecuada al problema), así como aquellos que presentaron cálculos relacionados con el cambio de escala pero no mostraron evidencias de haber transformado el modelo real en un modelo matemático. Los que no completaron la fase de trabajo matemático lo hicieron por diversas causas, algunos no hicieron todos los cálculos necesarios para resolver el problema, otros se equivocaron al trabajar con la escala, hay participantes que se limitaron a dibujar o describir verbalmente la estrategia pero no hicieron los cálculos, situación ya encontrada por Socas et al. (2016), y otros que hicieron mediciones incorrectamente. En la categoría de aquellos que no completaron la fase 5 destacan todos los que expresaron medidas de área en unidades incorrectas. Por último, los que no evidenciaron completar la fase de validación fueron quienes obtuvieron resultados de un orden de magnitud muy alejado de la realidad. Resultados similares se encontraron en el estudio llevado a cabo por Bukova-Güzel (2011), el cual resalta que los participantes de dicho estudio, también futuros maestros, mostraron mejor desempeño en la fase de comprensión, y más dificultades en la de interpretación y por Gallart et al. (2014) que encontraron la importancia de la fase de validación en el proceso de modelización matemática.

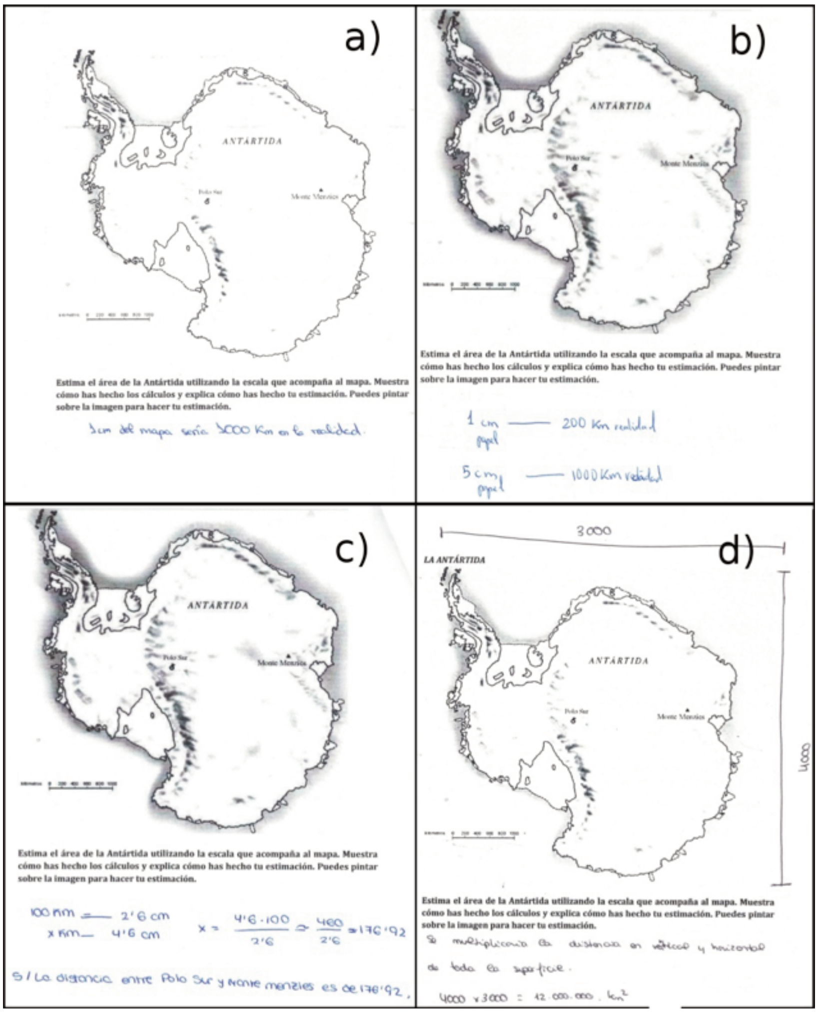


Figura 3. Algunos ejemplos de los esquemas de las estrategias de resolución al problema objeto de estudio

La discusión de los errores encontrados y de las fases de modelización que los alumnos no completaron dibuja una conexión entre estas dos categorizaciones, que en ocasiones se ha hecho explícita. En ningún caso se pretendió establecer una conexión definida entre errores y fases no completadas, pero el uso de los errores permitió dilucidar con mayor facilidad la fase en la que cada alumno tiene dificultades.

Perfil del alumno y necesidades formativas

En cuanto a las estrategias y a los tipos de pensamiento encontrados, el resultado más llamativo fue el número tan bajo de alumnos que abordaron el problema, lo que acentúa la necesidad observada de trabajar la modelización con maestros en formación inicial, como también apuntan Jacobs y Durandt (2017). Además, entre los alumnos que sí afrontaron el problema se ha observado que la estrategia más frecuente es excesivamente simplista. No obstante, entre el resto de participantes en el estudio sí se ha detectado variabilidad en cuanto a las estrategias seguidas (Tabla 1). En particular, es destacable que surgieron diferentes concepciones de área, como se puede observar en la Figura 2. Por otra parte, cabe resaltar que se han encontrado planteamientos de complejidad cognitiva que no se materializaron en una solución, habiendo casos en los que ni siquiera se hizo ningún cálculo (Figura 2f)). El tipo de pensamiento dominante entre los participantes en el estudio que abordaron el problema es el analítico. Este hecho contrasta con que la mayoría de los errores se han encontrado relacionados con procedimientos matemáticos elementales como el trabajo con unidades de medida (tanto la interpretación como el cambio de unidades) y el uso de escalas, que ha puesto de manifiesto dificultades a la hora de trabajar con diferentes contenidos integrados (medición y proporcionalidad). Se han observado también algunos participantes con concepciones poco sólidas del concepto de área, utilizando fórmulas que no pueden conducir a un área, dando áreas en unidades de longitud o estimando directamente áreas a través de longitudes. En lo que se refiere a las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007), destaca la existencia de respuestas que evidencian poca comprensión del problema planteado (Figura 3). Asimismo, cabe resaltar que las fases del ciclo en las que los estudiantes demostraron peor desempeño son la cuarta (trabajar matemáticamente) y la quinta (interpretación). Particularmente, se han observado numerosos casos en los que hay errores elementales de medición o de manipulación aritmética, así como de uso de escalas. También han sido frecuentes las carencias en cuanto a la interpretación del modelo, ya que ha habido una gran cantidad de estudiantes que proporcionaron un área en unidades incorrectas.

De este perfil se deduce que se deben trabajar con especial dedicación la medida (cambio de unidades, interpretación de unidades y refuerzo del concepto de unidad de medida) y el uso de escalas. Puede ser interesante trabajar de forma integrada diferentes contenidos como son la geometría, la medida y la proporcionalidad, los cuales aparecen juntos con facilidad y frecuencia en situaciones de la vida cotidiana. Dado que los participantes que mostraron mejor desempeño evidenciaron un tipo de pensamiento integrado y el estilo de pensamiento más frecuente fue el analítico, parece evidente la necesidad de potenciar el pensamiento visual a través de tareas y actividades de geometría sintética, de visión espacial y descomposición de figuras. También queda patente la necesidad de practicar de forma más acentuada los procedimientos elementales de cálculo, para evitar errores como los detectados, así como, para incrementar la motivación del alumnado hacia este tipo de tareas. Finalmente, resulta clave proponer tareas que doten al alumnado de herramientas para el diseño de estrategias de resolución de problemas, para lo que se puede hacer uso de las fases del ciclo de modelización con las que se ha trabajado en este estudio, y proponer diferentes estrategias e invitar al alumnado a razonar sobre cuál resultaría más idónea.

CONCLUSIONES

Se han analizado las destrezas de modelización de estudiantes para maestros en relación a las estrategias utilizadas y a los errores cometidos con el fin de perfilar sus necesidades formativas y se ha constatado la necesidad de reforzar el trabajo con unidades de medida, tareas de pensamiento visual y actividades que estimulen el desarrollo de estrategias para resolver problemas, sin descuidar el trabajo con las propiedades de las operaciones elementales de cálculo.

Esta investigación ha estado limitada por el problema utilizado, que ha permitido constatar necesidades formativas en relación a tan solo los procedimientos elementales que involucra, constituyendo así un factor de influencia (Mousoulides et al., 2008) sobre las habilidades que los estudiantes han mostrado y sesgando los resultados de la investigación. El número de participantes en el estudio, por otra parte, ha obligado a analizar gran cantidad de información que quizá haya impedido apreciar matices potencialmente útiles en el análisis de necesidades. De igual manera, una mayor riqueza de herramientas como las utilizadas por Mousoulides et al. (2008) o Gallart et al. (2014) o triangulaciones entre expertos nos proporcionarían una información más fiable sobre las destrezas de modelización de los alumnos. Estas limitaciones invitan a desarrollar un conjunto de estudios de caso para observar la actuación de grupos más reducidos con diferentes herramientas o triangulaciones entre diferentes grupos de expertos, que permita alcanzar mayor profundidad de análisis. Es de interés para esta línea de trabajo, por otra parte, el diseño de un conjunto de problemas exhaustivo en cuanto a las fases del ciclo de modelización y que minimice el sesgo de los resultados causado por el análisis de solo un problema. También sería útil analizar comparativamente las destrezas de modelización en relación al rendimiento en Matemáticas para contrastar el poder explicativo de la modelización respecto al desempeño matemático. Emplazamos alguna de estas investigaciones para el futuro.

Referencias

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 2007.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems, *Teaching Mathematics and Its Applications, 30*, 19-36.

Burkhardt, H. (2004). Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers. En H.W.Henn, y W. Blum, (Eds), *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education: Pre-Conference Volume* 53-58. Dortmund, Germany.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

DeLange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: CD-Press

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics, 39*(1-3), 111-129.

Hıdıroğlu, Ç. N., Dede, A. T., Kula-Ünver, S. y Bukova-Güzel, E. (2017). Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(3), 293-304.

Jacobs, G. J. y Durandt, R. (2017). Attitudes of pre-service mathematics teachers towards modelling: a South African inquiry. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(1), 61-84.

Mousoulides, N. G., Christou, C. y Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(3), 873-892.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematic*s. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115–124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society,

Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD. (2013a). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

OECD. (2013b). *Estímulos PISA de Matemáticas Liberados*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Pollak, H. (1987). Notes from a talk given at the MSEB Frameworks Conference. Minneapolis, EEUU.

Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 21- 41.

PERCEPCIONES SOBRE LAS COMPETENCIAS DEL FUTURO PROFESORADO DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Perceptions about the competences of future mathematics teachers in secondary education

Muñiz-Rodríguez, L.[a, b], Alonso, P.[a], Rodríguez-Muñiz, L.J.[a] y Valcke, M.[b]

[a]Universidad de Oviedo (España), [b]Universidad de Gante (Bélgica)

Resumen

La sustitución del antiguo Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) por el Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria (MFPES, en lo sucesivo) tenía como finalidad mejorar la calidad de la formación inicial del futuro profesorado de Educación Secundaria. Recientes investigaciones ponen de manifiesto que dicha reforma no ha conseguido del todo su propósito. En este trabajo, se presenta un estudio cuyo objetivo es evaluar la percepción sobre el nivel de desarrollo y adquisición de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas. El estudio consistió en una encuesta online en la que participaron 95 estudiantes, 29 titulados, 95 formadores de profesores, y 96 tutores de prácticas de diferentes universidades e institutos de Educación Secundaria de España. Los resultados indican que el nivel de desarrollo y adquisición percibido por los cuatro grupos muestrales es bajo en todas las competencias analizadas.

Palabras clave: *competencias docentes, Educación Secundaria, formación inicial del profesorado, formadores de profesores, futuro profesorado de matemáticas.*

Abstract

The replacement of the former Certificate of Pedagogical Aptitude by the Master Degree in Teacher Training aimed at improving the quality of the initial education of future teachers in secondary education. Available research reveals how the reforms have not fully achieved their purpose. In this paper, we present a study aiming at assessing the perception about the level of development and attainment of teaching competences during the Master Degree in Teacher Training in the mathematics speciality. The study consisted on an online survey conducted by 95 student teachers, 29 graduate teachers, 95 teacher educators, and 96 mentors from different universities and secondary schools in Spain. The results indicate that the level of development and attainment perceived by the four sample groups is low in all analysed competences.

Keywords: *teaching competences, secondary education, initial teacher education, teacher educators, future mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

Desde hace décadas, existe una creciente preocupación, tanto a nivel nacional como internacional, por la formación inicial del futuro profesorado de matemáticas en Educación Secundaria (Commission of the European Communities, 2007; Santos y Lorenzo, 2015). En España, la reforma más reciente en materia de formación inicial docente supuso la sustitución del antiguo CAP por el actual MFPES, cuya implantación se llevó a cabo a partir del curso académico 2009/2010. El objetivo inicial del nuevo programa era mejorar la calidad de la formación inicial docente, reduciendo el desequilibrio entre la componente teórica y la práctica, y promoviendo su carácter profesionalizante (Santos y Lorenzo, 2015; Valdés y Bolívar, 2014).

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2017). Percepciones sobre las competencias del futuro profesorado de matemáticas en Educación Secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 357-366). Zaragoza: SEIEM.

Sin embargo, recientes investigaciones ponen de manifiesto que dicha reforma no ha conseguido del todo su propósito (Santos y Lorenzo, 2015). La literatura a nivel nacional sigue cuestionando la calidad del MFPES debido, entre otros aspectos, a la autonomía concedida a las universidades (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2016a; Viñao, 2013), la fragmentación de su estructura (Santos y Lorenzo, 2015; Valdés y Bolívar, 2011), el heterogéneo bagaje matemático de los estudiantes que acceden al máster (Font, 2013, López, Miralles y Viader, 2013; Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2016b), la desigual conexión entre las universidades y los institutos de Educación Secundaria (Rico, Mallavibarrena y Deulofeu, 2009), así como la en ocasiones escasa experiencia de los formadores de profesores (Gutiérrez, 2011).

El trabajo que se presenta, como parte de una investigación más amplia en el contexto de los programas de formación inicial docente para futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria en España, tiene como principal objetivo analizar la percepción sobre el nivel de desarrollo y adquisición de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas. Para enriquecer las conclusiones del estudio, se adopta un enfoque transversal, que busca comparar las percepciones de cuatro grupos poblacionales: estudiantes matriculados en la especialidad de matemáticas del MFPES en el curso académico 2015/2016, titulados en la especialidad de matemáticas del MFPES desde su implementación en el curso académico 2009/2010, formadores de profesores en la especialidad de matemáticas del MFPES, y tutores de prácticas en la especialidad de matemáticas del MFPES en institutos de Educación Secundaria. El diseño metodológico del estudio se apoya en el modelo de Scheerens (1990), tal y como se explica más adelante. Las preguntas de investigación que se plantean son:

1. ¿Cuál es el nivel de desarrollo de competencias docentes percibido tanto por estudiantes y titulados, como por formadores de profesores y tutores de prácticas del MFPES en la especialidad de matemáticas?
2. ¿Cuál es el nivel de adquisición de competencias docentes percibido tanto por estudiantes y titulados, como por formadores de profesores y tutores de prácticas del MFPES en la especialidad de matemáticas?

El trabajo se estructura como sigue: en primer lugar, se presenta un marco teórico sobre competencias docentes para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria; en segundo lugar, se describe el diseño metodológico y se aporta información sobre la población y la muestra, y la recogida y el análisis de datos; por último, se presentan tanto los resultados obtenidos como las conclusiones derivadas del estudio.

FUNDAMENTOS

La valoración de la calidad de un programa de formación inicial docente se determina a partir de diversos factores que influyen en el grado en que dicho programa alcanza sus objetivos, determinados en gran medida por el entorno en el que se enmarca (Rico et al., 2003). El principal objetivo del MFPES es proporcionar al futuro profesorado una serie de competencias que le capaciten para el ejercicio de su profesión (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007), entendiendo por competencia el conjunto de conocimientos, habilidades, valores y aptitudes que conducen al desarrollo efectivo de la docencia, en un contexto multidimensional que abarca al propio docente, sus compañeros, al alumnado, sus familias, el centro y, por ende, al sistema educativo en su sentido más amplio (European Commission, 2013). En particular, Darling-Hammond (2006) expone que un programa de formación inicial docente debe sustentarse, entre otros aspectos, en un marco de competencias sobre conocimientos y prácticas profesionales bien definido, garantizando una conexión fundamentada entre la componente teórica y la práctica.

En la literatura podemos encontrar diferentes modelos teóricos que buscan identificar y caracterizar las competencias del profesor para enseñar matemáticas (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008; Mishra y Koehler, 2006: Shulman, 1986), aplicados posteriormente en numerosas investigaciones para evaluar la formación inicial del profesorado (Batanero, Gómez, Contreras, y Díaz, 2015; Gonzato, Godino, Contreras y Fernández, 2013; Vásquez y Alsina, 2015). Desde este referente teórico, y teniendo también en cuenta marcos de competencias existentes a nivel internacional y desarrollados por diferentes organizaciones educativas (AAMT, 2006; AMTE, 2017; NCTM, 2012), se diseñó y validó, en una fase preliminar a este estudio, un marco de treinta y tres competencias para futuros docentes de matemáticas en Educación Secundaria, clasificadas en doce áreas (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2017).

Ahora bien, para poder determinar si un docente en formación está capacitado para enseñar matemáticas es imprescindible definir indicadores que permitan evaluar el nivel de desarrollo y adquisición de las competencias. Algunas investigaciones previas demuestran que estas medidas promueven la autorregulación del futuro profesorado sobre sus propias competencias y el desarrollo de intervenciones educativas que intentan mejorar la calidad y la excelencia de la enseñanza (European Commission, 2013). Sin embargo, en la literatura parece no existir una herramienta consensuada para la evaluación de competencias. Algunos autores se inclinan por el uso de portfolios (Seckel y Font, 2016), videoclips (Hatch, Shuttleworth, Jaffee y Marri, 2016), o simulaciones (Dotger, Masingila, Bearkland y Dotger, 2015). Otro enfoque recurrente en la literatura es la evaluación de competencias a partir de las percepciones del propio profesorado en formación (Serrano y Pontes, 2015; Tatto et al., 2012). En este estudio, y en línea con investigaciones anteriores, se analiza el nivel de desarrollo y adquisición de competencias docentes utilizando como indicador las percepciones de estudiantes, titulados, formadores de profesores, y tutores de prácticas del MFPES en la especialidad de matemáticas. Así, entendemos por percepción el propio juicio de los individuos sobre sus capacidades para completar satisfactoriamente ciertas tareas en relación con las competencias.

METODOLOGÍA

El diseño metodológico de este estudio se guía por el modelo CIPO (Scheerens, 1990). Este modelo identifica cuatro componentes – Contexto, Input, Proceso, y Output – que definen la formación docente como un sistema de producción en el cual tiene lugar el desarrollo del futuro profesorado a través de un proceso influenciado por el contexto (véase figura 1). En nuestro caso, el contexto viene establecido por las características del MFPES descritas en la orden ministerial que lo regula (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007). El input está determinado por el perfil de los estudiantes que acceden a la especialidad de matemáticas del MFPES, los formadores de profesores y los tutores de prácticas. El proceso se refiere a todas las componentes que caracterizan un plan de formación – la organización y planificación curricular, el diseño de actividades e intervenciones didácticas, los criterios e instrumentos de evaluación, etc. – y que conducen a la consecución de competencias profesionales. Por último, el output se establece mediante, por un lado, el perfil de los titulados y, por otro lado, el grado en que el MFPES logra los objetivos propuestos, es decir, la medida en que el futuro profesorado adquiere las competencias establecidas.

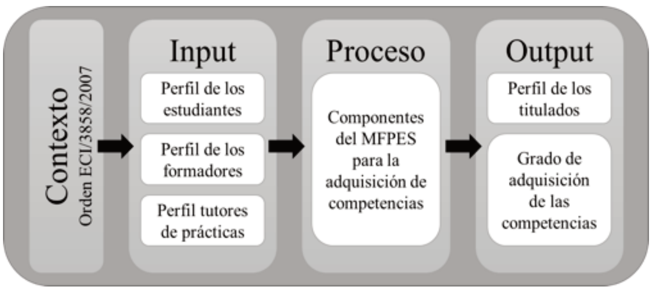


Figura 1. Modelo CIPO

Población y muestra

La población de referencia para este estudio está formada por los estudiantes, titulados, formadores de profesores y tutores de prácticas del MFPES en la especialidad de matemáticas. A pesar de las reiteradas consultas a sociedades y organismos, como la Real Sociedad Matemática Española (RSME) o la Conferencia de Decanos de Matemáticas (CDM), ha sido imposible concretar el tamaño y la distribución de los cuatro grupos poblacionales. Los datos y cifras del sistema universitario español publicados anualmente por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016) son de carácter genérico, sin diferenciar entre las distintas especialidades. Asimismo, la ley de protección de datos, dificultó el acceso a la población a través de las propias universidades. Por todo ello, se optó por un muestreo no probabilístico incidental, con una muestra resultante de 95 estudiantes, 29 profesores titulados, 95 formadores de profesores, y 96 tutores de prácticas en la especialidad de matemáticas del MFPES, que representan un total de 47 universidades españolas y 87 institutos de Educación Secundaria (véase tabla 1).

Tabla 1. Perfil de los grupos muestrales

	Estudiantes (n_1 = 95)	Titulados (n_2 = 29)	Formadores (n_3 = 95)	Tutores (n_4 = 96)
Edad media en años (DT)	29,35 (7,331)	31,28 (8,375)		
Sexo				
Mujer	58,9%	62,1%	40,0%	51,0%
Hombre	41,1%	37,9%	60,0%	49,0%
Titulación				
Matemáticas	29,5%	62,1%		
Ingeniería	53,7%	20,7%		
Otros	16,8%	17,2%		
Experiencia media en años (DT)			7,29 (7,246)	4,35 (5,608)
Formación específica				
Sí			28,4%	14,6%
No			71,6%	85,4%

Nota. DT = Desviación típica

Recogida y análisis de datos

La recogida de datos se realizó mediante un cuestionario online, diseñado y validado en un estudio piloto previo (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2016b). El instrumento toma como referencia el marco de treinta y tres competencias, clasificadas en doce áreas, presentado con anterioridad (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2017). Se desarrollaron tres versiones del cuestionario, adaptadas a las características de cada grupo muestral:

- El cuestionario de los estudiantes y titulados diferencia dos secciones de preguntas, con treinta y tres ítems cada una, uno por cada competencia. En la primera sección, los participantes debían indicar su percepción sobre el nivel de desarrollo de cada competencia durante el MFPES, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. En la segunda sección, debían indicar su percepción sobre el nivel de adquisición de cada competencia.
- El cuestionario de los formadores de profesores se compone de treinta y tres ítems, uno por cada competencia. Los participantes debían indicar su percepción sobre el nivel de desarrollo de cada competencia durante el MFPES desde un punto de vista teórico.
- El cuestionario de los tutores de prácticas se compone de treinta y tres ítems, uno por cada competencia. Los participantes debían indicar su percepción sobre el nivel de desarrollo de cada competencia durante el MFPES desde un punto de vista práctico.

Para cada ítem se utiliza una escala Likert de siete puntos, que varía desde (1) *En absoluto* hasta (7) *En gran medida*. El cuestionario se diseñó mediante la plataforma LimeSurvey®, una aplicación libre que permite el diseño, publicación, administración y recopilación de datos de una encuesta online. Todos los participantes fueron contactados vía correo electrónico.

El posterior análisis de datos se llevó a cabo mediante el software SPSS®. En primer lugar, se calculó, para cada área de competencias, una nueva variable definida como la suma de los valores de las competencias contenidas en dicha área. En segundo lugar, se realizó un análisis descriptivo de las variables resultantes. Por último, se emplearon pruebas no paramétricas – la hipótesis de normalidad para cada variable fue rechazada – para determinar si existen diferencias significativas entre, por un lado, los grupos muestrales y, por otro lado, la componente teórica y la práctica. Además, se analizó, tanto para los estudiantes como para los titulados, si existen diferencias significativas, en cada área de competencias, entre el nivel de adquisición percibido y el nivel deseado, tomando como referencia el modelo *mastery learning* de Zimmerman y Dibenedetto (2008) que establece un nivel mínimo del 80%.

RESULTADOS

La tabla 2 resume, para cada grupo muestral, la media (M) y la desviación típica (DT) sobre la escala Likert de siete puntos del nivel de desarrollo percibido en cada área de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas. En el caso de estudiantes y titulados se distingue entre la componente teórica y la práctica.

Tabla 2. Nivel de desarrollo percibido en cada área competencias docentes

	Estudiantes		Titulados		Formadores	Tutores
Área	Teoría M (DT)	Práctica M (DT)	Teoría M (DT)	Práctica M (DT)	Teoría M (DT)	Práctica M (DT)
CM	3,85 (1,69)	3,26 (1,60)	3,74 (1,70)	3,29 (1,68)	4,21 (1,59)	3,66 (1,46)
CDM	3,79 (1,53)	3,68 (1,61)	4,28 (1,73)	3,97 (1,74)	4,58 (1,27)	4,83 (1,20)
PEA	4,19 (1,48)	3,88 (1,64)	4,57 (1,63)	4,25 (1,80)	5,07 (1,25)	4,89 (1,25)
GA	3,61 (1,61)	3,50 (1,69)	4,53 (1,70)	4,02 (1,77)	4,73 (1,28)	5,13 (1,32)
PE	4,47 (1,49)	4,15 (1,64)	4,94 (1,58)	4,66 (1,79)	5,22 (1,18)	5,17 (1,25)
ET	3,62 (1,70)	3,29 (1,68)	4,47 (1,86)	4,33 (1,89)	4,50 (1,32)	4,75 (1,44)
DPE	4,16 (1,70)	3,56(1,77)	4,93 (1,66)	4,32 (1,88)	4,40 (1,49)	4,79 (1,40)
IAD	3,98 (1,70)	3,34 (1,78)	4,76 (1,75)	3,95 (1,74)	4,31 (1,44)	4,71 (1,50)
TIC	4,57 (1,62)	4,02 (1,98)	5,41 (1,72)	5,21 (1,93)	5,44 (1,46)	4,96 (1,38)
HC	3,67 (1,88)	3,47 (1,96)	4,69 (1,63)	4,45 (2,01)	4,57 (1,54)	4,92 (1,51)
PCE	3,23 (1,67)	2,79 (1,69)	4,00 (1,87)	3,67 (1,97)	3,83 (1,49)	3,87 (1,69)
EP	4,02 (1,75)	3,72 (1,92)	4,71 (1,81)	4,45 (2,02)	4,87 (1,52)	4,86 (1,44)

Nota. M = Media. DT = Desviación típica. CM = Conocimiento matemático. CDM = Conocimiento didáctico matemático. PEA = Procesos de enseñanza y aprendizaje. GA = Gestión del aula. PE = Planificación de las enseñanzas. ET = Evaluación y tutoría. DPE = Desarrollo personal del estudiante. IAD = Inclusión y atención a la diversidad. TIC = Tecnología de la información y la comunicación. HC = Habilidades comunicativas. PCE = Participación en la comunidad educativa. EP = Ética profesional.

En general, la percepción de los cuatro grupos muestrales coincide en que el nivel de desarrollo en todas las áreas de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas es bajo. La prueba de Kruskal-Wallis demuestra que el comportamiento de los cuatro grupos es heterogéneo en cada una de las áreas de competencias, excepto en la que se refiere al conocimiento matemático. En este caso, observamos que los formadores de profesores perciben un mayor nivel de desarrollo en comparación con los otros tres grupos muestrales. Si bien, en general, las respuestas de los estudiantes y titulados reflejan valores más bajos que las de los formadores de profesores y tutores de prácticas.

Por otro lado, tanto los estudiantes como los titulados perciben mayores niveles de desarrollo en la componente teórica que en la práctica. La prueba de Wilcoxon (véase tabla 3) confirma que en la mayoría de los casos la diferencia entre estas percepciones es altamente significativa, a favor de la componente teórica.

Tabla 3. Diferencias entre la componente teórica y la práctica en cada área de competencias docentes

Área de competencias	Estudiantes Z	Titulados Z
Conocimiento matemático	-5,113**	-2,174*
Conocimiento didáctico matemático	-1,916	-1,991*
Procesos de enseñanza y aprendizaje	-3,323**	-2,263*
Gestión del aula	-1,309	-2,405*
Planificación de las enseñanzas	-3,447**	-2,213*
Evaluación y tutoría	-3,440**	-1,632
Desarrollo personal del estudiante	-4,615**	-3,044**
Inclusión y atención a la diversidad	-5,107**	-3,104**
Tecnologías de la información y la comunicación	-4,143**	-0,880
Habilidades comunicativas	-1,635	-1,143
Participación en la comunidad educativa	-3,723**	-1,179
Ética profesional	-2,663**	-1,006

Nota. Z = Estadístico para la prueba de Wilcoxon. Nivel de significación: *p < 0,05; ** p < 0,01.

Por último, se analizó, tanto para los estudiantes como para los titulados, si existen diferencias significativas, en cada área de competencias, entre el nivel de adquisición percibido y el nivel deseado, tomando como referencia el modelo *mastery learning* de Zimmerman y Dibenedetto (2008), que establece un nivel mínimo del 80%. Sobre la escala Likert de siete puntos, el nivel deseado se encuentra en torno a una puntuación de 5,6. Los resultados de la tabla 4 muestran niveles de adquisición percibidos próximos a 3,5. Además, la prueba de Wilcoxon confirma que existen diferencias significativas entre ambos indicadores, siendo el nivel de adquisición percibido inferior al nivel deseado en todas las áreas de competencias (valor del estadístico negativo).

Tabla 4. Diferencias entre el nivel de adquisición percibido y el nivel deseado en cada área de competencias

Área de competencias	Estudiantes		Titulados	
	M (DT)	Z	M (DT)	Z
Conocimiento matemático	3,46 (1,79)	–7,849**	3,53 (2,00)	–4,286**
Conocimiento didáctico matemático	3,67 (1,59)	–8,096**	4,19 (1,81)	–3,984**
Procesos de enseñanza y aprendizaje	4,06 (1,59)	–7,792**	4,43 (1,68)	–3,835**
Gestión del aula	3,62 (1,61)	–7,883**	4,09 (1,68)	–4,246**
Planificación de las enseñanzas	4,29 (1,60)	–7,434**	4,64 (1,67)	–3,583**
Evaluación y tutoría	3,71 (1,81)	–7,713**	4,26 (1,85)	–3,886**
Desarrollo personal del estudiante	3,96 (1,76)	–7,548**	4,56 (1,73)	–3,742**
Inclusión y atención a la diversidad	3,73 (1,73)	–7,787**	4,40 (1,71)	–4,006**
Tecnologías de la información y comunicación	4,31 (1,85)	–6,789**	5,07 (1,87)	–2,525*
Habilidades comunicativas	3,72 (1,87)	–7,490**	4,21 (1,80)	–3,874**
Participación en la comunidad educativa	3,35 (1,72)	–8,008**	3,74 (1,69)	–4,389**
Ética profesional	3,79 (1,76)	–7,735**	4,34 (1,95)	–3,701**

Nota. M = Media. DT = Desviación típica. Z = Estadístico para la prueba de Wilcoxon.
Nivel de significación: *p < 0,05; ** p < 0,01.

DISCUSIÓN

Los resultados anteriores permiten responder a las preguntas de investigación planteadas y, en consecuencia, evaluar si el MFPES ha alcanzado su propósito inicial. En general, la percepción de los cuatro grupos muestrales coincide en que el nivel de desarrollo de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas es bajo, tanto en la componente teórica como en la práctica. Además, el comportamiento de los cuatro grupos es heterogéneo en todas las áreas de competencias, excepto en la que se refiere al conocimiento matemático. Esta salvedad confirma los resultados de investigaciones anteriores que cuestionan el conocimiento matemático del alumnado que accede al MFPES en la especialidad de matemáticas (López, Miralles y Viader, 2013; Santos y Lorenzo, 2015). Si el conocimiento matemático del profesorado de matemáticas en formación es insuficiente, es comprensible que los formadores de profesores perciban la necesidad de desarrollar en mayor medida esta competencia durante la componente teórica. Si bien, los estudiantes y titulados parecen no compartir esta percepción. Font (2013) explica que la presuposición de que la competencia en conocimiento matemático ya se ha desarrollado con anterioridad no resulta exenta de problemas. En este sentido, algunos formadores de profesores cuestionan la medida en que esta competencia debe ser desarrollada durante el MFPES.

Las diferencias identificadas entre la componente teórica y la práctica se explican por la falta de conexión entre las universidades – o formadores de profesores – y los institutos de Educación Secundaria – o tutores de prácticas. En consecuencia, cabe esperar que los estudiantes y titulados perciban que la formación teórica que reciben no coincide con la realidad experimentada durante sus experiencias prácticas, y viceversa. Investigaciones previas avalan la necesidad de establecer vínculos más estrechos entre las universidades y los institutos de Educación Secundaria, dada su influencia en la calidad de la formación inicial docente (Korthagen y Kessels, 1999; Rico, Mallavibarrena y Deulofeu, 2009; Schleicher, 2012).

Como consecuencia del bajo nivel de desarrollo percibido, los estudiantes y titulados del MFPES en la especialidad de matemáticas perciben un débil nivel de adquisición de las competencias docentes y, por tanto, se sienten escasamente capacitados para el ejercicio de la profesión docente. En este sentido, los datos de TALIS 2013 muestran que España no es una excepción en el marco de la OCDE (Mejía, 2014). Lo anterior sugiere la necesidad de implementar medidas que garanticen un nivel de desarrollo y, en consecuencia, de adquisición adecuado de competencias docentes durante el MFPES en la especialidad de matemáticas, prestando especial atención a aquellas que presentan niveles más bajos. Por un lado, siguiendo el ejemplo de otros países europeos, sería conveniente definir un nivel de competencia mínimo, imprescindible para la obtención del título que habilita para el ejercicio de la profesión docente. Por otro lado, parece adecuado introducir actividades didácticas alternativas en la especialidad de matemáticas del MFPES que garanticen la consecución de las competencias docentes. En este sentido, el siguiente paso de esta investigación será desarrollar una propuesta de intervención basada en el uso de video-clips, a partir de las carencias detectadas en el presente estudio. Investigaciones previas secundan la utilización de indicadores basados en las percepciones del profesorado en formación para el desarrollo de intervenciones educativas (European Commission, 2013). Esta herramienta es recurrente en la literatura, puesto que permite al profesorado en formación reflexionar y reaccionar ante situaciones reales de aula sin poner el aprendizaje del alumnado en riesgo.

Esta investigación contribuye en varios aspectos a la literatura existente sobre la formación inicial del futuro profesorado de matemáticas en Educación Secundaria. En primer lugar, este estudio tiene carácter pionero en España. Si bien en 2008 se desarrolló a nivel internacional un estudio análogo, el TEDS-M (Teacher and Education Development Study in Mathematics), la participación española en el mismo quedó limitada al futuro profesorado de Educación Primaria, debido a las dificultades encontradas durante la recogida de datos en el caso de los futuros profesores de Educación Secundaria (Sanz y Martin, 2014; Tatto et al., 2012). Esta aportación supone por tanto un avance a nivel nacional, y es a su vez relevante debido a la combinación de múltiples perspectivas. Además, pone a disposición de la comunidad instrumentos e indicadores validados para analizar la consecución de competencias docentes para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria.

Como limitación de este estudio hay que señalar el reducido tamaño muestral del grupo de profesores titulados. Además, el uso de un muestreo no probabilístico incidental puede haber sesgado los resultados. Por ejemplo, quizás sólo aquellos individuos con una percepción menos positiva sobre el MFPES tuvieron mayor predisposición para participar. Este hecho, sumado a los motivos que provocaron la ausencia de la participación española en el TEDS-M (Sanz y Martin, 2014; Tatto et al., 2012), sugieren el desarrollo de una base de datos pública y centralizada de estudiantes y titulados del MFPES en todas las especialidades, en particular, en la de matemáticas. Las pruebas de evaluación tanto a nivel nacional como internacional demuestran cómo la disponibilidad y accesibilidad a bases de datos sistematizadas ayudan a orientar las decisiones políticas.

Las percepciones de los estudiantes, titulados, formadores de profesores y tutores de prácticas sobre el nivel de desarrollo y adquisición de competencias docentes parecen revelar una situación crítica en España. Teniendo en cuenta la influencia que tiene la formación inicial del profesorado sobre sus futuras prácticas docentes (Darling-Hammond et al., 2005) y, en consecuencia, sobre el rendimiento del alumnado (Hattie, 2009), es necesario adoptar medidas que garanticen un sistema de formación docente de calidad, como las propuestas anteriormente. Los responsables de la política educativa deberían reflexionar sobre esta situación e implementar acciones que fomenten la adquisición de competencias.

AGRADECIMIENTOS

El equipo de esta investigación agradece a todos los participantes su colaboración e interés durante el desarrollo de este estudio. Sus percepciones como estudiantes, titulados, formadores de profesores, y tutores de prácticas del MFPES en la especialidad de matemáticas han sido de gran utilidad para lograr el objetivo de esta investigación.

Referencias

AAMT (Australian Association of Mathematics Teachers). (2006). *Standards for excellence in teaching mathematics in Australian schools*. Recuperado de http://www.aamt.edu.au/Better-teaching/Standards/Standards-document

AMTE (Association of Mathematics Teacher Educators). (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Recuperado de https://amte.net/standards

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa, 10*(1).

Commission of the European Communities. (2007). *Communication from the commission to the council and the European parliament. Improving the quality of teacher education*. Recuperado de http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:52007DC0392&from=EN

Darling-Hammond, L. (2006). Constructing 21st-century teacher education. *Journal of Teacher Education, 57*(3), 300-314.

Darling-Hammond, L., Hammerness, K., Grossman, P., Rust, F., y Shulman, L. (2005). The design of teacher education programs. En L. Darling-Hammond, y K. Hammerness (Eds.), *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do* (pp. 390-441). USA: Jossey Bass.

Dotger, B., Masingila, J., Bearkland, M., y Dotger, S. (2015). Exploring iconic interpretation and mathematics teacher development through clinical simulations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 577-601.

European Commission. (2013). *Supporting teacher competence development for better learning outcome*s. European Commission Education and Training

Font, V. (2013). La formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria en España. *Revista Binacional Brasil Argentina, 2*(2), 49-62.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos de profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, A., y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

Gutiérrez, J. M. (2011). La formación inicial del profesorado de secundaria. Del CAP al máster. *CEE Participación Educativa, 17*, 96-107.

Hatch, T., Shuttleworth, J., Jaffee, A. T., y Marri, A. (2016). Videos, pairs, and peers: What connects theory and practice in teacher education? *Teaching and Teacher Education, 59*, 274-284.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Taylor & Francis group.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Korthagen, F. A., y Kessels, J. P. (1999). Linking theory and practice: Changing the pedagogy of teacher education. *Educational Researcher, 28*(4), 4-17.

López, M., Miralles, J., y Viader, P. (2013). Tres años del máster de formación del profesorado de secundaria de matemáticas. *Suma, 72*, 31-36.

Mejía, J. C. (2014). TALIS 2013. *Estudio internacional de la enseñanza y el aprendizaje*. Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2016). *Datos y cifras del sistema universitario español. Curso 2015-2016*. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dms/mecd/educacion-mecd/areas-educacion/universidades/estadisticas-informes/datos-cifras/datos-y-cifras-SUE-2015-16-web.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, 312, 53751-53753.

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teacher College Record, 108*(6), 1017-1054.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Valcke, M. (2016a). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación, 372*, 111-140.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2016b). Validación de un instrumento para evaluar el Máster en Formación del Profesorado: estudio piloto en la especialidad de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 377-386). Málaga: SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2017). Developing and validating a competence framework for secondary mathematics student teachers through a Delphi method. *Journal of Education for Teaching*. doi: 10.1080/02607476.2017.1296539.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2012). *NCTM CAEP Standards*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/CAEP_Standards/NCTM%20CAEP%20Standards%202012%20-%20Secondary.pdf

Rico, L., Gómez, P., Moreno, M. F., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F., y González, M. J. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 289-297). Granada: SEIEM.

Rico, L., Mallavibarrena, R., y Deulofeu, J. (2009). Seminario sobre el prácticum del Máster de Profesor de Secundaria en la especialidad de matemáticas. Informe final. *La Gaceta de la RSME, 12*(2), 265-274.

Santos, M. A., y Lorenzo, M. (2015). La formación del profesorado de educación secundaria: pensando en la reconstrucción del proyecto universitario. *Revista Española de Pedagogía, 261*, 479-492.

Sanz, I., y Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En González, M. T., Codes, M., Arnau, D., y Ortega, T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.

Scheerens, J. (1990). School effectiveness research and the development of process indicators of school functioning. *School Effectiveness and School Improvement, 1*(1), 61-80.

Schleicher, A. (2012). *Preparing teachers and developing school leaders for the 21st century: Lessons from around the world*. Paris: OECD Publishing.

Seckel, M. J. y Font, V. (2016). El portafolio como herramienta para desarrollar y evaluar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 499-508). Málaga: SEIEM.

Serrano, R., y Pontes, A. (2015). Nivel de desarrollo de las competencias y objetivos generales del Máster Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria. *Perfiles educativos, 37*(150), 39-55.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., … y Reckase, M. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: IEA.

Valdés, R., y Bolívar, A. (2014). La experiencia española de formación del profesorado: El Máster en Educación Secundaria. *Ensino Em Re-Vista, 21*(1), 159-173.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2015). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas XIX* (pp. 511-520). Alicante: SEIEM.

Viñao, A. (2013). Modelos de formación inicial del profesorado de educación secundaria en España (siglos XIX-XXI). *Revista Española de Educación Comparada, 22*, 19-37.

Zimmerman, B. J., y Dibenedetto, M. K. (2008). Mastery learning and assessment: Implications for students and teachers in an era of high-stakes testing. *Psychology in the Schools, 45*(3), 206-216.

A LOS FUTUROS MAESTROS NO LES AGRADAN LAS MATEMÁTICAS… PERO LAS CONSIDERAN ÚTILES

Pre-service teachers do not like mathematics… but they find them useful

Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A.

Universidad de Murcia

Resumen

Para averiguar si a los futuros maestros les agradan las Matemáticas y las consideran útiles se eligió una muestra de 976 estudiantes del Grado de Maestro de Primaria en los cursos donde se imparten asignaturas de Matemáticas a lo largo de cinco cursos académicos. Se ha obtenido que a tres de cada cinco estudiantes no les agradan las Matemáticas y que uno de cada cinco no le encuentra utilidad, que los hombres presentan mayor agrado hacia las Matemáticas que las mujeres y que las consideran útiles por igual hombres y mujeres. Es en 4.º donde les agradan más y donde encuentran mayor utilidad. Consideran las Matemáticas como una materia muy necesaria en sus estudios y no les divierte hablar con otros de Matemáticas.

Palabras clave: *matemáticas, agrado, utilidad, maestros, actitudes.*

Abstract

In order to know if future teachers enjoy Mathematics and consider them useful, 976 Primary Education Univesity Students were surveyed during five academic years. The results show that 3 in 5 students do not enjoy Mathematics; that 1 in 5 do not find Mathematics useful; that men enjoy Mathematics more than women; and that Mathematics are considered as equally important by men and women. It is in the fourth year when students enjoy Mathematics the most and when the find them the most useful. These students consider mathematics a very important subject-matter in their studies and they do not enjoy talking about Mathematics with other people.

Keywords: *mathematics, liking, usefulness, teacher, attitudes.*

INTRODUCCIÓN

Los maestros son la piedra angular en el proceso educativo de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. De ellos depende fundamentalmente en el periodo hasta los 12 años el agrado o desagrado de los alumnos hacia las Matemáticas. Maroto, Hidalgo, Ortega y Palacios (2013) indican que "la formación inicial y permanente del docente es un factor de calidad de primer orden… y los profesores que admiten abiertamente que no les gustan las matemáticas es probable que influyan en las actitudes de sus alumnos hacia la asignatura" (p. 2). A continuación se investiga si a los futuros maestros les agradan y si las encuentran útiles utilizando una muestra a lo largo de cinco cursos académicos.

MARCO TEÓRICO

Según Auzmendi (1992) el factor Agrado "hace referencia al aspecto de agrado o disfrute que provoca el trabajo matemático" (p. 86) y el factor Utilidad "hace referencia al valor que el estudiante otorga a las matemáticas, a la utilidad que él percibe que puede tener esta materia para su futura vida profesional" (p. 87). Utilidad y Agrado de las Matemáticas en el futuro puede interpretarse como "la satisfacción que siente el estudiante hacia el estudio de las matemáticas" (Mato, 2006, p. 310). Los

Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2017). A los futuros maestros no les agradan las Matemáticas… pero las consideran útiles. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 367-376). Zaragoza: SEIEM.

factores Agrado y Utilidad forman parte de la escala de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi (1992) y es necesario conocerlos en la formación inicial de los futuros maestros porque un docente al que le gustan las Matemáticas y reconoce su utilidad transmitirá mejor los conocimientos matemáticos a sus alumnos.

Auzmendi (1992), Caballero (2013), Casas, León, Maz, Jiménez y Madrid (2016), Fernández y Aguirre (2010), Fernández, Solano, Rizzo, Gomezescobar, Iglesias y Espinosa (2016), Flores y Auzmendi (2015), Gil, Guerrero y Blanco (2006), Gómez-Chacón (2016), Hidalgo, Maroto y Palacios (2004, 2015), León, Maz y Jiménez (2015), Mato (2006), Maroto et al. (2013), Maroto (2015), Mato (2006), Mato, Espiñeira y Chao (2014), Naya, Soneira, Mato y de la Torre (2014, 2015), Nortes y Nortes (2014), Palacios, Arias y Arias (2014), Pérez-Tyteca, Monje y Castro (2013), Soneira., Naya-Riveiro, de la Torre y Mato (2016), presentan investigaciones sobre actitudes, considerando los factores de agrado y utilidad, muchas de ellas utilizando como participantes futuros maestros.

Mato (2006) aplicó a una muestra de 1220 alumnos de los cuatro cursos de la ESO (586 chicos y 634 chicas), un cuestionario de actitud hacia las Matemáticas que previamente había elaborado, que tenía dos factores: 1) La actitud del profesor percibida por el alumno y 2) Agrado y Utilidad de las Matemáticas en el futuro, obteniendo una media en este segundo factor de 2.96 y una desviación típica de 0.95, en una escala tipo Likert de 1 a 5, viendo que no existen diferencias significativas por sexo.

Flores y Auzmendi (2015) a una muestra de 182 estudiantes universitarios (45% hombres y 55% mujeres) de edad media 21 años y edades comprendidas entre 16 y 24 años, de una universidad de Nicaragua, aplicaron la Escala de Actitudes de Auzmendi. Obtuvieron un índice de fiabilidad de Cronbach para Agrado de .788 y de Utilidad de .740, y una correlación entre estos dos factores de .703. La media del factor Agrado fue de 3.11 y del de Utilidad de 3.48, en una escala tipo Likert de 1 a 5.

Fernández et al. (2016) aplicaron la Escala de Actitudes de Auzmendi a una muestra de 205 individuos, 53 maestros en ejercicio y 152 estudiantes de los Grados de Infantil y Primaria, obteniendo una estructura en dos factores al aplicar un análisis factorial. El primer factor contiene ítems de Ansiedad y el segundo factor de Agrado, que explican el 41.84% y el 10.01% de la varianza, respectivamente, aunque lo dejan en un modelo con un solo factor de ansiedad con 7 ítems.

Hidalgo et al. (2004) en un estudio donde participan 3187 alumnos pertenecientes a 3.º de Primaria (604), 5.º de Primaria (913), 1.º ESO (414), 3.º ESO (419), 1.º Bachillerato (357) y 1.º Universidad (480) han aplicado un cuestionario de dominio afectivo. En su estudio resaltan el sentimiento de influencia negativa de los profesores sobre el gusto por las Matemáticas en el alumnado que aumenta a la par que lo hace el nivel educativo, ya que en 3.º de Primaria el 86.90% de los alumnos consideran a las Matemáticas una asignatura divertida y en 1.º Universidad el 57.64%.

Mato et al. (2014) a una muestra de 1180 alumnos de 3.º, 4.º, 5.º y 6.º de Primaria de A Coruña les pasaron la escala de Mato (2006), que mide la actitud del profesor percibida por el alumno y agrado y utilidad de las Matemáticas en el futuro obteniendo en este segundo factor una media de 3.95 y una desviación típica de 0.88 en una escala Likert de 1 a 5. En las conclusiones matizan que la utilidad de las Matemáticas presenta un descenso más acentuado conforme avanza de curso.

Fernández y Aguirre (2010) aplicaron la escala de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi a 146 estudiantes del Grado de Maestro de Primaria en Cuenca, el 68% mujeres y el 32% hombres de edades entre 18 y 20 años en los que el 31% proviene del bachillerato de Humanidades (sin Matemáticas obligatorias), el 25% de Ciencias de la Salud-Tecnología y el 44% de Ciencias Sociales. En el factor Agrado la media es 2.90 y en el de Utilidad de 2.95.

León et al. (2015) aplicaron el cuestionario de Actitudes de Auzmendi a una muestra de 183 estudiantes del Grado de Maestro de Primaria de la universidad de Córdoba de los que 52 eran de 1.º y 131 de 3.º. A los primeros en la primera semana del curso 13/14 y a los de 3.º en la última semana para así valorar las actitudes antes y después de cursar las tres asignaturas de Matemáticas de la titulación. La fiabilidad alfa fue en Agrado de .806 y en Utilidad de .805. Que las mujeres valoran la utilidad de las Matemáticas más que los hombres, y que aunque coincidían en primero en la valoración, en 3.º las mujeres aumentan y los hombres disminuyen.

Naya et al. (2014) elaboraron y evaluaron un cuestionario de actitud hacia las Matemáticas formado por 19 ítems con cinco opciones tipo Likert. La muestra estuvo formada por 307 estudiantes de los cuatro cursos del Grado de Maestro de Primaria de la universidad de A Coruña. De los tres factores en que se agrupan los ítems, el segundo factor corresponde a "Agrado hacia las Matemáticas" con 6 ítems, (alfa de Cronbach .891) tuvo una media de 3.24 y una desviación típica de 0.38, siendo el más alto "No dejaría las matemáticas aunque pudiera" con 3.76 y el más bajo "soy bueno en matemáticas" con 2.73.

Hidalgo et al. (2015) de una muestra de 1209 estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria de diez centros universitarios distintos, obtuvieron datos durante los cursos 2009/10, 2010/11 y 2011/12, siendo el 54% de 1.º, el 32% de 2.º y el 14% de 3.º. Se les aplicó una escala Likert sobre creencias matemáticas manifestando un fuerte componente afectivo negativo respecto al gusto y una valoración positiva de su utilidad y necesidad.

Naya et al. (2015) a una muestra de 307 estudiantes del Grado de Maestro de Primaria de los cuatro cursos de los que el 55% realizó la modalidad de bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales encontraron que existen diferencias significativas en el agrado hacia las Matemáticas teniendo una media más baja los que cursan esta modalidad y el resto. Y Pérez-Tyteca et al. (2013) encontraron que la gran mayoría de los estudiantes entrevistados de segundo de bachillerato no consideraron de gran utilidad las Matemáticas para su vida cotidiana y en cuanto a la utilidad para su vida académica y laboral se observan diferencias entre los alumnos que han elegido una carrera con Matemáticas o sin ellas.

Maroto et al. (2013) a una muestra de 1332 alumnos de los primeros cursos del Grado de Maestro de Primaria de 11 campus universitarios públicos de España que no habían cursado en su formación universitaria asignatura alguna de matemáticas antes de la toma de datos de la escala, aplicaron la Escala de Actitudes hacia la docencia (EADM) formada por 19 ítems, escala Likert de 0 a 4. La escala tuvo de media 1.96, y una de las conclusiones es que los futuros maestros "asumen que una de las asignaturas que tienen que impartir son las Matemáticas y aunque no las rechazan no son una de sus preferidas para la docencia" (p. 7).

Maroto (2015) a una muestra de 2130 maestros en formación de cinco universidades públicas españolas, 858 hombres y 1272 mujeres, les aplicó la escala de agrado EAGM con una fiabilidad alfa de Cronbach de .92, medida con 1203 estudiantes; y en una escala de 1 a 10 obtendrían de nota 5.4, no habiendo diferencias significativas por sexo. La escala de utilidad EPUM con una fiabilidad alfa de Cronbach de .85 fue medida con 1216 maestros en formación, y en una escala de 1 a 10 obtuvieron nota de 6.1, no habiendo diferencias significativas por sexo.

Casas et al. (2016) aplicaron la escala de Actitudes hacia las Matemáticas de Auzmendi (1992) a una muestra de 277 estudiantes de Primer Curso del Grado de Maestro de Primaria de la Universidad de Córdoba (112 hombres y 165 mujeres) de edades comprendidas entre 18 y 48 años. Obtuvieron una fiabilidad alfa de Cronbach de .887, viendo que los cinco factores están relacionados entre sí, siendo la correlación entre Utilidad y Agrado de .787.

Nortes y Nortes (2014) en un estudio realizado a futuros maestros encuentran más utilidad que agrado a las matemáticas, más agrado en hombres que en mujeres y valores similares en utilidad, correlacionándose positivamente utilidad y agrado de forma significativa.

De la revisión de la literatura se observa que en Primaria la utilidad de las Matemáticas presenta un descenso conforme se avanza de curso, en Secundaria, agrado y utilidad están a un nivel bajo y en futuros maestros el agrado tiene un componente afectivo negativo y la utilidad una valoración positiva.

El *objetivo principal* del presente estudio es conocer lo que piensan los futuros maestros sobre Agrado y Utilidad de las Matemáticas, en un estudio llevado a cabo a lo largo de cinco cursos académicos consecutivos, con estudiantes del Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Murcia para tener un conocimiento de cómo son los futuros maestros en su relación afectiva con las Matemáticas, comparar los resultados con otros estudios anteriores sobre estas variables del dominio afectivo y poder mejorar su formación inicial. En futuras investigaciones se completarán estos datos con entrevistas a los participantes.

MÉTODO

Participantes

Son 976 alumnos del Grado de Maestro de Primaria de la Universidad de CCC, pertenecientes 449 a 2.º curso, 351 a 3.º y 176 a 4.º, de edades comprendidas entre 17 y 53 años, de los que 248 son hombres y 728 son mujeres y con edad media de 21,8 años. De ellos 147 matriculados el curso 2011/12, 309 el curso 2012/13, 197 matriculados el 2013/14, 142 el 2014/15 y 181 el 2015/16. En cada curso académico se toman estudiantes de todos los niveles, habiendo seleccionado los participantes de forma incidental. Los alumnos tienen una asignatura de Matemáticas y su didáctica en 2.º (12 créditos), otra en 3.º con 9 créditos y en 4.º Taller de Matemáticas con 3 créditos.

Instrumento

Escala de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi (1992), que según Palacios et al. (2014) es el cuestionario de actitudes más citado de los realizados en lengua castellana, de la que se toman los 4 ítems correspondientes al factor Agrado y los 6 ítems correspondientes al factor Utilidad para la presente investigación. Las respuestas se codifican de forma que una alta puntuación significa actitud positiva en Agrado y Utilidad. Los ítems vienen recogidos en la tabla 1.

Tabla 1. Factores Agrado y Utilidad hacia las Matemáticas

	AGRADO HACIA LAS MATEMÁTICAS
A4	Utilizar las Matemáticas es una diversión para mí
A9	Me divierte el hablar con otros de Matemáticas
A14	Las Matemáticas son agradables y estimulantes para mí
A24	Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de Matemáticas de los que son obligatorios
	UTILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS
A1	Considero las Matemáticas como una materia muy necesaria para mis estudios
A6	Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las Matemáticas
A15	Espero tener que utilizar poco las Matemáticas en mi vida profesional
A16	Considero que existen otras asignaturas más importantes que las Matemáticas para mi futura profesión
A19	Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las Matemáticas
A21	Para mi futuro profesional las Matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar

Procedimiento

El cuestionario se aplicó, en formato papel, en cinco cursos académicos desde el 2010/11 hasta el 2015/16, a principios de curso, en la primera semana de clase. En el curso 2011/12 se aplicó a 2.º y 3.º (no había todavía 4.º) y en los cursos siguientes a los alumnos de 2.º, 3.º y 4.º que cursan asignaturas de la materia Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Para el análisis de datos se ha utilizado el paquete estadístico Systat 13.0.

RESULTADOS

El índice alfa de fiabilidad de Cronbach en los cuatro ítems de Agrado es de .805, en los seis de Utilidad de .715 y en los diez, Agrado + Utilidad, de .833.

El número de alumnos es 976, y en cada uno de los ítems el máximo es 5 y el mínimo es 1. Las puntuaciones medias de cada uno de los 10 ítems de Agrado y Utilidad y la desviación típica, vienen en la tabla 2.

Tabla 2. Medias muestras por género (de 1 a 5)

Agrado	**A4**	**A9**	**A14**	**A24**	**AGM**		
Media	2.49	2.25	2.64	2.79	2.64		
DT	1.04	1.04	1.01	1.08	0.79		
Utilidad	**A1**	**A6**	**A15**	**A16**	**A19**	**A21**	**UTM**
Media	4.12	3.67	3.31	3.13	2.70	3.35	3.38
DT	0.89	0.98	1.04	1.05	1.07	0.99	0.65

- Los alumnos en Agrado por las Matemáticas (AGM) tienen una media de 2.64.
- Los alumnos en Utilidad de las Matemáticas (UTM) tiene una media de 3.38.
- En Agrado el ítem con puntuación más alta es A24 (Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de Matemáticas de los que son obligatorios y el ítem con puntuación más baja es A9 (Me divierte el hablar con otros de Matemáticas).
- En Utilidad el ítem con puntuación más alta es A1 (Considero las Matemáticas como una materia muy necesaria para mis estudios). Y el ítem con puntuación más baja es A19 (Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las Matemáticas).

Junto a la tabla de medias de ítems de Agrado se ha obtenido la tabla de frecuencias de la variable media aritmética AGM y a tres de cada cinco estudiantes no les agradan las Matemáticas (puntuación inferior a 3). En Utilidad uno de cada cinco alumnos no ve utilidad a las Matemáticas.

En la tabla 3 se presentan las medias de Agrado y Utilidad por curso académico.

Tabla 3. Medias de Agrado y Utilidad por curso académico (de 1 a 5)

	11/12	**12/13**	**13/14**	**14/15**	**15/16**	**MUES**
Agrado	2.55	2.71	2.53	2.70	2.67	2.64
Utilidad	3.27	3.26	3.41	3.52	3.51	3.38

- La media de Agrado varía de 2.53 en el curso 13/14 a 2.71 en 12/13 no superando la puntuación neutral 3 (ni de acuerdo ni en desacuerdo) en ningún de los cinco cursos académicos.
- La media de Utilidad varía de 3.26 en el curso 2012/13 a 3.52 en el curso 2014/15, por encima de la puntuación neutral 3.
- En Agrado los ítems A14 (cursos 11/12 y 12/13) y A24 (cursos restantes) tienen las puntuaciones más altas y el ítem A9 en todos los cursos.
- En Utilidad el ítem A1 tiene la puntuación más alta y el A19 la más baja en todos los cursos.

En la tabla 4 se presenta la media y desviación típica por curso del Grado de Maestro de Primaria de los factores Agrado y Utilidad.

Tabla 4. Medias muestras por género (de 1 a 5)

	Agrado			Utilidad		
	2.º	3.º	4.º	2.º	3.º	4.º
N	449	351	176	449	351	176
Media	2.67	2.54	2.79	3.33	3.32	3.60
DT	0.79	0.80	0.76	0.66	0.64	0.59

- En Agrado y Utilidad la media más alta y con menor dispersión es en 4.º.
- En Agrado con 4 o más hay 64 alumnos, el 5.79% en 2.º, el 5.41% en 3.º y el 10.80% en 4.º.
- En Utilidad con 4 o más hay 206 alumnos, el 19.38% en 2.º, el 17.95 en 3.º y el 31.82% en 4.º.
- En Agrado con 2 o menos hay 276 alumnos, el 28.29% en 2.º, el 31.62% en 3.º y el 21.59% en 4.º.
- En Utilidad con 2 o menos hay 32 alumnos, el 3.56% en 2.º, el 4.27% en 3.º y el 0.01% en 4.º.

Analizado el número de alumnos con puntuaciones inferior a 3 en Agrado, en 2.º es el 59.24%, en 3.º es el 63,52% y en 4.º es el 55.68%, porcentajes que se corresponden con las medias de la tabla anterior. En Utilidad estos porcentajes son, en 2.º el 35.17%, en 3.º el 25.36% y en 4.º el 12.5%. Es de destacar que mientras uno de cada cuatro alumnos de 2.º y de 3.º no le ve utilidad a las Matemáticas, en 4.º solo es uno de cada ocho alumnos.

En la tabla 5 se presentan las medias y la probabilidad al aplicar una t-Student por sexo en curso académico y total en Agrado y Utilidad.

Tabla. 5. Medias por sexo en curso académico y total

	Casos		Agrado			Utilidad		
	HOM	**MUJ**	**HOM**	**MUJ**	***p***	**HOM**	**MUJ**	***p***
11/12	35	112	2.74	2.48	.127	3.34	3.25	.466
12/13	60	249	2.86	2.68	.131	3.19	3.28	.342
13/14	52	145	2.90	2.39	<.001	3.53	3.37	.109
14/15	42	100	2.68	2.71	.837	3.38	3.58	.083
15/16	59	122	2.71	2.66	.663	3.45	3.54	.341
MUES	248	728	2.78	2.59	.001	3.37	3.38	.959

- Hay diferencias significativas en Agrado el curso 2013/14, más agrado en hombres que en mujeres.
- Hay diferencias significativas en Agrado en la muestra a favor de hombres.
- En el resto de cursos no hay en Agrado diferencias significativas por sexo.
- En Utilidad no hay diferencias significativas por sexo en ningún curso ni tampoco en el total.

En la tabla 6 se presentan medias de Agrado y Utilidad por Curso del Grado y Sexo, siendo NH = Número de hombres y NM = Número de mujeres.

Tabla 6. Medias y desviaciones típicas de Agrado y Utilidad por curso y sexo

	Agrado			Utilidad		
	2.º	**3.º**	**4.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**
HOM	2.76	2.80	2.80	3.21	3.44	3.61
MUJ	2.64	2.45	2.78	3.37	3.28	3.59
NH	109	84	55	109	84	55
NM	340	267	121	340	267	121

- Los hombres de 4.º tienen el mayor Agrado por las Matemáticas y las mujeres de 3.º el menor.
- La mayor utilidad la encuentran los hombres de 4.º y la menor los hombres de 2.º.

Considerando las edades de los alumnos y de las alumnas que tienen mayor frecuencia, se calculan las medias de los factores Agrado y Utilidad de alumnos de 18 a 22 años, por sexo y total, que constituyen el 75% del total de participantes. Mayor agrado lo tienen a los 22 años (7.48%) y menor a los 20 años (22,75%); mayor utilidad a los 21 años (13.01%) y menor a los 18 años (5.74%). Por sexo, mayor agrado y menor utilidad hombres de 18 años (1.13%), mayor utilidad, mujer de 21 años (9.32%) y menor agrado mujer de 20 años.

Las correlaciones entre los ítems de Agrado varían de .40 a .67 y las correlaciones entre los ítems de utilidad varían de .15 a .46, siendo todas significativas.

- En Agrado la correlación más alta es .67 entre A4-A14 ($p < .001$).
- La más baja es .40 entre A4-A24 ($p < .001$).
- En Utilidad la correlación más alta ($r = .46$, $p < .001$) es entre A19-A21
- La más baja ($r = .15$, $p <. 001$) es entre A6-A15.
- Agrado (AGM) y Utilidad (UTM) tienen una correlación de $r = .59$ ($p <. 001$).

Al comprobar las correlaciones de todos los ítems de Agrado y Utilidad, el ítem A19 de Utilidad (Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las Matemáticas) tiene una correlación alta con todos los de Agrado teniendo puntuaciones entre .46 y .59, todas ellas muy significativas, pudiendo pertenecer a cualquiera de los dos factores, por lo que se ha efectuado un Análisis factorial rotado varimax, que ha dado dos factores, en el primer factor entran A14, A4, A9, A19, A24 y A15 que explica el 30.61% de la varianza y en el segundo entran A21, A16, A6 y A1 que explica el 22.85%, es decir un 53.46% de la varianza total, corroborando la situación del ítem A19. El ítem A15 (Espero tener que utilizar poco las Matemáticas en mi vida profesional) que aparece en el primer factor con .423 y en el segundo factor con .356, puede eliminarse en los dos factores.

Por último se aplicó un *análisis de varianza* de Agrado y Utilidad por Curso Académico y por Curso del Grado de Maestro de Primaria, resultando:

- Análisis de la varianza de Agrado por Curso del Grado ($F = 6.42$, $p = .002$) es significativo, con mejor puntuación en 4.º.
- Análisis de la varianza de Utilidad por Curso del Grado ($F = 12.89$, $p < .001$), es significativo mejor puntuación en 4.º.
- Análisis de la varianza de Agrado por Curso Académico ($F = 2.51$, $p = .041$) es significativo, con peor puntuación en los cursos 2011/12 y 2013/14.
- Análisis de la varianza de Utilidad por Curso Académico ($F = 7.51$, $p < .001$), es significativo con mejor puntuación en los cursos 2014/15 y 2015/16.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

¿Qué se puede hacer con estos resultados?

Comparando la fiabilidad de Cronbach con los obtenidos por otros autores (Flores y Auzmendi, 2015; León et al. 2015; Auzmendi, 1992) se obtienen resultados similares, excepto en Utilidad que queda ligeramente inferior, pero en todos los casos resulta de una fiabilidad aceptable.

Comparando los ítems de Agrado con los obtenidos por otros autores (Auzmendi, 1992; Fernández y Aguirre, 2010; Flores y Auzmendi, 2015; Maroto, 2015) se constata que el Agrado hacia las Matemáticas no es muy alto en los alumnos en general y por los futuros maestros en particular, inferior a la puntuación neutral. En Utilidad, en el presente estudio y los de Auzmendi (1992), Flores y Auzmendi (2015) y Maroto (2015) se encuentra por encima de tres y en Fernández y Aguirre (2010) ligeramente inferior. Considerando conjuntamente Agrado y Utilidad, Mato et al. (2014) tienen el valor más alto y Auzmendi (1992) ligeramente inferior a tres y entre ellos el de Naya et al. (2014), el de Flores y Auzmendi (2015) y el estudio aquí desarrollado.

Al haber cuestionarios en los que hay una escala única de Agrado y Utilidad (Mato, 2006; Hidalgo et al., 2004; Maroto et al., 2014) en la presente investigación la correlación entre Agrado y Utilidad resultó superior a 0.5, aunque inferior a la obtenida por Flores y Auzmendi (2015) y Casas et al. (2016), y en el análisis factorial efectuado con los diez ítems de Agrado y Utilidad se determinan los dos factores.

Hidalgo et al. (2004) en un estudio con alumnos desde 3.º de Primaria hasta 1.º de Universidad comprobaron que el gusto por las Matemáticas descendía un 30% añadiendo "el descenso en la percepción positiva de las Matemáticas no la encontramos en otras asignaturas" (p. 83), mientras que en el presente estudio la media, tanto en Agrado como en Utilidad, aumenta de 2.º a 4.º del Grado de Maestros de Primaria, cursos en los que tienen asignaturas de Matemáticas los futuros maestros. Maroto (2015), sin embargo, constata que es mayor el gusto hacia las Matemáticas al inicio que al finalizar los estudios de asignaturas de Matemáticas y las perciben más útiles al inicio que al finalizar pudiendo ser que en su formación no se esté trabajando en la dirección correcta pues "al final de los estudios no han mejorado en el aspecto afectivo emocional" (p. 297).

Para poder enseñar una materia tiene que agradar o al menos no ser rechazada y aquí en la investigaciones referenciadas se ha visto que a los futuros maestros no les agradan las Matemáticas (Auzmendi, 1992; Fernández y Aguirre, 2010; Flores y Auzmendi, 2015, Mato, 2015) y el hecho de que en la presente investigación uno de cada cuatro alumnos tenga de media menos de dos y que tres de cada cinco tengan de media menos de tres (valor neutral de la escala) es motivo de reflexión y análisis más profundo porque solo sabiendo lo que sienten los estudiantes hacia las Matemáticas podremos mejorar nuestro sistema educativo y el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas. Solo uno de cada cinco alumnos no encuentra utilidad en las Matemáticas.

Las actitudes hacia las Matemáticas son estables y una vez adquiridas son difíciles de modificar, además de que las actitudes se transmiten de docente a discentes y que una vez consolidadas en el alumno son estables (Soneira et al. 2016). De ahí que en el presente estudio el resultado de que a los alumnos no les agraden las Matemáticas puede estar provocado por la actuación de sus profesores a lo largo de la enseñanza obligatoria y una vez en la Universidad se hace presente, debido, quizás, a los profesores universitarios.

A los alumnos del Grado de Maestro de Primaria les agradan las Matemáticas más que a las alumnas y en utilidad no existen diferencias significativas por sexo, mientras que en León et al. (2015) sí encontraron que las mujeres valoran la utilidad de las matemáticas en un mayor grado que los hombres y que aumenta al pasar de curso, mientras que en hombres se reduce.

La investigación tiene las ventajas de haber conocido lo que piensan los futuros maestros a lo largo de cinco cursos académicos consecutivos y a su vez las limitaciones de que la muestra es muy heterogénea ya que los alumnos que la componen han ido proviniendo, año tras año, de distintos centros de Secundaria, con distinto bagaje de conocimientos matemáticos y con distintos docentes en Primaria y Secundaria, que les han podido transmitir distinto nivel de agrado y utilidad ante las Matemáticas. Sin embargo, todos ellos cuando terminen su formación inicial de maestros van a ser formadores de ciudadanos en su primera etapa de docencia obligatoria y consideran las Matemáticas como una materia muy necesaria en sus estudios. Además, los resultados obtenidos corroboran lo obtenido por Hidalgo et al. (2015) que al preguntar a más de mil estudiantes del Grado de Maestro de Primaria ¿qué son para ti las Matemáticas?, la utilidad es la etiqueta más repetida y esta percepción "parece como obligar a los futuros docentes a tener una necesaria relación con las Matemáticas" (p. 84).

Contestamos a la pregunta formulada diciendo que esta investigación ratifica que a los futuros maestros no les agradan las matemáticas, que las consideran útiles y que esta situación se viene repitiendo año tras año desde la implantación de los estudios del Grado de Maestro de Primaria y que la hemos de tener presente los profesores, porque como dice Gómez-Chacón (2016, p. 111) "la articulación entre cognición y afecto está en la base de toda actividad matemática".

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Bilbao: Ediciones Mensajero.

Caballero, A. (2013). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención para Maestros en Formación Inicial*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Extremadura, Badajoz.

Casas, J. C., León, C., Maz, A. Jiménez, N. y Madrid, M. J. (2016). Identificando las relaciones dimensionales de la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas propuesta por Auzmendi en maestros en formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 600). Alicante: SEIEM.

Fernández, R. y Aguirre, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos del grado de magisterio de Educación Primaria: estudio de una situación en el EEES. *Revista Unión, 23*, 107-116.

Fernández, R., Solano, N., Rizzo, K., Gómezescobar, A., Iglesias, L. M. y Espinosa, A. (2016). Las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes y maestros de educación infantil y primaria: revisión de la adecuación de una escala para su medida. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad, 11*(33), 227-238.

Flores, W. O. y Auzmendi, E. (2015). Análisis de la estructura factorial de una escala de actitud hacia las Matemáticas. *Aula de encuentro, 17*(1), 45-77.

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista electrónica de Investigación psicoeducativa, n.º 8, vol. 4*(1), 47-72.

Gómez-Chacón, I. M. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Málaga: SEIEM.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las Matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática, 27*(1), 65-90.

León, C., Maz, A., y Jiménez, N. (2015). Identificando las actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes para maestro. *17 JAEM. Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia SEMRM.

Maroto, A. (2015). *Perfil afectivo-emocional matemático de los maestros de Primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Maroto, A., Hidalgo, S., Ortega, T. y Palacios, A. (2013). Afectos hacia la docencia de las matemáticas en futuros maestros. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, R. Dominicana. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/111-385-1-DR-C.pdf

Mato, M. D. (2006). *Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral. Universidad de A Coruña, A Coruña.

Mato, M. D., Espiñeira, E. y Chao, R. (2014). Dimensión afectiva hacia la matemática: resultados de un análisis en Educación Primaria. *Revista de Investigación Educativa, 32*(1), 57-72.

Naya, M.C., Soneira, C., Mato, M.D. y De la Torre, E. (2014). Cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria. *Revista de estudios e investigación en Psicología y Educación, 1*(2), 141-149.

Naya, M. C., Soneira, C., Mato, D. y de la Torre, E. (2015). Actitudes hacia las Matemáticas y rendimiento académico en función de los estudios de acceso y curso en futuros maestros. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 423-430). Alicante: SEIEM.

Nortes, R. y Nortes, A. (2014). Actitud hacia las Matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 485-492). Salamanca: SEIEM.

Palacios, A., Arias, V. y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica, 19*(1), 67-91.

Pérez-Tyteca, P., Monje, J. y Castro, E. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4,* 65-82.

Soneira, C., Naya-Riveiro, M. C., de la Torre, E. y Mato, D. (2016). Relaciones entre las dimensiones de las actitudes hacia las Matemáticas en futuros maestros. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 519-528). Málaga: SEIEM.

LA ESTIMACIÓN DE LA MEDIA: ANÁLISIS DEL LENGUAJE EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

The estimation of average: Analysis of language in Spanish high school textbooks

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos el lenguaje de la estimación de la media en tres libros de texto españoles de bachillerato publicados el pasado año. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje formal. El lenguaje numérico incluye los diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Palabras clave: *Inferencia, libros de texto, lenguaje matemático, bachillerato.*

Abstract

In this paper we analyse the language used in the chapter estimation of the mean in three Spanish high school textbooks published in the past years. The results show the great richness and variety of verbal expressions and a predominance of formal language. The numerical language is developed according to the introduction of different number systems and there is also an extensive use of tabular and graphical representations. Some differences in the books indicate the important role of the teacher to select and use these books in teaching.

Keywords: *Inference, textbooks, language of mathematics, high school.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la inferencia es un componente importante de las *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*, por su presencia constante en las pruebas de selectividad (López-Martín Batanero, Gea y Arteaga, 2016) y por la importancia que tiene en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016). Además, en segundo curso de Bachillerato de esta modalidad (MECD, 2015), en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes estándares de aprendizaje, que incluyen los contenidos y criterios de evaluación:

> 2.1. Valora la representatividad de una muestra a partir de su proceso de selección. 2.2. Calcula estimadores puntuales para la media, varianza, desviación típica y proporción poblacionales, y lo aplica a problemas reales. 2.3. Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción muestral, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. 2.4. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. 2.5. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional y para la proporción en el caso de muestras grandes. 2.6. Relaciona el error y la confianza de un intervalo de confianza con el tamaño muestral y calcula cada uno de estos tres elementos conocidos los otros dos y lo aplica en situaciones reales. 3.1. Utiliza las herramientas necesarias para estimar parámetros desconocidos de una población y presentar las inferencias obtenidas mediante un vocabulario y representaciones adecuadas. 3.2. Identifica y analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico sencillo (p. 389):

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V. (2017). La estimación de la media: análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza: SEIEM.

Este currículo se ha implementado en el segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales en 2016, por lo que se han editado nuevos libros de texto que tratan de responder al cambio de directrices. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Cordero y Flores (2007) resaltan su influencia en el discurso matemático escolar, que regula la enseñanza y aprendizaje. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007). Una característica importante del libro de texto de matemáticas, es el lenguaje (entendido en un sentido amplio, es decir, incluyendo tanto el lenguaje verbal, como el gráfico, simbólico y tabular) por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. Como parte de un proyecto de investigación más amplio en que pretendemos analizar la enseñanza de la inferencia en Bachillerato, en este trabajo nos fijamos el objetivo de analizar el lenguaje (en el sentido amplio anteriormente descrito) en el tema de estimación de la media en tres libros de texto de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales publicados según la nueva normativa.

FUNDAMENTOS

Marco teórico

Un reto en la enseñanza de las matemáticas es el uso de un lenguaje múltiple, que incluye el lenguaje verbal, los símbolos y expresiones algebraicas, las representaciones gráficas y las tablas (Scheleppegrell, 2007). Puesto que los objetos matemáticos no son directamente perceptibles, deben ser representados mediante diferentes representaciones (Duval, 2006). Dicho lenguaje es un elemento fundamental en el aprendizaje del alumno, puesto que éste debe asimilarlo, para ampliar su lenguaje cotidiano con otro de mayor nivel de abstracción. Sin embargo el lenguaje y representaciones matemáticos no están estandarizados, por lo que la representación simbólica o de otro tipo de un concepto puede variar entre países, niveles educativos o incluso textos (Adler, 1991)

Entre las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a la importancia que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático, pues se trata de “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)” (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Antecedentes

La investigación sobre la presentación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto es muy escasa (por ejemplo, Ortiz, 2014) y menor aún la relacionada con el lenguaje. Respecto a la probabilidad, Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad. Observan mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar en uno de los textos, con una gama más variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística.

Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado en el tema de probabilidad en dos series de libros de texto de Educación Primaria publicados entre 2008 y 2011. Diferencian entre expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, representaciones tabulares y gráficas. Sus resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se adapta a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. El trabajo anterior es completado por Ortiz, Albanese y Serrano (2016) quienes analizan el lenguaje de la probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados en 2015. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas.

En relación al lenguaje de la inferencia en libros de texto, García y García (2009) realizaron un estudio pormenorizado de los términos específicos relacionados con la inferencia estadística, clasificándolos en varias categorías, según tengan el mismo o distinto significado en los contextos matemático y cotidiano. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Su estudio se completa en García (2011), con el análisis de las definiciones sobre términos de inferencia, proporcionadas por 26 estudiantes de segundo curso de Bachillerato, donde se observan las dificultades que tienen para dar una definición adecuada en el contexto matemático, finalizando con una propuesta de enseñanza para superarlas.

Nuestro trabajo trata de completar los anteriores, analizando tres libros de texto de Bachillerato, siguiendo las categorías de análisis del trabajo de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013).

METODOLOGÍA

Se analizaron tres libros de texto de segundo curso de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias Sociales, publicados en 2016, de tres editoriales muy conocidas. Se trata de una muestra intencional, puesto que el estudio es exploratorio, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la media, estudiando las variables determinadas en Gómez et al. (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas.

Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. Por ejemplo, para la variable “expresiones verbales” se han diferenciado cuatro tipos: expresiones cotidianas, específicas de estadística, específicas de probabilidad y específicas de los juegos de azar. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados. A continuación se presentan los resultados, utilizando ejemplos de los textos cuando sea necesario.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron las expresiones verbales. Hemos tenido en cuenta, siguiendo a Shuard y Rothery (1984), las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad (Tabla 1).

Tabla 1. Frecuencia de expresiones distintas en los libros de texto según categoría

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Expresiones cotidianas	27	37	26
Específicas probabilidad	11	9	20
Específicas estadística	33	36	41
Juegos de azar	3	0	3

Hemos encontrado una gran variedad de términos: palabras que se usan para indicar resumidamente un procedimiento o hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad, o bien a ejemplos de material que se utiliza en los juegos de azar, acciones sobre dicho material y los resultados de las mismas. El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de la estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, donde había una predominancia de lenguaje cotidiano y juegos de azar. Es decir observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en Bachillerato. No obstante todavía hay una gran variedad de expresiones del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, lo que puede ocasionar conflictos semióticos (Godino et al., 2007), debido a problemas de ambigüedad (Barwell, 2005).

Entre las específicas de probabilidad, las más utilizadas están relacionadas con el cálculo de probabilidades, variable aleatoria, las distribuciones normal y binomial y las distribuciones muestrales. La distribución de medias muestrales se trata en los tres textos, pero las distribuciones de la suma y la diferencia de medias muestrales aparecen en unos textos y en otros no. El texto [T3], es el único que destaca la idea de incertidumbre como una característica de los estudios sobre poblaciones. Respecto al estudio de Ortiz et al. (2001), con textos de secundaria dirigido a alumnos de 14 años, el lenguaje ha variado bastante ya que aparecen conceptos más complejos.

Los términos específicos de estadística son muy variados, destacando los conceptos de población y muestra, estimación de la media, inferencia estadística, intervalos de confianza y el teorema central del límite, que aparecen en los tres textos. El texto [T3] es el único que menciona ejemplos de muestreos no aleatorios, y el texto [T2] introduce el concepto de "muestra aleatoria dirigida" que no hemos encontrado en libros de estadística de referencia, lo que puede provocar un conflicto semiótico en el alumnado que utiliza este texto. Destacar que en ningún texto se da una definición explícita del concepto de inferencia que es fundamental, y lo que hacen por ejemplo, los textos [T1] y [T3] es utilizar la palabra inferir como sinónimo de deducir que, según García y García (2009), está más relacionado con el contexto cotidiano, ya que en matemáticas son dos términos opuestos con significados distintos, lo que puede generar un conflicto semiótico en el alumnado, ya que puede conducirle a interpretaciones inadecuadas. Las expresiones relacionadas con los juegos de azar son muy escasas, al contrario que en Ortiz et al. (2016).

Al comparar el contenido de los textos con las indicaciones del currículo, se observa que en los textos se tratan más conceptos que los contemplados en los documentos curriculares, como por ejemplo, las distribuciones de la suma y diferencia de medias muestrales, el [T3] es el único que analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico, y en el texto [T2] no se hace ninguna referencia a expresiones relacionadas con las tecnologías y la simulación tal y como se recomienda en dichos documentos. En el texto [T1] se remite a una Web donde se encuentran "escenas" sobre los conceptos trabajados en el tema (T1. p.292); y en el texto [T3] en un apartado llamado MAT-TIC GeoGebra, propone realizar prácticas sobre los conceptos presentados en el tema (T3, p.305).

Lenguaje numérico

En segundo lugar se ha analizado el tipo de lenguaje numérico, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales, fracciones e irracionales, ampliándose por tanto los conjuntos numéricos encontrados en los estudios de Gómez et al. (2014), Ortiz, Albanese y Serrano (2016) y Ortiz, Batanero y Serrano (2001) (Tabla 2).

Tabla 2. Tipos de números incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Números enteros	x	x	x
Números decimales	x	x	x
Fracciones	x	x	x
Irracionales	x	x	x

Los números enteros se utilizan en el cálculo de frecuencias absolutas o para indicar el número de elementos de sucesos en experimentos aleatorios, así como para representar el tamaño de una muestra o el valor de una variable estadística o aleatoria y sus parámetros: "*Una variable aleatoria x se distribuye normal N*(120,130)" (T1, p.304). Los números fraccionarios suelen aparecer, por ejemplo, en el cálculo de los parámetros de la distribución de medias muestrales: "La población tiene μ =19 y σ =3, $\rightarrow \bar{X} \equiv N\left(19,3/\sqrt{64}\right) = N\left(19,3/8\right)$"(T2, p.289). Los números decimales, aparecen sobre todo en el cálculo de probabilidades y en algunos casos se combinan con los enteros en la misma expresión: "$P[70 < x < 80] = 0{,}2684$" (T1, p.288). Los números irracionales aparecen en el cálculo de la desviación típica de la distribución de las medias muestrales, mediante la fórmula: $\sigma/\sqrt{n}$. Utilizando el teorema central del límite, $\bar{X} \sim N\left(\mu = 5, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{150}}\right)$, " (T3, p.307). En la Tabla 2 se observa que los tres libros utilizan estos distintos tipos de números, mientras que en Ortiz et al. (2016) no aparecían los números irracionales.

Lenguaje simbólico

Hemos encontrado una gran variedad de lenguaje simbólico que incluye las expresiones de igualdad, desigualdad y operaciones aritméticas, al igual que en el trabajo de Ortiz et al. (2016) (Tabla 3).

Tabla 3. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad y desigualdad (=, <)	x	x	x
Operaciones aritméticas	x	x	x
Conjuntos (∈)	x		
Porcentajes , Aproximación ($\simeq$)	x	x	x
Es (≡)		x	
Es (~)			x
Implicación ($\simeq$)	x	x	
Equivalencia			x
Sumatorio (∑)	x	x	
Símbolos literales, notación funcional	x	x	x
Integral			x

También coincidiendo con dicho trabajo se utilizan símbolos literales y notación funcional, para expresar la relación entre la desviación típica de una distribución y el tamaño de la muestra: "*Desv. típica para n dados = Desv. típica para un dado/*$\sqrt{n}$" (T1, p. 285) o para expresar la fórmula de la media aritmética (T1, p.292). La implicación es utilizada para realizar cálculos encadenados: "*Por tanto:* $3 = 2{,}575 \cdot 8\sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} = 2{,}575 \cdot 8/3 = 6{,}87 \rightarrow n = 47{,}15$. *Habrá que tomar una muestra de 48 individuos*" (T1, p. 302) y también la equivalencia que aparece en un solo texto:

$$\text{“}\ \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma} \sim N\left(0,1\right) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\text{”(T3, p. 306)}$$

Es frecuente igualmente el uso de porcentajes para determinar el intervalo característico correspondiente a una probabilidad o para expresar el nivel de confianza en la estimación de la media poblacional: "*Determina un intervalo de confianza para la antigüedad media de la flota de vehículos con un nivel de confianza del 97 %*" (T2, p. 305).

En general se utiliza un lenguaje formal, donde el símbolo ϕ(a), representa la función de distribución o probabilidad de que la variable z sea menor o igual que un determinado valor en una distribución N(0, 1): "*La función que acumula la probabilidad hasta el valor Z = a, se denomina función de distribución y se escribe* $\phi(a) = P[z \leq a]$" (T3, p.281). Son así mismo formales, la expresión utilizada para representar el proceso de tipificación de la variable: "*Si x es N(μ, σ), entonces z = (x–μ)/σ es N(0, 1)*" (T1, p.290), o la expresión que indica la distribución normal de la diferencia de medias muestrales, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, de las muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 que se pueden extraer de dos poblaciones de medias μ_1 y μ_2 y desviaciones típicas σ_1 y σ_2:

$$\text{“ } \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \tfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)\text{” (T2, p.291)}$$

El símbolo sumatorio aparece en la fórmula del cálculo de la media aritmética o también para justificar el cálculo de la probabilidad de que la suma de los elementos de una muestra esté, a priori, en un cierto intervalo, ya que: "$\sum x_i$ *es* $N\left(n\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$" (T1, p.292). El símbolo aproximado $\simeq$ aparece en los tres textos, por ejemplo para indicar la aproximación de la distribución binomial por la normal cuando n es suficientemente grande (T2, p.288), o para señalar que se puede tomar la desviación típica de la muestra como estimador de la desviación típica de la población, siempre que el tamaño de la muestra no sea pequeño: "*Si el tamaño de la muestra, n, no es pequeño, podemos tomar* $s_n \simeq s_{n-1}$. *Por tanto, tomaremos aquí, siempre,* s_n *como estimador de* σ" (T1, p. 295). Otro símbolo que aparece en un solo texto es ≡ para indicar que una variable aleatoria sigue una distribución normal: "$X \equiv N\left(n\mu, \sigma / \sqrt{n}\right)$" (T2, p.288) o el símbolo ~ para indicar lo mismo en otro texto: "$X \sim N\left(\mu = 9, \sigma = 1{,}2\right)$" (T3, p.283).

También encontramos el lenguaje conjuntista, por ejemplo el símbolo ∈, en un problema donde conocida la media de la estatura de los soldados de un regimiento, se pregunta por la probabilidad de que la media de una muestra en una guardia esté comprendida en un determinado intervalo: "¿$P\ \overline{x} \in \left(174{,}4;175{,}6\right]$?" (T1, p.294). Un único texto utiliza el símbolo de la integral para calcular la probabilidad de cualquier intervalo [a, b] de la recta real, en el caso de una variable aleatoria continua: "*Si f(x) es la función de densidad de una variable continua, entonces* $P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f(x)\,dx$" (T3, p.279).

En la Tabla 3 se observa que, en general, los tres libros de texto utilizan un lenguaje simbólico muy formalizado, y solo hay pequeñas diferencias: el uso del lenguaje conjuntista que solo aparece en [T1] o los símbolos ≡ y ~ que aparecen en [T2] y [T3] respectivamente o la integral que solo aparece en [T3]. Se observa que hay un aumento considerable de la formalización respecto a Ortiz et al. (2016), lo cual es razonable pues estamos en el curso previo al ingreso en la universidad.

Lenguaje tabular

Se han encontrado diferentes tipos de tabla: a) Listado de datos sobre una variable que se supone sigue una distribución normal y se pregunta "cuál de estas dos ciudades tiene un clima más frío", como el ejemplo de la Figura 1.a (T3, p.326) o tablas de frecuencias (T1, p.297); b) tablas de resultados donde por ejemplo se comparan la media y la desviación típica de cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados, Figura 1.b (T1, p. 285); c) tablas de la N(0, 1) donde aparecen las probabilidades de que $P(z \leq k)$ para valores de k de 0 a 4 que el alumno ha de leer para poder calcular probabilidades (T1, p.286) o para calcular el valor crítico correspondiente a una determinada probabilidad:"*Se halla el valor crítico* $z_{\alpha/2}$ *y se busca su valor en la tabla de la N(0, 1).* $F(Z_{0,025}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \rightarrow P(Z < Z_{0,025}) = 0{,}975 \rightarrow Z_{0,025} = 1{,}96$" Figura 1.c (T2, p. 294); d) tablas de datos obtenidos de simulaciones o experimentos que pueden estar o no agrupadas Figura 1.d (T2, p.305); e) tablas de intervalos característicos correspondientes a una determinada probabilidad (T1, p. 300); f) tablas de distribuciones normales con datos de parámetros estadísticos y de probabilidad para hallar el intervalo característico en cada caso, o con datos de distribución y tamaño de la muestra para indicar como se distribuyen las medias muestrales en cada caso (T1, p.304), o tablas de datos sobre el tamaño de dos muestras y sus respectivos parámetros estadísticos, por ejemplo sobre el peso de los hijos de dos grupos de mujeres embarazadas, donde se pide a partir de dichos datos decidir cómo influye que la madre sea fumadora en el peso de su hijo al nacer (T2, p. 298).


Muestras en °C de las temperaturas

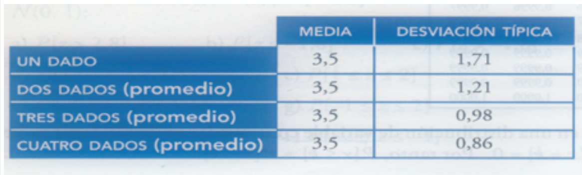
Teruel:

4,7; 16,4; 23,4; 9,1; 4,5; 12,6; 21,9; 6,0; 5,7; 16,3; 23,5; 9,3; 1,9; 16,9; 24,3; 8,3; 4,5; 11,7; 22,2; 6,5; 5,2; 15,3; 23,7; 9,6

Oviedo:

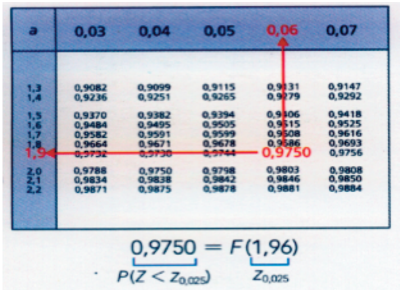
10,1; 17,4; 17,7; 7,6; 9,9; 16,4; 17,7; 7,4; 10,6; 16,5; 18,8; 9,3; 11,1; 17,3; 18,1; 9,8; 9,8; 15,1; 18,8; 8,8; 10,4; 17,6; 19,6; 8,2

a. Listado de datos (T3, p. 326)



	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA
UN DADO	3,5	1,71
DOS DADOS (promedio)	3,5	1,21
TRES DADOS (promedio)	3,5	0,98
CUATRO DADOS (promedio)	3,5	0,86

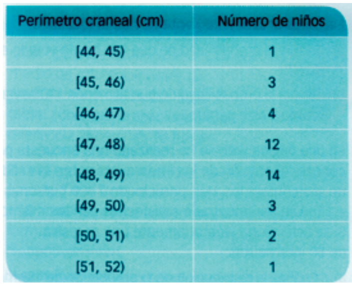
b. Tabla de resultados (T1, p. 285)



a	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
1,3	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9788	0,9750	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884

$$\underbrace{0{,}9750}_{P(Z < z_{0{,}025})} = F(\underbrace{1{,}96}_{z_{0{,}025}})$$

c.Tabla distribución normal (T2, p. 294)



Perímetro craneal (cm)	Número de niños
[44, 45)	1
[45, 46)	3
[46, 47)	4
[47, 48)	12
[48, 49)	14
[49, 50)	3
[50, 51)	2
[51, 52)	1

d. Tabla de datos agrupados (T2, 305)

Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos

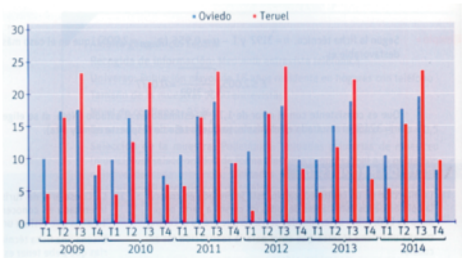
En la Tabla 4 resumimos los resultados relativos a esta variable, observando pocas diferencias entre los textos analizados. Hacemos notar la dificultad procedimental que implica para el alumno la lectura y en algunos casos la construcción de todos estos tipos de tablas, puesto que cada una de ellas tiene sus propios convenios, lo que puede convertirse en un conflicto para el alumnado. Se observa que el texto [T1] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje tabular. En este estudio también aparece una mayor diversidad de lenguaje tabular y de mayor complejidad que en Ortiz et al. (2016).

Tabla 4. Lenguaje tabular

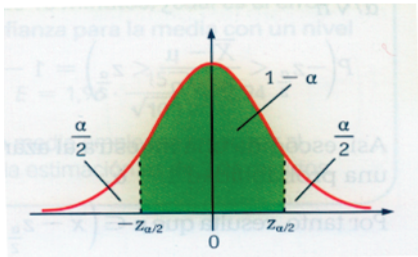
Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Listado de datos		x	x
Tabla de frecuencias	x	x	x
Tabla de resultados distribución de probabilidad	x	x	
Tabla de frecuencias con datos agrupados	x	x	
Tabla de N(0,1)	x	x	x
Tabla de valores críticos	x	x	x
Tabla de intervalos característicos	x		x
Tabla de parámetros de distribuciones y probabilidad	x		
Tabla de parámetros de distribuciones y tamaño muestra	x	x	x
Tabla para organizar los cálculos	x		

Lenguaje gráfico

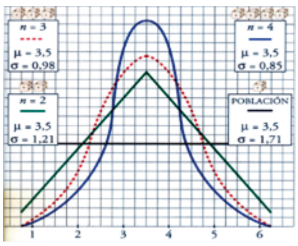
Se han encontrado una gran variedad de gráficos, sin especificar si han sido elaborados o no por un programa o paquete estadístico: Diagrama de barras, donde se representan el promedio de los resultados al lanzar cuatro dados, (T1, p.285) o diagrama de barras agrupados, Figura 2.a (T3, p. 326), lo que supone un mayor nivel de complejidad, según Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), al representar conjuntamente dos distribuciones de datos. Gráfica de distribución normal, donde se representa el nivel de confianza, $1 - \alpha$, el valor crítico $z_{\alpha/2}$ y el nivel de significación α, Figura 2.b (T2, p.293); gráfica de comparación de varias distribuciones donde se representan cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados y se comparan la media y la desviación típica, Figura 2.c (T1, p.291); gráfico donde se muestran los intervalos de confianza correspondientes a 20 muestras de 45 latas de refrescos y donde se observa que el 95% de ellos proporcionan intervalos que contienen el verdadero valor de μ, Figura 2.d (T3, p.317). También hay gráficas donde se representa la aproximación de una distribución binomial por una normal y donde se observa que cuanto mayor es *n*, mejor aproximación se obtiene, Figura 2.d (T2, 275). En algunas gráficas (por ejemplo, Figuras 1a y 1c), la ausencia de títulos y etiquetas en los ejes puede causar conflictos en la identificación de las variables representadas o las escalas de medida.



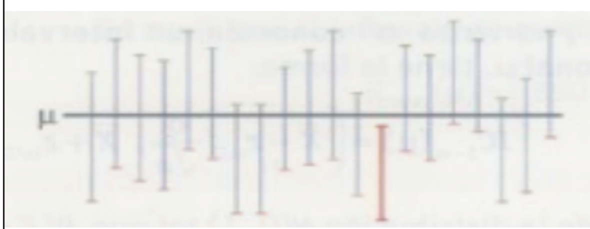
a. Listado de datos (T3, p. 326)



b. Tabla de resultados (T1, p. 285)



c.Tabla distribución normal (T2, p. 294)



d. Tabla de datos agrupados (T2, 305)

Figura 2. Distintos tipos de gráficas encontradas en los textos

En la Tabla 5 se observan algunas diferencias entre los libros. El texto [T3] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje gráfico, con la salvedad de que a los intervalos característicos los nombra como intervalos centrados en la media, el libro [T2] presenta los mismos gráficos excepto el diagrama de barras agrupado y ya con menor variedad está el [T3]. En [T1] y [T3] aparecen fotos de matemáticos importantes relacionados con el origen de la distribución normal, la estimación y la inferencia estadística, y en todos ellos, sobre todo en [T2] y [T3], fotos e imágenes relacionadas con el tema o con el contexto de los problemas. En el estudio de Ortiz et al. (2016) también aparecen diagramas de barra y agrupados y representaciones icónicas, como imágenes y dibujos; sin embargo, en nuestro estudio encontramos otro tipo de gráficos más complejos relacionados con la inferencia estadística, diferencias lógicas al tratarse de un nivel educativo superior.

Tabla 5. Lenguaje gráfico

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Diagrama de barras	x		x
Diagrama de barras agrupado			x
Gráfica normal	x	x	x
Aproximación binomial por normal	x	x	x
Gráfica comparación distribuciones	x		x
Gráfico intervalos característicos	x	x	x
Gráfico intervalos de confianza	x	x	x
Fotos matemáticos	x		x
Fotos e imágenes	x	x	x

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos, quienes, además de los conceptos y propiedades, han de aprender el uso de símbolos, tablas y gráficos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que si aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). En contra de lo especificado en las orientaciones curriculares hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología o la simulación, y dos que no proponen el análisis de los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico.

Puesto que el estudio es exploratorio, estos resultados deben ser valorados con precaución y sería necesario ampliar el estudio con otros textos. Por otro lado, el profesor debe buscar estrategias que permitan a los estudiantes consolidar un lenguaje matemático más avanzado e interpretar así los significados más complejos de la inferencia estadística. Esto requiere que los profesores cuiden el lenguaje formal que se utiliza en el aula, mediante el cual se construye el conocimiento matemático, (O'Halloran, 2000), evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar conflictos semióticos en el alumnado.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyectos EDU2013-41141-P, EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Adler, A. (1991). Mathematics and creativity. En T. Ferris (Ed.), *The world treasury of physics, astronomy, and mathematics* (pp. 435–446). Boston, MA: Little Brown.

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education, 19*(2), 118–126.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

García, I. (2011). Análisis de los términos de Inferencia Estadística en Bachillerato. *Números, 77*, 51-73.

García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en Bachillerato. *Educación Matemática, 21*(3), 95-126.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.

López-Martín, M., Batanero, C., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2016). Análisis de los problemas de inferencia propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Vidya, 36*(2), 409-428.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 3.

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education, 10*(3), 359–388.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM

Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Scheleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*,139-159.

Shuard, H., y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11*(4), 258-288.

ANEXO: Textos empleados en el análisis

[T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.

[T2]. Gámez, J., Marín, S., Martin, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

[T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.

LAS PREGUNTAS DE LOS MAESTROS EGRESADOS COMO GUÍA DE SU FORMACIÓN: UNA APROXIMACIÓN METACOGNITIVA

Questions of in-service teachers as a guideline of their instruction: a metacognitive approach

Pascual, M.I. y Montes, M.

Universidad de Huelva

Resumen

Este estudio se desarrolla en el contexto de un experimento de enseñanza, concretamente en su cuarto ciclo, que está orientado al desarrollo de habilidades metacognitivas de maestros egresados según el antiguo sistema de diplomaturas, que ahora desean alcanzar la titulación de graduados en Educación Primaria. Se analizan las preguntas que dichos profesores se plantean en torno a qué aspectos de su conocimiento necesitan alimentar para gestionar la resolución de problemas en el aula. En este sentido, usaremos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), para analizar la naturaleza de aquellos ámbitos de conocimiento que los profesores parecen necesitar explorar.

Palabras clave: *Conocimiento profesional, Metacognición, Resolución de Problemas, Auto-preguntas, MTSK.*

Abstract

This study is carried out in the context of a teaching experiment, in its fourth cycle, oriented to the development to metacognitive skills of teachers graduated according the system before the implementation of the European Space of Higher Education, that want to update their title. We analyze the questions that these teachers make around aspects of their knowledge they need to feed in order to manage problem solving in classroom. This way, we will use an analytical framework of mathematics teacher specialized knowledge (MTSK), in order to deepen into the nature of those ambits of knowledge in which teachers seem to need to explore.

Keywords: *Professional Knowledge, Metacognition, Problem Solving, Self-questions, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

Tras la entrada en vigor del Espacio Europeo de Educación Superior, se generalizó el hecho de que, en España, para acceder al título que habilita para la docencia en Educación Primaria, se deban cursar 4 años de estudios de Grado. En este contexto ha emergido en el ámbito español un tipo de estudios que permite a los egresados en las antiguas diplomaturas de Magisterio cursar una serie de créditos que les permite actualizar su título al de grado, de forma que su titulación inicial de diplomatura se ve complementada con conocimientos relacionados con el trabajo competencial en distintas áreas, particularmente en nuestro caso, con el trabajo en resolución de problemas matemáticos de distinta naturaleza. Estos estudios generan determinadas problemáticas ligadas a su contenido y gestión, debido a la diferente naturaleza de quienes lo cursan, sus diferentes intereses para con el curso y la profesión de maestro, y las diferentes trayectorias de relación con las matemáticas de éstos. Aquí presentaremos algunas reflexiones ligadas al Curso de Adaptación a Grado en Educación Primaria (en adelante CAGEP) que viene impartiéndose en la Universidad de Huelva desde hace cuatro años.

Pascual, M.I. y Montes, M. (2017). Las preguntas de los maestros egresados como guía de su formación: una aproximación metacognitiva. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 387-395). Zaragoza: SEIEM.

En particular, el CAGEP de la Universidad de Huelva constituye un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011; Steffe y Thompson, 2000), ligado al desarrollo de habilidades metacognitivas (Cooney, 1998; Hsu, Iannone, She y Hadwin, 2016) de autogestión de la adquisición de conocimiento en un contexto de planificación de la actividad docente ligada a la resolución de problemas (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2015). En el proceso de iteración y refinamiento del diseño de enseñanza, se incorpora en este cuarto ciclo un elemento que aporta a los maestros un punto adicional de reflexión, ligado a la detección de aquellos aspectos en los que necesitan formación. En los anteriores ciclos, los maestros reflexionaban alrededor de un problema, preguntándose: ¿qué he de saber para llevarlo a un aula?, mientras que la adición que aquí mostramos responde a la pregunta: ¿qué no sé que pudiera ser útil?.

En este contexto, y en el actual (cuarto) ciclo del experimento de enseñanza, dirigimos nuestra atención hacia un fenómeno común en los procesos de enseñanza y aprendizaje: las preguntas. Sin embargo, frente al análisis habitual que se hace de las preguntas, basado en la interacción interpersonal (Holton y Thomas, 2001), nos planteamos la posibilidad, en el contexto del desarrollo de habilidades metacognitivas del CAGEP, de invitar a los maestros egresados que lo cursaban a hacerse preguntas a ellos mismos acerca de aspectos íntimamente ligados con la enseñanza y aprendizaje de problemas concretos en los que sintieran que necesitaban más formación. Desde la perspectiva de la investigación, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué preguntas, respecto de la planificación de la gestión de la resolución de problemas, se plantean los participantes a sí mismos? Como consecuencia de esta cuestión, nos planteamos como objetivo de la investigación identificar en qué aspectos del conocimiento muestran los profesores que requieren más formación. Este análisis de las naturalezas de conocimiento se realizará a través del modelo analítico MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

SOPORTE TEÓRICO

La actividad profesional ligada a la enseñanza de las matemáticas comprende tres elementos fundamentales: Conocimiento, Práctica, e Identidad profesionales (Ponte, 2012). En particular, esta investigación aborda las tres, cada una desde una perspectiva diferente: El conocimiento profesional se enfoca desde la gestión del profesor de la construcción de su propio conocimiento, organizada a nivel analítico por un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, et al., 2013); la práctica profesional desde la planificación de la actividad docente (Jones y Smith, 1997) como contexto de reflexión; y finalmente el desarrollo de la identidad profesional desde el fomento de la autonomía en la reflexión y la explicitación de la auto-conciencia (Cooney, 1998) a través del planteamiento de preguntas que revelen la consciencia de la falta de saberes. En este estudio, el desarrollo de una identidad profesional se marca como objetivo implícito, mientras que la práctica profesional, en la dimensión de la planificación, se usa como contexto de reflexión para desarrollar el conocimiento de forma autónoma.

Identidad profesional

La identidad profesional comprende, más allá de lo que los profesores saben (conocimiento) o hacen (práctica), lo que los profesores son y en qué se convierten, teniendo una naturaleza individual y grupal (Hodges y Hodge, 2015; Wenger, 1998). Hay diferentes facetas (e.g. creencias, interacción con el entorno, actitudes, emociones, autoimagen) que los profesores desarrollan que tienen influencias en el desarrollo de una identidad profesional (van Putten, Stols y Howie, 2014).

En este estudio, si bien no es objeto de análisis en este escrito, se pretende desarrollar en los participantes en el CAGEP, a través del cuestionamiento de su propio conocimiento, una actitud crítica hacia ellos mismos, hacia lo que saben, y hacia sus necesidades de formación profesional, en relación con la planificación de la enseñanza de las matemáticas. Así, la identidad profesional tiene un marcado carácter transversal al estudio, que desarrollaremos en próximas publicaciones.

Práctica profesional

De los diferentes momentos y aspectos que están englobados bajo el término 'práctica profesional', una de las dimensiones fundamentales es la de la planificación de la enseñanza (Kilpatrick, Swaford y Findell, 2001). La planificación de la propia práctica, además de hacer la lección clara, bien articulada, e interesante, permite crear en el profesor una sensación de confianza sobre su contenido (Reys, Suydam y Lindquist, 1995). Desde la perspectiva del uso de la planificación de la enseñanza en contextos de formación de maestros, Perks y Prestage (1994) proponen que, más allá del aporte de la planificación per se, la discusión de la misma permite hacer al maestro más receptivo a estos procesos argumentativos, generándose una base para profundizar en el contenido de la propia planificación. Todas estas consideraciones asumen, implícitamente, la necesidad de poseer un conocimiento profesional rico, profundo, y suficiente para generar dicha planificación.

En el caso que aquí nos ocupa, se exigía a los estudiantes la reflexión sobre los elementos que ellos consideraban que necesitaban conocer, más allá de los que conocían, generando en ellos no sólo una mejora de la planificación, sino también una actitud crítica hacia sí mismos. Así, en esta investigación, la práctica profesional de planificar la propia docencia tiene interés como contexto de uso y aplicación del conocimiento.

Conocimiento profesional

Durante los últimos veinte años, el conocimiento del profesor ha sido un foco de atención de la investigación en educación matemática. En particular, Schoenfeld (2010) asume que el conocimiento es para el profesor un recurso al servicio de su ejercicio profesional. En nuestro caso, el curso está diseñado sobre la base del modelo de conocimiento MTSK (Carrillo, et al., 2013). Este modelo se basa en la propuesta original de Shulman (1986), y en el posterior refinamiento de Ball, Thames y Phelps (2008) de considerar dos grandes dominios, conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido. Asimismo, en la propuesta de Carrillo et al. (2013), se incluye un tercer dominio, constituido por las creencias del profesor, sus actitudes y emociones hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje como elementos centrales, íntimamente relacionados con su identidad profesional, que permean el conocimiento.

En este modelo de conocimiento profesional, se desgranan los elementos del conocimiento matemático que un profesor requiere y usa durante su quehacer profesional en tres tipologías: Conocimiento de los temas (KoT), de la estructura de las matemáticas (KSM) y de las prácticas matemáticas (KPM), abarcando un conocimiento local del tema abordado, sus relaciones con otros temas, y los elementos que constituyen los fundamentos sintácticos de la matemática, respectivamente.

En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, este modelo considera, siguiendo a Ball et al. (2008), tres focos fundamentales: enseñanza, aprendizaje, y currículo. La aportación que hace el modelo de Carrillo et al. (2013) en este dominio es ligar el contenido de los subdominios a la relevancia de la relación con el contenido matemático, de cara a generar especificidad respecto de la matemática. Los tres subdominios que aparecen en la propuesta de Carrillo et al. (2013) están ligados al conocimiento de metodologías, teorías y recursos de enseñanza (Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas-KMT), al conocimiento de las dificultades, aspectos emocionales, teorías de cognición matemática relacionadas con los procesos de aprendizaje (Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas-KFLM), y a los referentes estandarizados como el currículo que permiten organizar la enseñanza de las matemáticas (Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas-KMLS).

En esta investigación asumimos los seis subdominios de MTSK como categorías analíticas, siendo nuestro objetivo relacionar las necesidades de formación que los profesores detectan en sí mismos con los propios subdominios.

Reflexión

En este experimento, el eje es la metacognición, entendida como el proceso de pensar acerca del propio pensamiento, o el acto de monitorizar y controlar los propios procesos cognitivos, como proceso de aprendizaje (McComas, 2014). En este proceso de monitorización del propio pensamiento, entendemos que el profesor, al cuestionarse su propio conocimiento, en forma de auto-preguntas, inicia o refuerza el proceso autónomo de reflexión (Krainer, 1994; Schön, 1983). En este sentido, la reflexión y la actitud crítica son elementos centrales en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Climent, 2005). En esta línea, Potari y Jaworski (2002) proponen la Tríada de Enseñanza para centrar la reflexión de los maestros en tres aspectos concretos: la gestión del aprendizaje, la sensibilidad hacia los estudiantes, y el nivel de desafío matemático. Asimismo, es aceptado que los procesos reflexivos se basan en gran medida en el conocimiento matemático y didáctico, teniendo como consecuencia de dichos procesos la propia construcción, reorganización, y afianzamiento de dicho conocimiento (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009).

En general, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, las preguntas son algo común como parte de las interacciones interpersonales entre todos los agentes de dichos procesos. La educación matemática ha atendido habitualmente a las interacciones alumno-profesor, profesor-alumno y alumno-alumno como parte del proceso de aprendizaje en los contextos escolares, y en particular a las preguntas (e.g. Planas y Morera, 2011). En este estudio, entendemos que la reflexión implica procesos en los que el profesor interacciona consigo mismo de forma crítica. Siguiendo a Sfard (2001), entendemos que la calidad de la interacción determina la calidad del aprendizaje, por lo que cabe asumir que, en el caso de la interacción con uno mismo, es necesario explorar la tipología del contenido de la misma, de cara a comprender mejor la naturaleza de las áreas en las que dicho profesor tenderá a desarrollar su conocimiento de forma autónoma, con la intención ulterior de determinar su calidad.

HACIA UN ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS

En la línea del experimento de enseñanza ya mostrado en Montes et al. (2015), que analizaba el primer ciclo del mismo, mostramos aquí la línea incorporada en el actual (cuarto) ciclo del experimento. Este ciclo añade las preguntas a sí mismo (o auto-preguntas) como elemento de explicitación de la autocognición.

Las preguntas que aquí mostraremos son las realizadas sobre la base del rediseño del problema de Northrop (1981), “el gato”: *Tenemos una cuerda tensada que da la vuelta a la Tierra por el Ecuador. Si añado 10 metros a esa cuerda, y la vuelvo a tensar uniformemente hacia afuera, ¿cabría un gato por debajo de ella?*

En este problema se dio la opción de usar el dato del valor concreto de la longitud del Ecuador, aproximado por 40.000 kilómetros. Una vez planteado el problema, se planteó a los asistentes al curso que respondieran varias preguntas que les permitieran profundizar en la planificación de la enseñanza, un refinamiento de las mostradas en Montes et al. (2015). Adicionalmente, se les planteó la siguiente tarea: *Plantea y responde tres preguntas sobre aspectos ligados al problema y a tu gestión del mismo en un aula. Explica por qué la planteas y las fuentes que has consultado para responderla.*

Analizaremos aquí las preguntas realizadas por la cohorte de 30 maestros egresados que cursaban el CAGEP en la edición de 2016/17. Los perfiles de éstos eran diversos en cuanto a su especialización como maestros, así como en cuanto a su actividad profesional, existiendo alrededor de un 70% que se dedicaba a actividades docentes, con una experiencia entre 3 y 20 años. Para simplificar la lectura, y dada la no relevancia de la identificación de cada profesor para los propósitos de este documento, denominaremos a cada profesor por un número, siendo “Pn” el profesor número n. Mostraremos el análisis de 67 preguntas planteadas por los 30 profesores al problema del gato. Cabe destacar que este número no se ajusta a las 90 esperadas debido a que varios alumnos no realizaron las tareas completamente, planteando una o ninguna pregunta, y otros plantearon preguntas que no se ajustaron a lo demandado.

En el análisis, usaremos el modelo de Carrillo et al. (2013), y sus seis subdominios a modo de categorías analíticas. El análisis de las preguntas se realiza atendiendo a los subdominios de conocimiento que podrían ser alimentados al reflexionar en torno a la pregunta, así como los subdominios finalmente usados para responderlas. En esta investigación, usaremos como indicadores para definir la asignación a cada subdominio el contenido de los mismos, según se describe en Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014), realizando un análisis de contenido, triangulando el análisis a través de la consulta a expertos (Flick, 2006). Mostraremos diversos ejemplos asociados a cada una de las categorías analíticas, así como reflexiones sobre la variedad de preguntas asociadas a cada uno de los subdominios de MTSK. Si bien el carácter del proyecto más amplio en el que se enmarca esta investigación es de corte interpretativo, incorpora métodos mixtos (cuantitativos y cualitativos). Así, incidiremos en las frecuencias relativas de las distintas tipologías de conocimiento, ya que aportan datos significativos respecto de las necesidades de formación que el grupo de maestros estudiado manifiesta.

Diez de las preguntas buscan alimentar conocimiento de dos naturalezas diferentes, estando por tanto asignadas a dos subdominios en el análisis. No nos centraremos en el análisis de las relaciones entre subdominios que estas preguntas permitirían estudiar.

ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS

Mostraremos a continuación algunos de los ejemplos más significativos de preguntas de los profesores, organizadas a través de los subdominios del modelo analítico usado, que nos permitirán mostrar la naturaleza de las necesidades formativas evidenciadas por los participantes a través de las auto-preguntas.

Comenzando con las preguntas que muestran la necesidad de formación en elementos asociadas al conocimiento matemático, encontramos 19 preguntas, un 24,68% del total. De estas, un total de ocho están relacionadas con el Conocimiento de la Estructura Matemática. Estas preguntas responden a la intención de modificar el problema, proponiendo simplificaciones, complejizaciones, o transformaciones del problema sobre la base de sus representaciones. Por ejemplo, P27 propone tres preguntas: *Si en lugar de una circunferencia fuera un poliedro, ¿podría resolverse el problema?, ¿Cuántos metros habría que añadir para que una persona de estatura media, 1,75 m, pudiera pasar por debajo?, ¿Cuánto tardaría una persona en atravesar el mundo por el núcleo y en línea recta?* Cada una de las tres preguntas muestra intereses de distinta índole, todos relacionados con problemas que emergen desde el problema originalmente planteado. Este profesor muestra preguntas cuya respuesta tendería a alimentar conocimiento matemático a un nivel estructural, estableciendo relaciones entre el problema original y otros parecidos. Es asimismo interesante observar cómo las preguntas en forma de problemas alternativos que este profesor presenta tienen niveles de dificultad y ajuste al contenido de primaria muy diferentes. En general, las preguntas asociadas a este subdominio se centran en la transformación de problemas, para hacerlos o más elementales o más avanzados, en relación con el tipo de razonamiento o contenidos requeridos, de ahí que la mayor parte de las conexiones identificadas sean de simplificación y complejización.

En cuanto a las preguntas ligadas al Conocimiento de los Temas, casi todas están ligadas a buscar la descomposición de los elementos matemáticos involucrados en el problema, y a buscar reformulaciones del problema que permitan poner de relieve dichos elementos. Así, P30 localiza tres elementos fundamentales para la resolución: El radio de la tierra, la longitud de la circunferencia, y el valor de pi, y se pregunta cómo modificar el problema para poder centrar la reflexión de los alumnos en cada uno de ellos. Sólo un profesor, P16, hace preguntas que denotan la necesidad de alimentar un conocimiento matemático elemental, como por ejemplo: *¿cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?*

No se identificaron preguntas que mostraran necesidades formativas en el ámbito del Conocimiento de las Prácticas Matemáticas, pese a que el curso contenía elementos que podían activar la reflexión ligada a elementos sintáctico-matemáticos.

Por otra parte, localizamos en el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido gran parte de las preguntas planteadas por los profesores, un 71,43% del total, apareciendo en este caso los tres subdominios.

Un total de 20 de estas preguntas corresponden al Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. En este subdominio encontramos mayoritariamente preguntas centradas en diversidad de aspectos respecto a (i) la profundización en la gestión del problema, y (ii) elementos generales respecto de la enseñanza de los contenidos involucrados en el problema, o con la resolución de problemas.

En cuanto a la gestión del problema, son comunes las preguntas asociadas a las ayudas (Sosa, 2010) que podrían darse a los alumnos de cara a su interacción con el problema, como por ejemplo las planteadas por P30, que identifica, como dijimos anteriormente, tres elementos clave en la resolución, y se pregunta, respecto de estos elementos: *¿Qué ayudas podría darles a mis alumnos para resolver el problema?* En esta línea, P2 genera problemas diferentes al mostrado como ayudas, de manera que el alumno pudiera identificar elementos críticos que contribuirían a resolver el problema del gato, cuestionando la adecuación de cada uno de los problemas como ayuda. A un nivel más general, P20 pregunta: *¿Qué posibles ayudas concretas, podría ofrecer a mis alumnos en caso de que encontrasen dificultades en la elaboración del problema?*

Con la mirada puesta en los elementos generales ligados a la enseñanza de los contenidos del problema, se plantean preguntas que muestran la necesidad de los maestros de pautas sobre cómo gestionar la enseñanza de las matemáticas. En esta línea, P25 pregunta: *¿De qué forma introducir los decimales?*, estando la pregunta centrada en cómo presentar un contenido presente en la resolución del problema concreto, de igual manera que P6 plantea: *¿Cómo podemos hacer más atractiva la enseñanza del número π?*, en pos de trabajar, desde la gestión del problema, el interés de los alumnos por el número pi. P17 centra su interés en elementos propios de la gestión de problemas matemáticos: *¿Qué fases metodológicas se distinguen a la hora de presentar un problema a los alumnos?* Finalmente, dos participantes, P18 y P20, se plantean si existe la posibilidad de trabajar este problema a través de las nuevas tecnologías, y la forma en que estas podrían adaptarse a la gestión del problema.

Encontramos, en cuanto al Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático, 19 preguntas que evidencian necesidad de los participantes en cuanto a la construcción de conocimiento de esta naturaleza. En este subdominio, encontramos cuestionamientos en tres diferentes niveles de aproximación al problema.

Así, encontramos un primer nivel de preguntas ligadas a elementos matemáticos usados en la resolución del problema como la de P10: *¿Qué dificultades tienen los alumnos a la hora de abordar la longitud de la circunferencia?*, la de P21: *¿Cómo se espera que un alumno de primaria relacione el problema en cuestión con la fórmula de la longitud de la circunferencia ($L = 2\pi r$)?*, o la pregunta que plantean P5 y P25: *¿Cuáles son los principales errores que cometen [los alumnos] con los números decimales?*. En este mismo nivel encontramos preguntas ligadas elementos propios de la actividad matemática de forma más general, pero también centrada en el problema, como la de P17: *En este problema interviene la abstracción, ¿qué dificultades presenta este concepto en su integración en la educación primaria?* En el segundo nivel encontramos aquellas cuestiones que, si bien tienen relación con el problema, hacen referencia a elementos más alejados de la concreción del problema propuesto, como el caso de P22, que plantea dos preguntas: *¿Qué herramientas necesita un niño para resolver problemas?* y *¿Qué papel juega la comprensión lectora en la resolución de problemas?*, centrándose en las habilidades que un alumno pudiera poseer, y en las características de las mismas a la hora de resolver problemas. P19 muestra, en ese mismo grado de aproximación al problema, reflexiones centradas en aspectos no tan ligados a lo conceptual: ¿Puede el sistema de creencias interferir dentro de la resolución de problemas? En un último nivel, tenemos preguntas que abordan elementos muy generales, como la de P19: *¿Es relevante el trabajo en grupos de iguales en la construcción de conocimiento matemático?*, que liga el cuestionamiento al aprendizaje en general de las matemáticas, y no al problema.

En cuanto al último de los subdominios propuestos para el conocimiento didáctico del contenido, el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas, se obtuvieron 16 preguntas. En cuanto a este subdominio, encontramos preguntas centradas fundamentalmente en tres aspectos. El primero de ellos es la adecuación del problema a los contenidos de Educación Primaria, como en el caso de P8, que se plantea si el problema es adecuado para 6º de E.P., y si realmente sirve para el aprendizaje del alumno de esta etapa. En segundo lugar, encontramos preguntas ligadas a la secuenciación de los temas asociados al problema respecto de otros, como el caso de P5 y P25, que se preguntan: *¿Qué es mejor enseñar antes, las fracciones o los decimales?* Finalmente, el tercer grupo de preguntas son las centradas en la relación con diferentes estándares curriculares, como el caso de P3, que liga su reflexión al contenido curricular andaluz, P10, que liga una de sus preguntas a reflexionar sobre la aplicabilidad de los estándares de aprendizaje evaluables a la concreción de este problema, o P19 y P14, que se plantean cómo el trabajo matemático que este problema induce responde al marco de competencias que establecen el currículo nacional y PISA, respectivamente.

Finalmente, nos encontramos con tres profesores diferentes que plantearon cuestionamientos mostrando una actitud reflexiva ante las propias creencias respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, uno de ellos planteó: *¿Por qué es importante plantear discusiones de este problema entre los alumnos?*, buscando fundamento a un papel activo del alumnado en procesos de indagación y reflexión matemática.

En la tabla siguiente (Tabla 1), mostramos una síntesis de los totales de preguntas por dominios y subdominios del modelo de análisis.

Tabla 1: síntesis por dominios y subdominios del total de preguntas y porcentajes

Dominio	Subdominio	Nº de preguntas	Porcentaje
MK	KoT	11	16,42%
19 preguntas	KSM	8	11,94%
24,68%	KPM	0	0%
PCK	KMT	20	29,85%
55 preguntas	KFLM	19	28,36%
71,43%	KMLS	16	23,88%
Creencias		3	4,48%

REFLEXIONES FINALES

Esta investigación se basa en la autonomía y la reflexión como dos ejes fundamentales del desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Krainer, 1994; Schön, 1983), haciendo uso de elementos metacognitivos para invitar a los profesores a explicitar aquellos aspectos en los que sintieran necesidades de formación. Asimismo, esta dinámica da a los profesores la posibilidad de tener voz sobre los elementos de conocimiento en los que sienten mayor necesidad. Así, obtenemos información que puede ser tenida en cuenta de cara al desarrollo de los programas de formación inicial y continua desde dos perspectivas, (i) la inclusión de elementos que se adapten a las necesidades que los profesores ponen de relieve y (ii) la generación de dinámicas en las que los profesores adquieran una capacidad crítica respecto de su propio conocimiento, tanto matemático como didáctico del contenido. Este último objetivo parece necesario a la luz de la observación de los resultados del análisis, en contraposición con los resultados de las evaluaciones de conocimiento profesional a nivel nacional e internacional.

Pese a que los resultados de las evaluaciones en pruebas como TEDS-M o TIMSS muestran que los profesores en formación, en particular los españoles, tienden a tener carencias en su conocimiento matemático, observamos en este estudio que los profesores participantes en el Curso de Adaptación al Grado de Educación Primaria parecen tender a necesitar alimentar su conocimiento didáctico del contenido en mayor medida que el conocimiento matemático (Tabla 1). Entendemos que es necesario, tanto en la formación inicial como continua, llevar a los profesores a comprender, de manera significativa, la necesidad y sobre todo la relevancia de poseer un conocimiento del contenido matemático de naturaleza especializada. Esto podría llevar a los profesores a plantearse cuestiones de naturaleza matemática, permitiendo la emergencia de cuestiones que abordaran también, aspectos de índole sintáctica, de los que no se ha tenido evidencia en este estudio.

Esta investigación muestra la riqueza y variedad de los planteamientos que maestros egresados pueden realizar alrededor de un problema. En futuras aproximaciones al contenido de las preguntas, pretendemos mostrar un análisis más fino, explorando no sólo los subdominios en los que los profesores detectan sus necesidades de formación, sino el contenido concreto de los mismos en el que identifican dichas necesidades de forma detallada, de manera que podamos describir en profundidad las necesidades que estos maestros manifiestan. Creemos también interesante, en un futuro, estudiar las necesidades de formación que los maestros identifican según el perfil de experiencia docente que posean, ya que hipotetizamos que estas dos variables, a priori, pueden tener una interrelación profunda.

Asimismo, aquí mostramos el total de preguntas planteadas por los profesores en torno a uno de los problemas planteados en el curso, mientras que el total de preguntas recogidas supera las 500 para el total de siete situaciones problemáticas planteadas. Abordar la totalidad de preguntas nos permitirá analizar en mayor profundidad y con más detalle los núcleos en torno a los que los profesores participantes detectan necesidades de formación. Un objetivo ulterior de esta línea de investigación pretende identificar perfiles que recojan las diferentes sensibilidades de necesidades de conocimiento.

Agradecimientos

Los autores son miembros del proyecto de investigación “Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Este trabajo también se realiza en el marco del Grupo de Investigación DESYM (HUM168), del Plan Andaluz de Investigación.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Michigan: Proquest Michigan University.

Cooney, T. (1998). Conceptualizing the professional development of teachers. *Selected papers of ICME 8* (pp. 101-117). Sevilla, Spain: ICME.

Flick, U. (2006). *An introduction to qualitative research*. London: SAGE Publications.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Hodges, T. E. y Hodge, L.L. (2015). Unpacking personal identities for teaching mathematics within the context of prospective teacher education. *Journal of mathematics teacher education*. Online Publication.

Holton, D. y Thomas, G. (2001). Mathematical Interactions and their Influence on Learning. En Clarke (Ed.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*, 75-104. Holanda: Kluwer.

Hsu, Y., Iannone, P., She, H. y Hadwin, A. (2016). Preface for the IJSME Special Issue: Metacognition for Science and Mathematics Learning in Technology-Infused Learning Environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 243-248.

Jones, K. y Smith, K. (1997). Student Teachers Learning to Plan Mathematics Lessons. Documento presentado en la *Conferencia Anual de la Association of Mathematics Education Teachers* (AMET1997). Leicester.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematic*s. Washington, DC: National Academy Press.

Krainer, K. (1994). PFL-Mathematics: A teacher in-service education course as a contribution to the improvement of professional practice in mathematics instruction. En J.P. Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference, 3*, 104-111.

McComas, W. F. (2014). Metacognition. En W. F. McComas (Ed.), *The language of science education: An expanded glossary of key terms and concepts in science teaching and learning* (p. 63). Holanda: Sense.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

Northrop, E. (1981). *Paradojas Matemáticas.* México: UTEHA.

Perks, P. y Prestage, S. (1994), "Planning for Teaching". En B Jaworski y A Watson (Eds.), *Mentoring in Mathematics Teaching*. London: Falmer.

Planas, N. y Morera, L. (2011). Educación Matemática e interacción en el aula de secundaria. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas, 58*, 77-83.

Ponte, J.P. (2012). Mathematics teacher education programs: practice and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(5), 343-346.

Potari, D. y Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 351-380.

Reys, R. E., Suydam, M. N. y Lindquist, M. M. (1995), *Helping Children Learn Mathematics*. Mass: Allyn and Bacon.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London, UK: Sage.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 13–57.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral no publicada. Huelva: Universidad de Huelva.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, N J: Erlbaum.

Van Putten, S., Stols, G. y Howie, S. (2014). Do prospective mathematics teachers teach who they say they are? *Journal of Mathematics Education, 17*(4), 369-392.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University Press.

CÓMO PROGRESAN ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN LA IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS MATEMÁTICOS NECESARIOS PARA INTERPRETAR LA COMPRENSIÓN DE LA LONGITUD Y SU MEDIDA EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN INFANTIL

How do prospective kindergarten teachers progress in the identification of mathematical elements needed for interpreting the understanding of children in the learning of length and its measure?

Pérez-Tyteca, P.[a], Callejo, M.L.[a], Moreno, M.[a], Sánchez-Matamoros, G.[b] y Valls, J.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar cómo un experimento de enseñanza diseñado ad hoc ayudó a los estudiantes para maestro en Educación Infantil a progresar en la identificación de los elementos matemáticos sobre la longitud y su medida, necesarios para interpretar situaciones de enseñanza-aprendizaje. A los estudiantes para maestro de infantil se les proporcionó como información una trayectoria de aprendizaje sobre este tópico. Los resultados muestran que a los estudiantes les ha resultado más fácil identificar algunos elementos matemáticos como el reconocimiento de la longitud, la unicidad y la iteración de la unidad de medida. La mitad de ellos fueron capaces de identificar simultáneamente la unicidad y la iteración, lo que les permitió a dos terceras partes de estos estudiantes interpretar la comprensión de algunos de los niños.

Palabras clave: *longitud, medida de la longitud, elementos matemáticos, mirada profesional, educación infantil.*

Abstract

The aim of this research is to analyse the effects of a teaching experiment designed ad hoc, on prospective kindergarten teachers while they learn to identify the mathematical elements needed for interpreting teaching situations related to length magnitude and its measure. Prospective kindergarten teachers had theoretical information of a learning trajectory of length as a magnitude and its measure. The easiest elements of identifying were recognition of length, unicity and the iteration of length unit. One half of them, identified unicity and iteration, both together, what allow them interpret the understanding of children.

Keywords: *length, measure of lengths, mathematical elements, professional noticing, childhood education.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han destacado la importancia de aprender a identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, analizar estos aspectos y usar este análisis para tomar decisiones informadas; es decir, que los estudiantes para profesores o los profesores en ejercicio desarrollen destrezas para analizar la práctica de forma sistemática (van Es y Sherin, 2002). Esto les ayudará a estar mejor preparados para buscar propuestas de acción con el propósito de que los estudiantes progresen en el aprendizaje.

Pérez-Tyteca, P, Callejo, M.L., Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2017). Cómo progresan estudiantes para maestro en la identificación de los elementos matemáticos necesarios para interpretar la comprensión de la longitud y su medida en alumnos de educación infantil. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 397-406). Zaragoza: SEIEM.

Este tipo de análisis, cuando se centra en las producciones de los estudiantes, requiere que los profesores: (a) identifiquen en ellas los aspectos relevantes; (b) interpreten el pensamiento matemático de los estudiantes; y (c) tomen decisiones basadas en dicha interpretación (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Jacobs Lamb y Philipp consideran que "existe una relación anidada entre las tres destrezas, de modo que decidir cómo responder en base a la comprensión de los estudiantes solo puede ocurrir si los profesores interpretan la comprensión de los estudiantes, y estas interpretaciones solo se pueden hacer si los profesores prestan atención a los detalles de las estrategias de los estudiantes" (p. 197).

Por otra parte uno de los temas relevantes en educación matemática desde la etapa de Educación Infantil es el de la medida, entendida como el conocimiento de los diferentes atributos, las formas de medirlos y las unidades necesarias para expresar el resultado. Alsina (2011) indica que el aprendizaje de la medida de los atributos mesurables es un proceso que comprende tres etapas cuya finalidad se especifica a continuación:

- Fase de preparación: Reconocer y comprender el atributo mesurable que se va a trabajar.
- Fase de práctica de medida: Descubrir la necesidad de comparar una magnitud con una unidad.
- Fase de consolidación de técnicas y construcción de conceptos: Comprender los diferentes órdenes de unidades y las equivalencias entre ellos.

En nuestro trabajo hemos diseñado un experimento de enseñanza que abarca las dos primeras fases y tenía como objetivo que los estudiantes para maestro de Educación Infantil aprendieran a usar evidencias del pensamiento matemático de los alumnos para tomar decisiones, en el contexto del aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Para ello les hemos proporcionado como información una trayectoria de aprendizaje sobre este tópico adaptada de Sarama y Clements (2009). Esta trayectoria consta de:

(a) un objetivo de aprendizaje;

(b) la progresión en el aprendizaje descrita a partir de los elementos matemáticos sobre la magnitud longitud y su medida (Tabla 1);

(c) actividades instruccionales a lo largo de la secuencia.

Los elementos matemáticos de la magnitud longitud son los siguientes: reconocimiento de la longitud, conservación –la longitud de un objeto no cambia bajo ciertas transformaciones- y transitividad –si la longitud de un objeto X es menor que la de otro objeto Y, y la del objeto Y es menor que la de otro objeto Z, entonces la longitud del objeto X es menor que la del objeto Z. Y los elementos matemáticos de medida de la longitud son: unicidad de la unidad de medida, iteración de la unidad de medida, acumulación o número de iteraciones que se han realizado, universalidad de la unidad de medida y relación entre el número y la unidad de medida, es decir, a mayor longitud de la unidad de medida menor número de iteraciones.

De esta manera disponían de orientaciones sobre los elementos relevantes que debían identificar, sobre cómo éstos les ayudaban a situar a los estudiantes en un determinado nivel de comprensión, y también qué tipo de tareas deberían proponer a los niños de educación infantil (3-6 años) para que avanzasen en la comprensión. Esta trayectoria describe cinco niveles de comprensión; los tres primeros corresponden a la magnitud longitud y los dos últimos a su medida.

En distintas investigaciones (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares, 2012; Zapatera y Callejo, 2013) se ha puesto de manifiesto que la identificación de los elementos matemáticos es condición necesaria pero no suficiente para poder interpretar la comprensión de los estudiantes. En este sentido Barnhart y van Es (2015) han considerado tres niveles de sofisticación o elaboración de las destrezas identificar, analizar y responder (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010), y han investigado cómo el nivel de sofisticación o grado de elaboración de una de ellas puede o no influir en el nivel de sofis-

Tabla 1. Una progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (adaptada de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la longitud: – Identifican las cualidades de la longitud – Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: – Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: – Comparaciones indirectas. – Ordenaciones de objetos. – Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: – Realizan iteraciones de unidad de medida. – Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida. Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones

ticación de las otras. Sus resultados muestran que un alto nivel de sofisticación en el análisis y la toma de decisiones ante una situación, requiere un alto nivel de sofisticación en la identificación de los aspectos relevantes, pero que esta relación no siempre se da en sentido inverso. Es decir, prestar una buena atención a los aspectos relevantes de la práctica es necesario, pero no suficiente para mejorar dicha práctica. Por ello, es importante proporcionar a los estudiantes para maestro ideas teóricas que les permitan analizar situaciones de la práctica, porque esto incidirá en el tipo de elementos que identifiquen como relevantes y en la forma en que usen estos elementos para interpretar estas situaciones.

El objetivo de nuestra investigación es analizar cómo un experimento de enseñanza diseñado ad hoc ayudó a los estudiantes para maestro de Educación infantil a progresar en la identificación de los elementos matemáticos sobre la longitud y su medida, que son necesarios para interpretar la comprensión de los alumnos de Educación Infantil, en distintas situaciones hipotéticas de enseñanza-aprendizaje.

MÉTODO

Los participantes fueron 47 estudiantes para maestro de Educación Infantil que cursaban la asignatura “Aprendizaje de la Geometría”, en el sexto cuatrimestre del “Grado en Maestro en Educación Infantil”. Uno de los módulos de la asignatura era el estudio de “La longitud y su medida en Educación Infantil”. Como ya se ha indicado, a los futuros maestros se les proporcionó un documento teórico con una trayectoria de aprendizaje adaptada de Sarama y Clements (2009).

A lo largo del módulo se les propusieron cinco tareas profesionales que consistían en analizar situaciones de enseñanza desde la perspectiva de las tres destrezas de la mirada profesional: identificar los elementos matemáticos, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los niños y proponer decisiones de acción para que los niños avanzasen en su comprensión. En esta investigación nos hemos centrado en tres de las cinco tareas propuestas, la inicial, una intermedia y la final; hemos seleccionado estas tres porque eran las que se referían a las respuestas de los niños. En la Tabla 2 se describe cada una de ellas y se indica cuáles son los elementos matemáticos de la longitud y su medida que los participantes debían identificar, para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los niños que participaron en las situaciones de enseñanza-aprendizaje propuestas.

Tabla 2. Descripción de las tres situaciones de enseñanza-aprendizaje y sus elementos matemáticos

Situación	Descripción de la situación de enseñanza-aprendizaje	Elementos matemáticos
Inicial	Se muestra un vídeo donde la maestra propone a los niños que recorten una tira de papel tan larga como cada uno de ellos. Los niños hacen diversos ensayos para hacer una señal a la tira y que quede exactamente de su altura (de pie, en el suelo, de pie pero apoyados en un armario…). Luego las decoran. Con ayuda de la maestra comparan la longitud de las tiras dos a dos y la maestra las ordena. (Adaptado de van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2005)	Reconocimiento Conservación
Intermedia	Se muestra con viñetas una salida de los niños, en dos equipos, a un parque para medir el contorno de un árbol que cada equipo selecciona. El equipo A seleccionó un árbol de tronco delgado y el equipo B otro de tronco grueso. Los niños han llevado trozos de cuerdas para medir, pero al equipo B no le alcanza la suya; ante esta dificultad cuatro niños rodean el tronco con sus brazos. Luego la maestra les pregunta qué pasaría si cambiasen dos de los cuatro niños por otros dos. La situación presenta evidencias del uso por parte de los niños de elementos matemáticos de la longitud y su medida. (Adaptado de Alsina, 2011)	Reconocimiento Unicidad Iteración Acumulación
Final	La maestra propone a los niños hacer collares usando cuerdas de distinta longitud y distintas formas (enrollada, estirada y doblada) y abalorios/cuentas de diferentes clases y tamaños (macarrones, estrellitas, etc.) y los niños eligen diferentes materiales para hacer el collar. Por ejemplo, Mario usó abalorios de distintos tamaños; Almudena eligió abalorios del mismo tamaño y los insertaba dejando huecos entre ellos; Elena y Luis usaron abalorios del mismo tamaño y los insertaron sin dejar huecos. Una vez confeccionados los collares, se produce un diálogo entre la maestra y los niños. El diálogo proporciona evidencias de diferentes características de la comprensión de la longitud y su medida. (Diseñado ad hoc)	Conservación Unicidad Iteración Acumulación

Como se puede constatar, cada elemento matemático está presente en dos situaciones. Las características de las respuestas de los niños a la tarea final, en cuanto a la comprensión que muestran de los elementos matemáticos y a su nivel en la progresión de aprendizaje (Tabla 1), se muestran en la Tabla 3.

Como puede observarse en la Tabla 3, el elemento *conservación* permite situar a Mario y Almudena en el nivel de progresión correspondiente, y los elementos *unicidad, iteración* y *acumulación* permiten hacerlo con Luis y Elena.

En cada situación se plantearon tres cuestiones relativas a las destrezas de identificar, interpretar y decidir del tipo:

- Cuestión 1. Justifica las **características de la comprensión** puestas de manifiesto en cada una de las viñetas indicando los elementos matemáticos que están implícitos.
- Cuestión 2. Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** situarías a los niños que participan en las viñetas? Justifica tu respuesta.
- Cuestión 3. Suponiendo que eres la maestra de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje** y propón **una tarea** para seguir profundizando en la comprensión de la longitud y su medida.

Tabla 3. Características de las respuestas de los niños a la situación final

Niños	Nivel	Evidencias de la comprensión de los elementos matemáticos
Mario	1	NO comprende la **conservación** de la longitud. NO considera la **unicidad** de la cantidad que se toma como unidad.
Almudena	1	NO comprende la **conservación** de la longitud. SÍ considera la **unicidad** de la cantidad que se toma como unidad. NO considera la **iteración** de la unidad de medida.
Luis	4	SÍ comprende la **conservación** de la longitud. SÍ considera la **unicidad** de la cantidad que se toma como unidad, la iteración y la acumulación. No hay evidencias de que establezcan relación entre el número y la medida. NO hace uso de la **relación inversa** entre número y medida.
Elena	4	SÍ considera la **unicidad** de la cantidad que se toma como unidad, la **iteración** y la **acumulación**. NO hay evidencias de que establezcan **relación entre el número y la medida**.

Los datos son las respuestas de los participantes a las dos primeras cuestiones. Aunque se preguntaba explícitamente por los elementos matemáticos en la primera cuestión, los futuros maestros también han hecho referencia a estos en la segunda para razonar su respuesta.

Para el análisis de las respuestas de los participantes, en relación a cada uno de los elementos matemáticos hemos considerado tres categorías: (1) no nombra el elemento; (2) lo nombra o lo describe de forma retórica, sin usar las características de la tarea o las intervenciones de los niños; y, por último, (3) lo nombra y lo describe de forma razonada, apoyándose en las características de la tarea y/o en las intervenciones de los niños. Hemos considerado que en las respuestas de las categorías 1 y 2 no se identifica el elemento matemático en cuestión (NI), y que en las respuestas de la categoría 3 sí se identifica (I).

Para analizar el progreso de cada uno de los participantes en la identificación de los elementos matemáticos en las tareas del experimento de enseñanza, hemos recogido información, en primer lugar, sobre a qué elementos había hecho o no referencia; en segundo lugar, si identificaba o no cada elemento al que había hecho referencia. Hemos considerado que un estudiante para maestro identificaba un elemento matemático si lo hacía de forma razonada, apoyándose en las características de la tarea o en las evidencias proporcionadas por los diálogos de los niños. Este análisis nos permitió identificar para cada elemento matemático cuatro grupos de estudiantes para maestro: (1) los que no han identificado un elemento matemático en la primera tarea en la que interviene pero sí en la siguiente (NI-I); (2) los que han identificado un elemento matemático en las dos tareas en que interviene dicho elemento (I-I); (3) los que no han identificado un elemento matemático en ninguna de las dos tareas en que interviene (NI-NI); (4) los que han identificado un elemento matemático en la primera tarea que interviene pero no en la siguiente (I-NI). A continuación, analizamos si aquellos estudiantes para maestro que habían identificado los elementos matemáticos en la tarea final, los habían usado para interpretar la comprensión de los alumnos de infantil apoyándose en evidencias (Tabla 3).

Para asegurar la validez y fiabilidad del análisis, un grupo de cinco investigadores analizaron primero una pequeña muestra a partir de la cual se discutieron las codificaciones y las relaciones de éstas con las evidencias. Una vez llegado a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar las codificaciones iniciales y constatar su validez (Strauss y Corbin, 1994).

RESULTADOS

Los resultados muestran que los participantes han identificado con más frecuencia unos elementos que otros; por ejemplo, han identificado, en las dos tareas que aparecía, el elemento matemático 'reconocimiento' (columna I-I; Tablas 4 y 5). Por otra parte, sólo algunos de ellos han identificado algunos de los elementos de medida (en particular 'acumulación' y 'unicidad') en las dos tareas en las que aparecían (columna NI-NI, Tabla 5). Por último, el mayor progreso se ha observado en los elementos de medida 'unicidad' e 'iteración' (columna NI-I; Tabla 5) y, sin embargo, parece que el reconocimiento del elemento 'conservación' (columna I-NI; Tabla 4) ha presentado algunas dificultades a lo largo de las diferentes tareas.

Tabla 4. Reconocimiento de los elementos matemáticos de la magnitud en las tareas propuestas

	NI-I	I-I	NI-NI	I-NI
Reconocimiento (Tareas inicial e intermedia)	4	24	11	8
Conservación (Tareas inicial y final)	8	4	15	20

Tabla 5. Reconocimiento de los elementos matemáticos de la medida en las tareas intermedia y final

	NI-I	I-I	NI-NI	I-NI
Unicidad (Tareas intermedia y final)	27	1	19	0
Iteración (Tareas intermedia y final)	28	7	11	1
Acumulación (Tareas intermedia y final)	9	5	27	6

Elementos matemáticos de la longitud

El elemento *reconocimiento de la longitud* aparecía en las tareas inicial e intermedia. Este elemento ha sido identificado mayoritariamente por los estudiantes para maestro (36 de los 47). De ellos 24 lo identificaron en la tarea inicial e intermedia; 8 en la tarea inicial y no en la intermedia; y finalmente, 4 estudiantes que no lo reconocieron en la tarea inicial, sí lo hicieron en la intermedia (Tabla 4).

Un ejemplo de estudiante que identifica este elemento tanto en la tarea inicial como en la intermedia es el E7-1 (estudiante número 1 del grupo 7) que, refiriéndose a la primera viñeta mostrada en la tarea inicial, comenta:

E7-1: Los niños reconocen la magnitud longitud como un atributo de la tira de papel, es decir, identifican 'largo-corto' y 'alto-bajo'.

En la tarea intermedia, este estudiante indica que uno de los equipos reconoce la longitud como un atributo y lo demuestra cuando los niños afirman:

E7-1: 'lo hemos elegido porque tiene el tronco fino y delgado'.

En relación al progreso en la identificación del elemento matemático reconocimiento cabe señalar que hay 4 estudiantes que progresan pues pasan de no identificarlo en la tarea inicial a hacerlo en la intermedia; así mismo hay 24 estudiantes que consolidan la identificación de dicho elemento al nombrarlo y describirlo de forma razonada en ambas tareas.

En cuanto al elemento *conservación de la magnitud* fue identificado por 32 estudiantes. De ellos 4 lo identificaron tanto en la inicial como en la final; 8 estudiantes que no lo reconocieron inicialmente, sí lo hicieron en la tarea final; y 20 que lo identificaron inicialmente no lo hicieron en la tarea final (Tabla 4).

La dificultad que entraña este elemento puede verse ejemplificada con el caso del estudiante E7-3, que en la tarea inicial sí identifica la conservación y lo justifica argumentando lo siguiente:

E7-3: En la viñeta 2 se transforma la tira de papel de vertical a horizontal y los niños aprecian que la longitud sigue siendo la misma.

Sin embargo, en la tarea final no hace alusión alguna a este elemento.

En relación al progreso en la identificación del elemento matemático conservación de la magnitud cabe señalar que hay 8 estudiantes que pasan de no identificarlo en la tarea inicial a identificarlo en la final, por lo que podríamos hablar de que estos estudiantes han progresado en relación a la identificación de este elemento; igualmente 4 consolidan la identificación del elemento conservación al nombrarlo y describirlo de forma razonada en ambas tareas.

De los 12 estudiantes que han progresado cabe señalar que esta identificación le ha permitido a 9 de ellos interpretar la comprensión de al menos dos de los niños de la tarea final, Mario y Almudena. Por ejemplo, el estudiante E1-20 afirma lo siguiente:

> E1-20: A Mario lo clasificaría en el nivel 1, pues el niño aún no tiene adquirida la conservación al afirmar que su collar es más largo que el de Luis por utilizar más macarrones que él, sin darle importancia a la longitud de la cuerda. Almudena también estaría en el nivel 1, pues la niña no tiene adquirida la conservación, y no llega a comprender que su cuerda y la de Elena son igual de largas, independientemente de cuál contenga más o menos macarrones.

Mientras, el resto de estudiantes (3), a pesar de la identificación no han sido capaces de interpretar la comprensión de estos niños.

Elementos matemáticos de la medida de longitud

En cuanto a los elementos *unicidad* e *iteración* solo 1 y 8 estudiantes, respectivamente, identificaron estos elementos en la tarea intermedia; en cambio 28 y 35, respectivamente, los identificaron en la tarea final (Tabla 5). En estos elementos se percibe un claro progreso en cuanto a su identificación. Un ejemplo de estudiante que progresa en la identificación de estos dos elementos es el estudiante E4-2, que pasa de no nombrar ninguno de ellos en la tarea intermedia a identificarlos en la tarea final. En esta última tarea indica (refiriéndose a Almudena):

> E4-2. No sabe iterar de manera correcta 'estrellitas muy separadas', ni tampoco reconoce la necesidad de la unicidad de la unidad de medida para poder medir lo mismo con diversas personas 'están midiendo con macarrones y estrellitas'.

Además, afirma que Luis sí reconoce la unicidad de la unidad de medida, ya que utiliza macarrones del mismo tipo, y apunta que Elena sabe iterar correctamente sin solapamientos ni saltos, ya que sus estrellitas están todas juntas.

Entre los estudiantes que identificaron uno u otro elemento en la tarea intermedia, hubo 23 que fueron capaces de identificar ambos elementos en la tarea final. Esta identificación permitió a 15 de ellos interpretar la comprensión de Luis y Elena. Por ejemplo, el estudiante E5-1 indica lo siguiente:

> E5-1: Luis: nivel 4. Reconoce la unicidad de la unidad de medida utilizando macarrones siempre del mismo tamaño, itera bien ya que nada indica lo contrario y sabe que al comparar, su cuerda es más larga que la de Mario. Sin embargo, no reconoce la necesidad de la universalidad de medida, por ello no es de nivel 5. Elena: nivel 4. Aplicando la transitividad, escoge la cuerda más larga. Itera correctamente las estrellitas, sin dejar huecos ni hacer superposiciones.

En cambio 8 estudiantes, pese a haber identificado ambos elementos en la tarea final, no fueron capaces de interpretar dicha comprensión.

En cuanto al elemento *acumulación*, 11 estudiantes lo identificaron en la tarea intermedia y 14 en la final. En este elemento no se detectaron cambios sustanciales, pues la mayoría de los estudiantes se mantuvieron, observándose una ligera diferencia a favor de los que progresan sobre los que retroceden.

Un ejemplo de estudiante que identifica la acumulación tanto en la tarea intermedia como en la final es el E7-4, que en la tarea intermedia afirma que:

> E7-4. Para el equipo A y B hay acumulación, ya que el equipo A solo necesita una iteración (una niña para rodear el árbol) y el equipo B acumula 4 iteraciones (4 niños para rodear el árbol).

Este mismo estudiante, en la tarea final afirma que tanto Luis como Elena tienen adquirida la acumulación, ya que cuentan los macarrones que han puesto en el collar y las estrellitas respectivamente.

La identificación de este elemento, junto a la identificación de los elementos *unicidad* e *iteración*, permitía interpretar la comprensión de dos de los niños implicados en la tarea final: Luis y Elena. De los 23 estudiantes que identificaron la unicidad y la iteración simultáneamente, sólo 7 identificaron también el elemento *acumulación* y de ellos 2 utilizaron dicha identificación para interpretar la comprensión de Luis y Elena en la tarea final. Un ejemplo de estudiante que identificó estos tres elementos e interpretó la comprensión de los cuatro niños es el E1-22, que comenta:

E1-22: Luis está en el nivel 4, tiene adquirido que la unidad de medida debe ser única, por eso elige los macarrones del mismo tipo. Los itera y acumula. Elena está también en el nivel 4, porque ha usado una unidad de medida sin dejar superposiciones, ni saltos, sabiendo que la palabra-número hacer referencia al espacio del objeto todo cubierto por las unidades de medida.

Los otros 5 estudiantes, pese a haber identificado los tres elementos no fueron capaces de interpretar la comprensión de Luis y Elena.

Atendiendo a la identificación simultánea de elementos de magnitud y medida, de los 47 estudiantes, sólo 5 identificaron los elementos conservación, unicidad e iteración en la tarea final. La identificación de estos tres elementos permitió además a 4 de ellos interpretar la comprensión de todos los niños implicados en la tarea. Un caso es el del estudiante E1-8, que expone lo siguiente:

E1-8: Mario está en el nivel 1 porque no es capaz de ver que la cuerda C, aunque tenga un macarrón más, no es la más larga. Mario relaciona la longitud con la cantidad de unidades, que son diferentes, por tanto, no llega al nivel 2 ya que no posee el elemento de conservación. Almudena, puesto que utiliza unidades del mimo tipo, está un paso por encima de Mario, pero al igual que él, no tiene adquirida la conservación ya que se fija en que el collar de Elena (que ha utilizado la misma cuerda que ella) tiene más unidades. La situamos en la transición del nivel 1 al 2. Luis y Elena: situamos a ambos niños en el nivel 4 ya que utilizan unidades del mismo tipo y realizan iteraciones sin saltos ni superposiciones

Cabe destacar que ningún estudiante identificó simultáneamente en la tarea final la conservación, la unicidad, la iteración y la acumulación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de nuestra investigación era analizar cómo un experimento de enseñanza podría ayudar a progresar a los futuros maestros de Educación Infantil en la identificación de los elementos matemáticos sobre la longitud y su medida, necesarios para interpretar la comprensión de los alumnos de Educación Infantil, en distintas situaciones de enseñanza-aprendizaje. Diversas investigaciones sobre el desarrollo de la mirada profesional en los estudiantes para maestro (Fernández et al., 2013; Son, 2013) han mostrado la necesidad de establecer la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, para poder interpretar la comprensión de los niños. Por ello, en un primer momento el estudiante debe ser capaz de identificar los elementos matemáticos, para pasar en un segundo momento a relacionar este conocimiento matemático con el pensamiento matemático de los niños de infantil y, a partir de ahí, poder interpretar la comprensión de los niños. Nuestros resultados han mostrado como el hecho de reconocer los elementos matemáticos en situaciones de enseñanza-aprendizaje, no quiere decir que lleve al futuro maestro a interpretar la comprensión que se pone de manifiesto por parte de los niños de infantil en las situaciones de enseñanza-aprendizaje planteadas (Barnhart y van Es, 2015; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Zapatera y Callejo, 2013).

Por otra parte, los resultados muestran que los estudiantes mayoritariamente han identificado algunos elementos matemáticos de medida: la iteración y la unicidad, y de magnitud: el reconocimiento de la longitud, y que han tenido mayor dificultad en identificar la conservación de la magnitud. La mitad de los estudiantes han sido capaces de identificar simultáneamente la unicidad y la iteración. Esta identificación ha permitido a dos terceras partes de estos estudiantes interpretar la comprensión de dos de los cuatro niños implicados en la tarea final. Esto muestra que los estudiantes han adquirido cierto manejo en estos dos elementos de medida, si bien no ha ocurrido lo mismo con el elemento acumulación, ya que de los estudiantes que identificaron la unicidad y la iteración, sólo la tercera parte identificó también la acumulación y de ellos sólo dos han sido capaces de interpretar la comprensión de los dos niños.

Para poder interpretar la comprensión de todos los niños en la tarea final era necesario identificar, al menos uno de los elementos de magnitud (conservación) y dos elementos de medida (unicidad e iteración). De los 47 participantes en el estudio solo 5 han identificado estos tres elementos y 4 de ellos han sido capaces de interpretar la comprensión de los cuatro niños implicados en la tarea. Así, vemos como, aunque un número elevado de estudiantes para maestro ha sido capaz de identificar elementos de medida, muchos de ellos parecen haber "olvidado" los elementos de magnitud cuando resuelven la tarea final, a pesar de que en el módulo de formación se les hizo hincapié en el carácter acumulativo de los niveles de comprensión de los niños. Somos conscientes de que este hecho puede haber sido provocado, en parte, por el tipo de situaciones que los estudiantes han analizado. El hecho de que la tarea inicial estuviese centrada en la idea de magnitud (recortar una tira de papel tan larga como cada niño), mientras que la intermedia y la final estaban más focalizadas en la medida de la longitud (medir el perímetro de un árbol o comparar la longitud de los collares confeccionados por los niños), ha podido llevar a los estudiantes a obviar los elementos de magnitud en las tareas intermedia y final, y a centrarse en los de medida. Por ello, consideramos que un aspecto a tener en cuenta en la revisión del experimento de enseñanza es la secuencia de las tareas propuestas.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España; y del grupo de investigación emergente GV/2014/075 de la Consellería de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. I.C.E. Universitat de Barcelona. Hosori Editorial, S. L. (p.176).

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83-89.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*, 441-468.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. y Llinares, S. (2012) Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM

Sarama J. y Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks, Sage Publications.

van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry*. TAL Project. Freudenthal Institute, Utrech University and National Institute for Curriculum Development. Utrech. The Netherlands.

van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

ESTRUCTURAS Y GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE TERCERO Y QUINTO DE PRIMARIA: UN ESTUDIO COMPARATIVO

Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: a comparative study

Pinto, E. y Cañadas, M.C.

Universidad de Granada, España

Resumen

Desde un enfoque funcional del álgebra escolar, presentamos un estudio comparativo entre estudiantes de tercero y quinto de Educación Primaria, centrado en las estructuras del patrón, la generalización y la relación estructuras-generalización. Analizamos las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucra una función lineal. Los resultados muestran diferencias en la cantidad y variedad de estructuras identificadas por estudiantes de ambos cursos, siendo mayor en tercero. Los estudiantes de tercero tienden a trabajar con casos particulares y un estudiante generaliza. La mayoría de los estudiantes de quinto generaliza la estructura y emplean esa misma estructura en sus respuestas. En este curso, tres estudiantes generalizan en cuestiones sobre casos particulares.

Palabras clave: *estructura, generalización, pensamiento algebraico, pensamiento funcional.*

Abstract

From a functional approach of school algebra, we present a comparative study between third and fifth students of primary education, focussed on the pattern structures, generalization and the relationship structures-generalization. We analyse the written students' written to some questions in a contextualized problem involving a linear function. The results show differences in the variety of structures identified by students of both courses, being higher in third. Third-grade students tend to work with particular cases and one student generalizes. Most fifth graders generalize the structure and use the same structure in their responses. In this year, the generalization, three students generalize in questions about particular cases.

Keywords: *structure, generalisation, algebraic thinking, functional thinking.*

Actualmente existe un creciente interés por las diversas actuaciones de estudiantes de edades tempranas al trabajar con actividades que tienen un carácter algebraico. En este contexto, investigadores destacan la importancia de promover el pensamiento algebraico en los estudiantes más pequeños, puesto que desarrolla habilidades para analizar relaciones entre cantidades, deducir la regla general de un patrón, entre otros (Kaput, 2008). Como un elemento central del pensamiento algebraico está la generalización, la cual es reconocida como un proceso de pensamiento matemático fundamental, la cual requiere ver detrás de las particularidades de una situación matemáticas y sacar una conclusión (Driscoll, 1999). Considerar la generalización en el contexto de los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas en la actividad que realizan (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico, en el cual la función es contenido matemático fundamental y una de sus ventajas es que es considerado propicio para introducir el álgebra (Blanton y Kaput, 2011). El pensamiento funcional está centrado en la relación entre variables, donde el énfasis puede estar en casos particulares o en el caso general (generalización) (Smith, 2008). Cañadas y Molina (2016) mencionan algunos elementos claves que permiten desarrollar el pensamiento funcional en los primeros cursos de la Educación Primaria, entre los que se encuentran “las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas” (p. 212).

En el contexto funcional del álgebra escolar, la presencia de patrones está relacionada con la regularidad que relaciona las variables (dependiente e independiente) involucradas en una situación. La estructura del patrón, foco de interés de esta comunicación, corresponde a la forma en la cual se organizan los elementos del patrón y la relación que existe entre esos elementos (Kieran, 1989). De esta forma, reconocemos la importancia de la noción de estructura pues permite conectar los patrones y la generalización, y a su vez: a) adquiere relevancia en el contexto del álgebra en los primeros cursos, puesto que la estructura matemática y las relaciones son centrales en el desarrollo del conocimiento matemático de estos estudiantes; (b) permite establecer conexiones y relaciones entre diferentes conceptos y procesos matemáticos involucrados; y (c) permite analizar la manera en la cual los estudiantes son capaces de interpretar una regularidad y, potencialmente, generalizar dicha regularidad (Strother, 2011; Warren, Miller y Cooper, 2013).

Como mostraremos más adelante, existen estudios en tercero y en quinto de Educación Primaria sobre la generalización, en el contexto funcional del álgebra escolar. Nuestro interés por estos dos cursos, así como la comparación entre ellos, responde a dos razones: (a) las respuestas escritas que manifiestan estos estudiantes pueden contener una mayor cantidad de evidencias para describir la generalización que son capaces de expresar, a diferencia de considerar los primeros cursos, y (b) tercero y quinto de primaria son cursos que están insertos en diferentes momentos de la educación primaria (momento intermedio y final, respectivamente) y esta comparación permitirá identificar elementos del pensamiento funcional que surgen de las respuestas espontaneas de los estudiantes y que ayudarán en la obtención de conclusiones útiles para la docencia, pues los contextos funcionales están presentes en el currículo español de Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014). En este trabajo presentamos un estudio centrado en las nociones de generalización y estructura de estudiantes de tercero y quinto de primaria, estableciendo una comparación entre ambos cursos.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En esta sección presentamos una aproximación teórica de la noción de estructura y de generalización, desde el contexto funcional del álgebra escolar.

Noción de estructura

Un patrón puede ser entendido como una regularidad numérica o espacial y la relación entre varios componentes del patrón constituye su estructura (Mulligan, Mitchelmore y Prescott, 2006). De esta forma, la noción de estructura en el contexto funcional del álgebra escolar está compuesta por un conjunto de elementos numéricos (expresado mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y las propiedades de dichas operaciones. Así, en la noción de estructura es posible identificar dos elementos: (a) la organización superficial de dichos elementos (estructura externa), y (b) la relación interna entre estos elementos (estructura interna).

En una secuencia numérica, podemos determinar el número que va en una determinada posición de la secuencia llegando a diferentes modos de expresar esa generalización, donde la estructura estará dada por la relación entre variables (dependiente e independiente). Por ejemplo, para la secuencia de los números pares, algunas respuestas que pueden describir el número que debe ir en una posición son:

"el doble de la posición en la que se encuentra" (representación verbal), "$x + x$" o "$2x$" (representación simbólica), entre otras. Este tipo de estructuras son consideradas como expresiones equivalentes (English y Warren, 1998), las cuales comparten la misma estructura interna y representan la misma situación. Por tanto, las expresiones equivalentes son dos formas de expresar la misma estructura interna.

Generalización

El proceso de generalización tiene un rol central en el contexto del álgebra escolar y se inicia cuando un estudiante intuye un cierto esquema subyacente, aunque todavía no lo pueda expresar claramente (Mason, Burton y Stacey, 1988). De manera amplia, la generalización implica actos de razonamiento conscientes que emergen desde casos particulares específicos hacia la identificación de modelos o relaciones más amplias y abstractas, que requiere la adaptación, ajuste, conexión y reorganización de ideas matemáticas (Kaput, 1999, Mitchelmore y White, 2007). Con base en estas ideas, asumimos que la generalización, desde el enfoque funcional, hace referencia a las diferentes maneras que tienen los estudiantes de expresar la relación funcional general que involucra dos variables. En el contexto de los primeros cursos, algunos investigadores reconocen que la generalización puede ser expresada de diferentes formas, transitando desde el uso del lenguaje verbal hasta llegar a emplear elementos más simbólicos (Blanton, 2008).

Desde el contexto funcional del álgebra escolar, Carraher, Martinez y Schliemann (2008) describen diferentes formas de expresar la generalización de los estudiantes de Educación Primaria, las cuales pueden ser analizadas considerando: (a) la forma de la función matemática identificada por los estudiantes; (b) los tipos de operaciones utilizadas; (c) el uso de notación algebraica; (d) los significados de los diferentes componentes de la expresión escrita, por ejemplo. Por otro lado, Warren, Miller y Cooper (2013) estudian la capacidad de estudiantes de 5 a 9 años al generalizar estructuras matemáticas en el contexto funcional del álgebra escolar. Los resultados muestran que estos estudiantes emplean inicialmente gestos y actos manipulativos, los que se eliminan cuando los estudiantes reconocen la estructura matemática que subyace a la tarea. En relación a la idea anterior, algunos autores señalan que los niños, mediante un proceso de instrucción, pueden tener oportunidad de generalizar y desarrollar habilidades matemáticas abstractas que reflejan su estructura matemática (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006).

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es comparar las estructuras y generalización que evidencian estudiantes de tercero y quinto de primaria en la resolución de un problema contextualizado que involucra una función lineal. Desglosamos este objetivo general en los siguientes objetivos específicos.

- Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes de tercero y los de quinto.
- Comparar las estructuras que identifican los estudiantes de tercero y los de quinto.
- Identificar los estudiantes de tercero y quinto que generalizan.
- Comparar la generalización de los estudiantes de tercero y quinto.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación más amplia con estudiantes de diferentes cursos de Educación Primaria. En esta comunicación nos centramos en las respuestas de estudiantes de tercero y quinto de primaria, al responder un mismo problema que involucra una función lineal.

Sujetos

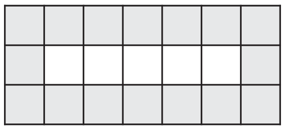
Trabajamos con dos grupos de estudiantes de un colegio de Granada, durante el curso 2014-2015. El primer grupo estaba compuesto por 24 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años). Los conocimientos previos incluían diferentes estrategias de conteo y las cuatro operaciones básicas con números naturales, con énfasis en la suma y resta. El segundo grupo estaba compuesto por 24 estudiantes de quinto de Educación Primaria (10-11 años), quienes habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas básicas de diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales).

Desarrollamos tres sesiones previas, en cada curso, antes de la sesión en la cual nos centramos. Estas sesiones son la única experiencia de los estudiantes con el tipo de problemas planteado. En el caso de tercero, los estudiantes habían trabajado problemas que involucran las funciones con estructura aditiva $f(x) = x + 5$ y $f(x) = x + 3$; mientras que en quinto habían trabajado con problemas que involucran la estructura multiplicativa y aditiva/multiplicativa ($f(x) = x + 3$, $f(x) = 3 + x$ y $2x$, $f(x) = 3x - 7$).

Instrumento de recogida de información

En la primera parte de la sesión se introdujo el problema a los estudiantes y se les entregó un cuestionario. Mientras trabajaban, podían plantear dudas a dos miembros del equipo de investigación presentes en el aula. En este trabajo analizamos la información que proviene de las respuestas escritas de los estudiantes al problema y a las cuestiones. La Figura 1 muestra el problema contextualizado que fue entregado a los estudiantes.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen:



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

C4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

Figura 1. Problema de las baldosas

En cada curso se usó el mismo problema y las mismas cuestiones. Diseñamos las cuestiones considerando: (a) casos particulares cercanos (C1, C2 y C3); (b) caso particular lejano (C4) y (c) caso general (C5).

Codificación de datos y análisis

En cada curso, los estudiantes son referidos con la letra T (si corresponden a tercero) o Q (si corresponden a quinto) seguido de un número, desde 1 a 24. Analizamos las respuestas de los estudiantes en dos fases. En la primera, identificamos respuestas donde es posible encontrar estructuras que relacionan las variables involucradas en el problema. El propde esps o, realiza una adición eo de estudiantes diferentes y ser planteamos en la Figura 3. o algebraico. ósito de este análisis es identificar la variedad de estructuras observables en las respuestas de los alumnos, considerando como unidad de análisis a los estudiantes. En la Figura 2 mostramos un ejemplo de las respuestas de un alumno, T5, al identificar la estructura en las cuatro primeras cuestiones, las cuales buscan determinar la cantidad de baldosas grises dadas 5, 8, 10 y 100 baldosas blancas, respectivamente.

C1 3+3+5+5=16

C2 3+3+8+8=22

C3 3+3+10+10=26

C4 3+3+100+100

Figura 2. Ejemplo de análisis de la estructura identificada (T5)

En la Figura 4 observamos cómo el estudiante ha determinado una expresión simbólico-numérica para determinar la cantidad de baldosas grises dado un número de baldosas blancas. Por ejemplo, dadas 5 baldosas blancas, el estudiante ha considerado las cinco baldosas superiores, las cinco baldosas inferiores, las tres baldosas del lateral derecho y las tres baldosas del lateral izquierdo. Luego, realiza una adición de esos elementos (3 + 3 + 5 + 5). Esta misma estructura la emplea para C2, C3 y C4, donde cambia la cantidad de baldosas blancas. A partir de esta respuesta, identificamos la estructura $x + x + 3 + 3$. Empleamos notación algebraica para codificar las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes, ya que es una forma que permite agrupar las diferentes respuestas obtenidas de manera general.

En la segunda fase de análisis consideramos aquellos estudiantes que evidencian estructura en, al menos, dos cuestiones. Este criterio lo usamos, principalmente, para analizar el uso de una misma o diferentes estructuras en la resolución del problema. De este grupo de estudiantes, identificaremos cuáles son las cuestiones que generalizan y posteriormente, describiremos las maneras en las cuales los estudiantes llegan a establecer la relación general entre una cantidad de baldosas blancas y grises y la relación con las estructuras identificadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En primer lugar, presentamos resultados sobre las estructuras identificadas en cada curso, para luego establecer una comparación por curso. Posteriormente, presentaremos evidencias de generalización en las respuestas de los estudiantes de tercero y quinto, para después establecer la comparación.

Estructuras

En la Tabla 1 presentamos las estructuras organizadas por curso según el tipo de operación involucrada: (a) aditiva; (b) multiplicativa; y (c) aditiva y multiplicativa. Esta forma de organizar las estructuras, según los tipos de operaciones utilizada, lo hemos considerado de la investigación de Carraher, Martinez y Schliemann (2008), presentada en el marco teórico.

Tabla 1. Variedad de estructuras identificadas en estudiantes de tercero y quinto

Tipo de operación involucrada	Estructura identificada	3º	5º
Aditiva	x + x + 3 + 3	✓	
	x + x + 6	✓*	
	(x + 2) + (x + 2) + 2	✓	
	$(x + 3) + (x + 3) + (x + 3)$	✓	
	$x + x + 2$	✓	
	$x + 6$	✓	
Multiplicativa	$f(5)\cdot 2$	✓	
	$f(5)\cdot 3$	✓	
	$f(5)\cdot 5$	✓	
	$f(5)\cdot 100$	✓	
	$2\cdot 2x$		✓
	$2x\cdot 3\cdot 3$		✓

Tabla 1. Variedad de estructuras identificadas en estudiantes de tercero y quinto

Tipo de operación involucrada	Estructura identificada	3º	5º
Aditiva y multiplicativa	2x + 6	✓	✓*
	2(x + 2) + 2	✓	✓*
	2x + 3 + 3	✓	✓*
	3(x + 2) – x		✓
	3*x* + 1	✓	
	2*x* + 2	✓	✓
	(*x* + 3)·2	✓	
	(*x* + 6) + 2*x*	✓	

Nota. * = corresponde a aquella estructura que ha sido expresada de manera general (generalización); las estructuras en cursiva es una manera de identificar aquellas que son incorrectas; *f*(5) corresponde al resultado obtenido en la primera cuestión.

En la Tabla 1 observamos que los estudiantes de tercero emplean 17 estructuras diferentes. Seis de ellas se corresponden con la relación funcional involucrada en el problema, mientras que las 11 restantes no. De manera general, las estructuras identificadas consideran operaciones aditivas, multiplicativas o ambas. Siete estudiantes emplean diferentes estructuras conforme responden las diferentes preguntas del cuestionario. Un ejemplo representativo de esta situación, son las respuestas de T6 a C3 y C4, presentadas en la Figura 3.

C3

C4

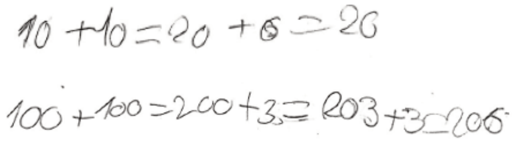


Figura 3. Ejemplo de dos estructuras diferentes identificadas por T6

En la Figura 3 observamos la manera en la cual el estudiante interpreta el problema y expresa, de manera simbólico-numérica, la relación entre las variables mediante dos estructuras diferentes: $x + x + 6$ (para 10 baldosas blancas) y $x + x + 3 + 3$ (para 100 baldosas blancas). Interpretamos que este cambio de una estructura a otra equivalente, sucede pues a medida que aumenta el tamaño del número involucrado en la tarea, el estudiante emplea una descomposición menos simplificada.

Por otra parte, en las respuestas de los estudiantes de quinto encontramos tres estructuras diferentes a las identificadas en tercero ($2 \cdot 2x$; $2x \cdot 3 \cdot 3$; $3(x + 2) - x$), las cuales consideran las operaciones aditiva-multiplicativa o multiplicativas al expresar esta relación. De las siete estructuras empleadas, cinco de ellas permiten llegar a la respuesta correcta. En la Figura 4 presentamos un ejemplo de la estructura $3(x + 2) - x$, expresada por Q15, identificada exclusivamente en este nivel.

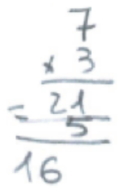


Figura 4. Ejemplo de la estructura 3(x + 2) – x por Q15 a C1

Esta estudiante considera la totalidad de baldosas que componen cada fila (7), las que multiplica por tres, ya que esta cantidad representaría la cantidad total de baldosas, sin importar la distinción entre blancas y grises. Luego, quita la cantidad de baldosas blancas dadas en el caso particular para obtener la respuesta a la pregunta.

De manera comparativa, los estudiantes de tercero emplean una gran variedad de estructuras al establecer la relación entre las variables involucradas, a diferencia de los estudiantes de quinto. Esta información nos indica que los estudiantes de tercero emplean más caminos o formas para identificar la cantidad de baldosas grises, dadas las baldosas blancas, que satisfaga sus necesidades para llegar a las respuestas. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes de tercero emplean estructuras que no permiten llegar a la respuesta (son erróneas), mientras que la mayoría de los estudiantes de quinto emplean estructuras que les permiten llegar a la respuesta correcta.

Tal como lo indicamos en la sección de análisis de datos, en la segunda fase consideramos aquellos estudiantes que evidencian estructuras en, al menos, dos cuestiones. De manera general, de los 24 estudiantes de tercero cuyas respuestas analizamos, en 11 de ellos hemos identificado dos o más respuestas donde es posible identificar una de las estructura descritas en la Tabla 1. Por otro lado, en quinto, 19 de los 24 estudiantes evidencian estructuras que relacionan las variables involucradas. En el siguiente apartado nos centramos en esos 11 y 19 estudiantes de tercero y quinto, respectivamente.

Generalización

En tercero encontramos un alumno, T9, quien logra generalizar la relación existente entre baldosas blancas y grises en su respuesta a la quinta cuestión (C5). En las respuestas de este estudiante a las primeras cuatro cuestiones (casos particulares), identificamos la estructura $x + x + 3 + 3$, la cual fue expresada por una representación simbólica-numérica. La Figura 5 es un ejemplo de respuesta a la tercera cuestión.

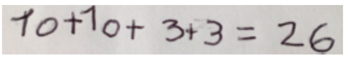


Figura 5. Ejemplo de estructura x + x + 3 + 3 a C3 por T9

En la cuestión que busca establecer la relación general (C5), el estudiante expresa que para determinar la cantidad total de baldosas grises dadas las blancas "el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6". En esta respuesta identificamos la estructura $x + x + 6$. Es interesante destacar que en estas respuestas evidenciamos estructuras diferentes según el tipo de preguntas. Al llegar a establecer la relación general, A9 simplifica la estructura identificada en casos particulares — $x + x + 3 + 3$ — para determinar la estructura de la regla general como $x + x + 6$. En este cambio de estructura se mantiene tanto la estructura interna como la externa.

De los diecinueve estudiantes de quinto en los cuales identificamos dos o más estructuras en sus respuestas, diecisiete de ellos generalizan estas estructuras. En la mayoría de estos estudiantes, observamos la misma estructura a lo largo de las diferentes preguntas. Un ejemplo representativo corresponde a Q6, quien emplea la estructura $2x + 6$ para cuestiones que involucran casos particulares y el caso general. Por ejemplo, en C1 responde "por cado baldosa blanca hay 2 grises, excepto en la de los lados que hay 5. O todas las blancas x2 + 6 de los lados". Luego, en la respuesta a C5, la estudiante responde: "multiplicando por 2 las blancas más 6 de los lados. x·2 + 6". De esta forma, identificamos la misma estructura en las respuestas del estudiante a cuestiones que involucran casos particulares cercanos, lejanos y el caso general. Por otra parte, en los estudiantes que no identificamos generalización en sus respuestas, la totalidad de ellos emplean la misma estructura para los casos particulares cercanos y lejanos.

De manera comparativa, evidenciamos una diferencia importante entre la cantidad de estudiantes de quinto que logra generalizar las estructuras (17) y los de tercero (1). Esta información la relacionamos con las experiencias matemáticas a las cuales se enfrentan los estudiantes de quinto, los cuales pueden poseer más herramientas para establecer generalizaciones. En este sentido, y tal como lo plantean algunos autores, los niños que se enfrentan a tareas que involucran generalización requieren de tiempo y experiencias significativas para trabajar sobre estos procesos, ya que no es una tarea simple (Castro, 2012).

Otra diferencia entre las estructuras identificadas en cada curso tiene que ver con el uso de la notación algebraica, la cual es otra de las formas de analizar la generalización expresada por estudiantes, en el contexto funcional del álgebra escolar (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008). Específicamente, en quinto de primaria, a diferencia de tercero, emerge el uso del simbolismo algebraico. La Figura 6 presenta un ejemplo.

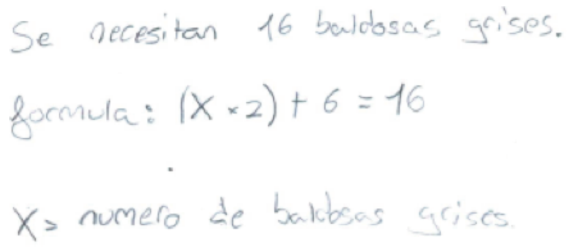


Figura 6. Respuesta de Q8 a C1

En el ejemplo de la figura 6, observamos que Q8 establece la generalización entre variables, llamando x al número de baldosas grises, emergiendo así el simbolismo algebraico de forma espontánea, pues los estudiante no habían trabajado previamente este tipo de representación. En la respuesta a esta pregunta, que involucra un caso particular, evidenciamos generalización aún cuando no se intenciona la expresión de esta, ya que el diseño del cuestionario esperaba su presencia en C5. Hablamos así de generalización espontánea (Pinto y Cañadas, en prensa). Con base en esta idea, encontramos que la única evidencia de generalización en tercero se presenta en la cuestión que busca que los estudiantes expresen esta relación (C5), mientras que del total de estudiantes de quinto que generaliza su estructuras, encontramos: (a) tres estudiantes que generalizan cuestiones que responden tanto a casos particulares (generalización espontánea) como generales (generalización inducida), y (b) 14 estudiantes que solo generalizan de manera inducida.

CONCLUSIONES

El estudio comparativo que presentamos busca aportar con la identificación de características del pensamiento algebraico, en concreto el funcional, de estudiantes de tercero y quinto de primaria al resolver un mismo problema, específicamente en la relación entre estructura y generalización. Los resultados obtenidos se pueden complementar con los hallazgos de Callejo, García-Reche y Fernández (2016), quienes identifican características del pensamiento algebraico en estudiantes de Educación Primaria, en el contexto de los patrones lineales.

En este trabajo, destacamos la noción de estructura, que nos ayuda a identificar la manera en la cual los estudiantes interpretan la relación entre variables. Nos parece relevante realizar la distinción entre esta noción y la de patrón, ya que la idea de patrón está más ligada a la recurrencia que al establecimiento de una relación entre variables. Desde el enfoque funcional del álgebra escolar, adoptamos la noción de estructura ya que es posible identificar, de manera explícita, la relación entre las variables involucradas.

Referido a los tipos de estructuras identificadas, los resultados de nuestro estudio muestran diferencias entre los estudiantes de tercero y quinto. Por ejemplo, los estudiantes de tercero emplean 17 estructuras diferentes, de las cuales cinco son correctas. Estos estudiantes, de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario, lo que nos permite concluir una inconsistencia en el uso de las estructuras conforme responden diferentes cuestiones. Por otra parte, en los estudiantes de quinto identificamos una mayor consistencia en la empleo de estructuras; emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general. Si bien los estudiantes de ambos cursos no habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales antes de nuestras intervenciones, interpretamos que las funciones trabajadas en las primeras sesiones de tercero (de estructura aditiva) y quinto (de estructura aditiva y multiplicativa) tiene implicaciones en los resultados.

En lo que concierne a la generalización, hallamos diferente número de estudiantes que generalizan en cada curso, así como diferentes tipos de generalización. En el caso de tercero, un estudiante establece la regla general, en la cual evidenciamos una evolución de la estructura identificada en casos particulares ($x + x + 3 + 3$) a la establecida en el caso general ($x + x + 6$). Por otro lado, en quinto existe una mayor cantidad de estudiantes que logran generalizar, empleando tres estructuras diferentes ($2x + 6$; $2(x + 2) + 2$ y $2x + 3 + 3$). Al igual que en otras investigaciones (e.g., Callejo, García-Reche y Fernández, 2016), el diseño del cuestionario busca dirigir y expresar la generalización de la relación entre variables, donde encontramos estudiantes de quinto que no generalizan siguiendo el diseño del instrumento, ya que generalizan para casos particulares (generalización espontánea). Esta situación se relaciona con los hallazgos reportados por Blanton y Kaput (2004), quienes indican que, a diferencia de los estudiantes de tercero, los de quinto necesitan una menor cantidad de trabajo en casos particulares para llegar a generalizar. Esta situación deja abierta una interesante línea de investigación, la que tiene relación con las estrategias que emplean estudiantes de Educación Primaria al establecer una regla general que relacione variables, en el contexto funcional del álgebra escolar.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado a través de la Beca de Doctorado folio 72160307.

Referencias

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 5–23). Berlín, Alemania: Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Callejo, M. J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00–2) (pp. 1-18). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén, España: SEIEM.

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-10.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), M*athematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: LEA.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Labor.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. BOE, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Mitchelmore, M. y White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 1-9.

Mullingan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: the australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). Praga, República Checa: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en prensa). Generalization in fifth graders within a functional approach. En Editors (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Singapur: PME.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: LEA.

Strother, S. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability* (Tesis doctoral). Louisville, KY: Universidad de Louisville.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). *Exploring young students' functional thinking. PNA, 7*(2), 75-84.

CONCEPTUALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE PROBLEMA MANIFESTADA POR FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA

Prospective primary teacher's conceptualization on the notion of problem

Piñeiro, J.L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

En el marco de la investigación en la formación del profesorado, en este trabajo presentamos el conocimiento que manifiestan sobre la noción de problema estudiantes del grado de maestro de Educación Primaria al terminar su formación inicial en la universidad. Para ello, hemos construido un cuestionario y lo hemos aplicado a 51 estudiantes de la especialidad anteriormente citada y que habían participado en un curso optativo sobre profundización del currículo en el que uno de sus contenidos es la resolución de problemas. Los resultados se muestran duales, puesto que los estudiantes manifiestan conocimientos acordes al campo de la resolución de problemas, sin embargo, hemos encontrado contradicciones, por una parte dan importancia a la consideración del resolutor, y por otra no la tienen en cuenta en la práctica.

Palabras clave: *noción de problema, maestros en formación inicial, conocimiento del profesor.*

Abstract

In the teacher training framework, this paper present the knowledge that a group of prospective primary teachers manifest about the notion of problem when finishing their initial training in the university. To do this, we have built a questionnaire and applied it to 51 students of the above mentioned specialty and who had participated in an optional course on deepening the curriculum in which one of its contents is problem solving. The results are shown to be dual, since the students present knowledge according to the field of problem solving, however, we have found contradictions, on the one hand they give importance to the consideration of the resolver, and on the other they do not take it into account in practice.

Keywords: *problem solving, prospective primary teacher, teacher knowledge.*

INTRODUCCIÓN

La investigación ha mostrado que la calidad de los profesores es uno de los factores más influyentes en el desempeño de los estudiantes (Mourshed, Chijiote y Barber, 2010). Uno de los elementos indicativos de esta calidad es el conocimiento que el docente posee, ya que las actividades que realice en el aula dependen en gran medida de este (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). La caracterización del conocimiento del profesor es una tarea compleja cuyos límites no son claros (Ball, Thames y Phelps, 2008; Bromme, 1994). Además, autores como Escudero-Ávila et al. (2015) destacan la importancia de profundizar en el conocimiento del profesor, no solo sobre contenidos matemáticos, si no también sobre competencias como es la resolución de problemas (RP). En este sentido, se ha señalado que situarse en un modelo de conocimiento del profesor desde la perspectiva de la RP presenta particularidades en la organización de sus dimensiones (Chapman, 2012, 2015; Foster, Wake y Swan, 2014).

Chapman (2012, 2015) a partir de una revisión de diversos aportes a lo largo de años de investigación, reinterpreta el trabajo de Ball y colaboradores (2008), proponiendo un modelo de conocimiento del profesor específico para la enseñanza de la RP. La caracterización realizada por esta autora contempla

Piñeiro, J.L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2017). Conceptualización de la noción de problema manifestada por futuros profesores de primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 417-426). Zaragoza: SEIEM.

la competencia para resolver problemas del docente, sus factores afectivos y creencias, un conocimiento del contenido (sobre problemas, su resolución y su invención) y un conocimiento didáctico del contenido (sobre los estudiantes y sobre prácticas de enseñanza). Si bien este modelo presenta un avance al describir el conocimiento del contenido, hemos detectado dificultades en su delimitación (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016).

En este contexto, nuestro trabajo pretende contribuir a este panorama, específicamente analizando y describiendo la conceptualización sobre la noción de problema matemático escolar en estudiantes para profesores de Educación Primaria al terminar su formación. Para ello, comenzamos enmarcando el modelo de conocimiento del profesor en que nos situamos y posteriormente mostramos la construcción, diseño y análisis de un instrumento que nos permitió indagar en uno de los componentes de este constructo.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO SOBRE RP

El conocimiento del contenido es descrito como un entramado interconectado de ideas matemáticas, sus representaciones y formas de proceder (Ponte y Chapman, 2016). Concretamente, el MKT (Ball, et al., 2008) plantea que esta dimensión distingue un conocimiento común, uno especializado y uno del horizonte del contenido. Desde la perspectiva de la RP, el conocimiento común del contenido se correspondería con la competencia para resolver problemas y el especializado, con los aspectos específicos para la enseñanza. Chapman (2012, 2015) propone un posible refinamiento al conocimiento especializado, planteando un conocimiento sobre los problemas, su resolución e invención. No obstante, hemos detectado algunos solapamientos y especificidades del profesor de primaria que dificultan su utilización (Piñeiro, et al., 2016). Así, realizamos una reinterpretación del conocimiento especializado del contenido (en términos de Ball y colaboradores) o del conocimiento del contenido (en términos de Chapman). Esta reinterpretación es realizada a partir de los componentes que hemos distinguido en lo que entendemos por competencia para resolver problemas y se encuentra en concordancia con trabajos de otros autores que han señalado las dificultades para delimitar el conocimiento especializado del contendido señalado por Ball y sus colaboradores (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Montes, Contreras y Carrillo, 2013).

A partir de algunas teorizaciones sobre competencia matemática (Abrantes, 2001; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Niss, 2003; Rico, 2007) y sobre competencia para resolver problemas (Chapman, 2012, 2015; OECD, 2014), entendemos por este constructo como la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como problemática, procede a su resolución a través de una serie de fases no necesariamente lineales usando una estrategia, y se involucra, con una disposición positiva, en el desafío de resolverla. Por consiguiente, entendemos que el conocimiento del profesor distingue tres aspectos o componentes sobre este constructo: noción de problema, la resolución de un problema y la disposición. Para efectos de este trabajo, solo profundizamos en el primero de ellos.

Noción de problema

En el campo de la RP se distingue entre problema y RP (Puig, 1996). Si bien en nuestro proyecto general vamos a trabajar ambos aspectos, en este trabajo solo nos centramos en la noción de problema, haciendo referencia al proceso de RP cuando sea estrictamente necesario. Puig (1996) contextualiza la noción de problema desde distintos puntos de vista y para los problemas escolares. Nuestro trabajo se centra en la noción de problema en el sistema educativo que, como indica Puig (1996), se ve afectado por el alumno y el profesor.

En este sentido, la identificación de un problema por parte del estudiante es primordial para dar existencia a este (Agre, 1982). Sin embargo, cuando hablamos de problemas matemáticos escolares no necesariamente es de esta manera, pues es el profesor el que diseña y selecciona los problemas (Lester y Cai, 2016). Este hecho implica que el docente realiza una primera etiquetación de una tarea como problema atendiendo a sus objetivos y a sus estudiantes. Por tanto, si bien la existencia del problema está determinada por la aceptación del resolutor (Mason, 2016), los problemas matemáticos escolares tienen la particularidad de tener dos niveles de lectura, la del alumno y la del profesor, realizada en dos etapas. El profesor es el primero en decidir si una tarea es un problema para algunos de sus estudiantes. Esta elección podría ser realizada en función de sus elementos estructurales, es decir, su formulación, su contexto, el conjunto de soluciones aceptables que presenta y los métodos por los que puede ser abordado (Borasi, 1986). Por sí sola, esta acción genera una caracterización/diferenciación entre las tareas que son consideradas problemas de las que no lo son. Debido a que es el resolutor/estudiante el que finalmente etiqueta el problema, la perspectiva del profesor debe complementarse con un conocimiento sobre el desarrollo de la competencia en sus estudiantes, puesto que posteriormente, cuando esta tarea se le plantee, serán estos quiénes realicen una formulación propia para su resolución. La formulación y reformulaciones sucesivas que se realicen para alcanzar la meta serán hechas por el estudiante (Kilpatrick, 2016), a través de la movilización de una serie direccionada, dirigida y dinámica de procesos cognitivos (conocimientos y metacognición) y no cognitivos (afectos y creencias) que no están predeterminados por un conocimiento previo de dicho proceso (Mayer y Wittrock, 2006). Además, estas situaciones deben presentar un nivel de dificultad adecuado que no provoquen un rechazo frontal por parte de los estudiantes, sino que favorezcan su involucración, por ello deben ser vistos como posibles de solucionar (Agre, 1982). Esta involucración generalmente está dada por la no existencia de un procedimiento conocido de resolución (Agre, 1982).

En la anterior reflexión, es importante destacar la diferenciación/caracterización que plantea Borasi (1986). Desde la perspectiva de esta autora, se puede inferir la existencia de diferentes tareas que pueden ser llamadas problemas. Existen numerosas clasificaciones en las que no existe un acuerdo completo, sin embargo podemos encontrar dicotomías en las que los investigadores concuerdan, por ejemplo: ejercicios y problemas, rutinarios y no rutinarios o abiertos y cerrados. Para efectos de este trabajo hemos utilizado la clasificación propuesta por Holmes (1985), con cuatro categorías (aplicados/no aplicados y rutinarios/no rutinarios) que dan origen a cuatro tipos de problemas diferentes. Los problemas aplicados describen situaciones reales, mientras los no aplicados involucran relaciones numéricas y espaciales sin un contexto (Holmes, 1985). Por su parte, los problemas rutinarios requieren recordar un procedimiento de solución, mientras que los no rutinarios exigen un diseño del procedimiento (Holmes, 1985). Baroody (1988) agrega que en los problemas no rutinarios la incógnita no es evidente, se dispone de poca información y puede tener varias soluciones o ninguna, por contraposición los rutinarios no. Es importante recalcar que los problemas no rutinarios pueden ser cerrados o abiertos, no así los rutinarios que siempre se presentan como cerrados (Holmes, 1985), por tanto, nos encontramos con seis tipos de problemas.

En la Tabla 1 resumimos las características del componente noción de problema que hemos considerado en el conocimiento del contenido para la enseñanza de la RP.

Tabla 1. Componentes de conocimiento de contenido para enseñar la RP matemáticos

Componente	Conocimientos
Noción de problema	– Tarea sin (con) procedimiento de resolución conocido – Consideración o no del resolutor – Tipos de tareas que se presentan como problemas

La consideración de estos conocimientos se fundamenta en la reflexión teórica previa. A continuación describimos qué entendemos por cada uno de los conocimientos de la componente noción de problema.

Tarea sin procedimiento de resolución conocido se refiere a que el camino a la solución no sea inmediatamente reconocible y que no exista instrucción previa sobre algún procedimiento prototípico de solución. *La consideración del resolutor*, abarca dos aspectos: etiquetación del problema y existencia de una solución razonable y a la vista. Por etiquetación de un problema entendemos que la experiencia y conocimiento del estudiante determinan si una tarea se considera un problema. Respecto a la existencia de una solución razonable y a la vista, consideramos lo que Agre (1982) denomina resolubilidad, refiriéndose a ser capaz de anticipar un posible camino de solución, articulado en base a los conocimientos que se tienen y que permiten abordar la resolución. Finalmente, respecto a los *tipos de tareas que se presentan como problemas*, emergen dos aspectos. El primero tiene que ver con las características de un problema, es decir, el nivel de complejidad cognitiva que puedan proveer a través de las variables de tarea que intervienen en él, las formas de resolución que permite, etc. Por otra parte, están los tipos de problemas que como ya señalamos, en este trabajo diferenciamos seis tipos de problemas.

Teniendo en cuenta estos elementos, el objetivo de este trabajo es analizar y describir los conocimientos asociados a la noción de problema manifestados por un grupo de futuros profesores de Educación Primaria al terminar su formación universitaria.

MÉTODO

Participantes

En este estudio han participado 51 estudiantes de cuarto curso del grado de maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Este grupo de estudiantes presenta la particularidad de haber cursado la asignatura optativa "Competencias Matemáticas en Educación Primaria", de la cual uno de sus contenidos es la RP. Específicamente, los estudiantes trabajan estrategias y heurísticos, invención de problemas y estrategias docentes para enseñanza de la RP.

Instrumento

Hemos construido y aplicado un cuestionario con 24 ítems, cerrados y de carácter dicotómico, debido a que no intentamos identificar el significado que dan los futuros profesores a los problemas y su resolución, sino que esperamos ciertas respuestas que nos muestren presencia o ausencia de un determinado conocimiento (Fink, 2003), analizando si se muestra acorde al campo de investigación sobre RP.

Para el desarrollo del cuestionario hemos seguido una serie de fases: a) análisis teórico de la noción de competencia para resolver problemas; b) estudio sobre las exigencias curriculares de Educación Primaria relativas a la RP; c) revisión de la literatura de investigaciones sobre RP con profesores de primaria; d) construcción de la versión piloto del instrumento; e) revisión mediante juicio de expertos y aplicación piloto; y f) construcción de la versión final del cuestionario.

El instrumento consta de dos partes: la primera referida a la conceptualización de la noción de problema y la segunda, a aspectos relativos al proceso de resolución. En este trabajo, presentamos solo resultados del primer apartado.

La primera parte de este cuestionario se ha diseñado a partir de los conocimientos involucrados en la noción de problema y consta de tres secciones: a) tarea sin o (con) procedimiento de resolución conocido; b) consideración de resolutor en cuanto a: la etiquetación del problema y la existencia de una solución razonable previa; y c) tareas que se presentan como problemas.

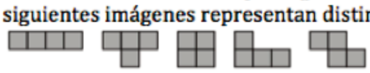
La Figura 1 muestra los ítems de la primera parte del cuestionario. Las respuestas fueron codificadas con uno para SÍ y dos para NO.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el logro de nuestra meta, en primer lugar hemos realizado agrupamientos que emergen de las respuestas, describiendo el rasgo común de estas y etiquetando el atributo presente en ellas. Posteriormente, hacemos un análisis descriptivo de los agrupamientos organizados de acuerdo a los conocimientos involucrados y la adecuación de estas a lo reportado por la literatura.

En el primer paso hemos sometido las respuestas producidas por los futuros profesores a un análisis multivariante a través de un escalamiento multidimensional ALSCAL (SPSS), que permite agrupar, describir el rasgo común y etiquetar el atributo presente en ellas (Gil, 1993). Siguiendo las recomendaciones de

1. Los problemas deben resolverse solo con procedimientos previamente aprendidos.
2. Un problema es una tarea sin un procedimiento conocido para resolverlo.
3. Un problema es una tarea que el resolutor acepta como reto.
4. En un problema el resolutor debe disponer de conceptos matemáticos que le permitan articular un procedimiento de resolución.
5. La siguiente tarea:
Un granjero tiene una huerta de verduras de forma rectangular de 60 m² de superficie y quiere cercarla para evitar que entren animales. Si sus lados se miden solo en números naturales, ¿cuáles son los diferentes perímetros de cerca que puede utilizar?
¿Es un problema para cualquier estudiante? (sin importar su curso, edad, etc.)
6. Para que una tarea sea un problema depende de la experiencia del resolutor.
7. Para que una tarea sea un problema, el estudiante debe ser capaz de detectar en los primeros momentos de su abordaje una posible forma de resolverlo.
8. Los cálculos que presentan los textos escolares para practicar las operaciones aritméticas son problemas.
9. Para practicar las operaciones aritméticas en segundo de primaria, los textos escolares al finalizar las lecciones proponen tareas como la siguiente:
El día que cumplí 8 años me trajeron 6 regalos por la mañana y 5 regalos por la tarde. ¿Cuántos regalos recibí ese día?
Este tipo de tareas, ¿son problemas?
10. A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como las siguientes. En algún momento de esta escolaridad ¿pueden ser considerados problemas?
a. (745.580 + 898.834) : (15.3745 x 8.203)
b. Las pelotas de ping-pong vienen en paquetes de 3 unidades. Una caja trae 24 paquetes. El sr. López, dueño de una tienda deportiva, compró 1.800 pelotas de ping-pong. ¿Cuántas cajas compró el sr. López?
c. Un granjero tiene patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total. ¿Cuántos patos y ovejas tiene?
d. Empleando únicamente 6 cerillas, forma cuatro triángulos equiláteros.
e. ¿Cuántas chuches comen tus compañeros de clase en una semana?
f. Los tetrominós son formas geométricas construidas con cuatro cuadrados unidos por alguno de sus lados. Las siguientes imágenes representan distintos tetrominós.



Construye el mayor número de formas distintas posibles utilizando los 5 tetrominós.
11. Un problema tiene solo una respuesta correcta.
12. Un problema puede tener ambigüedades en su enunciado.
13. Un problema puede tener datos poco precisos en su enunciado.
14. Un problema debe considerar siempre un contexto que refleje una situación.
15. Hay problemas que se pueden resolver de más de una manera.
16. Un problema puede tener más de una solución.
17. Un problema debe tener toda la información necesaria en el enunciado.
18. Para llegar a la solución de un problema debe existir un solo camino correcto.
19. Un problema puede contener información innecesaria en el enunciado.

Figura 1. Ítems del cuestionario 1

Bisquerra (1989) sobre la dimensionalidad con la que realizar el análisis, hemos detectado tres dimensiones, con un stress del 0,07 y un s-stress del 0,08 respectivamente. Las tres dimensiones que han emergido de este análisis las interpretamos como acuerdo en el conocimiento, descuerdo en el conocimiento y contradicción en el conocimiento. Antes de profundizar en los motivos de esta interpretación, mostramos la distribución de los ítems según la dimensión en la que tomaron mayor peso (ver Tabla 2), no obstante existen preguntas que tienen presencia significativa en más de una dimensión.

Tabla 2. Distribución de ítems según dimensiones y conocimientos

	Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Desacuerdo	Dimensión 3 Contradicción
Tarea sin (con) procedimiento de resolución conocido	I1, I2, I4		
Consideración o no del resolutor	I3, I5	I7	I6
Tipos de tareas presentadas como problemas	I8, I10A, I10B, I10C, I11, I12, I13, I15, I16, I18, I19	I10E, I10F, I14, I17	I9

Un primer grupo de ítems que presenta características similares son I1, I5 e I18 que se corresponden con un alto porcentaje de acuerdo en su respuesta negativa, es decir, respondieron no a la afirmación dada. I1 obtiene un 86,3%, I5 un 90,2% e I18 un 100%. Además destaca que, por una parte se corresponden con la respuesta esperada y, por otra, tienen un peso marginal en las otras dos dimensiones. Otro grupo de gran peso en esta dimensión son I2, I3, I4, I10A, I10B, I10C, I12, I13, I15 e I19, todas ellas respuestas con alto grado de acuerdo. Junto a ellas, emergen dos preguntas que tienen mayor peso en la dimensión uno (I8 e I16), pero que también muestran gran presencia en la dimensión tres. Estas preguntas presentan contradicciones al ser comparadas con otras preguntas.

El segundo grupo que presenta respuestas agrupadas son I7, I10E, I10F, I11, I14 e I17. De ellas, I7, I17 y I10E presentan discrepancias en la cantidad de respuestas afirmativas y negativas, fluctuando sus porcentajes en el aproximadamente 50% para ambas opciones. Las otras, tienen un grado de acuerdo de aproximadamente 70%, y a diferencia de las mencionadas anteriormente, estas muestran altos porcentajes en otras dimensiones.

Finalmente, una cantidad menor de ítems se encuentran agrupadas en torno a lo que denominamos contradicción. En ellas se diferencian dos grupos de ítems, por una parte I6 e I9, siendo estas las únicas que determinan esta dimensión. Por la otra, están los ítems I8, I10E, I16 e I17, que si bien tienen un mayor peso en otra dimensión, también muestran un peso en esta. Es importante señalar esto pues como explicitamos más adelante, se presentan contradicciones en estas respuestas. En los siguientes apartados especificamos estos ítems y sus respuestas, organizando y describiendo de acuerdo a nuestro análisis teórico previo.

Tarea sin procedimiento de resolución conocido

Los ítems que indagan si los futuros profesores tiene una conceptualización de los problemas matemáticos escolares como una tarea sin procedimiento de resolución conocido, se agrupan en la dimensión que presentó un mayor acuerdo en sus respuestas. En el ítem 2 que plantea a los problemas como una tarea sin procedimiento conocido para resolverlo, un 74,5% se muestra en desacuerdo. Sin embargo, al plantear otro ítem focalizando en sí el procedimiento debe ser aprendido, un 86,3% plantea que no se consideraría problema. Así mismo, un 98% declara que se deben disponer de conceptos matemáticos que permitan articular un procedimiento de solución. En general, existe acuerdo sobre este aspecto y se encuentra alineado a la conceptualización de problema reportado por la literatura, en términos de tareas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Lester y Cai, 2016).

Consideración del resolutor

Los ítems sobre este conocimiento se encuentran organizados en torno a las tres dimensiones, es decir, los futuros profesores manifiestan conocimientos similares o en los que están de acuerdo, conocimientos dubitativos o en los que no existe acuerdo, y por último en los que existen contradicciones. Un ejemplo de este último caso es que I6 muestra la particularidad de que al analizarla en conjunto al ítem I9, ambas presentan gran presencia en la tercera dimensión y además atienden al resolutor, la primera de forma directa y la segunda a través de un ejemplo. Respecto a los porcentajes de acuerdo, I6 presenta poco acuerdo debido a que se reparten en ambas opciones. Mientras que I9 tiene un acuerdo de casi el 78,4%. Ahora bien, si analizamos con mayor detalle, se observa que el 50% de las repuestas correctas a I6, no se corresponden con una respuesta correcta a I9, pues en esta existe casi un 80% erróneas. Es decir, de ese 50% que contestaron correctamente a una afirmación directa sobre la importancia del resolutor, luego solo un tercio es capaz de identificar esa importancia declarada en una situación escolar.

En relación a la consideración del resolutor, un 90,2% de los futuros profesores concuerdan con que un problema de cálculo de perímetros no es un problema para cualquier estudiante y que debe considerarse su curso o edad para etiquetarlo de esa forma. No obstante, no existe un conocimiento común sobre que la etiquetación de un problema dependa de la experiencia del resolutor, pues un 51% se manifiesta de acuerdo, mientras que un 49% declara lo opuesto. En esta misma línea, sobre el conocimiento sobre resolubilidad, los futuros profesores tampoco presentan conocimientos similares entre ellos, manifestando un 49% de acuerdo frente a un 51% de desacuerdo. Además, un 94,1% se muestran de acuerdo en que se debe aceptar el reto de resolver un problema para considerarlo como tal.

Tipos de tareas que se presentan como problemas

Sobre los tipos de tareas que se presentan como problemas, los futuros profesores manifiestan acuerdo en etiquetar como tal a problemas rutinarios aplicados (98%), a los no rutinarios aplicados cerrados (100%) y a los no rutinarios, no aplicados y cerrados (80,4%). Así mismo, un 70,6% esta de acuerdo al etiquetar a un problema no rutinario, no aplicado y abierto como tal. El mayor desacuerdo en sus respuestas se presenta con los problemas no rutinarios, aplicados y abiertos, pues un 54,9% presenta acuerdo en que puedan ser problemas y un 45,1% presenta la respuesta contraria. Así mismo, un porcentaje del 78,4%, se muestran de desacuerdo en etiquetar los problemas rutinarios y no aplicados como problemas. La organización de este conocimiento está determinado por las dimensiones de acuerdo y desacuerdo en las respuestas. Los ítems referidos a problemas cerrados, muestran bastante acuerdo en los futuros docentes y los referidos a problemas abiertos, generan un mayor desacuerdo. Además, al analizar estos ítems conjuntamente con las características de los problemas, existen algunas contradicciones, por ejemplo, un ítem (I19) indaga en si un problema debe tener toda la información necesaria en su enunciado y otro, muestra un problema abierto del tipo investigación matemática (10F). En ellos, del 52,9% que contesto afirmativamente al primero (I9), aproximadamente la mitad contestó que una situación abierta es un problema. Del modo contrario, los que contestaron negativamente al hecho de que un problema deba tener toda la información, aproximadamente un cuarto no consideró el problema abierto como tal.

Ahora bien, sobre las características de las tareas presentadas como problemas, un 68,6% manifiesta que los cálculos que presentan los textos para practicar las operaciones aritméticas no son problemas. En concordancia con esto, un 72,5% manifiesta que los problemas no tienen una sola respuesta correcta, un 88,2% responde que los problemas pueden tener ambigüedades en sus enunciados, un 82,4% se muestra de acuerdo con que pueden existir datos poco precisos. Así mismo, un 100% se muestra de acuerdo con que un problema se puede resolver de más de una manera y un 76,5% contesta que puede existir más de una solución. En esta misma línea, un 100% declara que no existe un solo camino para llegar a la solución. Un menor porcentaje de acuerdo existe cuando se plantea que un problema tenga toda la información necesaria en el enunciado, pues solo un 52,9% contestaron de forma afirmativa frente a un 47,1% que manifiesta lo contrario. De esta misma forma, un 76,5% se muestra de acuerdo con que los problemas deben tener un contexto.

CONCLUSIONES

La meta general de nuestro trabajo es identificar el conocimiento profesional que poseen los profesores de primaria sobre RP matemáticos al terminar su formación. La reinterpretación realizada del conocimiento del contenido permite identificar tres componentes sobre esta dimensión: a) tareas sin procedimiento de resolución conocido, b) consideración del resolutor y c) tipos de tareas que se presentan como problemas.

El primer conocimiento de la componente noción de problema se corresponde con tarea con procedimiento de resolución conocido, y lo hemos explorado mediante tres ítems que tienen relación con el procedimiento utilizado para resolver un problema y si este determina, en parte si el problema es considerado como tal o no. Sobre este conocimiento, los estudiantes producen respuestas que se sustentan con la conceptualización contemporánea de problema. En sus respuestas se observa una idea clara de que el resolutor no debe tener conocimiento sobre el procedimiento de resolución y que los conocimientos matemáticos son los encargados de suscitar la estrategia adecuada. Creemos que la discrepancia que se produce en los ítems I y II se debe a una interpretación equívoca de la frase “sin procedimiento conocido”, pues al preguntárseles con una redacción diferente (I1), los futuros profesores responden de la forma esperada.

El segundo conocimiento tiene relación con la consideración del resolutor. Las respuestas de los docentes se muestran mucho más heterogéneas que en el primer conocimiento, no existiendo acuerdo e incluso mostrando contradicciones. Esto puede deberse a lo que planteamos anteriormente, cuando establecimos que la etiquetación de un problema, en contextos escolares, se da en dos etapas, primero es el docente el que decide si el problema es pertinente a alguno de sus estudiantes, y posteriormente, este último es el que lo etiqueta de acuerdo a su experiencia. Junto con ello, un posible factor que determina este resultado son las concepciones que muestran los profesores, dando solo validez a la etiquetación de problema por su parte, dejando de lado la consideración del estudiante (Block, Martínez, Dávila y Ramírez, 2001). Esta situación indudablemente influirá en el uso del conocimiento didáctico para enseñar la RP, pues no considerar al resolutor en la actividad de resolver el problema provocará que la elección de tareas seleccionadas como problemas se realice desde una perspectiva utilitaria y no desde su significado más profundo y significativo, que es aprender matemáticas. Del mismo modo, esta visión, promueve un enfoque de enseñanza *para* la resolución. Enfoque que por sí solo no es perjudicial, pero que debe acompañarse de la enseñanza *sobre* y *a través* de la RP para equilibrar los procesos de aprendizaje (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015).

Finalmente, el tercer conocimiento que hemos analizado han sido los tipos de tareas que se presentan como problemas. En este conocimiento hemos diferenciado entre elementos relativos a los tipos de problemas y las características de formato presentes en los problemas. Los estudiantes para profesor manifiestan conocimientos concordantes con los expuestos por la literatura como buenos problemas en el sentido que permitan más de una solución o exista más de un único procedimiento para lograr una respuesta (Lester y Cai, 2016). No obstante, existe un mayor acuerdo en los tipos de problemas que son más comunes en los libros de texto (Zhu y Fan, 2006). Lamentablemente, estos problemas son generalmente rutinarios. En este contexto, el conocimiento que tienen sobre características adecuadas no concuerda con la elección de ejemplos de problemas, pues si bien los futuros profesores saben, por ejemplo, que existe más de un camino para llegar a la solución, no tienen los conocimientos necesarios para reconocer problemas que permiten esta acción en los posibles estudiantes.

En términos generales, los resultados se muestran alineados con el conocimiento sobre la noción de problemas que reporta la literatura. La mayoría de los participantes se muestran de acuerdo con afirmaciones que son reconocidas por la comunidad como adecuadas para conceptualizar un problema (Lester y Cai, 2016). Del mismo modo que afectan las concepciones y creencias, la formación generalista que reciben los profesores de primaria podría ser una de las causas de que su conocimiento se muestre acorde a la conceptualización contemporánea sobre lo que es un problema. Esto debido a que este tipo de formación se ha señalado como influyente en las creencias contemporáneas sobre la enseñanza de las matemáticas (Anderson, White y Sullivan, 2005).

Es importante destacar que este grupo de estudiantes para maestros se corresponden con los participaron en una asignatura optativa sobre el currículo de matemática. En dicho curso recibieron instrucción adicional sobre la RP que puede influir en sus respuestas, por lo que estos resultados no son generalizables a otro colectivo que no haya recibido esta instrucción específica. No obstante, este trabajo permite identificar la existencia de contradicciones fundamentales que coexisten y que pueden interferir en que el conocimiento adquirido en su formación se transfiera al aula. Por ejemplo, al declarar que una situación no rutinaria, abierta y aplicada es considerada un problema, para luego afirmar que los problemas deben tener toda la información necesaria en el enunciado para resolverla.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca dentro del Proyecto EDU2015-70565-P del Plan Nacional de I+D+I (MICIN); y gracias a CONICYT, a través de una Beca de Doctorado en el Extranjero, folio 72170314.

Referencias

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 125-143.

Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies, 13*(2), 121-142.

Anderson, J., White, P. y Sullivan, P. (2005). Using a schematic model to represent influences on, and relationships between, teachers' problem-solving beliefs and practices. *Mathematics Education Research Journal, 17*(2), 9-38.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid, España: Visor.

Bisquerra, R. (1989). *Introducción conceptual al análisis multivariable. Un enfoque informático con los paquetes SPSS-X, BMDP, LISREL y SPAD* (Vol. 1). Barcelona, España: PPU.

Block, D., Martínez, P., Dávila, M. y Ramírez, M. (2001). Usos de los problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 147-179). Huelva, España: Hergué.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Castro, E. y Ruíz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 89-108). Madrid, España: Pirámide.

Chapman, O. (2012). Practice-based conception of secondary school teaches' mathematical problem-solving knowledge for teaching. En T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th PME international conference* (Vol. 2, pp. 107-114). Taipéi, Taiwán: PME.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT, 3*(1), 19-36.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Fink, A. (Ed.). (2003). *How to ask survey questions* (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Foster, C., Wake, G. y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 97-104). Vancouver, Canadá: PME.

Gil, J. (1993). La posición del profesorado ante el cambio educativo. Un escalamiento multidimensional no métrico de los discursos sobre la reforma. *Revista de Investigación Educativa, 21*, 67-82.

Holmes, E. E. (1985). *Children learning mathematics: A cognitive approach to teaching*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Kilpatrick, J. (2016). Reformulating: Approaching mathematical problem solving as inquiry. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 69-81). Cham, Suiza: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Cham, Suiza: Springer.

Mason, J. (2016). When is a problem…? "When" is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 263-285). Cham, Suiza: Springer.

Mayer, R. E. y Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. En P. A. Alexander y P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 287-303). Nueva York, NY: Routledge.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España: SEIEM.

Mourshed, M., Chijiote, C. y Barber, M. (2010). *How the world's most improved school systems keep getting better*. Toronto, Canadá: McKinsey & Company.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education: Mathematics in modern world, mathematics and didactics, mathematics and life, mathematics and society* (pp. 115-124). Atenas, Grecia: Hellenic Mathematical Society.

OECD. (2013). *Draft PISA 2015 mathematics framework*. París, Francia: OECD Publishing.

Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas en primaria: una perspectiva curricular. En J. A. Macías, et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 427-436). Málaga, España: SEIEM.

Pólya, G. (1981). *Como plantear y resolver problemas*. DF, México: Trillas.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teacher's learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (3rd ed., pp. 275-296). Nueva York, NY: Routledge.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Zhu, Y. y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609-626.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA CULTURA DE RACIONALIDAD EN UNA CLASE DE MATEMATICAS

Building a Culture of Rationality in a mathematics class

Rodríguez-Rubio, S.G. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav-IPN)

Resumen

Mediante una mirada longitudinal y dinámica de los datos recabados en una clase ordinaria de matemáticas (secundaria), y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada y el modelo de Toulmin para interpretar los argumentos, en la investigación se profundiza en el concepto de 'Cultura de Racionalidad' -relacionada con las normas de sustentación y de interacción que se dan en un aula de matemáticas ordinaria-, introducida por los autores en trabajos previos. Con base en las nociones propuestas en el presente documento, de sucesiones de argumentos productivos y sucesión de argumentos reproductivos, asociadas a las intervenciones de consolidación y de cambio, es posible dar cuenta de algunos procesos de construcción de la Cultura de Racionalidad en la clase y es posible también tipificar, con cierto detalle y precisión, la Cultura de Racionalidad que prevalece en el aula estudiada.

Palabras clave: *argumento, Cultura de Racionalidad, Teoría Fundamentada, interacción en el aula.*

Abstract

Taking a longitudinal and dynamic view of the data collected in a regular mathematics class (secondary school), and following the principles of the Grounded Theory and the Toulmin Model to interpret the arguments, the authors of the research delve into the concept of Culture of Rationality' –related to the norms for sustentation and interaction that arise in a regular math class-, introduced by the authors in previous papers. Based on the notions proposed in this paper, dealing with successions of productive arguments and succession of reproductive arguments associated with consolidation and change interventions, it is possible to account for some of the processes involved in building a Culture of Rationality in class. It is moreover possible to characterize, with certain detail and precision, the Culture of Rationality that prevails in the classroom studied.

Keywords: *argument, culture of rationality, grounded theory, in-class interaction.*

ANTECEDENTES Y EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La justificación es uno de los rasgos paradigmáticos de la actividad matemática. La comunidad de matemáticos ostenta prácticas habituales de justificación de las proposiciones, que se plasman a través de sus criterios de rigor (e.g., estrictamente hablando, actualmente sólo se aceptan como justificaciones válidas las demostraciones deductivas inscritas en teorías axiomáticas). Estas normas de sustentación definen una 'Cultura de Racionalidad' de los matemáticos en un período específico de la historia. La Cultura de Racionalidad de los matemáticos no es permanente, sino que se ha ido transformando, siendo un acompañante fiel de la evolución de la propia disciplina. Las comunidades que se congregan en los salones de clase de matemáticas también poseen prácticas rutinarias para fundamentar los hechos de la disciplina; en otras palabras, ellas igualmente comparten una Cultura de Racionalidad, la cual prevalece en el aula por un período de tiempo dado.

Rodríguez-Rubio, S.G. y Rigo-Lemini, M. (2017). La construcción de la cultura de racionalidad en una clase de matemáticas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 427-436). Zaragoza: SEIEM.

En sus propios términos, de esto ya han dado cuenta varios investigadores. Por ejemplo, Yackel y Cobb (1996) interpretan y explican algunos aspectos relacionados con las prácticas de sustentación que se dan en el aula. Acuñan para este propósito la noción de norma sociomatemática, que hace referencia a los criterios que un profesor y sus estudiantes negocian para determinar lo que cuenta, por ejemplo, como una explicación matemática aceptable. En el estudio, ellos muestran que este tipo de normas se constituyen de forma interactiva e ilustran en el aula cómo los agentes de clase regulan los argumentos matemáticos e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Por su parte Planas y Gorgorió (2001) se centran en averiguar las "posibles interferencias en el aprendizaje que en el aula pueden derivarse de las diferentes interpretaciones de las normas matemáticas" (p. 135).

Otros investigadores se han interesado por estudiar la racionalidad real de los alumnos al elaborar argumentos (e.g., Durand-Guerrier et al., 2012) o han analizado el comportamiento racional de los agentes en la clase de matemáticas (e.g., Boero y Morselli, 2009). Estos estudios han retomado el modelo de Habermas, integrado por tres componentes: racionalidad epistémica, racionalidad teleológica y racionalidad comunicativa.

Las interacciones entre los agentes de la clase desempeñan un rol importante en el establecimiento de las formas de sustentar las afirmaciones matemáticas que surgen en el aula. Al respecto, Krummheuer (1995) por ejemplo, centra su estudio en el análisis de los argumentos en clase, y apunta la necesidad de considerarlos bajo la óptica de la interacción social y no como procesos que se llevan a cabo por una sola persona. Cobb (1995) por su parte, identifica dos tipos de interacciones que se dan en clase, las unívocas, en las que la opinión de uno de los participantes es la que domina, y las multívocas, en las que hay desacuerdo entre los copartícipes porque cada uno supone que su razonamiento es válido y trata de explicarlo; éstas últimas son las que el autor considera que generalmente son más productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Jones y Herbst (2012) se enfocan en el papel del maestro en la enseñanza de la prueba y la demostración, centrando su atención en teorías que "iluminan la interacción profesor-alumno en el contexto de la práctica de enseñanza en el día a día de los profesores de matemáticas" (p. 262). En su trabajo se plantean contribuir en el examen de los marcos teóricos que ofrezcan elementos para comprender el desarrollo de la prueba y la demostración en las aulas de matemáticas de distintas latitudes.

A diferencia de los estudios que retoman una noción predeterminada de racionalidad, establecida sobre criterios dados de evaluación (Boero y Morselli, 2009), el objetivo general de la investigación consiste en afinar la categoría de Cultura de Racionalidad definida por los autores de este escrito en trabajos previos (Rigo, 2009; Rodríguez y Rigo, 2015a, 2015b); para este propósito se acude a la Teoría Fundamentada, específicamente al muestreo teórico. A partir de una re-visita a los datos empíricos, esta herramienta analítica permite profundizar en los conceptos (que previamente habían sido derivados de esos datos empíricos), dando la posibilidad de identificar otros distintos o de reconocer propiedades que antes no era posible distinguir. Así, con base en esos principios metodo-lógicos se introducen, en el presente documento, nuevos conceptos, el de sucesión de argumentos productivos y reproductivos e intervenciones de consolidación y cambio, que permitirán dar cuenta, hacia el final del escrito, de cómo en general se construye la Cultura de Racionalidad en el aula, y que actuarán como indicadores para caracterizar la Cultura de Racionalidad que prevalece en salón ordinario de matemáticas. Las preguntas orientativas que guiaron la investigación son entonces: ¿cómo se construye, en general, la Cultura de Racionalidad en una clase de matemáticas? y ¿con qué criterios se puede tipificar la Cultura de Racionalidad de una clase específica de matemáticas?

MARCO TEÓRICO INTERPRETATIVO

Análisis funcional de los argumentos con el Modelo de Toulmin

El modelo de Toulmin (1984) se utilizó como herramienta analítica para organizar, en forma de argumentos, las resoluciones que en clase se ofrecieron a las tareas ahí presentadas. De acuerdo a este modelo un argumento está integrado por una conclusión (C); en el estudio se consideran como conclusiones a las proposiciones de contenido matemático que hacen referencia a ideas completas, susceptibles de ser verdaderas o falsas y corresponden a los resultados de las tareas planteadas en la clase. En el argumento también participan las evidencias (E) que, en el estudio, coinciden con los sustentos proporcionados por los agentes de la clase para obtener la conclusión de la tarea, concordando con la resolución dada para resolverla; ésta incluye los procedimientos llevados a cabo por ellos, como la aplicación de alguna regla o la elaboración de cálculos que, como menciona Krummheuer (1995), se producen de manera persistente en la educación primaria y coinciden con el argumento. Otro componente del argumento son las garantías (G); se trata de reglas de inferencia, creencias generales, teoremas en acción y consideraciones que no se cuestionan y que responden a la pregunta ¿qué licencias de inferencia permite pasar de E a C? El respaldo (R) que apoya a la garantía es otro componente del argumento y ofrece su cimiento teórico, práctico o experimental. Mientras las conclusiones y las evidencias son explícitas, las garantías y los respaldos son implícitos y aquí han sido re-construidos a partir de las producciones de los agentes de la clase.

Sobre la Cultura de Racionalidad

El concepto de Cultura de Racionalidad se ha acuñado en el marco de la investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen. Las ideas iniciales relacionadas con el concepto de Cultura de Racionalidad han sido construidas en trabajos previos, con base en los resultados empíricos ahí recabados (e.g., Rodríguez y Rigo, 2015a, 2015b). En esos trabajos se han identificado dos componentes principales de la Cultura de Racionalidad:

Normas de sustentación. Prácticas habituales y más aceptadas de sustentación o de elaboración de argumentos que los agentes de clase llevan a cabo en el aula para soportar los hechos de las matemáticas (cf., normas sociomatemáticas de Yackel y Cobb, 1996).

Normas sociales sobre el reparto de responsabilidades y sobre las formas de interacción. Hace referencia al agente de clase que habitualmente le corresponde argumentar (i.e., dar las conclusiones y las evidencias, y eventualmente las garantías), y al que le toca sancionar los argumentos y las conclusiones dadas, y apunta también hacia las formas de interacción que para argumentar se dan cotidianamente en clase (cf., normas sociales de Planas y Gorgorió, 2001).

El concepto de Cultura de Racionalidad introducido en este trabajo no consiste en un conjunto de criterios evaluativos que se apliquen para medir o evaluar la racionalidad de una clase, a diferencia de otras investigaciones (Boero y Morselli, 2009); se trata de pautas orientativas y exploratorias que permiten descubrir la racionalidad que prevalece en un aula ordinaria de matemáticas para distinguir sus características y cualidades más sobresalientes, sin establecer ningún juicio de valor.

METODOLOGÍA

Técnicas analíticas empleadas

La investigación que aquí se reporta fue desarrollada siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), cuyo objetivo central consiste en construir, a partir de apoyos empíricos, conceptos teóricos que expliquen fenómenos sociales. Específicamente, en el trabajo se acude al muestreo teórico, técnica interpretativa que parte de conceptos construidos previamente (sobre datos empíricos) para realizar, con base en ellos y tomándolos como una guía, un nuevo análisis. Este análisis se puede hacer considerando nuevos datos empíricos o re-visitando los que previamente se tenían; la intención central de ese análisis consiste en poder adicionar otras propiedades y dimensiones de un concepto previamente construido, lo que da la posibilidad de que se vaya 'saturando', es decir, que se vaya puliendo y vaya ganando en profundidad y riqueza.

Específicamente, el muestreo teórico se aplica en este escrito al concepto de Cultura de Racionalidad antes expuesto, con sus dos componentes básicos; orientados por ese concepto, se regresa a los datos empíricos para re-interpretarlos ahora con una mirada longitudinal y dinámica, con el objeto de revelar propiedades y dimensiones de ese concepto que antes no resultaban visibles.

Métodos de recuperación de datos y sujetos que participaron en el estudio

Los datos empíricos provienen de un estudio de caso, conformado por la profesora Noemí, con dos años de servicio, y su grupo de trabajo integrado por 42 alumnos de primer grado de educación secundaria. La razón de su elección (de un total de tres profesores) obedeció a que era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática. Cuando fue observada, enseñaba el tema 'Reparto proporcional', para lo cual empleó un enfoque didáctico basado en la resolución de problemas. Para el análisis que aquí se expone se examinó la secuencia didáctica que versa sobre ese tema, y que tuvo una continuidad temática, didáctica y pedagógica; la secuencia fue impartida por la profesora en seis módulos de 50 minutos cada uno, los cuales fueron videograbados y transcritos. La secuencia didáctica se fragmentó en episodios, en cada uno se propusieron uno o varios argumentos (o resoluciones) para dar sustento a una conclusión, que como se dijo, coinciden con la solución a cada una de las tareas propuestas en clase. Para este reporte se analizaron 37 episodios y 74 argumentos.

ANÁLISIS EMPÍRICO

La re-interpretación de los datos dio inicio con un examen puntual de cada argumento, considerando sus componentes de acuerdo al modelo de Toulmin. Este análisis ha permitido, en la re-visita de los datos, caracterizar cada argumento acudiendo a dos componentes funcionales: las garantías y los respaldos. En la última columna de la Tabla 1 se describen las garantías que, en el marco del presente trabajo, se identificaron en la secuencia didáctica observada. Los respaldos que se distinguieron en esta investigación aparecen descritos en la 1ª y 2ª columna de dicha Tabla.

Tabla 1. Garantías y Respaldos identificados en la secuencia didáctica

Tipo de respaldo del argumento		Nombre de la garantía asociada al tipo de respaldo	
Matemático	Idea formal escolar de proporcionalidad	JE	*Justificación empírica*. Cuando se justifica una regla con base en el análisis de casos particulares.
		EP	*Explicitación de proceso*. Cuando se explicita el proceso que se llevó a cabo durante la instanciación de una regla.
		RIFE	*Repetición enriquecida de una instanciación de una regla* (e.g., cuando se da un cambio de registro). Esta garantía se presenta cuando se lleva a cabo la repetición de la aplicación de una regla en un argumento que tiene la misma conclusión que uno previo.
		IFE	I*nstanciación de una regla formal escolar* (cuando se aplica una regla que ya ha sido justificada en la clase o se ha explicitado el proceso de su aplicación)
	Idea intuitiva de proporcionalidad	II	*Instanciación de una regla intuitiva* (cuando se aplica la regla sólo con bases de conocimientos intuitivos. Esto se infiere a partir de lo que otros autores han denominado como estrategias espontáneas de '*building up*' (e.g., Hart, 1984), conforme a las cuales utilizan factores escalares sencillos en lugar recurrir al factor de proporcionalidad.
Extra-matemático	Idea operatoria de proporcionalidad	RIO	*Repetición de la instanciación operatoria de una regla* (cuando de utiliza la misma regla instanciada previamente para soportar la misma conclusión)
		IO	*Instanciación operatoria de una regla* (se hace la instanciación (o aplicación de la regla) bajo la consideración de que es válida por pertenecer a la disciplina)
		RP	*Razones prácticas* (el resultado es válido porque es fácil de obtener)

Una vez identificados y caracterizados los argumentos, con base en sus garantías y respaldos, se jerarquizaron como aparecen en la Tabla 1. Se utilizó un criterio basado en el tipo de respaldos; en el nivel más bajo se colocaron los argumentos con respaldo extra-matemático, asociados a ideas operatorias de la proporcionalidad, después se consideraron los argumentos con respaldos matemáticos, poniendo primero los soportados en ideas intuitivas de proporcionalidad y, finalmente, en la parte superior, se colocaron los argumentos orientados por ideas acordes con la proporcionalidad formal escolar.

Posterior al análisis puntual se delineó la trayectoria de los argumentos identificados en la secuencia didáctica, respetando el orden de aparición en clase. La representación de la trayectoria se organizó considerando los distintos componentes de los argumentos: la conclusión, las evidencias, las garantías, los respaldos y las reglas, tomándose también en cuenta los agentes que los ofrecieron. Una representación de esas trayectorias se despliega en la Tabla 2.

Tabla 2. Trayectoria de los argumentos y de participación

Respaldos		Garan-tias	Número del argumento																																				
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	
Matemáticos	Formal Escolar	JE							PIM		PIM				VU			PIM	VU	PF																				
		EP		PIM																																			PIM	
		RIFE															VU						PIM		VU		VU		PIM				PIM				PIM			
		IFE						PIM		PIM						VU					PIM	PIM		VU		VU		PIM				PIM		VU	PIM	PIM		PIM		
	Intuitiva	II	PIM											VU																										
Extra Mat	Operatoria	RIO					R3						R3																		R3									
		IO			R3							R3																		R3										
		RP				R3																																		
			A	M	A	M	M	A	M	A	A	A	M	A	M	A	M	M	M	M	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	AE
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	2	1	2	EC
			A					A						A		A		M	M	M	A	A		A		A				A				A		A		A		AC
			1					3						4		5		6	7	8	9	10		11		12				13				14		15		16		C

Respaldos		Garan-tias	Número del argumento																																				
			38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	
Matemáticos	Formal Escolar	JE																										R3												
		EP						VU						VU																										
		RIFE		PIM		PIM					PIM										PIM		PIM															R3		
		IFE	PIM		PIM		VU		PIM	PIM		PIM	VU		PIM	PIM	PIM	PIM	VU	PIM		PIM							PF	PF	R3	R3	R3	R3	PIM	R3	R3		R3	
	Intuitiva	II																																						
Extra Mat	Operatoria	RIO																																						
		IO																					R3	R3	R3	R3													
		RP																																						
			A	M	A	M	M	M	A	A	M	A	A	M	A	A	A	A	A	A	M	A	M	M	M	M	M	M	A	A	M	M	M	M	A	M	A	M	M	AE
			1	2	1	2	1	2	1	2	3	1	1	2	1	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	1	1	2	1	2	3	EC
			A		A		M		A			A	A		A	A	A	A	A			A		A	A	A	M	M				M		A	A		A			AC
			17		18		19		20			21	22		23	24	25	26	27			28		29	30	31	32	33				34		35	36		37			C

Significados de las garantías: JE: Justificación empírica; EP: Explicitación de proceso; RIFE: Repetición enriquecida de la instanciación de una regla; IFE: Instanciación de una regla formal escolar; II: Instanciación de una regla intuitiva; RIO: Repetición de la instanciación operatoria de una regla; IO: Instanciación operatoria de una regla; RP: Razones prácticas.
Significados de las reglas: PIM: Propiedad isomórfica de la multiplicación; VU: Valor unitario; PF: Propiedad funcional; R3: Regla de tres.
C: Conclusión; AC: Agente de la clase que proporcionó la conclusión; EC: Evidencia que soporta la conclusión; AE: Agente que ofreció la evidencia.

Las distintas conclusiones que se ofrecieron en clase se presentan numeradas en la última fila de la Tabla 2; en la penúltima fila se hace referencia a los agentes que las proporcionaron. Asociadas a una conclusión, que recuerde el lector, coincide con la solución de la tarea, en clase se brindaron una o más evidencias (la resolución de la tarea), las que se numeran en la ante-penúltima fila; y cada evidencia la proporcionó un agente de clase (al que se hace referencia en la fila superior a las evidencias). Por ejemplo, para la conclusión 1, proporcionada por un alumno, se ofrecieron en clase 5 evidencias que ofrecieron un alumno, la maestra, un alumno y las últimas dos, la maestra.

En cada evidencia se activó una determinada regla: las reglas que se movilizaron en la secuencia didáctica fueron: la regla de tres (R3), la Propiedad isomórfica de la multiplicación (PIM) (Vergnaud, 1989) (factor escalar), el valor unitario (VU) y la propiedad funcional (PF) (Vergnaud, 1989) (constante de proporcionalidad). Las reglas aparecen en la casilla en la que se intersecta la fila de la garantía en la que se sustenta la evidencia, con la columna de la evidencia. Así por ejemplo, en el argumento 1, asociado a la primera conclusión, un alumno activó la PIM mediante la instanciación de una regla intuitiva (II); o en el argumento 17, asociado a la conclusión 7, la maestra movilizó el valor unitario (VU) y validó esa regla a través de una justificación empírica (JE).

Los respaldos y las garantías se nombran (por sus siglas) en la primera y segunda columna de la Tabla 2, organizadas como lo están en la Tabla 1. Los argumentos brindados a lo largo de la secuencia didáctica aparecen numerados en la segunda fila de la Tabla 2. Ahí se ve que el número total de argumentos identificados es 74. La Tabla 2 también está organizada de forma horizontal, lo que permite identificar episodios. Cada episodio está organizado a partir de una conclusión; en cada episodio los agentes de la clase soportan la conclusión con base en una o más evidencias, y relacionadas a ellas, como ya se dijo, pueden activarse una o más reglas distintas entre sí.

Considere ahora el lector el caso de una misma regla (la que aparece en distintas evidencias, mismas que pueden estar ligadas a una misma conclusión y pertenecer a un mismo episodio, o a conclusiones distintas y pertenecer a diferentes episodios). En estas circunstancias, de invarianza de reglas a lo largo de distintos argumentos, los respaldos pueden ser similares (como en el caso de los argumentos 7 y 9 pertenecientes al episodio 3, en donde la regla que se activa es la PIM y los respaldos son iguales ya que están soportados en consideraciones matemáticas y en una idea de proporcionalidad formal escolar), o pueden ser distintos (los argumentos 3 y 63 comparten la misma regla, la R3, pero los respaldos son distintos, ya que el primero es extra-matemático basado en una idea de proporcionalidad operatoria y el segundo es matemático que hace alusión a una idea de proporcionalidad formal escolar).

Esta condición particular, en la que se consideran argumentos que contienen la misma regla, involucra parejas de argumentos; de hecho, en lugar de parejas se puede pensar en sucesiones de más de dos argumentos. Por ejemplo, una sucesión de argumentos con invarianza de regla está representada por los argumentos 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62, que comparten R3.

Ahora bien. Estas sucesiones de argumentos que comparten la misma regla, pueden compartir también el mismo respaldo, como sucede con la sucesión antes expuesta, cuyos argumentos coinciden en un respaldo extra-matemático y en una idea operatoria de proporcionalidad. En estas sucesiones, definidas mediante un patrón específico: misma regla y mismo respaldo, es posible distinguir un fenómeno didáctico sobresaliente. Y es que esas sucesiones de argumentos representan potencialmente la oportunidad para que en clase se consolide una regla, de acuerdo a un determinado tipo de respaldo, que de alguna manera orienta la manera de sustentar el uso de esa regla. Se podría tratar de un 'momento de la técnica' (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); estos momentos resultan imprescindibles para que "el estudiante se familiarice con ciertas técnicas hasta alcanzar un dominio tan robusto de las mismas que llegue a utilizarlas como algo 'natural'" (p. 279) o hasta que dejen de ser problemáticas y se lleguen a rutinizar…" (p. 287). A partir de aquí "estas técnicas podrán ser consideradas de manera oficial como técnicas 'adquiridas' por los alumnos, pasando a formar parte del medio matemático de la clase" (p. 279). A este tipo de sucesiones, en este documento se les llama 'sucesiones de tipo reproductivo' porque, como se dijo, de alguna manera ayudan a consolidar el dominio de la regla en ciernes. Una sucesión de tipo reproductivo es la que aparece en el párrafo precedente. En la transcripción de clase (v. Tabla 2) se ejemplifica este tipo de sucesiones. Los argumentos 13, 14 y 15 conforman una sucesión de tipo reproductivo ya que comparten la misma regla (VU, que introduce un alumno) y el mismo respaldo (idea de la proporcionalidad formal escolar). En este caso los tres argumentos no comparten la misma conclusión (C5) y por tanto no están en el mismo episodio.

Hay, por otra parte, sucesiones de argumentos que comparten la misma regla pero distinto respaldo, donde el último tiene un nivel superior de complejidad que los precedentes; a estas se les llama sucesión de argumentos de tipo productivo. Un ejemplo es la sucesión antes descrita, 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62 articulada toda ella en torno a una aplicación operatoria de la Regla de tres pero complementada ahora con el argumento 63, en donde esa Regla se justifica empíricamente, dando lugar a un argumento sustentado matemáticamente. Estas sucesiones de argumentos son productivas porque para justificar la regla se ponen en juego elementos matemáticos más complejos, lo que incide de manera importante en la solidez del conocimiento que consiguen los alumnos. En la Tabla 3, los argumentos 12 y 13 son una sucesión de tipo productivo, ya que comparten la misma regla (UV), pero poseen respaldos distintos, uno soportado en una idea de la proporcionalidad intuitiva y otro, en una idea de la proporcionalidad formal escolar.

A las intervenciones de los agentes de clase que dan lugar a sucesiones de tipo reproductivo en este trabajo se les llama intervenciones de consolidación, porque ayudan a reforzar el dominio de una regla. A las que dan lugar a sucesiones de tipo productivo, se les llama intervenciones de cambio, porque modifican el nivel de complejidad de acuerdo al cual se sustentan las conclusiones. Intervenciones de consolidación se dan en la sucesión de los argumentos 13, 14 y 15, ya que en éstos como se dijo, se repite la misma regla con el mismo respaldo; la intervención de la maestra para proponer la evidencia del argumento 13 es de cambio, porque en ella se preserva la misma regla que en el argumento 12, pero los respaldos ya cambian: mientras este último se basa en una teoría de proporcionalidad intuitiva, el otro se apoya en una idea de proporcionalidad escolar.

Tabla 3. Transcripción y análisis de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y productivo

<table>
<tr><td colspan="5">Episodio 4. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 4 (C4), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 12 litros.</td></tr>
<tr><th>Conclusión</th><th>Evidencia</th><th>Garantía</th><th>Respaldo</th><th>Argumento</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C 4: A
Se divide 12 entre tres para saber cuánto equivale un litro</td><td>E 1: Alumno
<table>
<tr><th>Litros de agua de limón</th><th>No. de limones</th><th>Cucharadas de azúcar</th></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr>
</table>
$\begin{array}{r}4\\3\overline{)12}\end{array}$ $\begin{array}{r}12\\\underline{-4}\\48\end{array}$ $\begin{array}{r}6\\\underline{-4}\\24\end{array}$</td><td>G 1:
Instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad intuitiva</td><td>12</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra
Sacó el valor unitario. Si divide entre tres, tres entre tres nos da a uno…Si tú tienes…el valor de ingredientes para un litro de agua de limón…puedes tener el valor para cualquiera… como le decía a los otros grupos, cuando nos mandan a comprar tamales, no llegamos con el señor de los tamales y le decimos: ¿cuánto tengo que pagar por tres tamales?, entonces te vas con tu regla de tres, ah entonces por 12 que me pidió mi mamá yo tendría que pagar…No! preguntas: cuánto cuesta un tamal y entonces multiplicas por la cantidad de tamales que le vas a comprar…a esto le vamos a llamar el valor unitario…para un litro cuánto necesito de cada cosa.</td><td>G 2:
Justificación empírica de la instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="5">Episodio 5. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 5 (C5), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 10 litros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C 5: A
Para preparar 10 litros de agua de limón se necesitan 40 limones y 20 cucharadas de azúcar</td><td>E 1: Alumno
Sería lo de un litro que es cuatro limones y dos cucharadas…si multiplico los 10 litros por los demás que se necesitan [número de limones y de cucharadas de azúcar] son 40… 10 por 2 sería 20.</td><td>G 1:
Instanciación de una regla formal escolar (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>14</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra
<table>
<tr><th>Litros de agua de limón</th><th>No. de limones</th><th>Cucharadas de azúcar</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr>
</table>
Así es que necesitas 40 limones y 20 cucharadas de azúcar…ya tengo el valor unitario [se apoya de los datos de tabla que ella, posterior a la evidencia del alumno, elaboró para explicar]…10 por 4, cuarenta y 10 por 2, 20</td><td>G 2:
Repetición enriquecida de la instanciación de una regla (VU) para dar aval institucional</td><td>R 2:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>15</td></tr>
</table>

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Reconceptualización de la Cultura de Racionalidad

El análisis precedente, basado en el muestreo teórico, en el que se re-visitaron los datos empíricos a partir de una mirada longitudinal y dinámica, y siempre orientada por la categoría inicial de Cultura de Racionalidad, ha llevado a identificar nuevos conceptos: sucesión de argumentos de tipo productivo y de tipo reproductivo, y las intervenciones de consolidación y de cambio. Estas intervenciones lo que consolidan o cambian es la forma de argumentar o justificar. Es decir, consolidan o cambian los patrones de sustentación, incidiendo así directamente en la Cultura de Racionalidad, porque como se dijo inicialmente, esa Cultura de Racionalidad es un conjunto de patrones de sustentación y de patrones de interacción de acuerdo a los cuales los agentes de clase argumentan los resultados de las tareas que ahí se proponen. Las relaciones entre la categoría inicial de la Cultura de Racionalidad y las nuevas propiedades de la categoría aparecen en el Diagrama 1. Ahí se muestran los conceptos iniciales asociados a esa categoría: normas de sustentación y normas de interacción; las normas de sustentación contienen, entre otros, patrones de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo. Por su parte, las normas de interacción incluyen entre otros, patrones de intervenciones de consolidación y de cambio. Estas últimas están entrelazadas con las normas de sustentación como se muestra en el Diagrama 1. Todos estos conceptos están nucleados alrededor de lo que se perfila como la categoría central, la de Cultura de Racionalidad.

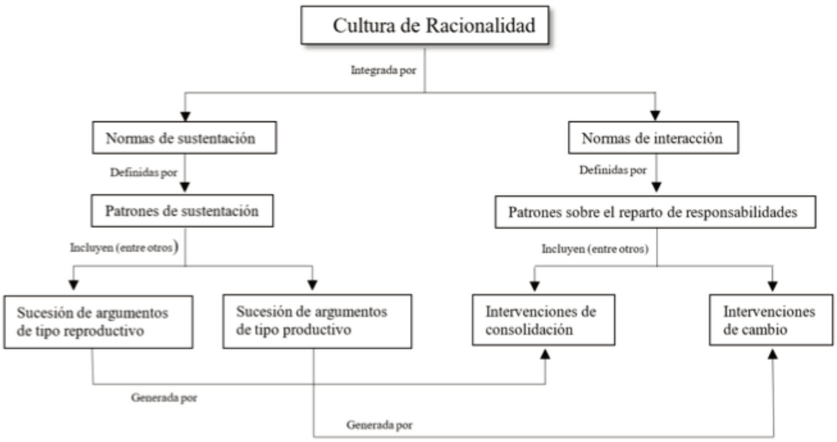


Diagrama 1. La Cultura de Racionalidad y conceptos relacionados

La Cultura de Racionalidad en el aula de matemáticas de la maestra Noemí

Los nuevos conceptos permiten dar cuenta de cómo eventualmente se construye la Cultura de Racionalidad en una clase, mediante sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo e intervenciones de consolidación y de cambio, lo que proporciona la oportunidad de desentrañar más agudamente aspectos de su naturaleza.

Pero las nuevas categorías identificadas en este trabajo también funcionan como indicadores que ofrecen la posibilidad de caracterizar de manera más detallada y escrupulosa la Cultura de Racionalidad que prevalece en un aula cualquiera; en particular, la Cultura de Racionalidad que impera en el aula observada.

En la clase observada es posible identificar, a nivel de episodio, que para una conclusión (de un episodio) se ofrecieron en la mayoría de los casos, más de una evidencia (¡incluso seis!), lo que permite suponer que los alumnos tienen la experiencia viva de que es posible sustentar una misma conclusión de varias formas. En la Tabla 3 se puede reconocer cómo de 37 conclusiones que surgieron en la secuencia didáctica, en 22 de ellas (casi 60%) se proporciona más de una evidencia, mientras que en el resto se ofrece sólo 1.

En la secuencia didáctica observada, de los 74 argumentos que allí se presentaron, 11 (cerca del 15%) fueron el remate de sucesiones productivas, mientras que 63 formaron parten de sucesiones reproductivas. Esta presencia de ambos tipos de sucesiones de argumentos aporta riqueza a la Cultura de Racionalidad, al conjugar lo procedimental con lo conceptual.

Con las categorías introducidas también se consigue distinguir el papel que juegan los agentes de la clase en la construcción de la Cultura de Racionalidad. En el caso de la clase analizada, es claro que es a los niños a los que les toca llevar a cabo las intervenciones de consolidación o presentar la sucesión de argumentos de tipo reproductivo, mientras que a la maestra le corresponde transformar el patrón de sustentación mediante intervenciones de cambio: de los 74 argumentos totales, los alumnos participaron en 34; de éstos, 33 argumentos forman parte de sucesiones reproductivas y sólo uno culminó una sucesión de tipo productivo; por su parte, la maestra participó en 40 argumentos; de éstos, 30 argumentos integran sucesiones de tipo reproductivo y 10 representaron la culminación de sucesiones productivas.

A nivel general se puede decir que en la clase observada se dan distintos tiempos de incubación o consolidación de una regla. Por ejemplo, la secuencia reproductiva asociada a la regla de tres es prolongada, es decir el período de fortalecimiento que da la maestra para que los alumnos se preparen en el dominio de esta técnica es largo, de hecho dura casi toda la secuencia didáctica y es sólo hasta el final que decide cambiar de patrón de sustentación, mediante una intervención de cambio, para justificarla empíricamente. A diferencia de esto, en otras reglas como la PIM, es en un mismo episodio que la maestra decide reemplazar el patrón de sustentación, de una instanciación intuitiva a una explicitación del proceso. Es posible que esto obedezca a que en la regla de tres ella consideró necesario darles tiempo a los estudiantes para que la asimilaran, para que la asumieran como una regla 'natural' -como dice Chevallard et al (1997)- y que en el caso de la PIM posiblemente la docente se percató que los alumnos previamente poseían ya un dominio de la regla y que no era necesario dar tanto tiempo de incubación.

Se puede decir, en general, que en la clase de la maestra Noemí los niños introducen las reglas (generalmente a nivel operatorio o intuitivo), marcando la pauta inicial de cómo sustentar, mientras que su mentora, bajo su criterio, los detiene el tiempo necesario para que las asimilen y las fortalezcan; el ciclo se cierra cuando ella ofrece, mediante una intervención de cambio, evidencias más sólidas y fundamentadas de las reglas. Así que los niños introducen y participan en el afianzamiento de la regla, esto es, se involucran en las intervenciones de consolidación, mientras la maestra es la que concurre en las intervenciones de cambio, al decidir cuándo y cómo modificar las formas de sustentación.

Lo anterior habla de una Cultura de Racionalidad en la que hay equilibrio entre las sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo, ya que se da el tiempo necesario para fortificar la regla con una cierta forma de sustentación y se da también el tiempo para profundizar en ese sustento. No obstante, es una Cultura de Racionalidad poco 'constructivista' o poco negociada, en el sentido de que es la maestra la que ofrece los argumentos más sólidos y fundamentados; es ella la que marca el ritmo y las orientaciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Las nuevas categorías asociadas a la Cultura de Racionalidad permiten explicar fenómenos relacionados con su construcción. Da cuenta de que la Cultura de Racionalidad no es fija en una clase, que se va movilizando constantemente, de acuerdo a la presencia de sucesiones productivas o reproductivas. Y da cuenta también del agente sobre quién recae, en sus intervenciones, la responsabilidad de sostener una manera de sustentar o de modificarla, ya para profundizar o bien para ofrecer argumentos más limitados conceptualmente. Esto seguramente dependerá del tema en cuestión, de las características de la maestra, en particular de su enfoque didáctico, así como de los estudiantes que ahí participen.

Las nuevas categorías dan la posibilidad también de tipificar la Cultura de Racionalidad prevalente en una clase de matemáticas. Por ejemplo, de la presencia de sucesiones de argumentos de tipo productivo en un episodio, se desprende la diversidad de evidencias que profundizan en las previas, lo que dicho en otras palabras, permite mostrar la existencia de distintas formas de sustentar y ahondar en una misma conclusión. De la presencia de la sucesión de argumentos de tipo reproductivo en clase, por otra parte, se deriva la multiplicidad de evidencias similares que permite consolidar una regla. Para el caso de que en clase sólo se ofrezca una evidencia para cada conclusión, se puede desprender como consecuencia la pobreza en la argumentación y posiblemente una ausencia de negociación en las políticas de racionalidad, las que pueden recaer sólo en una minoría de los agentes de la clase, con preponderancia quizás del profesor.

Si en una clase se presenta un desequilibrio entre sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo, posiblemente se consigue con esto una Cultura de Racionalidad raquítica, con pocas opciones de argumentación y de negociación. Un ejemplo típico son las clases de las escuelas de matemáticas, en donde generalmente se dan argumentos deductivos pero pocos argumentos de otros estilos (experimentación con software o analogías, por ejemplo); otro ejemplo prototípico es la clase de primaria o secundaria en la que prevalecen los argumentos por repetición o de tipo operatorio. A diferencia, el equilibrio entre los dos patrones de sucesiones de los argumentos conjugaría muy posiblemente aspectos procedimentales del aprendizaje con los conceptuales, lo que daría riqueza a la clase y a la racionalidad. Por otra parte, un desbalance de las intervenciones a favor de ciertos agentes, por ejemplo del profesor, impediría a los alumnos beneficiarse de los resultados cognitivos que propicia la acción y la interacción en la clase. Sería deseable que los profesores reflexionaran sobre el tipo de Cultura de Racionalidad que ellos, con conciencia o sin ella, promueven en su clase y determinaran si en realidad responde a sus objetivos didácticos.

Referencias

Boero, P. y Morselli, F. (2009). Towards a comprehensive frame for the use of algebraic language in mathematical modelling and proving. En M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proc. 33rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 185-192. Thessaloniki: PME.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25–129). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. In G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). New York: Springer.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company.

Jones, K. y Herbst, P. (2012). Theories and contexts. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 261-277). New York: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(1), 135-150.

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2015a). The culture of rationality in secondary school: An ethnographic approach. En Beswick, K., Muir, T., y Wells, J. (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Hobart, Australia: PME.

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2015b). Cultura de racionalidad y procesos de enculturación en la escuela secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 477-484). Alicante: SEIEM.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Disertación doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.

Toulmin, S., Rieke, R. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan.

Vergnaud, G. (1989). Multiplicative structures. En J. Hiebert y Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN SOBRE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Pre-service elementary school teachers pedagogical knowledge about learning objectives

Ruiz-Hidalgo, J.F., Lupiáñez, J.L., Castro-Rodríguez, E., Rico, L., Fernández-Plaza, J.A., Flores, P. y Segovia, I.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Resumen

El proceso de formación de los maestros incluye la familiarización con objetivos específicos de aprendizaje, puesto que su empleo forma parte de la futura labor profesional. Identificar qué objetivos se pueden planificar con una tarea matemática escolar pertenece al ámbito del conocimiento didáctico. En esta comunicación describimos cómo expresan los estudiantes del grado de Educación Primaria de último curso objetivos a partir de una tarea matemática escolar. Los resultados muestran diferencias en las capacidades identificadas, el nivel cognitivo de los contenidos mencionados y la ausencia de consideración de contextos.

Palabras clave: *objetivos de aprendizaje, maestros en formación, conocimiento didáctico, matemáticas, fracciones.*

Abstract

Initial elementary school math teacher training programs include the familiarization of specific learning objectives, given that the use of these objectives takes part of their future professional work. Identifying what objectives can be pursued with a school mathematical task belongs to the domain range of their didactic knowledge. In this paper, we describe how primary-school preservice elementary school teachers express the objectives associated to a given school mathematical task. The results show differences in the capabilities, the cognitive level of the mentioned contents and the lack in consideration of contexts.

Keywords: *learning objectives, pre-service teachers, pedagogical knowledge, mathematics, fractions.*

INTRODUCCIÓN

Para promover y consolidar el aprendizaje de las matemáticas, el profesor puede plantear a sus escolares tareas que demandan actuaciones, que deben evidenciar las capacidades y conocimientos alcanzados y el grado de desarrollo de la competencia matemática. Dichas tareas, conocimientos y capacidades permiten caracterizar diferentes niveles de logro de las expectativas de aprendizaje establecidas por parte de los escolares. Estas expectativas se pueden enunciar con diferente grado de concreción, y pueden ser propuestas por distintos agentes, pero en todos los casos, expresan unos usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de actuaciones de los escolares ante determinadas tareas matemáticas (Lupiáñez, 2009).

Un nivel de concreción que está estrechamente vinculado con la actividad del docente, es la de objetivo específico de aprendizaje. Durante muchas décadas se ha ido avanzando en la formulación de objetivos específicos como base de la planificación para la enseñanza obligatoria (DeLong, Winter y Yackel, 2005). Sin embargo, estos autores reconocen que la investigación no ha indagado con profundidad los efectos de establecer y seguir en la práctica docente objetivos explícitos.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Lupiáñez, J.L., Castro-Rodríguez, E., Rico, L, Fernández-Plaza, J. A., Flores, P. y Segovia, I. (2017). Conocimiento didáctico de maestros en formación sobre objetivos de aprendizaje. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 437-446). Zaragoza: SEIEM.

La investigación sí ha suministrado un fuerte apoyo empírico a la relación entre la orientación de las expectativas de aprendizaje y el rendimiento en matemáticas de los escolares (Lin, Hung, Lin, Lin y Lin, 2009). Los objetivos de aprendizaje imponen un compromiso que el profesor debe asumir y al que debe dar respuesta coherente en la selección de contenidos, la propuesta metodológica, la concreción de tareas y las pautas de evaluación. Las diferencias en el enunciado de los objetivos de aprendizaje condicionan fuertemente las oportunidades de aprendizaje que se les suministra a los escolares (Chen, Reys y Reys, 2009; Flores y Lupiáñez, 2016).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que se propone analizar el conocimiento que manifiestan profesores en ejercicio y profesores en formación sobre nociones y procedimientos didácticos. Un primer acercamiento indaga el conocimiento didáctico que evidencian futuros profesores de Educación Primaria acerca de componentes del aprendizaje escolar. Concretamente, el propósito de este informe es identificar y caracterizar el conocimiento de los estudiantes del Grado de Educación Primaria en su último año de formación sobre la noción de objetivo de aprendizaje en matemáticas. Este propósito se enmarca en un programa de formación que persigue un enfoque funcional de la matemática.

MARCO TEÓRICO

El fundamento de este trabajo se asienta en la noción de objetivo de aprendizaje, la de conocimiento didáctico del contenido del profesor y la de significado del conocimiento matemático escolar.

Expectativas de aprendizaje en Educación Matemática: objetivos específicos y competencias

Por *expectativas de aprendizaje* entendemos "aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares" (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 66). El currículo considera varios niveles en las expectativas de aprendizaje entre los que se encuentran los objetivos y las competencias.

Desde un punto de vista teórico, hay dos tendencias que organizan los objetivos: una que entiende los objetivos como terminales (o cerrados) y la segunda que los concibe como expresivos (o abiertos) (Pérez-García, 2010).

Nuestro enfoque es más cercano a los objetivos cerrados, que expresan logros que se pretenden alcanzar, influenciado por los aspectos legislativos, según los cuales los objetivos específicos se expresan en términos operativos. Dentro de esta investigación, también distinguiremos dos tipos de objetivos específicos: los objetivos de instrucción (o de enseñanza) y los de aprendizaje. Los primeros expresan finalidades docentes pues son enunciados que describen un resultado esperado de la instrucción en los escolares. Los segundos, de aprendizaje, deben satisfacer criterios de especificidad, premeditación, deliberación, indivisibilidad cognitiva y compatibilidad (DeLong, Winter y Yackel, 2005).

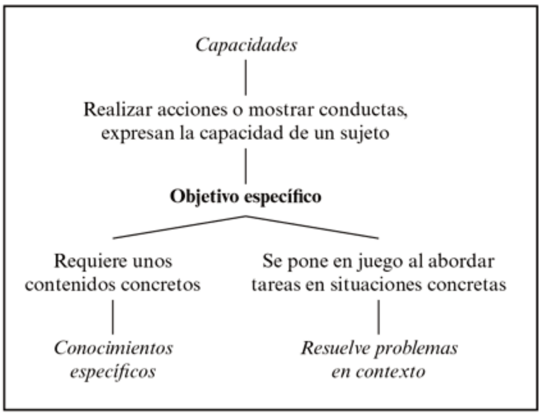


Figura 1. Componentes de un objetivo específico (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 68)

Desde un punto de vista estructural, tal como se muestra en la Figura 1, asumimos que un objetivo específico de aprendizaje se organiza en torno a tres componentes: la capacidad o capacidades que expresan actuación y que se identifican por uno o varios verbos de acción; la referencia explícita a un determinado contenido matemático y la toma en consideración en un contexto de aplicación (Rico y Lupiáñez, 2008).

Conocimiento didáctico del contenido

Consideramos que la competencia didáctica del profesor de matemáticas, parte relevante de su competencia profesional, se establece mediante dominio de conocimientos, ejercicio de ciertas capacidades y gestión de procesos de enseñanza en situaciones escolares (Rico y Lupiáñez, 2008). La manifestación de esta competencia surge cuando el profesor planifica e implementa tareas y problemas relativos a la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares. Más concretamente, el conocimiento didáctico del contenido se identifica con "aquellos conocimientos teóricos, técnicos y prácticos, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, que son propios para la formación de un maestro" (Rico, 2015, p. 32).

El interés por ese tipo de conocimiento profesional procede de la información que aporta para la toma de decisiones en la formación de profesores, junto con su posterior repercusión en el aprendizaje de los escolares. Identificar y describir el conocimiento profesional de los profesores brinda fundamento a la caracterización de los aspectos que definen la profesión, para conocer qué competencias son especialmente adecuadas para el desempeño de su labor docente y disponer de datos y evidencias para actuar en planes de formación. Junto con este interés, una línea de trabajo se ha ocupado de examinar cómo el profesor se relaciona con dichos conocimientos y cómo evoluciona con ellos (Ponte y Chapman, 2008; Llinares y Krainer, 2006; Rowland, 2007).

El estudiante para profesor llega a establecer ese conocimiento mediante procesos de análisis didáctico, que ponen su atención sobre las dimensiones que determinan el currículo; el conocimiento del contenido matemático escolar deriva de los análisis conceptuales y del contenido matemático. El conocimiento didáctico del contenido resulta del análisis cognitivo, el de instrucción y el evaluativo. Una de esas funciones sostiene que el conocimiento del profesor en formación no está dado, sino que debe ser construido durante un proceso de formación (inicial o permanente). En el marco de este trabajo, el análisis didáctico asegura dos funciones principales: ofertar un programa fundamentado de formación inicial de profesores de matemáticas y proporcionar un método de investigación para estudio del conocimiento didáctico (González-Marí, 2015).

Significado de concepto matemático escolar

Entendemos el dominio del conocimiento del contenido matemático escolar como el conocimiento del significado de ese contenido en términos de Frege (1996). Este marco, actualizado en Rico (2016) y ejemplificado en Fernández-Plaza et al. (2016), establece el significado por tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido. Este último trabajo expone resultados de investigaciones sobre concepciones de estudiantes y de futuros profesores para diversos conceptos matemáticos.

La estructura conceptual se describe mediante propiedades formales junto con la clasificación cognitiva de los contenidos matemáticos escolares propuesta por Rico (1997) y basada en el trabajo de Hiebert y Lefevre (1986). Según esa clasificación, los elementos componentes de una estructura se organizan en tres niveles de complejidad cognitiva, referidos a los ámbitos conceptual y procedimental. El primero, de unidades de información, comprende los hechos y las destrezas que procesan hechos. El segundo, de abstracción y generalización, incluye a los conceptos y los razonamientos que los procesan. El último nivel abarca las estructuras conceptuales y estrategias.

Para analizar el conocimiento que los futuros maestros expresan sobre los objetivos específicos de aprendizaje, analizaremos sus propuestas mediante el sistema de categorías anterior. En cada enunciado se identifican los elementos de las categorías indicadas que menciona, los cuales muestran aspectos parciales de la noción de objetivo que hemos caracterizado.

MÉTODO

Introducimos el propósito del trabajo, profundizar en los objetivos planteados por los maestros de primaria en formación inicial, a partir de una tarea sobre fracciones. Se trata de un estudio cualitativo, de carácter descriptivo, que utiliza la técnica de análisis de contenido. Para ello, organizamos en un listado los enunciados propuestos por los sujetos e identificamos en esa información los elementos establecidos por las categorías capacidad, contenido y contexto, antes definidas.

Cuestionario

En el diseño del instrumento se consideran cuestiones sobre contenidos didácticos correspondientes al aprendizaje de un concepto matemático escolar. Esos contenidos corresponden a tres categorías cognitivas: objetivos, limitaciones y oportunidades sobre el aprendizaje del concepto matemático elegido. En este cuestionario los contenidos didácticos considerados son los *objetivos de aprendizaje* esperados, los *errores identificados* y las *tareas que facilitan el logro* del aprendizaje, los tres relativos al tema de número racional, con sentido parte-todo.

El diseño parte de una tarea matemática escolar que, supuestamente, procede de un libro de texto de 6º curso de Educación Primaria y que una profesora plantea a sus escolares. Esta situación convencional da lugar a las tres preguntas del cuestionario. La primera pregunta, en la que se centra esta comunicación, requiere de los sujetos encuestados que enuncien aquellos objetivos que la maestra pretende conseguir con los escolares al proponerles la tarea inicial.

Para obtener los datos que analizamos, se presenta una tarea escolar (Figura 2) y se solicita al profesor en formación que describa las intenciones educativas que se pueden identificar en ella (Figura 3). Esta pregunta recoge conocimiento de los estudiantes encuestados sobre objetivos de aprendizaje.

En un libro de texto de matemáticas de sexto curso de Educación Primaria, aparece el siguiente enunciado:

Representa la fracción 2/3

Figura 2. Ejercicio escolar que sirve como reactivo del cuestionario

Describe qué intención/es puede tener esa tarea en términos del aprendizaje de los alumnos

Figura 3. Pregunta 1 del cuestionario

Sujetos de estudio

Los 40 sujetos que conforman el estudio se encuentran matriculados en la asignatura de 4º curso “Competencias matemáticas en Educación Primaria” perteneciente a la mención de profundización en el currículo básico del grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada. Esta muestra es intencional y por disponibilidad.

Los futuros profesores de primaria han cursado, dentro del plan de estudios del grado de Primaria, tres asignaturas relacionadas con las matemáticas: “Bases Matemáticas para la Educación Primaria”, “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria” y “Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”. Las asignaturas están secuenciadas según las dimensiones del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) y se organizan alrededor de los contenidos de la matemática escolar, los contenidos sobre el aprendizaje matemático y los contenidos sobre la enseñanza, respectivamente (Ruiz-Hidalgo, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2014). Estas materias sigue un enfoque funcional de la didáctica de la matemática basado en el análisis didáctico (Flores y Moreno, 2014).

Categorías de análisis

Las categorías de análisis permiten organizar las respuestas en términos de aquellos componentes que caracterizan un objetivo específico (Figura 1). Se utilizó una hoja de cálculo para organizar la información recogida, cuyo encabezado se muestra en la Figura 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			1. Capacidad o proceso			2. Especificidad				3. Contexto	4. Otros
2	Sujeto	Agente	1.1 Capacidad profesor	1.2. Capacidad	1.3. Competencia	2.1. Contenido	2.2. Nivel cognitivo	2.3. Representación	2.3. Sentido	3.1. Situación	
3	E1										
4	E2										

Figura 4. Hoja de codificación de la información recogida

En primer lugar se indica el orden del estudiante cuya respuesta se recoge (Ei, $1 \leq i \leq 40$). En segundo lugar se identifica el *agente* que aparece como hipotético sujeto en el objetivo enunciado. Las modalidades encontradas son *escolar* y *profesor*, uno solo o ambos.

La primera categoría corresponde a la *capacidad* o *proceso* que el estudiante propone como acciones para el logro del objetivo por los escolares. Esos verbos o acciones son los elementos que expresan el ámbito de generalidad del objetivo. En ocasiones se eligen verbos que describen un proceso, verbos abstractos y más generales, que manifiestan relación o intención de desarrollo de una competencia más que de un objetivo. Las subcategorías o variables 1.2 y 1.3 (Figura 4) recogen este grado de especificidad del verbo o acción expresados como logro del alumno; la 1.1 se utiliza para anotar los verbos referidos a capacidades del profesor, caso de que sea el agente. La categoría 1.2 recoge verbos que clasificamos en tres clases: *Capacidad genérica* (cuando el verbo es muy general como comprender o entender), *Representar* (capacidad que demanda la tarea), *Capacidad específica* (cuando el verbo es específico sobre fracciones y diferente de representar).

La segunda categoría, denominada *especificidad*, recoge el contenido concreto que se trabaja. En el caso de nuestro cuestionario, este contenido (subcategoría 2.1) es la fracción, pero también aparecen otras modalidades. Además, añadimos unas subcategorías o variables correspondientes a las componentes de significado del concepto matemático escolar: 2.1. *Contenido matemático*, 2.2. *Contenido cognitivo*, 2.3. *Representación*, cuando se menciona explícitamente, y 2.4. *Sentido*. Dentro de la clasificación cognitiva se diferencian como elementos los niveles de hechos y destrezas y conceptos. Las representaciones distinguen en gráfica, gráfica y otra, y todas las representaciones. Por último, la variable sentido recoge los distintos sentidos usuales de la noción de fracción (parte-todo, reparto, medida, operador, razón) y otros expresados por los estudiantes como numérico.

La tercera categoría, denominada *Contextos*, incluye la situación en la que se espera pueda alcanzarse el objetivo enunciado. Las modalidades o variables son escolar, personal y social.

Por último, se añade una última categoría para recoger otra información.

RESULTADOS

La recogida de datos se trabaja con la tabla descrita, en la que se vuelcan los datos de los cuestionarios, donde las columnas corresponden a las categorías descritas anteriormente y las filas identifica los elementos empleados por los estudiantes participantes. Sintetizamos la discusión de resultados.

Objetivos según el agente referenciado: profesor o escolar

En primer lugar, diferenciamos los enunciados que tienen al profesor como agente o al escolar como agente. De las 40 respuestas, 28 recogen objetivos referidos solo al aprendizaje del escolar, 4 a la intención del profesor solamente, y 8 incluyen a ambos.

Los objetivos referidos a intenciones de profesor expresan aquellas capacidades que se recogen en la Tabla 1. Como ejemplo de la capacidad “Identificar”, el escolar E20 expresa “Conocer si el alumno conoce el concepto de fracción...". Por otro lado E16 dice "Comprobar los conocimientos con los que el alumno cuenta", que se ha codificado como "Valorar".

Tabla 1. Capacidades profesionales del profesor expresadas en los enunciados de los objetivos

	Frecuencia
Identificar	6
Valorar	4
Otros	2

A continuación presentamos los resultados de los objetivos que hacen referencia, aunque no exclusiva, al aprendizaje del escolar, en términos de acciones y procesos, especificidad, contextos y estructura.

Acciones y procesos

En la categoría acciones y procesos registramos los verbos de acción expresados por los sujetos del estudio. Incluimos en esta descripción las 36 respuestas que se refieren a acciones de los escolares. Estos verbos pueden expresar una o varias acciones que registramos como capacidades. Cuando se manifiesta relación o intención de desarrollo, se registra como competencia. En todos los enunciados aparecen capacidades, pero no así competencias, que sólo se expresan en el 39% de las respuestas. El 58% de las respuestas contienen una capacidad, el 22% dos capacidades y el 19% tres capacidades.

De las 23 capacidades diferentes encontradas, la que más veces se repite, 25 veces en 36 objetivos, es "Representar". Le siguen "Entender" y "Comprender significado" con 3 apariciones cada una, lo que muestra la dispersión de las frecuencias. Para tener una visión global, menos dispersa, hemos agrupado las capacidades en cuatro tipos: Representar, que incluye todas las acciones relacionadas con ella, como por ejemplo "Cambio de registro semiótico" (E26). Capacidades genéricas como comprender, entender, adquirir, asentar, dominar,…. Y capacidades específicas en las que incluimos Fraccionar y Repartir. En la Figura 5, donde se muestra un resumen del uso de verbos de capacidades, se observa que el uso de verbos genéricos es generalizado y casi tan común como el uso del verbo "representar" que aparece en el enunciado del reactivo (Figura 2).

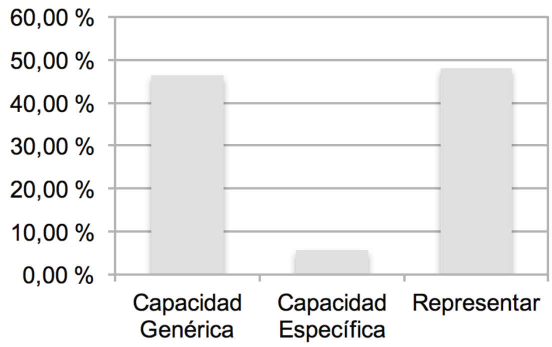


Figura 5. Porcentajes de capacidades en los objetivos

La competencia que más aparece es "Representar", que diferenciamos de la capacidad por el grado de complejidad con la que se expresa. Así, como ejemplo de representar como capacidad, E3 manifiesta que "la intención de esta tarea es que los alumnos representen gráficamente la fracción indicada ...". Por otro lado, E25 menciona el "uso de la representación y de las estrategias de representación del alumnado". Como resumen del uso de verbos de proceso, en 11 ocasiones aparecen procesos identificados con competencias (representar 6 veces, comunicar, modelar, resolver problemas, dominio del cálculo y lenguaje simbólico), y en 10 ocasiones otras opciones como "Competencia de las fracciones" (E34) o múltiples capacidades (adquirir, interiorizar y representar, E33).

Especificidad

Indica el contenido mencionado en los enunciados propuestos. Además de considerar el contenido, analizamos otros elementos del significado que están expresados por los sujetos en sus objetivos. Lo primero que llama la atención es que 5 sujetos no expresan ningún contenido específico en sus objetivos. Por ejemplo, E7: “Que los alumnos asienten los conocimientos enseñados, practiquen y sepan emplear los términos y operaciones adecuadamente”.

En el 85% de propuestas aparece el contenido “Fracción”. Además, se mencionan los hechos: “Elementos numerador denominador”, las relaciones: “Comparación” y “Equivalencia fracciones” (3 veces) y los sentidos “División” y “Reparto”.

Las 3 subcategorías consideradas Contenido cognitivo, Representaciones y Sentido corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto matemático escolar expresado en el marco teórico. El nivel cognitivo puede ser de primer nivel, referido a unidades básicas de información, que abarca los hechos (términos, notaciones, convenios o resultados) y las destrezas (operaciones, reglas, algoritmos). Puede ser de segundo nivel, incluyendo conceptos, relaciones y razonamientos. El tercer nivel no aparece en ninguna de las respuestas. El 62,5% de las respuestas hacen referencia a hechos o destrezas y el 60% a conceptos, lo que indica que hay bastantes respuestas (al menos el 32,5%) que combinan los niveles. La Figura 6 muestra ejemplos de contenidos cognitivos de diferentes niveles.

Nivel 1. E32. *Intenta que los alumnos representen un valor simbólico de forma gráfica.*

Nivel 1-2. E29. *Para comprender el concepto de fracción, además de los términos numerador y denominador.*

Nivel 2. E8. *Afianzar el concepto de fracción, realizando diferentes tipos de representaciones.*

Figura 6. Ejemplos de respuesta con especificidad de diferentes niveles cognitivos

Con respecto a las representaciones, el 40% menciona la representación gráfica y 45% no menciona ningún tipo de representación. El uso de representación numérica o simbólica es notable pues estos términos aparecen en el 30% de los objetivos. En el 25% de los casos se usan dos representaciones en los enunciados y el 7,5% de las respuestas hablan de representar sin especificar la representaciones.

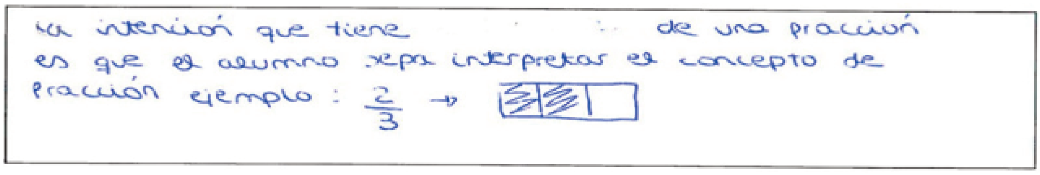


Figura 7. Ejemplos mención a representación en el que se incluye la propia representación (E10)

Los sentidos o modos de uso expresados en los objetivos son escasos. Mientras que un 67,5% no especifica sentido, 5 sujetos manifiestan un sentido Parte-Todo, 2 mencionan reparto y otros dos indican un sentido numérico de la tarea.

Contextos

Identificamos 3 situaciones: personal (o de vida cotidiana) en 2 casos, social (donde mencionan la vida real) en otros dos casos y escolar o sin ningún tipo de mención, en 36 casos.

Estructura de los objetivos

Siguiendo la estructura propuesta anteriormente, la Tabla 2 muestra la frecuencia en las diferentes estructuras de objetivos.

Tabla 2. Frecuencias en la estructura de los objetivos

Componente			
Capacidad	Contenido	Contexto	Frecuencia
Sí	Sí	Sí	3
Sí	No	Sí	1
Sí	Sí	No	32
Sí	No	No	4

Resumiendo, un 25% de los sujetos describe el contenido usando sólo aspectos conceptuales o procedimentales, un 37,5% añade a estos elementos o bien representaciones o bien sentidos; y el 37,5% restante hace uso de un contenido descrito usando los tres elementos de la terna semántica. Como ejemplo del uso de los tres componentes, E1 hace referencia a “comprender el concepto de fracción, representar fracciones sobre la recta y utilizar fracciones para resolver problemas de la vida cotidiana”.

CONCLUSIONES

El propósito de este trabajo ha sido profundizar en el conocimiento didáctico acerca de los objetivos de aprendizaje propuestos por los maestros de primaria en formación inicial a partir de una tarea sobre fracciones. Nos centramos en este contenido didáctico por el papel fundamental que esta componente presenta en la planificación del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares (Lupiáñez, 2009).

Específicamente, encontramos que casi la mitad de los participantes mencionan la capacidad de representar, implicada explícitamente en la tarea. Casi la misma cantidad emplea verbos genéricos, como “entender” y “comprender significado”. La formulación de muchos de los objetivos tiene un aspecto formal, aludiendo a procesos como la resolución de problemas, difícil de apreciar en la tarea de partida, o definiéndolos de manera que valdrían para cualquier tópico matemático, ya que escasamente señalan contenidos, representaciones y sentidos. Los pocos que los incluyen aluden a las representaciones numéricas o gráficas y los sentidos parte-todo y reparto.

Además, detectamos que los participantes no distinguen un objetivo de aprendizaje, en el que el agente es el escolar, de un objetivo de enseñanza, en el que el agente es el docente, en el sentido de DeLong, Winter y Yackel (2005). Esta distinción la consideramos fundamental para su profesión.

En las últimas décadas, uno de los focos de interés de la investigación en educación matemática ha sido el conocimiento de los profesores y futuros profesores (Escudero-Ávila et al., 2015). Gran parte de los trabajos se han centrado más en el conocimiento sobre contenidos matemáticos que sobre contenidos didácticos, como son los objetivos de aprendizaje. Este estudio contribuye a paliar esta necesidad clarificando y profundizando cómo conciben y expresan los maestros en formación inicial, objetivos específicos de aprendizaje. Sin embargo, es necesario continuar trabajando en esta línea con el fin de mejorar tanto la formación inicial como la formación permanente de este colectivo.

A pesar de que el planteamiento de objetivos, es una capacidad ampliamente trabajada a lo largo de la formación universitaria de los estudiantes encuestados, los resultados muestran carencias en relación a lo que técnica y teóricamente se considera un objetivo de aprendizaje matemático. En este sentido, es necesario que se revisen estos contenidos didácticos en los cursos de formación de este colectivo, haciendo hincapié en el aspecto estructural de un objetivo y estimulando que los futuros maestros reflexionen sobre sus producciones y sobre la de sus compañeros.

Sostenemos que un objetivo específico de aprendizaje se estructura en torno a tres componentes, capacidades, contenido matemático y contexto, por lo cual hemos analizado las respuesta en términos de esas tres categorías. Los resultados obtenidos muestran la robustez de esa hipótesis ya que el análisis realizado satura los datos recogidos, organiza de modo coherente los resultados de las distintas categorías y aporta información relevante de la importancia del conocimiento didáctico sobre los objetivos para la formación inicial de los maestros de primaria como profesores cualificados de matemáticas.

Con respecto a las limitaciones del estudio, la muestra de sujetos seleccionada fue intencional, por lo que los resultados no podrían generalizarse. Otra limitación es la propia demanda de la tarea, que pudo inducir a los sujetos a enunciar objetivos cuyo agente es el profesor. En futuros trabajos, sería aconsejable paliar estas limitaciones y abordar el modo en que los estudiantes conciben otros contenidos didácticos como son los errores y dificultades o las oportunidades de aprendizaje. Estos trabajos permitirán mejorar la formación de los profesores a la hora de planificar unidades didácticas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

Chen, J. C., Reys, B. J. y Reys, R. E. (2009). Analysis of the learning expectations related to grade 1-8 measurement in some countries. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 1013-1031.

DeLong, M., Winter, D. y Yackel, C. (2005). Student learning objectives and mathematics teaching. *PRIMUS*, 15(3), 226-258.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 259-268). Málaga: SEIEM.

Flores, P. y Lupiáñez, J.L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (coords). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 178-193). Madrid: Pirámide.

Flores, P. y Moreno, A. (2014). Formar profesores de matemáticas de primaria para las nuevas competencias. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas, 66*, 19-27.

Frege, G. (1996). *Estudios sobre semántica. Escritos filosóficos* (pp. 147-264). Barcelona: Crítica- Grijalbo.

González-Marí, J. L. (2015). Modelos y marcos teóricos en la investigación en pensamiento numérico en España. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 21-37). Alicante: SEIEM.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.1- 27). Hillsdale. NJ: Lawrence Associates.

Lin, C. J., Hung, P. H., Lin, S. W., Lin, B. H. y Lin, F. L. (2009). The power of learning goal orientation in predicting student mathematics achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 551-573.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 429-459). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Pérez-García, P. (2010). Metas y propósitos educativos. En C. Moral (Coord.) *Didáctica. Teoría y práctica de la enseñanza* (pp. 77-89). Madrid: Pirámide.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 223-261). New York: Routledge.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcoran y T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education* (pp. 14-27). Dublin: St. Patrick' College.

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 21-40). Madrid: Editorial Pirámide.

Rico, L. (2016). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 153-174). Madrid: Editorial Pirámide.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. Lupiáñez, J. L. y Molina, M (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J. A. (2014). La formación en didáctica de la matemática de los estudiantes del grado en educación primaria bajo la perspectiva del análisis didáctico. En A. Romero, T. Ramiro-Sánchez y M. P. Bermúdez (Eds.), *Libro de Actas del II Congreso Internacional de Ciencias de la Educación y del Desarrollo*, (p. 613). Granada: Asociación Española de Psicología Experimental.

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO SOBRE PRUEBAS DE SIGNIFICACIÓN DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN UN AMBIENTE TECNOLÓGICO[1]

High School Students' reasoning development about tests of significance in a technological environments

Sánchez, E.[a], García-Ríos, V.N.[a] y Mercado, M.[b]

[a]Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México
[b]Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM

Resumen

Se describe el desarrollo del razonamiento de 36 estudiantes de bachillerato, organizados en parejas, acerca de la técnica de pruebas de significación estadística con el apoyo de un software educativo de estadística (Fathom); dicho desarrollo es visto a través de sus respuestas a 4 problemas de pruebas de significación; estos se resolvieron en sendas sesiones en las que además se realizaron cortas intervenciones del profesor, se enseñó a utilizar el software y se discutieron dudas de los problemas vistos en la sesión previa respectiva. Las respuestas a cada problema se clasificaron en niveles SOLO. Los resultados muestran avances en la calidad de las respuestas de los participantes, superándose en cada actividad algunos errores cometidos en la previa, esto lleva conjeturar que los estudiantes se van apropiando del esquema de pruebas de significación. No obstante, se presentan algunas dificultades similares a las ya reportadas en la literatura.

Palabras clave: *Razonamiento, Pruebas de significación, niveles SOLO.*

Abstract

The development of 36 high school students' reasoning, organized in pairs, about the technique of statistical significance tests with the support of educational statistical software (Fathom) is described. Such development is seen through the responses to 4 problems of test of significance which were solved respectively in four sessions. In these session also there were short interventions of the teacher, who taught to use the software and discussed doubts of the problems seen in the respective session before. The answers to each problem were classified in SOLO levels. The results show progress in the quality of the responses of the participants, overcoming in each activity some errors committed in the previous one, this leads us to conjecture that students are appropriating the schema of tests of significance. However, some difficulties similar to those already reported in the literature are present in the students' responses.

Keywords: *Reasoning, Test of significance, SOLO levels.*

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística se suele introducir desde el nivel bachillerato y, después, se estudia en la mayoría de carreras universitarias. Su importancia se justifica por ser una herramienta fundamental para la investigación que permite, en todas las áreas de conocimiento, procesar e interpretar la información, hacer predicciones y tomar decisiones racionales (Batanero, 2011). Por esta razón es importante atender los problemas de su enseñanza y aprendizaje. Los dos grandes temas de la inferencia estadística clásica son el contraste de hipótesis y los intervalos de confianza; estos están constituidos por una red compleja

Sánchez, E., García-Ríos, V.N. y Mercado, M. (2017). Desarrollo del razonamiento sobre pruebas de significación de estudiantes de bachillerato en un ambiente tecnológico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 447-456). Zaragoza: SEIEM.

formada por varios conceptos como probabilidad, muestreo aleatorio, estadístico, parámetro, distribución muestral del estadístico, confianza, hipótesis nula e hipótesis alternativa, error tipo I, error tipo II, *p*-valor y nivel de significación (Liu y Thompson, 2009). En esta investigación exploramos el razonamiento de los estudiantes acerca del tema específico de las pruebas de significación (con el apoyo del software Fathom) ya que requiere un subconjunto limitado de esos conceptos y las ideas subyacentes a dicho tema pueden formar un antecedente sólido para el desarrollo del razonamiento acerca del contraste de hipótesis y, en general, acerca de la inferencia. Nos hemos restringido a las pruebas de significación de Fisher (1956), pues en éstas la idea subyacente es nítida: Si la evidencia ofrecida por una muestra es rara o inusual bajo determinada hipótesis entonces se pone en duda dicha hipótesis. Nos proponemos responder ¿cómo desarrollan los estudiantes de bachillerato esta idea en la resolución de problemas y con apoyo de herramienta tecnológica?

ANTECEDENTES

La reseña de investigaciones sobre concepciones erróneas de la Inferencia Estadística de Castro-Sotos et al. (2007) tiene un apartado dedicado al contraste de hipótesis. Los autores organizan su exposición sobre las dificultades y concepciones erróneas acerca del contraste de hipótesis en 5 componentes, lo que ilustra la dificultad del tema. No es posible ni conveniente reproducir aquí tales componentes y las referencias citadas de cada uno, pero sí que merece la pena mencionar algunos trabajos pioneros. Vallecillos y Batanero (1997) encontraron que las concepciones de los estudiantes acerca de los conceptos del contraste de hipótesis están lejos de la lógica normativa que subyace a esta técnica, presentándose dificultades en varios de ellos. Una dificultad es la elección o definición apropiada de las hipótesis a partir de la situación, Vallecillos (1999) informa sobre el problema que representa para los estudiantes la determinación correcta de las hipótesis nula y alternativa. También, los conceptos de nivel de significación y *p*-valor, que son clave en las pruebas de significación, resultan muy difíciles para los estudiantes (Haller y Krauss, 2002). La concepción errónea más común del nivel de significación y el *p*-valor consiste en intercambiar los dos términos de la probabilidad condicional que los define (Falk, 1986). Liu y Thompson (2009) ponen énfasis en la importancia de enmarcar el proceso en una concepción estocástica de la probabilidad, en la que el dato o evidencia presentada en el problema sea concebido como un valor particular de una distribución del estadístico (distribución muestral). Tales dificultades van a encontrarse también en el presente estudio pero en el contexto de actividades con apoyo del software, que les proporciona ciertos matices.

En estudios previos al presente, los autores hemos encontrado que cuando los estudiantes intentan resolver problemas de pruebas de significación sin instrucción previa, suelen ignorar los datos, se basan en creencias personales para obtener una conclusión y no son capaces de utilizar un lenguaje probabilístico en la formulación de ésta (García-Ríos y Sánchez, 2014). Un procedimiento ingenuo que llevan a cabo cuando utilizan los datos en pruebas de significación de proporciones consiste en rechazar la hipótesis si ésta no coincide con la proporción de la muestra. En otro estudio, en el que se realizaron intervenciones de enseñanza, los estudiantes se mostraron receptivos al enfoque de pruebas de significación de Fisher, superando algunos de los errores detectados en el estudio previo, no obstante, se mantuvo la dificultad en la determinación del papel de *p*-valor y la zona de rechazo, es decir, para responder la pregunta ¿Exactamente cuándo el valor del estadístico es inusual o raro? (García-Ríos y Sánchez, 2015)

ESQUEMA DE PRUEBAS DE SIGNIFICACION

El concepto de prueba de significación se relaciona con las nociones de probabilidad, población y muestra, parámetro y estadístico, hipótesis nula, distribución muestral del estadístico, *p*-valor y región de rechazo. Suponemos que los estudiantes pueden familiarizarse poco a poco con algunas de estas nociones en el proceso de resolución de problemas, mediante intervenciones oportunas del profesor para aclarar la lógica del proceso de prueba de significación, el papel del software y sus aplicaciones en el proceso de prueba y con la aclaración y discusión de dudas acerca de los problemas.

Siguiendo la exposición de Batanero y Díaz (2015) la técnica de *prueba de significación* se expuso por primera vez en Fisher (1935) y tiene por objetivo apoyar una hipótesis acerca de la población (por ejemplo, que un efecto o cambio se ha producido en una población) con base en la información proporcionada por una muestra. El proceso a grandes rasgos consiste en lo siguiente: Se formula la *hipótesis nula*, la cual generalmente es conservadora, en el sentido de que afirma que no se produjo el cambio que se desea apoyar; dicha hipótesis se refiere a un *parámetro* de la población. Se determina una *zona crítica* o *región de rechazo* consistente en un evento, en principio posible, relacionado con un estadístico (un estimador del parámetro), pero muy improbable de ocurrir bajo la hipótesis nula (con probabilidad no mayor a un número α dado, generalmente 0.05). Se obtiene una muestra aleatoria de la población y se calcula el *estadístico* y el *p-valor*; es decir, la probabilidad de obtener el valor del estadístico encontrado u otro más extremo suponiendo H_0 verdadera. Si el *p*-valor es menor que α o, equivalentemente, el valor del estadístico cae en la zona crítica, entonces se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario no se rechaza. El concepto de *distribución muestral* del estadístico no aparece explícitamente en esta descripción general, sin embargo, es un concepto crucial de la técnica para entender el significado del *p*-valor y la región de rechazo. En su lugar, se realiza una transformación del estadístico (tipificación) y el teorema central de límite para calcular el *p*-valor y determinar la zona crítica con ayuda de la distribución normal. Este es quizá uno de los aspectos más oscuros de toda la técnica para los estudiantes y la posibilidad de poner la noción de distribución muestral en el centro de la discusión de una prueba de significación es probablemente la principal aportación de la utilización de un software educativo (en este caso, Fathom).

En el diseño de actividades con ayuda del software para un acercamiento informal a las pruebas de significación por parte de los estudiantes, conviene considerar las siguientes cuatro componentes:

- *Realización y uso de la Simulación*. Esta componente está formada por la formulación de la hipótesis nula y por los siguientes dos pasos: a) La obtención mediante un proceso de simulación de una distribución del estadístico bajo el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera. b) El uso de dicha distribución como si fuera la distribución muestral del estadístico, para estimar probabilidades.
- *Estimación del p-valor o determinación de una zona crítica*. Esta componente consiste en alguna de dos acciones: a) Utilizar la distribución muestral para definir una región de rechazo o, b) A partir de la distribución muestral simulada estimar el *p*-valor y compararlo con el nivel de significación.
- *Formulación de la Conclusión*. A partir de la región de rechazo o del *p*-valor obtener la consecuencia correcta, consistente en rechazar o no rechazar la hipótesis.
- *Conciencia de la Incertidumbre*. Darse cuenta de que el proceso de contraste no determina si la hipótesis nula es verdadera o falsa, sino que permite tomar una decisión racional en función de la evidencia exhibida u obtenida.

APROXIMACIÓN INFORMAL AL RAZONAMIENTO INFERENCIAL

La descripción del esquema de las pruebas de significación y los conceptos que la forman revelan la gran complejidad del tema, confirmada ésta con estudios empíricos que dan cuenta de las grandes dificultades de los estudiantes para apropiarse de dicho esquema y utilizarlo de manera flexible en sus investigaciones posteriores. Por esta razón, en el ámbito de la investigación en educación estadística ha emergido la preocupación de proponer situaciones y problemas de enseñanza para propiciar un acercamiento informal a los temas de inferencia antes de estudiar sus aspectos más formales. Por ejemplo, se ha propuesto el concepto de Razonamiento Inferencial Informal (RII), en un intento por elaborar dicha preocupación. Zieffler, Garfield y Reading (2008) definieron el RII como la forma en que los estudiantes usan su conocimiento informal de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que apoyen inferencias sobre una población desconocida. Para Batanero y Díaz (2015) "estas propuestas tratan de introducir algunas de las ideas principales y el razonamiento del contraste, y a la vez, liberar al alumno de los cálculos asociados, recurriendo a la simulación". En el presente estudio se comparte esta idea y, por esto, lo inscribimos en la búsqueda de encontrar acercamientos informales al razonamiento inferencial. Esta búsqueda tiene aún más sentido cuando los sujetos de estudio son estudiantes de nivel bachillerato. En consecuencia, para nosotros, una aproximación informal al razonamiento de las pruebas de significación es usar la simulación para crear una distribución muestral empírica, en lugar de la distribución teórica. Con dicha simulación se calcula el p-valor con el enfoque empírico de la probabilidad al determinar la frecuencia de resultados de la muestra o más extremos. Con este razonamiento no es necesario realizar cálculo formal de probabilidad, ni estandarizar (tipificar) la distribución por lo que no se requiere calcular puntuaciones z o usar la tabla de la distribución normal estándar, es decir, se emplea un razonamiento informal del contraste de hipótesis.

MÉTODO

Participantes. A 36 estudiantes, agrupados en 18 parejas (referidas como R1 a R18), de 11º grado (16-17 años de edad) de un bachillerato de la Ciudad de México se les administraron cuatro problemas de pruebas de significación. Los participantes no habían cursado la asignatura de estadística pero realizaron actividades para aprender a operar el software y a generar distribuciones muestrales a partir de una aplicación en Fathom previamente diseñada por los autores.

Instrumento. Se presentaron las cuatro situaciones-problemas que se detallan en seguida y en cada una de las cuales se formula una pregunta que conduce a una prueba de significación.

- Situación 1. La propaganda de Coca Cola presume que la mayoría (más del 50%) de la población que bebe refresco de cola prefiere Coca Cola en lugar de Pepsi Cola. Para investigar la veracidad de dicha afirmación, se hizo un experimento donde a 60 personas de dicha población escogidas al azar, se les dio dos vasos de refresco (uno con Coca y otro con Pepsi) y debían decidir cuál les había gustado más. De los 60 participantes 35 personas prefirieron Coca Cola. ¿Es razonable la hipótesis "más del 50% de la población que beben refresco de cola en México prefiere Coca y no Pepsi"?
- Situación 2. En la situación anterior, si se hace el experimento a 180 personas elegidas al azar y de ellas 104 prefieren Coca Cola. ¿Es razonable la hipótesis "más del 50% de la población que beben refresco de cola en México prefiere Coca que Pepsi"?
- Situación 3. Si la producción diaria de la máquina de una fábrica tiene más del 10% de artículos defectuosos es necesario mandarla a reparar. Para revisar la calidad de la maquina el supervisor toma una muestra aleatoria de 120 piezas del día y observa que contiene 16 piezas defectuosas. ¿Debe decidir enviar a reparar la máquina?
- Situación 4. El fabricante de una medicina afirmó que su producto es 80% eficaz para aliviar una alergia. Para verificar esta hipótesis se realizó un experimento con 100 personas que padecían de la alergia, y la medicina alivio a 74. ¿Es correcta la hipótesis "el tratamiento es 80% eficaz para aliviar la alergia?"

Procedimiento de ejecución. Se llevaron a cabo 4 sesiones de 2 horas cada una; cada sesión dividida en dos partes. La sesión 1, consistió en la introducción, presentación y exploración del software Fathom. En la primera parte de las restantes sesiones se realizaba lo siguiente: introducción de nuevos conceptos y discusión del problema abordado en la sesión anterior. En el grupo se analizaba los errores más comunes detectados en las respuestas del problema abordado en la sesión anterior y se pedía que reflexionaran en ellos y sugirieran la forma de evitarlos. La segunda parte de cada sesión consistía en resolver uno de los problemas con apoyo del software; se dejaba a los equipos trabajar por ellos mismos y llenar las hojas de trabajo; el profesor sólo intervenía para resolver pequeñas dudas. A continuación se describe con más detalle lo que se hizo en cada sesión:

- Sesión 1. Introducción al Fathom. Presentación del programa para simular un muestreo aleatorio de una población teniendo en cuenta la proporción de un rasgo de la población. Explicación de la lógica de una prueba de significación. Uso del programa para resolver el primer problema
- Sesión 2. Se discutieron dificultades surgidas en la sesión anterior. La más frecuente tenía que ver con la creencia de que la simulación genera muestras de la población real y no de una hipotética; es decir, asumen implícitamente que la hipótesis nula es cierta.
- Sesión 3. Se discutieron los problemas de la zona crítica y el *p*-valor; en las sesiones anteriores determinaron de manera intuitiva regiones para evaluar cuándo el dato muestral es extremo o atípico. En ésta se les propuso considerar niveles de significación del 5%, así como evaluar un *p*-valor como inusual o raro cuando es menor o igual al 5%.
- Sesión 4. Al discutir las dificultades de la actividad anterior, se puso énfasis en la coordinación de los diferentes porcentajes relevantes en el proceso de la prueba de significación, a saber, la proporción de la muestra (valor del estadístico), el *p*-valor expresado en porcentaje, el nivel de significación (5%).

Procedimiento de análisis. Los datos son el conjunto de respuestas que las parejas de estudiantes ofrecieron a cada una de las tareas. Para analizarlos se utilizó la metodología SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) de Biggs y Collis (1982, 1991), la cual propone identificar para cada tarea los aspectos relevantes que adecuadamente combinados llevan a la solución correcta del problema. En nuestro caso, los aspectos relevantes son las cuatro componentes definidas en la sección de Esquemas de Pruebas de Significación. Con base en la presencia o ausencia de estos aspectos en las respuestas de las parejas de estudiantes, éstas se clasifican en diferentes niveles. Nosotros los llamamos niveles de razonamiento acerca de las pruebas de significación. Mediante un análisis a priori de los problemas y considerando las componentes definidas en el esquema de pruebas de significación, se definieron de la siguiente manera los niveles SOLO:

- *Nivel Pre-estructural*. Las respuestas no muestran ninguno de las componentes que constituyen el esquema de prueba de significación.
- *Nivel Uniestructural*. Las respuestas sólo presentan una de las componentes del esquema de prueba de significación
- *Nivel Multiestructural*. Las respuestas se obtienen teniendo en cuenta al menos dos componentes del esquema de prueba de significación sin una integración entre ellas. Generalmente la respuesta contiene inconsistencias que no permiten llegar a la conclusión correcta. En las respuestas de este nivel no se refleja conciencia de la incertidumbre.
- *Relacional*. Las respuestas se basan en las tres primeras componentes del esquema de pruebas de significación, integradas de manera adecuada, pero no reflejan conciencia de la incertidumbre.
- *Abstracto extendido*. Las respuestas en este nivel integran adecuadamente las cuatro componentes del esquema de prueba de significación.

En la Tabla 1 se resumen los elementos que es importante tener en cuenta en la solución de cada situación. La segunda columna es la hipótesis que se va a probar, la tercera el tamaño de la muestra, la cuarta es la región crítica, la quinta columna se presenta el *p*-valor teórico, mientras que en la sexta un *p*-valor estimado mediante un proceso de simulación; finalmente en la séptima columna la conclusión a la que se debe de llegar.

Tabla 1. Elementos a considerar en las pruebas de significación de las cuatro situaciones

	Hipótesis nula	N	Región	p-valor	$\hat{P}$-valor	Conclusión de la prueba
Situación 1	P = 0.50	60	X >= 35	0.098	0.129	No se rechaza H_0
Situación 2	P = 0.50	180	X >= 104	0.019	0.032	Se rechaza H_0
Situación 3	P = 0.10	120	X >= 16	0.111	0.088	No se rechaza H_0
Situación 4	P = 0.8	100	X <= 74	0.067	0.080	No se rechaza H_0

RESULTADOSEN ESTA SECCIÓN SE EXPONEN LA DISTRIBUCIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES POR PROBLEMA Y NIVEL Y EN SEGUIDA EJEMPLOS DE RESPUESTA EN CADA UNO DE LOS NIVELES.

Frecuencias de respuesta por problema y nivel

Las frecuencias de la clasificación de las respuestas a todos los cuatro problemas (A1, A2, A3, y A4) en niveles SOLO se presentan en la Figura 1. Como los problemas fueron aplicándose de manera sucesiva se nota un efecto de aprendizaje, ya que en el problema A1, una respuesta se clasifica en el nivel Pre-estructural y13 se agrupan en el nivel Uniestructural, quedando 3 respuestas en el nivel Multiestructural y sólo 1 en el Relacional, mientras que para el problema A2, disminuyen a 5 las respuestas en el nivel Uniestructural. Esto significa que para el segundo problema más estudiantes que en el problema previo, además de realizar la simulación, buscan determinar el p-valor y/o una zona crítica; esta tendencia a disminuir las respuestas clasificadas en Uniestructural continúa con el problema A3, aunque aumenta en una unidad en el problema A4. Es interesante observar que en los problemas A2, A3 y A4, las frecuencias más altas de respuesta corresponden al nivel Relacional y, si se consideran las frecuencias de los niveles relacional y abstracto de manera conjunta, la tendencia es creciente. En resumen, hay un sensible avance en la calidad de las respuestas de los estudiantes conforme van atendiendo los problemas.

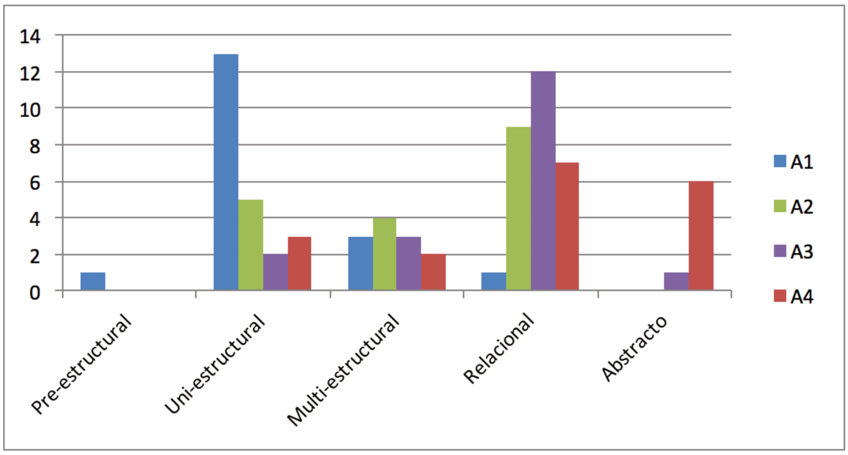


Figura 1. Niveles de razonamiento

Nivel Pre-estructural. La pareja de estudiantes que ofreció la única respuesta Pre-estructural lo hicieron en respuesta al problema 1; su razonamiento sólo tiene en cuenta que en la muestra la mayoría prefiere Coca Cola (35 de 60). Esta respuesta se puede interpretar de dos maneras; la primera es que la pareja de estudiantes no ve la diferencia entre muestra y población, pensando que el problema consiste sólo en traducir 35 de 60 a porcentajes (58%); la segunda, que la muestra replica las proporciones de la población. La respuesta fue la siguiente:

> … La propaganda está en lo correcto al poder presumir que la mayoría de la población prefiere su refresco en lugar de Pepsi ya que mencionan que "LA MAYORÍA de la población prefiere su refresco", recalcando esto podemos entender que como dicen, hacen referencia a más de la mitad de ésta, es decir

> a partir de un 51% de la población ya podemos comprender que es la MAYORÍA. Y debido a que los resultados del experimento arrojaron que 35 personas de 60 prefieren el refresco Coca Cola, lo que es igual a un 59% del total (0.59 × 60 = 35.4), podemos concluir que no erran en lo que presumen ya que están en todo lo correcto…

En otras exploraciones hemos encontrado que este es un razonamiento que se realiza con frecuencia en estudiantes que no han estudiado inferencia.

Nivel Uniestructural. Los estudiantes que ofrecen respuestas en este nivel han entendido que pueden llegar a la respuesta obteniendo una distribución mediante la simulación de la situación. Un punto que la mayoría hace correctamente es la elección del tamaño de la muestra, no obstante, en algunas ocasiones no eligen el valor conveniente de la proporción (es decir, la hipótesis nula), en otras no interpretan razonablemente bien la distribución obtenida, por ejemplo, entienden a ésta como si fuera la población. En el caso del estudiante, cuya respuesta reproducimos abajo, realiza simulaciones que, si fuera consciente de lo que hace, lo llevaría a constatar que al asignar una proporción mayor al evento "preferir la Coca" obtiene una distribución que indica que más muestras presentan una proporción favorable a dicho evento y si asigna una proporción menor se obtiene más muestras con proporciones que no son favorables al evento; no obstante, confunde la distribución muestral con la población, es decir, en lugar de decir que "más muestras tienen una proporción favorable a la Coca" opina que "más gente prefiere la Coca".

> Al momento de utilizar el programa para realizar las encuestas utilizando una proporción de 0.54 podemos notar que efectivamente la Coca es más consumida que la Pepsi. Se realizaron varios ejemplos cambiando la proporción de la población, para llegar a la conclusión de que si se utiliza una proporción menor o igual de p = 0.50 podemos notar que la gente prefiere la Pepsi, en cambio si se utiliza una proporción mayor o igual de p = 0.51 podemos notar que la Coca cola es consumida más.

Un aspecto central de las dificultades para superar exitosamente la primera componente del esquema de prueba de significación es determinar la hipótesis nula y notar que la distribución muestral se obtiene suponiendo que se cumple esta hipótesis. Al hacerlo, se despliega un razonamiento hipotético deductivo inquiriendo "¿Qué pasaría si la hipótesis nula fuera verdadera?" En varias respuestas que se han clasificado en Uniestructural, los estudiantes hacen simulaciones en las que se nota la ausencia de este razonamiento hipotético deductivo, por ejemplo, cuando eligen el valor de la proporción dada, como la proporción para hacer la simulación. Este problema se presenta incluso en algunos casos que hemos clasificado como Multiestructural.

Nivel Multiestructural. Los estudiantes que ofrecen respuestas que se clasifican en este nivel obtienen una distribución (adecuada o no al problema) y estiman el *p*-valor o una zona de la distribución para rechazar o apoyar la hipótesis. Hacerlo implica un razonamiento con frecuencias o probabilidades: ¿Con qué frecuencia o probabilidad se obtendría en una muestra la proporción dada o más? ¿De dónde a dónde se tiene el 95% de resultados (resultados normales)? ¿De dónde a dónde se puede decir que los resultados son 'raros'? Las respuestas en este nivel no obtienen la conclusión correcta ya sea porque no eligen adecuadamente la hipótesis nula, no estiman adecuadamente el *p*-valor (unos estiman $P\left(X = \hat{p}_0 \middle| H_0\right)$ en lugar de $P\left(X - \hat{p}_0 \middle| H_0\right)$ donde X es el estadístico "la proporción de éxitos en la muestra" y $\hat{p}_0$ es la proporción de la muestra dada) o no es adecuada la zona de rechazo que proponen; no obstante, ya prefiguran el razonamiento correcto. En el ejemplo siguiente (respuesta del equipo R7) los estudiantes determinaron una distribución muestral para muestras de tamaño 120 bajo la hipótesis de que 10% son artículos defectuosos. Consideraron el estadístico "el número de artículos defectuosos en la muestra" y obtuvieron la distribución que se muestra en la Figura 2. Con base en ésta estimaron un *p*-valor inapropiado ($P\left(X = \hat{p}_0 \middle| H_0\right)$) que les arrojo una probabilidad de 4.4%. Como esta probabilidad es menor al 5% consideraron que el resultado es raro, por lo que concluyeron que la máquina tiene que ser reparada; si hubieran calculado $P\left(X - \hat{p}_0 \middle| H_0\right)$ no habrían encontrado razones para rechazar la hipótesis nula.

> Es más del 10% las piezas que se están obteniendo defectuosas. Debido a que en las pruebas realizadas en cuestión de calidad se llegó a que el valor de 16 piezas del dato base es un valor atípico con un 4.4% de las pruebas, por lo cual a partir de este valor se considera el rango de más de 10%. En conclusión el supervisor debe reparar la máquina. Estamos seguros [de la conclusión], ya que en nuestro rango de “más del 10%” se comprobó que hay más pruebas con un valor mayor al establecido para el funcionamiento correcto de las máquinas, por lo cual estos valores son más atípicos que 16.

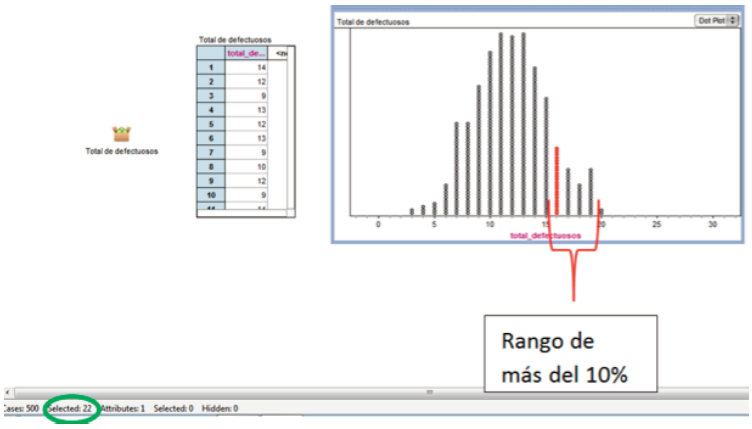


Figura 2. Razonamiento de R7 en actividad 3

El ejemplo muestra que una dificultad de los estudiantes es la de ver el resultado de la muestra experimental como parte de un conjunto y no de manera aislada. Para calcular el *p*-valor la pregunta es ¿pertenece el resultado a un conjunto raro? Y no ¿el resultado individual es raro? Dicho conjunto se determina pensando en la probabilidad de que pase lo que ocurrió o algo peor o, en su defecto, determinando el evento raro (zona crítica) y viendo si el valor particular del estadístico cae ahí.

Nivel Relacional. Los estudiantes cuyas respuestas se clasifican en este nivel consideran las tres primeras componentes del esquema de pruebas de significación y llegan a una respuesta correcta. La siguiente respuesta se refiere a la Situación 4 y fue proporcionada por el equipo R9. Aunque su explicación no es muy clara, se deduce que estimaron, mediante una simulación, el *p*-valor bajo la hipótesis H_0: $p = 0.80$, y obtuvieron 0.09 (el valor teórico es 0.067); como este valor es mayor a 0.05 clasificaron correctamente el resultado como típico, por lo que no se rechaza la hipótesis nula.

> El experimento dice que al 74% de 100 personas les fue eficaz la medicina, pero para comprobarlo decidimos ver si el resultado era típico o atípico. El resultado tenía que ser típico pues si era atípico significaba que era más o menos eficaz del 80% cosa que no queríamos. Utilizamos la regla del 5% que dicen los científicos y obtuvimos que los resultados alrededor de 74 son típicos para el 80%, pues se obtuvo un resultado de un 9%, el cual es mayor a 5%, por lo que –según la regla de los científicos– es un resultado típico. Nuestra conclusión no puede estar incorrecta en este caso no, porque creemos que aplicamos la formula correctamente y tomamos los rangos correctos

Sin embargo, con relación a la pregunta: ¿Qué tan seguro estás de tu conclusión? Responden que creen que están en lo correcto. Esto nos muestra que entienden la pregunta de manera diferente a la intención de los autores al formularla. La intención era que reflexionaran acerca de la imposibilidad de estar seguros de que la hipótesis nula sea la hipótesis verdadera, ya que la certeza sólo se puede alcanzar estudiando a toda la población o mediante una muestra suficientemente grande. Pero la pregunta se interpreta como si dijera ¿qué tan seguro estás de que seguiste el procedimiento correctamente? La mayoría de los estudiantes cuyas respuestas fueron clasificadas en este nivel responden a esta pregunta.

Nivel abstracto extendido. En las respuestas de este nivel los estudiantes, además de cumplir con los requisitos de una respuesta relacional, dejan claro que el resultado del proceso de una prueba de significación no asegura la falsedad o la veracidad de la hipótesis. Por ejemplo, en el caso de la pareja R16, después de explicar los pasos que siguieron hasta llegar a la conclusión, agregan al final:

> Estamos completamente seguros de nuestra conclusión ya que se realizaron las gráficas y los cálculos suficientes para comprobarlo. Sin embargo, puede ser equivocada y se podrían hacer más encuestas para aumentar la seguridad del resultado

A MODO DE CONCLUSIÓN

Con relación a la primera componente del esquema de pruebas de significación: *Realización y uso de la simulación*, se puede decir que los estudiantes aprenden que la solución al problema se asocia con una distribución (muestral) que se puede construir o generar mediante simulación; este es un aspecto, como señalan Liu y Thompson (2009), crucial para entender la lógica de las pruebas de significación. Las respuestas de los estudiantes que llegan a este nivel reflejan que estos han superado la creencia de que la proporción de la muestra es la misma que la proporción de la población. Sin embargo, emerge la dificultad de definir la hipótesis de manera adecuada; dificultad que coincide con lo señalado en la literatura (Vallecillos y Batanero, 1997). Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan el valor del estadístico como parámetro para generar la distribución simulada, es decir, consideran como hipótesis dicho valor.

Con relación a la segunda componente, *Estimación del p-valor* o *determinación de una zona crítica*. para estimar el *p*-valor o determinar una zona crítica se requiere interpretar la distribución y estimar a partir de ésta, probabilidades de eventos formados por conjuntos de valores de la variable. Las dificultades que se presentan son diferentes a las de invertir los términos de la expresión condicional con la que se define el *p*-valor, reportados por Falk (1986), pues en el ambiente tecnológico no se formulan expresiones como la de probabilidad de rechazar la hipótesis suponiendo que ésta es verdadera. Por otro lado, uno de los errores encontrados en nuestra investigación consiste en creer que el *p*-valor es la probabilidad de obtener el valor del estadístico y no la probabilidad del intervalo que va de este valor a más extremos. Otro tipo de error consiste en comenzar a contabilizar los resultados que se consideran inusuales o raros a partir del valor del estadístico. Finalmente, se dan casos en que utilizan como extremo de la zona crítica la moda de la distribución.

Con relación a la tercera componente, *formulación de la conclusión*, las actividades anteriores culminan en la formulación de la conclusión en la que el razonamiento se relaciona con evaluar si el valor dado del estadístico es típico o atípico, en el primer caso la hipótesis no se rechaza y en el segundo se rechaza. Generalmente se llega a esta etapa cuando se ha sido coherente en las dos anteriores.

Finalmente, con relación a la cuarta componente, *consciencia de la incertidumbre*, el aspecto más difícil de la inferencia que emergió en el enfoque del presente estudio es el de adquirir la conciencia de que seguir el procedimiento correcto no necesariamente lleva a tomar la decisión correcta. Después de un proceso de inferencia no es posible tener certeza de no cometer un error; tener dicha conciencia lleva a entender los dos tipos de errores: no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa o rechazarla cuando es verdadera.

Referencias

Batanero. C. (2011). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J.M. Contreras, C. Batanero, J.D: Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.). *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2* (pp. 135-144). Granada, España.

Biggs, J. B., y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. Rowe (Ed.), *Intelligence. Re-conceptualization and Measurement* (pp.57–76). Hilsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers and Australian Council for Educational Research.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W., y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2*(2), 98-113.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fisher, R. A (1935). *The design of experiments*. Edinburgh: Oliver and Boyd.

Fisher, R. A. (1956). *Statistical methods and scientific inference.* Edinburgh: Oliver and Boyd.

García-Rios, V. N., y Sánchez, E. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 345-357). Salamanca: SEIEM.

García-Rios, V. N., y Sánchez E. (2015). Dificultades en el razonamiento inferencial intuitivo. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.). *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2* (pp. 207-214). Granada: 2015.

Haller, H., y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research, 7*(1), 1–20.

Liu, Y., y Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. *Pedagogies, 4*(2), 126-138.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.

Vallecillos, A., y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 17*, 29–48.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal, 7*(2), 40– 58.

[1] Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI). Proyecto Conacyt No. 254301.

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA “MIRAR PROFESIONALMENTE”: UN ESTUDIO DE CASO

The development of professional noticing about mathematics teaching: a case study

Sánchez-Matamoros, G.[a], Moreno, M.[b], Callejo, M.L.[b], Pérez-Tyteca, P.[b] y Valls, J.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es identificar características de cómo estudiantes para maestro de infantil aprenden a usar una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual. Los datos proceden de las respuestas a tres tareas planteadas en un experimento de enseñanza en un programa de formación inicial de maestros para desarrollar una mirada profesional. Presentamos a través de un estudio de caso cómo la instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje da información sobre el desarrollo de la “mirada profesional”. Los resultados indican que instrumentalizar una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida para niños de 3-6 años está determinada por la identificación de los elementos matemáticos, que permiten al estudiante para maestro focalizar su atención sobre los aspectos que definen la progresión conceptual de los niños.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, trayectoria de aprendizaje, instrumento conceptual, educación infantil, longitud y medida.*

Abstract

The aim of this research is to identify characteristics of how prospective kindergarten teachers learn to use a learning trajectory for length and its measure as a conceptual tool. The data come from answers to three tasks raised on a teaching experiment in a learning program for prospective kindergarten teachers which objective was to develop professional noticing over the teaching and learning situations. We present a study of a case of how the instrumentalization of a learning trajectory gives us information about the development of professional noticing. The results indicate that instrumentalise a learning trajectory for length and its measurement for children aged 3-6 years is determined by the identification of the mathematical elements, which allow the student to focus hisattention on the aspects that define the conceptual progression of children.

Keywords*: professional noticing, learning trajectories, conceptual tool, early childhood education, length and measure.*

INTRODUCIÓN

En los programas de formación de maestros, es posible diseñar módulos de enseñanza que apoyen el desarrollo de la mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Llinares, 2012; Stokero, 2014; Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls, 2013; Wilson, Mojica y Confrey, 2013). Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) indican que la información sobre una trayectoria de aprendizaje de los contenidos matemáticos podría ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar su mirada profesional. Es decir, una trayectoria de aprendizaje puede proporcionar referencias al estudiante para maestro sobre cómo los conceptos matemáticos se desarrollan facilitando las conexiones entre los objetivos de aprendizaje y las actividades de enseñanza (Clements y Sarama, 2004; Sarama, Clements, Barrett, Van Dine y McDonel, 2011).

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P. y Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Uno de los tópicos relevantes que los maestros deben enseñar en educación infantil es la magnitud longitud y su medida (Decreto 38/2008, p. 55029, NCTM, 2000, p.103). Los niños al relacionarse con su entorno deben aprender a apreciar cualidades de los objetos (largo-corto, alto-bajo, lleno-vacío, etc.), realizar comparaciones (tan largo como…, más alto que…, menos grueso que…, etc.), o resolver situaciones relacionadas con la magnitud longitud y su medida. No obstante, el aprendizaje de este concepto es difícil porque los niños necesitan percibir la magnitud longitud como una característica (propiedad) de los objetos mediante la cuantificación de la distancia entre dos puntos de un objeto o la distancia que separa dos puntos en el espacio (Boulton-Lewis, Wilss, y Mutch, 1996; Stephan, y Clements, 2003; Szilagyi, Clements y Sarama, 2013). Además, los niños de educación infantil deben realizar una serie de acciones y ser conscientes de que medir una longitud o una distancia conlleva identificar una unidad de medida, subdividir el objeto considerando esa unidad (física y mentalmente) e iterarla a lo largo del objeto para avanzar conceptualmente en la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Freundenthal, 1983; Sarama y Clements, 2009).

MARCO TEÓRICO

Las trayectorias de aprendizaje como instrumento para el desarrollo de la "mirada profesional"

Jacobs, Lamb y Philipp (2010) señalaron que las destrezas de identificar los elementos matemáticos en una situación para interpretar la comprensión de los alumnos, a partir de sus respuestas, y decidir cómo responder, en base a la interpretación dada, al pensamiento matemático de los alumnos están interrelacionadas. En particular, porque entre las competencias de los profesores está la de decidir cómo reconocer los detalles de las estrategias usadas por sus alumnos y cómo plantear la enseñanza de acuerdo a dicha interpretación. La relación entre estas tres destrezas (identificar, interpretar y decidir) puede ser vista como una evidencia del desarrollo de esta competencia. En estos momentos, se considera que proporcionar a los estudiantes para maestro información sobre el aprendizaje de los estudiantes organizada en forma de trayectorias de aprendizaje (Simon, 2014), puede ayudarles a aprender a interpretar las situaciones de enseñanza. En este sentido, la información sobre una trayectoria de aprendizaje, entendida como contenido a ser aprendido por los estudiantes para maestro, puede ser usada como un instrumento conceptual para comprender y tratar situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 2004). Aprender a usar la información sobre las trayectorias de aprendizaje como un instrumento conceptual para desarrollar la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes, puede interpretarse en términos de su "instrumentalización" (entendido como el desarrollo de la capacidad del estudiante para maestro de usar la trayectoria de aprendizaje para interpretar la comprensión de los alumnos y tomar las correspondientes decisiones instruccionales que favorezcan su aprendizaje) (Daro, Mosher y Corcoran, 2011; Wilson et al., 2013). El análisis de este proceso de instrumentalización aporta información sobre la manera en la que los estudiantes para maestro aprenden a usar el conocimiento de matemáticas y sobre el aprendizaje de las matemáticas para apoyar sus decisiones en la enseñanza. La diferencia entre instrumentación e intrumentalización, según Drijvers y Trouche (2008), consiste en la interacción bidireccional en la que se moldea el pensamiento del estudiante mediante el instrumento conceptual, en nuestro caso de la trayectoria de aprendizaje, y en la apropiación del instrumento. De esta forma, cuando la información sobre la trayectoria de aprendizaje se usa parcialmente para interpretar las situaciones de enseñanza podemos considerar que el estudiante para maestro la usa de "forma instrumental".

Consideramos que un estudiante para maestro usa parcialmente la trayectoria de aprendizaje cuando se dan alguno de los siguientes casos: identifica los elementos matemáticos y los usa para interpretar la comprensión de todos o alguno de los niños y niñas implicados en la situación de enseñanza planteada pero, no toma decisiones adecuadas a la comprensión inferida para ninguno de los niños o niñas, o bien, cuando identifica los elementos matemáticos, los usa para interpretar la comprensión de todos o alguno de los niños y niñas y toma decisiones adecuadas sólo para alguno de los niños y niñas implicados en la situación de enseñanza planteada. Por el contrario, instrumentalizar la trayectoria supone que el estudiante para maestro es capaz de identificar los elementos matemáticos, usarlos para interpretar la comprensión de todos los niños y niñas implicados en la situación de enseñanza planteada y toma decisiones adecuadas para cada uno de los niños y niñas implicados en dicha situación.

Una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en educación infantil

Según Piaget (1972), para que un niño construya el concepto de magnitud longitud y su medida, debe superar diferentes estadios: conocimiento y manejo de la magnitud (percepción de la magnitud, conservación, ordenación y relación entre la magnitud y el número), el desarrollo evolutivo de la medida (comparación directa, desplazamiento de objetos y comparación indirecta) y, el de constitución de la unidad. El niño se inicia en este concepto realizando comparaciones cualitativas y ordenando objetos por su longitud, más adelante puede cuantificar la longitud mediante la asignación de un valor numérico y, finalmente, aprende a utilizar instrumentos de medición, por ejemplo, la regla (Van den Heuvel-Panhuizen y Elia, 2011).

Sarama y Clements (2009) elaboraron una trayectoria de aprendizaje para la magnitud longitud que consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) la progresión en el aprendizaje considerando los elementos matemáticos que definen la magnitud longitud (reconocimiento de la longitud, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (unidad de medida-unicidad, iteración, acumulación-, relación entre el número y la unidad de medida, y universalidad de la medida) (Tabla 1); y (c) actividades instruccionales.

Tabla 1. Una progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida
(adaptada de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la longitud: – Identifican las cualidades de la longitud – Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: – Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: – Comparaciones indirectas. – Ordenaciones de objetos. – Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: – Realizan iteraciones de unidad de medida. – Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida. Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones

Para esta investigación hemos diseñado un módulo de enseñanza, a partir de la información sobre una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida, para ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar su mirada profesional. La trayectoria de aprendizaje, facilitada en el módulo de enseñanza, puede proporcionar referencias al estudiante para maestro sobre cómo se desarrolla el concepto matemático, lo que favorecería que se pusieran en evidencia las conexiones existentes entre los objetivos de aprendizaje y las actividades de enseñanza.

El objetivo de esta investigación es identificar características de cómo se aprende a usar el conocimiento de una trayectoria de aprendizaje y su influencia en el desarrollo de una mirada profesional.

En particular, presentamos un estudio de caso de cómo la instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida nos da información del desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los niños y niñas de educación infantil.

METODO

Contexto del estudio de caso

En la asignatura "Aprendizaje de la Geometría", del sexto cuatrimestre del "Grado en Maestro en Educación Infantil", se diseñó un módulo centrado en una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida en niños de 3-6 años. En este módulo se presentaron tres situaciones de enseñanza en las que un grupo de niños de infantil realizaban actividades sobre la magnitud longitud y su medida (Tabla 2).

Tabla 2. Descripción de las tres situaciones de enseñanza-aprendizaje y sus elementos matemáticos

Situación	Descripción de la situación de enseñanza-aprendizaje	Elementos matemáticos
Inicial	Se proporcionan 4 viñetas extraídas de un vídeo. La maestra propone a los niños que recorten una tira de papel tan larga como cada uno de ellos (Viñeta 1). Los niños hacen diversos ensayos para hacer una señal a la tira y que quede exactamente de su altura (de pie, en el suelo, de pie, pero apoyados en un armario…) (Viñeta 2). Luego las decoran. Con ayuda de la maestra comparan la longitud de las tiras dos a dos y la maestra las ordena (Viñetas 3 y 4). (Adaptado de van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2005)	Reconocimiento (Viñeta 1) Conservación (Viñeta 2)
Intermedia	Se muestra a través de 4 viñetas una salida de los niños, en dos equipos, a un parque para medir el contorno del árbol seleccionado por cada equipo, a partir del trozo de cuerda proporcionado. El equipo A seleccionó un árbol de tronco delgado que midió con el trozo de cuerda (Viñeta 1), mientras que el árbol elegido por el equipo B al ser grueso no pudo ser medido con el trozo de cuerda (Viñeta 2). Ante tal hecho, los niños de ambos equipos decidieron rodear cada árbol con sus brazos (equipo A: una niña, equipo B: cuatro niños) (Viñetas 3 y 4 respectivamente). La maestra pregunta qué pasaría si cambiasen dos de los cuatro niños por otros dos. (Adaptado de Alsina, 2011)	Reconocimiento (Viñeta 1 y 2) Unicidad (Viñeta 4) Iteración (Viñeta 4) Acumulación (Viñeta 4)
Final	La maestra propone a los niños hacer collares usando cuerdas de distinta longitud y distintas formas (enrollada, estirada y doblada) y abalorios/cuentas de diferentes clases y tamaños (macarrones, estrellitas, etc.). Los niños eligen diferentes materiales para hacer el collar: Mario usó abalorios de distintos tamaños (no Unicidad); Almudena del mismo tamaño (Unicidad) y los insertó dejando huecos entre ellos (No Iteración); Elena y Luis abalorios del mismo tamaño insertándolos sin dejar huecos (Unicidad e Iteración). Confeccionados los collares se produce un diálogo entre la maestra y los niños. (Conservación y Acumulación) (Diseñada ad hoc)	Conservación Unicidad Iteración Acumulación

Las situaciones de enseñanza se completaron con las siguientes cuestiones:

- Cuestión 1. Justifica las **características de la comprensión** de los niños puestas de manifiesto en cada una de las viñetas indicando los **elementos matemáticos** que están implícitos.
- Cuestión 2. Según las características de la comprensión de los niños identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** los situarías? Justifica tu respuesta.
- Cuestión 3. Suponiendo que eres la maestra de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje** y propón **una tarea** para que los niños sigan **avanzando** en la comprensión de la magnitud longitud y su medida.

Análisis del estudio de caso

El análisis de las respuestas a las tres preguntas planteadas en las tres situaciones de enseñanza- aprendizaje (inicial, intermedia y final) se realizó en dos fases (Figura 1). En la primera fase y mediante un proceso inductivo, se analizaron conjuntamente las cuestiones 1 y 2 centrándonos en cómo el estudiante para maestro (Pedro) justificaba las características de la comprensión e identificaba los elementos matemáticos implícitos en cada situación de aprendizaje (cuestión 1), para interpretar la comprensión de los niños de infantil (cuestión 2). Posteriormente, se analizó si las decisiones sobre la enseñanza relativa a la definición de los objetivos de aprendizaje y las actividades correspondientes habían sido diseñadas teniendo en cuenta la comprensión inferida de los niños por el estudiante para maestro (cuestión 3).

El análisis en esta primera fase da información del grado de adquisición de la competencia del estudiante para maestro de infantil para mirar de manera profesional las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

En la segunda fase, comparamos los análisis realizados en cada uno de los tres momentos de realización del módulo (situación inicial, intermedia y final) centrándonos en los cambios en los distintos usos de la trayectoria de aprendizaje. Los cambios identificados a lo largo del módulo, dan cuenta del desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente” del estudiante para maestro de infantil y nos permite inferir características de cómo se ha generado dicho desarrollo.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran que llegar a instrumentalizar la trayectoria de aprendizaje, en el caso de Pedro, ha implicado la identificación de los elementos matemáticos de magnitud y de medida, el uso de estos para interpretar la comprensión de los niños y la consideración de la comprensión inferida para diseñar actividades idóneas que favorezcan la progresión del aprendizaje.

Pedro usó de manera diferente la trayectoria de aprendizaje en cada una de las situaciones (inicial, intermedia y final).

En la situación inicial, Pedro usó de forma retórica la trayectoria de aprendizaje dado que nombró elementos matemáticos sin mostrar evidencia de los mismos y no los usó para interpretar la comprensión. Posteriormente, en la situación intermedia empezó a usar la trayectoria de aprendizaje de forma instrumental al identificar y evidenciar correctamente elementos matemáticos, usarlos para inferir la comprensión de un grupo de niños (equipo A), y tomar una decisión instruccional (objetivo y actividad) coherente a la comprensión inferida para este grupo de niños. Finalmente, en la situación final, instrumentalizó la trayectoria de aprendizaje, ya que identificó los elementos matemáticos de la situación, los usó para interpretar la comprensión de los niños y tomar decisiones instruccionales teniendo en cuenta la comprensión inferida para los diferentes grupos de niños de la situación. La verificación de las características que conforman la instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje ha permitido observar el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza-aprendizaje planteadas a los estudiantes para maestro.

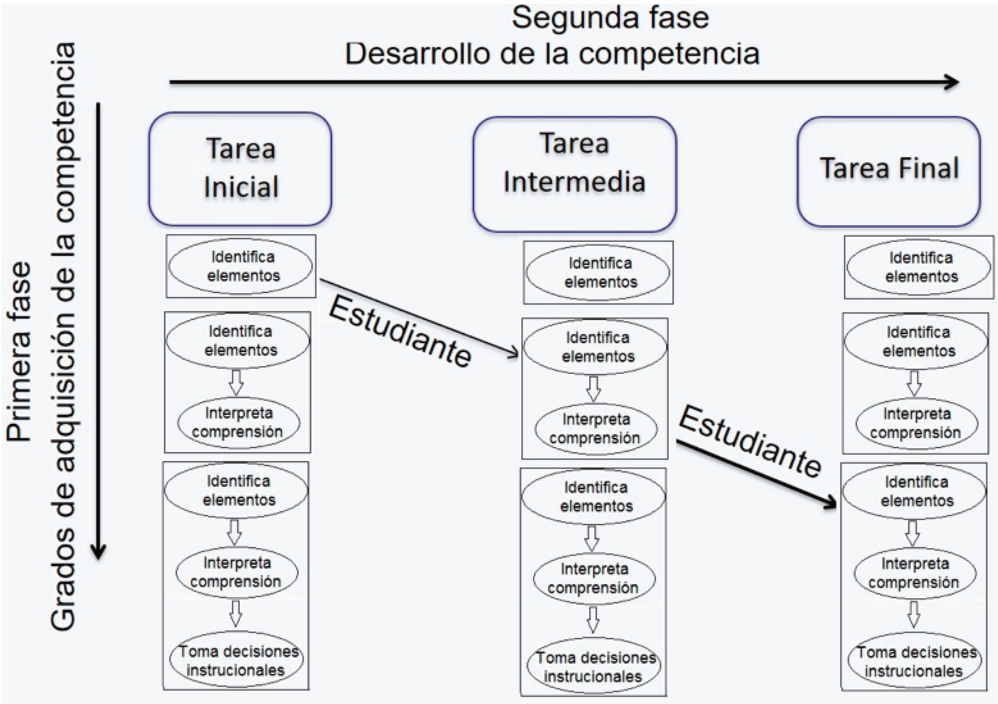


Figura 1. Esquema del análisis realizado a los datos

Usa de forma retórica la trayectoria de aprendizaje (Situación inicial)

Pedro, en la situación inicial, identifica y nombra de forma retórica los elementos de reconocimiento y conservación de la magnitud sin apoyarlos en evidencias de la situación (características de la tarea o las intervenciones de los niños) tal como se observa en su respuesta:

Pedro. Viñeta 1. Se trabaja el elemento de magnitud, reconocimiento de la magnitud ya que se les pide que reconozcan su altura (longitud)

Pedro. Viñeta 2. Se trabaja la conservación ya que tienen que conservar su medida y trasladarla a la hoja.

El estudiante para maestro nombra de forma retórica tres elementos que no intervienen en la situación (transitividad, unidad de medida e iteración):

Pedro. Viñeta 3. Se trabaja la transitividad ya que relacionan varias medidas.

Pedro. Viñeta 4. Trabajan de los elementos de medida, la unidad de medida con la iteración ya que colocan las hojas de menor a mayor.

El estudiante usa todos los elementos nombrados para inferir la comprensión de los niños, considerando elementos que no están implícitos en ninguna de las viñetas que determinan la situación de enseñanza:

Pedro. Los niños que participan en el video se encuentran en el nivel 4 ya que realizan interacciones con la unidad de medida y presentan principios de acumulación.

Los comentarios y argumentaciones son muy genéricos y no se ajustan a las evidencias de la situación.

Usa de forma instrumental la trayectoria de aprendizaje (Situación intermedia)

En la situación intermedia Pedro usa la información sobre la trayectoria de aprendizaje para interpretar características de la comprensión de alguno de los niños. En esta tarea identifica elementos matemáticos de magnitud y de medida, como el reconocimiento de la magnitud longitud, la propiedad de acumulación, la iteración y la unicidad de la unidad de medida:

Pedro. Viñeta 1. El equipo A reconoce la magnitud longitud (fino-delgado). … El equipo B reconoce la magnitud longitud (comparación directa de forma intuitiva).

Pedro. Viñeta 3. El equipo A imita la iteración del Equipo B… El equipo B realiza iteraciones y realiza acumulación (número de niños). Reconoce la relación entre número y unidad de medida.

Pedro. Viñeta 4. El equipo A reconoce la propiedad de acumulación y realiza iteraciones… El equipo B reconoce la no unicidad de la unidad de medida (ve la diferencia entre los niños, no todos son iguales). Reconoce la relación en el número y la unidad de medida.

En esta situación intermedia, Pedro sí usa los elementos identificados para interpretar la comprensión del equipo A, al que sitúa en la transición del nivel 3 al 4, y no la del equipo B, al que sitúa en el nivel 5, sin tener en cuenta que los niños no tienen adquirida la unicidad de la unidad de medida, tal como el mismo indica:

Pedro. El equipo A se encontraría en la transición del Nivel 3 al Nivel 4 ya que al final…, empieza a realizar acumulaciones e iteraciones.

El equipo B se encuentra finalmente en el Nivel 5 ya que reconocen que todos los niños miden una cosa [refiriéndose a que la medida de los niños no es siempre la misma (unicidad de la unidad de medida), nota aclaratoria de los autores] y así varía el número de niños que se necesitaría. Reconocen la relación el número y la unidad de medida. Y, por último, comienzan hacer estimaciones…

También el estudiante para maestro usa la comprensión inferida para tomar decisiones instruccionales para el equipo A y no para el B.

Pedro. Objetivo: reconocer la unicidad de la unidad de medida

Tarea: Medir los dos troncos y ver las diferencias entre medir usando la cuerda y usando sus cuerpos.

Esta manera no uniforme de usar la información sobre la trayectoria de aprendizaje en el análisis de los diferentes aspectos de la situación de enseñanza (actividades de los niños, respuestas de los niños, inferencias realizadas) son considerados como rasgos de un uso instrumental.

Instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje (Situación final)

En la situación final Pedro identifica los elementos matemáticos de magnitud y medida que intervienen en cada situación, sin añadir información de la que no tiene evidencia. Esta identificación adecuada de los elementos de magnitud y medida le ha permitido interpretar la comprensión de los niños, y tomar decisiones para favorecer su progreso.

Pedro identifica y justifica, a partir de las evidencias de los diálogos de los niños, los elementos de magnitud: conservación y transitividad, permitiéndole interpretar adecuadamente el nivel de comprensión de los diferentes niños en la situación (Mario, Luis y Almudena). Así, en el caso de Mario, indica:

Pedro. Mario se encuentra en el nivel 1 ya que no reconoce la conservación, debido a que no observa la medida de las cuerdas, solo se fija en el número de macarrones, afirmando que “el mío tiene más macarrones”. Asimismo, no realiza la transitividad porque no reconoce la medida de las cuerdas y no es capaz de compararlas.

Asimismo, el hecho de haber identificado los elementos matemáticos característicos de magnitud y medida le permite inferir la comprensión de Luis:

Pedro. Luis se encuentra en el nivel 4 porque ya ha adquirido la iteración de manera correcta, sin saltos ni superposiciones. Y reconoce la conservación porque sabe que las cuerdas tienen medidas distintas y la suya es más larga que la de Mario “es más larga que la de Mario, aunque los accesorios sean diferentes”

Por último, el reconocimiento de los elementos matemáticos de medida le ha permitido interpretar la comprensión de Elena:

Pedro. Elena está en el nivel 4 porque sabemos que realiza correctamente las iteraciones y usa siempre la misma unidad de medida [unicidad] "las estrellitas". Reconoce la unidad de medida y las iteraciones.

Por lo que respecta a la interpretación de la comprensión de Almudena, este estudiante para maestro percibe en sus respuestas cualidades como la unicidad de la unidad de medida "usa siempre estrellitas", la ausencia del concepto iteración "aún no domina correctamente la iteración" al realizar, "saltos, lo que provoca que aumente la longitud". La identificación explícita de estas cualidades le permite situar a Almudena en la transición del nivel 3 al 4 de comprensión. Si bien podemos considerar que este estudiante para maestro ha usado la información sobre la progresión del aprendizaje de la magnitud y medida proporcionada por la trayectoria de aprendizaje, no interpreta adecuadamente la comprensión de Almudena, al no tener en cuenta que Almudena no comprende la conservación. Como Pedro no hace referencia, al igual que hizo con Mario, de este hecho, no tenemos evidencias de por qué no lo considera.

Pedro en esta situación final, a diferencia de lo que sucedía en la situación intermedia, ha sido capaz de adoptar decisiones que permiten ayudar a los estudiantes a progresar tanto a los niños del nivel más bajo como a los niños del nivel superior:

Pedro. El objetivo para Mario sería que reconozca la conservación y la transitividad.

Tarea que propongo: realizar comparaciones directas e indirectas con cuerdas colocadas de formas diferentes y posiciones distintas.

Asimismo, para los estudiantes de nivel superior:

Pedro. El objetivo planteado es reconocer la relación entre el número y la unidad de medida.

La tarea: les presentaría collares realizados con las mismas cuerdas, pero diferentes abalorios para que al contar observaran que la medida se mantiene [pero no el número de iteraciones]; también les presentaría collares de diferentes longitudes. De paso, se profundizaría en el concepto de acumulación, al ser constante siempre la medida de los collares, cuando corresponda.

Nosotros inferimos desde estas respuestas que ha aprendido a usar la información de la trayectoria de aprendizaje. De esta manera, la instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje le ha permitido identificar e interpretar la comprensión de los niños de la situación de enseñanza, y usar la información de la trayectoria de aprendizaje para tomar decisiones instruccionales adecuadas para todos los niños en esta situación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta comunicación forma parte de una investigación que tiene como objetivo identificar características del proceso de instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como un medio para obtener información sobre el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los niños de educación infantil. Los resultados indican que instrumentalizar una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida para niños de 3-6 años está determinada por la identificación de los elementos matemáticos que permiten al estudiante para maestro focalizar su atención sobre los aspectos que definen la progresión conceptual de los niños. Esta mayor focalización sobre lo que define la progresión conceptual en el aprendizaje de la magnitud y su medida le permite estar en mejores condiciones de proponer y justificar actividades de enseñanza.

Aprender a usar una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual no se produce de forma directa, sino que es progresivo. Esta progresión pone de manifiesto la manera en la que el estudiante para maestro, Pedro, empieza a ser consciente de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Wilson et al., 2014). Así de esta manera es como Pedro reconoce que ciertos comportamientos de los niños pueden ser o no significativos desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (Wilson et al., 2013).

El uso progresivo de la trayectoria de aprendizaje para focalizar la atención sobre los elementos matemáticos relevantes en la situación hipotética de enseñanza se vincula al desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”. Atendiendo al grado de adquisición de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los niños, el estudiante para maestro, Pedro, pasa de no usar la trayectoria como instrumento (Nivel 1) a su uso de forma instrumental (Nivel 2) y finalmente, a la instrumentalización de la misma (Nivel 3) (Figura 2).

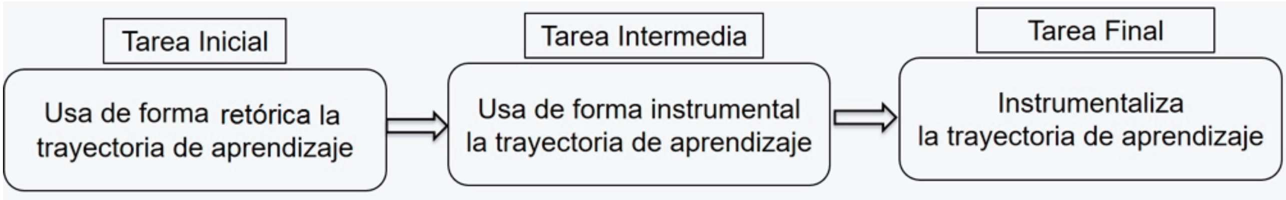


Figura 2. Desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente” de Pedro

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

Referencias

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. I.C.E. Universitat de Barcelona. Hosori Editorial, S. L. (p.176).

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Boulton-Lewis, G.M., Wilss, L.A. y Mutch, S.L. (1996). An analysis of young children’s strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 329-347.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Daro, P., Mosher, F. y Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction. Recuperado 23 de marzo de 2017. Obtenido en: http://www.cpre.org/images/stories/cpre_pdfs/learning%20trajectories%20in%20math_ccii%20report.pdf

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, 2*, 363-392.

Freundenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel: Dordrecht.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 36*, 93-115.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Piaget, J. (1972). *Judgment and reasoning in the child*. MD: Littlefield, Adams.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM

Sarama J. y Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.

Sarama, J., Clements D. H., Barrett J., Van Dine D. W. y McDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education, 43*, 667-680.

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). London: Springer.

Stephan, M. y Clements, D.H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. En D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. NCTM 2003 Yearbook* (pp. 3–16). Reston, VA: NCTM.

Stockero, S.L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J.L. Lo et al. (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 239- 259). London: Springer.

Szilagyi, J., Clements, D.H. y Sarama, J. (2013). Young children's understanding of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 581-620.

van den Heuvel-Panhuizen, M. y Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM Mathematics Education, 43*, 621–635.

van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. TAL Project.* Freudenthal Institute, Utrech University and National Institute for Curriculum Development. Utrech. The Netherlands.

Wilson, P.H., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y ARGUMENTACIÓN EN PROCESOS DE PRUEBA EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Configural reasoning and argumentation in proof processes in geometrical context

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar el cambio del estatus de las afirmaciones que conforman la argumentación en la resolución de problemas de probar en geometría (Duval, 2016b), y el papel que desempeñan en el proceso de resolución. Analizamos las respuestas de estudiantes de 4º de educación secundaria obligatoria a cuatro problemas en los que se presentaba una configuración geométrica y una tesis que debían demostrar. Los resultados indican dos características del proceso de prueba: (1) la realización de un cambio en el estatus de las afirmaciones involucradas en la resolución de los problemas, y (2) el progreso en la argumentación desde un modo de acumulación a un modo de sustitución (Duval, 1999a). Sin embargo, estas características, no garantizan que se dé el "truncamiento" del razonamiento configural que genera la prueba formal, que puede ser explicado por el papel desempeñado por la subconfiguración relevante identificada.

Palabras clave: *razonamiento configural, prueba, argumentación, estatus.*

Abstract

The aim of this study is to analyze the status change of the propositions that make up the argumentation in solving proof problems into geometry context (Duval, 2016b), and its role played in the resolution process. We analyze the answers of students of compulsory secondary education to four proof problems which presented a geometrical configuration that deduced a thesis to be demonstrated. The results obtained reveal two characteristics of the proving process: (1) the realization of a change into the status of the propositions involved in the problems resolution, and (2) an argumentation that should be developed from the accumulation mode to the substitution one (Duval, 1999a). However, these characteristics of the resolution process do not guarantee the configural reasoning "truncation" which generates the formal proof and might be explained by the role played by the relevant subconfiguration identified.

Keywords: *configural reasoning, proof, argumentation, status.*

INTRODUCCIÓN

En los problemas de geometría de probar en entorno de lápiz y papel, se proporciona información mediante un enunciado (hipótesis) relacionada con una configuración geométrica, solicitándose probar un hecho geométrico contenido en dicha configuración (tesis). Entendemos configuración geométrica como la representación plana de objetos geométricos. En la resolución de este tipo de problemas se realiza una interacción de la configuración geométrica y las subconfiguraciones identificadas durante el proceso de resolución con afirmaciones matemáticas. Duval (1998, 2016a) pone de relieve la importancia de los procesos de visualización en esta interacción, considerando tres tipos de aprehensiones: aprehensión perceptiva (identificación simple de una configuración), aprehensión discursiva (asociación de la configuración identificada con conceptos/afirmaciones matemáticos, como teoremas,

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

definiciones, axiomas…) y aprehensión operativa (modificación de la configuración original, para identificar subconfiguraciones relevantes en el proceso de prueba). Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) denominan razonamiento configural al razonamiento desarrollado a partir de las coordinaciones entre las aprehensiones operativa y discursiva puestas de manifiesto durante la resolución de problemas de probar en geometría. El razonamiento configural puede desembocar en tres situaciones o desenlaces que denominan: (1) truncamiento, desenlace que ocurre cuando la coordinación proporciona la "idea" que resuelve el problema, conformando un razonamiento que conduce a la resolución del problema mediante un proceso deductivo; (2) conjetura sin demostración, el razonamiento permite generar una solución al problema, pero basada en conjeturas no probadas, como por ejemplo, inferencias realizadas en base a percepciones erróneas de la configuración presentada en el problema; y (3) bucle, que se da cuando se establecen afirmaciones matemáticas que no permiten el avance hacia la solución, de forma que los resolutores vuelven a la situación inicial una o varias veces, ante la imposibilidad de avanzar en la resolución del problema. Por tanto, decimos que el razonamiento configural desemboca en bucle, cuando se da una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución. Diversas investigaciones (Prior y Torregrosa, 2013; Clemente y Llinares, 2013; Clemente y Llinares, 2014; Llinares y Clemente, 2014) ponen de manifiesto que el análisis mediante el razonamiento configural puede permitirnos identificar y comprender distintos factores que pueden desencadenar un razonamiento lógico-deductivo que permite concluir el proceso de resolución de problemas de probar con éxito.

En el proceso de resolver problemas de probar de geometría podemos distinguir diferentes formas que adopta el discurso (Clemente y Llinares, 2015): (i) El proceso seguido hasta que se consigue la solución mediante un razonamiento (entendido como obtención de información nueva a partir de información dada o conocida), y (ii) La comunicación de la resolución en forma de discurso teórico. En esta segunda parte de la resolución de los problemas de probar, la generación de un discurso teórico, hemos de considerar el estatus como el papel específico que desempeña cada una de las afirmaciones matemáticas que lo componen (Duval, 1998), y si se produce o no un cambio en dicho papel para una misma afirmación matemática (cambio de estatus). En este sentido, cada "paso" (o nivel local) en que se divide el nivel global de la organización del discurso, que permite el avance hacia la resolución del problema, ha de involucrar, al menos, tres afirmaciones matemáticas relacionadas por su estatus (Duval, 2016b): hipótesis o conclusión previa; definición, teorema, propiedad o inferencia de información a partir del contexto de resolución; y conclusión local.

En la resolución de los problemas de probar es destacable la importancia de la argumentación, entendida como el proceso utilizado para convencer, y por argumento todo aquello involucrado dentro del proceso de argumentación (ejemplos, definiciones, etc.) para validar o refutar una afirmación (Duval, 1999b). Una forma de argumentación habitual es el proceso discursivo, entendido como la construcción de un discurso argumentativo que nos transmite el proceso de resolución del problema, y por tanto, pone de manifiesto el razonamiento desarrollado. Duval (1999a) considera que el proceso discursivo puede desarrollarse a partir de lo que denomina "modos de expansión del discurso", entendidos como la forma de enlazar las afirmaciones del discurso generado. Establece dos modos de expansión del discurso: "acumulación" y "sustitución". En el primero se genera un discurso a partir de la acumulación de información sin un orden lógico, expresado en forma de afirmaciones no necesariamente conectadas entre sí. En el modo de sustitución, se genera un discurso progresivo y ordenado a partir de inferencias lógicas de las afirmaciones matemáticas involucradas, en el que cada afirmación puede considerarse consecuencia lógica de la anterior, pudiendo desempeñar diferentes roles dentro del proceso de razonamiento.

El objetivo del presente trabajo es identificar relaciones entre los cambios de estatus de las afirmaciones matemáticas que componen el proceso discursivo de los estudiantes al resolver problemas de prueba en contexto geométrico, los modos (Duval, 1999a) en que dicho proceso se desarrolla y los desenlaces del razonamiento configural.

MÉTODO

Participantes y Contexto

En la presente investigación participaron 15 alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, con edades comprendidas entre 15 y 16 años, formando grupos de 3 alumnos (G01, G02, G03, G04, G05). Ninguno de ellos había recibido instrucción específica acerca del proceso de demostración matemática, aunque se dedicó una sesión de 55 minutos al repaso de conceptos geométricos elementales que debían conocer de cursos anteriores, en relación a las características, propiedades, clasificación y criterios de congruencia y semejanza de los triángulos.

Instrumento

Los estudiantes resolvieron cuatro problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica asociada a un enunciado (hipótesis), y se les pedía probar un hecho geométrico (tesis). Con ello pretendíamos determinar cómo los estudiantes desarrollaban procesos coordinados de aprehensiones discursivas y operativas, identificando subconfiguraciones que guiasen su razonamiento estableciendo una cadena de argumentaciones (proceso discursivo) que concluyese con la tesis a probar.

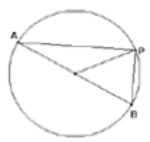
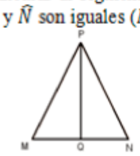
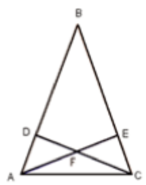
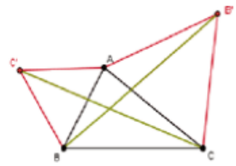
Problema 1 (P1)	**Problema 2 (P2)**
Demuestre que el ángulo APB ($\hat{P}$) es recto considerando la siguiente figura. 	Sabiendo que el segmento $\overline{PQ}$ es bisectriz del ángulo $\hat{P}$ y que es perpendicular al segmento $\overline{MN}$, demuestre que los ángulos $\hat{M}$ y $\hat{N}$ son iguales ($\hat{M} = \hat{N}$). 
Problema 3 (P3)	**Problema 4 (P4)**
Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ son dos alturas del triángulo ΔABC y los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son iguales. Demuestre que los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$ son iguales. 	Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC se construyen los triángulos equiláteros ΔABC' y ΔACB'. Demuestre que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son iguales. 

Figura 1. Problemas de probar que componen el cuestionario del estudio

Los problemas fueron seleccionados teniendo en cuenta que los participantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para su resolución, y considerando la existencia de al menos una subconfiguración relevante que pudiera generar ideas para guiar el proceso de prueba. En este sentido, las figuras se han considerado teniendo en cuenta que las posibles subconfiguraciones relevantes formen parte de la configuración inicial, no siendo necesario introducir nuevos elementos. En el problema 4 (P4) se da un solapamiento entre las subconfiguraciones relevantes a identificar, hecho que requiere acciones cognitivas más complejas para poder visualizarlas por separado.

Análisis

El análisis de las respuestas a los problemas se llevó a cabo en tres etapas. En la primera de ellas, se transcribieron y segmentaron las respuestas dadas por los estudiantes en unidades de análisis con la finalidad de identificar los ciclos coordinados de aprehensiones operativa/discursiva desarrollados durante la prueba y las diferentes subconfiguraciones relevantes consideradas durante el proceso de resolución. En la segunda, se identificaron los desenlaces del razonamiento configural. En la tercera, se procedió a la identificación de los modos de expansión del discurso (Duval, 1999a) y el estatus otorgado a las afirmaciones involucradas en el proceso discursivo generado durante la resolución del problema, con el propósito de identificar relaciones entre su desarrollo, el cambio de estatus de las afirmaciones (Duval 2016b) y los desenlaces del razonamiento configural detectados.

RESULTADOS

Los resultados serán presentados en dos apartados en función de las características identificadas en los procesos discursivos desarrollados para los desenlaces bucle y conjetura sin demostración del razonamiento configural. Así tendremos los apartados: “bucle y proceso discursivo” y “conjetura sin demostración y proceso discursivo”. El porcentaje de aparición del desenlace bucle ha sido del 5% del total de los problemas analizados, mientras que el de conjetura sin demostración ha supuesto el 20%.

Bucle y proceso discursivo

A continuación, se muestra el resultado del análisis de la respuesta de G01 al problema 4 (P4) cuyo razonamiento configural desemboca en bucle, ya que la coordinación entre aprehensiones operativa/discursiva no genera una solución al problema, sino que lleva de nuevo a los estudiantes a la situación inicial, debido a la no utilidad de las afirmaciones planteadas en la resolución del problema, conduciéndoles a una situación de bloqueo.

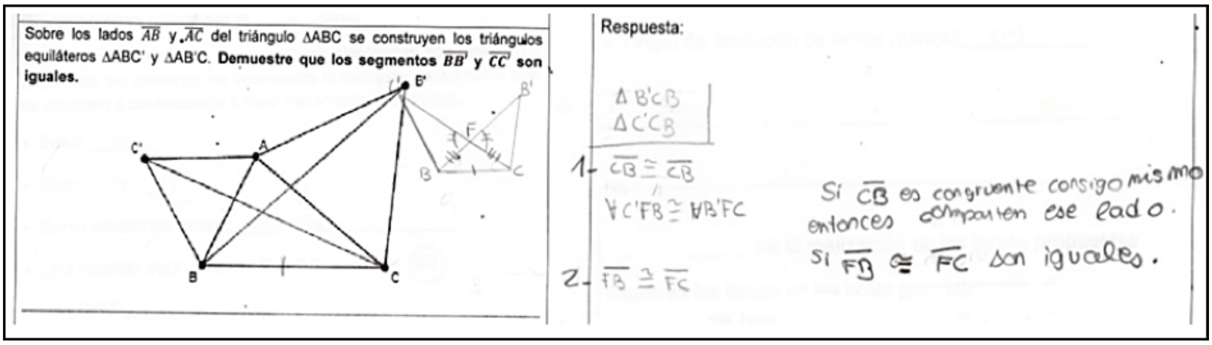


Figura 2. Respuesta al problema 4 (P4) dada por G01

Los estudiantes inician el razonamiento configural identificando y dibujando la subconfiguración formada por los triángulos $\Delta C'FB$ y $\Delta B'FC$ (AO_0) (Figura 2). A partir de la subconfiguración detectada, realizan tres ciclos de coordinación de aprehensiones operativa/discursiva para obtener información adicional. La Figura 3 describe estos tres ciclos.

En el primer ciclo ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$), consideran el segmento $\overline{CB}$ como lado común de los triángulos identificados, asociando este hecho geométrico (de forma implícita) con la propiedad reflexiva, que les permite establecer la congruencia de dicho segmento “consigo mismo”. En el segundo ciclo ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$), consideran la congruencia de los ángulos $\measuredangle C'FB$ y $\measuredangle B'FC$ opuestos por el vértice F a partir de la propiedad de que ángulos opuestos por el vértice son congruentes. En el tercer ciclo ($AO_3 \leftrightarrow AD_3$), consideran los segmentos $\overline{FB}$ y $\overline{FC}$ como congruentes de forma errónea.

Una vez establecen las tres afirmaciones matemáticas (segmento $\overline{CB}$ común, ángulos opuestos por el vértice F congruentes y congruencia de $\overline{FB}$ y $\overline{FC}$), no continúan con la resolución del problema, entrando en una situación de bloqueo, por lo que el razonamiento configural desemboca en “bucle”. Este bloqueo en el razonamiento, se debe a que establecen una afirmación matemática errónea (“$\overline{FB} \cong \overline{FC}$”) y otra sin utilidad, ($\measuredangle C'FB$ y $\measuredangle B'FC$). Esta forma de proceder globalmente considerada, indica que el grupo ha intentado asociar algún criterio de congruencia de triángulos con la subconfiguración inicial identificada (triángulos $\Delta C'FB$ y $\Delta B'FC$), para demostrar la tesis planteada, ya que ambos triángulos contienen los segmentos BB' y CC' de los que se debe demostrar su congruencia. Para ello, han pretendido verificar condiciones en la subconfiguración inicial identificada para aplicar un criterio de congruencia, a partir de la realización de tres ciclos coordinados de aprehensiones operativa/discursiva.

Sin embargo, las condiciones extraídas, no verifican ningún criterio de congruencia para la subconfiguración identificada, por lo que entran en un estado de bloqueo.

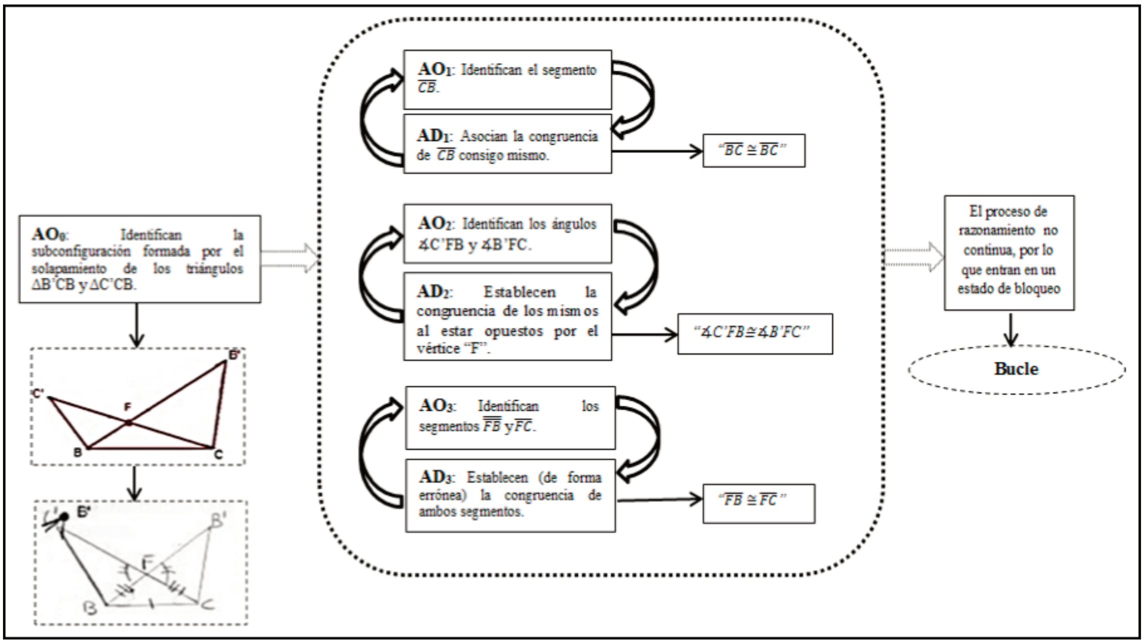


Figura 3. Razonamiento configural desarrollado por G01 al resolver P4
AO_i: Aprensión operativa; AD_i: Aprehensión discursiva.
Las dobles flechas representan coordinaciones entre las diferentes aprehensiones

Considerando el nivel global de la organización del discurso (Figura 4) vemos que los estudiantes solo acumulan información.

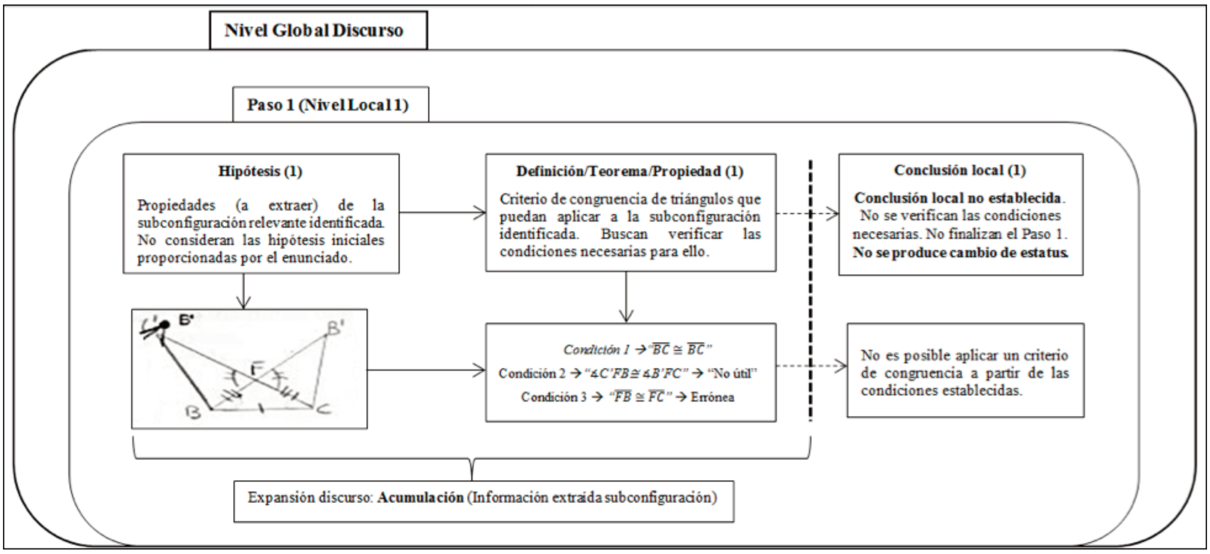


Figura 4. Organización del discursivo y modos de expansión para P4

Las afirmaciones matemáticas establecidas se sitúan dentro del mismo nivel local de organización del discurso. Como estas afirmaciones no verifican ningún criterio de congruencia a aplicar a la subconfiguración identificada, los estudiantes no generan más discurso. Al no producirse el discurso teórico, no se produce un cambio en el estatus de las afirmaciones involucradas.

A modo de resumen, los estudiantes extraen información de la subconfiguración identificada con el objeto de aplicar un criterio de congruencia, estableciendo en la información "acumulada", una afirmación errónea y otra que no es útil.

Conjetura sin demostración y proceso discursivo

En los razonamientos que desembocan en "conjetura sin demostración" encontramos que algunas de las afirmaciones matemáticas establecidas tras cada ciclo coordinado de aprehensiones operativa/discursiva se basan en conjeturas no demostradas previamente (erróneas o no). Por ejemplo la respuesta de G03 al problema 3 (P3) (Figura 5).

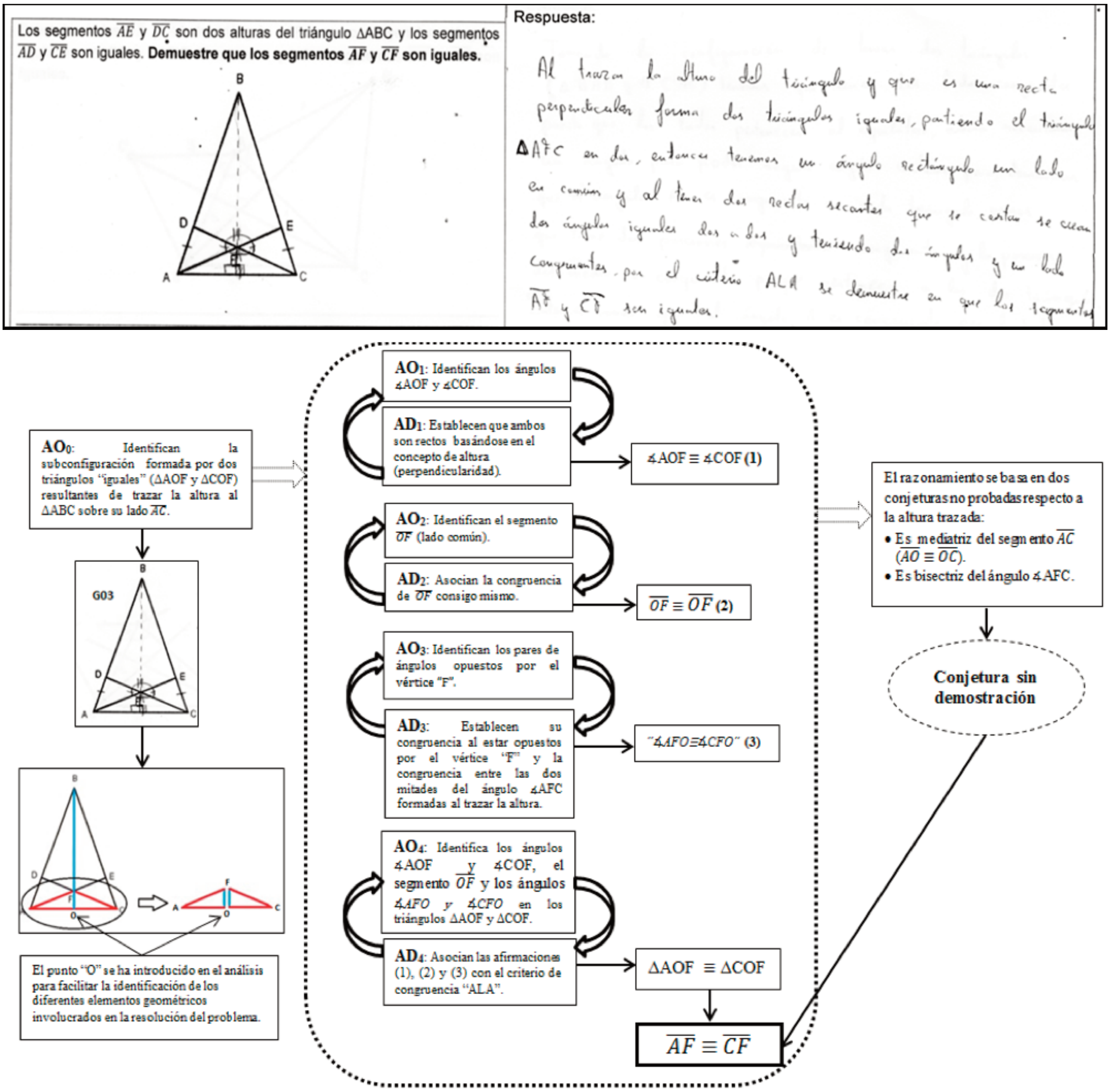


Figura 5. Respuesta y razonamiento configural de G03 al resolver P3

Los estudiantes comienzan el razonamiento configural (Figura 5) dibujando la altura del triángulo ΔABC sobre el segmento $\overline{AC}$, que les lleva a identificar dos triángulos rectángulos (ΔAOF y ΔCOF) con un lado en común ($\overline{OF}$). Conjeturan (sin demostrar) que la altura trazada divide el segmento $\overline{AC}$ en dos partes iguales (mediatriz) y el ángulo $\measuredangle AFC$ en dos ángulos iguales (bisectriz), lo que les lleva a establecer que los triángulos identificados (ΔAOF y ΔCOF) tienen dos ángulos congruentes ($\measuredangle AOF \equiv \measuredangle COF$ y $\measuredangle AFO \equiv \measuredangle CFO$) y un lado en común ($\overline{OF}$), permitiéndoles aplicar el criterio de congruencia "A–L–A", estableciendo la congruencia de ambos triángulos y por tanto de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$, demostrando así la tesis planteada.

Estos estudiantes basan su razonamiento en dos conjeturas (altura de cualquier triángulo es mediatriz $\overline{AC}$ y bisectriz del ángulo $\measuredangle AFC$) no demostradas previamente, ya que no se indica en ningún momento que el triángulo es isósceles, caso para el que las conjeturas serían válidas. Es por ello que el razonamiento configural generado por los estudiantes se apoya en una conjetura sin demostrar

La Figura 6 muestra la organización del discurso para la respuesta analizada:

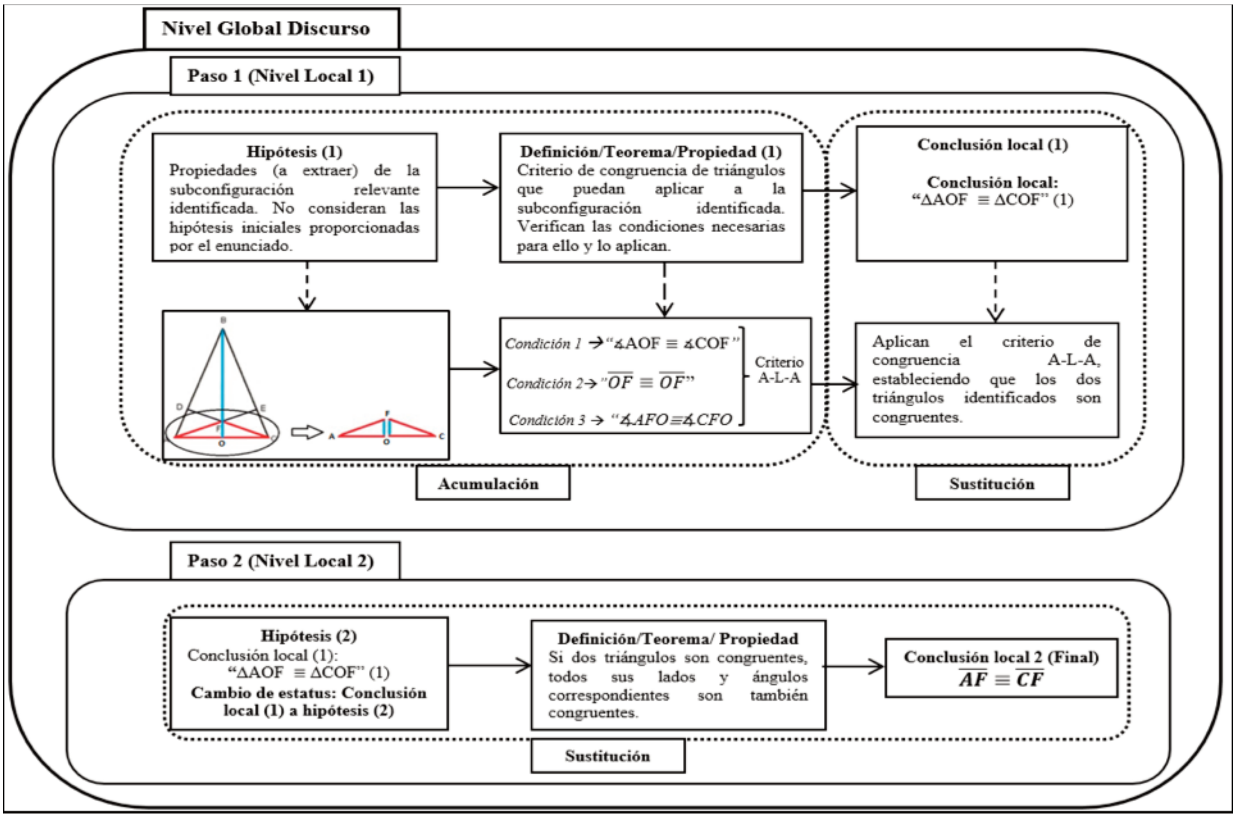


Figura 6. Organización del discurso y modos de expansión para P3

En este caso, encontramos que el nivel global del proceso discursivo se compone de dos niveles locales.

Los estudiantes no consideran en ningún momento los datos (hipótesis) proporcionados por el enunciado. Comienzan con la extracción de información de la subconfiguración relevante identificada con el fin de encontrar condiciones a verificar para aplicar un criterio de congruencia de triángulos. Dichas condiciones, debido al trazado de la altura en la configuración inicial, se hacen relativamente "evidentes" y fácilmente verificables considerando las dos conjeturas anteriormente descritas. En consecuencia, aplican el criterio de congruencia A–L–A (ángulo-lado-ángulo), que permite al grupo concluir (localmente), que los dos triángulos considerados son congruentes.

En el segundo paso (Figura 6), la hipótesis inicial (2) es la congruencia de los triángulos (conclusión local (1)), a partir de la que "infieren" que todos los lados y ángulos de dos triángulos congruentes son congruentes también, concluyendo que los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$ son congruentes (conclusión local (2)). Por tanto, la conclusión (local) del "paso 1" pasa a desempeñar el rol de hipótesis del "paso 2", permitiendo a los estudiantes finalizar este paso 2 estableciendo la conclusión final (conclusión local del paso 2), mediante un cambio de estatus.

Esta manera de proceder de los estudiantes en este caso muestra que, inicialmente, los alumnos "acumulan" información al inicio del "paso 1", puesto que extraen información (condiciones a verificar) a partir de la subconfiguración identificada, sin un orden lógico, únicamente con el objeto de poder aplicar un criterio de congruencia (aunque fundamentado en conjeturas no demostradas). Luego, los estudiantes ordenan dicha información cambiando su estatus lógico al considerar algunos de esos hechos como premisas en el criterio de congruencia de triángulos mediante el modo de "sustitución". Esto es así ya que establecen la congruencia de los triángulos identificados a partir de la aplicación del criterio A–L–A, es decir, la conclusión establecida es consecuencia lógica de los hechos geométricos generados previamente (aunque con conjeturas sin demostrar) y el criterio de congruencia aplicado. Por ello, en el "paso 1" se dan la acumulación y la sustitución. En el "paso 2", únicamente se da el modo de sustitución, ya que solo se establecen relaciones lógicas a partir de la información generada en el "paso 1" (congruencia de triángulos) para finalizar en una afirmación con estatus de conclusión local (2) (lados congruentes). De esta forma, la expansión del discurso por sustitución sigue un orden lógico, donde cada afirmación involucrada es consecuencia de la anterior, concluyendo en la tesis solicitada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es analizar el cambio de estatus de las afirmaciones que conforman el proceso discursivo en la resolución de problemas de prueba en geometría y la forma en que se desarrolla dicho proceso para identificar relaciones con los desenlaces bucle y conjetura sin demostración del razonamiento configural.

En los problemas analizados los estudiantes no consideran la información proporcionada por el enunciado (hipótesis iniciales). Este hecho parece relacionado con la subconfiguración identificada en la resolución de los problemas. En el problema 4 (P4), los estudiantes consideran la complementaria de la subconfiguración relevante necesaria para resolver el problema. En el problema 3 (P3), los estudiantes trazan la altura al triángulo inicial, identificando los triángulos ΔAOF y ΔCOF a partir de lo que establecen dos conjeturas sobre las que basan su razonamiento. En el primer caso, la subconfiguración está formada por dos triángulos con unas características más familiares para los estudiantes que los que forman la subconfiguración relevante. En el segundo caso, es evidente que lo han identificado con el triángulo isósceles "tipo", lo que les hace trazar la altura y establecer dos conjeturas (sin demostración previa) válidas para este tipo de triángulos. Por tanto, se hace patente la influencia de las configuraciones "prototípicas" (Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017; Mesquita, 1998) en la identificación de subconfiguraciones relevantes, lo que puede desembocar en un razonamiento no basado en las condiciones (datos) impuestas por el enunciado.

En relación al cambio de estatus, los resultados sugieren que cuando no se da el cambio de estatus de las afirmaciones que componen el discurso, los estudiantes no son capaces de continuar con la resolución del problema, por lo que se produce una situación de bloqueo en el razonamiento configural desarrollado (bucle). En cambio, cuando el razonamiento configural se basa en una "conjetura sin demostración", sí que se produce un cambio de estatus en las afirmaciones matemáticas que componen el razonamiento. Aunque las afirmaciones matemáticas asociadas a las subconfiguraciones identificadas pueden no ser válidas (no demostradas previamente), no impide la construcción de un proceso deductivo que desemboca en una conclusión. Por tanto, el cambio de estatus de las afirmaciones involucradas en el desarrollo de la prueba es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el razonamiento configural desemboque en una solución válida.

Por otro lado, respecto a los modos de expansión del discurso y en consonancia con los resultados de Robotti (2012), tenemos que: (1) el modo de "acumulación" se relaciona directamente con afirmaciones enunciadas para recabar información (enunciado o de la subconfiguración identificada) sin importar la que sea ni el orden en el que se obtiene, careciendo, por tanto, de valor lógico. En cambio, cuando se da (2) el modo de "sustitución", las afirmaciones matemáticas forman parte de un proceso lógico-deductivo, aunque en el caso presentado, basado en conjeturas no demostradas previamente. Las afirmaciones matemáticas establecidas durante la "fase de acumulación" son necesarias para iniciar el razonamiento, aunque para concluirlo se ha de manifestar la fase de "sustitución", en el que las afirmaciones adquieren un valor lógico.

En consecuencia, para generar un razonamiento que finalice en una solución, son necesarios tanto un cambio de estatus en las afirmaciones involucradas en el discurso, como un proceso de argumentación (proceso discursivo) que vaya desde el modo de acumulación al de sustitución. Sin embargo, puede no ser suficiente la acumulación de información y el cambio de estatus de las afirmaciones geométricas para concluir con éxito el problema, ya que la subconfiguración relevante desempeña un papel importante en el proceso de razonamiento. Por tanto, el cambio de estatus de los hechos geométricos acumulados o derivados de las hipótesis del problema no garantizan que se dé el "truncamiento" del razonamiento configural que genera la prueba formal. En este sentido, la argumentación se presenta como un nexo o enlace entre los diferentes ciclos de aprehensiones discursivas y operativas y el discurso generado en la resolución de problemas de prueba en contexto geométrico, hecho que sería interesante desarrollar en trabajos posteriores.

Referencias

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.

Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el "truncamiento" del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM

Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 9-27.

Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2015). La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México, 2015.

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática*, *v.31, nº 57*, 497-516.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.

Duval, R. (1999b). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Duval, R. (2016a). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-61). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

Duval, R. (2016b). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 234-250.

Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(3), 339-368.

Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 433-45.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28(*3), 327-340.

EVOLUCIÓN DE LA MIRADA PROFESIONAL: CAMBIOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Evolution of the professional noticing: Changes in prospectives' Primary teachers discourse

Zapatera, A.[a], Callejo, M.L.[b] y Badillo, E.[c]

[a]Universidad CEU Cardenal Herrera (Elche), [b]Universitat d'Alacant,
[c]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de esta comunicación es estudiar los cambios que se producen en el discurso de los estudiantes para maestro (EPM), a lo largo de un módulo de enseñanza, como evidencias del desarrollo de la mirada profesional. El análisis del discurso, en cada una de las fases del módulo, se focaliza en la codificación de términos especializados, los tipos de expresiones utilizadas, descriptivas o interpretativas, y los tipos de conectores usados por los EPM cuando resuelven tareas profesionales. Hemos identificado tres tipos de discurso: descriptivo, retórico y profesional. Los resultados constatan que la mayoría de EPM, muestran algunas evidencias de progreso, pasando de discursos descriptivos a discursos con matices profesionales.

Palabras clave: *discurso, mirada profesional, generalización de patrones, estudiantes para maestro.*

Abstract

The objective of this communication is to study the changes in the discourse of the PPT, throughout the teaching module, as evidences of the development of the professional noticing. The analysis of the discourse, in each of the phases of the module, focuses on the codification of specialized terms, descriptive or interpretive expressions and types of connectors, used by the PPT in the narratives that they construct when they solve professional tasks. We have found three types of discourse: descriptive, rhetorical and professional. The results show that the majority of PPT show some evidence of progress, moving from descriptive discourse to discourses with professional nuances.

Keywords: *discourse, professional noticing, pattern generalization, prospective Primary teachers.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

En los últimos años, las investigaciones en didáctica de la matemática centradas en el desarrollo profesional han señalado la importancia de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos. Dada la relevancia de esta competencia, se ha convertido en uno de los objetivos de los programas de formación de profesores (Sherin, Jacobs y Phillip, 2011). Para Jacobs, Lamb y Phillip (2010) una mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes implica saber identificar lo que es importante o significativo en las producciones de los estudiantes; interpretar la comprensión puesta de manifiesto; y, por último, decidir cómo actuar teniendo en cuenta esta comprensión.

Algunas investigaciones señalan que un indicador del desarrollo de la mirada profesional de los EPM es la forma del discurso que usan (Llinares, 2012). Dentro del discurso se puede observar la calidad cognitiva, entendida como una manifestación de la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. Esta calidad cognitiva se manifiesta por la integración en el discurso, por parte de los EPM, de las ideas teóricas de didáctica de la matemática cuando están resolviendo tareas profesionales.

Zapatera A., Callejo M.L y Badillo E. (2017). Evolución de la mirada profesional: cambios en el discurso de estudiantes para maestro. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 477-486). Zaragoza: SEIEM.

Fortuny y Rodríguez (2012), en su investigación sobre cómo los profesores aprenden a mirar con sentido e interpretar las interacciones de clase, observaron que los EPM, como medida para reforzar su discurso, usaban los conocimientos teóricos que habían aprendido. En la misma línea, Llinares (2012) profundizó en la construcción del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas de los EPM, centrándose en el análisis de las estructuras argumentativas que ponen en juego estos estudiantes al enfrentarse a tareas profesionales. Los resultados de este estudio señalan que una mayor calidad en las argumentaciones estuvo vinculada al hecho de que los EPM utilizaran la información teórica proporcionada para identificar e interpretar los sucesos de la clase de matemáticas y para realizar propuestas de acción. De este modo, el uso de los conocimientos teóricos en el discurso es también un indicador de desarrollo de la mirada profesional.

Pimm (1990) afirma que existen varios niveles de formalización del discurso, dependiendo del registro que se utilice. Define el registro como un conjunto de significados apropiados para una determinada función del lenguaje, con palabras y estructuras que expresan estos significados. En el caso del discurso matemático, se usan términos especializados que son palabras que no se suelen encontrar en un contexto no matemático. Se considera que en la medida en que se empleen en el discurso más palabras matemáticas especializadas será más rico el registro matemático. Este registro matemático está constituido, no solo por el simple uso de términos especializados, sino también por el uso adecuado y coherente de estos términos mediante expresiones interpretativas y ciertos modos característicos de argumentar (riqueza de conectores). De esta manera, el uso de un discurso con un registro matemático es una evidencia de desarrollo de la mirada profesional.

Nemirovsky, Di Mattia, Ribeiro y Meloy (2005) estudiaron el discurso que utilizaban maestros en activo y futuros maestros cuando analizaban videoclips de situaciones de aula. Los resultados de su estudio muestran que los participantes que usaban un discurso evaluativo; es decir, centrado en las interpretaciones, utilizan un lenguaje más explicativo con el uso de conectores causales como “porque” o “ya que” en sus comentarios.

Algunas investigaciones han estudiado el tipo de discurso que emplean maestros en activo y en formación cuando relatan situaciones de enseñanza-aprendizaje. Van Es (2011), Nemirovsky et al. (2005) y Llinares y Valls (2009) han distinguido varios niveles. Los tipos de discurso iban desde los niveles bajos en los que los comentarios eran pobres argumentativamente hablando y se basaban en impresiones descriptivas, a los niveles altos en los que los comentarios se basaban en la observación de aspectos cognitivos, usándolos como evidencia en sus interpretaciones y explicaciones e incorporando propuestas didácticas.

En nuestro trabajo hemos analizado el discurso que emplean EPM respondiendo a tres cuestiones profesionales en el tópico de la generalización de patrones con sucesiones compuestas por figuras. En este tópico juegan un papel relevante tres elementos matemáticos: estructuras numérica y espacial de la sucesión; relación funcional entre el lugar que ocupa un término de la sucesión y el número de elementos que lo componen; y, relación funcional inversa o relación entre el número de elementos de un término y su lugar en la sucesión. Los elementos cognitivos asociados a los mismos son: coordinación entre las estructuras espacial y numérica; pensamiento funcional y reversibilidad del pensamiento funcional (Radford, 2010; Merino, Cañadas y Molina, 2013). Estos elementos matemáticos y cognitivos permiten identificar tres estadios de la comprensión de la generalización de patrones en los alumnos de Primaria, que permiten caracterizar una trayectoria de aprendizaje sobre la generalización de patrones (Callejo y Zapatera, 2016; Zapatera y Callejo, 2013) (Figura 1).

El discurso puede analizarse como medio que comunica contenidos desde un enfoque comunicativo o como finalidad desde un enfoque discursivo en el que se persiguen objetivos; es decir, desde un qué o desde un para qué. En nuestra investigación, al tratarse de un estudio sobre la mirada profesional, vamos a focalizar nuestro propósito en la finalidad del discurso de los EPM; es decir, en qué interpretan de las respuestas de los estudiantes y en qué acciones de mejora proponen. Desde esta perspectiva, el

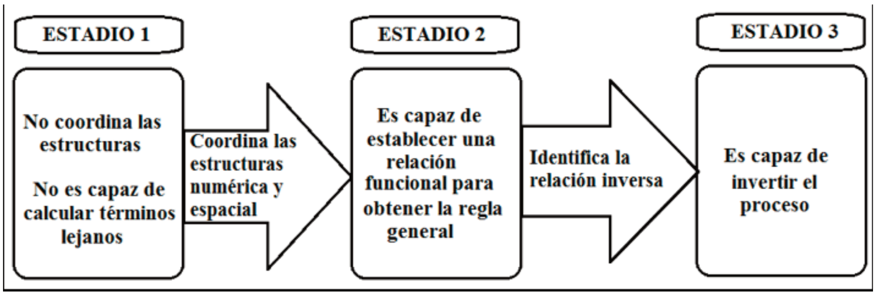


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje de la comprensión de la generalización de patrones

objetivo de esta comunicación es identificar cómo evoluciona el discurso de un grupo de EPM que participa en un módulo de enseñanza, en relación al uso que hacen del conocimiento de didáctica de la matemática para interpretar las respuestas de alumnos de Primaria y proponer acciones para que progresen en el aprendizaje.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 20 EPM de tercer curso del Grado de Educación Primaria en la asignatura "Aprendizaje y didáctica de las matemáticas". Este estudio se enmarca en un módulo de enseñanza sobre la generalización de patrones que constó de siete sesiones.

El objetivo del módulo de enseñanza era construir conocimiento de didáctica de la matemática para desarrollar las destrezas de la mirada profesional. Para ello, tras la sesión inicial, se proporcionó a los EPM información teórica sobre los elementos relevantes en la generalización de patrones, tanto matemáticos (estructuras espacial y numérica, relación funcional y relación funcional inversa) como cognitivos (coordinación entre estructuras, pensamiento funcional y reversibilidad del pensamiento funcional) (Radford, 2010). También se les dio a conocer una posible trayectoria de aprendizaje del proceso de generalización de patrones que se apoyaba en estos elementos y que comprendía tres estadios (Callejo y Zapatera, 2016; Zapatera y Callejo, 2013).

A los EPM se les pidió analizar respuestas de tres alumnos de Primaria a problemas que ellos habían resuelto previamente. En concreto debían responder a tres cuestiones profesionales: (1) describe las respuestas de los tres estudiantes de Primaria; (2) interpreta las respuestas de los tres estudiantes de Primaria e indica el nivel de comprensión de la generalización de patrones de cada uno de estos estudiantes; y, (3) a partir de la interpretación que has hecho de los tres estudiantes de Primaria, propón alguna tarea concreta que le ayude a mejorar o ampliar su nivel de comprensión

Durante el desarrollo del módulo, el texto escrito por los EPM respondiendo a las tres cuestiones profesionales, desempeñó el papel de 'artefacto semiótico' que apoya la reflexión y revisión recursiva, que es una característica importante de la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (Wells, 2002). En la primera sesión los EPM analizaron las respuestas de tres alumnos de Primaria a un problema y respondieron a las cuestiones profesionales antes expuestas. Para ello, disponían solo de la información de los elementos relevantes, tanto matemáticos como cognitivos de la generalización de patrones, que se habían puesto de relieve en una puesta en común de sus propias resoluciones del problema. En las sesiones intermedias reconstruyeron los textos de la primera sesión con la información sistemática que se les fue proporcionando de los elementos relevantes y de la trayectoria de aprendizaje. En la última sesión analizaron las respuestas de tres alumnos de Primaria a otro problema.

Recogida y análisis de datos

Los datos para obtener evidencias de cómo evoluciona el discurso de los EPM a lo largo del módulo de enseñanza se recogen en tres momentos: momento inicial (respuestas al cuestionario inicial), momentos de reconstrucción (reconstrucciones a las respuestas del cuestionario inicial) y momento final (respuestas al cuestionario final). La Figura 2 muestra el problema del cuestionario final y las respuestas de un alumno de Primaria.

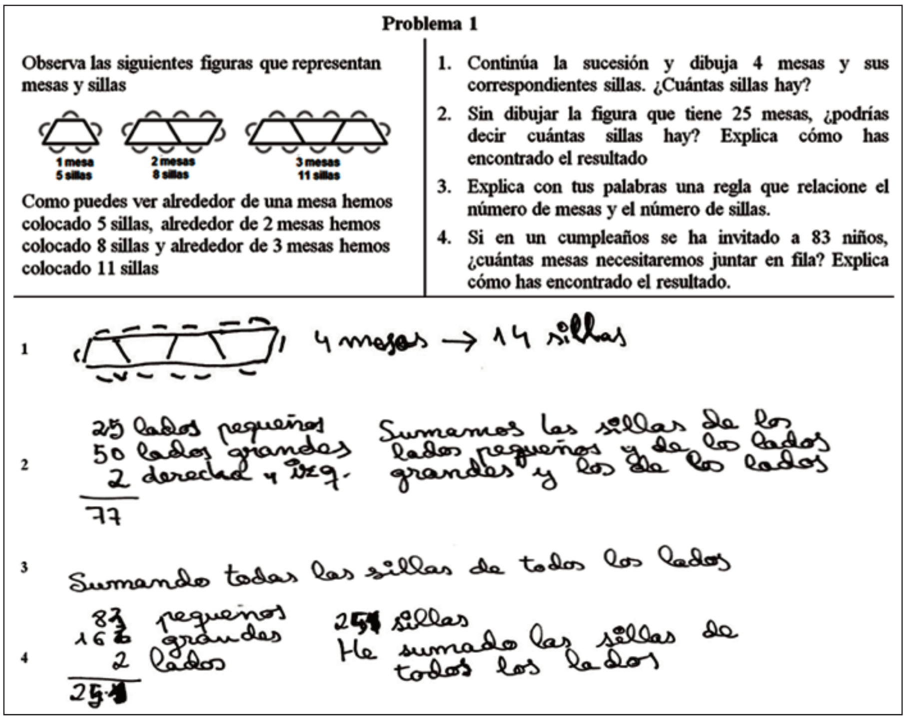


Figura 2. Problema y respuestas de un alumno de Primaria

Aplicando el método de comparación constante (Strauss y Corbin, 1994), pudimos identificar en las respuestas de los EPM algunas características de su discurso. Para asegurar la validez y fiabilidad del análisis, un grupo de tres investigadores analizaron primero una pequeña muestra y discutieron las codificaciones y las relaciones entre las evidencias y las codificaciones. Una vez que los investigadores llegaron a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar los códigos y descriptores creados inicialmente. Con este procedimiento y apoyándonos en investigaciones previas (Nemirovsky et al., 2005; Llinares y Valls, 2009; van Es, 2011) identificamos tres tipos de discurso: (1) descriptivo, (2) retórico y (3) profesional.

En esta investigación vamos a analizar el discurso desde el enfoque discursivo que tiene como objetivo comunicar un "qué" y un "para qué". El "qué" sería el contenido matemático que comunica el discurso relacionado con la generalización de patrones y está explícito en lo que el EPM escribe. Por otro lado, está el "para qué" que sería la finalidad que persigue el EPM con su discurso vinculado a la mirada profesional y está de una forma más implícita. Dentro del discurso que vamos a analizar, que es el que escriben los EPM, hay dos "subdiscursos" disciplinares, el discurso de la generalización de patrones y el de la mirada profesional.

El discurso descriptivo se caracteriza por la no utilización de términos especializados, el uso de expresiones descriptivas, centrarse en la corrección y el empleo de conectores temporales. En dicho discurso se describe lo que hace el alumno en relación a las matemáticas que usa para resolver el problema, es decir, el qué. Sin embargo, no hace referencia al para qué, es decir, la finalidad que tiene vinculada la competencia docente de la mirada profesional. Un ejemplo de discurso descriptivo es: "*Ha dibujado 4 mesas juntas y ha colocado una silla en cada uno de los lados. Después ha sumado dos veces el número de mesas que hay (52+52) y luego ha sumado 2*". En este comentario se puede observar que el EPM se limita a describir paso a paso la respuesta del alumno sin realizar interpretaciones.

En el discurso retórico se utilizan términos especializados pero estos no son usados de forma coherente para explicar el pensamiento de los alumnos. En este discurso se comunican términos especializados, mayoritariamente de la generalización de patrones y en menor medida de la mirada profesional. La finalidad que el EPM persigue en este tipo de discurso es comunicar que está reconociendo los elementos matemáticos y cognitivos presentes en la resolución. De esta forma, con el discurso retórico el EPM comunica lo que reconoce. Un ejemplo de discurso retórico es: "*La estructura numérica es la correcta, es capaz de dibujar y enumerar todo. La relación funcional que establece y su posterior explicación son buenas por lo tanto está muy bien explicado que las mesas las multiplica por 3 sillas y añade 2 de la primera mesa. Por último está correcta la relación o proceso inverso que hace la niña cuando resta las sillas del primero y divide para averiguar qué figura le pide*". En él podemos observar cómo hace referencia a algunos términos especializados como la estructura numérica, la relación funcional o el proceso inverso, pero no es capaz de mostrar evidencias en sus explicaciones.

Por último, el discurso profesional se caracteriza por el uso de expresiones interpretativas cohesionadas con varios tipos de conectores, y también se utilizan términos especializados para justificar y explicar el pensamiento de los alumnos. En el discurso profesional se puede observar la finalidad que subyace de la mirada profesional puesto que, desde un enfoque discursivo, el EPM da detalles de la cómo interpreta el pensamiento de los alumnos de Primaria. Un ejemplo de discurso profesional es: "*Andrés ha dibujado las mesas separadas, por lo que vemos que no hay una estructura espacial, pero sí observamos una estructura numérica de conteo de sillas. Debido a no haber sabido plasmar una estructura espacial, no puede llegar a un resultado correcto o una fórmula correcta pero si establece una relación funcional, el número de mesas por el de sillas. Al no poder llegar a un razonamiento anterior lógico, le es imposible hacer este proceso inverso y no identifica la relación inversa. Andrés se encuentra en el estadio 1 porque aunque encuentre relación entre unas cosas y otras, al no ser capaz de llegar a una estructura espacial no puede avanzar correctamente*". En este comentario se puede apreciar cómo el EPM nombra términos especializados y cómo, apoyándose en ellos, interpreta el pensamiento del alumno de Primaria. Esto se puede observar en el uso de frases, en las que empleando conectores, relaciona las dificultades con los aspectos cognitivos.

El procedimiento de análisis de datos se desarrolló en cuatro fases: (1) transcripción de las respuestas de los EPM a cada ítem del cuestionario; (2) fragmentación de las transcripciones; (3) análisis del discurso en cada fragmento focalizando el análisis en los registros matemáticos y de mirada profesional; y, (4) caracterización del discurso en cada momento.

Tras la transcripción y la fragmentación, en la tercera fase se focalizó la atención en el uso de términos especializados, las expresiones que utilizaban y los conectores que empleaban (Pimm, 1990). Dentro de los términos especializados distinguimos dos clases. Los relacionados con los elementos matemáticos y cognitivos ("estructura espacial y numérica", "relación funcional", "proceso inverso", "generalización cercana y lejana"…). Además de los vinculados a la mirada profesional ("trayectoria de aprendizaje", "salto cognitivo", "comprensión", "ser capaz de identificar"…). Una vez que se localizaba un término especializado se analizaba el contexto en el que se utilizaba y si dicho término se usaba para explicar y justificar el pensamiento del alumno de Primaria. Este análisis se focaliza en las expresiones interpretativas que se apoyaban en conectores causales ("dado que", "porque"…), de finalidad ("para que"…), temporales ("luego"…), de contraste ("aunque"…) o explicativos ("es decir"…). Por último, en la cuarta fase, se ha clasificado cada momento según el tipo discurso que utilizaba: descriptivo, retórico o profesional.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran un cambio en el tipo discurso que emplean los EPM en cada momento del módulo de enseñanza, como se observa en la Tabla 1. Hemos encontrado evidencias de evolución desde un discurso inicial mayoritariamente descriptivo, a un discurso final retórico o profesional.

Tabla 1. Número de EPM en cada tipo discurso por momentos

	Descriptivo	Retórico	Profesional
Momento inicial	17	3	0
Momento reconstrucción	0	18	2
Momento final	0	8	12

En la Tabla 2 podemos observar que hubo cambio de discurso en todos los EPM.

Tabla 2. Tipo discurso en momento inicial y final

Descriptivo-Retórico	8
Descriptivo-Profesional	10
Retórico-Profesional	2

A continuación mostramos el análisis de los fragmentos de las respuestas del EPM-4. Este EPM en el momento inicial utiliza un discurso descriptivo, en la reconstrucción un discurso retórico y en el momento final un discurso profesional.

Momento inicial

[F1] *Esta alumna en los dos problemas ha realizado el dibujo y ha puesto la solución al problema. Luego ha realizado una suma y ha descrito como ha llegado a esa respuesta. De la misma forma en el apartado tres, ha explicado el proceso del ejercicio anterior. Por último ha intentado hacer el cuarto apartado pero no ha sabido hacerlo y el resultado es incorrecto.*

[F2] *Blanca ha sabido resolver bien los todo el problema menos la última pregunta porque no la habrá entendido bien o se habrá confundido.*

[F3] *Para que Blanca pudiera entender en qué se ha equivocado le explicaría paso a paso el problema y haría otros problemas parecidos para que ella los resolviera sola y demostrara que lo ha entendido.*

En el momento inicial el EPM-4 se limita a describir las respuestas de la alumna utilizando un discurso descriptivo. En el fragmento 1 escribe que "*ha realizado el dibujo y ha puesto la solución al problema. Luego ha realizado una suma y ha descrito […] ha explicado el proceso […] no ha sabido hacerlo y el resultado es incorrecto*", relata apartado a apartado las respuestas de la alumna de Primaria limitándose a narrar lo que ha hecho la alumna de Primaria. En el segundo fragmento detecta que Blanca se ha equivocado en "*la última pregunta*" pero no explica el porqué y se limita a decir que "*porque no la habrá entendido bien o se habrá confundido*". Por último, en el tercer fragmento el EPM-4 no propone ninguna acción concreta para mejorar la comprensión de la alumna y solo comenta que "*le explicaría paso a paso el problema y haría otros problemas parecidos*". En resumen, el discurso del EPM-4 es descriptivo puesto que simplemente relata paso a paso lo que hace la alumna de Primaria sin entrar a valorar ni interpretar la comprensión de dicha alumna.

Momento Reconstrucción

A continuación se muestra la transcripción del momento de la reconstrucción donde se representan en negrita las palabras que ha subrayado y entre paréntesis y en negrita sin cursiva las palabras y frases que ha incorporado.

[F1] *Esta alumna en los dos problemas* ***ha realizado el dibujo*** (**<u>estructura espacial</u>**) *y ha puesto la solución al problema. Luego ha realizado una suma y ha descrito como ha llegado a esa respuesta. De la misma forma en el apartado tres, ha explicado el proceso del ejercicio anterior* (**<u>relación funcional</u>**). *Por último ha intentado hacer* ***el cuarto apartado*** (**<u>proceso inverso</u>**) *pero no ha sabido hacerlo y el resultado es incorrecto.*

[F2] *Blanca ha sabido resolver bien todo el problema menos la última pregunta porque no la habrá entendido bien o se habrá confundido.* (**Falla en el proceso inverso por eso está en el estadio 2**)

[F3] *Para que Blanca pudiera entender en qué se ha equivocado le explicaría paso a paso el problema y haría otros problemas parecidos para que ella los resolviera sola y demostrara que lo ha entendido.*

[F4] **Blanca está en el estadio 2 y para avanzar en la trayectoria de aprendizaje tiene que dar el salto cognitivo para pasar al estadio 3. Para ello tiene que repasar actividades en las que se trabaje el proceso inverso.**

El EPM-4 centra la reconstrucción de sus respuestas iniciales en subrayar las ideas que considera más importantes etiquetándolas con términos especializados y añadiendo un párrafo final para completar la propuesta de acciones. Al etiquetar las ideas demuestra un enriquecimiento en su vocabulario, utilizando numerosos términos especializados que evidencian un mayor conocimiento matemático. Los términos especializados que utiliza son propios de la generalización de patrones ("*estructura espacial*", "*relación funcional*", "*proceso inverso*") y también de la mirada profesional ("*trayectoria de aprendizaje*" o "*salto cognitivo*"). Los términos especializados referentes a la mirada profesional los emplea en el párrafo final en el que justifica la propuesta de mejora inicial utilizando estos términos pero de una forma retórica, sin concretar las tareas a realizar ni justificar sus comentarios. En este momento de reconstrucción se puede observar que el EPM ha mejorado su discurso añadiendo a sus comentarios términos especializados, pero se limita a nombrarlos y comentarlos de forma retórica ya que no los utiliza para fundamentar sus interpretaciones y explica el pensamiento de la alumna. Con este discurso retórico el EPM-4 pretende comunicar que se está reconociendo la matemática que la alumna de Primaria está utilizando para resolver los problemas.

Momento Final

[F1] *"Berta dibuja y cuenta bien las mesas y las sillas por lo que respeta las estructuras espacial y numérica. Al continuar la serie de manera adecuada consigue llegar la generalización cercana.*

[F2] *Al tener bien las estructuras y coordinarlas es capaz de establecer la relación funcional y consigue la generalización lejana.*

[F3] *En último apartado es cuando Berta tiene dificultades ya que no es capaz de invertir la relación funcional. Berta no sabe realizar el proceso inverso ya que sigue el mismo procedimiento que en los apartados anteriores.*

[F4] *Berta estaría en el estadio 2 ya que es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica y de establecer una relación funcional entre las mesas y las sillas pero no sabe hacer el proceso inverso.*

[F5] *El error de la alumna es que no es capaz de realizar el proceso inverso por ello hay que reforzar esto. El salto cognitivo para pasar del estadio 2 al estadio 3 es ser capaz de invertir la relación funcional. Las tareas que le propondría a Berta para mejorar su comprensión sería actividades en las que se trabaje la el proceso inverso y para ello podríamos utilizar las mesas y sillas de clase. También insistiría en que la operación inversa de la suma es la resta y de la multiplicación es la división.*

El discurso del EPM-4 en el momento final es más profesional al utilizar términos especializados de forma coherente siendo su discurso fundamentalmente interpretativo ya que argumenta sus conclusiones. Los términos especializados están relacionados tanto con la generalización de patrones ("*estructura espacial y numérica*", "*relación funcional*" y "*proceso inverso*", "*generalizaciones cercanas*" y "*generalización lejana*") como con la mirada profesional. ("*no es capaz de invertir*", "*comprensión*" o "*salto cognitivo*"). En sus comentarios encontramos varias expresiones interpretativas en las que justifican y explican sus ideas a partir de los términos especializados mencionados. Por ejemplo, en el fragmento 1 observa que Berta es capaz de identificar con éxito las estructuras espacial y numérica y utiliza este hecho en el fragmento 2 para justificar que "*al coordinarlas es capaz de establecer la relación funcional*" y vincula este hecho con que "*consigue la generalización lejana*". En el fragmento 3 identifica la dificultad que tiene Berta "*ya que no es capaz de invertir la relación funcional*" y explica el porqué de esta dificultado cuando comenta que "*no sabe realizar el proceso inverso ya que sigue el mismo procedimiento que en los apartados anteriores*". En este fragmento 3, se puede observar que también utiliza una expresión interpretativa ya que relaciona el no saber hacer el proceso inverso con el fallo que comete la alumna de Primaria. En el cuarto fragmento asigna un estadio de comprensión adecuado y lo justifica enumerando las características propias del pensamiento de Berta. En el último fragmento, propone tareas para superar la dificultad observada en el proceso inverso ("*no es capaz de realizar el proceso inverso por ello hay que reforzar esto*") y para avanzar en la trayectoria de aprendizaje y pasar al siguiente estadio ("*salto cognitivo*"). Además, concreta que el tipo de actividades deben ser más visuales y para ello sugiere utilizar "*mesas y sillas de la clase*" y además propone hacer actividades en las que la alumna se dé cuenta de la relación inversa entre suma-resta y multiplicación-división al comentar que "*insistiría en que la operación inversa de la suma es la resta y de la multiplicación es la división*". El EPM-4 utiliza un discurso profesional con el que comunica términos especializados tanto de la generalización de patrones y de la mirada profesional y emplea varios conectores con los que construye argumentaciones en las que interpreta el pensamiento de la alumna de Primaria.

Las respuestas de este EPM en los tres momentos, inicial, reconstrucción y final, evidencian su progreso en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos. Este progreso se observa de forma explícita en el discurso utilizado: (1) en el momento inicial, su discurso es descriptivo puesto que se limita a relatar las respuestas del alumno usando expresiones descriptivas sin utilizar términos especializados de la generalización de patrones o de la mirada profesional; (2) en la reconstrucción el discurso es más retórico, nombrando términos especializados aunque no los utiliza para explicar la comprensión del alumno y apenas utiliza conectores; y, (3) el discurso en el momento final puede ser considerado como profesional porque, además de nombrar términos especializados, los usa para explicar la comprensión del alumno de Primaria. Este discurso se caracteriza por utilizar la información teórica proporcionada en el módulo de enseñanza mediante expresiones interpretativas con varios tipos de conectores para justificar todas sus observaciones.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es identificar cómo evoluciona el discurso de un grupo de EPM que participa en un módulo de enseñanza, en relación al uso que hacen del conocimiento de didáctica de las matemáticas para interpretar las respuestas de alumnos de Primaria.

Los resultados muestran una evolución en el discurso empleado por los EPM en cada uno de los momentos del módulo de enseñanza. En el momento inicial la gran mayoría de EPM usa un discurso descriptivo pues se limita a describir sin realizar interpretaciones sobre el pensamiento de los alumnos de Primaria. En el momento de reconstrucción la mayoría usa términos especializados e ideas teóricas en su discurso pero de una forma retórica, ya que no establece relaciones entre las ideas y las evidencias del pensamiento de los alumnos. Por último, en el momento final la mayoría emplea un discurso profesional puesto que usa las ideas teóricas para explicar el pensamiento matemático de los alumnos. En concreto, 10 EPM pasan de un discurso descriptivo en el momento inicial a un discurso profesional en el momento final. Esta evolución está vinculada al aumento gradual del uso de la información teórica para identificar e interpretar el pensamiento de los alumnos y para proponer acciones de mejora. De esta manera, coincidimos con Llinares (2012, p. 60) en que:

> La información teórica proporcionada ayudó a los estudiantes para maestro a empezar a "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas. Es decir, el uso de la información teórica en la resolución de la tarea propuesta fue lo que permitió caracterizar diferentes niveles de construcción del conocimiento y de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido"

En el discurso profesional que utilizan los EPM se puede observar un enfoque discursivo puesto que son capaces de explicar el "qué" y el "para qué" en su discurso. En este discurso se observa cómo asocian lo matemático, desde el punto de vista de la generalización de patrones, con lo cognitivo y didáctico, desde la perspectiva de la mirada profesional. Esta observación coincide con Arnal y Planas (2013) que señalan la necesidad de fortalecer la relación entre lo matemático y lo didáctico.

Según Pimm (1990) los términos especializados son indicadores de un dominio del registro matemático. Nuestros resultados muestran que los EPM que son capaces de usar correctamente términos especializados para fundamentar sus interpretaciones son aquellos que emplean un discurso profesional. Además, el uso de términos especializados de la mirada profesional ayudan a identificar el "para qué" del discurso de los EPM

La naturaleza del conector depende del contexto en el que se utiliza. Nuestros resultados señalan que si en ambos lados del conector hay términos especializados, ello es una evidencia del discurso profesional. De esta manera, los conectores se pueden utilizar para describir la calidad de las argumentaciones. Nuestros resultados coinciden con los de Nemirovsky et al. (2005) ya que los EPM que utilizan un discurso profesional hacen uso de conectores causales en sus comentarios.

Los resultados indican que los EPM han evidenciado progresos en sus discursos a lo largo del módulo pasando de un discurso descriptivo a un discurso profesional. Este resultado muestra que el hecho de participar en un modulo de enseñanza ayuda a que los EPM desarrollen su mirada profesional (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015). Es por ello que si queremos que los EPM desarrollen su mirada profesional, es necesario que en su formación inicial se incorporen situaciones que potencien las destrezas de la mirada profesional, para luego mejorar su desarrollo profesional (Fortuny y Rodríguez, 2012).

Reconocimientos: Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R, EDU2015-65378-P y EDU2016-81994-REDT financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

Agradecimientos: A la Dra. Núria Planas y al Grup d'Investigació GIPEAM de la Universitat Autònoma de Barcelona por sus aportaciones e ideas para avanzar en esta investigación.

Referencias

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En, A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.

Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática, 1*, 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb. L.C., y Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM Avances de Investigación en educación Matemática, 2*, 53-70.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*(2), 247-271.

Merino, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En, A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Nemirovsky, R., DiMattia, C., Ribeiro, B. y Lara-Meloy, T. (2005). Talking about teaching episodes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(5), 363-392.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, R.A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En, N. K. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273–285). Thousand Oaks: Sage.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En, M.G. Sherin, V. Jacobs y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge: New York.

Wells, G. (2002). *Dialogic inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En, A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

PÓSTERES

METODOLOGÍAS ACTIVAS Y SU RELACIÓN CON LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Active methodologies and their relationship with attitudes towards Statistics in the Secondary School

Amador-Saelices, M.V.[a] y Montejo-Gámez, J.[b]

Colegio Legamar (Leganés)[a], Universidad de Córdoba[b]

Se presenta una investigación que explora la idoneidad de una propuesta didáctica basada en metodologías activas para introducir la estadística en alumnos del segundo curso de educación secundaria, que fue llevada a cabo en el Colegio Legamar de Leganés (Madrid). Autores como Batanero y Díaz (2004) señalan la poca pertinencia de proponer ejercicios estadísticos descontextualizados, hecho que se ha constatado durante nuestra experiencia docente en la que los estudiantes no vieron el sentido a los conceptos y procedimientos que se trabajan habitualmente en el aula. Esta situación propició el diseño de una propuesta didáctica orientada a una comprensión global de las técnicas estadísticas y su aplicación para resolver problemas reales, en la que los alumnos fueron protagonistas de su propio conocimiento. La adecuación de este diseño de instrucción se analizó desde una doble perspectiva: por una parte la evolución de las actitudes hacia la estadística que muestra el alumnado y por otra el rendimiento en la asignatura, cuya relación da una medida de la idoneidad de la propuesta didáctica empleada e indicios sobre posibles mejoras.

Para completar esta investigación se conjugaron elementos cuantitativos y cualitativos. El análisis cuantitativo, que permitió dar una visión de conjunto, se materializó midiendo las actitudes hacia la estadística utilizando la escala propuesta por Auzmendi (1992) y a través de un diseño experimental pretest-postest. Los resultados de esta exploración se relacionaron con las calificaciones académicas del alumnado, siguiendo ideas similares a las de Mato y De la Torre (2009), y dando una idea general de la pertinencia de la instrucción seguida. El análisis cualitativo permitió profundizar en los resultados obtenidos, lo que condujo al análisis las necesidades formativas observadas en los estudiantes y las causas de los resultados obtenidos.

Finalmente se discuten las ventajas e inconvenientes de la propuesta didáctica implementada, que incluye el debate sobre la idoneidad del uso de escalas ordinales cerradas con alumnos de educación secundaria y sobre las posibilidades que ofrece un análisis de estas características para el desarrollo de un experimento de enseñanza que conduzca a la optimización de las tareas de instrucción planteadas.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Bilbao, España: Ediciones Mensajero.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE

Mato, M. D. y De la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 285-300). Santander: SEIEM.

Amador-Saelices, M.V. y Montejo-Gámez, J. (2017). Metodologías activas y su relación con las actitudes hacia la Estadística en Educación Secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 489). Zaragoza: SEIEM.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES
EN PROYECTOS DE ESTADÍSTICA

Multiple Intelligences in Statistical Projects

Anasagasti, J.

Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco

En este póster se presentan los resultados de investigación relacionados con la teoría de la Inteligencias Múltiples (IM) dentro de un trabajo más amplio que analiza cómo el futuro profesorado de Educación Primaria adquiere las competencias profesionales del bloque curricular de Tratamiento de la información, azar y probabilidad, a través del Aprendizaje Basado en Proyectos (Project Based Learning, PBL). En particular, se pretende analizar si la inclusión de recursos didácticos adaptados al tipo de IM del alumnado influye en la mejora de su competencia estadística de modo significativo.

Una de las tres maneras positivas de aplicar en las escuelas la teoría de las IM de Gardner (2012) es la personalización de la educación. Partiendo de esta idea, se ha adaptado a los distintos tipos de IM un módulo diseñado específicamente para el trabajo de la Estadística a través del PBL (Anasagasti y Berciano, 2016). Dicho módulo se ha implementado en un grupo de investigación con 69 futuros maestros (estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria), en el que para identificar los tipos de inteligencia de cada estudiante se ha utilizado el cuestionario de Armstrong (2006).

Con el fin de analizar la repercusión de la metodología docente implementada (basada en la adquisición de las competencias) y medir hipotéticas diferencias en los resultados dependiendo del tipo de inteligencia, se ha adaptado un test a partir del propuesto por Anasagasti y Berciano (2012), que tiene en cuenta y mide las aptitudes imprescindibles que debe dominar un maestro de Educación Primaria en cuanto a Estadística.

Tras la implementación del curso y análisis del test, usado como pre-test y post-test, los resultados indican que la competencia estadística mejora significativamente, pero esta mejora no depende significativamente de los tipos de IM detectados.

Referencias

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos, Revista de Educación*, vol. (Extra 1), 31-43.

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2012). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de primaria: conocimiento de conceptos básicos de estadística. En A. Estepa Castro, Á. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, M. C. Penalva Martínez, F. J. García García, L. Ordóñez Cañada (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI (SEIEM)*, Baeza: SEIEM, pp. 113-122.

Armstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula. Guía práctica para educadores*. Barcelona, España: Paidós Educador.

Gardner, H. (2012). *El desarrollo y la educación de la mente*. Barcelona, España: Paidós.

Anasagasti, J. (2017). Inteligencias múltiples en proyectos de Estadística. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 491). Zaragoza: SEIEM.

USO DE APPLETS E INTERACCIÓN ENTRE IGUALES PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA COMO LÍMITE

Applet's Use and Interaction among Peers to Favour the Comprehension of Definited Integral Concept as a Limit

Aranda, C.[a] y Callejo, M.L.[b]

[a]IES Número 3 La Vila Joiosa, [b]Universidad de Alicante

En esta comunicación se presenta una innovación en 2º de Bachillerato (17-18 años) que tiene como objetivo favorecer la comprensión del concepto de integral definida. Las tareas fueron diseñadas atendiendo a una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de integral definida, considerando las fases de construcción de este concepto apoyadas en la abstracción reflexiva (Simon y Tzur, 2004). En la misma se ha tenido en cuenta las investigaciones que proponen introducir este concepto a partir del problema de calcular el área bajo una curva, primando así su génesis histórica (Turégano, 1998). Una guía de trabajo daba indicaciones a los estudiantes, que trabajaban por parejas, para usar *applets* diseñados ad hoc (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006) y hojas de cálculo, para favorecer la experimentación y la interacción entre iguales.

En los *applets*, junto a la gráfica de una función, había varias casillas de control para exponer/ocultar objetos, así como un deslizador con el que se podía cambiar el número de puntos de la partición, el número de subintervalos y su longitud. De esta forma se buscaba que los estudiantes relacionasen distintas representaciones del concepto.

La forma de presentar las tareas, invitando a la experimentación y a reflexionar sobre los resultados de la misma, visualizando simultáneamente distintas representaciones, así como la interacción verbal entre las parejas de estudiantes, facilitó la comprensión conceptual (Aranda y Callejo, 2017; Camacho, Santos y Depool, 2013).

Referencias

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2017). Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias 35*(1), 157-174.

Camacho, M., Santos, M. y Depool, R. (2013) La resolución de problemas, tecnología y comprensión del concepto de integral definida. Una investigación con estudiantes de ingeniería. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 63*, 50-68.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An Elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2017). Uso de applets e interacción entre iguales para favorecer la comprensión del concepto de integral definida como límite. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 493). Zaragoza: SEIEM.

INICIACIÓN A LA GENERALIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA[1]

Introduction to generalization in primary school students

Arbona, E., Gutiérrez, Á., Beltrán-Meneu, M.J. y Jaime, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Generalizar consiste en extender una propiedad observada en diversos casos concretos a un conjunto más amplio que incluye los casos observados. Una revisión de la literatura revela la importancia de la generalización en matemáticas y, en especial, su conexión con la iniciación al aprendizaje del álgebra, en particular mediante la generalización de patrones (Amit y Neria, 2008).

Los problemas de patrones geométricos (en adelante ppg) muestran una representación gráfica de los primeros términos de una secuencia creciente de números naturales, en la que la cantidad de objetos en la representación de un término corresponde al valor de dicho término. Estos problemas piden calcular la cantidad de objetos que hay en la representación gráfica de términos concretos de la secuencia o expresar el término general (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015).

El objetivo de la investigación que presentamos es comparar las estrategias de resolución de un ppg empleadas por 20 estudiantes de 5º y 22 estudiantes de 6º de Primaria ordinarios y 7 estudiantes con alta capacidad matemática (en adelante aacc) de los mismos cursos (2 de 5º y 5 de 6º).

El ppg utilizado incluía tres cuestiones directas (calcular el valor de un término de la secuencia, dada su posición) y una cuestión inversa (calcular la posición, dado su valor; Rivera, 2013). En las cuestiones directas, identificamos cuatro estrategias de resolución (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015): recuento, recursiva, funcional y proporcional. En la cuestión inversa, observamos dos estrategias de resolución: inversión de las operaciones realizadas en las cuestiones directas y ensayo y error usando las operaciones realizadas en las cuestiones directas.

Al comparar las estrategias usadas por los distintos grupos, observamos cómo un alto porcentaje de estudiantes con aacc resolvió correctamente el problema analizado mediante estrategias funcionales en las cuestiones directas y estrategias de inversión en las cuestiones inversas. En cuanto a los estudiantes ordinarios, utilizaron equitativamente estrategias recursivas y funcionales, teniendo mayor presencia las recursivas en las cuestiones más sencillas, y las resolvieron correctamente en menor medida. En la cuestión inversa, la mayoría de estudiantes empleó estrategias de ensayo y error y una parte significativa de ellos no consiguió resolver correctamente este tipo de cuestión.

Referencias

Amit, M. y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*, 111-129.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. N. York, EE.UU.: Springer.

[1] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143.

Arbona, E., Gutiérrez, A., Beltrán-Meneu, M.J. y Jaime, A. (2017).Iniciación a la generalizaciónen estudiantes de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 495). Zaragoza: SEIEM.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA ATENDIENDO A LA DIVERSIDAD EN EL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Mathematical Education Attending Diversity in the Primary Education Degree

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T.

Universidad de Valladolid

El póster contiene un resumen de una investigación de tipo experimental que se está desarrollando dentro de un Proyecto sufragado por la Universidad de Valladolid que trata de averiguar si el modelo de enseñanza Metodología de Educación Matemática Atendiendo a la Diversidad (MEMAD) es adecuada para implementarla en el Grado de Educación Primaria (GEP). Esta metodología, que fue creada en García-Olivares (2008), se fundamenta en los siguientes principios: un test de autocontrol, la estructuración del aula en grupos de trabajo colaborativo con rendimientos parejos, el respeto a los ritmos de aprendizaje de todos los grupos, la propuesta de tareas adecuadas para todos los grupos y un cuadernillo de trabajo elaborado artesanalmente con actividades de dificultad creciente y en número suficiente para que todos los alumnos estén trabajando en ellas durante todo el período lectivo. Además, la docencia debe seguir estas 4 fases: Presentación (unos 5 minutos), práctica, acomodación y consolidación. Excepto en la primera fase, que será de tipo magistral, en el resto el profesor actúa como monitor y atiende a las solicitudes de cada grupo. Habida cuenta de que la MEMAD es una metodología muy adecuada en Educación Secundaria Obligatoria (García-Olivares, 2008), nos preguntamos si también lo sería en el GEP.

Se ha implementado en un grupo de 2º curso del GEP. Tras la breve presentación de los contenidos, estos alumnos han cumplimentado un cuadernillo de trabajo, que fue construido siguiendo las orientaciones de la metodología y que estaba compuesto por 17 actividades sobre ángulos (la última solo fue contestada por un par de alumnos) y el test de autocontrol. Días más tarde se hizo una pequeña prueba sobre esos contenidos y se repitió el test para que los alumnos valoraran su aprendizaje y su participación con y sin cuadernillo (con la MEMAD y sin ella).

Con el cuadernillo he aprendido: 1, 2, 3, 4, 5	Sin el cuadernillo he aprendido: 1, 2, 3, 4, 5
Con el cuadernillo he participado: 1, 2, 3, 4, 5	Sin el cuadernillo he participado: 1, 2, 3, 4, 5

Como resumen, en el caso de la docencia con el cuadernillo y sin él la media de las valoraciones sobre la participación son de 4,1 y 3,3 puntos respectivamente, lo que supone una oscilación del 24% respecto de la puntuación menor, y, análogamente, se obtiene una media de 3,9 sobre aprendizajes con al MEMAD y de 3,4 sin ella, lo que supone una oscilación de un 15% sobre la menor. Estos datos podrían inclinarnos a pensar que la MEMAD es una metodología muy apropiada para ser implementada en el GEP. Sin embargo, la puntuación media de los 17 grupos de trabajo (75 alumnos) en el cuadernillo es 8,81 puntos y en la prueba de rendimiento 5,34 (ambas en escala decimal). Esto supone una oscilación del 39% con respecto a la media del cuadernillo y un aumento del 65 % de la media del cuadernillo respecto de la media de la prueba, y estas puntuaciones son inferiores a las de otras pruebas similares de contenidos desarrollados sin la MEMAD. Además, hay un dato que no se ha reflejado y éste es el tiempo. El número tan elevado de grupos hace que la atención del profesor a las demandas de los grupos no sea fluida, éstos tienen que esperar su turno y esta espera, retrasa la eficacia y hace que la docencia sea más lenta y menos efectiva.

Referencias

García-Olivares, M.A. (2008). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C., y Ortega, T. (2017). Educación matemática atendiendo a la diversidad en el grado en Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 497). Zaragoza: SEIEM.

MAESTROS EN FORMACIÓN CONSTRUYENDO CON GEOGEBRA PERPENDICULARES A UN SEGMENTO

Prospective Primary School Teachers using GeoGebra to build perpendicular lines to a segment

Arnal-Bailera, A.[a] y Oller-Marcén, A.M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.

Analizamos el modo en que alumnos de Magisterio construyen una recta perpendicular a un segmento dado que pase por uno de sus extremos. Este paso forma parte del proceso general de construcción de un cuadrado a partir de su lado como aparece descrito (Proposición I.46) en dos ediciones diferentes de los elementos de Euclides en cuanto a los sistemas de representación: la clásica de la editorial Gredos y la de Oliver Byrne (1847).

Pregunta de investigación: ¿La utilización de un sistema de representación particular para dar instrucciones, mejora los resultados de los alumnos de Magisterio a la hora de realizar construcciones en GeoGebra? para responder a esta pregunta abordamos los siguientes objetivos específicos: 1.-Determinar si el sistema de representación mediante el que se proporcionan las instrucciones tiene alguna influencia sobre el grado de seguimiento de las instrucciones y sobre la corrección de la construcción realizada en GeoGebra. 2.-Identificar las herramientas GeoGebra utilizadas y analizar los errores cometidos al realizar las construcciones que se les solicitan.

La experimentación se llevó a cabo con 36 estudiantes distribuidos en 18 grupos del Grado en Magisterio de Educación Primaria en el curso 2014-15 en la asignatura Didáctica de la Geometría (3°). El estudio es exploratorio con una finalidad esencialmente descriptiva y se ha realizado a partir del análisis de producciones escritas y ficheros GeoGebra.

Hemos encontrado 5 maneras de realizar la construcción pedida que involucraban las herramientas ‘recta perpendicular’, ‘rota alrededor de un punto’ y diferentes procedimientos visuales tratando de ajustar un dibujo correcto, obviando la construcción de la figura (Mariotti y Bartolini, 1998).

Todos estos procedimientos menos uno, aparecen en construcciones incorrectas. El procedimiento que sí aparece en construcciones correctas se corresponde con el perfil autónomo (Iranzo y Fortuny, 2009). Todos los procedimientos “no estándar” menos el Tipo 5 aparecen en el modelo clásico. Los resultados parecen indicar que el modelo Byrne promueve menos que el clásico la aparición de métodos no estándar e incorrectos. No parece haber relación entre el seguimiento o no de las instrucciones y la aparición de procedimientos “no estándar”.

Referencias

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2017). Construyendo cuadrados con GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación. Un estudio con maestros de primaria en formación. *Actas CIBEM*. En prensa.

Byrne, O. (1847). T*he first six books of the elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London: William Pickering.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(3), 433-446.

Mariotti, M.A. y Bartolini, M.G. (1998). From drawing to construction: teacher’s mediation within the Cabri environment. En K. Newstead y A. Olivier (Eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 180-195. Stellenbosch: PME.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2017). Maestros en formación construyendo con Geogebra perpendiculares a un segmento. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 499). Zaragoza: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE RESOLUCIONES DE PROBLEMAS DE VISUALIZACIÓN[1]

Analysis of the cognitive demand of solutions of visualization problems

Benedicto, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A.

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universitat de València (España)

Algunos autores, como Gonzato, Fernández y Godino (2011), destacan la visualización como un contenido a abordar en la enseñanza. La capacidad de visualización es necesaria en los procesos de resolución de ciertas tareas matemáticas, especialmente en el campo de la geometría, y ocupa un papel importante en el razonamiento de los estudiantes de altas capacidades matemáticas (aaccmm).

Presentamos resultados de una investigación cuyo objetivo es valorar la capacidad visual de aaccmm identificando la complejidad del razonamiento utilizado en problemas de visualización.

Utilizamos el modelo de los *niveles de demanda cognitiva* (Smith y Stein, 1998), que valora la complejidad del razonamiento requerido para resolver problemas correctamente. Esto nos permite evaluar las respuestas de los estudiantes (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015) para investigar la variación de la actividad cognitiva en las resoluciones de un problema según las capacidades matemáticas de los resolutores. El modelo distingue cuatro niveles de demanda cognitiva: *memorización (M), algoritmos sin conexiones (SC), algoritmos con conexiones (CC) y haciendo matemáticas (HM)*.

En este póster analizamos la demanda cognitiva de las resoluciones de 40 estudiantes de aaccmm de 5º de Primaria a 1º de ESO de un problema de visualización cuyo objetivo es que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales mediante el uso de las proyecciones ortogonales de sólidos tridimensionales en el software *Cubos y Cubos* (Hoyos y otros, 2014). El problema pide obtener proyecciones ortogonales y ortogonales numéricas de sólidos y, construir sólidos a partir de proyecciones. La complejidad de los apartados del problema va aumentando conforme la actividad avanza.

Hemos caracterizado cuatro trayectorias de demanda cognitiva durante la resolución del problema, que se asocian a diferentes grados de dominio en el uso de la visualización y a diferentes capacidades matemáticas. Para obtener las proyecciones, los estudiantes emplearon dos procedimientos: 1) Rotar el sólido hasta ver cada plano de proyección (SC) y 2) Tener el sólido fijo e imaginarse los planos de proyección (CC). Para construir un sólido a partir de las proyecciones, los estudiantes emplearon tres procedimientos: 3) Observar sólo una proyección, olvidando las demás (SC). 4) Observar una proyección y, después, modificar el sólido teniendo en cuenta las tres proyecciones simultáneamente (CC). 5) Tener siempre en cuenta las tres proyecciones simultáneamente (HM).

Referencias

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números, 77*, 99-117.

Hoyos, E. A., Aristizábal, J. H. y Acosta, C. A. (2014). *Cubos y Cubos* (software educativo). Armenia, Colombia: Grupo Gedes, Universidad del Quindío.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

[1] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143.

Benedicto, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas de visualización. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 501). Zaragoza: SEIEM.

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS CON ROBOTS PARA LA ENSEÑANZA DE ÁNGULOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Practice analysis with robots for teaching of angels in Primary Education

Blanco, T.F., Salgado, M. y Gorgal Romarís, A.

Universidad de Santiago de Compostela

En este trabajo se presenta el inicio de una investigación sobre el uso de la tecnología y robótica en la enseñanza/aprendizaje de los ángulos en dos grupos de cuarto de primaria, actuando uno de ellos como grupo de control. Se diseña un contexto metodológico para el grupo experimental que promueve la realización de actividades STEAM (Sciencie, Tecnology, Engeneering, Art y Mathematics). Esta metodología se centra en el trabajo colaborativo y en la investigación-acción, donde los recursos tecnológicos juegan un papel de gran importancia (Artigue y Blomhøj, 2013). El objetivo es analizar prácticas educativas donde se trabaja el concepto de ángulo a través de la manipulación de robots y el lenguaje Scratchx.

La secuenciación que se ha seguido en el diseño de la experiencia ha sido el siguiente: (1) Presentación del robot 'Robobo' y lenguaje Scratchx, (2) Actividades dirigidas, (3) Diseño y experimentación de secuencias libres, y (4) Reflexión y autoevaluación del alumnado y de la práctica docente. Para realizar las actividades, cada equipo del grupo experimental dispone de un Robobo y un ordenador. El Robobo es un nuevo concepto de robot educativo (http://www.theroboboproject.com/) que consta de una base móvil que transporta un Smartphone conectado de forma inalámbrica a un ordenador.

Los resultados, en el grupo experimental, muestran dificultades a la hora de visualizar la amplitud de los giros e introducirla en el programa para que el Robobo realice el giro requerido; sobre todo cuando los alumnos tienen que hacer el recorrido del perímetro de triángulos obtusángulos. Este problema no se detecta en el grupo de control ya que el trabajo tradicional, que implica ángulos en polígonos, suele requerir los ángulos interiores y no los exteriores como ocurre en esta experiencia. A nivel general, se observa que programar el Robobo para que realice los movimientos requeridos proporciona una alta implicación y motivación para los alumnos de este grupo.

Se ha utilizado un instrumento de indicadores competenciales (Torra, 2009) que permite evaluar el grado de riqueza competencial de una actividad a través de diez indicadores: cinco de ellos sobre el planteamiento de la actividad y los otros cinco sobre la gestión de la actividad.

Referencias

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797–810.

Torra, M. (2014). Indicadores competenciales: un instrumento para la mejora del desarrollo de la competencia matemática. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 81-86.

Blanco, T.F., Salgado, M. y Gorgal Romarís, A. (2017). Análisis de prácticas con robots para la enseñanza de ángulos en Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 503). Zaragoza: SEIEM.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA CON DISPOSITIVOS MÓVILES: UNA INVESTIGACIÓN CON ALUMNOS DE ALTAS CAPACIDADES[1]

Mathematical Problem solving in Secondary School using mobile device: A research with gifted students

Camacho-Machín, M., Trujillo-González, R. y Cónsul-Pérez, G.

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

La enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas haciendo uso de dispositivos móviles se configura en estos últimos años como un campo emergente de investigación que ofrece retos importantes a los profesores de Educación Secundaria. Existen diferentes iniciativas y experiencias innovadoras que poco a poco se están implementando en diferentes países, como por ejemplo BYOD (Bring Your Own Device), enseñanza y aprendizaje basada en aplicaciones de juegos para dispositivos móviles, iPads y tabletas (Skillen, 2015; Ascanio, Lupiáñez y Camacho-Machín, 2014). En este trabajo se presenta una investigación en la que participaron alumnos de Educación Secundaria, con el objetivo de analizar la viabilidad del uso de tecnología para la resolución de problemas, mediante la combinación del lápiz y papel con dispositivos móviles (smartphones) y el empleo de ordenadores de mesa considerados como herramientas para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Los participantes fueron doce alumnos de 3º de ESO que participan en el programa de estímulo del talento matemático (ESTALMAT) y se utilizaron cuatro problemas contextualizados susceptibles de ser modelizados mediante dispositivos móviles. Se diseñaron cuatro problemas contextualizados en situaciones del entorno real de los estudiantes, con la intención de que los alumnos construyeran un modelo matemático haciendo uso de software de geometría dinámica (Geogebra para smartphones) y que a continuación lo resolvieran y pusieran en común los resultados obtenidos con el grupo de alumnos. La mediatriz, como lugar geométrico, constituyó el elemento conceptual subyacente en la resolución de todos los problemas diseñados. El análisis de los resultados obtenidos permitió concluir que:

- Los alumnos se adaptaron rápidamente al uso del software de Geometría dinámica en el dispositivo móvil.
- El empleo de la herramienta combinando las potenciales del dispositivo móvil y lápiz y papel (exploración inicial de la situación) con el uso del software en el ordenador de mesa, se mostró como un entorno de aprendizaje efectivo para los participantes en la experiencia.
- Es necesario desarrollar investigaciones en entornos de trabajo menos privilegiados que el utilizado, esto es, con alumnos de cursos habituales. Se pudo observar que la actitud positiva hacia el aprendizaje de conceptos matemáticos de los alumnos participantes condicionó los resultados obtenidos.

Referencias

Ascanio, M., Lupiáñez, J. L. y Camacho-Machín, M. (2014). Resolución de Problemas, Geogebra e Ipad en Educación Secundaria. XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. En *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de Las Matemáticas: El Sentido de las Matemáticas. Matemáticas con sentido* (pp. 215-223). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Skillen, M. (2015) Mobile Learning: Impacts on Mathematics Education. En *Electronic Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 205-213).

[1] Este trabajo ha sido parcialmente financiado mediante el Proyecto de Investigación del Plan I+D+i del la Secretaría de Estado de Investigación Desarrollo e Innovación del MINECO, con referencia EDU2015-65270-R.

Camacho-Machín, M., Trujillo-González, R. y Cónsul-Pérez, G. (2017). La resolución de problemas de matemáticas en Secundaria con dispositivos móviles: una investigación con alumnos de altas capacidades. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 505). Zaragoza: SEIEM.

ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN PROFESORES EN FORMACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

Attitudes towards Statistics of Preservice Teachers of Tolima University

Castro, D.[a], Villarraga, M.E.[a], Casas-Rosal, J.C.[b], León-Mantero, C.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad del Tolima, Colombia, [b]Universidad de Córdoba, España

Dentro del estudio de las actitudes ha cobrado importancia la línea relacionada con la estadística. Los estudios se han centrado en estudiantes de secundaria, en profesores en formación y en menor medida en profesores en activo. En España las actitudes hacia la estadística en profesores en formación se ha focalizado en estudiantes para la Educación Primaria, de Educación Infantil (Estrada, 2002) o de Pedagogía (Vila y Rubio, 2016), pero hay pocas evidencias con futuros profesores de otros niveles o de áreas diferentes. Debido a que en Colombia existen planes de formación del profesorado de secundaria como titulación universitaria específica diferente y tampoco se han realizado estudios sobre las actitudes de estos estudiantes, pero sí de otras titulaciones, consideramos necesario y pertinente realizar una investigación centrada en estos estudiantes. En Colombia en estas licenciaturas se forman para ser profesores de educación secundaria (Grados 6º a 9º), educación media (Grados 10 y 11) y pueden aspirar a cargos directivos en las instituciones educativas además de ser profesores en el área de formación.

Por tanto, el objetivo es analizar las actitudes hacia la estadística en profesores en formación de las áreas de ciencias sociales. La muestra fueron 101 estudiantes de las licenciaturas de Legua Castellana, Lengua Inglesa y Ciencias Sociales. El método de selección de la muestra fue por disponibilidad o de manera intencional, en consecuencia, el tipo de muestra es no probabilística ya que no todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

Se aplicó la escala de actitudes hacia la estadística (AEE) de Estrada (2002) por ser ampliamente utilizada en el ámbito latinoamericano. La medida de adecuación KMO de la escala fue de 0.8, lo que indica que las variables están correlacionadas; además, el valor de probabilidad es menor que 0.05, lo que implica un buen grado de relación y afinidad entre las variables. Se analizaron las componentes afectiva, comportamental y cognitiva, hallándose una actitud neutral para los dos primeros en los estudiantes de las tres titulaciones. En la componente cognitiva se evidenció una actitud desfavorable por parte de los estudiantes de Lengua Castellana.

De acuerdo a los resultados, se puede afirmar que en lo comportamental hay una actitud neutral, debido al desconocimiento de la estadística, en lo conceptual, procedimental y en su utilidad, adicional a ello, no se puede querer algo que no se conoce y no le ha sido útil. Es importante anotar, que ninguno de los estudiantes encuestados había tomado un curso de estadística en la universidad por primera vez, en sus respectivos programas.

Referencias

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Vila, R. y Rubio, M. J. (2016). Actitudes hacia la estadística en el alumnado del grado de Pedagogía de la universidad de Barcelona. *REDU, Revista de docencia universitaria 14*(1), 131-149.

Castro, D., Villarraga, M.E., Casas-Rosal, J.C., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2017). Actitudes hacia la estadística en profesoresen formación de la Universidad del Tolima. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 507). Zaragoza: SEIEM.

DEL ARTEFACTO AL INSTRUMENTO: DM EN LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE FUTUROS MAESTROS

From the artefact to the instrument: MD for the statistical instruction to future teachers

Coello, Y.M.[a] y González, M.T.[b]

[a]Universidad Autónoma de Yucatán, [b]Universidad de Salamanca

El uso de dispositivos móviles (DM) en el aula cada vez está más extendido aunque no dejan de ser artefactos que para que puedan propiciar el aprendizaje han de convertirse en instrumentos mediante la génesis instrumental (Artigue, 2015, p.25). Es el profesor el que favorecerá esta transformación a través de las tareas que proponga en el aula por lo que resulta imprescindible que los futuros docentes sean conscientes de cómo obtener potencialidades de estos recursos.

Una opción para usar los DM en el aula es a través de las llamadas aplicaciones (app). Una *app* es un software descargable para comunicación, creación de contenido, consulta de información, recreación, etcétera. Existen numerosas *app* en el mercado que pueden usarse en el aula de matemáticas, sin embargo, a veces conviene mejor diseñar una *app* que se ajuste al trabajo que se quiera desarrollar en el aula. En este sentido hemos diseñado algunas *apps* Android sencillas con el software Eclipse para la realización de simulaciones estadísticas en el aula. Para que estas aplicaciones surtieran el efecto deseado se ha combinado su uso con hojas de trabajo que los futuros maestros debían completar en grupo y que favorecieran el aprendizaje por descubrimiento.

El objetivo de este estudio fue valorar el aprendizaje que adquirían los futuros maestros mediante el uso de estas *apps*. El estudio se realizó con un grupo de 49 alumnos que cursaban el cuarto curso del Grado en Maestro de Educación Primaria. Los alumnos se distribuyeron en grupos de cuatro o cinco alumnos. Se realizó una observación no participante y grabación en audio de la interacción de dos grupos de alumnos para cada una de las aplicaciones utilizadas en el aula usando para ello una adaptación de la guía de observación de Becerril (2011) sobre trabajo en equipo para el uso de las *apps*. Además se recogieron las hojas de trabajo de todos los grupos. Para el análisis de los datos se organizaron tres categorías: "Organización general del equipo para realizar la actividad", "Actitudes de los estudiantes" y "Manejo de la *app* y resultados" que se obtuvieron a partir de 14 dimensiones observadas en los grupos.

Entre los resultados podemos reseñar que la regulación a través del lenguaje y la estructura de participación de modo argumentativo son cruciales para el logro del aprendizaje de contenidos estadísticos, probablemente porque el uso del móvil para las simulaciones no suple la necesidad de comunicarse ni de construir, compartir y defender argumentos.

Referencias

Artigue, M. (2015). Tecnologías de la información y de la comunicación y aprendizaje basado en la investigación: ¿Qué sinergias? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), *Congreso "Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas"*, (pp. 17-27). Academia de Artillería de Segovia.

Becerril, L. (2011). *Procesos psicoeducativos en el aprendizaje cooperativo. Dimensiones para el análisis en un escenario educativo presencial con tecnología*. (Doctorado). Universitat Oberta de Catalunya.

Coello, Y.M. y González, M.T. (2017). Del artefacto al instrumento: DM en la formación estadística de futuros maestros. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 509). Zaragoza: SEIEM.

LA ENSEÑANZA BASADA EN PROYECTOS: MATEMÁTICAS Y CIENCIAS A TRAVÉS DE LA REALIDAD AUMENTADA

Project-based teaching: Mathematics and Sciences through Augmented Reality

Delgado Martín, L.[a], Gimeno-González, M.A.[b], Martín-García, T.[b], Almaraz-Menéndez, F.[b] y Ruiz Méndez, C.[a]

[a]Universidad de Salamanca, [b]MediaLab Usal, Universidad de Salamanca

Basándonos en el diseño de USC California, con software abierto y hardware accesible, hemos construido un dispositivo de Realidad Aumentada que nos permitirá plantear un proyecto interdisciplinar de matemáticas y ciencias en un aula de primaria, secundaria o incluso universidad. Este proyecto ha sido posible gracias al apoyo técnico, de recursos y humano del MediaLab, de la Universidad de Salamanca.

El punto inicial de este proyecto interdisciplinar, estuvo en el uso de la Realidad Aumentada (AR) como recurso de aula. Esta tecnología ha pasado de ser utilizada en diferentes áreas científicas, hacerse ampliamente reconocida en los videojuegos, para al final llegar al mundo educativo. Uno de los mayores retos a los que nos enfrentamos como docentes es el incluir las nuevas tecnologías en las aulas de forma eficaz, conviviendo los problemas que ellas mismas han traído a nuestro sistema educativo con su indudable potencial educativo. El proyecto que planteamos, tiene varias peculiaridades: la interface utilizada en él no es la habitual con las nuevas tecnologías, una pantalla o teclado, sino que se trata de un cajón con arena en el que los estudiantes interactúan con sus manos, y por los recursos, de hardware y software libre, necesarios para su construcción.

Desde nuestro punto de vista, el nuevo paradigma educativo se centra mucho más en el desarrollo de proyectos interdisciplinares en los que los alumnos tengan que poner a prueba las diferentes competencias adquiridas, que en el despliegue clásico de programaciones didácticas estancas en las que sólo se buscan objetivos específicos de una asignatura. Desde este planteamiento, y siendo conscientes del papel que juegan las matemáticas como eje vertebrador esencial de todas las ciencias, planteamos un proyecto interdisciplinar en el que la tecnología de AR sirve de vehículo, tanto del propio proyecto como las implicaciones científicas que de él se derivan, para explicar conceptos abstractos de campos diversos como la informática, la física, geología y por supuesto matemáticas. Nuestro dispositivo de AR es único en el sentido que habitualmente los alumnos están acostumbrados a experimentar con AR a través de pantallas de tablets o móviles, sin embargo, aquí la interface es arena. No hay instrucciones específicas, sólo deben decidir qué hacer a cada momento y comprobar in situ los resultados de sus hipótesis. La metodología que planteamos en el aula es de trabajo colaborativo, en el que el diálogo entre iguales juega un papel fundamental en el aprendizaje. Está demostrado (Wu et al, 2013) que el uso de tecnologías como AR permite a los alumnos involucrarse más en el proceso de aprendizaje. La innovación que supone la aparición de esta nueva tecnología en las aulas abre nuevos caminos para evaluar su impacto en la educación (Cabero y Barroso, 2016).

Referencias

Cabero, J. y Barroso, J. (2016). Posibilidades educativas de la Realidad Aumentada. *Journal of New Approaches in Educational Research, 5*(1), 44-52. ISSN: 2254-7399. doi: 10.7821/naer.2016.1.140

Wu, H. K., Lee, S. W. Y., Chang, H. Y., y Liang, J. C. (2013). Current status, opportunities and challenges of augmented reality in education, *Computers & Education, 62*, 41-49.

Delgado Martín, L., Gimeno-González, M.A., Martín-García, T., Almaraz-Menéndez, F. y Ruiz Méndez, C. (2017). La enseñanza basada en proyectos: Matemáticas y ciencias a través de la realidad aumentada. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 511). Zaragoza: SEIEM.

CONEXIONES DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA CON LAS COMPETENCIAS PROFESIONALES EN LOS ACTUALES GRADOS EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Connections between mathematical training and professional competences in the current Spanish Degrees in Business Administration and Management

Díaz, F.J. y Marbán, J.M.

Universidad de Valladolid

La implantación de los actuales Grados en Administración y Dirección de Empresas en las universidades españolas supuso, en su momento, como en muchas otras titulaciones, un cambio radical en la estructura y principios de diseño e implementación respecto a los planes de estudio preexistentes. Las entonces novedosas declaraciones competenciales, de necesaria inclusión en las memorias de los nuevos títulos, exigían una profunda reflexión a la hora de caracterizar con precisión los perfiles profesionales objeto de la formación. Asimismo, la categorización de dichas competencias (básicas, generales, específicas, transversales,…) requería de un análisis y comprensión de las bases conceptuales del nuevo enfoque de cara a su aplicación al campo económico-empresarial. Por otra parte, el principio del carácter instrumental o de servicio de la Matemática (Thompson, 1985) impera desde hace décadas en el campo de la Economía y de la Gestión de Empresas. La modelación cuantitativa de la realidad económica y empresarial, aprovechando las ventajas del enfoque matemático a la hora de la búsqueda del conocimiento económico —modelación económica— es hoy en día una realidad indiscutible y un campo pujante en la evolución de dicho conocimiento económico y empresarial.

Surgen, entonces, dos interrogantes: ¿ha seguido siendo el criterio de eficiencia, impregnado del convencimiento del carácter instrumental o de servicio, el preponderante a la hora de diseñar las competencias vinculadas y desarrolladas por la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas? Si así fuese, ¿no supondría una lamentable pérdida del potente enfoque formativo que las matemáticas pueden aportar en este ámbito el hecho de no haber establecido una sólida y explícita conexión con las competencias profesionales esenciales?

En el marco de la línea de investigación consolidada desde hace tiempo en otros ámbitos profesionales y académicos, el objetivo del presente trabajo consiste en analizar e identificar las conexiones existentes entre la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas en las universidades españolas y las competencias, en su variada tipología, del perfil profesional, todo ello bajo la perspectiva de la investigación curricular (Clements, 2007). Se indaga, para ello, en la conexión con las competencias profesionales del título de las declaraciones competenciales reflejadas en la formación matemática a fin de extraer las principales conexiones curricularmente explicitadas.

Referencias

Clements, D. H. (2007). Curriculum Research: toward a framework for "Research-based Curricula". *Journal for Research in Mathematics Education*, *Vol. 38*, 1, 35-70.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. En *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 189–243.

Díaz, F.J. y Marbán, J.M. (2017). Conexiones de la formación matemática con las competencias profesionales en los actuales Grados en Administración y Dirección de Empresas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 513). Zaragoza: SEIEM.

LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA

Spatial Visualization in Primary School Students

Escrivà, M.T., Jaime, A., Gutiérrez, Á. y Beltrán-Meneu, M.J.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

La visualización espacial es una herramienta importante en las matemáticas (Ramírez, 2012), que está relacionada con la geometría (Fernández, 2013). El objetivo de esta investigación[1] es observar y comparar las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) en estudiantes de Primaria con diferentes grados de capacidad matemática al resolver actividades de desarrollos y rotaciones de cubos. Hemos realizado unas experimentaciones con estudiantes ordinarios de 2º y 4º de Primaria y estudiantes de alta capacidad matemática (en adelante, aacc) de 1º, 2º, 5º y 6º de Primaria.

En las actividades planteadas, observamos diferencias significativas en el uso de la visualización entre los estudiantes de los diferentes cursos y grados de capacidad matemática. Una actividad se basó en un software que muestra un cubo y 6 flechas que permiten rotarlo 90º alrededor de cada eje del cubo. La actividad consistía en presionar las flechas para girar el cubo y llegar a una posición concreta. Los estudiantes ordinarios de 2º no pudieron coordinar las flechas con el movimiento que querían hacer. Los de 1º y 2º de aacc tuvieron esta dificultad sólo cuando no veían la figura referente en la pantalla. Por tanto, consideramos que, en estos cursos, no tienen desarrollada la habilidad de conservación de la percepción. Sin embargo, esta habilidad ya la tenían desarrollada los demás estudiantes observados (4º, 5º y 6º), ya que fueron capaces de elegir las flechas de rotación, sin que observáramos ninguna diferencia entre los estudiantes de aacc y los ordinarios.

Otra actividad muestra tres vistas de un cubo de colores y pide descubrir la cara opuesta a una de las visibles. En esta actividad, hemos observado respuestas basadas en razonamientos analítico y visual (Krutetskii, 1976). Los visualizadores la solucionaron rotando el cubo mentalmente, mientras que los analíticos la resolvieron construyendo relaciones entre los colores del cubo.

Las actividades de desarrollos de cubos piden poner figuras en las caras de un desarrollo a partir de tres vistas del cubo y poner figuras en las caras de un desarrollo a partir de otro con diferente forma. Todos los estudiantes de 1º y 2º tuvieron dificultad para situar las figuras en la orientación correcta en su cara. Además, los estudiantes ordinarios de 2º tuvieron dificultad para situar las figuras en la cara correcta. Estas dificultades casi desaparecieron en los cursos superiores, siendo inexistente en los estudiantes de 5º y 6º de aacc. Por lo tanto, las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y reconocimiento de relaciones espaciales se van adquiriendo a lo largo de Primaria.

Referencias

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: Chicago University Press.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

[1] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143.

Escrivà, M.T., Jaime, A., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M.J. (2017). La visualización espacial en estudiantes de Matemáticas de Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 515). Zaragoza: SEIEM.

ESTIMACIONES RAZONABLES EN TAREAS NUMÉRICAS

Reasonable estimations in numerical tasks

Fariña, M. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Este trabajo presenta resultados de un estudio dedicado a analizar el reconocimiento de respuestas razonables en tareas numéricas por parte de estudiantes de secundaria. Las tareas numéricas analizadas abarcan la estimación de cantidades y de operaciones de forma gráfica y abstracta. Tener la capacidad para reconocer si una respuesta numérica es razonable es una muestra de un buen uso del sentido numérico (Sowder, 1922), pues ayuda a mejorar los resultados de cálculos, incluyendo los exactos y la estimación (Alajmi y Reys, 2010). Por otra parte, la estimación es un importante proceso matemático que implica razonamientos no rutinarios y requiere aplicar flexibilidad de pensamiento (Siegler y Booth, 2005).

Se presentan datos descriptivos pertenecientes a una prueba escrita de 11 ítems contestada por 252 estudiantes de segundo de Educación Secundaria Obligatoria en siete centros de Tenerife (España), en concreto los relativos a cuatro ítems, de los cuales, dos trabajan la estimación de operaciones con ayuda de representaciones gráficas y los otros dos analizan la razonabilidad de las respuestas del alumnado en situaciones contextualizadas, con y sin representación gráfica.

Los resultados muestran que el alumnado presenta serias dificultades para estimar el resultado de sumas y multiplicaciones con fracciones apoyándose en representaciones gráficas. El porcentaje de éxito en estas tareas no supera el 40% y las representaciones no parecen sustentar la realización de las estimaciones del resultado de la operación. En cuanto a las tareas contextualizadas, se presentaron diferentes gráficos de sectores circulares con porcentajes relativos a sus actividades cotidianas con el fin de que explicaran la razonabilidad de los mismos resultando, en este caso, un alto grado de éxito. Sin embargo, se aprecia una escasa destreza por parte del alumnado para explicar o justificar la respuesta más razonable a un problema planteado sin acompañamiento de representación gráfica.

Estos resultados, previos a una intervención de aula, invitan a la necesidad de realización de actividades con alumnado de secundaria que tengan como finalidad desarrollar sus habilidades para evaluar respuestas razonables en tareas numéricas, con y sin apoyo de representaciones gráficas, y expresar las justificaciones, aspectos importantes en el desarrollo del pensamiento matemático del alumnado y su uso en la vida cotidiana.

Agradecimientos: Trabajo financiado parcialmente por el Proyecto “Una perspectiva competencial para la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria y secundaria: implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje”, del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2015-65270-R.

Referencias

Alajmi, A. y Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students’ recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*, 117-139.

Siegler, R. S. y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company: New York.

Fariña, M. y Bruno, A. (2017). Estimaciones razonables en tareas numéricas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 517). Zaragoza: SEIEM.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO FRENTE A UNA SITUACIÓN BINOMIAL

Probabilistic reasoning of high school students in front of a binomial situation

García, J.[a], Sánchez, E.[b] y Mercado, M.[c]

[a]Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAGro, México

[b]Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México

[c]Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México

En esta investigación se propone explorar el desarrollo del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato *acerca de y con* la distribución binomial, poniendo especial énfasis en las nociones de variabilidad y distribución. Bajo el anterior plan, se diseñaron varias tareas, se aplicaron y se analizaron las respuestas de los estudiantes. Aquí se informa sobre dos tareas interconectadas, una de predicción y otra de distribución. La población examinada estuvo formada por dos grupos de estudiantes de bachillerato (Grupo 1 formado por 54 que no había tomado un curso de probabilidad y estadística, y Grupo 2 formado por 30 que había tomado uno, cuyas edades oscilaban entre los 17 - 18 años).

La tarea de predicción consiste en una presentación familiar de la siguiente pregunta: ¿Con qué frecuencia crees que ocurra cada valor de la variable X [donde X se distribuye: b(x. 2, ½)] si el experimento correspondiente se repite 1000 veces? La pregunta de distribución, ubicada en el mismo contexto familiar que la anterior es: ¿Cuál es la probabilidad de cada valor de la variable?

En el análisis de las respuestas de predicción, se pueden distinguir tres categorías: equiprobabilidad, proporcionalidad y variabilidad. La primera consiste en las respuestas que distribuyen por igual las frecuencias; las segundas, las que proponen las frecuencias esperadas de acuerdo a la distribución teórica; y la tercera, con respuestas que proponen valores cercanos a las frecuencias esperadas pero que expresan que hay variabilidad. En el análisis de las respuestas a la pregunta de distribución se proponen también tres categorías: equiprobabilidad, probabilidad clásica y probabilidad frecuencial. Las primeras se corresponden con la distribución uniforme; las segundas con la probabilidad teórica y las terceras con probabilidades obtenidas mediante el enfoque frecuencial de probabilidad.

Analizadas en conjunto distinguimos cuatro categorías: reconocimiento de la variabilidad, dogmatismo teórico, compromiso empírico y relaciones borrosas entre distribución y frecuencias. Estas categorías dan cuenta de aspectos que los estudiantes ven o ignoran de las relaciones entre la distribución teórica y los posibles resultados de la realización de experimentos repetidos. Consideramos que, en las diferentes estrategias de los estudiantes, subyacen sus concepciones acerca de las grandes ideas de probabilidad (Gal, 2005): *aleatoriedad, variación, independencia* y la relación *predicción/incertidumbre*. Las actividades de predicción/incertidumbre que pongan atención a la variabilidad, como la analizada en este trabajo, además de buscar actividades que incorporen las otras dos grandes ideas (aleatoriedad e independencia), ofrecen la oportunidad de desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes.

Referencias

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

García, J., Sánchez, E. y Mercado, M. (2017). Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación binomial. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 519). Zaragoza: SEIEM.

MODELO GRANULAR LINGÜÍSTICO PARA DESCRIBIR FENÓMENOS DEL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Granular linguistic model to describe phenomena in the field of Mathematics Education.

García-Honrado, I.

Universidad de Oviedo

Una parte de la Didáctica de las Matemáticas consiste en analizar y describir fenómenos complejos enmarcados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estos fenómenos pueden ser de índole muy variada, por ejemplo: analizar la calidad de una discusión en gran grupo, estudiar el grado en que un alumno aprovecha una oportunidad de aprendizaje, examinar la coherencia del discurso de un profesor, valorar la adquisición de contenidos prácticos de los estudiantes en ciertas pruebas, etc.

Todos estos estudios involucran varios indicadores o variables que contribuyen a un mejor conocimiento del fenómeno. En muchas ocasiones las variables con las que se trabaja son cualitativas, por lo que se pueden graduar en escalas lingüísticas como nada/ poco/ medio/ bastante/ mucho, y cada uno de estos términos lingüísticos se puede traducir por un conjunto fuzzy, tratándose entonces de una variable lingüística (Zadeh, 1975). El modelo granular lingüístico de un fenómeno (GLMP) consiste en agregar las variables formando una jerarquía con origen en el fenómeno de estudio (Triviño y Sugeno, 2013). La agregación de esas variables se hace a través de reglas del tipo "si/entonces" propias de problemas de control fuzzy (Takagi y Sugeno, 1985). Esta metodología permite obtener descripciones lingüísticas realizadas de forma automática en la que se explicará el grado en el que intervienen todas las variables de estudio en el fenómeno. Además, si se requiere, se puede obtener una valoración general del proceso en forma de término lingüístico o numérica.

Entre otros ejemplos, en Sánchez-Torrubia, Torres-Blanc y Triviño (2014), se consigue una automatización de la evaluación de pruebas de alumnos en las que se describen los indicadores obtenidos, y en García-Honrado, Fortuny, Ferrer y Morera (2016), se consigue describir los distintos aspectos involucrados en el aprovechamiento que una alumna hace de una oportunidad de aprendizaje surgida en el aula y definir un grado final de aprovechamiento.

Referencias

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 253-264) Málaga: SEIEM.

Sánchez-Torrubia, M. G., Torres-Blanc, C. y Triviño, G. (2014) Modelo lingüístico del aprendizaje para la evaluación automática basada en criterios. En *Actas del XVII congreso español sobre tecnologías y lógica fuzzy*. (pp. 417-422) Zaragoza, ESTYLF.

Takagi, T. y Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. IEEE Trans. Systems, *Man and Cybentics, 15*, 116-132.

Triviño, G. y Sugeno, M. (2013). Towards linguistic descriptions of phenomena. *International Journal of Approximate Reasoning, 54*(1), 22-34.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences, 9*(1), 43-80.

[1] Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P.

García-Honrado, I. (2017). Modelo granular lingüístico para describir fenómenos del campo de la Educación Matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 521). Zaragoza: SEIEM.

USO DE RECURSOS VIRTUALES EN LA DIFUSIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO CIENTÍFICO: EL CASO DEL CONGRESO CIVEOS

Using virtual resources for building and diffusing scientific knowledge: the CIVEOS congress

Godino, J.D. y Contreras, J.M.

Universidad de Granada

La celebración de un congreso, simposio o conferencia, donde se difunden y discuten nuevos conocimientos sobre un campo científico constituye un dispositivo de estudio dentro de una comunidad de investigación. Los ponentes de los trabajos presentan los resultados de sus investigaciones a las personas implicadas en el campo, dando a conocer dichos resultados, al tiempo que someten a escrutinio y discusión la validez y pertinencia de los mismos. La tecnología, y en particular los recursos virtuales, aumentan estas posibilidades, como ha sido el caso del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el EOS (CIVEOS), donde se han presentado y debatido investigaciones sobre educación matemática basadas en la aplicación de un marco teórico específico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2012). El objetivo de este póster es analizar la experiencia obtenida en este congreso, cuyos objetivos y los recursos empleados están disponibles en, http://civeos.com. En el póster se describen los antecedentes, recursos humanos y técnicos empleados, así como los resultados obtenidos; en particular el número de inscritos (554), participantes activos (443), su distribución según países, estadísticas de las interacciones realizadas sobre las 120 contribuciones presentadas y discutidas en los foros asincrónicos y mediante videoconferencias sincrónicas. Se finaliza con los resultados de la encuesta de evaluación respondida por 99 participantes, destacando las ventajas y debilidades del dispositivo virtual implementado, así como potenciales mejoras.

La celebración del congreso CIVEOS ha mostrado que la tecnología disponible para organizar conferencias virtuales es relativamente simple y está suficientemente madura en la actualidad, comparada con la usada hace algunos años (Lecueder y Manyari, 2000). Con las nuevas tecnologías (repositorios, chats, videoconferencias webs, etc.) se puede mejorar la interactividad entre los participantes y potenciar la construcción del conocimiento científico (Lawrence, Roy y Chawdhry, 2000). Asimismo, CIVEOS ha permitido identificar con claridad el ámbito de difusión y relativa extensión de la comunidad de profesionales de la educación matemática interesados por el desarrollo y aplicación del EOS, sistema teórico en construcción en el marco del Grupo de Trabajo DMDC de la SEIEM.

Referencias

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

Lecueder, S. y Manyari, D. E. (2000). Virtual congresses. *Journal of the American Medical Informatics Association, 7*(1), 21-27.

Lawrence, D., Roy, R. y Chawdhry, P. K. (2000). Real and virtual conferences. Exploring the use of computer communications (pp. 33-43). En A Sloane et al. (eds.), *Home Informatics and Telematics*. New York: Springer + Business Media.

Godino, J.D. y Contreras, J.M. (2017). Uso de recursos virtuales en la difusión y construcción de conocimiento científico: el caso del Congreso CIVEOS. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 523). Zaragoza: SEIEM.

EVALUACIÓN DE ACTITUDES PRESENTADAS HACIA LA ESTADÍSTICA EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Evaluation of attitudes in students of primary school presented towards statistics

Gómez, G. y Contreras, J.M.

Universidad de Granada

La estadística está ocupando últimamente un lugar cada vez más notorio dentro de la sociedad en la que vivimos. Cada vez se encuentra más presente en diferentes disciplinas, y, por tanto, es fundamental su aprendizaje. Es por esto, que se está tratando de enfatizar un proceso de alfabetización de la estadística en los diferentes niveles educativos, con la finalidad de que los estudiantes adquieran una cultura estadística que los hagancompetentes en una sociedad basada en la información.

Gal (2002) describía la alfabetización como "un subconjunto mínimo de "habilidades básicas" que se esperan de todos los ciudadanos, en oposición a un conjunto más avanzado de habilidades y conocimientos que sólo algunas personas pueden lograr."(p.2). Dentro de estas habilidades, destacamos las actitudes hacia la estadística.

Como referían Gal y Ginsburg (1994), las actitudes y creencias, y especialmente las negativas, pueden tener un impacto directo en el clima de la clase y llegar a constituir un auténtico bloqueo del aprendizaje si no se controlan.

Este estudio está basado en una muestra de 60 alumnos de sexto de Educación Primaria, donde se evaluarán a través de cuestionarios de Estrada los diferentes componentes de las actitudes; el componente afectivo, cognitivo, el valor que le otorgan a la estadística y la dificultad presentada hacia la materia. (Estrada, 2007)

Los resultados obtenidos indican que los alumnos muestran una disposición hacia el estudio de la estadística, debido a que la dificultad del área no es excesiva. Sin embargo, las actitudes son negativas, ya que la enseñanza impartida no está contextualizada, y, por tanto, le otorgan un valor, pero está lejos de su contexto.

Reconocimientos: Proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126.

Referencias

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.). *Investigación en educación matemática XI* (pp. 122-139). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education, 2*(2), 1-15.

Gómez, G. y Contreras, J.M. (2017). Evaluación de actitudes presentadas hacia la estadística en alumnos de Educación Primaria En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 525). Zaragoza: SEIEM.

EVALUACIÓN DE INTUICIONES PRESENTADAS HACIA LA ESTADÍSTICA EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Evaluation of intuitions in students of primary school presented towards statistics

Gómez, G. y Contreras, J.M.

Universidad de Granada

Recientemente durante las distintas etapas educativas se está haciendo un especial énfasis en llevar a cabo una alfabetización estadística en los alumnos, con la finalidad de que posean una cultura estadística, para poder desenvolverse en la sociedad de información en la que vivimos.

Gal (2002) definía la cultura estadística como "el conocimiento mínimo (tal vez formal) de los conceptos y procedimientos básicos de estadística" (p.2). Sin embargo, este concepto no se queda solamente ahí, sino que está compuesto de más componentes que deben de tenerse en cuenta.

Batanero (2004) describía los componentes de la cultura estadística, diferenciando entre conocimientos y destrezas, razonamiento estadístico, intuiciones y actitudes. De esta manera, enfatizaba la importancia de poseer un buen nivel de intuiciones para no caer en la manipulación y en el engaño de ciertas informaciones.

Por lo tanto, nuestra finalidad es que el alumnado comience a valorar críticamente la información estadística que le rodea, especialmente de los medios de comunicación, concienciándoles de esta manera, la importancia de poseer estas habilidades para evitar caer en cualquier tipo de manipulación.

De esta manera, hemos utilizado una muestra de unos 20 alumnos de sexto de Educación Primaria. Llevamos a cabo una visualización de gráficos con algún error presentado, y hemos analizado sus intuiciones según los instrumentos de Curcio (1989) en cuanto a lectura e interpretación de datos y gráficos estadísticos.

Los resultados obtenidos es que más de la mitad de los alumnos tienen un nivel de intuiciones óptimas. Por lo que debemos aprovechar esta etapa educativa, para incidir en este aprendizaje, que conlleva una mayor dificultad para desarrollarse en etapas posteriores.

Reconocimientos: Proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126.

Referencias

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana, 1*(1), 27-37.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25.

Gómez, G. y Contreras, J.M. (2017). Evaluación de intuiciones presentadas hacia la estadística en alumnos de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 527). Zaragoza: SEIEM.

INTERPRETACIÓN DE PLANOS MEDIANTE EL USO DE ROBOTS EDUCATIVOS

Interpreting maps using educational robots

González-Calero, J.A., Cózar, R., Villena, R. y Merino, J.M.

Universidad de Castilla-La Mancha

Este trabajo presenta los resultados preliminares de un estudio empírico que evalúa el potencial de robots educativos en el desarrollo del pensamiento espacial y del pensamiento computacional de estudiantes de 3er curso de Educación Primaria. Las tareas empleadas se centran en la interpretación de planos bajo la premisa de que el uso de mapas y planos provee un contexto realista para el aprendizaje matemático y para el desarrollo de habilidades espaciales (Diezmann y Lowrie, 2008). El estudio se desarrolló en la región de Castilla-La Mancha (España) donde el currículo de Matemáticas establece que los alumnos deben ser capaces de describir recorridos sencillos sobre un plano, así como ser capaces de interpretar y elaborar representaciones espaciales. El estudio plantea tareas a los estudiantes en los que ellos deben programar un robot para que éste realice recorridos sobre un plano de la localidad en la que residen. En la investigación se empleó el robot Ozobot, de pequeñas dimensiones y que puede ser programado tanto por colores como usando un lenguaje por bloques. Estas características posibilitan su utilización con estudiantes de Educación Primaria. La inclusión de la robótica responde a un doble propósito. Por un lado, el uso de robots puede comportar ventajas a la hora de trabajar dimensiones del pensamiento espacial pues, por ejemplo, habilita procesos de prueba y error sobre los planos o facilita la visualización de los pasos a completar sobre un recorrido. Por otro lado, integrar tareas de programación en niveles tempranos es un elemento necesario para el desarrollo del pensamiento computacional, que se prevé sea una competencia clave a mediados del presente siglo (Wing, 2008).

En el estudio participaron 34 estudiantes de 3º de Educación Primaria de dos colegios de Castilla-La Mancha (España). Antes y después de la intervención, se suministraron dos tests: uno asociado a la interpretación de planos y otro al pensamiento computacional. La fase de intervención duró 2 horas, incluidos los veinte primeros minutos en los que se explicaba cómo programar el robot. Tras ello, los alumnos debían completar una colección de tareas, cada una de las cuales implicaba programar en el robot un recorrido sobre el plano de su localidad. En el aula se ubicó un plano en A0 para que los alumnos pudieran comprobar si el robot completaba el recorrido correctamente. Los resultados en el test de interpretación de planos fueron estadísticamente superiores tras la intervención ($M = 12.44$, $SD = 2.41$) que en el test previo ($M = 10.65$, $SD = 3.39$), $p < .001$, $r = -.42$. Igualmente se constataron diferencias significativas entre el test previo en pensamiento computacional ($M = 3.58$, $SD = 1.84$) y el posterior ($M = 4.70$, $SD = 2.02$), $p = .0062$, $r = -.34$.

Referencias

Diezmann, C. M. y Lowrie, T. (2008). Assessing primary students' knowledge of maps. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds.), *Proc. of the Joint Meeting 32nd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX* (Vol. 2, pp. 415-421). Morelia, Michoacán, México: PME.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1881), 3717-3725. doi: 10.1098/rsta.2008.0118

González-Calero, J.A., Cózar, R., Villena, R. y Merino, J.M. (2017). Interpretación de planos mediante el uso de robots educativos. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 529). Zaragoza: SEIEM.

PATRONES ERRÓNEOS DE RESOLUCIÓN EN PROBLEMAS DE M.C.M. Y M.C.D

Erroneous resolution patterns on LCM and GCD problems

González-Calero, J.A., Martínez, S. y Sotos, M.A.

Universidad de Castilla-La Mancha

Este trabajo presenta parte de los resultados analizados en una investigación más amplia sobre divisibilidad que se está llevando a cabo en la Universidad de Castilla-La Mancha. Aunque las investigaciones en didáctica de las matemáticas ya señalaban la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general (Zazkis y Campbell, 1996) y en concreto con el uso del m.c.d. y m.c.m. (Noblet, 2013), en este trabajo se muestran algunos de los patrones erróneos encontrados en la resolución de problemas de divisibilidad tanto en alumnos de primaria y secundaria como en estudiantes para maestros. En concreto, los problemas analizados son aquellos en los que se necesita el cálculo del máximo común divisor o mínimo común múltiplo de dos números. Entre los patrones erróneos encontrados cabe destacar:

- *Patrón resolución algorítmica* (Martínez et al., 2015). Aunque estudios previos ya denotaban este marcado patrón de resolución (p.ej., Zazkis y Campbell, 1996), se ha constatado que en el 80% de los casos, los alumnos tienden a utilizar resoluciones algorítmicas para el cálculo del m.c.d. y m.c.m. en lugar de resoluciones que confieren más sentido a estos elementos.
- *Patrón resta* (Gónzalez-Calero et al., 2016). Algunos estudiantes dan como solución la resta de los dos valores intervinientes en el problema.
- *Patrón mínimo — m.c.d*. (Martínez et al., 2015). Algunos estudiantes realizan el cálculo del máximo común divisor cuando alguna palabra en el enunciado indica mínimo entendiendo que el número buscado es un número pequeño (divisor) de ambos.
- *Patrón máximo — m.c.m.* (Martínez et al., 2015). Algunos resolutores realizan el cálculo del mínimo común múltiplo cuando en el enunciado aparece la palabra máximo, entendiendo que el número buscado es un número mayor (múltiplo) de ambos.
- *Patrón promedio*. Se ofrece como solución la media aritmética de las cantidades conocidas.

Así, con este estudio se pone de manifiesto que la resolución de este tipo de problemas es una cuestión que genera dificultades en los alumnos y que debe ser estudiada en profundidad desde la perspectiva de la didáctica de la matemática.

Referencias

González-Calero, J.A., Martínez, S., y Sotos, M.A. (2016) La tendencia a restar en la resolución de problemas de m.c.d. en alumnos de primaria. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Renández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matmática XX* (pp. 295-304)

Martínez, S., González-Calero, J. A., y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350).

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (págs. 219-225). Denver: Sigmaa.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teacher's Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

González-Calero, J.A., Martínez y S., Sotos, M.A. (2017). Patrones erróneos de resoluciónen problemas de m.c.m. y m.c.d. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 531). Zaragoza: SEIEM.

UNA EXPERIENCIA DE AULA CON NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL DE TRES AÑOS. LA NOCIÓN (LÓGICA) DE CLASE

A classroom experience with children of children education of between three and four years. The nomination of classification

Guerrero, A.Á., Prieto, J.A., Piñero, J.C. y Moreno, F.

Departamento de Didáctica. Área de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Cádiz

Son numerosos los autores que ponen de relieve la importancia del desarrollo del pensamiento lógico matemático en las primeras edades (niños en edades comprendidas de 0 a 6 años) (Alsina, 2012), lo que les permite favorecer una adecuada estructuración mental y además, dotarles de una “herramienta” para el entendimiento y comprensión de su entorno.

En este póster se presenta una experiencia que tiene como finalidad, ser un reflejo de cómo a través de la abstracción de atributos cualitativos de los objetos, se potencia el desarrollo de la lógica de clases, siendo éste el instrumento intelectual que permite al sujeto el conocimiento y análisis de la realidad (Mira, 1989). En este sentido, el objetivo principal es: “Proponer diferentes situaciones contextualizadas que permitan plasmar la capacidad de análisis y de organización de los alumnos de Educación Infantil de tres años de edad”. En relación a este objetivo principal, surgen una serie de objetivos específicos: I. Fomentar la abstracción de atributos cualitativos de los objetos. II. Reconocer las semejanzas y diferencias de los objetos, así como establecer dichas relaciones. III. Promover la construcción de colecciones cuyos elementos posean uno o varios atributos cualitativos en común.

La experiencia se desarrolló en un aula de Educación Infantil con una muestra intencional de 25 alumnos de entre tres y cuatro años, durante siete sesiones programadas a tal efecto. En cada una de ellas se propuso una serie de actividades específicas y dirigidas, auxiliadas con materiales concretos que permitieron al infante avanzar en su proceso de abstracción de conocimientos matemáticos, y en particular, en el de la noción de clasificación; para ello se intercambió el uso de material no estructurado (juguetes y utensilios disponibles en el aula), con material estructurado (bloques lógicos de Z. P. Dienes), dependiendo la elección de uno u otro, del nivel evolutivo de la adquisición de la noción en cuestión. La recogida de información se llevó a cabo mediante un diario del profesor, un cuadernillo de trabajo, grabaciones en audio y fotografías tomadas a las actividades realizadas por los alumnos en cada una de las sesiones. Finalmente, se concluyó que determinadas dificultades que encontramos en las dos primeras sesiones en la mayoría de los alumnos, como por ejemplo, *“No hacer extensible un atributo a todos los elementos de la colección que lo poseen”* e *“Influencias ejercidas por el material usado en función a las experiencias que poseen sobre ellos”*, fueron superadas con éxito al final de las mismas.

Referencias

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80*, 7-24.

Mira, M.R. (1989). *Matemática “viva” en el parvulario*. Barcelona: CEAC.

Guerrero, A.A., Prieto, J.A., Piñero, J.C. y Moreno, F. (2017). Una experiencia de aula con niños de Educación Infantil de tres años. La noción (lógica) de clase. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 533). Zaragoza: SEIEM.

LOS BENEFICIOS DE LOS BLOQUES MULTIBASE

Multibase Blocks' benefits

Izagirre, A. y Murgia, U.

UPV/EHU, Univ. del País Vasco.

En Educación Infantil y primer ciclo de Primaria, debido al nivel de abstracción que tienen las matemáticas, es recomendable y muy beneficioso para las niñas y los niños la utilización de objetos visuales y palpables. Son muchos los estudios que demuestran la necesidad de trabajar primero los nuevos conceptos matemáticos desde un aspecto lúdico-manipulativo para introducir progresivamente la representación matemática escrita (Alsina, 2006; Montero y Sánchez, 2011).

En este caso, nuestro **objetivo** ha sido investigar si los Bloques Multibase de Dienes de base 10 favorecen la comprensión y asimilación de nuestro sistema de numeración decimal. Con este propósito, hemos llevado a cabo una intervención. La muestra seleccionada ha sido el alumnado de 1º Primaria de una escuela concertada de un pueblo Guipuzcoano.

La **metodología** que hemos seguido ha sido la siguiente. En primer lugar, hemos definido el grupo control (35 alumnos/as) y el experimental (37 alumnos/as), y mediante un pre-test hemos recogido el conocimiento del que parten. En segundo lugar, hemos introducido los Bloques Multibase en las dos aulas que forman el grupo experimental. Estos alumnos han gozado de la oportunidad de manipular los Bloques durante 10 semanas. Durante este tiempo, las otras dos aulas que forman el grupo control han seguido su rutina. Por último, al transcurrir las 10 semanas, hemos vuelto a medir el conocimiento de todo el alumnado mediante un post-test. Este post-test no ha sido idéntico al pre-test, pero sí del mismo nivel de dificultad.

En cuanto al **análisis de los resultados**, antes de nada, hemos comprobado que el nivel de conocimiento del grupo control (Media: 3,8/5, D.T.: 1,6) y del experimental (Media: 3,2/5, D.T.: 2,1) es aproximadamente la misma, es decir, que ambos grupos parten de la misma base. Y, tras la intervención, hemos analizado los resultados del post-test obteniendo que la media del grupo control es 3,9 de 5 y la desviación típica 1,6, y en el grupo experimental la media es 4,6 de 5 y la desviación típica 1.

Los resultados demuestran una mejora significativa en el grupo experimental con respecto al grupo control. No solamente porque han obtenido un promedio muy alto, sino porque los alumnos con los resultados más bajos también han progresado habiendo, únicamente, 2 alumnos con un promedio más bajo que 3 de 5, lo cual justifica los beneficios de los materiales lúdico-manipulativos con respecto a la inclusión matemática.

Referencias

Alsina, A. (2ª Ed.). (2006). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*. Madrid: Narcea.

Montero, J.M. y Sánchez, C. (2011). *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en Educación Infantil.* Madrid: Wolters Kluwer.

Izagirre, A. y Murgia, U. (2017). Los beneficios de los bloques multibase. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 535). Zaragoza: SEIEM.

LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO EN LA ESCUELA INFANTIL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO DEL LOGOS DE LOS ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Teaching numbers in Early Childhood Education: an exploratory study of the logos of the students of the Bachelor's Degree in Child Education

Lendínez, E., García, F.J. y Lerma, A.M.

Universidad de Jaén

La Teoría de la Transposición Didáctica (TAD) ha puesto de manifiesto la necesaria transformación y adaptación que sufren los saberes matemáticos en su tránsito entre diferentes instituciones, generando un nuevo campo de investigación en la Didáctica de la Matemática (Bosch y Gascón, 2007). Los procesos de transposición didáctica provocan diferentes fenómenos didácticos. En cuanto al número natural y la numeración en la escuela infantil, algunos de estos fenómenos han sido identificados por García y Sierra (2015) o Lacasta y Wilhelmi (2008). Así, los análisis de los libros de texto de Educación Infantil, desde las perspectivas de la TAD y de la Teoría de Situaciones Didácticas, han revelado interesantes resultados iniciales (García y Sierra, 2015) en relación con la actividad matemática en la escuela infantil en torno al número y a la numeración.

El objetivo del presente estudio es abordar dos preguntas de investigación íntimamente relacionadas. Por un lado, la enseñanza funcional del saber matemático y, por otro, la caracterización del equipamiento praxeológico de los futuros maestros y maestras de Educación Infantil. Así, pretendemos identificar rasgos importantes del equipamiento praxeológico de los estudiantes del Grado de Educación Infantil sobre la enseñanza del número natural y de la numeración, a partir de un modelo epistemológico que sitúe estos conceptos matemáticos en el contexto de las magnitudes discretas y la medida.

Los resultados apuntan que los futuros docentes muestran ciertas dificultades en la interpretación de la actividad matemática necesaria para construir la noción de magnitud discreta, así como en el análisis de las organizaciones didácticas para la enseñanza del número en el contexto de las magnitudes discretas. En consecuencia, consideramos este trabajo como un análisis previo para continuar avanzando en el estudio del logos matemático-didáctico de los futuros maestros y maestras de Educación Infantil.

Referencias

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén.

García, F.J. y Sierra, T.Á. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 299-307). Alicante: SEIEM.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.

Lendínez, E., García, F. J. y Lerma, A. M. (2017). La enseñanza del número en la Escuela Infantil: un estudio exploratorio del logos de los estudiantes del Grado de Educación Infantil. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 537). Zaragoza: SEIEM.

MOTIVACIÓN HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Motivation towards mathematics of the students for teacher of primary education

León-Mantero, C., Casas-Rosal, J.C., Maz-Machado, A. y Pedrosa-Jesús, C.

Universidad de Córdoba

La mayoría de los estudiantes no consideran que estudiar matemáticas les brinde beneficios a nivel personal, a pesar de que su comprensión permite a todos los ciudadanos percibir argumentos científicos y sociales, y por tanto, tener en sus manos toda la información necesaria para tomar decisiones objetivas. Este tipo de actitudes hacia las matemáticas, surgen de una mala articulación de los procesos motivacionales en las prácticas relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Hannula et al., 2016). En particular, las actitudes hacia las matemáticas de los maestros en formación son fundamentales, ya que éstas pueden influir en su manera de transmitirlas a sus futuros alumnos (Madrid, León-Mantero, y Maz-Machado, 2015).

Como parte de un estudio cuyo objetivo consiste en estudiar las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes universitarios, presentamos avances de los resultados obtenidos en alumnos de primer y tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba.

Se trata de un estudio exploratorio en el que la muestra seleccionada consistió en un grupo de 277 estudiantes de primer curso y 131 de tercer curso. A través de las respuestas dadas en la escala de actitudes hacia las matemáticas diseñada y validada por Auzmendi (1992), formada por 25 ítems agrupados en cinco factores dimensionales (ansiedad, valor o utilidad, agrado, motivación y seguridad-confianza), analizaremos las correspondientes al factor motivación. Para realizar el análisis se usó el contraste de Mann-Whitney para la comparación del factor según género y curso.

Entre los resultados, encontramos valoraciones más positivas hacia las matemáticas con respecto a los ítems del factor motivación entre las mujeres de la muestra, aunque las diferencias se reducen entre los alumnos del tercer curso.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria: características y medición*. Bilbao: Mensajero.

Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E. y Jansen, A. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity. En *Mathematics Education Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education* (pp. 1-35): Springer International Publishing.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., y Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal*, 2.doi:10.4236/oalib.1101936

León-Mantero, C., Casas-Rosal, J.C., Maz-Machado, A. y Pedrosa-Jesús, C. (2017). Motivación hacia las Matemáticas en estudiantes del grado de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 539). Zaragoza: SEIEM.

FENOMENOLOGÍA EN LOS TRATADOS ESPAÑOLES DE AGRIMENSURA DEL SIGLO XVIII

Phenomenology in the Eighteen-Century Spanish Surveying Books

León-Mantero, C.[a], Maz-Machado, A.[a], Jiménez-Fanjul, N.[a] y Madrid, M.J.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

Los libros de texto son la principal fuente de información y apoyo para los profesores y los alumnos en las instituciones escolares desde su aparición. Su análisis evidencia cómo se implementaba el currículum y cómo se organizaba la enseñanza en el plan de estudios vigente (Gómez, 2011). Por ello, las investigaciones enmarcadas en la Historia de la Educación matemática que centran su atención en el análisis de libros de texto antiguos, nos aportan luz sobre los conocimientos matemáticos alcanzados en cada época, su forma de enseñarlos, así como el contexto histórico, social y educativo en el que se desarrollaron (Maz, Torralbo, y Rico, 2006).

A mediados del siglo XVIII, España se encontraba en una situación de abandono social y gubernamental hacia la instrucción de la profesión de agrimensor. La creación de las Reales Academias de Bellas Artes supuso el punto de partida para su institucionalización. Desde estas se examinaba a los aspirantes y se expedían títulos oficiales a aquellos que superaran las pruebas. Sin embargo, desde el gobierno no se aprobaron medidas de instrucción en la disciplina. Esta necesidad fue cubierta por la publicación de diversos tratados de Agrimensura que ayudaban a los aspirantes a preparar el examen de acceso al título (Faus, 1995).

Presentamos un análisis de cuatro de estos manuales de Agrimensura publicados en España durante el siglo XVIII por Xavier Ignacio de Echeverría, Manuel Hijosa, Juan García Berruguilla y Fernando Verdejo. Se trata de un estudio descriptivo y cualitativo que usa la técnica del análisis de contenido para interpretar los datos. El objetivo de nuestro estudio es mostrar la variedad de situaciones y contextos a los que los autores recurren a la hora de exponer los contenidos de las obras, a través del análisis de las definiciones, proposiciones, ejemplos y problemas propuestos en los libros de texto.

Referencias

Faus, A. (1995). El ejercicio profesional de la agrimensura en la España del siglo XVIII: titulación académica y formación teórica de los peritos agrimensores. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 18*(35), 425-440.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Maz, A., Torralbo, M., y Rico, L. (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y Madrid, M. J. (2017). Fenomenología en los tratados españoles de agrimensura del siglo XVIII. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 541). Zaragoza: SEIEM.

LA FORMACIÓN MATEMATICA DE MAESTROS EN ESPAÑA DURANTE EL SIGLO XVIII. INSTITUCIONES

The mathematical training of teachers in Spain in the 18th century. The institutions

Madrid, M.J.[a], López-Esteban, C.[b], León-Mantero, C.[c] y Maz-Machado, A.[c]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Salamanca, [c]Universidad de Córdoba

Para acercarnos a los antecedentes de las escuelas normales españolas debemos remontarnos al siglo XVII y primera mitad del XVIII cuando la capacitación docente se regía por mecanismos gremiales (López, 2011). La formación docente se realizaba de modo similar al llevado a cabo para el aprendizaje de otros oficios: el aprendiz actuaba al lado de un maestro como pasante, leccionista o ayudante durante un tiempo determinado, hasta el nacimiento en Madrid en 1642 de la Hermandad de San Casiano autorizada por el Rey Felipe IV cuyos objetivos se basaban en: “La protección del maestro y mejora de la enseñanza”.

En el siglo XVIII, por una Real Cédula de 10 de septiembre de 1743, ordenada por Felipe V, se concede a los maestros de primeras letras y en especial a la Hermandad de San Casiano el derecho a examinar a los aspirantes a maestros. En 1780 se creó el Colegio Académico del Noble Arte de las Primeras Letras, que reemplazó a la Hermandad de San Casiano. Carlos IV continuó la gestión de su antecesor hasta 1791, año en que deroga dicho Colegio y erige la Academia de Primera Educación, dependiente de la Secretada de Estado y cuyo poder era compartido por la Junta de Caridad (Gil de Zárate, 1885). Entre los requisitos indispensables que todo estudiante debía cumplir a la hora de ejercer con posterioridad la enseñanza elemental estaba “sufrir un examen relativo a la pericia en el arte de leer, escribir y contar”.

En el año 1797 se recogió por primera vez en el Reglamento de la Cátedra de Educación la palabra “normales”, equivalente a escuelas “modelo” que marcarían la pauta educativa a la que debían atenerse el resto de las escuelas públicas (Ruiz Berrio, 1980). A lo largo de finales del siglo XVIII y primer cuarto del siglo XIX se fueron sucediendo diversas instituciones, siempre a la zaga de los movimientos pedagógicos desarrollados en los países europeos (Anguita, 1997), tales como la Junta de Exámenes (1804), el Real Instituto Militar Pestalozziano (1806) y la Escuela Mutua de Madrid (1818), hasta que bajo la regencia de la reina María Cristina, en un ambiente de clara conmoción social, se institucionalizara la Escuela Central de Maestros (1839), donde en los primeros programa aparecen Nociones de Aritmética, Nociones de Geometría, Dibujo Lineal y Agrimensura.

Referencias

Anguita, R. A. (1997). Algunas claves de la historia de la formación del profesorado en España para comprender el presente. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 30, 97-109.

Gil de Zárate, A. (1885). *De la Instrucción Pública en España*. Madrid: Imprenta del Colegio de sordomudos.

López, C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Editorial Académica Española.

Ruiz Berrio, J. (1980). Estudio histórico de las instituciones para la formación de profesores. En *Actas del VII Congreso Nacional de Pedagogía: La investigación pedagógica y la formación de profesores* (pp. 99-120). Sociedad Española de Pedagogía. Madrid: SEP.

Madrid, M. J., López-Esteban, C., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2017). La formación matematica de maestros en España durante el siglo XVIII. Instituciones. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 543). Zaragoza: SEIEM.

PEDRO DE LUCUCE Y PEDRO PADILLA: DOS MATEMÁTICOS Y MILITARES EN EL SIGLO XVIII ESPAÑOL

Pedro de Lucuce and Pedro Padilla: two mathematicians and military men in Spain during the 18th century

Madrid, M.J.[a], Maz-Machado, A.[b], López-Esteban, C.[c] y León-Mantero, C.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba, [c]Universidad de Salamanca

La historia de las matemáticas y la educación matemática tiene entre sus objetivos descubrir y sacar a la luz personajes, libros de texto, instituciones, temas o corrientes de pensamiento, que en un momento dado han formado parte de esta disciplina y de su enseñanza. Con este objetivo, a lo largo de las últimas décadas se han realizado distintas investigaciones tanto a nivel nacional como internacional sobre la vida y la obra de distintos matemáticos, profesores de matemáticas o autores de libros para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo Schubring (1987) planteó una metodología para el análisis de libros históricos presentando a modo de ejemplo el caso de Lacroix como autor de libros de texto.

El siglo XVIII español supone el fin del período de mayor influencia en el terreno científico y educativo de las órdenes religiosas, hecho que culmina con la expulsión de los jesuitas en 1767, y a su vez el incremento del fomento de las instituciones civiles y militares para la enseñanza de las matemáticas (Gómez, 2011). Dado el papel relevante que tuvieron estas academias militares en la enseñanza de las matemáticas en el siglo XVIII, el objetivo de este trabajo es presentar la vida y obra de dos militares de este siglo, que se dedicaron también a la enseñanza de las matemáticas dirigida a militares.

Pedro de Lucuce y Ponce (1692 – 1779) fue profesor y director de la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona y autor entre otras obras del libro inédito *Curso de Matemáticas, Fortificación, Artillería, Cosmografía y Arquitectura* (Ceballos, Núñez y Villacampa, 2013). A su vez, Pedro Padilla y de Arcos (1724 – 1807?) fue director y profesor de la Academia de Matemáticas del cuartel de Guardias de Corps de Madrid y autor de *Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra* publicado entre 1753–1756 (Blanco, 2013). Ambos autores son una muestra de la relación entre las matemáticas y el ámbito militar durante el siglo XVIII.

Referencias

Blanco, M. (2013). The Mathematical Courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in Eighteenth-Century Spain and France. *Science & Education, 22*(4), 769-788.

Ceballos, M., Núñez, J. y Villacampa, R. (2013). Pedro de Lucuce y Ponce y las instituciones matemático-militares españolas del siglo XVIII. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 16*(1), 147-168.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 9-22.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41-50.

Madrid, M.J., Maz-Machado, A., López-Esteban, C. y León-Mantero, C. (2017). Pedro de Lucuce y Pedro Padilla: dos matemáticos y militares en el siglo XVIII español. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 545). Zaragoza: SEIEM.

EVALUACIÓN DE LA FALACIA DE COMPARACIONES EN VALORES ABSOLUTOS EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Evaluation of the fallacy of comparisons in absolute values in future teachers of primary education

Martínez-Ortiz, F., Molina-Portillo, E., Burgos, M., Garzón, J., Arteaga, P. y Contreras, J.M.

Universidad de Granada

Los gráficos de los medios de comunicación, por lo general, utilizan terminología técnica adecuada, pero también pueden contener elementos estadísticos ambiguos o erróneos, empleando convenciones de comunicación de los resultados estadísticos que pueden llevar a una mala interpretación. Por tanto, se plantea la necesidad de que los medios de comunicación entiendan que deben facilitar la validez de los mensajes, su naturaleza y la credibilidad de la información o las conclusiones que presentan. Autores como Wallman (1993) o Gal (2002) explican el concepto de alfabetización o cultura estadística como la habilidad para comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos de los que estamos rodeados en nuestra vida cotidiana, combinada con la habilidad para apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en decisiones públicas, personales, privadas y profesionales.

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) presentan la heurística de representatividad como el sesgo responsable de realizar una evaluación rápida de la información estadística basadas en una cantidad insuficiente y parcial de la información.

Este trabajo evalúa un sesgo relacionado con la heurística de la representatividad, la denominada "falacia de las comparaciones en valor absoluto", en una muestra de 75 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Esta falacia, común en los medios de comunicación, trata de impresionar al lector, utilizando valores absolutos, al comparar poblaciones seleccionando parte de la información disponible.

Los resultados muestran la escasa comprensión gráfica de los estudiantes participantes en el estudio. En nuestro caso, los resultados apuntan a que los participantes no alcanzan suficiente competencia gráfica para llevar a cabo dicha lectura, debido principalmente a que no son capaces de reconocer el sesgo asociado al gráfico.

Reconocimientos: Proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126.

Referencias

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Kahnemann, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Wallman, K.K. (1993). Enhancing statistical literacy: enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), 1–8.

Martínez-Ortiz, F., Molina-Portillo, E., Burgos, M., Garzón, J., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2017). Evaluación de la falacia de comparaciones en valores absolutos en futuros profesores de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 547). Zaragoza: SEIEM.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA: MÉTODOS ANTIGUOS DE MULTIPLICACIÓN

History of mathematics in the classroom: old multiplication methods

Maz-Machado, A.[a], Madrid, M.J.[b] y León-Mantero, C.[a]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

La historia de las matemáticas puede ser una herramienta con muy distintos fines y usos en el aula de matemáticas. Numerosos autores han expuesto las ventajas de la inclusión de actividades o propuestas relacionadas con la historia de las matemáticas en las aulas de los distintos niveles de la enseñanza de las matemáticas Entre ellos Fauvel (1991) indica que la incorporación al aula de la historia de las matemáticas permite comparar las técnicas que se utilizaban en la antigüedad con las actuales para establecer el valor de las modernas. Siguiendo con este planteamiento, el objetivo de investigación que se plantea en este estudio es identificar y clasificar las diferencias entre dos métodos de multiplicación poco usuales o del pasado respecto al método actual que encuentran los estudiantes para maestro de Educación Primaria.

Para ello, en la asignatura Matemáticas de 1º del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba tras abordar el tema de sistemas de numeración y las operaciones numéricas en los números naturales y enteros, se realiza una práctica sobre sistemas de multiplicación antiguos o poco usuales, en particular el método egipcio (Smith, 1958) y el de los campesinos rusos (Smith, 1958). La parte final de la actividad incluía varias preguntas, entre ellas una relacionada con las diferencias respecto al método que actualmente se utiliza para multiplicar.

La población fue de 120 alumnos de primer curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba de los cursos 2015/2016 y 2016/2007. La investigación realizada es de carácter exploratoria, cualitativa y descriptiva. Los datos obtenidos se analizaron mediante la técnica del análisis de contenido mediante el Software ATLAS.ti, (Versión 5.0; Muhr, 2004) el cual permitió establecer categorías de correlación conceptual.

Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos desconocen estos métodos antiguos y su posible uso en las aulas. El análisis de las respuestas a la pregunta realizada a los alumnos mostró que estos consideraron una variedad de diferencias entre los dos métodos de multiplicar antiguos que se trabajaron en clase respecto al que actualmente se usa. Estas diferencias se agruparon bajo cuatro categorías: a) Estructura del método: Relativa a lo problemático o efectivo que puede resultar el uso de estos métodos respecto al actual. b) Procedimiento y aplicación: Se refiere a los procedimientos en relación con la duración en el tiempo o al grado de dificultad/facilidad. c) Proceso matemático: Asociado a las acciones matemáticas necesarias para resolver la multiplicación en relación con los conocimientos y operaciones previos que se deben poseer. d) Otros: Aquella a las que no se les encuentra ninguna asociación o vínculo con otras diferencias.

Referencias

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics, 11*(2), 3-6.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics (Vol. I)*. New York: Dover Publications.

Muhr, T. (2004). ATLAS.ti (Version 5.0) [Programa Informático]. Berlin, Germany: ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH.

Maz-Machado, A., Madrid, M.J. y León-Mantero, C. (2017). La historia de las matemáticas en el aula: métodos antiguos de multiplicación. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 549). Zaragoza: SEIEM.

EVALUACIÓN DE LAS DESTREZAS MATEMÁTICAS DE LA COMPETENCIA GRÁFICA EN FUTUROS PROFESORES

Evaluation of graphical competence skills for future Mathematics teachers

Molina-Portillo, E., Burgos, M., Garzón, J., Martínez-Ortiz, F., Arteaga, P. y Contreras, J.M.
Universidad de Granada

La interpretación de gráficos estadísticos de los medios de comunicación forma parte de la cultura o alfabetización estadística que cualquier ciudadano debe tener para poder desenvolverse plenamente en la sociedad actual. Por tanto, es necesario que los profesores encargados de su enseñanza posean dicha cultura y, además, estén capacitados para desarrollarla en sus estudiantes. Por esta razón, se hace imprescindible un conocimiento profundo de su problemática, ya que un gráfico sesgado o mal construido provocará que la información no llegue de forma correcta al ciudadano que debe interpretarlo. Como indica Gal (2002), un consumidor de datos estadísticos no solo necesita poseer unas destrezas estadísticas, sino que ha de dominar unas ciertas habilidades lingüísticas, un conocimiento del contexto, una posición de cuestionamiento y unas destrezas matemáticas. Es por ello, que los consumidores de datos deben conocer las matemáticas esenciales involucradas en la generación de ciertos indicadores estadísticos, así como la conexión matemática entre los estadísticos de resumen, las gráficas o tablas y los datos brutos sobre los que se basan. Es decir, los adultos necesitan tener habilidades numéricas a un nivel suficiente para permitir la interpretación correcta de los datos utilizados en los informes estadísticos (Gal, 2002).

Un elemento habitual que, en la mayoría de los casos, fundamenta el contenido de la gráfica, y por consiguiente de la noticia, es el porcentaje. La comprensión de los resultados estadísticos básicos relativos a porcentajes requiere familiaridad con su obtención, intuición y cierta medida formal con procedimientos matemáticos subyacentes o cálculos utilizados para generar estadísticas (Garfield y Gal, 1999).

Como DeVeaux y Velleman (2008) señalan, el reto de la docencia de la estadística es enseñar una amplia variedad de habilidades que, en su mayoría, requieren juicio además de la manipulación matemática. Por estos motivos, en este trabajo se evalúan las destrezas matemáticas de 75 futuros profesores de Educación Primaria, que serán en el futuro los encargados de formar ciudadanos estadísticamente cultos, respecto de un gráfico de líneas sesgado. Los estudiantes, para interpretar correctamente la información, han de calcular el porcentaje de incremento representado en la gráfica y extraer conclusiones a partir de los datos presentados. Los resultados obtenidos evidencian que el grupo de futuros docentes presenta grandes dificultades en el análisis del gráfico, en especial a la hora de especificar la proporcionalidad respecto al total.

Reconocimientos: Proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126.

Referencias

DeVeaux, R. y Velleman, R. (2008). Math is music: statistics is literature. *Amstat News, 375*, 54-58.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Garfield, J. y Gal, I. (1999). Assessment and statistics education: Current challenges and directions. *International Statistical Review, 67*, 1–12.

Molina-Portillo, E., Burgos, M., Garzón, J., Martínez-Ortiz, F., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2017). Evaluación de las destrezas matemáticas de la competencia gráfica en futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 551). Zaragoza: SEIEM.

DESEMPEÑO DE LOS FUTUROS MAESTROS ANTE UNA TAREA DE COMPARACIÓN NUMÉRICA

Performance of pre-service teachers in a numerical comparison task

Monje, J.[a] y Gómez, B.[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Valencia

Muchos estudiantes para maestro no adquieren adecuadamente los conceptos de razón y proporción (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012). Estos estudiantes parecen no tener bien constituidos ciertos objetos mentales que, de acuerdo con Fernández (2009), pueden considerarse precursores de estos conceptos. Freudenthal (1983) resalta la importancia de considerar el objeto mental "relativamente", especialmente en los contextos de comparación de parejas de cantidades relativas. Basándose en este estudio, Fernández y Puig (2003) consideran la relativización de las comparaciones como precursora de los conceptos de razón y proporción. A la vista de ello, en este trabajo pretendemos analizar qué dificultades tienen los futuros maestros cuando se enfrentan a situaciones que requieren este tipo de relativización.

Para ello hemos diseñado una tarea de comparación numérica del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012) involucrando el objeto mental "relativamente". Para conocer los patrones de respuesta de los estudiantes para maestro de educación primaria, analizamos las resoluciones de 339 futuros maestros.

Realizamos un análisis del contenido matemático de la tarea (análisis racional). Del marco teórico así como del análisis racional de la tarea, se derivan las dimensiones de análisis que nos permiten interpretar las resoluciones de los estudiantes para maestro. Los resultados obtenidos se han organizado en esquemas de categorías y subcategorías que dan cuenta detallada de los patrones cognitivos de respuesta.

Los resultados indican que existe un grupo importante de futuros maestros que optan por un criterio absoluto para dar respuesta a la tarea. Este criterio para manejar las cantidades no es el pertinente, sin ser erróneo. Este aspecto pone en evidencia la falta de competencia de muchos estudiantes para maestro en relación con la comparación de cantidades relativas que tienen que ver con las decisiones de compra, cuando como consumidores en los supermercados les presentan distintos tipos de descuento.

Se ha constatado que para la mayoría de los futuros maestros no es fácil hacer las comparaciones cuando las ofertas se presentan con razones desiguales, diferentemente normalizadas y con referentes distintos, como ocurre en nuestra tarea. Alrededor del 80% de estos no fueron capaces de dar una respuesta satisfactoria a la tarea. Estos resultados muestran que los estudiantes para maestro no tienen bien constituido el objeto mental "relativamente".

Referencias

Ben-Chaim, D., Keret, Y., e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. España: Universidad de Valencia.

Fernández, A., y Puig, L. (2003). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R, Escolano, J. M. Gairín, y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29-46). Logroño: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Monje, J. y Gómez, B. (2017). Desempeño de los futuros maestros ante una tarea de comparación numérica. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 553). Zaragoza: SEIEM.

NIVELES DE SECUENCIA NUMÉRICA DE UN ALUMNO CON DISCALCULIA

Acquisition and elaboration of the sequence number-word of a child with dyscalculia

Moral Sánchez, M.J. y Gutiérrez-Soto, J.

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València

Este trabajo pretende estudiar el nivel de competencia en aritmética de un alumno de cuarto curso de Educación Primaria que tiene Discalculia del Desarrollo. La Discalculia del Desarrollo (DD), según Rosselli y Matute (2011), es un trastorno en el aprendizaje que se caracteriza por la dificultad para asimilar y recordar datos numéricos y aritméticos que se utilizan para realizar procedimientos de cálculo y crear estrategias para resolver problemas. Según las maestras, el nivel de matemáticas del estudiante es de segundo curso de primaria y muestra errores al resolver cálculos básicos como sumas y restas tanto oralmente como de forma escrita.

Con el fin de comprender mejor el origen de estos errores y comprobar si provenían de un mal aprendizaje de la secuencia numérica, diseñamos un cuestionario para conocer en qué niveles de adquisición y elaboración de secuencia numérica (Fuson, 1988) se encuentra el alumno con DD. El nivel de adquisición muestra qué parte de la secuencia numérica ha sido memorizada por el alumno de forma estable y correcta. El nivel de elaboración indica en qué grado el alumno ha establecido relaciones entre los numerales de la secuencia numérica de forma reflexiva.

El cuestionario consta de 19 preguntas, de las cuales cinco permiten determinar el nivel de adquisición y 14 el nivel de elaboración. Las preguntas las realizó oralmente María José Moral que asistía como alumna en prácticas y las respuestas fueron registradas mediante una grabación de audio.

Con respecto al nivel de adquisición, identificamos la parte estable y convencional del 1 al 50, la parte estable pero no convencional del 51 hasta el 80 y la parte no estable del 81 al 100. Sin embargo, el estudiante tuvo dificultades a la hora de pasar de una decena a otra (por ejemplo, del 39 al 40).

Con respecto a su nivel de elaboración, el alumno tiene un nivel medio entre cadena fragmentable y cadena numerable. El alumno no fue capaz de contar hacia atrás en la secuencia numérica.

Referencias

Fuson, K. C (1988). *Children's counting and concepts of number.* Springer-Verlag, New York.

Roselli, M. y Matute, E. (2011). La neuropsicología del desarrollo típico y atípico de las habilidades numéricas. *Revista Neuropscología, Neuropisquiatria y Neurociencias, 11*(1), 123-140.

Moral Sánchez, M.J. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Niveles de secuencia numérica de un alumno con discalculia. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 555). Zaragoza: SEIEM.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROYECTO EDINSOST

Mathematical Education in the EDINSOST Proyect

Moreno-Pino, F., Guerrero, A.Á. y Prieto, J.A.

Universidad de Cádiz

El póster que presentamos es un resumen de una investigación que se está desarrollando cuyo objetivo es determinar cuál es el estado actual de la Educación Matemática, en relación a la inclusión de competencias profesionales coherentes con una Educación para la Sostenibilidad, en las titulaciones de formación para profesores en la Facultad de CC.EE. de la Universidad de Cádiz. Este trabajo forma parte de los resultados de EDINSOST, proyecto I+D+i 2015 del programa estatal de investigación, desarrollo e innovación orientado a los retos de la sociedad, EDU2015-65574-R (MINECO/FEDER), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad: España. El objetivo general de EDINSOST es "dotar a los futuros titulados de las competencias necesarias para catalizar el cambio hacia una sociedad más sostenible".

Cada vez es mayor la preocupación de las sociedades modernas por asegurar adecuados niveles de alfabetización entre sus ciudadanos. El cambio de época exige al docente nuevas funciones (Bazdresch, 1998). El mismo autor asegura cómo también la sociedad asigna a la escuela una nueva función: preparar para vivir. Pero, ¿cómo hacer esto? La inclusión de la Educación para la Sostenibilidad (ES) en los sistemas educativos de los diferentes países del mundo se presenta como alternativa posible por tratarse de un tipo de educación que trabaja desde perspectivas complejas permitiendo profundizar en las relaciones que se producen en una realidad. Sin embargo, la ES resulta ser un área de estudio transversal muy compleja, por lo que no se la debe considerar como una asignatura más sino como punto de encuentro entre varias (Calabuig et al, 2011) entre las cuáles la Educación Matemática debe estar, pues es función de la misma responder de manera crítica y comprometida, no sólo con el "saber matemático", sino con la democracia, la justicia social, la ética y la solidaridad (Azcárate, 2005). Así, y en asunción de los principios del paradigma de la complejidad, entendemos -en palabras de Bazdresch (1998)- la formación en competencias matemáticas no sólo como el dominio de una serie de procesos y métodos para aprender desde la experiencia sino, sobre todo, desde la intersubjetividad; lo que enfatiza la dimensión ética-axiológica de la Educación Matemática.

En este trabajo aportamos un primer resultado del proyecto EDINSOST, como es el "mapa de la competencia en sostenibilidad" deseable para el currículo de formación de profesores de Matemáticas. El mapeo es un emergente del análisis documental y curricular de más de sesenta investigadores españoles que determina el perfil que se considera oportuno en los egresados, con el fin de caracterizar e implementar la práctica docente universitaria futura considerando la formación en Educación Matemática desde la Educación para la Sostenibilidad como referente deseable.

Referencias

Azcárate, P. (2005). El profesor de matemáticas ante el cambio educativo: una visión desde la complejidad. En *Actas del V CIBEM*. Oporto: Universidad de Oporto.

Bazdresch, M. (1998). Las competencias en la formación de docentes. *Educar. Revista de Educación. Formación docente, 5*, 1-5.

Calabuig, T., Geli, A.M., y Alsina, A. (2011). La Ambientalización curricular de la educación matemática. *En Actas del III Congrés Internacional UNIVEST*. Girona: Universitat de Girona.

Moreno-Pino, F., Guerrero, A.Á. y Prieto, J.A. (2017). La educación matemática en el proyecto EDINSOST. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 557). Zaragoza: SEIEM.

LA FIABILIDAD DE PISA EN SU EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

The realibility of PISA in its evaluation of the mathematical competence

Moya Pérez, J.A.[a] y Ferrando, I.[b]

[a]Universidad Internacional de La Rioja, [b]Universitat de València

Las pruebas de evaluación de la competencia matemática del programa internacional de evaluación de alumnos, conocido como PISA por el acrónimo en inglés (Programme for International Student Assessment), han conseguido, debido a su fuerte impacto mediático, poner la enseñanza de las matemáticas en el centro del debate educativo, convirtiéndose en un tema de gran interés para muchos autores (Niss, 1999; Rico, 2004; Baird et al, 2011; Carballo, Rico y Lupiáñez, 2013). Este debate suele centrarse en la lista de puntos establecida a partir de los resultados de las pruebas, sacando, a menudo, conclusiones generales sobre la calidad del sistema educativo.

Independientemente de los resultados de las pruebas de matemáticas, los documentos ofrecidos por diferentes entidades oficiales (OCDE, MECD, etc) o los trabajos académicos, todavía son ajenos a la mayoría de profesores de educación secundaria y, por tanto, los problemas utilizados en las pruebas PISA son escasamente tratados en las aulas. En este trabajo trataremos de presentar de forma esquemática cuáles son los aspectos evaluados por PISA, a partir del marco teórico establecido (Marco teórico pruebas PISA, 2015), y bajo qué criterios se evalúan, aportando una serie de ejemplos a partir de las preguntas liberadas (Preguntas liberadas de PISA, 2015). Finalmente abrimos una pequeña discusión sobre si la OCDE a través del programa PISA, ofrece una medida objetiva de la calidad de la enseñanza de las matemáticas

Referencias

Baird, J., Isaacs, T., Johnson, S., Stobart, G., Yu, G., Sprague, T., y Daugherty, R. (2011). *Policy effects of PISA.* UK: Pearson

Caraballo, R., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: el caso de las matemáticas. *Profesorado, 17*(2), 225-241.

Marco teórico pruebas PISA 2015 en español. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/inee/estudios/pisa-2015.html

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 1-24.

Preguntas liberadas de PISA como recursos didácticos de Matemáticas. Recuperado de http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/preguntas-liberadas-pisa-piaac/preguntas-pisa-matematicas

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.) *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 89-102). A Coruña: SEIEM.

Moya Pérez, J.A. y Ferrando, I. (2017). La fiabilidad de PISA en su evaluación de la competencia matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 559). Zaragoza: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Analysis of the Understanding about Function Concept

Muñoz Orozco, A., Arenas-Peñaloza, J. y Rodríguez Vásquez, F.M.

Universidad Autónoma de Guerrero, México

Este trabajo tiene como objetivo analizar la comprensión de estudiantes de licenciatura acerca del concepto de función real de variable real. Investigamos el tema, debido a que una finalidad de los docentes, es que sus estudiantes alcancen la comprensión de los objetos Matemáticos que se están tratando en el aula de clases (Perkins y Blythe, 1994). Para llevar a cabo este estudio, se tomó como marco teórico el modelo expuesto por Albert y Kim (2015) el cual está basado en la definición de comprensión de CCSSM (Common Core State Standards for Mathematics). Esta definición consta de tres categorías: i) la habilidad para justificar; ii) entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera y; iii) entender de donde viene una regla matemática. Metodológicamente se diseñaron y aplicaron ítems con base a estas tres categorías. La aplicación se realizó con estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Esta definición de comprensión de matemáticas, podría ser usada por profesores para evaluar el nivel de compresión de sus estudiantes, respecto al concepto de función real de variable real, y proponer actividades para fortalecer cada categoría y mejorar estos niveles.

Referencias

Perkins, D., y Blythe, T. (1994). Putting Understanding Up Front. *Educational Leadership, 51*(5), 4-7.

Albert, L., y Kim, R. (2015). Applying CCSSM Definition of Understanding to Assess Students Mathematical Learning. En C. Suurtamm, y A. R. McDuffie, *Assessment to Enhance Teaching and Learning* (págs. 233-246). Boston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief School Officers (NGA Center and CCSSO). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: NGA Center and CCSSO.

Muñoz Orozco, A., Arenas-Peñaloza, J. y Rodríguez Vásquez, F. M.. (2017). Análisis de la comprensión sobre el concepto de función. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 561). Zaragoza: SEIEM.

UN EJEMPLO DE TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE-ENSEÑANZA PARA EDUCACIÓN INFANTIL: ORIENTAR, CONSTRUIR, OPERAR CON CUERPOS Y FIGURAS

An example of learning-teaching trajectory for child education: guiding, building, operating with solid shapes and figures

Novo, M.L. y Espina, E.

Universidad de Valladolid

A partir de la pregunta de investigación ¿cómo contribuye una trayectoria de aprendizaje-enseñanza de la geometría en Educación Infantil para el desarrollo del pensamiento espacial?, se presenta un estudio cuyos objetivos han sido: a) diseñar una práctica docente para niños de 5 años considerando la trayectoria cuyos aspectos fundamentales son: orientar, construir y operar con cuerpos y figuras; b) analizar los aprendizajes geométricos que realizan los alumnos en el contexto de dicha práctica.

La elaboración de dicha práctica se fundamenta en las experiencias realizadas por el equipo TAL del Instituto Freudenthal, dicho equipo descubrió que hacer un diseño de trayectoria no consistía en redactar los temas habituales, sino que la labor realizada sobre la trayectoria implicaba la aparición de aspectos inesperados sobre cómo enseñar matemáticas y una investigación de nuestra manera habitual de razonar (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008). La trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la geometría en Educación Infantil implica tres destrezas: **Orientación**. Cada niño podrá establecer su posición y la de los objetos que le rodean. **Construcción**. Se aborda la manipulación libre de materiales, luego bloques, mecanos, … posteriormente plegado y recortado de papel y finalmente se suscitará dibujar formas y patrones y **operaciones con cuerpos y figuras**. La geometría es un elemento dinámico. Las transformaciones geométricas ayudan en el desarrollo del pensamiento espacial en el niño (Van Den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2012).

En el diseño de la práctica docente vamos a poner un ejemplo de cada aspecto de la trayectoria de aprendizaje-enseñanza. Actividad de orientación: "buscando un tesoro", se identificará la posición en una situación real, se trabaja la orientación respecto a los objetos… En cuanto a construcción: "Construyendo y diseñando", se apilan piezas siguiendo un patrón establecido, se consigue desarrollar la percepción espacial. En lo que se refiere a operaciones: "Jugando se descubren simetrías", experimentando con el propio cuerpo, con objetos de la vida cotidiana y con plegado de papel. Se ha logrado un modelo de enseñanza más dinámico, en el que continuamente los alumnos se enfrentan a tareas que les ofrecen la oportunidad de construir conceptos, investigar y comprobar las relaciones entre ellos, favoreciendo la visualización y el razonamiento espacial.

Referencias

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: un recorrido guiado. Correo del maestro, 149, p.21. Recuperado el 8 de mayo de 2017 de: http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2008_guided-tour.pdf

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2012). *Los niños pequeños aprenden medida y geometría: Proyecto TAL*, coordinadores Marja Van Den Heuvel-Panhuizen y Kees Buys; Instituto Freudenthal et al. Mexico: Correo del Maestro: La Vasija.

Novo, M.L. y Espina, E. (2017). Un ejemplo de trayectoria de aprendizaje-enseñanza para educación infantil: orientar, construir, operar con cuerpos y figuras. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 563). Zaragoza: SEIEM.

ARTICULANDO MODOS DE COMPRENDER LA DERIVADA DESDE UNA PERSPECTIVA LOCAL

Articulating modes of understanding the derivatives from a local perspective

Pinto-Rojas, I.[a] y Parraguez, M.[b]

[a]Universidad Católica del Norte, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile

Este póster presenta los primeros resultados de un trabajo doctoral que investiga sobre la comprensión del concepto de derivada en estudiantes universitarios. En relación a ello, desde la perspectiva local del concepto en estudio, se puede señalar que se ha diseñado y validado un modelo cognitivo que sistematiza tres modos de comprender la derivada desde lo local, sus componentes han sido descritas como: modo Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), modo Analítico-Operacional (AO) y modo Analítico-Estructural (AE) de la derivada y su comprensión es entendida como la capacidad del aprendiz para articular sus tres componentes.

Este modelo de comprensión emerge desde una variación de –Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska (2000), marco teórico cognitivo construido para atender un obstáculo epistemológico en el álgebra lineal. Con base en un análisis histórico epistemológico de la derivada se ha realizado la variedad del marco de Sierpinska, para que brinde herramientas teóricas para comprender nociones del cálculo diferencial. Como resultado de este análisis emergió el concepto de recta tangente como obstáculo epistemológico para la comprensión de la derivada desde una perspectiva local, y se han identificado tres momentos en la construcción del concepto que generan tres formas de comprender la recta tangente: (1) una euclideana, desde la intuición geométrica, como la recta tangente que toca en un solo punto a la curva y no la corta, (2) una cartesiana, que nace con la incorporación del sistema coordenado para la gráfica de una función y la recta tangente como la aproximación de las rectas secantes y (3) una leibniziana, que considera una curva formada por infinitos segmentos, cuya recta tangente es la prolongación del segmento en el punto dado. En este sentido, el modelo planteado con las tres componentes SGC, AO y AE permite direccionar un estudio de la comprensión de la derivada.

Investigaciones en didáctica de la matemática realizadas por varios autores, en relación a la recta tangente, por ejemplo, Robles del Castillo y Font (2010), reportan las dificultades didácticas para su comprensión en los estudiantes, hecho que recoge este modelo con el objetivo de hacer explícitos los elementos que facilitan un tránsito entre los modos SGC, AO y AE, en vías de la comprensión profunda de la derivada en lo local. Este póster describe elementos que articulan las formas de comprensión determinadas, con evidencia empírica a través de una metodología cualitativa, bajo un paradigma interpretativo, con un estudio de caso conformado por investigadores-docentes que imparten cursos de cálculo diferencial en una institución de Educación Superior.

Referencias

Robles, M.G., Del Castillo, A.G. y Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulando modos de comprender la derivada desde una perspectiva local. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 565). Zaragoza: SEIEM.

UN PASO MÁS EN EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS: APRENDIZAJE MIXTO EN ENSEÑANZAS SUPERIORES

PBL and beyond: blended learning at high education

Piñero, J.C. y Guerrero, A.Á.

Departamento de didáctica, área de matemáticas. Universidad de Cádiz.

En el afán de ir más allá de los métodos basados en clases magistrales (MC) para la implementación del aprendizaje basado en problemas (PBL) en la enseñanza de conocimientos relacionados con el ámbito de las matemáticas en educación universitaria (Valero, 2016), los enfoques para promover el aprendizaje colaborativo se están volviendo cada vez más diversos, difundidos y generalmente bien aceptados dentro de la educación universitaria. Ejemplos de métodos de aprendizaje colaborativo relativamente nuevos y estructurados incluyen el aprendizaje en equipo y la enseñanza just-in-time. Ejemplos de enfoques menos estructurados incluyen compartir pares de pensamiento, discusiones de casos y clases invertidas (FP).

La progresiva implementación y empleo de una gama de métodos instructivos para apoyar el aprendizaje basado en problemas desde dinámicas colaborativas es cada día más evidente y, sobre todo, necesaria. De hecho, no es difícil que la tasa de adopción de éste tipo de métodos de aprendizaje colaborativo acelere, debido al creciente énfasis en el desarrollo de competencias en equipo y la extensa disponibilidad de medios digitales, que pueden favorecerla.

Sin embargo, la adopción de tales enfoques está entrando en una nueva y difícil era, enfrentando desafíos persistentes, entre los cuales se encuentra la falta de directrices útiles.

En la presente contribución, pretendemos demostrar consistentemente resultados de excelencia (Piñero, 2017) cuando se utilizan tales métodos y estrategias de aprendizaje, evidenciados mediante la puesta en práctica de dicha metodología en la docencia de asignaturas universitarias durante el curso 2016-17. De igual manera, facilitaremos las directrices y métodos utilizados para su puesta en práctica en el contexto específico mencionado, así como los resultados de aprendizaje y las impresiones de los alumnos que han cursado dichas asignaturas.

Referencias

Valero, P. (2016). Recontextualizaciones y ensamblajes: ABP y matemáticas universitarias. Educación matemática para el cambio. *Didacticae, 1*, 4-25.

Piñero, J.C. (2017). Un paso más en el aprendizaje basado en problemas: aprendizaje mixto en la universidad. *Actas de la II Jornadas de innovación docente universitaria UCA*.

Piñero, J.C. y Guerrero, A.Á. (2017). Un paso más en el aprendizaje basado en problemas: aprendizaje mixto en enseñanzas superiores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 567). Zaragoza: SEIEM.

ESTRATEGIAS INFORMALES EN PROBLEMAS DE DIVISIÓN DE UN ESTUDIANTE CON AUTISMO

Informal strategies of a student with autism when solving division problems

Polo, I.[a], González, M.J.[a], Olivera, B.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna

La resolución de problemas matemáticos en estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA) no ha sido estudiada en profundidad a pesar del aumento de estudiantes con esta discapacidad. Aunque con mucha variabilidad, la mayoría de las personas con TEA presentan rasgos cognitivos que no benefician la resolución de problemas: dificultades con la comunicación y de comprensión del significado de vocabulario, o memoria a corto plazo debilitada (Bae, Chiang y Hickson, 2015).

Se presenta un estudio sobre las estrategias que utiliza un estudiante con TEA de 11 años para resolver problemas de enunciado verbal de división, antes de recibir instrucción formal sobre esta operación. El objetivo del estudio es analizar las primeras estrategias informales del estudiante y las representaciones utilizadas, en función del significado de la división (reparto y agrupamiento) y de los contextos del problema (contexto cercano a los intereses del estudiante y contexto estándar).

Los resultados indican que el estudiante fue capaz de resolver los problemas de agrupamiento (tanto de contexto cercano como estándar), sin embargo, no resolvió ninguno de los problemas de reparto, los cuales afrontó con estrategias multiplicativas a través de un dibujo. Este hecho contradice la creencia común de que el modelo de división por reparto surge de manera más espontánea y con anterioridad al modelo de división por agrupamiento.

La mayoría de las representaciones utilizadas por el estudiante presentaron un gran nivel de detalle, ratificando lo que indican Booth et al. (2003) como actuación propia de estudiantes con TEA. Las dificultades en los problemas de reparto llevaron a proseguir con una metodología de enseñanza que hiciera hincapié en la comprensión del vocabulario característico de las situaciones de reparto: *mismo, cada, igual.*

Agradecimientos: Trabajo financiado parcialmente con el Proyecto "Una perspectiva competencial para la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria y secundaria: implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje", del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2015-65270-R.

Referencias

Bae, Y.S., Chiang, H. M. y Hickson L. (2015). Mathematical Word Problem Solving Ability of Children with Autism Spectrum Disorder and their Typically Developing Peers, *Journal of Autism Developmental Disorder, 45*(7), 2200–2208.

Booth, R., Charlton, R., Hughes, C. y Happe, F. (2003). Disentangling weak coherence and executive dysfunction: Planning drawing in Autism and ADHD. *Philosophical Transactions of the Royal Society, 358*(1430), 387–392.

Polo, I., González, M.J., Olivera, B. y Bruno, A. (2017). Estrategias informales en problemas de división de un estudiante con autismo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 569). Zaragoza: SEIEM.

EL SIGNIFICADO DEL INFINITO EN UN EXPERIMENTO CON ESPEJOS ENFRENTADOS

The infinity in an experiment with confronted mirrorcs

Prieto-Sánchez, J.A.[a], Gómez-Alfonso, B.[b] y Fernández Escalona, C.M.[c]

[a]Universidad de Cádiz, [b]Universidad de Valencia, [c]Universidad de Málaga

Planteamiento. Para Bolzano (1851/1991) la conceptualización del infinito se basa en su consideración como atributo o propiedad de los conjuntos y el criterio de inclusión. Es dentro de los conjuntos infinitos donde hay que fijar la atención, es decir, en sus subconjuntos propios. Para Cantor (1983) la clave está en la relación biyectiva o correspondencia uno a uno que se podría constituir entre ellos. El reto para los docentes, es que el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes propias es un obstáculo difícil de superar para la comprensión de los conjuntos infinitos (Waldegg, 1996; Duval, 1983). Uno de los experimentos de enseñanza potencialmente valiosos para una primera reflexión sobre el infinito es el de los espejos paralelos enfrentados, porque permite escenificar la paradoja del infinito: la parte no es menor que el todo.

Objetivo. El objetivo del trabajo es realizar un experimento de enseñanza con espejos enfrentados para comprobar la hipótesis de que los conjuntos infinitos discretos en relación de inclusión y cuyos elementos aparecen alineados, tal y como aparecen en los espejos enfrentados, son idóneos para introducir el criterio de correspondencia, tomando como agente mediador la biyección con N, como criterio de comparación de los cardinales transfinitos.

Método, tarea y protocolo. La metodología en la que se sustenta este estudio es cualitativa y se lleva a cabo mediante un protocolo de preguntas en la modalidad de entrevista individual. Se entrevistaron nueve personas con criterios de conveniencia, disponibilidad y voluntariedad, de ellos siete estudiantes del Máster de Profesorado de Secundaria en la especialidad de Matemáticas y dos profesores de Didáctica de Matemática. La tarea consiste en poner y quitar bolas alineadas en el soporte físico entre los espejos y plantearles a los sujetos entrevistados preguntas relacionadas con las infinitas imágenes reflejadas en el espejo.

Resultados. El perfil inicial de los entrevistados respondió al modelo de aplanamiento y de indefinición. Todos reconocieron un infinito potencial en la imagen reflejada y ninguno planteo la correspondencia con N hasta que el entrevistador no llegó al final del protocolo. Aunque hubo profesores que recordaron la correspondencia que habían estudiado en su formación matemática, no vieron la forma de concretar la correspondencia en la situación planteada por las bolas.

Finalmente, como resultado de la entrevista todos aceptaron la equipotencia entre los conjuntos de bolas reflejados y N, y que esta correspondencia era la mejor justificación de que estos conjuntos infinitos eran igualmente infinitos.

Referencias

Bolzano, B. (1851). Paradoxien Des Unendlichen, Leipzig (publicación póstuma). *Las paradojas del infinito* (trad. L.F. Segura, 1991), México: Mathema.

Cantor, G. (1983). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* (J. Bares y J. Climent, trad.; Or. 1895).

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 358-414.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*(1)

Prieto-Sánchez, J.A., Gómez-Alfonso, B. y Fernández Escalona, C.M. (2017). El significado del infinito en un experimento con espejos enfrentados. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 571). Zaragoza: SEIEM.

TALENTO MATEMÁTICO EN UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA

Mathematical giftedness in a geometric problem

Ribera, J.M.[a], Ramírez, R.[b], Jaime, A.[c], Beltrán-Meneu, M.J.[c] y Gutiérrez, Á.[c]

[a]U. de La Rioja, [b]U. de Granada, [c]U. de Valencia

La investigación sobre el talento matemático se centra, principalmente, en tres líneas: identificación de estudiantes con talento, caracterización del talento matemático e intervención educativa (Castro 2008). En la psicología encontramos la mayoría de trabajos sobre las dos primeras líneas, si bien hay algunos desde la educación matemática. Castro, Benavides y Segovia (2006) emplean una batería de problemas multiplicativos y Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008) contrastan los problemas de matemáticas usados al seleccionar aspirantes al proyecto Estalmat, frente a tests utilizados por los psicólogos, y concluyen que los problemas no sólo son válidos, sino que pueden resultar incluso más eficaces.

En este póster presentamos el análisis de un problema de geometría, que forma parte de una investigación más amplia[1] que contempla, entre otros objetivos, estudiar la validez de problemas útiles para identificar a estudiantes con alta capacidad matemática. Las variables que nos han servido para determinar la calidad del razonamiento de los estudiantes han sido: a) interpretación del enunciado, b) grado de abstracción en la formulación de la resolución de la resolución (aritmética o algebraica) y c) proceso de resolución que muestran.

En el estudio participaron 9 estudiantes de 2º de ESO de nivel académico muy alto en matemáticas en sus centros de estudio. El problema planteado es: se da el dibujo de una cruz integrada por cinco cuadrados iguales. Hay un segmento dibujado, que es la diagonal del rectángulo formado por dos cuadrados alineados. La longitud del segmento es “x”. Se pide hallar el área de la cruz.

Como identificadores de alta capacidad hemos considerado: a) interpretación correcta del papel de la “x” en el enunciado (dato y no incógnita), b) uso de álgebra al resolver el problema (frente a la asignación de un valor concreto al lado de los cuadrados o a la hipotenusa “x”); c) estilo del proceso de resolución (plantear la obtención del lado de los cuadrados en función de “x”). También ayudan a discriminar, aunque no son exclusivas de alta capacidad matemática: d) servirse del teorema de Pitágoras, con “x” como hipotenusa; e) establecer y utilizar la relación entre los dos catetos (a, 2a), empleando sólo una variable para estos; f) originalidad (por ejemplo recomponer la figura).

Dos estudiantes lo resolvieron algebraicamente y en ellos se dieron todos los identificadores de alta capacidad mencionados. Otros estudiantes necesitaron recurrir a la asignación de valores concretos a “x” o no supieron identificar el papel de “x” en la resolución del problema. Dos estudiantes lo abordaron geométricamente, recomponiendo la figura. Como conclusión, tenemos que este problema permitió discernir varios niveles de capacidad matemática entre los estudiantes, siendo eficaz para la detección del talento matemático.

Referencias

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas y tendencias e influencias en España. En R. Luengo y otros (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.

Castro, E., Benavides, M., y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faísca, 11*(13), 4-22.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faísca, 13*(15), 30-39.

[1] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143.

Ribera, J.M., Ramírez, R., Jaime, A., Beltrán-Meneu, M.J. y Gutiérrez, A. (2017). Talento matemático en un problema de geometría. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 573). Zaragoza: SEIEM.

DEMOSTRACIONES VISUALES PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN EN ALUMNOS DE ALTAS CAPACIDADES

Proof without words to introduce mathematical proofs to gifted students

Ribera, J.M.[a] y Rotger, L.[b]

[a]Universidad de La Rioja, [b]Universitat de les Illes Balears

La existencia de proyectos de enriquecimiento de la enseñanza en matemáticas, como el programa Estalmat, permite a alumnos con altas capacidades la profundización en conceptos y procesos matemáticos que pueden ser de su interés. Uno de estos procesos es la demostración, un tema de especial importancia recogido en la LOMCE como obligatorio y transversal a todos los contenidos. Por todo esto nos surgió la necesidad de plantear una sesión dentro del programa Estalmat. El objetivo de facilitar diferentes métodos de demostración (tanto visuales como algebraicos) de algunos resultados conocidos por los alumnos de secundaria y promover el uso de las demostraciones matemáticas entre ellos aprovechando que los alumnos con altas capacidades tienen una sensibilidad más desarrollada para la resolución de problemas, cálculo o geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013).

Para facilitar el aprendizaje de la demostración podemos considerar el uso de las demostraciones visuales (Alsina y Nelsen, 2013). Dichos diagramas no pueden ser considerados realmente pruebas, pero permiten facilitar al observador por qué un concepto es verdadero y cuál es el camino para obtener su demostración. En el caso de los resultados que engloban relaciones numéricas, las representaciones mediante elementos gráficos permiten una visión diferente de los mismos. Este tipo de visualización permite aportar pistas para los futuros argumentos inductivos que se pueden usar para la demostración de las relaciones numéricas en los números naturales. Otro método que tuvimos en cuenta en la sesión es el uso de las isometrías en el plano, es decir, las transformaciones lineales que permiten mantener las distancias (rotaciones, translaciones y reflexiones). De esta forma, dos figuras geométricas relacionadas por una isometría son congruentes. Finalmente, consideramos importante la necesidad de plantear a los alumnos diferentes retos para la práctica de las habilidades adquiridas durante la sesión, en los cuales pueden considerar tanto métodos visuales como algebraicos para obtener pistas para sus demostraciones.

En este póster presentamos las soluciones aportadas por los alumnos de una sesión del programa Estalmat. El objetivo principal del estudio, que este trabajo inicia, es conocer las preferencias sobre los métodos de demostración que tienen los alumnos de altas capacidades.

Esta sesión se llevó a cabo con un grupo de 25 estudiantes de 2º curso del programa Estalmat Comunidad Valenciana (13 y 14 años) divididos en grupos de 5. En ella seguimos una metodología cooperativa para la resolución de los problemas planteados a los alumnos quienes usaban diversos materiales manipulativos para obtener la solución de los mismos. Como resultado, los alumnos aportaron diferentes perspectivas sobre las preferencias en los métodos de demostración de los conceptos matemáticos.

Referencias

Alsina, C. y Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Ribera, J.M. y Rotger, L. (2017). Demostraciones visuales para la introducción de la demostración en alumnos de altas capacidades. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 575). Zaragoza: SEIEM.

LOS TIPOS DE LENGUAJE DEL MUESTREO EN LOS TEXTOS ESCOLARES CHILENOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Language types of sampling in Chilean compulsory secondary education

Ruiz, K., Batanero, C. y Contreras, J.M.

Universidad de Granada.

Las Bases Curriculares (MINEDUC, 2013) señalan que el currículo de Matemática debe fomentar que los estudiantes logren transitar entre los distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas, y así conseguir que las expresiones matemáticas tengan un sentido próximo para los estudiantes.

El uso apropiado del lenguaje favorece el aprendizaje significativo y el desarrollo de un razonamiento adecuado en el alumno. También es esencial en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), puesto que se supone que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de una persona o institución al resolver problemas, y en estas prácticas se requiere el lenguaje. En consecuencia, los estudiantes deben adquirir un dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar y justificar sus soluciones.

En este trabajo se caracterizan y analizan los elementos del muestreo relacionados con los diferentes tipos de lenguajes que aparecen en una muestra de tres libros de texto de educación secundaria chilenos. Nuestro análisis se centrará en las diversas representaciones contenidas en dichos textos: términos y expresiones verbales; notación simbólica y expresiones algebraicas; y representaciones tabulares y gráficas.

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

MINEDUC (2013). *Bases Curriculares: Matemática, Educación Media*. Santiago, Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.

Ruiz, K., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2017). Los tipos de lenguaje del muestreo en los textos escolares chilenos de Educación Secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 577). Zaragoza: SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE LAS REFLEXIONES DE ESTUDIANTES DEL MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO SOBRE EL RECUERDO DE SU EXPERIENCIA ESCOLAR EN MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Characterization of Master's Degree in Teacher Training in Mathematics Secondary Education students' reflections on their memories of Middle and High School Experience in Mathematics

Salomón, M.S., Melo, L., Chamoso, J.M., Cáceres, M.J.,
Sánchez, B., Rodríguez, M., González, M.T. y Corrochano, D.

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las CCEE (Universidad de Salamanca)

El Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (MFPES), un máster profesionalizante, tiene una importancia destacada para la formación de futuros profesores de enseñanza obligatoria. Este trabajo, parte de un estudio más amplio que analiza la identidad profesional de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria como elemento que aporta información acerca de factores cognitivos y afectivos cruciales para enseñar (Beijaard et al., 2004; Lamote y Engels, 2010), se centra en caracterizar las reflexiones de los estudiantes sobre su recuerdo de la enseñanza de matemáticas recibida en Secundaria. 36 estudiantes del MFPES de las Universidades de Salamanca y Valladolid (2015-16 y 2016-17) reflexionaron sobre sus percepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas recibida en secundaria, atendiendo tanto al desarrollo de la instrucción como a la motivación de los profesores hacia la enseñanza.

Los estudiantes aludieron principalmente a los siguientes aspectos: i) Enseñanza basada en la transmisión de conocimientos (100%), con escasa participación del alumno (75%) y basada en la realización de actividades rutinarias (100%); sólo algunos aludieron a que, de forma aislada, se realizaban actividades no rutinarias (19%) y se utilizaban recursos, usualmente con cuerpos geométricos o películas en fechas especiales (36%); ii) Profesores motivados hacia la enseñanza (67%), donde el comportamiento del profesor (positivo o negativo) influyó (positiva o negativamente) tanto en su propia motivación y aprendizaje como en su forma de ver las matemáticas, e incluso en sus decisiones futuras relacionadas con esta materia.

Este estudio es un primer paso para analizar la identidad profesional de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. A pesar de tratarse de una muestra limitada y en un contexto concreto, los resultados reflejan la situación en la que se encuentran los futuros profesores de matemáticas de secundaria cuando están realizando un máster profesionalizante, lo que puede ser importante para el diseño y desarrollo de dicho máster a la vez que abre perspectivas de futuro en diferentes sentidos.

Referencias

Beijaard, D., Meijer, P. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20*, 107-128.

Lamote, C. y Engels, N. (2010). The development of student teachers' professional identity. *European Journal of Teacher Education, 33*(1), 3-18.

Salomón, M S., Melo, L., Chamoso, J. M., Cáceres, M.J., Sánchez, B., Rodríguez, M., González, M.T. y Corrochano, D. (2017). Caracterización de las reflexiones de estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato sobre el recuerdo de su experiencia escolar en matemáticas de secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 579). Zaragoza: SEIEM.

METODOLOGÍA CLASE INVERTIDA COMO ALTERNATIVA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

The Flipper classroom as an alternative methodology for mathematics education in university teaching

Sánchez-Cruzado, C.[a], Sánchez-Compaña, T.[a] y García-Pardo, F.[b]

[a]Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Málaga.
[b]Dpto. Economía Aplicada (Estadística y Ecometría), Universidad de Málaga.

Este trabajo de investigación se ha realizado con los objetivos de conocer los resultados obtenidos tras haber implementado propuestas didácticas basadas en la metodología de Clase Invertida (Flipped Classroom) en distintas asignaturas de matemáticas en diferentes cursos y titulaciones de la Universidad de Málaga; analizar la viabilidad didáctica de esta innovación; y su continuidad. Todo ello orientado a buscar nuevos modelos educativos que fomenten el trabajo colaborativo, la adaptación a distintos ritmos de aprendizaje, clases más prácticas y experimentales, que impulse el trabajo autónomo, y la autorregulación en el aprendizaje.

Los resultados obtenidos, una vez realizado el estudio del grado de satisfacción del alumnado universitario con la metodología flipped classroom, concluyen que existe una amplia satisfacción con la introducción de una metodología que le proporciona mayor participación en el aula, que le facilita el acceso a contenidos didácticos en un formato más cercano (que puede consultar cuándo y cómo quiera), y que se adapta a sus necesidades y ritmos de aprendizaje. Consideran que el tiempo en el aula es más eficaz, estiman que realizan un mejor aprovechamiento del tiempo y que además mejora su aprendizaje y la comprensión de contenidos. Estas conclusiones se han podido contrastar en los distintos grupos y en diferentes etapas en las que se ha llevado a cabo la experiencia.

Referencias

Bergmann, J., y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. Eugene, US: ISTE. Recuperado a partir de http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10759765

Gairín Sallán, J. G., Feixas, M., Guillamón, C., y Vilamitjana, D. Q. (2004). La tutoría académica en el escenario europeo de la Educación Superior. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado, 18*(1), 61-77.

McLoughlin, C., y Lee, M. J. (2010). Personalised and self regulated learning in the Web 2.0 era: International exemplars of innovative pedagogy using social software. *Australasian Journal of Educational Technology, 26*(1), 28-43.

Rodríguez Sabiote, C., Lorenzo Quiles, O., y Herrera Torres, L. (2005). Teoría y práctica del análisis de datos cualitativos. Proceso general y criterios de calidad. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM, XV*(2), 133-154.

Salmerón, H., Rodríguez, S., y Gutiérrez, C. (2010). Metodologías que optimizan la comunicación en entornos de aprendizaje virtual. *Comunicar, 34*, 163-171.

Tourón, J., y Santiago, R. (2015). El modelo Flipped Learning y el desarrollo del talento en la escuela. *Revista de Educación, 368*, 196-231. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-368-288

Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, T. y García-Pardo, F. (2017). Metodología clase invertida como alternativa para la educación matemática en la enseñanza universitaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 581). Zaragoza: SEIEM.

ANÁLISIS DE PERCEPCIONES ALEATORIAS EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Analysis of randomness perceptions in secondary school students

Serrano, L.[a], Esteban, R.[b], Ortiz, J.J.[a] y Batanero, C.[a]

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad de Zaragoza (España)

El conocimiento y aprendizaje de la probabilidad debe venir precedido por un cambio en el aula de la concepción determinista dominante, y esto se logra al presentar a los estudiantes la presencia de los fenómenos aleatorios en nuestra vida. El concepto aleatoriedad, al admitir diversidad de interpretaciones, favorece la existencia de sesgos subjetivos en su percepción e interpretación (Batanero, 2016). Sin embargo, su presencia en el currículo, hace necesaria profundizar en su estudio y comprensión por parte de los alumnos.

Para contribuir a esta finalidad, el objetivo de esta investigación es analizar los significados que los estudiantes asignan a las secuencias de resultados de experiencias aleatorias con más de dos resultados posibles, lo que requiere que se comprendan las características de dichas secuencias aleatorias, como la relación entre la probabilidad teórica de cada resultado y la frecuencia relativa observada, la impredecibilidad o la existencia de rachas. Como antecedentes encontramos los trabajos de Batanero y Serrano (1999) y Batanero, Contreras, Esteban y Serrano (2016), quienes utilizan experimentos con solo dos resultados posibles. En este trabajo completamos dicha investigación utilizando experimentos cuyos espacios muestrales constan de más de dos sucesos equiprobables y se comparan los resultados con los anteriores.

La metodología es cuantitativa y consiste en un cuestionario con cinco ítems, cada uno de ellos presentando una secuencia de 10 resultados del experimento en el contexto de un examen tipo test y las respuestas dadas al mismo por los estudiantes. Las variables consideradas son si se presentan o no todos los sucesos del espacio muestral en la secuencia y la existencia o no de rachas de un mismo resultado. La prueba, que se pasó a 159 alumnos de tres cursos de educación secundaria. La mayoría considera aleatorias las secuencias en que se presentan todos los posibles elementos del espacio muestral, utilizando su conocimiento del contexto examen, pues es poco probable que un profesor prepare un examen de opción múltiple con respuestas que sigan un patrón evidente. En este tipo de ítem los estudiantes aceptan rachas largas, que no fueron aceptadas en secuencias de dos resultados en los trabajos de Batanero y Serrano (1999) y Batanero, Contreras, Esteban y Serrano (2016). Finalizamos la exposición con unas sugerencias sobre la aplicabilidad didáctica de nuestro estudio para mejorar la percepción subjetiva de los conceptos aleatorios, y un mejor desarrollo de los contenidos curriculares sobre probabilidad.

Referencias

Batanero, C. (2016). Understanding randomness. Challenges for research and teaching, En K. Krainer y N. Vondrová (Eds), *Proceedings of the Ninth Congress of European Research in Mathematics Education, CERME 9* (pp. 34-49). Praga: ERME.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(5), 558-567.

Batanero, C., Contreras, J. M., Esteban, R. y Serrano, L. (2016). ¿Reconocen los estudiantes de educación secundaria obligatoria las secuencias de resultados aleatorios? En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, T. González, J.L. González, P. Hernández, A. Jiménez, J.A. Macías, F. Ruiz y M. T. Sánchez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 207-216). Malaga: SEIEM.

Serrano, L., Esteban, R., Ortiz, J.J. y Batanero, C. (2017). Análisis de percepciones aleatorias en alumnos de Educación Secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 583). Zaragoza: SEIEM.

ÍNDICE DE AUTORES