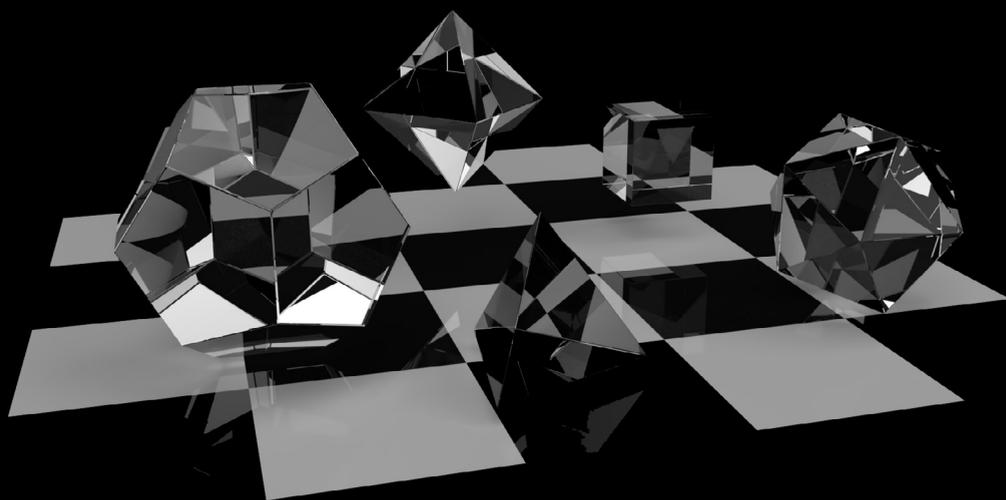


PROCESOS DE ACOMPAÑAMIENTO EN LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORES EN MATEMÁTICA



NATALIA SGRECCIA (COORD.)

Colección Studio, n. 11

Serie Educación, n. 11

Edita

FahrenHouse
Valle Inclán, 31
37193. Cabrerizos (Salamanca, España)
www.fahrenhouse.com

© De la presente edición:

FahrenHouse
y los autores

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse ni transmitirse sin permiso de FahrenHouse, salvo para usos docentes o no comerciales.

ISBN (PDF): 978-84-948270-5-1

Título de la obra

Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en matemática

Autores de la obra

Natalia Sgreccia (coord.), Hernán Martín Alegre, Gladys Brunini, Facundo Chirino, Virginia Ciccioli, Mariela Cirelli, Eliana Dominguez, Valeria Donato, Sabrina Grossi, Natalia Landaluce, Marta Massa, María Sol Mengarelli, Leticia Peralta, Elisa Petrone, Sofía Pípolo, Lucía Schaefer y María Beatriz Vital

Edición al cuidado de

Iván Pérez Miranda

Cómo referenciar esta obra

Sgreccia, N. (coord.). *Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en matemática*. Salamanca: FahrenHouse.

Materia IBIC

JN- Educación Pedagogía

Fecha de publicación: 20-08-2018

Comité científico de la Colección Studio

Adelina Arredondo (Autonomous University of the State of Morelos. Mexico); Rosa Bruno-Jofré (Queen's University. Canada); Antonella Cagnolati (University of Foggia. Italy); Maria Helena Camara Bastos (Pontifical Catholic University of Rio Grande do Sul. Brazil); Silvia Finocchio (FLACSO Argentina / University of Buenos Aires. Argentina); Tamar Groves (University of Extremadura. Spain); José María Hernández Díaz (University of Salamanca. Spain); Joaquim Pintassilgo (University of Lisbon. Portugal); Simonetta Polenghi (Catholic University of Milan. Italy); Guillermo Ruiz (University of Buenos Aires. Argentina); Marta Ruiz Corbella (National Distance Education University. Spain); Carmen Sanchidrián Blanco (University of Málaga. Spain); Roberto Sani (University of Macerata. Italy); Jesús Valero Matas (University of Valladolid. Spain)

TABLA DE CONTENIDOS

Presentación <i>Natalia Sgreccia</i>	7
Prólogo <i>Elisa Petrone</i>	15
1. La Biografía Escolar <i>Mariela Cirelli y María Beatriz Vital</i>	19
Introducción	19
Buenos docentes. Buena enseñanza	20
Cualidades de docentes memorables destacadas por aspirantes a profesor en Matemática	27
Cualidades sobresalientes	32
Profesores en Matemática recordados como buenos	34
Tareas de enseñanza en el Profesorado en Matemática vinculadas con la biografía escolar	44
Conclusiones	48
Referencias bibliográficas	51
2. Las Narrativas Pedagógicas como Dispositivos de Formación <i>María Sol Mengarelli y Leticia Peralta</i>	55
Introducción	55
La narrativa pedagógica en la práctica profesional docente	56

Narrativas consideradas	58
Desmenuzamiento de las narrativas pedagógicas	59
Conclusiones	75
Referencias bibliográficas	77
3. Enfoques en la enseñanza de la Geometría	79
<i>Virginia Ciccioni, Sabrina Grossi y Lucía Schaefer</i>	
Introducción	79
Desde la Geometría Sintética	83
Desde la Geometría Analítica	93
Desde la Geometría Descriptiva	102
Conclusiones	114
Referencias bibliográficas	115
4. GeoGebra: un software paradigmático	119
<i>Gladys Brunini, Facundo Chirino y Valeria Donato</i>	
Introducción	119
Encuadre teórico	121
El GeoGebra	125
Modalidad de trabajo	127
Los problemas	129
Procesos de resolución a través de narrativas	135
Criterios docentes para emplear TIC	139
Los trabajos finales	141
La voz de los participantes: antes y después	141
Conclusiones	145
Referencias bibliográficas	150

5. Materiales Didácticos en la enseñanza de la Matemática	153
<i>Hernán Martín Alegre, Eliana Domínguez, Natalia Landaluce y Sofía Pípolo</i>	
Introducción	153
Noción de material didáctico	154
Manipulativos tangibles en Educación Matemática	155
El Tangram como material didáctico	157
La Educación Matemática Realista como corriente de encuadre	158
Materiales digitales audiovisuales	160
Potencial de los materiales didácticos en la Educación Matemática	163
Más ejemplos de materiales manipulativos	164
Conclusiones	172
Referencias bibliográficas	172
A modo de cierre	175
<i>Marta Massa</i>	

Página intencionadamente en blanco.

PRESENTACIÓN

*Natalia Sgreccia**

Este libro es fruto del trabajo conjunto en el marco del Proyecto de Investigación «Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática» (1ING445-19/I436), radicado en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), ejecutado en un período de cuatro años (2014 a 2017).

En este Proyecto han interesado los procesos de formación inicial y continua de profesores en Matemática que se desarrollan para contribuir a su conocimiento profesional docente -conocimiento matemático para enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008) en situaciones que demandan conocimiento en acción (Perkins, 1992)-.

Se entiende por formación inicial a la recibida en la carrera de grado, en nuestro caso focalizamos en el Profesorado en Matemática de la UNR, y por formación continua al conjunto de instancias de intercambio de saberes entre profesores en ejercicio y otros (personas u objetos) que contribuyen a su enriquecimiento profesional, en tanto empoderamiento profesional (Reyes, 2011).

Qué hacen los formadores de formadores para acompañar la construcción de dicho conocimiento en futuros profesores en Matemática y profesores en ejercicio ha sido el objeto de estudio central de nuestra investigación. Conside-

* Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Magíster en Didácticas Específicas con mención en el área Matemática (UNL) y Doctora en Humanidades y Artes con mención en Ciencias de la Educación (UNR). Profesor Asociado Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

ramos que su importancia radica en poder contar con información actualizada, situada y real de lo que se realiza y con posibilidades de acción en torno a un tipo de conocimiento que se constituye desde la praxis, como síntesis de teoría y práctica contextualizadas, de producción y construcción de conocimiento mediante la reflexión crítica de la acción docente, al integrar conocimientos matemáticos y pedagógico-didácticos en prácticas de enseñanza.

Estamos convencidos que para que este «saber hacer» trascienda la connotación de «oficio» y sea considerado como un tipo particular de conocimiento, se requieren investigaciones de este estilo. Esto se debe a que se tematiza el fenómeno (procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática) y se lo problematiza desde la investigación educativa, con el procedimiento que la misma conlleva.

En efecto, como objetivo general a mediano plazo nos hemos trazado:

analizar los procesos de formación inicial y continua del conocimiento profesional docente de profesores en Matemática, para comprender más acerca de cómo se construye dicho conocimiento y cómo se lo puede favorecer desde la formación sistemática;

y como objetivo general a largo plazo hemos procurado:

propiciar el empoderamiento profesional, en cuanto proceso social vivido por el docente, en conjunción con colegas e investigadores, con el objeto de comprender, asimilar, asumir, aceptar y adherirse a la idea de que el conocimiento matemático precisa de argumentaciones diversas con racionalidades puestas en contexto para apropiarse del saber que enseña mediante su problematización e innovación.

Entre los objetivos específicos a mediano plazo se encuentran:

- *describir los tipos de dispositivos que se despliegan en las asignaturas del Profesorado cuyo objeto formativo es la construcción del conocimiento profesional docente;*
- *explorar posibilidades de fortalecimiento de dichos dispositivos en pos a la formación de los futuros profesores;*
- *reconocer modos propicios de acompañamiento y capacitación de profesores en Matemática en ejercicio que contribuyan a la continua resignificación de su conocimiento profesional docente;*
- *indagar acerca de las condiciones de emergencia y de sustentabilidad de comunidades de práctica de profesores en Matemática;*

mientras que a largo plazo nos propusimos:

desentrañar frases tan conocidas como «uno enseña como le han enseñado», «a enseñar se aprende enseñando», «una cosa es la teoría y otra la práctica», resignificarlas a la luz del paradigma de la complejidad y hacer visibles las bases fundantes de la formación, tanto inicial como continua, en la construcción del conocimiento profesional docente en profesores en Matemática.

Además, tuvimos objetivos como equipo de investigación:

- *conocer encuadres teórico-metodológicos actualizados y pertinentes relativos a la construcción del conocimiento profesional docente en profesores en Matemática como objeto de estudio;*
- *adquirir experiencia en la investigación educativa en Matemática: un campo fecundo de actuación profesional y con una vacancia formativa desde la carrera de grado del Profesorado en Matemática;*
- *resignificar las experiencias de la propia práctica profesional como docentes a partir de los conocimientos que se adquieren en las tareas investigativas;*
- *consolidar, a nivel institucional, un grupo de trabajo en torno a la formación de profesores en Matemática desde la investigación educativa, complementando acciones de docencia y gestión en la carrera.*

Metodológicamente, nuestros estudios se caracterizan por tener un enfoque predominantemente cualitativo y alcance exploratorio-descriptivo con establecimiento de algunas relaciones. Son de tipo empírico, longitudinales o transversales y no o cuasi experimentales. Participan como sujetos de la investigación estudiantes, docentes o egresados del Profesorado en Matemática así como otros profesores en Matemática en ejercicio. Siempre se procura la triangulación metodológica tanto en cuanto a las técnicas aplicadas como a los investigadores intervinientes. Consideramos que un mismo equipo de investigación aborde como objeto de estudio a la formación inicial y continua de profesores en Matemática enriquece la mirada de cada una de las partes al ponerlas en relación.

Resulta pertinente señalar que estudios relativamente recientes «están afirmando que aquello a lo que hemos dedicado nuestra vida profesional [la formación docente sistemática y formal] produce escasas marcas en los docentes o futuros docentes, y esto no se modificará si no logramos revisar profundamente los enfoques y dispositivos con los que veníamos trabajando» (Sanjurjo, 2009, p.8); si bien se reconoce que los cambios producidos en los últimos años en la formación docente permiten visualizar mayor impacto de las producciones teóricas y de los resultados de investigación, tanto en las decisiones políticas como en las convicciones de los docentes que tienen a su cargo la formación de las prácticas (Sanjurjo, 2009). Hasta el momento

este impacto solo se ha concretado en formulaciones teóricas, líneas de trabajo o socializaciones de experiencias, requiriéndose «una mayor claridad acerca de cómo lograr ese impacto de las teorías en las prácticas» (p. 10), enfatizado en que profesores y conocimiento del profesor ha sido un eje significativo de investigación desde la publicación del *Handbook of Research on Teaching. Third Edition* (Wittrock, 1986).

Al respecto los aportes de Schön (1992) han sido paradigmáticos para trascender el enfoque tradicional (el que supone «primero la teoría y luego la práctica») de la formación práctica de los profesores. Ha aportado una epistemología diferente de la práctica, que permitió superar las limitaciones de la racionalidad tecnocrática de dicho enfoque, reconociendo que:

- la práctica siempre es producto de la articulación de un entramado de condicionantes entre los cuales el pensamiento y el conocimiento del profesor juegan un papel importante;
- los profesores son producto de un largo proceso de formación y socialización, durante el cual fueron integrando supuestos, creencias, teorías implícitas y científicas;
- la actuación de los profesores está dirigida por dichos supuestos y teorías, pero a su vez, las acciones modifican su conocimiento, lo que permite suponer que además subyace a toda la práctica docente una lógica posible de conocer;
- los profesores son profesionales racionales y prácticos, su actuación es producto de una racionalidad limitada por los propios supuestos, pero con posibilidad de revisarlos, lo que permite que construyan sus acciones a partir de la reflexión, puedan dar cuenta de las mismas y modificarlas;
- la práctica docente es dinámica y compleja, requiere de acciones deliberadas y por ello es deseable conocer más acerca de ese proceso de reflexividad.

Resulta entonces necesario que el profesor reconozca y evalúe la situación de enseñanza en la que se encuentra inmerso, la construya como problemática y, a partir de su conocimiento profesional, elabore nuevas respuestas para cada situación singular. «Esta manera de entender la práctica implica, entonces, una forma distinta de concebir la construcción del conocimiento profesional. Si los problemas que nos plantea la práctica son singulares y requieren de nuestras acciones construidas para resolverlos, la reflexión sobre la misma y el conocimiento que se genera a partir de esa reflexión son de fundamental importancia» (Sanjurjo, 2009, p.19).

Ubicarnos en el paradigma de la complejidad es entender al contexto de las prácticas de la enseñanza de la Matemática dentro de un tejido de constituyentes heterogéneos inseparablemente asociados, que presentan la

paradójica relación de lo uno y lo múltiple. Comprende eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares, que constituyen nuestro mundo fenoménico. Así es que la complejidad se presenta con rasgos perturbadores de la perplejidad, lo enredado, lo inextricable, el desorden, la ambigüedad y la incertidumbre (Morin, 2000).

Coincidimos con Perrenoud (2006) en que «si deseamos hacer de la actitud reflexiva una parte central del oficio de enseñante para que se convierta en una profesión de pleno derecho, corresponde especialmente a la formación, inicial y continua, desarrollar la actitud reflexiva y facilitar los conocimientos y el saber hacer correspondientes» (p. 43), concibiendo a la propia práctica como una potente fuente inagotable para ello.

En particular, la formación de profesores en Matemática se ha constituido en un tema de interés creciente en Educación Matemática. En efecto, a partir de la tercera edición del *International Congress on Mathematical Education* en 1976, existe un grupo específico que trata la temática.

La mayoría de los estudiantes para profesor cuentan con una visión de lo que es enseñar Matemática dominada por sus propias experiencias de aprendizaje y basan su elección vocacional en su capacidad de «explicar bien» Matemática. Aunque este es un componente importante de la enseñanza de la Matemática, no es el único. La evidencia muestra que la formación inicial del profesor en Matemática suele ser menos efectiva de lo que se desearía. Por lo tanto, es vital examinar y estudiar lo que se realiza en la formación de profesores en Matemática para idear posibilidades de mejora.

Ball y Bass (2000) advertían que, a pesar de las ideas proféticas que entrelazan conocimiento y aprendizaje, la formación del profesor a lo largo del siglo XX se ha caracterizado por una persistente división entre Matemática y Pedagogía en el currículum imperante. Esto se observa en la separación de los diversos subdominios de conocimiento, donde la práctica docente, en el último tramo formativo, resulta insuficiente para integrarlos. Este enfoque curricular suele dejar a los practicantes insuficientemente preparados para su trabajo, desafiados por los problemas que surgen con angustiosa regularidad.

Ball et al. (2008) avanzan en la línea de investigación de Shulman (1986, 1987), orientándola hacia la Matemática. Según estos autores, la mayoría de la gente está de acuerdo en que conocer Matemática es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que abarca tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación especializada. Por ello proponen un conjunto de seis subdominios de *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT por sus siglas en inglés) que han de disponer los profesores en Matemática (Fig. 1).

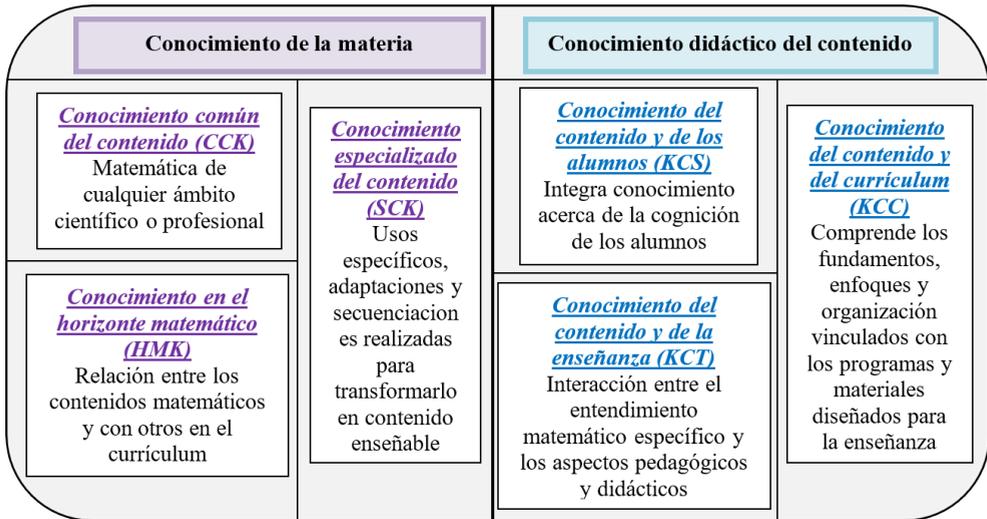


Figura 1. Subdominios del MKT (Ball et al., 2008)

Al respecto Santaló (1993) recalca: «Se habla y se discute mucho sobre distintas modalidades de la Matemática de la escuela media, pero se olvida con frecuencia cómo debe ser tratada en la formación de profesores, a pesar de que esta formación es fundamental en la práctica y desarrollo de cualquier sistema educativo. Toda innovación en la enseñanza secundaria debe iniciarse en los institutos destinados a la formación de sus profesores, que son quienes deberán ponerla en práctica» (p. 12).

En términos metodológicos, el enfoque de nuestras investigaciones se caracteriza por ser cualitativo, mediante las que procuramos estudiar la realidad en su contexto natural, centrando la indagación en los hechos, a fin de comprender los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas (Taylor y Bogdan, 1987). La mayoría de ellas está diseñada mediante el estudio de caso, siendo este el Profesorado en Matemática de la UNR. Se pretende captar la complejidad del caso en cuestión que puede dar lugar a resultados que, desde una lógica inductiva y sin ánimos de generalizar, pueden proporcionar categorías pertinentes para analizar otros casos en situaciones semejantes (Ander-Egg, 2003), como son otros Profesorados universitarios en Matemática.

La técnica de procesamiento de la información predominante fue la de análisis del contenido (Cabrera, 2009) mediante la cual se procedió gradualmente a reconocer indicadores de interés en las diversas fuentes y se efectuaron agrupamientos conceptuales de acuerdo a la lectura interpretativa que nuestro equipo iba realizando.

En cuanto a las producciones, en estos cuatro años, en el marco del Proyecto, se han materializado seis becas de investigación UNR, una FCEIA y una CIN (Consejo Interuniversitario Nacional). En Congresos nacionales y latinoamericanos, se han presentado 17 ponencias y 15 pósters, la mayoría de ellos publicados en Actas, además de una Conferencia. En Revistas especializadas internacionales, se han publicado nueve artículos habiendo además tres en evaluación, y se cuenta con un libro relativo a Didáctica de la Matemática en prensa. A nivel Posgrado, se han presentado y defendido seis tesinas de Licenciatura así como una cantidad similar de formulación de proyectos de tesis de Maestría y también de Doctorado. En cuanto a actividades de capacitación docente, se han ofrecido siete instancias, ya sea de talleres o cursos de posgrado, a profesores en ejercicio o estudiantes avanzados.

De este modo esta obra propende a socializar con la comunidad de educadores matemáticos de manera sintetizada nuestros aportes relativos a la construcción de *conocimiento matemático para la enseñanza* desde los ejes en los que hemos aventurado:

- la *Biografía escolar* en la formación del profesor en Matemática, entendida como el cúmulo de experiencias que los docentes han tenido siendo alumnos;
- las *Narrativas pedagógicas* como dispositivos en la formación docente, en tanto relatos subjetivos y dinámicos que posibilitan reconstruir el pasado;
- la *Geometría* que el profesor va configurando en su formación, como la tradicional rama de la Matemática que estudia las figuras y sus propiedades;
- el *GeoGebra*, como software paradigmático que conjuga diversas ramas de la Matemática y cuyas posibilidades didácticas dependen del profesor;
- los *Materiales didácticos* de los que puede valerse un profesor para su tarea de enseñanza de la Matemática.

Esperamos que los resultados de nuestras investigaciones contribuyan a la formación de profesores en Matemática tanto en su etapa inicial como continua. Consideramos que si se estudian los procesos de acompañamiento en los que se construye el conocimiento propio de esta profesión y se generan propuestas fundamentadas desde los resultados de la investigación se está materializando una contribución superadora.

A modo de cierre de esta presentación, deseamos destacar que es un honor contar con la colaboración de la Mg. Elisa Petrone para el Prólogo de esta obra así como de la Dra. Marta Massa para el Cierre, ambas consideradas como impulsoras de este tipo de trabajos, a quienes estaremos por siempre agradecidos, y procuraremos ser portadores activos de sus huellas.

1. Referencias bibliográficas

- Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV*. Buenos Aires: Lumen.
- Ball, D. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.). *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp.83-104). Westport CT: Ablex.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria*, 14(3), 71-93.
- Perkins, D. (1992). *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa.
- Perrenoud, P. (2006). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona: Graó.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa. México: CINVESTAV.
- Sanjurjo, L. (2009) (Coord.). *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales*. Rosario: Homo Sapiens.
- Santaló, L. (1993). *La geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.
- Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Barcelona: Paidós.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.
- Wittrock, M. (Ed.) (1986). *Handbook of Research on Teaching* (3ª Ed.). Nueva York: Macmillan.

PRÓLOGO

*Elisa Petrone**

Este libro nace en el seno de una institución formadora de Profesores en Matemática y es elaborado por un equipo constituido por egresados de ella que integran un Proyecto de Investigación en el área de Educación Matemática.

Merece explicarse mi vinculación con ellos y porqué considero muy interesante esta obra para toda la comunidad de educadores matemáticos.

La institución aludida es la carrera de Profesorado en Matemática (PM), que funciona desde 1988 en el Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, dentro de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Antes de la creación del PM ese Departamento atendía la Licenciatura en Matemática (LM), de la cual soy egresada, y las cátedras de Matemática de la Licenciatura en Física (LF).

En los primeros años de funcionamiento del PM las materias de formación específica disciplinar eran de dictado compartido con cursos de la LM (algunos también con LF) y las de formación pedagógica se cursaban en la Facultad de Humanidades y Artes de la UNR junto a otros Profesorados. Siendo por entonces docente del Departamento de Matemática tuve a mi cargo diferentes materias en cursos integrados por alumnos de PM, LM y LF.

* Licenciada en Matemática (UNR) y Magíster en Docencia Universitaria (UTN). Profesor Titular Dedicación Exclusiva jubilada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

En el año 2002 se puso en marcha un nuevo Plan de Estudios del PM, estando entre sus cambios más importantes la presencia de materias que procuraban, desde el primer año de la carrera, un acercamiento a problemáticas inherentes al quehacer docente general y de Matemática, particularmente en el nivel medio. Tuve a mi cargo varias veces esas materias, aportándoles desde mi experiencia docente, que incluía actividades en el nivel medio, mi formación de posgrado en el área pedagógica y mi participación en proyectos de investigación vinculados a la Educación Matemática.

Conocí a Natalia Sgreccia en una charla que di en la Facultad para potenciales ingresantes a la carrera del PM. Luego fue mi alumna en una materia de primer año y pasados unos años hizo parte de su Residencia en una materia que yo dictaba. Ahí tuve oportunidad de conocer su gran interés en desarrollar seriamente y con entusiasmo cada actividad emprendida, más allá de la obligación circunstancial. Desde entonces hemos compartido muchas actividades, de docencia, investigación y extensión. Cuando se acercaba mi retiro no dudé en sugerir que ella era la profesional más capacitada para dirigir el PM, actividad que había estado desarrollando durante 10 años, y desde entonces ella también asumió esa tarea de gestión.

Quiero señalar que, además del cariño que le tengo, valoro su compromiso, profundidad de análisis y creatividad puestos en juego en cada una de sus acciones y su gran capacidad para abrir caminos, de la cual este libro es testimonio.

En efecto, ha dirigido en tareas de investigación a un grupo de jóvenes egresados del PM, enfocando los estudios en el accionar de formadores de profesores cuando acompañan la construcción del conocimiento profesional docente, parte de cuyos resultados componen esta obra.

Todos sus autores han sido excelentes estudiantes del PM, en particular alumnos míos en algunas materias. El hecho de ampliar sus campos de acción a la investigación, a la vez que avanzan en la consolidación de sus actividades docentes en escuelas y/o cátedras universitarias o terciarias, revela sus intereses por crecer y aportar.

En este libro se presentan algunos resultados del trabajo, desarrollado en ese marco por este equipo, que involucra análisis de elementos pedagógicos basados en experiencias personales –*biografías escolares y narrativas pedagógicas*–, de cuestiones más vinculadas a la disciplina –*Geometría*– y a la metodología de la enseñanza de la Matemática –*GeoGebra y otros recursos didácticos*–.

Cada lector podrá apropiarse con mayor convicción de uno u otro aporte relativo a la construcción de conocimiento matemático para la enseñanza, en base a sus propias experiencias, realidades, gustos y necesidades.

Algunos podrán focalizar más su interés en propuestas sobre metodología de enseñanza y aplicarlas en sus clases de escuela secundaria u otro nivel.

Otros, en particular los docentes de instituciones formadoras de profesores en Matemática, pueden valorar la utilidad global de la obra, tanto por sus resultados como por el trabajo desarrollado para su realización, que podría ser análogamente replicado en ellas.

En este eventual camino se avanzaría en el tema de la *formación de profesores*, que es central para el buen funcionamiento de los sistemas educativos, y también sería de interés para la mejora de la propia institución que lo realiza, ya que el autonocimiento es una condición necesaria para iniciar cualquier cambio en tal sentido. Al decir de Glenn Langford: «Entender una práctica social es verla como la ven sus practicantes y verla como el producto de su historia y tener alguna idea de la forma en que cambia» (1993; La enseñanza y la idea de práctica social; Diada Edit., Sevilla, p. 34).

Celebro la aparición de esta obra en lo personal ya que aprecio a sus autores, por lo que me alegra esta evidencia de sus crecimientos, y también porque fue gestada en el seno de la institución en la que me formé y trabajé durante más de 40 años.

Pero sobre todo la valoro desde un punto de vista profesional, porque constituye un aporte al campo de la formación de profesores en Matemática que resultará de interés para quienes se encuentran ligados a esta importante actividad.

Página intencionadamente en blanco.

CAPÍTULO 1

LA BIOGRAFÍA ESCOLAR

*Mariela Cirelli**
*María Beatriz Vital***

1. Introducción

Toda persona se constituye desde las experiencias que vive cotidianamente a lo largo de su vida. Debido a la considerable cantidad de tiempo que esta transcurre en las instituciones educativas, aquellas experiencias relacionadas con el paso por la escuela resultan de gran significación.

Se entiende por «biografía escolar» al conjunto de experiencias vividas en una institución educativa por una persona, en calidad de alumno. No se trata simplemente del recuerdo de situaciones, hechos o docentes particulares, sino de todas las vivencias experimentadas durante la trayectoria escolar, con sus enseñanzas y aprendizajes explícitos e implícitos, formales e informales.

* Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR) y Licenciada en Matemática (UNR). Profesor Adjunto Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Jefe de Trabajos Prácticos en la Facultad de Ciencias Empresariales (Universidad Austral).

** Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Licenciada en Matemática (UNR) y alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias mención Matemática (UNR). Profesor Adjunto Dedicación Semiexclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Docente Titular en la EESOPÍ N° 8007 «Colegio Escuelas Pías».

Las experiencias escolares imprimen marcas o huellas, muchas veces inconscientes, que se manifiestan luego en forma de creencias, ideas y valoraciones acerca de la vida escolar, la realidad educativa y los docentes y su labor, entre otras dimensiones, e influyen de manera inefable en las prácticas de quienes luego adoptan la enseñanza como profesión. Tal es la influencia que poseen estas experiencias que algunos autores (Alliaud, 2004; De Laurentis, 2014) consideran a la biografía escolar como la primera fase de la formación profesional docente y a la formación inicial como una segunda fase, en la que tiene lugar la consolidación o bien la reestructuración de aquellos modelos de vida institucional que fueron adquiridos como alumno (Sgreccia, Cirelli y Vital, 2016). «Las experiencias de vida y los antecedentes son, obviamente, ingredientes clave del individuo que somos o de lo que pensamos acerca de nosotros mismos; el grado hasta el que invertimos nuestro 'yo' en el modo de enseñar, nuestra experiencia y antecedentes son, por lo tanto, los que configuran nuestra práctica» (Goodson, 2003, p. 748).

Atendiendo al alto impacto que la biografía escolar tiene en la manera en que el profesor asume sus prácticas (Sanjurjo, 2009), las autoras la hemos no solo enfatizado en nuestras tareas docentes sino también hecho objeto de investigaciones acerca del tema.

2. Buenos docentes. Buena enseñanza

Afortunadamente muchos de nosotros tenemos en nuestra memoria a profesores brillantes, concedores de su materia, que lograban deslumbrarnos con su conocimiento. Sus clases nos transformaban, ejercían sobre nosotros una «enseñanza poderosa» (Maggio, 2012). Nos retirábamos de sus clases inspirados, y hasta conmovidos. ¿Qué aprendíamos en esas clases? ¿Qué perduró de las mismas? (Branda y Porta, 2012).

Acordamos con Sanjurjo (2008) en que prestar atención a cuáles son las características que los alumnos mencionan al identificar buenos docentes colabora con la comprensión de lo que es una buena enseñanza y puede orientar la toma de decisiones para mejorar el trabajo en el aula.

La palabra «buena» [enseñanza] tiene tanto fuerza moral como epistemológica. Preguntar qué es buena enseñanza en el sentido moral equivale a preguntar qué acciones docentes pueden justificarse basándose en principios morales y son capaces de provocar acciones de principio por

parte de los estudiantes. Preguntar qué es buena enseñanza en el sentido epistemológico es preguntar si lo que se enseña es racionalmente justificable y, en última instancia, digno de que el estudiante lo conozca, lo crea o lo entienda (Fenstermacher, 1989, p. 158).

Para Cabo (2006), «ser buen profesor no implica manejar cantidad de información, sino distinguir cómo emplear lo que se sabe, cómo acceder o cómo manejar esa información, cómo aprender más y, por sobre todo, cómo realizar actividades metacognitivas con los conocimientos adquiridos» (p. 5). Son tantas y tan diversas las cualidades a tener en cuenta que, al adentrarnos en el tema, por momentos se desvanece la pretensión de caracterizar de una manera más o menos clara a un «buen profesor».

La literatura en educación concibe la enseñanza como un proceso multidimensional que compromete diversas características separables o atributos docentes, entre los que se han venido destacando la claridad explicativa, las capacidades organizativa y de motivación, o la habilidad para mantener una relación fluida con los alumnos (Arreola, 1995; Marsh, 1984, 1987; Schemelkin, Spencer y Gellman, 1987) (Gracia y de la Iglesia, 2006, p. 1).

El propósito de enseñarle a un estudiante de escuela secundaria una determinada disciplina no es el de convertirlo en un experto o especialista en ella; se trata más bien de acercarle saberes, lenguajes y formas de pensar que le permitan desarrollar su capacidad de comprender el mundo y de actuar en él con la libertad que otorga el conocimiento. Al respecto, señala Fenstermacher (1989) que «para liberar la mente de otro, el profesor debe no solo conocer la materia que enseñará, sino también enseñar con un estilo que libere» (p. 175), para lo cual debe él mismo liberarse y transmitir al estudiante el estilo de la liberación.

Para fomentar dicho estilo, el docente necesita comprender primero la profunda diferencia metodológica entre enseñar contenidos y facilitar su aprendizaje. Santaló (1999) observa que «el profesor debe saber muchas cosas, pero debe saber también callar otras tantas para no confundir a los alumnos con sutilezas que ellos no pueden concebir, puesto que solamente adquieren sentido a niveles superiores de la enseñanza» (p. 212).

Sanjurjo (2008) coincide con Fenstermacher (1989) y Litwin (1997) al tratar la noción de buena enseñanza, como:

Aquella que propone y provoca procesos reflexivos, genera el aprendizaje de relaciones activas con el conocimiento, busca la comprensión y apropiación significativa por parte de nuestros alumnos. Todo ello favorecido por un buen clima, por la autoridad del docente ganada a través de su trato respetuoso y de sus conocimientos expertos (p. 98).

Además menciona los conocimientos, actitudes y compromisos que un docente debe adquirir, desplegar y asumir para desarrollarse en las dimensiones técnica, epistemológica y ética. De las dos últimas pueden destacarse: conocer el contenido a enseñar; saber cómo organizarlo; saber acerca de su proceso de construcción histórica; comprometerse, a nivel individual, con cada uno de sus alumnos, con sus posibilidades de crecimiento como personas, respetándolos como tales; y, a nivel social, asumir la responsabilidad de contribuir en la construcción de una sociedad más justa.

En este sentido Sanjurjo (2008), con base en Perrenoud (2005), también elabora una lista de competencias deseables para un docente: organizar y animar situaciones de aprendizaje; conocer, a través de una disciplina determinada, los contenidos que hay que enseñar y su traducción en objetivos de aprendizaje; trabajar a partir de las representaciones de los alumnos; trabajar a partir de los errores y de los obstáculos en el aprendizaje; construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas; implicar a los estudiantes en actividades de investigación, en proyectos de conocimiento; implicar a los alumnos en sus propios aprendizajes y su trabajo; gestionar la progresión de los aprendizajes; concebir y controlar las situaciones problema ajustadas al nivel y a las posibilidades de los alumnos; adquirir una visión longitudinal de los objetivos de la enseñanza; establecer vínculos con las teorías que sostienen las actividades de aprendizaje; observar y evaluar a los estudiantes en situaciones de aprendizaje, según un enfoque formativo; establecer controles periódicos de competencias y tomar decisiones de progresión; y elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación.

Para esta autora, lo que dicen los alumnos con respecto a las características que identifican a los buenos docentes es que:

Explican bien, desarrollan contenidos interesantes, saben relacionarlos con otras materias o con ejemplos de cosas que a ellos les interesan, los respetan y tratan bien, llegan a horario, corrigen y les devuelven a tiempo los trabajos, explican los errores y fundamentan las evaluaciones (p. 99).

Así, por ejemplo, Ramiro un estudiante de 16 años del Colegio Nacional de Buenos Aires, opina que los «mejores» profesores son:

Los que te hacen pensar sobre lo que estudiás, los que te hacen debatir en clase. No son los que transmiten de arriba abajo un saber sino los que dejan a todos hablar... Para mí es más copado cuando el profesor se sienta entre todos y orienta mientras juntos construimos lo que aprendemos. Así uno se involucra más en lo que estudia. De la otra manera, no te queda otra que aceptar que lo que dice el tipo es la verdad, pero no sabés por qué (Universidad Pedagógica de Buenos Aires, 2011, p. 47).

Con respecto a lo que considera como una buena evaluación, el estudiante destaca que es una «que abarque todo lo que vimos en clase y que te haga pensar, no que te haga acordar datos de memoria... que te obligue a aplicar lo que aprendiste, pero reflexionando» (pp. 47-48). Por otra parte, para este alumno, ser un docente comprometido requeriría involucrarse en la relación estudiante-conocimiento y abarcaría algo del orden de «que se preocupe porque aprendas, que se interese porque te interese lo que enseña. Cuando lo ves apasionado por su materia» (p. 48).

Malikow (2005-2006), con la intención de evaluar el plan de formación de profesores de su Departamento, analizó la efectividad docente en una muestra de 361 aspirantes a profesor de nivel secundario, tomada a lo largo de seis años (1998-2004). Durante el estudio, cada participante debió mencionar un docente al que considerara excepcionalmente efectivo y las razones de su elección. El investigador concluye que las cualidades indispensables para hacer gratamente memorables a los profesores son: la buena comunicación de los contenidos del curso; la motivación a los estudiantes; el saber crear un ambiente apto de aprendizaje; el mantener el interés y la disciplina y el tener una apropiada relación con los alumnos.

En la misma línea, merece mencionarse también el denominado *Student Evaluation of Educational Quality (SEEQ)*. Este instrumento, intensamente utilizado desde 1976 en miles de cátedras universitarias de Australia y Estados Unidos, busca proporcionar una medida de la influencia que tienen ciertos factores sobre la calidad educativa, tales como los aprendizajes que el docente promueve, el entusiasmo que genera, la organización de la clase, la interacción con el grupo, la empatía con los estudiantes, la amplitud de sus conocimientos y la evaluación que efectúa.

En este recorrido, el trabajo de Feldman (1989, 1997) también resulta significativo por la magnitud de sus hallazgos. Determinó 28 dimensiones

relacionadas con la efectividad docente basándose en la opinión de alumnos. Entre ellas se destacan: la claridad y el entendimiento; la estimulación del interés por la materia; la preparación y organización del curso; el logro de los objetivos planteados; la motivación a los estudiantes para alcanzar un alto rendimiento y el logro de la percepción del impacto de la instrucción por parte del alumno.

Existen asimismo investigaciones que rescatan la voz de los propios docentes que son considerados por sus alumnos y colegas como memorables, resignificando así la concepción de buena enseñanza a partir del conocimiento práctico en primera persona. En este sentido, se pueden encontrar, por ejemplo, los consejos que algunos docentes memorables estudiados por Porta y Sarasa (2014) darían a un colega: «... que el tema lo sepa pero... a fondo total... Y segundo... Ganas de hacerlo... Lo primero que tenés que hacer es la relación con el chico y con la chica. Primera condición para enseñar un tema» (p. 297). Algunos comentarios resaltan el gusto por lo que se hace, al punto de convertirse en algo vital de la existencia del profesor: «yo quiero dar clase. Yo *necesito* dar clase... para vivir. Es decir, es parte de mi vida. Forma parte de mi vida real... Yo estoy enamorado de esto...» (p. 297). Acerca de lo que el docente considera que brinda a sus alumnos, una voz señala:

Se la dicto lo mejor posible... soy con él disciplinado al máximo. No le faltó nunca... Cumpló el horario perfectamente... Estoy a su lado constantemente... Ellos saben que si me precisan me tienen. Y en la materia les doy todo lo que tengo... (p. 298).

Los docentes estudiados parecen también ser conscientes de la forma en la que son percibidos por parte de sus alumnos: «Y los chicos, que son tan receptivos... Y reciben todo y lo entienden todo. Lo saben todo... Se dan cuenta de todo... De cómo somos. Enseguida se dan cuenta... Y uno aprende de ellos todos los días...» (p. 299). Se trata de docentes que creen en sus alumnos: «Ellos saben perfectamente que tengo mucha fe en ellos. Yo tengo mucha fe. Sí, sí. Indudablemente que tengo mucha fe» (p. 299), y que no resignan sus expectativas:

Por más que me parezca que el alumno ha trabajado un montón y que realmente es digno de admirar todo lo que ha hecho, si no alcanza el nivel, no alcanza... Así se lo digo... que valoro todo lo que ha hecho hasta ese punto, que puede llegar en la próxima oportunidad, pero que en esta... no está preparado

(Álvarez, Porta y Sarasa, 2011, p. 247; tomando el testimonio de otro docente memorable).

Si bien estas características atribuidas a un buen profesor, citadas tanto por referentes académicos como por alumnos, estarían perfilando cualidades propicias para dedicarse a la docencia independientemente de la disciplina en la cual el profesor deba desenvolverse, surge el interrogante acerca de la existencia de cualidades propias de buenos docentes en algún área curricular en especial. En particular dentro de la Educación Matemática Niss (2006) se pregunta qué significa ser un buen profesor y se aventura a responder que es aquel que estimula el desarrollo de competencias matemáticas en sus estudiantes. Estas consisten, según el autor danés, en conocer, comprender, hacer, usar y poseer una opinión bien fundamentada sobre la Matemática en una variedad de situaciones y de contextos donde ella tiene o puede llegar a tener un papel, y resulta de fundamental importancia que el docente mismo las posea.

En el acto pedagógico, sin embargo, el intercambio gira no solo alrededor del contenido temático y las competencias a desarrollar, sino que también involucra elementos relacionados con lo actitudinal y lo emocional que suelen dejar marcas, huellas, recuerdos en los alumnos. Al respecto, Jackson (1999), en su libro «Enseñanzas implícitas», observa que existen aspectos cruciales de la enseñanza que casi nunca se indagan. Este autor sospecha que lo que los alumnos aprenden en una clase de Matemática no se limita exclusivamente a esta disciplina, sino que hay un «aprendizaje adicional» (p. 25). El problema es que no se puede caracterizar dicho aprendizaje del mismo modo en que se puede describir el aprendizaje matemático involucrado. Jackson (1999) intuye que ciertos fenómenos suelen marcar a las personas sin que ellas se den cuenta. Él no duda en señalar, por ejemplo, que su profesora de Matemática de primer año de secundaria ocupa el primer lugar en su lista de docentes favoritos, pero no le resulta sencillo dilucidar los motivos de dicho reconocimiento.

Entonces, finalmente: ¿cuáles son aquellas características de los docentes que los alumnos valoran positivamente? En busca de respuestas a esta pregunta, Thompson (2007), a su vez, agrega otras: ¿existen características personales específicas que aseguran ser un buen profesor?, ¿hay habilidades que el aspirante a profesor debe dominar para calificar como bueno?, ¿puede alguien dominar algunas de ellas, pero no todas, y aún así ser considerado buen docente?

En estos últimos años las autoras nos hemos ocupado de desentrañar las características destacadas por aspirantes a profesor en Matemática en docentes memorables, como un modo de responder a estas cuestiones y, a la vez, como una manera de aprovechar para la enseñanza el alto potencial formativo que este tema posee dentro de nuestra carrera.

Teniendo en cuenta que dos de los elementos esenciales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje son los alumnos y los docentes, elegimos abordar la problemática desde una perspectiva basada en la opinión de los estudiantes, a la que consideramos relevante debido a las numerosas experiencias que los mismos poseen con diversos profesores a lo largo de su escolaridad. En particular analizamos ciertos recuerdos de egresados recientes de la escuela secundaria en relación con sus experiencias como alumnos de docentes considerados por ellos como especialmente «buenos».

Las dimensiones de análisis han sido delimitadas por las cinco perspectivas señaladas por Bain (2007) como resultado de su extensa investigación de 15 años en distintas universidades de Estados Unidos. Este investigador procuró encontrar rasgos comunes entre cientos de profesores cuyo trabajo había sido considerado excepcional, tanto por sus alumnos y por sus colegas como por las instituciones en las que se desempeñaban. Realizó el relevamiento en una variedad de universidades y de disciplinas, procurando cierta representatividad. Concretamente, las dimensiones son:

1. *¿Qué motiva a un alumno?* Un «buen» docente persigue que sus estudiantes estén interesados y que les importe conocer lo que se les está intentando enseñar. Un profesor que motiva a sus alumnos es capaz de generar inquietudes genuinas sobre el tema que están tratando y de establecer vinculaciones con cuestiones más generales. Un docente así hace de la intriga, la preocupación y la duda motores que movilizan la curiosidad y el deseo de conocer. El profesor habilita a los estudiantes desde la confianza y los estudiantes, por su parte, disfrutan de su educación porque son protagonistas de su propio proceso de aprendizaje; no pierden sus ilusiones debido a que se tienen expectativas superadoras acerca de ellos y se valora su trabajo.
2. *¿Cómo preparan las clases?* Un «buen» profesor atiende a una serie considerable de tareas a la hora de preparar sus clases. Entre ellas se encuentran la de definir las cuestiones más importantes a tratar con el curso y la de elaborar las preguntas con las que estas se podrían abordar, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y sus expectativas acerca de la asignatura. Asimismo, un docente que prepara sus clases piensa cómo va a invitar a sus alumnos a aprender juntos y cómo va a generar las situaciones adecuadas para que sean capaces de razonar y de dar respuestas. Para ello, averigua la forma en que sus estudiantes aprenden

y cuáles son sus modelos mentales, y les transmite con claridad qué se espera de sus producciones.

3. *¿Cómo dirigen las clases?* Un «buen» docente crea un entorno crítico natural para el aprendizaje, convoca y sostiene a los alumnos en la tarea, comienza con los estudiantes en lugar de con la disciplina, ayuda a aprender a aprender y atrae a sus alumnos al razonamiento disciplinar. A fin de lograrlo, el profesor tiene buena oratoria, se expresa mediante un lenguaje cálido, sabe dar explicaciones y le da lugar al alumno.
4. *¿Cómo tratan a sus alumnos?* Un «buen» docente hace de la confianza el eje principal en la relación docente-alumnos. Confía plenamente en que sus alumnos desean aprender, asume que pueden hacerlo y se los hace saber. En este clima los estudiantes se animan a participar, se sienten seguros y vencen el miedo de cometer errores. El profesor se manifiesta abierto y humilde, y muestra entusiasmo por la enseñanza así como seguridad ante los retos que se le presentan.
5. *¿Cómo evalúan?* Al considerarla como una herramienta para favorecer los aprendizajes, un «buen» docente le concede a la evaluación un lugar central en el proceso de animar y ayudar a los estudiantes a aprender. Por tratarse de un proceso que se desarrolla en el tiempo, la evaluación se realiza de manera continua y comprende tanto a los alumnos como al propio proceso de enseñanza. Un docente que sabe evaluar explica claramente cuáles son los criterios que se implementan en la evaluación y se guía por un diseño de objetivos de aprendizaje. Las calificaciones se convierten, con ello, en una manera de comunicarse con sus estudiantes. Estos, por su parte, son invitados también a autoevaluar su propio proceso de aprendizaje.

3. Cualidades de docentes memorables destacadas por aspirantes a profesor en Matemática

La información relevada a través de los años por nuestro equipo de investigación ha permitido elaborar diversas publicaciones relacionadas con las cualidades que los alumnos perciben como características de los buenos docentes. La primera de ellas (Sgreccia y Cirelli, 2015) involucró a 613 alumnos ingresantes a la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario que cursaron la asignatura Práctica de la Enseñanza I, correspondiente al primer año de estudios, entre los años 2002 y 2014 inclusive. Siendo que los grupos de participantes ya estaban constituidos en forma independiente al estudio, el diseño de la investigación fue no experimental y tuvo lugar en el ámbito natural de cursado de una cátedra

universitaria. Los estudiantes provenían, en cantidades relativamente similares, tanto de diversas escuelas secundarias de la ciudad de Rosario, como de otras localidades de la provincia de Santa Fe y de provincias aledañas.

La primera actividad de la asignatura de referencia consiste en que cada alumno focalice su recuerdo en los dos mejores profesores que haya tenido en su escolaridad secundaria. Para ello, cada estudiante completa una ficha con los datos que se muestran en la Fig. 1.1. Esta técnica de recolección, en el marco de nuestra investigación, se constituye en una encuesta estructurada abierta.

PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA I - AÑO ...

Docente 1: Nombre.....

Asignatura..... Año.....

Tres características positivas.....

.....

Docente 2: Nombre.....

Asignatura..... Año.....

Tres características positivas.....

.....

Figura 1.1. Modelo de ficha que completaron los alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática

El hecho de hacer que los encuestados se concentren en dos docentes concretos tiene la intención de darle validez empírica al objeto de estudio, ya que los estudiantes piensan en personas reales con las que han interactuado y no en imaginarios deseables sobre los que se podría llegar a dudar de su existencia. El tamaño de la ficha (8cm x 6cm) también es intencional, pues exige la condensación de ideas (de los aspectos por los cuales recuerdan a los docentes mencionados) en palabras clave.

Para el procesamiento de la información se empleó la técnica de análisis de contenido en dos fases:

Fase 1. Transcripción de cada cualidad en una matriz de datos donde se especifica la dimensión de referencia –en términos de Bain (2007)– y la frecuencia absoluta de cada cualidad (Tabla 1.1). Las cualidades, expresadas en la forma en que lo hicieron los aspirantes a profesor, se constituyen en las modalidades del estudio.

Tabla 1.1. Matriz de datos empleada para el procesamiento

Frecuencia	Dimensión 1	...	Frecuencia	Dimensión 5
...	Modalidad Dim1-1		...	Modalidad Dim5-1
...	Modalidad Dim1-2		...	Modalidad Dim5-2

...	Modalidad Dim1-n1		...	Modalidad Dim5-n5

Fase 2. Agrupamiento de las modalidades según focos conceptuales definidos por las investigadoras luego de la inmersión en los datos. Estos agrupamientos resultaron ser las «familias» de cualidades emergentes en el estudio.

De los docentes reconocidos como buenos, 1760 pertenecían al nivel educativo medio, 36 al primario y 5 al superior. Cabe advertir que en la consigna dada a los estudiantes se les solicitó que procuraran elegir docentes del nivel secundario de educación. En cuanto al sexo del docente, 843 fueron mujeres, 332 hombres y en 37 respuestas no fue especificado. Entre las asignaturas citadas, Matemática predomina en forma holgada, con 501 menciones sobre un total de 1346.

A continuación, procedemos a recorrer las dimensiones de Bain (2007), con las categorías y modalidades emergentes.

Dimensión 1. ¿Qué motiva a un alumno? (254 alusiones)

Respondimos a esta pregunta mediante siete familias emergentes a partir de las cualidades señaladas por los participantes de la investigación. Cinco respuestas, sin embargo, aludieron a «motiva a los alumnos» de manera general y no fueron contempladas en ninguna de ellas.

Un docente que disfruta de su tarea, que experimenta placer haciendo lo que hace, se siente pleno y parece transmitir estas mismas sensaciones a sus alumnos. Se produce, así, en estos un interés genuino por conocer la disciplina, y el descubrimiento de sus facetas va generando empatía.

El hecho de que sus propios profesores estén motivados es también motor de motivación para los alumnos, de acuerdo a los participantes de la investigación; difícilmente un docente desmotivado, sin impulso o ánimo, pueda surtir algún efecto proactivo en el estudiantado.

Que los alumnos atiendan, por sentirse captados en la intriga, capturados en el desafío, fue otro de los aspectos señalados, como también la posibilidad del estudiante de manifestarse como tal durante las clases. Los encuestados atribuyeron importancia, además, a la significatividad de lo que

aprendieron, en términos de trascendencia y perdurabilidad, y al nivel de compromiso desplegado por el docente diariamente.

Dimensión 2. ¿Cómo preparan las clases? (574 alusiones)

Se determinaron nueve familias a partir de las cualidades subrayadas por los aspirantes a profesor en Matemática. Se encontraron, además, tres respuestas generales: «sabe preparar la clase» (con dos menciones) y «tiene la clase bien preparada previamente».

Se atribuyó especial valor al bagaje conceptual del docente, a lo que él porta en sus conocimientos y a lo que se dispone a compartir con sus estudiantes.

La responsabilidad, el tesón en el desempeño laboral del profesor, también fue una cualidad valorada, en sintonía con la dedicación puesta en pensar las actividades a realizar durante las clases que, a pesar de ser una tarea efectuada en otro tiempo y espacio, pareciera traslucirse en el aula. Un contenido que es desmenuzado por el docente para facilitar su aprendizaje por parte de otros es un contenido especialmente pensado para ser enseñado, desde sus representaciones plausibles, sus ejemplos oportunos, sus preguntas provocadoras. El profesor se constituye en un potente mediador entre el saber y el estudiante, y así supieron reconocerlo los encuestados. Un docente que se esfuerza en pensar cómo hacer pensar a sus alumnos es un docente que se esmera en preparar sus clases.

También fue ponderado lo nuevo, lo diferente, lo peculiar, lo particular, lo que de alguna manera rompe con lo habitual, lo rutinario... ¿lo «sin sentido»? A este respecto, fueron señaladas particularmente las actividades vinculadas con problematizaciones que van más allá del recinto del aula. Finalmente, la eficiencia, versus caos o dejadez, fue otro de los atributos señalados.

Dimensión 3. ¿Cómo dirigen las clases? (1225 alusiones)

A partir de lo respondido por los participantes de la investigación, se hallaron, en esta dimensión, diez familias emergentes. Además se presentaron cinco menciones generales, del estilo «sabe manejar las clases» (cuatro) y «trabaja bien» (uno).

Fue recurrente la respuesta «explica bien», tan directa y esperable como compleja e intrigante: ¿qué elementos confluyen en un docente cuando

sabe explicar?, ¿qué es lo particularmente valorado de sus explicaciones? La consideramos una cualidad que, sin duda, engloba otras tantas y que se constituye en objeto de indagación por sí misma.

Dado que el factor tiempo es crucial en la regulación de las clases, hubo variadas apreciaciones en cuanto a su ritmo, valorándose cierto dinamismo en ellas. Sin embargo, difícilmente un docente apurado, o molesto porque sus alumnos no avanzan al ritmo que él esperaría (olvidándose de que él ya hizo ese recorrido), pueda generar un ámbito propicio de aprendizaje. De este modo, el esfuerzo por hacer comprensible lo que se intenta transmitir, por echar luz sobre algún asunto, fue valorado por los estudiantes, como también resultó la combinación de precisión y sencillez en las explicaciones. La forma de expresarse del profesor fue, en consecuencia, también tenida en cuenta, en tanto constituye una manera de generar canales comunicativos apropiados.

La manera en la que se percibe el ámbito en el que se está resultó otro aspecto señalado por los participantes, al recordar que aquellos docentes reconocidos como «buenos» lograban generar climas agradables para disponerse a las tareas. Además, se ponderaron clases en las que, por un lado, los estudiantes estaban invitados a participar, y por otro, la presencia del docente no pasaba desapercibida.

Finalmente, el hecho de generar aprendizajes diversos durante las clases a través de enseñanzas tanto explícitas como implícitas, fue también mencionado como característico de los docentes memorables.

Dimensión 4. ¿Cómo tratan a sus alumnos? (1229 alusiones)

Se observaron 16 tipos de referencias de los alumnos del Profesorado en Matemática a esta cuestión. Además, hubo 22 respuestas aludiendo a un «buen trato», en general.

Los estudiantes valoraron especialmente la amabilidad y la comprensión por parte de sus docentes, y también vínculos tales como el compañerismo y el respeto.

Pareciera que lo que los profesores son como personas se percibe, de alguna manera, en el aula. De este modo, hubo alumnos que rescataron el buen sentido del humor de los profesores recordados, y también otros que reconocieron a docentes un tanto estrictos en su trato. La generosidad –como gesto de dar más allá de lo formalmente establecido– y la apertura del profesor, al habilitar al otro como persona, fueron también cualidades especialmente señaladas.

El afecto en el trato y el modo en el que el docente demuestra que sus alumnos le importan, al hacerlos sentir tenidos en cuenta y valorados, fueron también aspectos estimados. Al mismo tiempo, se valoró al docente que sabe hacerse respetar y que propende al buen comportamiento de sus estudiantes.

Raramente los alumnos ponderen favorablemente a un profesor en quien no confían; así, la credibilidad que él mismo les transmite fue otro rasgo reconocido.

Finalmente, los participantes del estudio rescataron también el carisma, la flexibilidad y la sensibilidad de aquellos profesores que se encuentran entre los memorables.

Dimensión 5. ¿Cómo evalúan? (346 alusiones)

Aquí fueron reconocidas cinco ideas centrales, encontrándose, además, cinco respuestas que aludieron a «evalúa bien» de manera general.

La exigencia fue una cualidad remarcada por los encuestados, así como la equidad en la valoración de sus desempeños estudiantiles. Se apreció especialmente a los docentes que brindan oportunidades en el proceso de aprendizaje y que realizan un seguimiento del mismo mediante una evaluación continua. En este aspecto, se destacaron los modos variados de evaluación utilizados por los docentes recordados.

4. Cualidades sobresalientes

Más allá de las familias y modalidades en las que fueron catalogadas, hubo seis cualidades, de las 566 identificadas, que sobresalieron con respecto al resto por su marcada aparición (frecuencia absoluta mayor a 100). Ellas son: *explica bien*, *exigente*, *paciente*, *buena persona*, *claro* y *comprensivo*. Recordando que cada docente memorable está descripto por una terna de cualidades (Fig.1.1), nos interesó determinar, entonces, qué características positivas acompañaban a cada una de estas sobresalientes (Sgreccia, Cirelli y Vital, 2015), con la intención de reconocer ciertos rasgos especialmente ponderados, a modo de tipología.

En la Tabla 1.2 se muestra una síntesis de los hallazgos. Para cada una de las seis cualidades sobresalientes se detallan las cualidades más recurrentes («destacadas») que la acompañan, distribuyéndose de acuerdo a las cinco dimensiones de Bain (2007). En negrita figuran las de mayor frecuencia en cada caso.

Tabla 1.2. Cualidades acompañantes destacadas para cada cualidad sobresaliente

Cualidad sobresaliente	Cualidades acompañantes destacadas				
	Dimensión 1	Dimensión 2	Dimensión 3	Dimensión 4	Dimensión 5
Explica bien			Paciente	Comprensivo Buena persona Ayuda a los alumnos Simpático Compañero	Exigente
Exigente		Desarrolla clases didácticas Responsable Inteligente	Explica bien Claro Paciente Enseña bien	Comprensivo Buena persona	Justo
Paciente		Responsable Inteligente	Explica bien Enseña bien Claro	Comprensivo Buena persona Simpático	Exigente
Buena persona		Inteligente	Explica bien Paciente Enseña bien Claro	Comprensivo Simpático Compañero	Exigente
Claro			Paciente Preciso	Comprensivo Buena persona Simpático Respetuoso	Exigente
Comprensivo		Inteligente	Paciente Explica bien Claro Enseña bien	Buena persona Compañero Amigo	Exigente

En primer lugar, se puede apreciar que las miradas siguen puestas en ¿cómo evalúan?, ¿cómo tratan a sus alumnos? y ¿cómo dirigen las clases?, estando escasamente mencionado ¿cómo preparan las clases? y ausente en términos directos ¿qué motiva a un alumno?

Se observa también que la cualidad *exigente* se encuentra vinculada con mayor frecuencia a las cinco cualidades destacadas restantes, siendo la primera elegida como acompañante en tres de ellas.

Asimismo si se seleccionan las dos primeras cualidades recurrentes para cada una de las seis consideradas «sobresalientes», *explica bien* fue

relacionada con cuatro de ellas (*exigente, paciente, buena persona, comprensivo*), mientras que *claro* –la restante cualidad– no aparece, posiblemente debido a su afinidad semántica con *explica bien*. A su vez, *paciente* se encuentra siempre como acompañante de tres de las cualidades sobresalientes (*explica bien, exigente, comprensivo*).

Analizando todas las cualidades sobresalientes con sus respectivas dos cualidades recurrentes se desprende una terna casi inseparable: *exigente - explica bien - paciente*.

En particular, *inteligente* fue la única cualidad que no forma parte del grupo de las seis sobresalientes y que tuvo una presencia relativamente destacada; lo hizo en relación con *buena persona*.

Dado que las cualidades analizadas son registro textual de las palabras escritas por los estudiantes, y no producto de denominaciones o agrupamientos efectuados por las investigadoras, la presencia constante de aquellas consideradas como sobresalientes a lo largo de los 13 años en los que fue recopilada la información hasta el momento del estudio es un hecho que, de por sí, vale la pena resaltar.

Por otro lado, a partir de los resultados, surgieron nuevos interrogantes tales como: ¿hay cualidades especialmente destacadas por este grupo de alumnos (ingresantes a un Profesorado universitario en Matemática) y no por otros?, ¿sugieren las cualidades sobresalientes de docentes memorables algún modelo docente, de institución escolar y de circulación de conocimiento predominante?, ¿cómo se vincula el conjunto total de cualidades analizadas, referidas a docentes de diversas asignaturas, con aquel que contiene a las que describen a los docentes memorables que se desempeñaban en la asignatura Matemática?, ¿se encuentran las seis cualidades sobresalientes (*explica bien, exigente, paciente, buena persona, claro, comprensivo*) de los profesores en general aún más marcadas en los profesores en Matemática?

5. Profesores en Matemática recordados como buenos

Tratando de responder a las dos últimas preguntas, en un trabajo reciente (Sgreccia, Cirelli y Vital, en evaluación), se han relevado las cohortes correspondientes a los alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática durante 15 años consecutivos (2002-2016), incrementando así el número de participantes en la investigación a 716. Se procedió, entonces, a comparar

los datos acerca de los profesores en Matemática con los de aquellos de otras asignaturas desde tres perspectivas: las dimensiones de análisis anteriormente consideradas, las familias de cualidades emergentes en cada dimensión y ciertas cualidades distinguidas (las tres más frecuentes en cada dimensión).

Con respecto a las dimensiones de análisis

En la Tabla 1.3 se presentan las frecuencias relativas de las cualidades observadas en cada dimensión, tanto para los registros relativos a profesores en Matemática como para los de otras disciplinas, con el fin de proporcionar una comparación de la distribución de cualidades por dimensión. Así, por ejemplo, de un total de 1782 registros relativos a cualidades de docentes en Matemática, 118 corresponden a la dimensión 1, mientras que de los 2442 correspondientes a docentes de otras disciplinas, 171 pertenecen a esta misma dimensión.

Tabla 1.3. Frecuencia de cualidades en cada dimensión con respecto a la frecuencia total de cualidades

Dimensión	Matemática	Otras disciplinas
1	118/1782=0,0662	171/2442=0,0700
2	269/1782=0,1510	392/2442=0,1605
3	654/1782=0,3670	736/2442=0,3014
4	589/1782=0,3305	895/2442=0,3665
5	152/1782=0,0853	248/2442=0,1016

A partir de lo consignado en la Tabla 1.3, se pueden advertir comportamientos relativamente similares en las frecuencias de registros relativos a los profesores en Matemática y en los de las otras disciplinas, en especial en tres de las dimensiones (1, 2 y 5). La mayor diferencia se presenta en las dimensiones 3 (¿Cómo dirigen las clases?) y 4 (¿Cómo tratan a los alumnos?) ponderándose más la primera en los profesores en Matemática y la segunda en los de otras disciplinas. Esto podría estar señalando la importancia de la presencia activa del profesor en Matemática en el momento de la clase.

Al analizar, además, la cantidad de cualidades distintas en cada una de las cinco dimensiones de análisis tanto para profesores en Matemática como

de otras disciplinas, es posible evaluar, en términos comparativos, el grado de variabilidad de las cualidades mencionadas dentro de cada dimensión para cada clase de docentes.

De esta manera, se observa que existe una mayor variedad de cualidades distintas asociadas con docentes en Matemática que con profesores de otras disciplinas en todas las dimensiones, con excepción de la dimensión 5. Esta variedad se ve particularmente acentuada en la dimensión 1 (¿Qué motiva a un alumno?), seguida por la 4 (¿Cómo tratan a sus alumnos?). Tal variedad parece indicar que hay un espectro relativamente amplio de componentes del accionar del profesor en Matemática que son apreciadas por sus estudiantes.

Con respecto a las familias emergentes en cada dimensión

En las Tablas 1.4 a 1.8 se recorren las familias de cualidades emergentes por cada dimensión de análisis. Se acompañan de algunos extractos de cualidades mencionadas por los estudiantes para ilustrar las ideas allí contenidas. Para cada familia se consignan las frecuencias respectivas registradas en los profesores en Matemática y en los de otras disciplinas, comparándolas con la frecuencia total de la dimensión para cada tipo de docentes. Finalmente, se muestran las diferencias entre las frecuencias relativas de cada familia de cualidades correspondientes a los profesores en Matemática y a los de otras disciplinas.

En la Dimensión 1 ¿Qué motiva a un alumno? (Tabla 1.4) no se observan diferencias notables en las distribuciones de frecuencias de las distintas familias de cualidades para los docentes en Matemática y para aquellos de otras disciplinas. En efecto, la máxima diferencia registrada se presenta en la familia de cualidades *que aprenda de manera significativa*, con un 3,69% a favor de aquella correspondiente a los docentes de otras disciplinas. Le siguen *que la materia le genere interés* con 3,52% también a favor de los docentes de otras disciplinas y *que el profesor esté motivado* con 3,03% a favor de los profesores en Matemática. Esto remarcaría la importancia de la motivación del propio profesor en Matemática para poder motivar, a su vez, a sus alumnos en la clase.

Tabla 1.4. Comparación de cantidades por familias en la Dimensión 1: ¿Qué motiva a un alumno?

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Que el profesor disfrute de su tarea	Ama su profesión, disfruta enseñar, ama lo que enseña, transmite su amor o pasión por la materia, tiene entusiasmo por enseñar	43/118	62/171	0,0018
Que la materia le genere interés	Desarrolla clases interesantes, hace la materia querible, hace la materia atrapante, muestra la materia en forma de desafío	20/118	35/171	-0,0352
Que el profesor esté motivado	Entusiasta / transmite entusiasmo, positivo, optimista	16/118	18/171	0,0303
Que se capte su atención	Sabe llegar al alumno, sabe captar la atención del alumno, sabe mantener la atención del alumno	9/118	14/171	-0,0056
Que sea invitado a dar lo mejor de sí	Da confianza, incentiva a sus alumnos, da aliento, incita a que los alumnos puedan lograrlo, lleva a los alumnos al límite de sus posibilidades de aprender, potencia la autoestima	13/118	14/171	0,0283
Que aprenda de manera significativa	Hace perdurables los aprendizajes, motiva a los alumnos para que estudien pensando, prepara para el mundo exterior	6/118	15/171	-0,0369
Que el profesor sea un profesional comprometido	Tiene profesionalismo, profesional, tiene participación social	6/118	5/171	0,0216

En la Dimensión 2 ¿Cómo preparan las clases? (Tabla 1.5), se destacan algunas diferencias a favor de los profesores en Matemática en las familias denominadas *con conocimiento* (del 5,34%) y *con responsabilidad* (4,86%). De los profesores de otras disciplinas se distingue que *planifican actividades vinculadas*

a la realidad (5,75%) y que piensan la clase para contribuir al pensamiento de los alumnos (5,31%). Le siguen, a favor de los docentes de otras disciplinas, las que ponderan que dicha preparación se realice *de manera diferente* (3,93%), mientras que a favor de los docentes en Matemática, se destaca que la realicen *con eficiencia* (3,71%). Pareciera valorarse más a los profesores en Matemática que se desempeñan con conocimiento, responsabilidad y eficiencia.

Tabla 1.5. Comparación de cantidades por familias en la Dimensión 2: ¿Cómo preparan las clases?

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Con conocimiento	Inteligente, amplio en sus conocimientos, sabe la materia, conoce, conoce de manera sólida, capacitado, investigador, tiene todos los contenidos en la mente	107/269	135/392	0,0534
Con responsabilidad	Responsable, comprometido, trabajador, no falta a clase, puntual, da todas las clases	57/269	64/392	0,0486
Con dedicación	Dedicado, dedicado al alumno a la asignatura, aplicado, dedicado a la enseñanza	31/269	37/392	0,0208
Con eficiencia	Organizado, ordenado, prolijo, eficiente	27/269	26/392	0,0371
Procurando la accesibilidad del conocimiento	Sintético, da ejemplos claros, relaciona contenidos, demuestra cada explicación, propone un resumen de cada tema, busca distintas formas de dar clases	20/269	32/392	-0,0073
De manera diferente	Creativo, enseña la asignatura de manera diferente, busca siempre material nuevo, elabora trabajos prácticos creativos, tiene estilo propio, tiene ideas originales	10/269	30/392	-0,0393
Para contribuir al pensamiento de los alumnos	Preocupado en que sus alumnos aprendan, promueve la reflexión, crítico, promueve apertura de pensamiento, promueve conocer el porqué de las cosas, muestra muchas verdades	5/269	28/392	-0,0531
Con actividades vinculadas a la realidad	Da ejemplos cotidianos, hace transportar a los alumnos al acontecimiento estudiado, aplica la teoría a la realidad, propone trabajar mediante situaciones en contexto, presenta temas de actualidad	1/269	24/392	-0,0575
Con actividades y materiales para el estudio	Propone mucha práctica, prepara buen material de estudio, aplica los conocimientos con muchos ejercicios, promueve trabajo intensivo, propone trabajos prácticos buenos	10/269	13/392	0,0040

En la Dimensión 3 ¿Cómo dirigen la clase? (Tabla 1.6), se destaca, entre los profesores de otras disciplinas, la familia *promoviendo la participación estudiantil* (con 4,04% a favor). En cuanto a los profesores en Matemática sobresalen *explicando y enseñando bien* (8,64% a favor) y *destinando tiempo para el aprendizaje* (5,85%). Es decir, se reconoce a los profesores en Matemática que saben brindar explicaciones oportunas y que a su vez se muestran pacientes al interactuar con sus estudiantes en la clase.

Estos hallazgos confirman una vez más la trascendencia del momento de la clase de Matemática, en tanto instancia privilegiada de construcción conjunta de sentidos. Como expresa Pennac (2008):

Una sola certeza, la presencia de mis alumnos depende estrechamente de la mía: de mi presencia en la clase entera y en cada individuo en particular, de mi presencia también en mi materia, de mi presencia física, intelectual y mental, durante los cincuenta y cinco minutos que durará mi clase (p. 73).

Tabla 1.6. Comparación de cantidades por familias en la Dimensión 3: ¿Cómo dirigen la clase?

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Explicando y enseñando bien	Explica bien, desarrolla clases didácticas, desarrolla clases muy buenas, tiene facilidad para transmitir sus conocimientos	244/654	211/736	0,0864
Destinando tiempo para el aprendizaje	Paciente, explica muchas veces si es necesario, predispuesto a enseñar, explica de diversas maneras, enseña respetando los tiempos de aprendizaje, tiene tiempo disponible para atender dudas, ayuda en las dificultades si al alumno le cuesta	160/654	137/736	0,0585
Siendo claros	Claro, entendible, desarrollando clases comprensibles, se esfuerza para promover el entendimiento, enseña a entender lo complejo, los alumnos siguen sus explicaciones	88/654	103/736	-0,0053
Siendo concisos	Práctico / práctico al explicar, sencillo al explicar, preciso, conciso, directo, explica sin dar tantas vueltas	38/654	57/736	-0,0163

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Propiciando un ritmo adecuado	Desarrolla clases dinámicas, maneja los diferentes momentos de la clase	32/654	50/736	-0,0190
Expresándose de manera adecuada	Sabe expresarse, expresivo, habla bien, tiene buena oratoria, tiene lenguaje accesible, desenvuelto frente a la clase, enseña a los alumnos a expresarse	26/654	49/736	-0,0268
Propiciando un clima agradable	Desarrolla clases entretenidas, desarrolla clases llevaderas, desarrolla clases amenas, desarrolla clases como un juego, genera buen clima de trabajo	25/654	42/736	-0,0189
Propiciando herramientas transversales	Enseña a razonar, enseña a estudiar, enseña cuestiones de la vida, enseña a ser buenas personas, enseña a estudiar no de memoria, transmite valores	15/654	34/736	-0,0233
Promoviendo la participación estudiantil	Desarrolla clases participativas, desarrolla clases interactivas, promueve el trabajo grupal, enseña a tener opinión propia, promueve la ayuda entre los alumnos, predispuesto a aceptar cambio de opiniones	10/654	41/736	-0,0404
Con presencia imponente	Seguro, decidido, tiene presencia, contundente, convincente	13/654	10/736	0,0063

En la Dimensión 4 ¿Cómo tratan a sus alumnos? (Tabla 1.7), de los profesores de otras disciplinas recordados como «buenos» se distinguen ligeramente las familias *con compañerismo* y *demostrando que sus alumnos les importan* (3,5%) y *con alegría* (2,5%). En los profesores en Matemática se pondera especialmente que el trato sea *con amabilidad y gracia* (4,21%) y también se valora que en ocasiones se comporte *de manera estricta* (2,56%), así como *con generosidad* (2,15%).

Tabla 1.7. Comparación de cantidades por familias en la Dimensión 4: ¿Cómo tratan a sus alumnos?

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Con amabilidad y gracia	Simpático, amable, tiene buena onda, tiene buena relación con los alumnos, atento, tiene buen carácter, sociable, agradable, ameno	115/589	137/895	0,0421
Con comprensión	Comprensivo, consejero, escucha a los alumnos, compasivo, contiene a los alumnos, se pone en el lugar del alumno	81/589	138/895	-0,0167
Con calidad humana	Buena, excelente persona, maestro, genio, completo, groso / copado	72/589	104/895	0,0060
Con compañerismo y demostrando que sus alumnos les importan	Compañero, amigo, busca siempre una manera de ayudar, atento a sus alumnos, cercano al alumno, comparte momentos con sus alumnos, promueve la unión del curso, defiende a sus alumnos, trata de igual a igual	59/589	121/895	-0,0350
Promoviendo respeto y disciplina	Respetuoso, se hace respetar / genera respeto, respetable, sabe ganarse el respeto de los alumnos, promueve el respeto por los otros	37/589	65/895	-0,0098
Con alegría	Divertido, alegre, gracioso, tiene buen humor, tiene sentido del humor	32/589	71/895	-0,0250
De manera estricta	Estricto, recto, serio, tiene carácter	46/589	47/895	0,0256
Con generosidad	Dispuesto, solidario, predispuesto, generoso, bondadoso, resuelve problemas del curso fuera de la clase, predispuesto a ayudar siempre, tiene ganas de dar	37/589	37/895	0,0215

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Con apertura	Humilde, tolerante, tiene buena comunicación con los alumnos, habilita el diálogo, abierto, permite expresarse	26/589	27/895	0,0139
Estableciendo límites claros	Sabe manejar el curso, sabe poner orden, promueve disciplina	20/589	19/895	0,0128
Con afecto	Cariñoso, dulce, ama a sus alumnos, amoroso, afectuoso	9/589	28/895	-0,0160
De manera personalizada	Preocupado por cada alumno, interesado por los alumnos, no hace preferencias entre los alumnos, conoce a los alumnos, individualiza a cada alumno	11/589	22/895	-0,0059
Con sinceridad	Sincero, confiable, espontáneo, honesto, consecuente con lo que dice, cumple con su palabra	15/589	25/895	-0,0024
Siendo carismáticos	Carismático, admirable	12/589	25/895	-0,0075
Siendo flexibles	Flexible, no se enoja por cualquier cosa	2/589	12/895	-0,0100
Siendo humanos	Humano, humanitario, sensible	5/589	4/895	0,0040

En la Dimensión 5 ¿Cómo evalúan? (Tabla 1.8), se observa una diferencia muy marcada de frecuencias en la familia de cualidades *siendo exigentes*, con un 21,63% a favor de los docentes en Matemática. Le sigue *siendo equitativos*, en la que las cualidades de docentes de disciplinas distintas a la Matemática superaron a los de esta en un 9%.

Tabla 1.8. Comparación de cantidades por familias en la Dimensión 5: ¿Cómo evalúan?

Familias	Extractos de cualidades mencionadas	Matemática	Otras disciplinas	Diferencia
Siendo exigentes	Exigente, exigente con la materia, exigente en su límite, exigente porque sabe que el alumno puede hacerlo mejor	134/152	165/248	0,2163
Siendo equitativos	Justo, objetivo, razonable, equitativo, imparcial para evaluar	9/152	37/248	-0,0900
Dando oportunidades	Da oportunidades para todos, da posibilidades de aprobar, promueve que sus alumnos aprueben, saca a sus alumnos adelante cuando les va mal	2/152	18/248	-0,0594
De manera continua	Observador, transmite la necesidad del esfuerzo, califica el cumplimiento de las tareas, corrige todo, exigente día a día, efectúa seguimiento de sus alumnos	3/152	15/248	-0,0408
Mediante ciertos modos valorados	Califica adecuadamente, evalúa siendo coherente con lo que enseña, utiliza formas de evaluar valoradas a posteriori por los alumnos	4/152	8/248	-0,0060

Tan marcada diferencia de la familia *siendo exigentes* a favor de los profesores en Matemática considerados como memorables nos interpela profundamente. En primer término, no se puede obviar que los que la están valorando favorablemente son justamente aspirantes a profesor en Matemática. Por otro lado, de acuerdo con hallazgos previos del equipo de investigación, la misma es especialmente reconocida cuando no se trata de una exigencia absurda o desmedida; por el contrario, comprende una exigencia basada en lo que el docente les brinda en cada encuentro a través de sus *buenas explicaciones* y con mucha *paciencia* (Sgreccia et al., 2015).

Se advierte, en la terna de cualidades que caracteriza a cada docente memorable, un interesante equilibrio del estilo del descripto por Flores, Álvarez y Porta (2013):

La enseñanza contiene muchas exigencias morales para los docentes: deben estar muy bien informados, pero ser respetuosos de quienes son ignorantes; ser amables y considerados, pero también estrictos y exigentes en ocasiones; estar libres de prejuicios, pero ser justos en su trato con los estudiantes; responder a

las necesidades de cada alumno sin descuidar la clase en su conjunto; mantener el orden, pero permitiendo espontaneidad; ser optimistas y entusiastas aunque tengan dudas privadas; lidiar con lo inesperado (p. 88).

Con respecto a ciertas cualidades distinguidas

Considerando como cualidades distinguidas a las tres primeras en cada dimensión, es posible señalar que aquellas que más se valoran en los docentes memorables de otras disciplinas son: *exigente - explica bien - buena persona*, registrándose una variación con respecto a la terna sobresaliente obtenida en Sgreccia et al. (2015): *exigente - explica bien - paciente*. ¿Estarían indicando estos resultados que los futuros profesores en Matemática necesitan, en disciplinas no afines, algo más que la *paciencia* del docente? ¿Requieren de ellos que sean *buenas personas*? Sin embargo, cuando se centra la mirada en las cualidades ponderadas en los docentes memorables de Matemática, se aprecia que la terna obtenida coincide con la terna de las ternas informada en Sgreccia et al. (2015).

Retomando una de las preguntas iniciales de la investigación: ¿Se encuentran *las seis cualidades sobresalientes (explica bien, exigente, paciente, buena persona, claro, comprensivo) de los profesores en general aún más marcadas en los profesores en Matemática?*, es posible reconocer indicios de una respuesta afirmativa para dos de ellas (*explica bien* con 4,77% y *paciente* con 3,21%), ligeramente a favor para otras dos (*exigente* con 0,84% y *claro* con 0,03%) y negativa para las dos restantes (*comprensivo* con -0,22% y *buena persona* con -0,42%).

Pareciera ser que los aspirantes a profesor en Matemática que reconocen, a su vez, a profesores en Matemática como docentes memorables de su escolaridad, distinguen sus explicaciones, su paciencia, su exigencia y su claridad, y dejan en un segundo plano las cualidades *comprensivo* y *buena persona* ¿Será por no haber sentido, tal vez, la necesidad de acudir a ellos en estos términos?

6. Tareas de enseñanza en el Profesorado en Matemática vinculadas con la biografía escolar

Asumiendo que el reconocimiento de aquellas características de los docentes considerados como memorables por los estudiantes del Profesorado en Matemática colabora con la comprensión de lo que es una buena

enseñanza (Fenstermacher, 1989) y puede orientar la toma de decisiones en su futuro trabajo en el aula, el tema de la biografía escolar es abordado como contenido temático y transversal en asignaturas correspondientes al Campo de la Práctica Docente.

En efecto, a partir de la primera actividad de la asignatura Práctica de la Enseñanza I (primer año, anual), el alumno ingresante a la carrera comienza a realizar un recorrido a través de su biografía escolar, con el objeto de despertar su conciencia a la complejidad de la labor docente y a la importancia de poseer aquellos conocimientos y actitudes necesarios para el buen ejercicio de la profesión. Es en esta primera actividad que se solicita al alumno que recuerde a los dos mejores profesores de su escolaridad secundaria, explicitando tres cualidades positivas que hacen de los mismos un docente memorable, y que las registre en la ficha presentada en la Fig. 1.1. El trabajo de reflexión que se realiza al focalizarse en aquellas cualidades que se estiman como inherentes a los buenos docentes y el análisis de su importancia para el ejercicio de la docencia permiten al estudiante comenzar a identificar la naturaleza de dichas cualidades y su génesis, con vistas a su posible desarrollo y a la construcción de la identidad docente que cada uno de ellos desea para sí.

Este es el objetivo que guía las tres actividades siguientes. En el segundo y en el tercer trabajo de la asignatura, a partir de un debate en el que participa el conjunto del grupo-clase, se realiza una reflexión profunda acerca de las maneras en las que es posible adquirir aquellas cualidades surgidas en la primera actividad y su relación con la formación disciplinar, la formación pedagógica, la personalidad del docente y las actitudes de cada docente en particular. Se intenta, con esto, destacar la importancia y la necesidad de la formación, tanto inicial como continua, para un desempeño profesional acorde a las responsabilidades que se deben asumir para ejercer la tarea docente. A continuación, en una cuarta actividad denominada «Yo como docente», los alumnos reflexionan de manera individual acerca de las cualidades que les resultan deseables para su propia futura labor y la forma en la que sería posible desarrollarlas o, en caso de creer poseerlas ya, profundizarlas. De esta manera, se pone al aspirante a profesor en contacto con sus ideales y con las acciones concretas con las que pueden hacerse realidad, comenzando así a delinear su futuro perfil profesional.

Estas consideraciones se retoman durante el cursado de la asignatura Práctica de la Enseñanza II (tercer año, cuatrimestral), al hacer hincapié nuevamente en el tema de la complejidad de la práctica docente. Las concepciones

de los estudiantes acerca de los aspectos determinantes de la calidad en la tarea de enseñanza y de su buen ejercicio originan un nuevo análisis de aquellos conocimientos y actitudes que son necesarios para los mismos. Es de esperar que las concepciones de los alumnos estén enriquecidas, en este estadio de sus estudios, tanto por su biografía escolar previa como por las experiencias en aquellas asignaturas de la carrera que ya han sido cursadas y que van dejando su propia huella en la formación. De esta manera, los estudiantes son puestos una vez más en situación de introspección pero ahora llevando a cabo su análisis a la luz de los conocimientos y vivencias experimentadas a lo largo de su trayectoria como alumnos del Profesorado.

En la materia Residencia (cuarto año, anual), por su parte, ante la inminente finalización de los estudios y acceso al campo de trabajo docente, la temática de la biografía escolar y su huella inconsciente en el propio accionar cobra nuevamente relevancia. El primer trabajo de la asignatura consiste en la reconstrucción consciente de la biografía escolar personal, con el objetivo de identificar la incidencia de los modelos docentes vividos a lo largo de toda la trayectoria escolar y universitaria. Junto con esto, el estudiante hace explícitas sus expectativas y la visión de sí mismo como futuro docente de Matemática. Estas visiones, creencias, expectativas y temores en cuanto a su futuro accionar en la profesión se relacionan, en parte, con recuerdos de experiencias vivenciadas en contextos educativos y con las huellas que estas han dejado en cada uno. Surgen en esta actividad, en relación con la idea que cada uno tiene de sí mismo como futuro docente, los recuerdos de profesores que han sido de la manera imaginada para sí o bien su antítesis y los de aquellos momentos compartidos con docentes que han dejado marcas, ya sea por experiencias positivas que merecen ser adoptadas como guía, como por experiencias negativas que orientan sobre errores que no deben cometerse. Se hacen presentes también –y de manera intensa–, los deseos y temores asociados con su próxima experiencia en la residencia docente. Se tratan de propiciar, además, reflexiones vinculadas con sus estudios actuales: las contribuciones de los mismos a su presente formación y los aspectos que los alumnos consideran que deberían enfatizarse dentro de la carrera, las fortalezas y debilidades en el campo de la Educación Matemática que reconoce en sí mismo y los recuerdos de docentes que hayan contribuido a su desarrollo personal.

Si bien la introspección y la reflexión se llevan a cabo de manera individual, estas se enriquecen en un espacio colectivo de puesta en común y análisis conjunto en el que se reconocen puntos de coincidencia en las experiencias y expectativas planteadas.

El estudio de elementos teóricos propuestos por diversos referentes en el tema a lo largo de este proceso de introspección y reflexión va haciendo posible que los alumnos efectúen una lectura de las huellas –ahora hechas conscientes– distinta de aquella que surge de manera espontánea, y les permite contrastar sus creencias, ideas y modelos implícitos con un pensamiento crítico.

A manera de puente con las vivencias del comienzo de su propia trayectoria universitaria, los residentes realizan también un análisis de las cualidades mencionadas en la actividad «Buenos Docentes» de la asignatura Práctica de la Enseñanza I durante los diez últimos años, poniendo especial atención en los sentidos de interpretación de las mismas que un ingresante a la carrera posee, ahora revisitados como estudiantes avanzados del Profesorado.

Además, al concluir sus prácticas docentes en el nivel secundario de educación, se invita a los residentes a reflexionar sobre su propia acción, analizando qué cualidades de un «buen docente» han logrado tener de aquellas que aún no tenían al escribir el primer trabajo de la materia, cuáles deberían aún seguir desarrollando y en qué consideran que su biografía escolar condicionó/posibilitó sus prácticas docentes en sus experiencias como residentes.

Finalmente, con la intención de robustecer –en el sentido de consolidar y fortificar– estas tareas de enseñanza, también en la asignatura Pedagogía (segundo año, anual), correspondiente al Campo de Formación General Pedagógica del Profesorado en Matemática, se trabajan desde el inicio del cursado cuestiones relativas a la biografía escolar tales como: ¿cuáles son los intereses cognitivos que subyacen a las prácticas pedagógicas? o ¿qué modelos educativos son internalizados a través de la propia biografía escolar? Junto a otros tres importantes interrogantes, como lo son el porqué y el para qué educamos, cómo se vinculan los fenómenos educativos con la propia condición humana y con la transmisión cultural, y cuáles son los elementos del discurso pedagógico moderno que están en crisis, forjan temáticas de estudio abordadas intencionalmente en la materia.

Si bien diversos aspectos de la biografía escolar son tratados en forma recurrente en el transcurso de la carrera, las autoras proponemos fortalecer aún más el acercamiento a los resultados de la investigación educativa relativa al tema, tanto de los estudiantes como de los colegas, así como fomentar la utilización de las narrativas pedagógicas que los estudiantes producen durante el cursado para develar asuntos de la propia biografía e identidad docente e interpelar supuestos subyacentes.

Estimamos que considerar la biografía escolar como objeto de estudio en la formación inicial de profesores en Matemática posibilita que los futuros docentes adquieran mayor nivel de conciencia acerca de las marcas que portan y actúen de manera proactiva sobre las impresiones que, a su vez, dejarán en sus propios estudiantes (Vital, Sgreccia y Cirelli, 2016).

7. Conclusiones

Para finalizar nos permitimos integrar diferentes hallazgos obtenidos por el equipo de investigación durante estos años, nutrirlos con nuestro permanente intercambio en actividades de formación inicial y continua de profesores en Matemática, e intercalarlos con extractos de las Memorias Mal de Escuela, del escritor francés Daniel Pennac (2008), quien interpela sus experiencias escolares como el «mal» estudiante que dice haber sido.

Nos aventuramos en proponer que un buen profesor en Matemática es un profesor que configura su conocimiento profesional atendiendo a *cuatro P*:

- *Persistente*: explica, exige...

La imagen del gesto que salva al ahogado, el puño que tira de ti hacia arriba a pesar de tu gesticulación suicida, esa ruda imagen de vida de una mano agarrando firmemente el cuello de una chaqueta es la primera que me viene a la cabeza cuando pienso en ello. En su presencia –en su materia– nacía yo para mí mismo: pero un yo matemático, si puedo decirlo así, un yo historiador, un yo filósofo, un yo que, durante una hora, me olvidaba un poco, me ponía entre paréntesis, me libraba del yo que, hasta el encuentro con aquellos maestros, me había impedido sentirme realmente allí (p. 149).

- *Paciente*: explica de diversas maneras, se pone en el lugar del otro...

Tomaban en consideración tanto a sus buenos como a sus malos alumnos, y sabían reanimar en los segundos el deseo de comprender. Acompañaban paso a paso nuestros esfuerzos, se alegraban de nuestros progresos, no se impacientaban por nuestras lentitudes, nunca consideraban nuestros fracasos como una injuria personal y se mostraban con nosotros de una exigencia tanto más rigurosa cuanto estaba basada en la calidad, la constancia y la generosidad de su propio trabajo (p. 149).

Un docente paciente es, por sobre todas las cosas, un docente que cree fehacientemente en sus alumnos; los reconoce y respeta como tales.

Dedicó aquel año a sacarnos del abismo de nuestra ignorancia... se maravillaba siempre de lo que sabíamos a pesar de todo. –Creéis que no sabéis nada, pero os equivocáis, os equivocáis, ¡sabéis muchísimas cosas! Mira, Pennacchioni, ¿sabías que lo sabías? (p. 148).

- *Presente*: se puede contar con él, prepara sus clases...

La presencia del profesor que habita plenamente su clase es perceptible de inmediato. Los alumnos la sienten desde el primer minuto del año, todos lo hemos experimentado: el profesor acaba de entrar, está absolutamente allí, se advierte por su modo de mirar, de saludar a sus alumnos, de sentarse, de tomar posesión de la mesa. No se ha dispersado por temor a sus reacciones, no se ha encogido sobre sí mismo, no, él va a lo suyo, de buenas a primeras, está presente, distingue cada rostro, para él la clase existe de inmediato (p. 75).

- *(con) Pasión*: le gusta lo que hace, transmite entusiasmo...

Desde sus primeras palabras, nos adentrábamos en las matemáticas. ¿Con qué estaba hecha aquella hora que tanto nos retenía? Esencialmente con la materia que el señor Bal enseñaba y que parecía habitarle, lo que le convertía en un ser curiosamente vivo, tranquilo y bueno. Extraña bondad, nacida del propio conocimiento, deseo natural de compartir con nosotros la «materia» que arrobaba su espíritu y de la que no podía concebir que nos resultara repulsiva, o sencillamente ajena. Bal estaba amasado con su materia y sus alumnos... tan convincente era su gozo al enseñar (p. 147).

Solo alguien que domina fuertemente su asignatura puede tener esta pasión. Un profesor en Matemática con estas características posee un *conocimiento matemático para la enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008) altamente desarrollado.

Nos daban clases tan memorables como el teorema, el tratado de paz o la idea fundamental, que aquel día eran el tema. Enseñándolo, creaban el acontecimiento. Y otra cosa, me parece que tenían cierto estilo. Eran artistas en la transmisión de su materia. Sus clases eran actos de comunicación, claro está, pero de un saber dominado hasta el punto de pasar casi por creación espontánea. Su facilidad convertía cada hora en un acontecimiento que podíamos recordar como tal (p. 150).

Un docente de las *cuatro P* es, sin lugar a dudas, un docente comprometido con su trabajo a quien no le da lo mismo realizar esta o cualquier otra

labor. Suele ocurrir muchas veces que esperamos el momento o las circunstancias oportunas (Terigi, 2010), que nos quejamos por la falta de preparación para actuar en el contexto en el que nos toca o que creemos que un mero cambio en las condiciones de trabajo garantizaría una labor de mejor calidad. Sin embargo:

Los profesores que me salvaron –y que hicieron de mí un profesor– no estaban formados para hacerlo. No se preocuparon de los orígenes de mi incapacidad escolar. No perdieron el tiempo buscando sus causas ni tampoco sermoneándome. Eran adultos enfrentados a adolescentes en peligro. Se dijeron que era urgente. Se zambulleron. No lograron atraparme. Se zambulleron de nuevo, día tras día, más y más... Y acabaron sacándome de allí. Y a muchos otros conmigo. Literalmente, nos repescaron. Les debemos la vida (p. 23).

Como docentes debemos, entonces, ser conscientes de las marcas –¡de por vida!– que dejamos en nuestros alumnos y de la exponencial trascendencia que esto tiene si ellos son, a su vez, futuros docentes.

Solo sé que los tres estaban poseídos por la pasión comunicativa de su materia. Armados con esa pasión, vinieron a buscarme al fondo de mi desaliento y solo me soltaron una vez que tuve ambos pies sólidamente puestos en sus clases, que resultaron ser la antecámara de mi vida (p. 149).

Para finalizar deseamos reconocer el enorme potencial que tienen estudios como los realizados para contribuir a la formación, tanto inicial como continua, de profesores en Matemática.

Si, además del de los maestros célebres, esa antología ofreciera *el* retrato del profesor inolvidable que casi todos nosotros hemos conocido una vez al menos en nuestra escolaridad, tal vez obtuviéramos ciertas luces sobre las cualidades necesarias para la práctica de ese extraño oficio (p. 152).

En el Profesorado en Matemática, el tema de los docentes memorables en la biografía escolar se ha constituido en un eje articulador de la enseñanza, robustecido a través de los años a partir del vínculo entre investigación y docencia. Procuraremos continuar el trabajo en instancias de formación continua de profesores en Matemática, alentadas siempre por las palabras de Pennac (2008): «Basta un profesor –¡uno solo!– para salvarnos de nosotros mismos y hacernos olvidar a todos los demás» (p. 147).

8. Referencias bibliográficas

- Alliaud, A. (2004). La experiencia escolar de maestros «inexpertos». Biografías, trayectorias y práctica profesional. *Revista Iberoamericana de Educación*, 34(3), 1-12.
- Álvarez, Z., Porta, L. y Sarasa, M.C. (2011). Buenas prácticas docentes en la formación del profesorado: Relatos y modelos entramados. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 15(1), 241-252.
- Bain, K. (2007). *Qué hacen los mejores profesores universitarios*. Valencia: Universitat de València.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Branda, S. y Porta, L. (2012). Maestros que marcan. Biografía personal e identidad profesional en docentes memorables. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 16(3), 231-243.
- Cabo, C. (2006). Pensar y pensarse: un deber para mejorar la práctica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(2), 1-8.
- De Laurentis, C. (2014). Docentes Memorables en la UNMDP: metáforas que construyen identidad. *Revista Entramados*, (1), 99-107.
- Feldman, K. (1989). Instructional effectiveness of college teachers as judged by teachers themselves, current and former students, colleagues, administrators, and external (neutral) observers. *Research in Higher Education*, 30, 137-194.
- Feldman, K. (1997). Identifying exemplary teachers and teaching: evidence from student ratings. En R. Perry y J. Smart (Eds.). *Effective teaching in higher education: Research and practice* (pp. 368-395). Nueva York: Agathon.
- Flores, G., Álvarez, Z. y Porta, L. (2013). La buena enseñanza en la educación superior: profesores memorables y valores memorables. *Revista Magistro*, 7(13), 81-108.
- Fenstermacher, G. (1989). Tres aspectos de la filosofía de la investigación sobre la enseñanza. En M. Wittrock (Comp.). *La investigación de la enseñanza I. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 149-179). Barcelona: Paidós.
- Gracia, E. y De la Iglesia, C. (2006). Sobre la opinión que los alumnos tienen de la efectividad de la docencia. Una primera exploración con encuestas en Teoría Económica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 37(4), 1-15.

- Goodson, I. (2003). Hacia un desarrollo de las historias personales y profesionales de los docentes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 8(19), 733-758.
- Jackson, P. (1999). *Enseñanzas Implícitas*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas: Una nueva agenda para la enseñanza superior*. Buenos Aires: Paidós.
- Maggio, M. (2012). Profesores ejemplares: prácticas memorables y perspectivas de futuro. Conferencia IBERTIC. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=0FI2Jly3wIw>.
- Malikow, M. (2005-2006). Effective teacher study. *National Forum of Teacher Education Journal-Electronic*, 16(3e), 1-9.
- Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Formación Docente. (2008). *Lineamientos Curriculares Nacionales para la Formación Docente*. Buenos Aires: Autor.
- Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. *Panellenio Synedrio Matematikis Paideias/Praktika*, 23, 39-47.
- Porta, L. y Sarasa, M.C. (2014). Resignificar la buena enseñanza desde la voz de docentes memorables en Educación Superior confrontada con Ortega y Gasset y oros académicos. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 18(1), 293-305.
- Pennac, D. (2008). *Mal de escuela*. [Traducción de Manuel Serrat Crespo]. Barcelona: Mondadori.
- Perrenoud, P. (2005). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.
- Sanjurjo, L. (2008). ¿Qué debe saber hacer un profesor para mejor comprender y organizar sus clases? En F. Trillo y L. Sanjurjo. *Didáctica para profesores de a pie. Propuestas para comprender y mejorar la práctica* (pp. 91-153). Rosario: Homo Sapiens.
- Sanjurjo, L. (2009). Razones que fundamentan nuestra mirada acerca de la formación en las prácticas. En L. Sanjurjo (Coord.). *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales* (pp. 15-43). Rosario: Homo Sapiens.
- Santaló, L. (1999). *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel.

- Sgreccia, N. y Cirelli, M. (2015). Cualidades de docentes memorables destacadas por aspirantes a profesor en Matemática. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 19(2), 333-349.
- Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M. B. (2015). Docentes memorables destacados por ingresantes al Profesorado en Matemática. Hacia una tipología de análisis. *Memorias de las VIII Jornadas Nacionales y I Congreso Internacional sobre la Formación del Profesorado*, 1-21.
- Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M. B. (2016). ¿Qué cualidades de aquellos buenos docentes reconozco en mí? Un estudio con egresadas del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. *Revista de Educación*, 7(9), 297-315.
- Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M. B. (en evaluación). Cualidades de profesores en Matemática recordados como buenos por futuros profesores en Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*.
- Thompson, S. (2007). *How is a 'good teacher' defined in a communicative, learner-centered classroom?* Tesis de Maestría en Enseñanza del Inglés como Lengua Extranjera. Escuela de Humanidades de la Universidad de Birmingham.
- Universidad Pedagógica de Buenos Aires. (2011). *Cuadernos de discusión #2: ¿Cómo se forma a un buen docente?* Buenos Aires: Autor.
- Vital, M. B., Sgreccia, N. y Cirelli, M. (2016). Aportes de la biografía escolar para las prácticas de la enseñanza de la Matemática. *Memorias de la Jornada de Experiencias Innovadoras en Educación en la FCEIA*, 4, 107-112.

Página intencionadamente en blanco.

CAPÍTULO 2

LAS NARRATIVAS PEDAGÓGICAS COMO DISPOSITIVOS DE FORMACIÓN

*María Sol Mengarelli**
*Leticia Peralta***

1. Introducción

En nuestro estudio interesa reconocer componentes de los subdominios del *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT; Ball, Thames y Phelps, 2008) en las narrativas que futuros profesores en Matemática realizan sobre su propio desempeño en instancias de Residencia en el nivel superior de educación. También, se procura dilucidar diversas *sensaciones*, en el plano de lo emocional, que van expresando en sus escritos. Mediante un enfoque cualitativo y alcance descriptivo, se analiza el caso de dos residentes del año 2015 que se desempeñaron con

* Profesora en Matemática (UNR). Ayudante de Primera Categoría Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Reemplazante del Nivel Secundario.

** Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR). Jefe de Trabajos Prácticos Dedicación Simple en las Facultades de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, y de Ciencias Económicas y Estadística (UNR) y Docente Titular en la EESOPÍ N° 8010 «Nuestra Señora de la Misericordia».

un mismo grupo de alumnos en asignaturas diferentes. En los hallazgos se encuentran reflejados, de manera nutrida y recurrente, los subdominios del *MKT* cuando las residentes re-viven su accionar a través de sus relatos, que en ocasiones revelan sentimientos por los que fueron atravesando.

Reconocemos a la narrativa pedagógica como un potente dispositivo¹ de formación de profesores en el campo de la práctica (Alliaud, 2014), que enriquece el análisis pedagógico haciendo eco de lo múltiple en los sujetos y las culturas. Tiene un gran potencial para que los futuros profesores re-vivan experiencias, ya sea como alumnos o como docentes practicantes, interpe-lándolas desde la reflexión sobre la praxis.

2. La narrativa pedagógica en la práctica profesional docente

El campo de la práctica profesional docente es uno de los cruciales en la formación de profesores en general (Sanjurjo, 2009) y de Matemática en particular. Allí se entretajan, en el marco de la complejidad, los conocimientos teóricos y prácticos que los futuros docentes han ido adquiriendo.

Por otro lado, como venimos manifestando, se reconoce a la narrativa pedagógica como un potente dispositivo de formación docente en el campo de la práctica que enriquece el análisis pedagógico trascendiendo las fronteras temporales, contextuales, culturales y sociales (Huber, 2014).

Entre las potencialidades de la narrativa como dispositivo de formación docente, puntualmente en lo relativo al desarrollo profesional, Gómez, Vallejo y Rodríguez (2014) reconocen que sirve para reflexionar sobre la propia práctica, para indagar acerca de diversas prácticas docentes, para dialogar intersubjetivamente, para develar la identidad, para dar significado e interpretar intenciones, para exteriorizar/materializar emociones, para producir de manera conjunta, para contar historias situadas, para recuperar lo cotidiano con sentido/s; en fin, para construir conocimiento profesional docente. En el seno de las escuelas, Espinosa y Pons (2017) reconocen como valor pedagógico de las narrativas la posibilidad de focalizar la mirada en las preocupaciones, afectos y condiciones de los personajes involucrados, detonando procesos crítico-reflexivos. Más globalmente, Huber, Caine, Huber y Steeves (2014), a partir de su estudio con poblaciones tradicionalmente

¹ Entendidos como mecanismos o artificios para producir acciones previstas (Real Academia Española).

silenciadas, ven en la narrativa un poder trascendental para las personas, dado que nos invita a expresarnos, liberarnos, construir imágenes de quiénes somos y qué estamos haciendo, transformarnos, cambiar nuestras vidas, re-evaluar situaciones que creemos entender, tener esperanza.

Bruner (1997, 2003) sostiene que mediante el pensamiento narrativo damos sentido a nuestra vida y a los sucesos en los que estamos involucrados integrándolos en relatos. Construimos una historia de los sucesos y significados que estructuran nuestra vida como sujetos. En efecto, las narrativas incluyen valoraciones que inexorablemente condicionan el tipo de docente que se perfila. Al hacerlas explícitas durante el proceso formativo, posibilitan interpelarse acerca de qué docente se aspira ser.

Las narrativas de clases vividas se constituyen, también, en portadoras de voz. Ayudan a recuperar y desocultar teorías implícitas, procuran superar la anécdota hacia un trabajo analítico, encauzando la problematización de situaciones cotidianas. Al contar por escrito lo sucedido, se toma cierta distancia del acontecimiento, más proclive así a convertirlo en objeto de reflexión con relación al accionar docente. No se trata de lo sucedido, es una representación, una reconstrucción de lo sucedido. La complejidad de la narrativa conlleva a que una misma persona viva, explique, re-explique y re-viva lo acontecido (Connelly y Clandinin, 1996).

En particular, los relatos de clases vividas constituyen un texto escrito colectivo del grupo que favorece la metacognición, tendiente a objetivar el pensamiento individual, haciéndolo público y discutible. El intercambio de esas narraciones personales, sostenido en un diálogo genuino con respeto, apertura, disponibilidad, escucha y atención, genera un acercamiento comprensivo hacia el otro, invita al resto a unirse a su historia mediante una reflexión colectiva recreando lo vivido (Mengarelli, Peralta y Sgreccia, 2016).

De este modo, en la cátedra de Residencia del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario se concibe a las narrativas que efectúan los residentes sobre sus vivencias como dispositivos potentes para la promoción de la reflexión sobre la propia práctica (Caporossi, 2009).

En nuestro estudio se procura caracterizar a qué tipo/s de conocimiento/s (en términos del MKT) se refieren explícitamente los residentes cuando reviven sus experiencias desde la escritura y socialización (dado que las narrativas, si bien son escritas en primera instancia de modo individual, son puestas a consideración de otros, mediante documentos colaborativos en línea –Google Drive–).

Se vislumbran dos planos de impacto:

- A nivel *docencia en la formación docente*, en especial en la asignatura Residencia, que de acuerdo a su programa se concibe como: «un espacio de praxis, de interrelación de teoría y práctica contextualizada, de producción y construcción de conocimientos mediante la reflexión crítica, que permita a los alumnos comprender la enseñanza de la Matemática para transformarla, desde la singular significación que se le otorga».
- A nivel *investigación educativa*, en concordancia con dos de los objetivos específicos del Proyecto de investigación: «describir los tipos de dispositivos que se despliegan en las asignaturas del Profesorado en Matemática cuyo objeto formativo es la construcción del conocimiento profesional docente; explorar posibilidades de fortalecimiento de dichos dispositivos en pos al empoderamiento de los futuros profesores».

3. Narrativas consideradas

En el marco de nuestro estudio, la narrativa sirvió para develar la emergencia de los diferentes subdominios del *MKT* a través del análisis de su contenido (Cabrera, 2009).

Particularmente, en el Profesorado en Matemática se cuenta con abundante material narrativo producido por los residentes en sus prácticas de nivel superior en la misma institución donde cursan y de nivel secundario en diversas escuelas de la ciudad, dado que desde la cátedra Residencia (anual, ubicada en el cuarto y último año de la carrera) se les solicita narrar sus experiencias.

Puntualmente en este estudio se analiza el contenido de las producciones narrativas de los residentes del año 2015 desde un enfoque cualitativo con alcance descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Aquí se presentan los casos de dos futuras profesoras que realizaron sus prácticas de nivel superior en las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática, una en la asignatura Geometría I (Residente Geometría: RG) y la otra en Cálculo I (RC).

Se procuró reconocer modos de emergencia de los subdominios del *MKT* (Ball et al., 2008) en los relatos. En efecto, como categorías de análisis se adoptaron tales subdominios de conocimiento: común del contenido, en el horizonte matemático, especializado del contenido, del contenido y de los estudiantes, del contenido y de la enseñanza, del contenido y del curriculum. También se prestó especial atención a expresiones que denotaban sensaciones por parte de las residentes y emergieron otras cuestiones (tales como el

trato docente-alumno, más allá del contenido) que se consideraron valiosas de consignar.

Las fases de ejecución del estudio comprendieron:

- *Pre-procesamiento de las narrativas de las residentes*, a partir de una lectura global de sus producciones, donde se efectuaron las primeras asociaciones entre lo narrado por las futuras profesoras y las categorías de análisis.
- *Construcción de las modalidades emergentes*, de manera exhaustiva en una de las narrativas (de RG), donde se producen las denominaciones con el propósito de ilustrar sucintamente la delimitación semántica de lo expresado en sus relatos.
- *Procesamiento más fino de las narrativas*, procurándose aplicar las modalidades emergentes de la fase anterior a la narrativa de la otra residente (RC), lo que conlleva a un proceso de calibración (ya sea de afianzamiento o de redenominación/reagrupamiento) de las mismas.

4. Desmenuzamiento de las narrativas pedagógicas

A continuación mostramos los *componentes* de los subdominios del *MKT* reconocidos², acompañados de algunos extractos de narrativas que procuran servir de evidencia para la investigación así como de referencia para ilustrar las ideas.

Conocimiento especializado del contenido. Pudimos reconocer cinco modalidades (M1 a M5):

M1) Uso con criterio de notación y lenguaje matemático.

A veces para distinguir objetos matemáticos peculiares (como son los ángulos cóncavos) de los habituales.

La docente de práctica se acercó a mí para preguntarme si habíamos dado en teoría alguna notación en particular para los ángulos cóncavos... Le respondí de forma negativa y decidimos consultarle al docente de teoría. (RG-3)³.

² Al respecto cabe advertir que no se han encontrado indicios del subdominio *conocimiento en el horizonte matemático* y, por otro lado, consideramos que lo relativo al subdominio *conocimiento común del contenido* no presenta elementos del orden didáctico que justifiquen su consideración en esta ocasión.

³ RG-3 significa que se trata de un extracto ubicado en la página 3 del documento de la residente RG.

También, para evitar una eventual interpretación polisémica y por lo tanto ambigua (por ejemplo el signo igual alineado con los numeradores de dos fracciones alude más a una igualdad entre los numeradores que entre las fracciones):

Me aconseja que cuando escriba un igual al lado de una fracción lo haga en el mismo nivel que la raya de fracción y no al nivel del numerador (como lo hice yo), me comenta que es un error de notación muy típico. (RC-41)

Para exteriorizar razonamientos matemáticos, en tanto comunicación de ideas:

Escribimos las hipótesis, la tesis, marcamos con color en un dibujo los datos que teníamos y fueron descubriendo cómo probarlo. (RG-12)

Su mayor problema era cómo escribir de manera correcta y ordenada las demostraciones, por lo que de a poco fuimos haciendo una juntas. (RG-19)

O prestándole especial atención a los significados de los símbolos:

Le hago ver esto preguntándole: «¿qué significa este símbolo?»... y la estudiante me dice: «igual»... por lo que le pregunto: «¿son iguales?», se queda unos segundos mirándola y me dice: «¡no! ... «¿y qué símbolo podría ser correcto según esto que me dijiste?»». (RC-46)

M2) Formulación de preguntas matemáticamente productivas.

A veces para evocar contenidos matemáticos necesarios en el desarrollo de la clase (como el de poligonal):

Le pregunté a los alumnos qué era una poligonal. (RG-4)

Para favorecer los procesos de comprensión de contenidos matemáticos, a partir de preguntas que incentiven la reflexión por parte de los alumnos:

Le pregunté si dos rectas alabeadas podían ser secantes a lo que me respondió que no, entonces concluimos que el enunciado era verdadero. (RG-7)

Les pregunto: «los x que están en el dominio de la composición, ¿primero dónde tienen que estar?, ¿en dónde está evaluada f ?, ¿y dónde tiene que estar $g(x)$?». (RC-26)

También para situar razonamientos matemáticos ya aprendidos o en proceso de aprehensión (como el razonamiento inductivo), en una situación particular:

Comencé preguntando cómo se trabaja con este método... cuando me dijeron que había que probarlo primero para $n=1$, les pregunté si existía algún polígono de un lado. (RG-9)

O para ubicarse en alguna nueva situación:

Le pregunté qué le parecía y le dije que piense qué pasa con los triángulos que se forman al trazar alguna de las diagonales. (RG-14)

Como estrategia, por parte del docente, para convocar a la participación:

Juntas pensamos la idea de la demostración, siempre preguntándole cómo podíamos seguir, guiándola. (RG-14)

Intenté preguntar la mayor cantidad de cosas, haciendo participar a muchos alumnos. (RG-18)

M3) Elección de formas de explicar y justificar las ideas matemáticas.

En algunas situaciones, para dilucidar y revertir ideas erróneas, ya sea introduciendo contraejemplos o indicando a los estudiantes que analicen determinadas condiciones:

Cuando alguno tenía una idea errónea, yo preguntaba a los demás qué les parecía. En algunas ocasiones, otros alumnos mostraban algún ejemplo donde el enunciado no valía y en otras, era yo quien dibujaba en el pizarrón algún caso donde se veía que no era válida la proposición. (RG-3)

Tomé una hoja, la coloqué en el medio de la mesa y empecé a escribir las hipótesis y la tesis del problema mientras los alumnos me dictaban. (RG-10)

En momentos de aplicación, donde deben identificar contenidos a emplear de manera adecuada, promoviéndose la participación conjunta:

Busqué dicho teorema y fuimos pensando en qué se diferenciaba con lo que debíamos hacer. Finalmente pudimos resolver el ejercicio juntas. (RG-5)

Les dije que, como algunos no habían podido hacerlo aún, lo pensaríamos todos juntos y ellos me ayudarían... Fui marcando con rojo los datos que teníamos para que sea más sencillo entender qué criterio de congruencia utilizar. (RG-18)

M4) Análisis de propuestas distintas o no estándares.

Para que los estudiantes puedan dar cuenta de que existen distintas formas de resolver correctamente una actividad matemática, ya sea porque estos proponen diversas resoluciones o porque las residentes lo creen necesario:

Una de las alumnas propuso una manera y el alumno otra, por lo que les dije que lo íbamos a resolver de las dos formas para que vean que ambas eran correctas. (RG-10)

Me preguntó si la otra podía hacerla por el absurdo y si bien yo lo había resuelto distinto, le dije que pruebe si salía utilizando dicho razonamiento. (RG-12)

En ocasiones para socializar las producciones de los alumnos con el grupo-clase, asignando de esta manera valor a sus elaboraciones:

Una alumna comentó que ella lo había hecho con otro criterio, escuché su idea y, marcando con otro color para no confundir con lo anterior, lo expliqué al resto del curso. (RG-18)

Les pregunto si alguno ya la había hecho para que nos contara cuál fue su idea y tomarla como otra forma de hacerlo en caso de que fuese diferente a la que yo hice. (RC-8)

M5) Representación gráfica como apoyo.

Para enriquecer los procesos de apropiación de conceptos o procedimientos matemáticos a partir de un soporte gráfico:

Dibujé con rojo la poligonal que se pedía en el ítem a, mientras ellos me decían cómo hacerlo. (RG-4)

Hice unos dibujitos para que entendiera la condición principal para que algo sea función. (RC-18)

También para aclarar ideas matemáticas que subyacen en una demostración, introduciendo comprensivamente a los estudiantes en el razonamiento a partir de la visualización gráfica:

Hice un dibujo y con la ayuda de ellos verificamos que el triángulo satisfacía la fórmula. (RG-9)

Haciendo un dibujo al costado de la hoja para que pudiesen entender la idea de lo que debíamos demostrar. (RC-12)

Esta categoría nos muestra que las residentes se esfuerzan en priorizar la significatividad matemática, desde las notaciones y representaciones que se emplean así como las indagaciones, explicaciones y justificaciones que se efectúan, en pos a potenciar los aprendizajes de los alumnos (estudiantes ingresantes a las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática).

Conocimiento del contenido y de los estudiantes, comprende cinco modalidades (M1 a M5):

M1) Valoración del proceso de comprensión y razonamiento de cada alumno.

Procuran atender a los distintos ritmos de aprendizaje de los estudiantes:

Reconozco que es muy distinto explicarle a alguien mucho más grande, con otros ritmos y formas de pensar, hay que tener mucha paciencia. (RG-4)

Me di cuenta que las ideas las tenía más o menos claras, pero le costaba ordenarlas... Noté que de a poco iba «enganchando». (RG-15)

Enfocan la atención en aquellos estudiantes que necesitan de un acompañamiento más personalizado de acuerdo a su proceso de comprensión, con la intención de fortalecer sus aprendizajes e incluirlos al grupo-clase:

Ella ya lo había pensado pero no entendía cómo hacerlo. Noté que sí había dibujado la situación y aproveché su dibujo para continuar la explicación. (RG-5)

Algo parecido me sucedió con el alumno que tardaba más en entender lo que hacíamos y por lo tanto al terminar cada ejercicio le preguntaba dónde se había quedado, explicándole de nuevo lo que fuera necesario. (RG-10)

Para fortalecer la autoestima y confianza de los estudiantes al hacer Matemática, en particular cuando comparan su producción con una del docente:

Esta alumna no rescata nada de lo que hace ella misma en las demostraciones, porque al verlas terminadas en el pizarrón cree que de nada sirvió lo que escribió. Considero que sería importante tomar esas ideas y hacerles ver que siempre de algo sirve lo que escribieron, así esté incorrecto o incompleto. (RC-23)

M2) Análisis de errores y dificultades de los alumnos.

A veces, en cuanto al entendimiento y apropiación de conceptos matemáticos que constituyen las bases fundantes:

Charlamos con la docente de práctica acerca de la gran dificultad que tienen los alumnos para comprender la contención de conjuntos. (RG-1)

O en cuanto a la comprensión de razonamientos matemáticos en proceso de aprehensión, por momentos con preocupación por ciertas formas en que los estudiantes desarrollan métodos de prueba en Matemática:

Noté que estas alumnas no están entendiendo el concepto de hacer inducción ni lo que están haciendo al demostrar, sino que lo hacen de forma mecánica. (RC-16)

Así como en ocasiones tal comprensión pareciera pasar a segundo plano priorizándose procedimientos al servicio de demostraciones más amplias:

Considero que no es tan sencillo que puedan «ver» fácilmente qué puedo hacer [completar cuadrados en una expresión algebraica], lo considero un tanto mecánico y un procedimiento que puede parecer «sacado de la galera» o «truquito» para los alumnos. (RC-38)

También, respecto a la lectura e interpretación de símbolos que permitan decodificar mensajes escritos en lenguaje matemático, incluso ya habiéndose trabajado en instancias teóricas de la materia:

Los alumnos... no podían leer la resolución que yo estaba haciendo de manera simbólica, relacionando la teoría con la práctica. (RC-1)

M3) Conocimiento de las estrategias utilizadas por los alumnos.

En algunas situaciones hilando relaciones entre aquello conocido y lo que se procura asentar:

La demostración es análoga al teorema 6, razón por la cual busqué dicho teorema y fuimos pensando en qué se diferenciaba con lo que debíamos hacer. (RG-5)

Hicimos juntos el ejercicio 1, basándonos en lo que ya habían escrito ellos. (RG-22)

Si bien a veces tales esquemas provistos por los docentes pueden generar cierta dependencia por parte de los estudiantes:

Su duda se basaba en que la forma de demostrarlo era distinta a la que venían trabajando. (RG-16)

M4) Fomento de hábitos en estudiantes de primer año.

Por ejemplo, para exponer las herramientas con las que se disponen a trabajar, con el propósito de incitar a los alumnos a organizarse adecuadamente, por ejemplo, en la resolución de las actividades propuestas:

Le aconsejaba que escribiera los datos que nos da el problema, a qué queremos llegar para organizarnos mejor y además que no saltara pasos. (RC-36)

A veces para que adquirieran una constancia en la lectura de la carpeta de clase:

Les aconsejé que lean la teoría para poder hacer los ejercicios, que es muy importante para poder escribir adecuadamente y que es bueno para que tomen el hábito de leer Matemática, ir al día y así de a poco poder entender más y más. (RC-2)

También para aprovechar las instancias de consulta que se les ofrecen en la institución, en tanto momentos adicionales a las clases para interactuar de manera personalizada con los docentes:

Le recomendé venir a las consultas. (RG-15)

M5) Marcas de los docentes hacia sus alumnos.

Rescatan su propia experiencia como alumnas procurando favorecer procesos de aprendizaje:

Recordando que alguna vez a mí me sirvió que un docente me mostrara una [demostración] como ejemplo. (RC-2)

También, tomando conciencia acerca de cómo los alumnos reproducen lo que los docentes hacen y cómo esto puede influir en sus aprendizajes:

Observé que usó [un alumno] exactamente los mismos colores que usó la docente de teoría al copiarlo en el pizarrón. (RC-18)

Se pudo observar que las residentes se mostraban interesadas en la comprensión de cada alumno, teniendo un trato personalizado siempre que les fue posible. Procuraban entender sus formas de razonamiento, adaptarse a sus ritmos, interpretar sus errores, prever sus dificultades y desenmarañar sus propias estrategias. También son conscientes de las marcas que un docente deja en sus alumnos así como la condición de ingresante universitario que muchas veces requiere desarrollar ciertos hábitos.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza, con cuatro modalidades (M1 a M4):

M1) Gestión de la clase.

Para organizar el transcurso de las clases a mediano plazo, decidiendo por ejemplo el tiempo de trabajo destinado a cada unidad:

Acordamos que el docente de teoría nos enviaría también la Unidad 3 para que con la docente de práctica nos podamos organizar el tiempo. (RG-5)

Acordamos también que el viernes sea clase de práctica y que el martes corriamos el modelo de parcial. (RG-16)

Para prever los distintos momentos que tendrán cabida en una clase:

Habíamos acordado terminar la Unidad 1 en la primera parte de la clase y luego seguir con práctica. (RG-1)

Acordamos en darles un tiempo para terminar los ejercicios de la sección 5.1. (RG-2)

Continuamos pasando por los bancos y atendiendo inquietudes de los alumnos. (RG-3)

Debí decirles que cualquier duda que les haya quedado lo veíamos en consulta porque ahora quería hacer algo en el pizarrón antes de terminar la clase. (RG-11)

También, al decidir consultar a los alumnos en qué actividades tuvieron dificultades, o cuáles prevén los docentes, para disponerse a trabajar sobre eso:

Decidimos con la docente de práctica hacer algunos ejercicios en el pizarrón, en especial el 5, el 10 y el 11. (RG-4)

Decidí recorrer todo el salón preguntando por qué ejercicio iban... me acerqué a la docente de práctica y decidimos no trabajar en pizarrón en el día de hoy. (RG-8)

Les pregunto si tienen dudas o no les salió algún ejercicio para que yo los haga en el pizarrón. (RC-3)

M2) Diseño de instrumentos considerados adecuados para evaluar y calificar.

Puede ser a priori del armado de un instrumento de evaluación puntual (como un parcial) con el fin de promover cierto nivel de conciencia (individual y colectiva) acerca de los saberes y dificultades que los alumnos poseen:

Quien prometió enviarme el parcial del año pasado para que lo vaya mirando y opine sobre él. (RG-1)

El docente de teoría nos comentó su intención de dar una autoevaluación a los alumnos para que ellos mismos distingan qué conocimientos tienen y qué les faltaría afianzar para el parcial. (RG-5)

Para el armado puntual de pruebas escritas, deciden los temas que se priorizarán, así como mediante qué tipo de actividades y ponderación:

La idea es que el primer ejercicio sea más bien para «barrer» todos los contenidos... previendo que constituya el 50% del puntaje total... Acordamos entre los tres que el segundo ejercicio sea guiado a través de distintos ítems y que el tercero sea solo un enunciado sin ninguna «pista». (RG-16)

Mandé un mensaje a los docentes preguntando por Whatsapp si ya estaban decididos los ejercicios del parcial... Les comenté que había encontrado algunos ejercicios que podían llegar a servir. (RG-17)

También para constatar que los instrumentos de evaluación diseñados son adecuados, por ejemplo, con relación al tiempo con el que contarán los alumnos para resolver una prueba escrita:

Nos recomendó también que tomáramos el tiempo mientras lo hacíamos, ya que si demorábamos más de una hora debíamos cambiarlo. (RG-19)

O para acordar cómo corregir las producciones estudiantiles:

El docente de teoría nos dijo que prefería que cada uno se lleve un ejercicio. (RG-20)

M3) Empleo de recursos didácticos.

En algunas situaciones, para favorecer el entendimiento mediante la manipulación de material concreto:

Les expliqué basándome en una lata en forma de prisma rectangular. (RG-22)

También, para comprender razonamientos matemáticos comparando un determinado modelo con otros ya conocidos por los alumnos:

Traté de explicar a las dos qué significa hacer inducción, pero haciendo analogía con un dominó. (RC-16)

M4) Palabras del docente para comprometer al alumno.

Para involucrarlos en el desarrollo de la clase y que sepan que son tenidos en cuenta (por ejemplo, nombrándolos frente al curso):

Llamar a los alumnos por sus nombres creo que es una forma de «mirarlos», de que se sientan «mirados». (RC-14)

En situaciones de análisis en las que se los convoca a un trabajo conjunto:

Algunas veces dije: «quiero analizar tal cosa», «quiero hacer tal otra». Pienso que quizás hubiese sido más apropiado decir: «quiero que analicemos», «los invito a que analicemos juntos». (RC-41)

Es posible observar que en las cátedras respectivas trabajaban en equipo y que procuraban planificar tanto las clases como las instancias de evaluación, tratando de dejar lo menos posible sujeto a la improvisación. También se puede advertir que las residentes tenían iniciativa en la organización de la clase y procuraban tener en cuenta al estudiante en sus decisiones.

Conocimiento del contenido y del currículum, abarca dos modalidades (M1 y M2):

M1) Entendimiento de los programas curriculares.

En ocasiones para determinar qué contenidos trabajar, de acuerdo a lo que se ha venido desarrollando:

Acordamos no pedir la justificación de estos dos últimos pues se necesitaban conceptos aún no dados. (RG-1)

Pudo concluir que sí... utilizando conceptos que aún no habíamos dado, como congruencia de triángulos o propiedad de los ángulos opuestos a lados congruentes en el triángulo isósceles... le dije que tal vez eso lo mostráramos más adelante. (RG-6)

También para prever posibles dificultades que pudieran surgir en el desarrollo de una clase a partir del conocimiento de los saberes previos:

Haber dado por hecho que los alumnos sabían completar cuadrados, me jugó un poco en contra en el sentido de que podría haber preparado la manera en que lo iba a explicar para que sea lo más entendible posible para los estudiantes. (RC-41)

M2) Selección de actividades para desarrollar en clase.

Es posible apreciar la puesta en acción de un criterio docente en función de contenidos elementales procurando contemplar los casos posibles:

Me preguntó si quería hacer yo el 5 para que los alumnos tuvieran algún ejemplo de poligonal en su carpeta. (RG-4)

Le dije que tenía pensado el 6, el 8 o alguno de los últimos, pero él me dijo que quería que el 6 les quede bien escrito, por lo que elegí ese ejercicio. (RG-11)

Elegí el 17 porque quería mostrarles un ejemplo de cómo graficar una función lineal y además seleccioné el a) y el c) porque son dos casos en los que las pendientes son negativa y positiva y quería mostrarle a la clase cómo es la dirección que tienen las rectas según el signo de sus pendientes. (RC-28)

Básicamente se puede advertir que el equipo docente considera importante tener presente los contenidos que los alumnos conocían y los que no, a la hora de elegir cómo abordar las actividades en el aula.

En cuanto a las sensaciones, identificamos seis modalidades (M1 a M6) las cuales hablan de cuán interpelado se siente un docente mientras da sus clases. Todas ellas involucran a otros sujetos en interacción.

M1) Temor.

A veces, ante la mirada del alumno sobre el rol que las residentes asumen dentro del aula:

Mi mayor miedo era que los alumnos me vieran o me trataran como una más de ellos. (RG-1)

También, en aquellas situaciones en que las residentes se sienten expuestas frente a la clase, por ejemplo, en situación de enseñanza ante el pizarrón:

En la primera clase de práctica cuando pasé al pizarrón, me sentí muy intimidada... estar parada en la tarima y delante de tantas personas me impactó. Estuve muy nerviosa ese día. (RG-3)

M2) Satisfacción.

En ocasiones, al percibir que gradualmente se van transformando en las profesoras que desean ser, cambiando la propia percepción que tenían sobre sí mismas:

Al ingresar al aula la mayoría me saludó con un 'Hola Profe', saludo al cual de a poco me voy acostumbrando y, en cierto sentido, 'tomándole gustito'. (RG-5)

El docente de práctica me dijo que había estado muy bien en el pizarrón, lo que me puso contenta. (RG-19)

Esto me hizo sentir bien, que el docente de práctica busque mi opinión. (RG-21)

¡Qué emoción!, siento que de a poco voy dejando de ser aquella alumna que ingresó a esta Facultad con el sueño de llegar a ser profe de Matemática algún día. (RC-1)

Al notar algunos avances en los comportamientos de los alumnos en la clase:

Me puse contenta al ver que muchos me respondían, de forma correcta o no, pero participaban. (RG-3)

Yo también me puse feliz al observar que de a poco iba resolviendo sola los ejercicios... también destaco que me gusta mucho hacerlo y sobre todo al ver los buenos resultados y las sonrisas en ella. (RG-4)

Me fui contenta al ver que con paciencia y esfuerzo iba progresando. (RG-5)

Me puse contenta al ver que muchos participaban y que no eran los mismos de siempre. (RG-18)

También cuando perciben que su ayuda y contención resulta útil:

Se armó una fila de alumnos que me pedían ayuda, lo que me hizo sentir bien porque noté que en verdad los estaba ayudando. (RG-3)

Yo me fui muy contenta: primero porque habían ido bastantes alumnos a la consulta, y segundo por la buena relación que estoy logrando con ellos. (RG-11)

Me puse contenta al ver que apenas les di una pista mediante una pregunta, lograron seguir la demostración solas. (RG-12)

M3) Impotencia.

En situaciones propias de enseñanza en el aula, donde conviven docentes y alumnos en un ambiente relativamente incierto debido a la simultaneidad de múltiples y diversos elementos que se entrelazan:

Sentí que no daba abasto, me preguntaban muchos alumnos y me «daba cosa» tener que hacerlos esperar. (RG-11)

M4) Incomodidad.

A partir de señales que dan sus alumnos en el transcurso de la clase, por ejemplo, cuando no participan del modo o intensidad en que esperan:

Me sentí incómoda o nerviosa durante toda la explicación solo porque muy pocos alumnos participaban. (RG-11)

Incluso esa falta de participación puede venir acompañada de rostros que parecen indicar falta de entendimiento:

Los silencios invaden el aula, junto con caras de «yo no entiendo lo que estás explicando», algo que me incomoda. (RC-38)

M5) Inseguridad.

Al registrar por escrito un razonamiento en el pizarrón:

Aún no siento total seguridad al escribir en el pizarrón, sobre todo demostraciones. (RC-13)

M6) Ansiedad.

En situaciones en las que las residentes son observadas y sujetas a evaluación por las docentes de la cátedra Residencia:

Estoy un poquito ansiosa, más que nerviosa. (RC-38)

A través de las sensaciones manifestadas por las residentes, percibimos su marcada vocación docente, dado que se (pre)ocupan para que sus alumnos aprendan y se dejan interpelar cuando recogen indicadores de sus procesos de aprendizaje.

Notamos también que las residentes, a través de las narrativas pedagógicas, piensan sobre su práctica docente a posteriori de haber dado la clase, buscando siempre la mejor manera de desarrollarla. Creemos que esto es fundamental, ya que el docente debe convertirse en un investigador en el aula, debe ser un profesional reflexivo que construya su propio conocimiento profesional. Consideramos que la reflexión es una posibilidad de

transformación profunda y duradera en las prácticas, constituyéndose así en un dispositivo de formación y mejora (Sanjurjo, 2009).

También fue posible apreciar comentarios del orden del *trato residente - alumno*, que abarcan dos modalidades (M1 y M2):

M1) Desempeño en espacios curriculares específicos.

En situaciones de charlas informales las residentes indagan a los alumnos acerca de su estado general en la carrera, informándose por ejemplo de sus dificultades en otras materias:

Me comentó que estaba muy atrasada con todas las materias... Me mostró lo que había estado estudiando de Álgebra sobre Lógica. (RG-15)

Me comentó que no había rendido el parcial de Cálculo porque se le habían roto los lentes. (RG-19)

Les pregunté cómo vienen con las demás materias, a lo que ellas [dos alumnas] respondieron que bien, pero una agregó que está teniendo problemas con las demostraciones de Geometría y con la teoría de Cálculo. (RC-19)

M2) Interés en el otro como estudiante universitario.

En momentos en que los alumnos desean conocer un poco más sobre la carrera que eligieron:

Fue ahí cuando les conté que en realidad estoy en el último año del Profesorado en Matemática y me empezaron a preguntar por la carrera. Les dije que era muy linda, que la disfruten. (RG-8)

Me interrogaron sobre qué materias estaba haciendo, si iba al día. (RG-13)

Así como las residentes acerca de los ingresantes:

«Vos entraste hace poco, ¿no?». Ella asintió y, como noté que la situación era favorable, le pregunté el porqué. (RG-18)

De este modo las futuras profesoras manifestaron interés por sus estudiantes más allá del espacio curricular puntual en que se estaban desempeñando.

Cabe destacar que las residentes, a medida que transitan sus prácticas educativas en el nivel universitario, realizan un significativo trabajo

de reflexión, tanto sobre sus propias narrativas como sobre las de sus compañeros. Problematizan y reevalúan situaciones que surgen dentro del aula. Plantean interrogantes, los cuales a veces logran responderse, dando lugar a un diálogo intersubjetivo, y otras veces no, quedando pendientes en elaboración en el pensamiento interpretativo de cada residente. El ejercicio de indagar y analizar la práctica docente, a partir de las narrativas de las mismas y del trabajo colaborativo entre residentes y docentes de cátedra, permite reivindicar la práctica, cargando de significado e interpretando las intenciones que tienen los residentes en diferentes situaciones de enseñanza. De esta manera creemos que los alumnos que transitan por esta metodología de trabajo (narrativas pedagógicas + trabajo colaborativo), generan el hábito de pensar a posteriori sus prácticas, buscando otros pensamientos y puntos de vista. Esto porta el poder de transformar sus prácticas profesionales venideras, aportando así a un docente investigador de su propia práctica que procura enriquecer el análisis pedagógico, haciéndose eco de lo múltiple en los sujetos y de las culturas que habitan en el aula.

En lo que sigue compartimos un extracto de la residente RC, más extenso que los anteriores, mediante el que procuramos ilustrar la riqueza de ese intercambio al que aludimos. El mismo está escrito, en su versión original, en negro. Los demás colores que aparecen son los que cada actor involucrado tiene asignado para realizar acotaciones en los trabajos⁴.

Sentí que mi aprobación fue importante para ella, esto me hace tomar conciencia del peso que tienen mis palabras sobre los alumnos, que pueden causar en ellos sentimientos positivos o negativos, como en este caso, positivos, ya que la alumna sintió alegría porque le dije que estaban bien los ejercicios. Quizás si le hubiese dicho que no estaban correctos, porque encontré algún error, la hubiese alentado para que lo intente otra vez y la ayudaría para que pueda lograr hacerlo bien (Quiere decir que no solamente la aprobación puede alentar a nuestros alumnos, ¿no?); tratando de no censurar el error ¿cómo se hace para no censurar el error?, ¿cómo se hace para alentar aún cuando se han cometido errores? (Decirles que lo sigan intentando, y que ese intento, aunque sea erróneo, te lleva de alguna manera al camino correcto. No suena tan convincente, ¿no?) porque eso le podría causar sentimientos negativos como tristeza o frustración; y no ayudaría a que pueda resolver de manera correcta el ejercicio ¿ese ejercicio en particular?. Afirmo esto porque en mi experiencia como

⁴ En lila y marrón participan las docentes de Residencia. En azul, rojo y verde los compañeros residentes. En fucsia la residente RC.

alumna de esta Facultad he sufrido estos sentimientos negativos, sobre todo de frustración, cuando algún docente me trató de «burra» o censuró algún error que cometí. ¿Realmente algún docente usó esa palabra (burra) textualmente? Sí, precisamente acá en la Facultad, durante un parcial en segundo año. ¿Qué te hizo sentir que censuraron tu(s) error(es)? Que no servía para la Matemática, que esto no era para mí. Me sentí una fracasada. Reconozco que me largué a llorar al salir del parcial. Pero por suerte tengo compañeros muy buenos, que me alentaron y sostuvieron en ese momento. Quizás suene un poco exagerado, pero fue duro para mí, aunque hoy estoy muy feliz de haberme superado y de haber entendido que hay profesores que no son conscientes de lo que sus palabras producen en los alumnos. Muy apropiado que desde esta materia, podamos empezar a notarlo, si es que antes no lo habíamos hecho. ¿Voces de los compañeros residentes?... Si bien por suerte (¿o no?) no he pasado por alguna situación de ese estilo con algún profesor, coincido y valoro como RC que trabajemos el tema de las marcas en la materia. Después de haber charlado esto, estoy más atenta en las clases y en todo aquello que hablo con mis alumnos. Obviamente es imposible controlar todo, pero sí puedo reflexionar todos los días sobre mi accionar estando atenta, entre otras cosas, a las huellas que tal vez deje en los demás. Personalmente no sé si me ha pasado alguna situación como la de RC, quizás sí pero no le presté mayor atención a palabras como las mencionadas. No por el hecho de que palabras así con tono negativo hacia los alumnos no me parezca importante, todo lo contrario. Yo creo que tenemos que ser conscientes de que lo que decimos puede traer consecuencias en los/as estudiantes, ya sean positivas o negativas. En mi experiencia particular tuve que censurar el «es fácil», aunque a veces se me escapa; siempre la usé con el tono de «dale te va a salir, no es complicado» alentando a compañeros o alumnos particulares, pero me di cuenta, y me hicieron dar cuenta, que los alumnos no siempre se toman las palabras con el tono que uno las dice y ese «es fácil» puede causar una frustración en el alumno al cual no le sale el ejercicio «fácil» y en vez de tomarlo como un aliento se lo toma como un ninguneo.

5. Conclusiones

En la Tabla 2.1 sintetizamos las modalidades construidas a partir de la investigación realizada.

Tabla 2.1. Categorías del estudio y modalidades emergentes

Categorías	Modalidades
Conocimiento especializado del contenido	Uso con criterio de notación y lenguaje matemático
	Formulación de preguntas matemáticamente productivas
	Elección de formas de explicar y justificar las ideas matemáticas
	Análisis de propuestas distintas o no estándares
Conocimiento del contenido y de los estudiantes	Representación gráfica como apoyo
	Valoración del proceso de comprensión y razonamiento de cada alumno
	Análisis de errores y dificultades de los alumnos
	Conocimiento de las estrategias utilizadas por los alumnos
Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Fomento de hábitos en estudiantes de primer año
	Marcas de los docentes hacia sus alumnos
	Gestión de la clase
	Diseño de instrumentos considerados adecuados para evaluar y calificar
Conocimiento del contenido y del currículum	Empleo de recursos didácticos
	Palabras del docente para comprometer al alumno
Sensaciones	Entendimiento de los programas curriculares
	Selección de actividades/contenidos para desarrollar en clase
	Temor
	Satisfacción
	Impotencia
	Incomodidad
Trato residente-alumno	Inseguridad
	Ansiedad
Trato residente-alumno	Desempeño en espacios curriculares específicos
	Interés en el otro como estudiante universitario

Mediante la investigación hemos palpado de cerca la importancia de las narrativas pedagógicas para la reflexión sobre la propia práctica docente. Al escribir sobre las acciones y pensamientos, al ponerlo a disposición de otros y de uno mismo a través de la lectura, al aclarar, detenerse o profundizar sobre aspectos puntuales, el conocimiento práctico se redimensiona y adquiere progresiva y significativamente el status de conocimiento profesional.

La importancia de vivir en primera persona esta posibilidad desde la instancia de formación inicial es de un valor incalculable, pues los profesores así formados se posicionarán más reflexivamente sobre su accionar, impactando esto en generaciones y generaciones de alumnos que tendrán.

Consideramos que las numerosas y valiosísimas experiencias cotidianas de aula de millones de profesores en Matemática que se desempeñan hoy en las escuelas podrían ser mucho más potentes, para ellos y sus colegas, si se relataran. Mediante el registro escrito se immortalizan momentos y situaciones únicas e irrepetibles que se dan en una clase.

En este estudio hemos procurado leer las narrativas en clave del *MKT* así como a través de *emociones* expresadas y cuestiones del *trato residente-alumnos* que se fueron dando. Esta elección teórico-metodológica resultó sumamente fructífera para desmenuzar componentes inteligibles dentro de la complejidad de lo narrado atendiendo, a su vez, a la importancia de comprender las acciones del profesor en Matemática como prácticas contextualizadas (Mengarelli, Sgreccia y Peralta, en evaluación).

Coincidimos con Sanjurjo (2009) en que estas acciones y su descripción están siempre en la base de todo proceso de construcción de conocimiento. En sintonía con lo expresado por Greene (1995), el proceso de aprendizaje se inicia a partir de pensar e interrogar. Esto conlleva a que el profesor en Matemática esté continuamente obligado a interpretar y reinterpretar una realidad siempre nueva, por más que se trate de la enseñanza de un mismo cuerpo de contenidos. Asimismo, al igual que Huber et al. (2014), advertimos una necesidad tanto del relato como de la escucha en las aulas y las escuelas. Hacia la atención de esa necesidad se dirigen nuestras investigaciones. Deseamos proponer posibilidades que, desde los hallazgos de la investigación educativa, puedan fortalecer las prácticas de formación de profesores en Matemática.

6. Referencias bibliográficas

- Alliaud, A. (2014). *El campo de la práctica como instancia privilegiada para la transmisión del oficio de enseñar*. Buenos Aires: Instituto Nacional de Formación Docente.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bruner, J. (1997). *La educación, puerta de la cultura*. Madrid: Visor.

- Bruner, J. (2003). *La fábrica de historias*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria*, 14(3), 71-93.
- Caporossi, A. (2009). La narrativa como dispositivo para la construcción del conocimiento profesional de las prácticas docentes. En L. Sanjurjo (Coord.). *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales* (pp. 107-149). Rosario: Homo Sapiens.
- Clandini, D.J. y Connelly, F. M. (1996). Teachers professional knowledge landscapes: Teacher stories - stories of teachers - school stories - stories of school. *Educational Researcher*, 25(3), 2-14.
- Espinosa, I. J. y Pons, L. (2017). Valor pedagógico de las narrativas escolares. Configuración de currículos regionales. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 47(1), 7-42.
- Gómez, J.A., Vallejo, A.C. y Rodríguez, S. (2014). Avances en propuesta de formación del profesorado para la educación superior, desde el método de la narrativa. *Revista de Educación*, 5(7), 205-228.
- Greene, M. (1995). El profesor como extranjero. En J. Larrosa (Comp.). *Déjame que te cuente. Ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 81-130). Barcelona: Laertes.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4.ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Huber, J., Caine, V., Huber, M. y Steeves, P. (2014). La indagación narrativa como pedagogía en la educación: el potencial extraordinario de vivir, contar, volver a contar y revivir relatos de experiencias. *Revista de Educación*, 5(7), 33-74.
- Martín, M. (2014). Formación del profesorado en la era postmoderna: una perspectiva narrativa. *Revista de Educación*, 5(7), 75-92.
- Mengarelli, M.S., Peralta, L. y Sgreccia, N. (2016). Posibilidades de las narrativas pedagógicas para la formación de profesores en Matemática. Estudio de un caso. *Actas de las V Jornadas Nacionales y III Jornadas Latinoamericanas de Investigadores/as en Formación en Educación*, 184-189.
- Mengarelli, M. S., Sgreccia, N. y Peralta, L. (en evaluación). Narrativas pedagógicas y Conocimiento matemático para la enseñanza: confluencia en residentes del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*.
- Sanjurjo, L. (2009). Razones que fundamentan nuestra mirada acerca de la formación en las prácticas. En L. Sanjurjo (Coord.). *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales* (pp. 15-43). Rosario: Homo Sapiens.

CAPÍTULO 3

ENFOQUES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

*Virginia Ciccioli**

*Sabrina Grossi***

*Lucía Schaefer****

1. Introducción

La Geometría es una ciencia que tiene como finalidad analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. Desde la temprana infancia experimentamos con las formas de los objetos y luego vamos tomando posesión del espacio, orientándonos, analizando formas y buscando

* Profesora en Matemática (UNR) y alumna del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática (UNCPBA). Profesor Adjunto y Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Docente Interina en la ENS N° 33 «Dr. Mariano Moreno».

** Profesora en Matemática (UNR) y alumna de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME). Dos cargos de Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). Docente Titular en la EESOPÍ N° 3033 «Colegio Rosario» y en EEMPA N° 3041 Padre Barbé.

*** Profesora en Matemática (UNR) y alumna de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME) y del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática (UNCPBA). Ayudante de Primera Dedicación Semiexclusiva y Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). Docente Titular en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España».

do relaciones. El interés por estudiar el espacio es propio de la educación integral y esencial en diferentes disciplinas y profesiones técnicas y artísticas (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

La Geometría se reconoce como uno de los componentes más importantes del currículum escolar de Matemática (Atiyah, 2001; Jones, Fujita y Ding, 2006).

Las razones para su inclusión en el currículum son múltiples, entre ellas: promover la percepción espacial, la intuición y la visualización; así como emplear propiedades geométricas (Jones, 2000, 2002) a través de la introducción de un primer sistema axiomático donde se deducen teoremas y definiciones con rigurosidad lógica. Todo ello estimulando la creatividad y desarrollando habilidades como conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica tanto en contextos de modelización como de resolución de problemas (Clausen-May, Jones, McLean y Rowlands, 2000).

Sin embargo ha habido –y persisten– fuertes desacuerdos acerca de los propósitos, contenidos y métodos para la enseñanza de la Geometría en los diversos niveles educativos: relaciones entre intuición y demostración; edad en la que las demostraciones pueden presentarse a los estudiantes; diferentes grados de rigor y abstracción. En la actual escuela secundaria, según señala Gutiérrez (2010), la Geometría está escasamente desarrollada y muchas veces se olvida cómo tratarse durante la formación de profesores. Abrate, Delgado y Pochulu (2006) indican que los docentes suelen desplazar la Geometría al final del curso. Corica y Marin (2014) señalan su exclusión total o un estudio superficial de la misma. Esto imposibilita a los estudiantes conocer otro modo de pensar, de utilizar propiedades de los objetos geométricos para inferir y producir nuevas propiedades (Itzcovich, 2005).

Una de las principales preocupaciones en la investigación en esta área es mejorar los modelos pedagógicos y estrategias didácticas para su enseñanza en los distintos niveles. En este sentido, el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional (Ministerio de Educación de la Nación, 2010). Sin embargo, poco se sabe acerca de los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza (Ponte, 2014; Chapman, 2015), en particular de la Geometría (Sgreccia y Massa, 2012), así como del soporte de herramientas de Geometría Dinámica (Santana y Climent, 2015) y errores geométricos en alumnos de secundario (Cabello, López y Sánchez, 2014). La *International Commission on Mathematical Instruction* (1994) busca analizar los desafíos para la enseñanza de la Geometría en el siglo XXI. De Villiers (1997), por su parte, ha so-

licitado cambios importantes en los programas de formación de profesores sosteniendo que incluso los profesores «cualificados» en Matemática de secundaria apenas conocen más Geometría que sus alumnos.

En los núcleos temáticos básicos a desarrollar en los Profesorados en Matemática Universitarios de nuestro país, según los estándares preliminares del Consejo Interuniversitario Nacional (2013), se distingue al área Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza de una teoría axiomático-deductiva. Además, se subraya su potencial para el desarrollo de la inducción, intuición, visualización, representación gráfica, percepción de relaciones, regularidades y propiedades. Es así que la Geometría Sintética se constituye en la base estructural de toda una rama dentro de la Matemática y del pensamiento matemático mismo. Comprende la razón de ser de la Geometría Analítica (al vincularla con el Álgebra) y de la Geometría Diferencial (al vincularla con el Cálculo), imprescindibles en carreras científico-tecnológicas, por sus múltiples aplicaciones.

Por su parte, la Geometría Analítica vincula el Álgebra y la Geometría, al asociar n -uplas de números con puntos y ecuaciones con figuras, y al aplicar los métodos del Álgebra y del Cálculo a la Geometría Sintética; es allí donde se producen los primeros encuentros entre las técnicas sintéticas y el Álgebra elemental.

Sin embargo, un breve recorrido por lo que sucede en las aulas del nivel secundario superior o en los primeros años de estudios superiores en los que se abordan temáticas relativas a la Geometría Analítica, evidencia escasas muestras de vinculación entre la Geometría Analítica y la Geometría Sintética. Algo similar se observa en los documentos ministeriales y consecuentemente en los libros de texto en los que se abordan estas temáticas.

Duque y Quintero (2009) señalan que la Geometría enseñada (y aprendida) en la escuela suele ser una Geometría subsumida al álgebra, con memorización y aplicación inmediata de fórmulas. En esta misma línea, Gascón (2002, 2003) postula que las problemáticas de aprendizaje de la Geometría surgen como consecuencia de las limitaciones con que se abordan las *técnicas sintéticas* que, a su vez, dan sentido a (y son las razones de ser de) las *técnicas analíticas*. El autor reconoce que las técnicas analíticas son introducidas artificialmente como objetos de enseñanza en el nivel secundario superior, sin establecer ningún tipo de conexión con las técnicas sintéticas desarrolladas en los primeros años de la educación secundaria. Asocia ese accionar a un análisis epistemológico superficial por parte de los docentes.

Por otro lado, la problemática presentada se suele relacionar con la complejidad subyacente en el tratamiento y las conversiones entre registros de

representación (Duval, 1999), aspecto inherente a la propia génesis de la Geometría: amalgama entre lo gráfico y lo simbólico/algebraico. Es así que otras investigaciones consultadas (Arellano y Oktac, 2009; Dallemole, Oliveiray Moreno, 2014; Karrer y Navas, 2013) aluden al modo en que se favorece o desfavorece, desde la enseñanza, la construcción de significados de los conceptos de la Geometría en los distintos registros.

Todo este recorrido por lecturas especializadas nos lleva a inferir que una formación desprovista de esa complementariedad entre los enfoques sintético y analítico, agravada a su vez por una ausencia de explicitación de las transiciones entre los marcos geométrico y algebraico (Alves, Mendonça y Coletti, 2010), podría derivar en una algebrización de la Geometría con una consecuente pérdida de sentido de la misma; problemática que se ve más acentuada aún, por la falta de fortalecimiento de la educación visual (Mammana y Villani, 1998).

En cuanto a esto, y como plantean Barrantes, López, y Fernández (2015), la Geometría tiene gran relación y aplicación sobre el mundo que nos rodea, permitiéndonos a través de su estudio desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización. De esta manera, se hace incomprendible pensar procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría ajenos a la utilización de representaciones gráficas. El dibujo es un modo de comunicación, un lenguaje (Spencer, Dygdon y Novak, 2009). La habilidad de dibujo es fundamental para desarrollar conocimientos geométrico-espaciales, actuando como eslabón entre habilidades visuales y de razonamiento (Brooks, 2009). En Geometría, la comunicación gráfica es una herramienta esencial en la representación de situaciones-problema. Más aún, la Geometría es la que permite representar objetos del espacio sobre una superficie bidimensional, estableciendo propiedades entre las figuras del espacio y el plano.

Surge así la necesidad de dar un tratamiento especial a la representación plana en la enseñanza de disciplinas en donde intervienen objetos tridimensionales, procurando promover un análisis crítico de dichas representaciones a través de variadas perspectivas: didáctica, psicológica, técnica, artística, entre otras (Gutiérrez, 1998). Tal como sostienen Piaget e Inhelder (citado en Camargo, 2011), a través de distintos experimentos. Si bien los niños desarrollan una percepción del espacio circundante desde muy temprana edad (en el período sensoriomotor), esto no significa que simultáneamente desarrollen una conceptualización del espacio tal que les permita construir una representación mental del mismo. La construcción conceptual del espacio se da en oposición a la percepción.

Dentro del currículum escolar, la importancia de la Geometría se debe a que se la asocia al modelo del mundo en el que vivimos. Pero en los reducidos casos en que realmente se la aborda, hay un fuerte predominio de lo bidimensional, restringiéndose el trabajo con objetos tridimensionales a un mero reconocimiento de nombres. Se suele asociar con frecuencia lo tridimensional a acciones más de tipo sensoriales, como ver y tocar, que cognitivas como modelizar, deducir y operar (Sgreccia y Massa, 2010).

En términos generales, la capacidad espacial es un elemento importante en muchas actividades de la vida, no solo las que están asociadas a la enseñanza de la Geometría (Arrieta y Medrano, 2015). Esto ha hecho que se estudie desde diferentes áreas y que, como consecuencia, exista una gran variedad de definiciones y conceptos ligados a la misma. De aquí que trabajar las habilidades de representación y comunicación permitirá a los estudiantes optimizar su capacidad para comprender y reflexionar sobre trabajos intra y extramatemáticos.

En pocas palabras, podemos señalar que la falta de complementariedad entre los enfoques sintético y analítico en la enseñanza de la Geometría, el modo en que se favorece o desfavorece la construcción de significados de los conceptos geométricos en los distintos registros de representación, y la consecuente desvalorización de lo gráfico-visual, dan indicios de una posición sesgada del profesor ante el significado educativo de la Geometría. Sosteniendo que las experiencias formativas por las que transita un futuro profesor son determinantes para su desempeño profesional, creemos que es fundamental trabajar estas cuestiones desde la formación inicial y continua de profesores en Matemática.

Por y para ello, se presentan a continuación algunos trabajos que intentan aportar conocimiento en esta línea de investigación.

2. Desde la Geometría Sintética

La problemática señalada sobre el escaso tratamiento de la Geometría en la escuela secundaria nos ha motivado a desarrollar el Plan de investigación denominado «La Geometría Sintética en la Formación del Profesor en Matemática: el caso de la Universidad Nacional de Rosario», correspondiente a una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas, otorgada por el Consejo Interuniversitario Nacional (Argentina) y ejecutada de septiembre 2015 a septiembre 2016. En el mismo nos hemos propuesto conocer acerca de las

prácticas de enseñanza para la construcción de conocimientos de Geometría Sintética en la formación inicial de profesores en Matemática, convencidas de que en ellas hay un punto clave para empezar a cambiar la situación del nivel secundario. Nuestro marco de interpretación ha sido en clave del *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT, Ball, Thames y Phelps, 2008).

Hemos tomado como caso al Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, cuyo plan de estudios es de cuatro años de duración. En particular, la investigación se ha centrado en la asignatura Geometría I, de dictado anual y correspondiente al primer año de la carrera, con siete horas semanales de cursado en común con la Licenciatura en Matemática. En la misma, al momento de realizar la investigación, durante el primer cuatrimestre se abordaban los contenidos relacionados a la Geometría Sintética, mientras que en el segundo se trabajaba con la Geometría Analítica.

En el programa vigente de la asignatura se especifica que en ambas partes (Geometría Sintética y Analítica) se estudia tanto el plano como el espacio euclídeo. Además, se reconoce a la Geometría Euclídea como el ámbito propicio para que el alumno que recién se inicia en el aprendizaje profundo de la Matemática comience a desarrollar las aptitudes más importantes que necesitará tanto en las asignaturas subsiguientes como en su labor profesional futura. Esto se debe a que en esta materia se introduce el primer sistema axiomático donde los teoremas y definiciones se deducen con rigurosidad lógica a partir de estos hasta construir una teoría matemática profunda, lo que constituye la base del quehacer matemático. También debido a que se promueve el razonamiento abstracto con modelos concretos, que los alumnos traen parcialmente incorporados de la escuela secundaria, de modo que la asimilación de nuevos conceptos y formas de razonar se realice sobre la base de una experiencia previa.

Si bien no hemos realizado un estudio experimental con prueba de hipótesis, sí planteamos dos conjeturas iniciales que orientaron nuestro trabajo, de acuerdo a la problemática señalada. La primera de ellas menciona que la versión de la Geometría Sintética estudiada en el Profesorado dista considerablemente de una versión escolar relativamente propicia de procesos constructivos en la escuela secundaria. Por otro lado, sospechamos que el *conocimiento especializado del contenido* de Geometría Sintética, requerido para la enseñanza, queda relegado a la construcción individual del estudiante, sin suficiente vigilancia epistémica.

Para fundamentar o rechazar con sustento empírico estas conjeturas planteadas, analizamos relatos de observaciones de ocho clases de la asignatura, las cuales abarcan las unidades temáticas 2 y 3 (Figuras planas y Medidas de figuras planas). También aplicamos cuestionarios a algunos alumnos de la materia y analizamos el apunte que el docente elabora para los estudiantes. En lo que sigue, intentaremos mostrar los principales hallazgos.

En cuanto a las observaciones de clases

En pos de analizar las clases observadas en Geometría I de acuerdo a los subdominios del *MKT*¹ propuesto por Ball et al. (2008), y una vez sumergidas en los datos, comenzamos a detectar las *configuraciones de mensajes* de los registros obtenidos, entendiendo estas configuraciones en el sentido que plantean Coll, Colomina, Onrubia y Ronchera (1992), como agrupaciones de mensajes que transmiten algún significado, que no puede reducirse a la mera suma de los significados transmitidos por cada uno de los mensajes que las integran.

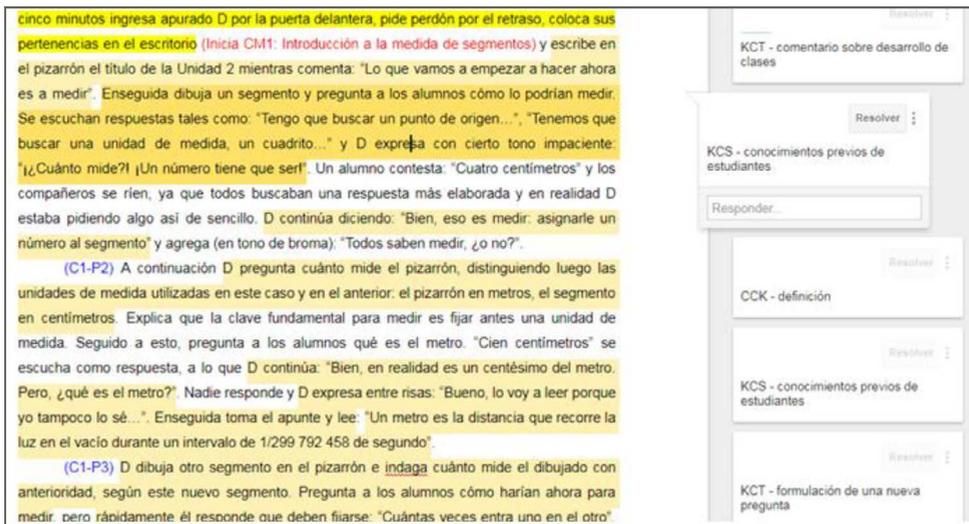


Figura 3.1. Ejemplo de análisis en los relatos de observación de clases

¹ En el campo del conocimiento de la disciplina: *conocimiento común del contenido (CCK)*, *conocimiento en el horizonte matemático (HCK)* y *conocimiento especializado del contenido (SCK)*. En el campo del conocimiento didáctico del contenido: *conocimiento del contenido y de los alumnos (KCS)*, *conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT)* y *conocimiento del contenido y del currículum (KCC)*.

A partir de ello, y luego de un arduo trabajo de desmenuzamiento y de constante revisión-modificación, elaboramos distintas modalidades que colaboraron en la caracterización específica de cada subdominio del *MKT*. A modo de ejemplo, en la Fig. 3.1 se muestra un fragmento de los relatos de observación de clases con las configuraciones de mensajes y la detección de modalidades en cada frase, mientras que en la Tabla 3.1, se pueden observar las modalidades emergentes en cada uno de los subdominios, junto a extractos de los relatos que tienen como objetivo clarificar el significado de algunas modalidades.

Mediante la elaboración de matrices de registro, fue posible detectar algunas regularidades y situaciones consideradas como obstáculos, o bien, como oportunidades de aprendizaje de la Geometría Sintética. Esto nos permitió pensar en propuestas, a modo de recomendación, para la enseñanza de esta rama de la Matemática en el Profesorado, aunque también algunas de ellas podrían ser tenidas en cuenta en otras asignaturas.

Tabla 3.1. Modalidades surgidas en cada subdominio

Subdominios	Modalidades	Extractos
CCK	Definiciones; Explicación de procedimientos; Formalización; Introducción de notación; Verificación de procedimientos.	<i>Escribe en el pizarrón todo lo que pensaron hasta recién, de manera similar al párrafo de la página 47 correspondiente a la Unidad 2 (Formalización).</i> <i>Luego el docente comprueba, utilizando las herramientas de GeoGebra, que los ángulos que obtuvieron son iguales a , verificando así que el procedimiento llevado a cabo es correcto (Verificación de procedimientos).</i>
HCK	Alcance de las clasificaciones y denominaciones; Alusión al trabajo matemático; Conexión con futuro desempeño docente de estudiantes; Connotación hacia los contenidos; Contexto histórico; Sentido de la formalización; Vinculación con ámbito extra matemático.	«Les voy a hacer otra pregunta: Cuando enunciamos el teorema nombramos el cuadrado de un segmento, pero para alguien que no conoce los números tal como lo hacemos nosotros, ¿qué es el cuadrado de un segmento?» (Alcance de las clasificaciones y denominaciones). «Esta demostración es clásica, la gente del Profesorado cuando dé clases la pueden dar porque es muy elemental» (Conexión con futuro desempeño docente de estudiantes).

Subdominios	Modalidades	Extractos
SCK	Construcción previa a la formalización; Direccionamiento de procedimientos; Distintas explicaciones de una misma idea; Elección o solicitud de ejemplos; Explicación de estrategias para demostrar un enunciado o resolver problemas; Interpretación y análisis de enunciados; Justificación de afirmaciones y procedimientos; Representaciones gráficas; Sentido de las denominaciones y propiedades; Trabajo con el error.	<i>Pregunta qué características tiene y, como muchos mencionan «dos lados congruentes», dibuja otro trapecio pero ahora rectángulo, mostrando así que la característica en común es solamente un par de lados paralelos (Construcción previa a la formalización).</i> <i>«Vamos a empezar a demostrar los criterios de congruencia porque la definición de congruencia me pide muchos datos, seis, más precisamente» (Sentido de las denominaciones y propiedades).</i>
KCS	Anticipación a respuesta; Autoestima estudiantil; Conocimientos previos de estudiantes; Indicios de dificultad estudiantil detectados por el docente; Niveles de entendimiento de los estudiantes; Prevención de errores; Respuesta dada por el docente.	<i>Pregunta cuáles son las hipótesis de la primera parte (refiriéndose a la ida) pero inmediatamente se responde solo; del mismo modo sucede con la tesis (Anticipación a respuesta).</i> <i>«Se ve que lo más fácil es lo que más les cuesta» (Niveles de entendimiento de los estudiantes).</i>
KCT	Aportes estudiantiles promovidos y tenidos en cuenta; Comentario sobre desarrollo de clases; Conclusión y cierre de idea; Explicación a partir de pregunta de estudiante; Explicación a partir de respuesta de estudiante; Formulación de una nueva pregunta; Indagación sobre entendimiento; Repaso de contenidos; Uso intencional de colores.	<i>Un alumno menciona que pueden demostrarlo por el absurdo por lo que el docente dice que en el apunte hay otra demostración más larga pero que van a intentar de esta manera que sugiere (Aportes estudiantiles promovidos y tenidos en cuenta).</i> <i>Se escuchan muchas respuestas y el docente retruca todas con un «¿Por qué?» (Formulación de una nueva pregunta).</i>
KCC	Apoyo en apunte de la asignatura; Articulación con nivel secundario; Articulación contenidos-tiempo; Articulaciones horizontal y vertical en el marco de la carrera; Articulación teoría-práctica; Articulación vertical en la misma asignatura; Materiales de consulta y estudio.	<i>«Este enunciado está en la manera clásica como se da en la secundaria. Nosotros vamos a hacer un análisis más crítico y vamos a ver que en realidad es más simple» (Articulación con nivel secundario).</i> <i>El docente recuerda cómo hacían para medir segmentos y lo compara con la medición de áreas (Articulación vertical en la misma asignatura).</i>

La primera cuestión detectada es que, si bien todo profesor presupone conocimientos previos de sus alumnos, consideramos que lo importante es no hacer explícitas estas creencias, sino más bien dejarlos explorar y no limitar sus respuestas. Se beneficiaría, así, la construcción de conceptos por parte de los estudiantes. Para esto último, creemos que también puede colaborar la utilización de representaciones gráficas y, principalmente, la pregunta. Todo profesor debería guiar sus clases con preguntas pero también es fundamental que esté abierto a escuchar las respuestas de sus estudiantes.

Por otro lado, si tenemos en cuenta que los alumnos de primer año ingresan a la Facultad con formación y realidades diversas, creemos que nada debe ser tomado como trivial, sino que es necesario explicar todo, por más simple que le parezca al profesor. El docente podrá suponer que una actividad será fácil o difícil para sus estudiantes, pero sostenemos que no debe hacer explícita esta suposición. La complejidad no será la misma para todos los integrantes de la clase y afirmar, por ejemplo, que un ejercicio es «muy complicado» antes que intenten resolverlo podría mal predisponer a los estudiantes limitando sus aprendizajes; o bien, decir que algo es «muy fácil» podría frustrar a aquellos que no logren resolverlo.

Otro aspecto analizado son los errores de los alumnos, los cuales el profesor seguramente prevé de acuerdo a su experiencia con otros cursos, a las dificultades propias emergentes cuando él aprendió el contenido o a las lecturas realizadas de investigaciones. Resaltamos que si bien estas suposiciones debería aprovecharlas en la clase, conviene no hacerlas explícitas frente al grupo. Podría, por ejemplo, plantear situaciones donde suponga que existirá una dificultad e incentivar el análisis de la misma en conjunto con la clase. Es necesario que el profesor esté convencido (y lo transmita) que la importancia de la corrección no es para que aprueben un examen, sino para que aprendan.

Si bien todo docente tiende a trabajar con aquellos alumnos que siempre responden o consultan, creemos que se debería ser consciente de esto e incentivar la participación de toda la clase, por ejemplo, haciendo preguntas específicas a sectores particulares. También se podría fomentar el trabajo en pizarrón de los estudiantes ya sea, por ejemplo, para la explicación de ejercicios o de demostraciones alternativas de algún teorema. Además, cuando el profesor pregunta si se entendió un tema y el grupo queda en silencio, debería tomar distintas alternativas para comprobar efectivamente que se comprende. En efecto, puede proponer que den ejemplos o realizar preguntas puntuales.

El material concreto es un recurso que ayuda a los alumnos en la manipulación y visualización de conceptos, cuestión que en Geometría es fundamental. En el nivel superior muchas veces se cree que utilizarlo es una manera de perder el tiempo. Sostenemos, contrariamente, que todas las personas, independientemente de la edad, necesitan desarrollar diversas habilidades para dar significado a los conceptos y que el tiempo no es razón suficiente para dejar de lado este tipo de materiales.

Tal como ha hecho el docente observado en más de una oportunidad, mostrar aspectos históricos de la Matemática en clases podría ayudar a los alumnos a situarse en un contexto, a descubrir otra forma de ver y pensar la disciplina. Además colaboraría en entender que los conceptos no son cuestiones aisladas, que hay muchos años de discusiones, errores, peleas, problemas y muchas personas detrás de cada uno de ellos.

Por último, creemos que muchas veces será conveniente partir del vocabulario de los estudiantes (por ejemplo, borde o relleno) para, de a poco, pulirlo y llegar a las definiciones o procedimientos formales (circunferencia o círculo). Del mismo modo, dado que los alumnos posiblemente nunca antes se hayan enfrentado a la escritura matemática (o si lo hicieron, no fue en gran medida), sería necesario que el profesor realice aclaraciones sobre la notación, que les enseñe a escribir y leer este nuevo lenguaje.

En cuanto al trabajo con alumnos

Tal como se mencionó, se aplicaron cuestionarios abiertos por escrito a estudiantes de primer año del Profesorado en Matemática. Los mismos se desarrollaron en tres instancias o sesiones de trabajo, cada una de ellas con un contenido diferente de Geometría Sintética y con el propósito de recorrer todos los subdominios del *MKT*. Participaron cuatro estudiantes, quienes se dividieron en dos grupos: G1 y G2, y fueron realizando entregas semanales previamente acordadas.

En la Sesión 1, se entregaron seis consignas: en la primera, analizamos los procedimientos efectuados para dar respuesta a una situación problemática de un libro de texto de secundaria² (*CCK*); en la segunda, consideramos los modos posibles de implementar la actividad con alumnos de primer año

² De una masa rectangular de 30cm de largo y 20cm de ancho se cortan círculos de 5cm de radio para preparar empanadas, de modo que se aproveche la mayor cantidad de masa posible. a) ¿Cuántas tapas de empanadas saldrán? b) ¿Se pueden cortar más tapas con la masa que sobra? ¿Cómo?

de la escuela secundaria (*KCT*); en la tercera y en la cuarta, se contemplaron los contenidos matemáticos que, según los participantes, entraban en juego al abordar la actividad (*KCC*) y los que podrían trabajarse con posterioridad (*HCK*); en la quinta se tuvo en cuenta aspectos que podrían ser un inconveniente para los estudiantes al inicio de su escolaridad (*KCS*); y en la última se consideraron distintas maneras de guiar al alumno para sortear estas dificultades (*SCK*).

Como el docente de Geometría I trabajó en las clases de criterios de congruencia de triángulos con software geométrico, sospechamos que los estudiantes se verían motivados o influenciados por esta actividad. Por esta razón, en la Sesión 2 (centrada en el *KCT*), decidimos presentar tres consignas: en la primera, debían planificar una clase para introducir este contenido, mientras que en la segunda les pedimos que mencionen las cuestiones no utilizadas o descartadas en la planificación y, en la tercera, los recursos consultados para la misma, justificando su decisión.

Por último, en la Sesión 3, les solicitamos que corrijan un ejercicio referido a relaciones de desigualdad en un triángulo (*CCK*), correspondiente a un final de la asignatura y resuelto por cuatro alumnos distintos de años anteriores. Además, les pedimos que mencionen las posibles causas de cada error detectado (*KCS*) y los modos de trabajarlos desde la enseñanza con el objetivo de prevenirlos (*KCT*).

En general pudimos notar que en las tres sesiones se presentaron cuestiones que concuerdan con lo realizado por el docente en las clases de Geometría I observadas. Por ejemplo, respecto al *SCK*, surgen las representaciones gráficas, los ejemplos y las preguntas orientadoras como sustentos potentes para explicar el problema. En cuanto al *KCT*, los estudiantes propusieron el empleo de distintos recursos y la participación del grupo en la corrección conjunta de los errores, además de presentar la clase de congruencia de triángulos de manera similar a lo realizado por el docente en la asignatura. Esto nos lleva a pensar que las acciones del profesor influyen bastante en los alumnos y marcan, en cierto sentido, su futuro desempeño como docentes.

En cuanto al material de estudio

Creemos que las actividades que propone el docente a sus alumnos comprenden un tipo de conocimiento asociado al *SCK*. Por esta razón, nos ha parecido interesante analizar el apunte que elabora y actualiza año tras

año el docente de la asignatura, y que se facilita a los futuros profesores en esta etapa de su trayecto de formación. Este material se constituye en la fuente primaria de estudio, no solo en términos de adquisición de contenidos matemáticos, sino también en cuanto al recorrido posible para ello que se propone desde la enseñanza en el aula de formación inicial. Esto adquiere gran relevancia dado que, tal como sostenemos, el *conocimiento especializado* del docente puesto en juego en la elaboración del material influye en la formación de este tipo de conocimiento en los futuros profesores en Matemática.

A partir de un proceso exploratorio inicial de inmersión en los datos conjugando los aportes de investigaciones relativas a la temática, tales como la de Duval (1999), Abrate (2006) y Höffer (1981), determinamos cinco variables que se presentan en la Tabla 3.2. Así, procedimos a analizar el material mediante una descripción breve de la organización y presentación del contenido, con especial detenimiento en las actividades planteadas a los alumnos. Cada actividad fue analizada en función de las cinco variables presentadas. Para ello, elaboramos matrices de identificación y recuento, como principal herramienta para hallar regularidades y relaciones con el *MKT*.

Tabla 3.2. Variables de análisis del material de estudio

Consigna	Registros de representación	Natural Gráfico Simbólico
	Formulación	Abierta Cerrada
Proceso de resolución	Actividades mentales	Automática Algorítmica Heurística
	Cantidad de soluciones	Única Múltiples
	Habilidades involucradas	Visuales Dibujo y construcción Comunicación Razonamiento Aplicación y transferencia

En general hemos apreciado que en las dos unidades analizadas no hay consignas abiertas, todas ellas son cerradas. Esto tal vez dé mayor seguridad al docente a la hora de corregir o de llevar adelante la clase, pero podría limitar la oportunidad de los alumnos de resolver problemas distintos y desarrollar diversas habilidades. A partir de esto, pensamos cómo modificar algunas consignas cerradas en abiertas. Por ejemplo, propusimos cambiar «*Demostrar que el pie de la altura correspondiente al lado AC es el punto medio de AC*» por «*Conjeturar y demostrar alguna propiedad que verifique la altura del lado desigual en un triángulo isósceles*». Sin embargo, al realizar este cambio, algún estudiante podría obtener una proposición cuya demostración no requiera el contenido de la sección, o bien, necesite de conceptos aún no abordados. Por ello consideramos que la elección de consignas abiertas o cerradas dependerá de las intenciones del docente: que los alumnos apliquen propiedades dadas o que exploren nuevas relaciones matemáticas (Schaefer y Sgreccia, 2017).

Por otro lado, observamos que la multiplicidad de soluciones está presente en pocas oportunidades. Sin embargo, si bien la mayoría de las actividades admiten una única respuesta (por ejemplo, el área de una figura), sí pueden tener múltiples desarrollos, es decir, diversos caminos para llegar a la solución esperada. En estos casos, creemos que es importante remarcar a los alumnos la multiplicidad de demostraciones de un mismo enunciado o de las construcciones geométricas, colaborando en desmentir la rigidez de la Matemática que muchas veces tienen como concepción previa los estudiantes.

También hemos observado que las habilidades visuales son requeridas por la mayoría de las actividades, posiblemente por tratarse del área Geometría, y las de aplicación y transferencia suelen aparecer al final del listado de ejercicios.

Teniendo en cuenta el modelo completo del *MKT*, hemos detectado, por ejemplo, cuestiones relacionadas al *HCK* cuando el docente hace alusión, en el apunte, a situaciones propias de la historia de la disciplina referentes al concepto a tratar. Al finalizar esto, por lo general explicita el objetivo de la sección, lo cual sitúa al estudiante en el tema (aspecto propio del *KCT*). También observamos en distintas partes del material que el profesor interpreta enunciados o teoremas desde el punto de vista geométrico, un claro indicador del *SCK*.

Creemos que las variables propuestas en el análisis pueden ser de utilidad en otros trabajos similares, como así también a la hora de re-pensar la

propia práctica y la selección de actividades que realizan diariamente para sus alumnos, tanto los profesores en Matemática en ejercicio como en la formación práctica en la carrera de grado.

De este modo, teniendo en cuenta las observaciones de clases realizadas, el trabajo con alumnos y el análisis del material de estudio, y retomando la primera conjetura planteada, creemos que en las clases de Geometría I se ha propiciado la construcción de conceptos, analizando su origen, sus porqués, conectando los contenidos y, correlativamente, favoreciendo la futura enseñanza de los mismos. Si bien en las clases el docente podría realizar una mayor cantidad de relaciones con el nivel secundario, la distancia mencionada en la conjetura no resultó ser tan grande como se suponía. Sin embargo, sostenemos que este acercamiento no se hace explícito a los futuros profesores en las clases. ¿Será un trabajo que debe realizar cada estudiante de manera individual y por su propia cuenta?

Con relación a la segunda conjetura, en las clases observadas se evidenció una gran riqueza en cuanto a aspectos propios del SCK. Por ello consideramos que este tipo de conocimiento no queda relegado totalmente a la construcción propia del estudiante, sino que el docente colabora otorgando diversas herramientas para que el futuro profesor vaya apropiándose del mismo (Schaefer y Sgreccia, en evaluación).

3. Desde la Geometría Analítica

Retomando la problemática planteada en la introducción y reafirmando la importancia de la formación de profesores como herramienta potencial de cambio, nos interesa conocer cómo se van cimentando las bases de toda una rama de la Matemática tan trascendente como es la Geometría Analítica, en particular, en estudiantes que proyectan ser profesores.

En esa línea de búsqueda, no se han encontrado investigaciones que se centren en la formación de profesores ni aborden la Geometría Analítica en un sentido más amplio que desde la particularidad de un tema puntual.

Es así que esta investigación se propone caracterizar la configuración del *conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)* (Ball et al., 2008) de la Geometría Analítica en estudiantes del Profesorado en Matemática y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción específicas que propendan al fortalecimiento –en términos de complementariedad y sustento entre los distintos registros– de la formación que se ofrece.

En particular procuramos hacerlo, por un lado, a través del análisis de la activación de los subdominios del *MKT* y desde los aportes de asignaturas, tanto disciplinares –donde se abordan temáticas específicas de la Geometría Analítica– como de la práctica docente –donde se problematizan peculiaridades de su enseñanza–, en las que se sientan las bases para la construcción del *MKT* de la Geometría Analítica.

Por otro lado, y asumiendo que la construcción de ese conocimiento no finaliza al concurrir la formación inicial, resulta de interés conocer de qué manera los docentes egresados del Profesorado moldean y reconstruyen su *MKT* en sus prácticas áulicas en lo relativo a la Geometría Analítica.

El aporte disciplinar donde se sientan las bases de la Geometría Analítica se realiza, en la formación que se ofrece, en la asignatura Geometría I. Como se señaló en el apartado anterior, una de las partes constitutivas de la asignatura es la referida a la Geometría Analítica. Los bloques temáticos que constituyen esta parte son: vectores, recta en el plano, plano, recta en el espacio, cónicas, ecuación general de segundo grado con dos incógnitas y superficies en el espacio.

En el programa de Geometría I se alude a esta parte de la materia como el momento en que se introducen conceptos algebraicos que permiten resolver algunos de los problemas que se presentan durante el abordaje sintético de los objetos de estudio, con estrategias diferentes, además de tratarse temas nuevos. Se presenta la primera vinculación explícita entre dos ramas de la Matemática (Álgebra y Geometría) en la carrera y constituye una gran oportunidad para que los alumnos se introduzcan en un trabajo algebraico-geométrico integrador, logren interpretar un mismo concepto desde dos puntos de vista diferentes y valoren qué estrategia es la más conveniente para resolver un determinado problema.

El aporte desde la práctica docente en el Profesorado en torno a las temáticas de la Geometría Analítica se da en la asignatura Práctica de la Enseñanza II. Las Prácticas de la Enseñanza (I a III) corresponden al Eje Integrador de la carrera y tienen como objetivo insertar la problemática de la práctica de la enseñanza desde el primer año de la carrera, a través de la articulación teórico-práctica de los contenidos que constituyen los tres Campos de Formación (general pedagógica, especializada y orientada). La asignatura Práctica de la Enseñanza II se ubica en el primer semestre del tercer año de la carrera y es allí donde se problematizan las peculiaridades de la enseñanza de la Geometría Analítica. Se desarrollan actividades que promueven el análisis y la reconstrucción de actuaciones

propias del quehacer docente que, en particular aquí, se refieren a contenidos disciplinares correspondientes al eje Álgebra y Funciones del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014), en el que se abordan contenidos relativos a Geometría Analítica.

Comprender de qué manera se dan las condiciones institucionales para la construcción del *MKT* de la Geometría Analítica en el Profesorado, nos lleva a centrar la mirada en los actores fundamentales (docentes y alumnos) de estas asignaturas. Sin embargo, para conocer el modo en que se reconstruye y moldea ese conocimiento en los estudiantes será de interés, también, poner el foco en egresados de la carrera. En este sentido, se pretende vislumbrar qué herramientas, estrategias o conocimientos adquiridos en otros espacios (de la formación inicial o continua) aportan a la construcción de dicho *MKT*.

El objetivo que aquí planteamos se aborda en distintas instancias que profundizaremos a continuación.

Observación de clases de Geometría I - surgimiento de las modalidades

Parte de este estudio se aborda desde un trabajo de investigación titulado «Conocimiento matemático para enseñar Geometría Analítica a nivel universitario. El caso del Profesorado en Matemática de la FCEIA-UNR» desarrollado en el marco de una Beca de Iniciación en la Investigación Científica y Tecnológica otorgada por la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (2013-2014).

Dicha investigación involucró tres tipos de participantes: estudiantes avanzados del Profesorado, egresados de la misma carrera que se desempeñan en el Ciclo Básico de Ingeniería de la Facultad y docentes de Geometría I del Profesorado. Las técnicas de investigación efectivamente aplicadas fueron:

- *Cuestionarios abiertos a estudiantes avanzados* de la carrera –que están cursando el cuarto y último año–, en los que se los pone en situación para obtener indicadores acerca del grado de apropiación de los distintos subdominios del *MKT* de la Geometría Analítica a nivel universitario.
- *Grupos de discusión con egresados del Profesorado* que, al momento de realizar la investigación, se desempeñaban en el Ciclo Básico de Ingeniería de la Facultad, específicamente en la asignatura Álgebra y Geometría I, para conocer

sus perspectivas acerca de sus propios conocimientos construidos del t3pico en cuesti3n puestos en juego en tal ense1anza universitaria.

- *Observaci3n de tres clases en la asignatura Geometr3a I* en las que se desarrollan ejes temáticos relativos a la Geometr3a Análitica.

Utilizamos el análisis del contenido como técnica de procesamiento de la informaci3n, lo que permitió estudiar el contenido manifiesto de la informaci3n recabada, clasificando sus diferentes partes de acuerdo con las categor3as de análisis (subdominios del *MKT*).

En un momento, la técnica de análisis aplicada a los registros de observaciones de clases derivó, luego de sucesivas lecturas de inmersi3n en los datos, en la elaboraci3n de una serie de modalidades asociadas a cada subdominio del modelo teórico. Surgió la necesidad de construirlas debido a la diversidad de elementos a analizar.

En una segunda instancia, bajo el Proyecto de Investigaci3n que enmarca esta publicaci3n, profundizamos el estudio en las observaciones de clases. El *MKT*, como modelo teórico, surge y se nutre de investigaciones empíricas en contextos de aula (Ball y Bass, 2003). Es por ello que nos centramos en la observaci3n del trabajo de profesores en el aula de Matemática.

Para conseguir el objetivo propuesto, y considerando los registros de clases en sí mismos como un medio para lograrlo, recurrimos a una segmentaci3n del contenido que se desarrolló en las clases proponiendo un esquema que recupera algunos de elementos propuestos por Coll et al. (1992).

En la Fig. 3.2 se consideran como unidades de análisis las *sesiones* de trabajo, constituidas puntualmente por cada una de las clases que se desarrollan en el marco de una *secuencia didáctica* asociada a un cierto bloque temático. En un nivel micro, se tienen en cuenta los *segmentos de interactividad*, que responden a una determinada estructura de participaci3n; pueden agruparse en *configuraciones de segmentos de interactividad* y se secuencian constituyendo, para cada sesi3n, un *mapa de interactividad*. Para profundizar en el proceso de construcci3n de significados se recurre a una unidad de análisis mucho más fina, de naturaleza esencialmente semi3tica: los *mensajes* que a su vez pueden agruparse en *configuraciones de mensajes*.

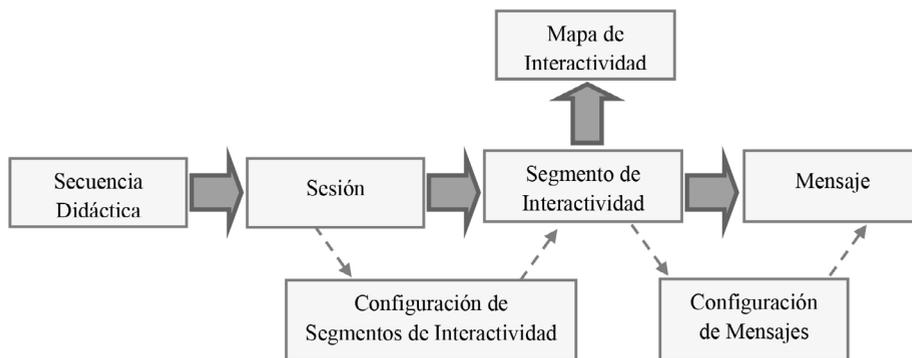


Figura 3.2. Esquema de segmentación del contenido de las Sesiones

La unidad de análisis de esta investigación está constituida por cada una de las tres sesiones de clase, siendo subunidades las configuraciones de mensajes (ocho, ocho y nueve en cada sesión respectivamente), delimitadas de acuerdo al contenido matemático de referencia. El análisis se efectuó a través de las categorías del estudio. Cada una de ellas está constituida por una cierta cantidad de modalidades de acciones del profesor (entre seis y 14), identificadas a partir de un proceso gradual de inmersión en los datos.

El proceso de delimitación de las modalidades de acciones del profesor y de articulación de las mismas con las categorías, estuvo conformado por cinco fases:

- a. Transcripción fiel de lo acontecido en la clase, en cuanto a manifestaciones explícitas orales del profesor y de los alumnos (actos de habla) así como representaciones escritas en el pizarrón por parte del profesor (aclaraciones entre paréntesis entre los actos de habla).
- b. Familiarización con los datos a partir de una lectura global de las transcripciones realizadas.
- c. Primera identificación de los datos (mensajes) con aspectos particulares de los subdominios del *MKT* (modalidades preliminares).
- d. Perfeccionamiento de las modalidades iniciales, a partir de lo detectado en todas las clases, procurando minimizar la cantidad de las mismas pero resguardando la diversidad de la información que brindan.
- e. Revisión de la asociación modalidad-mensajes para eventualmente mejorar la denominación y pertinencia de las modalidades.

Es así que cada modalidad se asocia con uno o más mensajes (extractos de transcripciones) que, si bien pueden estar expresados con palabras distintas, tienen la misma naturaleza semiótica (referida a lo que intenta representarse a través de la denominación de la modalidad).

Tabla 3.3. Modalidades emergentes y ejemplos

Subdominios	Modalidades	Extractos
CCK	Procedimental; Conceptual; Significado; Institucionalización; Introducción de términos matemáticos; Ampliación de casos; Ampliación de contenido; Deducción; Precisión matemática; Notación; Asociación nombre-representación gráfica; Dimensión de referencia; Generalización matemática.	«¿Qué quiere decir un segmento orientado? Quiere decir un segmento para el cual se decide cuál es el origen y cuál es el extremo» (Significado). «Tres, porque el espacio tiene tres dimensiones, entonces voy a usar lo que hice en el plano, ¿sí?» (Ampliación de contenido).
HCK	Insinuación de vinculaciones matemáticas posteriores; Alcance de las caracterizaciones matemáticas; Fundamentación de la importancia del surgimiento de la Geometría Analítica; Conexión con una situación real; Mención de la evolución de conceptos en la historia de la Matemática; Ubicación en el tiempo de hechos fundamentales de la historia de la Matemática; Valoración estética de las representaciones matemáticas; Vinculación Geometría Sintética-Geometría Analítica.	«Un versor es un vector de norma, de módulo 1, siempre que diga norma va a ser módulo... norma es un concepto más general» (Insinuación de vinculaciones matemáticas posteriores). «Yo voy a hacer un par de dibujos y voy a escribir un par de ecuaciones y ustedes me van a decir qué tienen que ver unos con otros» (Vinculación Geometría Sintética-Geometría Analítica).
SCK	Representación gráfica; Escritura simbólica; Reflexión sobre los significados; Interpretación gráfica; Ejemplificación gráfica; Lenguaje accesible; Orden de presentación de ejemplos; Variedad en la elección de ejemplos; Demostración gráfica; Sentido de las denominaciones; Enunciado coloquial y escritura simbólica; Otro procedimiento de representación del objeto geométrico; Precisión en la representación gráfica; Reformulación de preguntas.	«Exacto, la magnitud escalar, tantos kilómetros por hora es una magnitud escalar, la velocidad media, no me alcanza para determinarlo porque también debería saber por dónde se mueve» (Reflexión sobre los significados). «El que no se lo acuerde de memoria está perfecto, buscan menos y hacen la suma usual, ya está esto simplemente... menos a partir de menos, sin necesidad de dibujar el paralelogramo» (Otro procedimiento de representación del objeto geométrico).

Subdominios	Modalidades	Extractos
KCS	Consideración de las respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente; Indagación sobre entendimiento; Ejemplificación según nivel de abstracción de los alumnos; Supuesto sobre menor complejidad; Previsión de dificultades; Previsión de errores; Supuesto de ausencia de complejidad; Potenciación de las respuestas de los alumnos desde la justificación; Previsión de creencias.	«Como si tuviéramos una cuadrícula, las cuadradas son cuadradas, básicamente, la coordenada en x me dice cuánto me tengo que mover en la dirección horizontal y la coordenada en y me dice cuánto me tengo que mover en la dirección vertical para llegar a ese punto» (Ejemplificación según nivel de abstracción de los alumnos). «Ojo que este es el eje z en el espacio, parece el y y de cuando uno dibuja los ejes en el plano, ya se van a tener que acostumbrar a dibujar, el x e y están abajo» (Previsión de dificultades).
KCT	Invitación a la participación; Direccionamiento de preguntas; Evocación de conocimientos previos; Uso del apunte como material de estudio; Administración del tiempo; Recapitulación; Uso de colores; Uso de ideas recientes; Elección de ejemplos vinculados con la cotidianidad; Uso de elementos del aula para modelizar; Uso de metáforas y analogías.	«Entonces, lo que vamos a hacer es aprovechar lo que sabemos de la recta. En la recta nosotros sabemos dar coordenadas a los puntos, lo que hicimos recién acá» (Uso de ideas recientes). «Un diccionario, si se quiere, entre Álgebra y Geometría» (Uso de metáforas y analogías).
KCC	Articulación en la misma asignatura; Articulación con contenidos de otras asignaturas; Supuesto sobre forma de trabajo en el secundario; Articulación con contenidos del secundario; Organización y preparación del material; Vinculación teoría-práctica.	«Ya van a ver operaciones en álgebra, van a ver otras estructuras a partir del año que viene» (Articulación con contenidos de otras asignaturas). «En la escuela deben haber dado sistemas de ecuaciones, seguramente, y les hacían hacer la resolución geométrica y después la resolución analítica» (Supuesto sobre forma de trabajo en el secundario).

La construcción de estas modalidades se constituye en una primera parte de los resultados de esta investigación (Ciccioli y Sgreccia, 2017). Se muestran en la Tabla 3.3 las modalidades relativas a cada subdominio (13 del CCK; ocho para el HCK; 14 del SCK; nueve para el KCS; 11 del KCT y seis del KCC) en el orden que fueron activándose en las Sesiones y se ejemplifica, para algunas modalidades, mediante mensajes que aludieron a esa noción.

En la segunda parte de los resultados, intentamos sintetizar lo sucedido en las clases observadas haciendo uso del esquema metodológico propuesto (Fig. 3.2) Se muestra, a modo de ejemplo, algunos resultados relativos a la Sesión 1.

En la Sesión 1 se reconocieron ocho configuraciones de mensajes:

1. Idea global de la esencia de la Geometría Analítica.
2. Procedimiento base para la correspondencia entre la recta y el conjunto de los números reales.
3. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia en la recta numérica.
4. Procedimiento base para la correspondencia en el plano cartesiano.
5. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia entre el plano cartesiano y el conjunto de pares de números reales.
6. Importancia de la Geometría Analítica y del método de Descartes.
7. Relación 1-1 como base de la Geometría Analítica.
8. Ampliación de la relación 1-1.

En la Fig. 3.3 se presentan las frecuencias absolutas de activaciones de cada subdominio del *MKT* (identificado con un color) en cada Configuración de Mensajes, junto a una secuencia sintetizada de activaciones de las distintas modalidades (con el mismo color que el subdominio al que está asociada dicha secuencia), correspondientes a la Sesión 1.

El análisis de los resultados refleja que todos los subdominios del *MKT*, en mayor o menor medida, son activados en las clases de Geometría Analítica observadas. A su vez, la diversidad de modalidades que se han detectado da indicios de la profundidad y riqueza de los conocimientos que se ponen en juego en dichas clases, incluso más allá de lo específicamente disciplinar.

Sin embargo, encontramos que la caracterización de la formación que se ofrece a los futuros profesores en Matemática en este Profesorado, podría enriquecerse ampliando la mirada un poco más allá de lo que sucede específicamente en las clases de Geometría I y particularmente, de lo que dice y hace el docente a cargo de la asignatura.

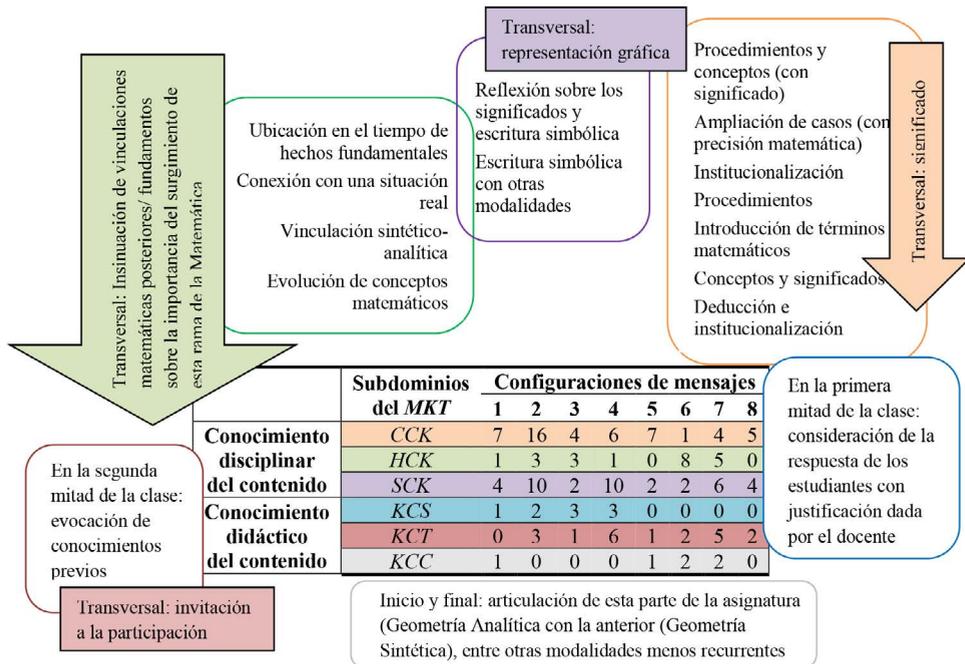


Figura 3.3. Subdominios activados en las configuraciones de mensajes 1 a 8 de la Sesión 1

Caracterización del MKT de la Geometría Analítica de la formación que se ofrece en el Profesorado

Tomando como punto de partida la configuración de modalidades construidas para cada subdominio del MKT, intentamos ampliar y profundizar el enfoque centrándonos, ahora, en docentes y estudiantes de las asignaturas Geometría I y Práctica de la Enseñanza II y en egresados del Profesorado (Ciccioli y Sgreccia, 2017).

Este trabajo se realiza en el marco de una tesis de Doctorado y se han aplicado, al momento, las siguientes técnicas de recolección de la información:

- *Observación de nueve clases de Geometría I*, seleccionadas en función de la posibilidad de observar distintas temáticas y momentos del desarrollo de la Geometría Analítica que se estudia en la carrera.
- *Aplicación de un dispositivo didáctico*, que se elaboró para dos clases de la asignatura Práctica de la Enseñanza II y constó de cuatro instancias de trabajo por

parte de los estudiantes: 1) resolución de al menos dos formas de un problema matemático extraído de un libro de texto³, cuyo marco podía incluirse dentro de la Geometría Analítica; 2) elaboración de un informe donde se explicitaron las resoluciones del problema, así como una explicación detallada de una simulación de puesta en común en un aula con estudiantes del ciclo orientado del nivel secundario; 3) exposición de alguna de las resoluciones seleccionada por el equipo docente de acuerdo a la diversidad de enfoques; 4) respuestas a un cuestionario abierto que incluyó preguntas relativas al trabajo realizado, asociadas a los distintos subdominios del *MKT*.

- *Grupo de discusión con cinco egresados del Profesorado del último año*, donde se utilizaron, como material disparador, algunas de las producciones de los estudiantes de Práctica de la Enseñanza II en el marco de la implementación del dispositivo. Se realizaron preguntas relativas a la actividad propiamente dicha en relación con las categorías del estudio.

Se prevé continuar delimitando la configuración de modalidades que conforman cada subdominio del *MKT*, atendiendo a aquello que sucede en las clases del Profesorado en las que se construye dicho conocimiento para la enseñanza de la Geometría Analítica. Pretendemos, con esta nueva configuración de modalidades, aproximarnos a la caracterización de la formación en Geometría Analítica que se ofrece en la carrera.

4. Desde la Geometría Descriptiva

Formar docentes en Matemática supone formar profesionales aptos para manipular y adecuar contenidos científicos específicos de manera que sean asimilables por los alumnos. Formar en representación no es un tema menor ni que dependa solo de la curiosidad personal, ni mucho menos de la habilidad artística que uno posea. Este aspecto forma parte del *conocimiento especializado del contenido* del docente, contemplando conocimientos y habilidades geométricas propias del profesor, que generalmente no posee cualquier otro profesional que ha estudiado Matemática sin intención de enseñar. A partir de ello hemos comenzado investigando en torno a este tema, especialmente acerca de los modos en que se forman y conforman las representaciones visuales en Geometría. La investigación que aquí se presenta en base a dicha temática inició con una Beca de Investigación UNR finalizada en

³ Una escalera que tiene una longitud de 2 metros está apoyada por su extremo superior a una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo (la pared y el suelo forman un ángulo recto). ¿Cuál es la figura que describe el punto medio de la escalera, al resbalar y caer esta?

el año 2014 y cuyo Plan se tituló «Los cuerpos geométricos en los libros de texto del Ciclo Básico de Secundaria: modos de representación de lo 3d en un soporte 2d».

En cuanto a los libros de texto

Centrándonos en la Geometría espacial, hemos indagado cómo se trata la representación de cuerpos en los libros de texto de secundario. Es sabido que los libros de texto constituyen uno de los materiales didácticos más utilizados por los docentes, ya que se diseñan especialmente para trabajar en el ámbito escolar y sirven, junto a la guía del profesor, como mediadores entre el alumno y el conocimiento. De acuerdo con Villella (2007), este material se constituye en un portador que promueve significados y resulta de interés analizar cómo contribuye a la construcción de conceptos, interpretaciones y explicaciones, desde sus representaciones, contenidos y actividades. En este aspecto, este autor identifica dos criterios de selección de textos: lo que respecta a la información en sí que contienen y lo que respecta a la presentación de la obra.

Desde la Geometría Descriptiva nos interesamos en las formas discursivas que utilizan los autores para orientar un aprendizaje autónomo del alumno, es decir, los recursos comunicativos a los que recurre para la lectura y comprensión de lo tridimensional sobre las representaciones en el plano. Para este análisis examinamos propuestas editoriales para enseñar cuerpos geométricos en los dos primeros años de la escuela secundaria disponibles en la Biblioteca Central de la Facultad. En un primer acercamiento a los datos, construimos categorías y subcategorías de análisis con el fin de adecuar la información de los libros de texto a nuestro campo de estudio. La misma se ha ido completando a medida que avanzaba la investigación (Tabla 3.4).

Tabla 3.4. Sistema de categorías y subcategorías de análisis

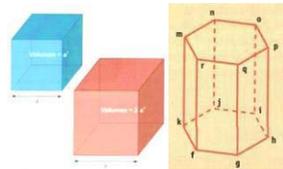
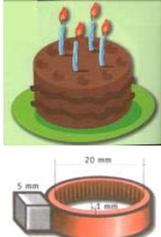
Categorías	Sub-categorías	
Portador de texto	Ordenamiento general	
	Capítulo «Cuerpos» en la obra	
Capítulo «Cuerpos» en sí mismo	Ordenamiento general	
	Secciones del capítulo	
Representación 3d en 2d	Tipo de representación	Perspectiva
		Desarrollo plano
	Sistema de representación	
	Distractores	Orientación
Estructuración		
Habilidades geométricas que se promueven en las actividades	Visuales	Descomposición de cuerpos
		Reconocimiento e identificación de cuerpos
		Reconocimiento e identificación de elementos
		Lectura de información gráfica
	De razonamiento	Juicio de validez de una proposición
		Análisis de fórmulas
	De dibujo y construcción	Dibujo de cuerpos
		Construcción de cuerpos
	De comunicación	
	De aplicación y transferencia	Cálculo de medidas de cuerpos
		Recolección de información

Luego analizamos cada propuesta editorial atendiendo a objetivos específicos de la investigación. Puede verse una síntesis de resultados de este primer análisis en Grossi y Sgreccia (2016). Al momento de la salida al campo, la Biblioteca contaba con tres libros de texto para el Ciclo Básico del nivel secundario vinculados a la temática en cuestión, de las editoriales Aique, Estrada y Santillana, en los que nos enfocamos sobre los capítulos abocados a la Geometría Espacial.

En cuanto a las representaciones empleadas

En Geometría, la comunicación gráfica es una herramienta sumamente útil en la representación de situaciones-problema. En particular, la Geometría Descriptiva permite representar objetos tridimensionales sobre una superficie bidimensional, estableciendo propiedades entre las formas del espacio y las formas planas. En este sentido, es importante que los sistemas de representación –conjunto de operaciones que permiten obtener las proyecciones de un objeto del espacio sobre un plano– sean variados y reversibles: dada una figura en el espacio, pueden siempre obtenerse sus proyecciones sobre un plano y dadas las proyecciones de la figura, puede determinarse la posición en el espacio de cualquier punto de la figura.

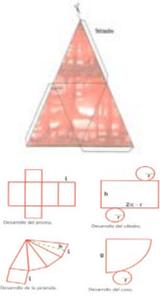
Tabla 3.5. Tipos de representaciones en perspectiva presentes en los libros

Tipo de representación en perspectiva	Libro 1 (107)	Libro 2 (125)	Libro 3 (70)	Ejemplos
Grupo 1: Desde un contexto geométrico completo (se muestran los bordes que denotan profundidad)	71	78	34	
Grupo 2: Desde un contexto geométrico incompleto (no se muestran los bordes que denotan profundidad)	24	31	23	
Grupo 3: Dibujos escolarizados de objetos reales	8	5	11	
Grupo 4: Fotografía en contextos reales	4	11	2	

En lo relativo a los tipos de representación notamos un fuerte predominio de la perspectiva, siendo la «representación en perspectiva desde un contexto geométrico completo» la más habitual (Tabla 3.5). Estas imágenes, que permiten ver bordes que denotan profundidad, se hacen indispensables a la hora de conocer un cuerpo, pues facilitan identificar vistas que no aparecen de frente a la visión del observador. En la mayoría de los casos, las representaciones exhibidas se abocan a la identificación de elementos de cuerpos, clasificación y/o asociación de representaciones planas de cuerpos 3d con su nombre y al cálculo de medidas. Solo uno de los libros analizados contempló la tarea de formar y deformar un cuerpo determinado.

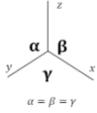
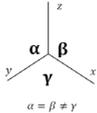
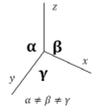
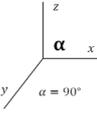
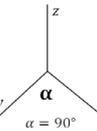
También, el desarrollo plano de cuerpos se hizo presente, aunque con menor frecuencia (Tabla 3.6). Este parece trabajarse como un contenido previo, sin referencias explícitas a técnicas para su realización. Es decir, este tipo de representación se expone de manera relativamente arbitraria, sin una explicación de por qué es posible una u otra forma de desarrollar determinado cuerpo. En general, su utilidad está referida a la deducción de fórmulas para el cálculo de medidas así como también a la construcción de cuerpos tridimensionales a partir de figuras recortables.

Tabla 3.6. Desarrollos planos presentes en los libros

	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Ejemplos
Desarrollos planos	11	18	4	
Total de representaciones	118	143	74	

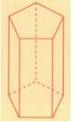
Con el fin de seguir analizando las representaciones bidimensionales nos encargamos de registrar los tipos de sistemas de representación empleados en las imágenes de cuerpos geométricos expuestos en los libros.

Tabla 3.7. Clasificación de axonometrías

Axonometrías	Tipos	
ORTOGONAL Las rectas proyectantes auxiliares son perpendiculares al plano de proyección. Ningún elemento de la figura es paralelo al plano de proyección	PERSPECTIVA ISOMÉTRICA Tres ángulos iguales	
	PERSPECTIVA DIMÉTRICA Dos ángulos iguales y uno distinto	
	PERSPECTIVA TRIMÉTRICA Tres ángulos diferentes	
OBLICUA Las rectas proyectantes auxiliares son oblicuas al plano de proyección. Tres ejes ortogonales –todos visibles–, con dos paralelos al plano de proyección	CABALLERA Los ejes que expresan las magnitudes de altura y anchura conservan sus dimensiones reales. El perpendicular expresa la profundidad	
	MILITAR Se le da preferencia a una cara, la horizontal y en verdadera magnitud, las demás aparecen deformadas	

Teniendo en cuenta la clasificación de Barrantes et al. (2015), distinguimos los sistemas de representación a partir de las diferentes perspectivas de los sistemas axonométricos. Estos estudian sistemas de representación de figuras espaciales en un plano por medio de proyecciones obtenidas según tres ejes, a su vez, contenidos en tres planos que conforman el denominado «triedro trirrectángulo», determinando un plano oblicuo triangular llamado «triángulo de las trazas» (posicionado paralelamente al plano en que se dibuja –el papel–). Con ello, se define la perspectiva como el arte de representar objetos en forma y disposición parecida a la vista humana. En la Tabla 3.7 se muestra una clasificación de los sistemas axonométricos según los ángulos entre los ejes y en la Tabla 3.8 se expone una clasificación de los sistemas registrados en cada libro. Estos tipos de representación se emplean comúnmente en otras disciplinas y suelen aparecer con mayor frecuencia a la vista de los alumnos.

Tabla 3.8. Sistemas de Representación

Tipo de perspectiva axonométrica	Libro 1 (95)	Libro 2 (109)	Libro 3 (57)	Ejemplos	
Isométrico	41	54	21		
Ortogonal	Dimétrico	7	0	1	
	Trimétrico	8	1	2	
Total	56	55	24		
Oblicua	Caballera	25	46	32	
	Militar	0	0	0	
Total	25	46	32		
Cuerpos no clasificados	14	8	1		

En general, en los libros analizados, las actividades correspondientes al capítulo «Cuerpos» parten de una visualización bidimensional expuesta. Si bien reconocemos el valor formativo de dichas representaciones dadas, su facilitación puede llegar a limitar la posibilidad de efectuar una representación externa por parte de los alumnos.

En lo que respecta a la representación gráfica por parte del estudiante (lector), en general los libros analizados exhiben escasas actividades. Aun así cabe mencionar que en ciertas consignas se deriva inevitablemente en algún tipo de representación para su posible resolución. En los pocos casos en que se solicita representar se emplean los verbos: «dibujar» (sobreentendiéndose como una representación en perspectiva) y «construir» (sobreentendiéndose como confeccionar con papel (u otro material) a partir de un desarrollo un cuerpo 3d).

Por su parte, la manipulación tridimensional no se hace presente, pidiéndose solo en los casos que se requiere construir cuerpos a partir de su desarrollo plano. Si bien se trabaja sobre representaciones bidimensionales, el procedimiento de realizar el dibujo respectivo queda implícito, dejándose tal vez la formación en esta habilidad para otro momento (anterior o posterior).

En cuanto a las habilidades geométricas

En lo relativo a las habilidades geométricas promovidas por las actividades correspondientes al capítulo «Cuerpos» de cada libro, utilizamos la clasificación propuesta por Höffer (1981): visuales, de razonamiento, de dibujo y construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia.

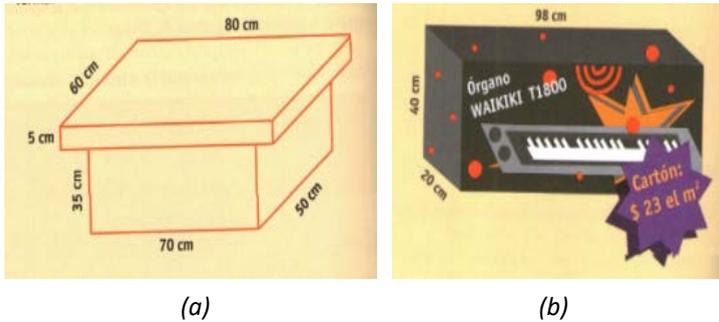


Figura 3.4. (a) Ejemplo que se asocia con un objeto real solo desde el enunciado coloquial. (b) Dibujo escolarizado de un objeto real

De los datos recabados, pudimos advertir un énfasis de ciertas habilidades geométricas (como las visuales) por sobre otras (por ejemplo, las de razonamiento). Por ejemplo, en la situación correspondiente a la Fig. 3.4a no se formula una aplicación o transferencia propiamente dicha, pues la representación 2d involucrada en la situación aparece dada en el enunciado, estando esta vinculación restringida a una mera cuestión nominal, por ejemplo: mesa ratona - combinación de prismas.

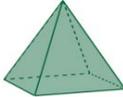
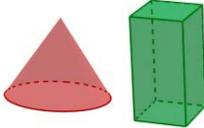
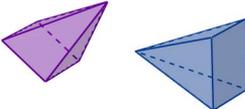
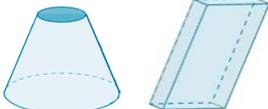
Se han considerado como actividades promotoras de estas habilidades visuales a las que requieren de una representación gráfica dada en forma *textual* (con palabras) o *mediante representaciones 2d* (con dibujos). Estas junto con las que implican cálculos de medidas y aplicación de fórmulas fueron las más frecuentes.

En cuanto a la presencia de distractores visuales

Además de analizar los tipos de representaciones, estudiamos ciertas características especiales que se pueden distinguir en ellas. Barrantes et al. (2015) advierten acerca de la presencia de representaciones geométricas estereotipadas en la mayoría de las propuestas de enseñanza de los textos escolares. Este tipo de representaciones se caracterizan por repetir patrones o presentar elementos que inducen a la atribución de propiedades inexistentes

así como a la formación de conceptos erróneos sobre lo que se está representando. Esto, inexorablemente, conlleva a interpretaciones sesgadas de figuras tridimensionales por parte de los alumnos. Denominan «distractores» a estas representaciones estereotipadas y las clasifican en dos tipos: de orientación y de estructuración (Tabla 3.9). Los primeros se asocian a propiedades visuales del esquema conceptual del alumno que no tienen nada que ver con la definición del concepto (por ejemplo: suelen representarse los cuerpos solo apoyados sobre el plano horizontal) mientras que los segundos aluden a representaciones de un concepto en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio sin intencionalidad (por ejemplo: suelen presentarse las definiciones de poliedros solo para cuerpos convexos).

Tabla 3.9. Tipos de distractores

Distractores	de orientación	de estructuración	
Suelen presentarse así			Visualización estereotipada
En vez de así			

Frente a la cuestión de los distractores, pudimos advertir que en las tres editoriales analizadas los cuerpos representados aparecen en gran medida apoyados sobre la base y son de tipo rectos (es decir, no oblicuos). Con ello podemos afirmar que los libros cuentan con una abundante presencia de distractores de orientación. Los de estructuración, si bien se dan en menor medida, también se hacen presentes. El docente debe ser capaz de suplir aquellas deficiencias aportando a sus clases indicadores que rompan con aquella predominancia de distractores. Una alternativa podría ser aportar (ya sea a través de láminas, con ayuda de un software o mediante representaciones en el pizarrón) ejemplos gráficos en donde no aparezcan aquellos distractores y confrontarlos con los presentes en el libro.

Partiendo de las conclusiones recién mencionadas en los diferentes aspectos que surgieron del análisis sobre lo gráfico visual en los libros de texto hemos elaborado orientaciones para propuestas de enseñanza (Grossi y Sgreccia, 2015), que compartimos en la Fig. 3.5.

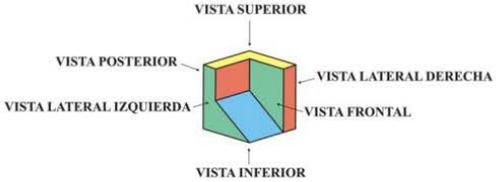
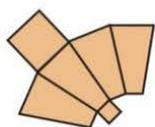
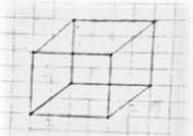
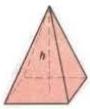
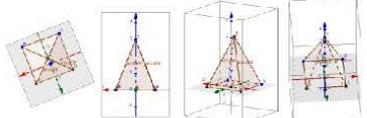
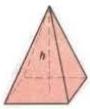
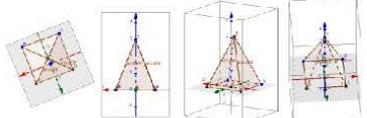
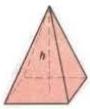
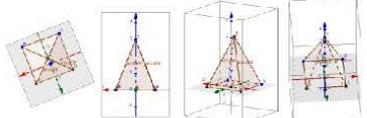
Revalorizando la representación					
<p>Destinada a trabajar con contenidos específicos sobre cuerpos geométricos (como pueden ser: noción de cuerpo como objeto geométrico y sus características, cálculo de medidas, vínculo de cuerpos geométricos con objetos de la cotidianidad), prestándose especial atención a la representación geométrica de los mismos (composición / truncamiento). A partir de diferentes representaciones planas, se detectan semejanzas y diferencias, y se señalan las bondades de cada representación para la resolución de la actividad.</p>					
Superando estereotipos visuales					
<p>Se da la representación normalizada (distintas vistas de un cuerpo) de algunos cuerpos poliedros no estándar y se solicita al alumno que identifiquen el cuerpo en cuestión. Se pueden realizar <i>multiple choice</i>, caracterización con palabras o proponer la construcción con cartón.</p>	 <p style="text-align: center;"><i>Distintas vistas de un poliedro no estándar</i></p>				
Vinculando formas de representar un cuerpo					
 	<p>A partir del desarrollo plano de ciertos cuerpos (en principio cuerpos geométricos simples y luego cuerpos compuestos y truncados) se pide a los estudiantes que representen el cuerpo en perspectiva.</p>				
<p style="text-align: center;"><i>Dos modos de representar una pirámide truncada</i></p>					
Superando ambigüedades en la representación					
<p>Se solicita dibujar un cuerpo, para luego ser analizado oralmente y en grupo: cuáles son caras visibles y no visibles, qué sucede con las aristas (si se dibujan o no las aristas ocultas), qué elemento representa el ancho, largo o alto, en dónde está situada la visión del observador, entre otras cuestiones que puedan emerger.</p>	 <p style="text-align: center;"><i>Representación realizada por una estudiante de secundario</i></p>				
Comunicándonos					
	<p>Se forman grupos de dos alumnos: uno actúa como “emisor” y otro como “receptor” de la comunicación. El alumno emisor cuenta con un cuerpo (una representación tridimensional del cuerpo geométrico manipulable por el estudiante), y relatará características del mismo a su compañero (el receptor) para que este vaya representándolo gráficamente. Al finalizar se compara el objeto del emisor con lo que ha obtenido el receptor (representación gráfica).</p>				
Visualizando con ayuda de un software					
<p>Se incorpora, de manera transversal, un software de geometría dinámica para graficar cuerpos en la pantalla y analizar características.</p>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">Cuerpo original</th> <th style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">Cuerpo representado por GeoGebra</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">  </td> <td style="text-align: center;">  </td> </tr> </tbody> </table>	Cuerpo original	Cuerpo representado por GeoGebra		
Cuerpo original	Cuerpo representado por GeoGebra				
					

Figura 3.5. Orientaciones para propuestas de enseñanza relativas a representación 2d-3d

La idea de la propuesta es resignificar aquellas situaciones en donde se hace posible y necesaria la acción de dibujar, dando valor a esta habilidad para el estudio geométrico. En momentos de clase, en los cuales se trabaja en torno a cuerpos geométricos, proponemos reafirmar una mirada crítica sobre la acción de representar y de interpretar representaciones de cuerpos. Ello con la intención de reconocer la importancia de la habilidad de dibujo para el conocimiento geométrico en particular y matemático en general, mejorar el desarrollo de la capacidad espacial a través de la representación bidimensional de objetos tridimensionales e interpretar de manera crítica las representaciones de cuerpos.

En cuanto al accionar docente

Otro punto neurálgico sobre el cual se ha enfocado esta línea de investigación es el de las visiones que docentes, de nivel superior de asignaturas vinculadas con la representación gráfica o su didáctica, tienen acerca de la importancia de su formación en futuros profesores en Matemática e ingenieros. Para ello se propuso a docentes, de asignaturas afines tanto del Profesorado (Geometría I y Práctica de la Enseñanza I) como de Ingeniería (Sistemas de Representación) de la Facultad, analizar la propuesta de actividades recién mencionada (Fig. 3.5). Esto con el fin de interpretar aspectos que configuren el desarrollo de habilidades específicas en la formación superior asociados con la representación bidimensional de objetos tridimensionales. La elección de las asignaturas se debió a que las mismas propician un primer acercamiento a problemáticas disciplinares o didácticas relativas a la representación de cuerpos y el abordaje geométrico espacial. Un vasto estudio sobre esto se detalló en el marco de la Beca de Investigación Iniciación a la Investigación Científica y Tecnológica, con el Plan «Las habilidades de representación y comunicación de información 3d: un estudio en la formación de Profesores en Matemática e Ingenieros», desarrollada durante el período 2015-2016.

Punteando cuestiones del modelo propuesto por Schön (1992), se reflexionó sobre los testimonios de estos docentes acerca de la representación plana en el desarrollo de contenidos geométrico-espaciales. Este autor sostiene que la reflexión –entendida como una forma de conocimiento– orienta la acción docente. Argumenta también que la praxis docente se caracteriza por la complejidad, la incertidumbre, la inestabilidad, la singularidad y el conflicto de valores. De esta forma la enseñanza comprendida como una actividad reflexiva permite ser indagada sobre sus concepciones, juicios de

valor y procesos intuitivos que influyen directamente en el ejercicio mismo de dicha actividad.

En base a la propuesta de enseñanza diseñada, preguntamos a los docentes:

- ¿Cómo ve la posibilidad de incorporar propuestas de este tipo en clases de Geometría?
- ¿Qué valor formativo percibe en las mismas?
- ¿Qué dificultades prevé en los alumnos desde el enfoque de los sistemas de representación? ¿Qué aportes podría hacer para nutrirlos?

Aunque las orientaciones profesionales del Profesorado y de las Ingenierías son diferentes, es relevante en ambas la adquisición y comprensión de sistemas de representación gráfica del espacio tridimensional para la comunicación a otros (ya sean alumnos en el primer caso o clientes en el segundo).

Los docentes entrevistados, desde su perspectiva didáctica y en cuanto a la formación geométrica que imparten, aprueban el valor formativo de incluir propuestas que fortalezcan habilidades de dibujo para la adquisición de contenidos geométricos. Asimismo reconocen que no hacen este trabajo de manera habitual, pues a la hora de ponerlo en práctica suelen avanzar con otros aspectos (como cálculo de medidas o formalización matemática, por ejemplo). También mencionan la importancia de la práctica regular de los alumnos, indispensable para afianzar las habilidades de representación y, por ende, para la adquisición de contenidos espaciales. Coinciden en que las habilidades de dibujo ayudan a complementar el trabajo geométrico aportando al desarrollo de conceptos geométricos y a la interpretación de situaciones problemáticas. El empleo del software es una herramienta muy considerada en este marco.

En el pasaje del espacio al plano (esto es, representar en forma bidimensional algo que en su naturaleza es tridimensional), proceso de eliminación de una dimensión, los entrevistados reconocen inconvenientes, atribuidos a la pérdida de información. En este aspecto coinciden en que hay que tener especial cuidado. Resulta importante identificar qué relación guarda el plano con el espacio y cuál es la información de utilidad que se quiere resguardar para un determinado trabajo geométrico.

Sobre la formación en representación, el Profesorado no se atribuye esta tarea explícitamente; si bien en algunas oportunidades se trabaja en clase, esto no forma parte de sus programas. A ello se le suma un fuerte predominio de formalización geométrica que a veces va en detrimento de la representación gráfica.

5. Conclusiones

Retomando aquella preocupación inicial acerca de cómo mejorar los modelos pedagógicos y estrategias didácticas para la enseñanza de la Geometría, nos adentramos en la formación que se ofrece en el Profesorado, con la intención de caracterizar el conocimiento necesario para la enseñanza de esta rama de la Matemática. Focalizándonos en las experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor, y más puntualmente en la asignatura donde se sientan las bases de los conocimientos disciplinares relativos a la Geometría en la carrera (Geometría I), hemos podido detectar algunas cuestiones de interés.

Por un lado, destacamos la riqueza en aspectos propios del SCK en las intervenciones del docente durante las clases relativas a Geometría Sintética. Es decir, se evidencia un importante aporte en la formación de este tipo de conocimiento en futuros profesores, principalmente al analizar las producciones de los estudiantes, las cuales parecieran haber estado influidas por las acciones del docente en las clases de Geometría.

Por otro lado, notamos que aparecen intervenciones del docente y actividades especialmente diseñadas en el apunte de clase que atienden a la construcción de significados de los conceptos matemáticos abordados en los distintos registros de representación. En este sentido se evidencia la fortaleza del subdominio *especializado* del contenido en cuanto a la diversidad de modalidades que allí se detectan al analizar las clases observadas y las actividades que se proponen en el apunte, las cuales permiten que los estudiantes desarrollen diversas habilidades, principalmente las visuales.

Lo gráfico-visual se presenta como un eje relativamente fortalecido. Si bien se realizan representaciones variadas al presentar los conceptos y se busca que los estudiantes desarrollen la habilidad de representación gráfica en la resolución de las actividades propuestas, la representación gráfica no forma parte del programa de la asignatura Geometría I (tampoco de Práctica de la Enseñanza I). Particularmente los docentes de estas materias admiten el fuerte apoyo de la formación en representación para el trabajo geométrico y aceptan que es un tema al cual no le dedican el tiempo suficiente. Advierten un fuerte predominio de formalización geométrica en el Profesorado. Por su parte, los estudiantes reconocen la utilidad de ser formados en este aspecto aunque no lo han experimentado en su formación.

Por último, resulta propicio advertir que se prevé seguir fortaleciendo esta línea de investigación con trabajos de estas características. Estamos con-

vencidas de que estudios de este tipo permiten conocer e interpretar acerca de la conceptualización del MKT en el Profesorado orientando la construcción de un currículum para la formación docente profesionalmente fundado.

6. Referencias bibliográficas

- Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alves, M., Mendonça, T. y Coletti, C. (2010). A transição Ensino Médio e Superior: a noção de retas e planos em R2 e R3. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 179-188.
- Arellano, F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 357-368.
- Arrieta, I. y Medrano, M.C. (2015). Un análisis de la capacidad espacial en estudios de ingeniería técnica. *PNA*, 9(2), 85-106.
- Atiyah, M. (2001). Mathematics in 20th Century: Geometry vs Algebra. *Mathematics Today*, 37(2), 47-49.
- Ball, D. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, 26, 3-14.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Brooks, M. (2009). Drawing, Visualisation and Young Children's Exploration of «Big Ideas». *International Journal of Science Education*, 31(3), 319-341.
- Cabello, A. B., López, R. y Sánchez, A. B. (2014). Errores de conceptos geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO: detección y metodología de corrección. *Épsilon*, 31(1), pp. s. n.
- Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, (60), 41-60.

- Chapman, O. (2015). Understanding and supporting mathematics teachers' knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 101-103.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación de profesores para enseñar geometría analítica. Estado de avance de una tesis doctoral. *Memorias de las VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática*, 315-325.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en Geometría Analítica a futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, 29(1), 141-170.
- Clausen-May, T., Jones, K., McLean, A. y Rowlands, S. (2000). Perspectives on the Design of the School Geometry Curriculum. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20(1-2), 34-41.
- Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera, M. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de mecanismos de influencia educativa. *Infancia y Aprendizaje*, 59-60, 189-232.
- Consejo Interuniversitario Nacional. (2013). *Propuesta de Estándares para la Acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática*. Buenos Aires: Autor.
- Corica, A. R. y Marin, E. A. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números*, 85, 91-114.
- Dallemole, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y Geometría Analítica: una experiencia con futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), 131-163.
- De Villiers, M. (1997). The future of secondary school geometry. *Pythagoras. Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 44(2), 37-54.
- Duque, C. y Quintero, E. (2009). Geometría intuitiva desde el cuarto de baño. *Números*, 70, 89-104.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, 44, 25-34.

- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA. Investigación e innovación en Educación Matemática*, 3(3), 193-220.
- Gutiérrez, A. (2010). Introducción al I Seminario sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 17-19). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Grossi, S. y Sgreccia, N. (2015). ¿Y si enseñamos a dibujar? *Memorias de las Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*, 4, 1-11.
- Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Enseñanza de los cuerpos geométricos en los libros de texto del ciclo básico de secundaria. *Actas de la Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 11, 64-76.
- Höffer, A. (1981). Geometry's more than Proof. *Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.
- International Commission on Mathematical Instruction. (1994). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion document for an ICMI study. *L'Enseignement Mathématique*, 40, 345-357.
- Iztcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: El Zorzal.
- Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. En B. Barton (Ed.). *Readings in Mathematics Education* (pp. 75-90). Auckland: Universidad de Auckland.
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). Londres: Routledge Falmer.
- Jones, K., Fujita, T. y Ding, L. (2006). Informing the pedagogy for geometry: learning from teaching approaches in China and Japan. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26(2), 110-114.
- Karrer, M. y Navas, S. (2013). Superfícies Esféricas: Um proposta de ensinocom o auxílio de um ambiente de geometria dinámica. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1831- 1838.
- Mammana, C. y Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.
- Ministerio de Educación de la Nación. (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario – Matemática*. Buenos Aires: Autor.

- Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada*. Santa Fe: Autor.
- Ponte, J. P. (2014). Mathematics teacher education as a multifaceted field of study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 489-490.
- Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de GeoGebra en el Aula de Matemáticas. *Números*, 88, 75-91.
- Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2017). Análisis del material de estudio utilizado en la formación en geometría sintética de futuros profesores. *Memorias de las VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática*, 274-284.
- Schaefer, L. y Sgreccia, N. (en evaluación). Enseñanza de geometría sintética a futuros profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario. *Journal of Research in Mathematics Education REDIMAT*.
- Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Barcelona: Paidós.
- Sgreccia, N. y Massa, M. (2010). Beliefs of future teachers about the teaching of solids in secondary school. *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 34(2), 104.
- Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática*, 24(3), 33-66.
- Spencer, H., Dygdon, J. y Novak, J. (2009). *Dibujo técnico* (8° ed.). México: Alfaomega.
- Villella, J. (2007). *Matemática escolar y libros de texto: Un estudio desde la didáctica de la Matemática*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

CAPÍTULO 4

GEOGEBRA: UN SOFTWARE PARADIGMÁTICO

*Gladys Brunini**
*Facundo Chirino***
*Valeria Donato****

1. Introducción

Los avances tecnológicos e informáticos tienen una fuerte incidencia en la sociedad en general y en las instituciones educativas en particular. La presencia de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la actualidad ha planteado nuevos desafíos a la educación, a la escuela y, en especial, a las prácticas de los docentes en los distintos niveles educativos. Respecto a los profesores en Matemática, por un lado, sabemos que podemos contar con diferentes recursos tecnológicos para potenciar y enriquecer las prácticas. En este sentido, reconocemos al

* Profesora en Matemática (UNR) y Especialista Docente de Nivel Superior en Educación y TIC (ME). Docente Suplente Término Fijo en la EEAT N° 36 «José Campodónico» y en el ISFD «Chajarí».

** Profesor en Matemática (UNR) y alumno de la Maestría en Práctica Docente (UNR). Docente Titular en la EESOPÍ N° 8239 «Colegio Los Arroyos».

*** Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR) y Especialista Docente de Nivel Superior en Educación y TIC (ME). Docente Titular en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España». Docente Titular en la EESOPÍ N° 3088.

GeoGebra como un software paradigmático, ya que conjuga diferentes ramas de la Matemática y ofrece múltiples plataformas potentes de uso. Por otro lado, los Diseños Curriculares vigentes proponen utilizar la resolución de problemas como eje fundamental para la enseñanza de la Matemática.

Se plantea un trabajo áulico que propicie una actividad a la manera de microsociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p. 18).

En consecuencia, las planificaciones de las secuencias didácticas deben tender a satisfacer las demandas educativas vigentes en la sociedad tecnológica actual. Este hecho interpela a las prácticas tradicionales con interrogantes del tipo: ¿pueden integrarse de manera significativa las TIC en el aula?, ¿cómo hacerlo?, ¿qué rol pueden tener las TIC en general y los softwares matemáticos en particular en la resolución de problemas?, ¿cuál es el potencial del software GeoGebra?, ¿cómo aprovechar ese potencial para las prácticas de docentes en Matemática?

Entre los objetivos específicos del segundo tramo de ejecución del Proyecto de Investigación: «Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática» (1ING445-19/I436, 2014-2017), se encuentra: reconocer modos propicios de acompañamiento, capacitación y formación de profesores en Matemática, que contribuyan a la continua resignificación y construcción de su conocimiento profesional y empoderamiento docente. En consonancia con esta línea de acción, se desarrolló en marzo del 2016, en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, por intermedio de la Escuela de Posgrado y Formación Continua, el Curso: «Conocimiento tecnológico-pedagógico-matemático. El GeoGebra como caso paradigmático». Además, en septiembre del 2016, en el marco de la XII Conferencia Argentina de Educación Matemática, se llevó a cabo el Taller: «Uso del GeoGebra como profesor en Matemática». Ambos eventos se destinaron a profesores en formación y en ejercicio con interés en integrar software educativo a sus prácticas de enseñanza de la Matemática. Todo ello teniendo en cuenta que tal integración, para que tenga lugar de manera significativa, debe trascender el lugar de «agregado» a la enseñanza tradicional, replanteando la pedagogía puesta en escena y la disciplina en tratamiento.

Los objetivos planteados en los dos eventos, propendieron a que los asistentes puedan aproximarse a:

- reconocer posibilidades didácticas de un software educativo matemático (GeoGebra);
- resolver problemas matemáticos empleando GeoGebra;
- explorar ciertos problemas cuya resolución se dificulta utilizando solo lápiz y papel;
- analizar posibilidades y limitaciones del software;
- desarrollar criterios docentes para el empleo de software educativo en las clases de Matemática.

Cabe destacar que el Curso se desarrolló en cuatro clases de 3 hs. reloj de duración cada una y que el Taller se planificó sobre el formato del Curso con 2 hs. reloj de duración total.

Al Curso asistieron 20 personas (14 estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática de la Facultad de referencia y los restantes seis alumnos de la Maestría en Didáctica de las Ciencias de la misma institución). En cuanto al Taller, asistieron 21 personas, entre ellos 13 estudiantes de Profesorado en Matemática, y los asistentes restantes manifestaron contar con estudios de Posgrado completos. Entre estos últimos, se encontraron representantes de Universidades de Brasil, Chile y Perú.

2. Encuadre teórico

En cuanto a la formación de profesores, Valverde, Garrido y Fernández (2010) destacan la complejidad y multidimensionalidad de «buenas» prácticas educativas con TIC. Con el objetivo de propiciar ese tipo de prácticas, adoptamos el modelo teórico de *conocimiento matemático para la enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008) en lo concerniente a conocimiento profesional docente. En esta instancia, al integrarlo con las TIC, lo conjugamos con el modelo teórico del *conocimiento tecnológico pedagógico del contenido* (TPCK; Mishra y Koehler, 2006). Ambos sientan sus bases en Shulman (1986), quien advirtió sobre un tipo especial de *conocimiento* que los profesores poseen: *didáctico del contenido*.

La articulación de las relaciones entre Contenido Curricular, Tecnología y Pedagogía es la base del modelo teórico TPCK (por sus siglas en inglés, *Technological Pedagogical Content Knowledge*). El mismo propone una in-

tegración de las TIC para la buena práctica educativa que fue formulado por Mishra y Koehler (2006).

El *TPCK* supone que integrar las TIC en las clases implica no solo conocer las herramientas, sino también «reacomodar» las prácticas; esto es, revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares cuando se incluye tecnología. Entonces, cabe preguntar: ¿qué saberes o contenidos se consideran que debe conocer y/o poner en juego un docente a la hora de realizar sus planificaciones desde esta nueva óptica? En el modelo se consideran tres tipos de conocimientos: Conocimiento Curricular, Conocimiento Pedagógico y Conocimiento Tecnológico. Por sus siglas en inglés son *CK*, *PK* y *TK*, respectivamente. Este modelo considera cada uno de estos conocimientos de manera aislada, pero también por pares (*PCK*: conocimiento pedagógico del contenido; *TPK*: conocimiento tecnológico pedagógico; *TCK*: conocimiento tecnológico del contenido) y los tres en conjunto (*TPCK*), como se muestra en la Fig. 4.1.

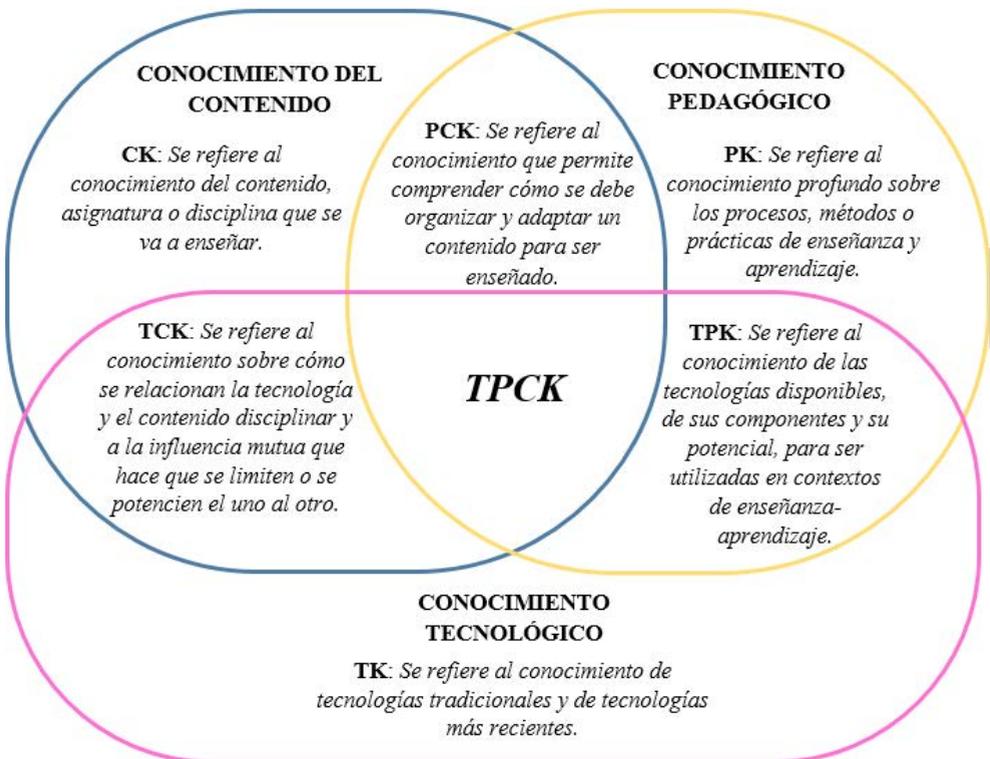


Figura 4.1. Modelo TPCK (Mishra y Koehler, 2006)

Los profesores no solo necesitan desarrollar una flexibilidad cognitiva para cada uno de estos conocimientos básicos (*CK*, *PK*, *TK*), sino también en la manera en la que estos dominios interactúan, de modo que puedan encontrar soluciones que sean sensibles a los contextos específicos. En otras palabras, se debe contemplar que cada diseño de una clase de Matemática con TIC implica una toma de decisiones, en lo referido a lo curricular, pedagógico y tecnológico que están íntimamente entrelazadas (Fig. 4.2).

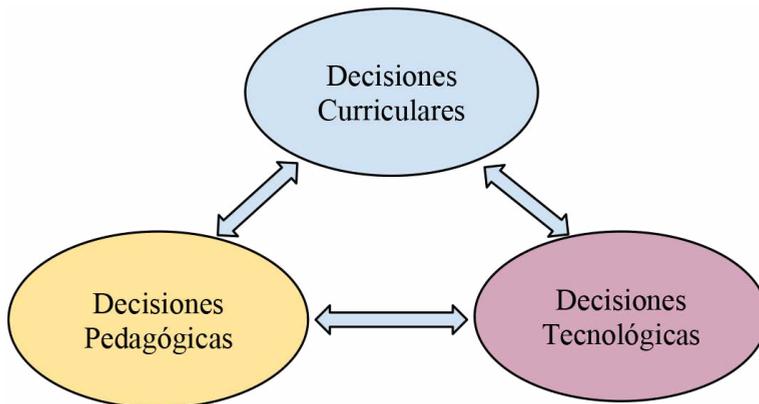


Figura 4.2. Decisiones al diseñar una clase con TIC

Enseñar eficazmente con tecnología requiere continuamente crear, mantener y restablecer un equilibrio dinámico entre cada componente.

El diseño de las secuencias didácticas juega un rol fundamental en la construcción de escenarios en donde resulte posible la aplicación del modelo *TPCK*. Las actividades matemáticas que componen tales secuencias condicionan o invitan a que los estudiantes realicen ciertas acciones, de acuerdo a la forma en que estén redactadas las consignas, otorgándoles mayor o menor libertad en sus procedimientos. Siguiendo a Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se pueden describir tres grandes aspectos de actividades que podrían considerarse como matemáticas: «utilizar matemáticas conocidas, aprender y enseñar matemáticas, crear matemáticas nuevas» (p. 54). Por otra parte y en consonancia con este tipo de actividades, tomamos los aportes de Díaz y Poblete (2001), quienes clasifican a los problemas en rutinarios y no rutinarios. Los problemas no rutinarios pueden utilizarse para «crear» Matemática, promoviendo que los estudiantes desarrollen sus habilidades de planificación, construcción de esquemas de

interpretación y acción, así como su capacidad para elegir una estrategia adecuada en la búsqueda de solución a un problema. Este tipo de problemas no centra su atención ni en la aplicación ni en la construcción de contenidos, sino en los procesos de resolución que desarrollan los alumnos. En este contexto suelen plantearse problemas denominados «abiertos», ya que no tienen respuesta única, permiten multiplicidad de caminos o esquemas de resolución, y llevan a diversas respuestas válidas para las condiciones de la situación propuesta.

Cabe destacar que en ambas instancias de formación (Curso y Taller), se generaron espacios de análisis y reflexión acerca de diferentes tipos de enunciados de actividades matemáticas, a partir de la lectura de las consignas y exploración de resoluciones posibles. De nuestra parte decidimos especialmente proponer problemas abiertos, dado que consideramos que estimulan actividades propensas a la «creación de matemáticas nuevas» (Chevallard et al., 1997). El objetivo fue que los asistentes puedan tomar contacto, a partir de sus propias vivencias, con el potencial que ofrece la resolución de problemas no rutinarios y el rol que pueden ocupar las TIC en tal proceso. En particular, nos basamos en problemas propuestos a docentes en el marco de la Especialización Docente de Nivel Superior en Educación y TIC del Ministerio de Educación de la Nación (Pochulu, 2013-2015).

Por diversos motivos, a veces en las carreras de formación docente se hace mención de la existencia de TIC pero no se enfatiza lo suficiente en el diseño de actividades donde los aprendizajes son potenciados a través de la utilización de algunos de esos recursos, tales como el software GeoGebra. La posibilidad de que los asistentes (tanto al Curso como al Taller) experimenten en primera persona y en conjunto con sus pares permite resignificar el impacto acerca de lo que cualquier teoría puede enunciar. Consideramos, además, que resulta crucial vivir las experiencias como alumnos, dado el rol constitutivo de la biografía escolar en las prácticas docentes. Por ello, diseñamos actividades en las que los asistentes pudieran habitar el rol de estudiante desde la perspectiva que propone el *TPCK*.

También nos propusimos que exploren problemas que consideramos adecuados para propiciar «buenas» prácticas educativas con TIC. Además de propender espacios de socialización e intercambio de ideas en diferentes instancias de los procesos resolutorios, se solicitaron narrativas acerca de lo transitado al abordar algunos problemas, enfatizando la toma de conciencia

del propio accionar cognitivo y metacognitivo que una cierta actividad estaba poniendo en juego. En efecto, coincidimos con Jorba, Gómez y Prat (2000) en que:

Tomar conciencia de los propios procesos de elaboración del conocimiento y apropiación de la cultura facilita el progreso porque permite situarse de manera activa delimitando los objetivos, pidiendo ayuda si es necesario y estudiando las estrategias y los procedimientos más adecuados para conseguir las metas de aprendizaje y los resultados esperados. Hace posible por tanto, la autorregulación. Metacognición y autorregulación incrementan la eficacia de los aprendizajes y progreso en el desarrollo para la toma de conciencia (p. 28).

De esta manera se estimula la capacidad reflexiva, que consideramos indispensable en el ejercicio de la profesión docente.

En particular las actividades propuestas en las instancias formativas, procuraron poner en situación a los asistentes para que vivencien de manera protagónica un modo de hacer Matemática. En ese «hacer» es posible volver sobre algunos saberes aprendidos y empezar a gestar una visión prospectiva acerca de la incorporación de las TIC en la implementación de la estrategia didáctica de enseñar a través de la resolución de problemas.

3. El GeoGebra

Existe una gran oferta de software destinado al quehacer matemático, pero se decidió utilizar al GeoGebra por las bondades que ofrece el mismo. Presenta una interesante versatilidad en la accesibilidad, tanto en lo referido a los dispositivos electrónicos como para el usuario, desde un nivel de principiante hasta experto. Además de ser un software de carácter abierto y gratuito, proporciona herramientas que propician el trabajo con una geometría dinámica, superando las limitaciones de utilizar tan solo lápiz y papel.

En la página del GeoGebra <https://www.geogebra.org/> (Fig. 4.3) se pueden visualizar distintas opciones.



Figura 4.3. Captura de pantalla del sitio

Es posible acceder a la versión online (GeoGebra Clásico) o descargarlo tanto en su versión clásica, que incluye la posibilidad de graficar en 3D, como en su versión Calculadora Gráfica. El software es compatible con variadas plataformas, por lo que puede utilizarse en diversos dispositivos.

En el sector Recursos se puede observar una enorme cantidad de propuestas y secuencias didácticas generadas y publicadas por los usuarios de todo el mundo. Se comparten a través del programa, en su versión online o local. Pueden ser consultadas y descargadas libremente. En otras palabras, en la comunidad GeoGebra se gesta una red vasta y rica de recursos para abordar diferentes contenidos matemáticos (o de ciencias afines). Esto se refuerza con un aspecto interesante que son los Institutos que funcionan en diferentes países. Los mismos pertenecen a la red *International GeoGebra Institute* y trabajan junto con Institutos de GeoGebra independientes de carácter regional. Estos están distribuidos en el mundo de la siguiente manera: Europa 57, Asia 45, África 6 y Australia 1. En América hay 33, de los cuales 12 están ubicados en América del Norte, 5 en América Central y en Sudamérica 16: Brasil 6, Chile 2, Colombia 1, Uruguay 1 y en nuestro país 6.

4. Modalidad de trabajo

Los ejes del trabajo consistieron en:

- Diseño de actividades de enseñanza con software, mediante las que se procura hacer emerger criterios docentes, a partir del trabajo con ejemplos y contraejemplos de propuestas que aprovechan las tecnologías.
- Resolución de problemas matemáticos con software, con el fin de concientizar a los asistentes acerca de las etapas necesarias en el proceso de resolución y de la importancia para el aprendizaje, de la manifestación tanto de los aciertos como de los desaciertos en dicho proceso.
- Conocimiento pedagógico del contenido y la tecnología, en términos del encuadre teórico *TPCK*, con la intención de resignificar criterios docentes en diálogo con referentes teóricos.

En los distintos encuentros, se planificó trabajar cada uno de estos pilares, con el fin de propiciar en los asistentes una transformación en sus conocimientos profesionales relativos a la integración de un software educativo matemático (GeoGebra) en sus prácticas docentes. Nos propusimos fortalecer en los participantes una mirada del GeoGebra que procure superar esquemas en términos tecnicistas o simples ejemplificaciones de una teoría dada en clase. Para favorecerla apostamos a generar situaciones movilizantes, que posibiliten que los asistentes pasen por diferentes grados de sensaciones al abordar las actividades planteadas. En efecto, acompañado a este trabajo interactivo con el GeoGebra, se dispusieron dispositivos con la intención de promover la reflexión por parte de los asistentes con dos trabajos prácticos grupales y puestas en común en cada clase. Cada trabajo práctico constó de dos etapas: la exploración para arribar a algún resultado del problema planteado y una narrativa contextualizada de lo experimentado durante el proceso de búsqueda de dicho resultado. En articulación con esto, se contemplaron momentos para devoluciones desde una mirada cualitativa, acerca de las producciones de los trabajos prácticos, abarcando tanto la resolución del problema como la narrativa de lo experimentado.

Un par de días antes de dar comienzo al curso, fue enviado por mail un cuestionario a cada participante, que debían responder antes del primer encuentro. El mismo apuntó básicamente a conocer el nivel de utilización, conocimientos y expectativas acerca de la inclusión del GeoGebra en las clases y acerca del Curso. El cuestionario y todo el material utilizado en el taller estuvo a disposición de los asistentes en la plataforma e-educativa.

Para el primer encuentro que denominamos «Los primeros pasos», se compartió un encuadre del GeoGebra en tanto recurso paradigmático y también se propusieron cinco problemas (tres abiertos y dos con consignas más pautadas) para que, por equipos, de a dos personas pudieran analizarlos. La decisión de esta propuesta se basó en las oportunidades/limitaciones que cada problema promueve para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos, en particular empleando el software. Acompañando a lo anterior, se buscó que los participantes elaboren criterios para abordar una actividad con GeoGebra. Y como cierre, que cada equipo realice el primer trabajo práctico (TP1).

En el segundo encuentro («Manos al GeoGebra») se trabajó en equipos de a dos con el GeoGebra para la búsqueda de posibles respuestas a problemas abiertos (uno de Cálculo y otro de Geometría). El objetivo estuvo centrado en el quehacer matemático, con la expectativa de vislumbrar el potencial que brinda el software al mostrar una Matemática dinámica, que en este caso ofrece ciertas ventajas respecto a trabajar con recursos tradicionales (lápiz y papel; tiza y pizarrón). En esta instancia, la tarea de los docentes se enfocó en realizar un seguimiento más personalizado de los equipos para poder acompañar sus exploraciones. Cabe destacar que los docentes ya habíamos explorado y compartido entre nosotros las resoluciones de los problemas propuestos. Posteriormente se propuso un momento intermedio en el que se socializaron las conjeturas y/o los resultados de las características/propiedades analizadas hasta ese momento. Se compartieron las impresiones, observaciones y ensayos, en torno al tratamiento que cada grupo le dio al problema con el que trabajó. Los docentes procuramos aportar sugerencias e intervenciones para que los intercambios se complementen e impulsen a que los asistentes reflexionen acerca de las fortalezas y debilidades de los caminos que eligieron. Luego los asistentes volvieron a trabajar para afinar y profundizar lo analizado, con el objetivo de enunciar alguna conjetura, que posteriormente debían intentar validar mediante una demostración formal. Sobre el final del encuentro se propuso otra puesta en común. En esta instancia, los equipos compartieron los enunciados de las conjeturas planteadas y manifestaron el grado de avance respecto a la demostración formal de las mismas. En la Fig. 4.4 se sintetizan las diferentes etapas que fueron atravesando los asistentes en la modalidad de trabajo propuesta:

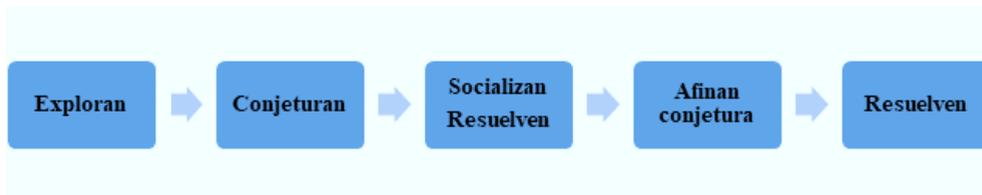


Figura 4.4. Etapas transcurridas en la resolución de problemas con GeoGebra

Similar al cierre de la primera clase, se propuso la realización del segundo trabajo práctico (TP2), en este caso con el objetivo de realizar una narrativa acerca del proceso de abordaje del problema asignado en el segundo encuentro.

Para el tercer encuentro («Encuadre teórico») se pauteó, en primer lugar, realizar una devolución del TP1 y luego presentar, desarrollar y analizar el modelo *TPCK*. También se propuso a los asistentes un octavo problema con la intención de promover reflexiones en clave del *TPCK* acerca del tipo de decisiones que implica la selección de una actividad matemática para trabajar en clase empleando TIC. A su vez, se les propuso que comenzaran a pensar en la elaboración de un problema nuevo o re-elaboración de un problema trabajado en el Curso para implementar con sus alumnos o futuros alumnos, como instancia de síntesis integral de lo trabajado en los encuentros. Es decir, se trató de una actividad usando el GeoGebra que deberían exponer y defender como Trabajo Final (TF), en la cuarta y última clase («Defensa del trabajo final»). En el último encuentro se desarrolló una devolución del TP2 y, luego de las defensas de los TF, se realizó el cierre del Curso, que incluyó la aplicación de un Cuestionario final.

5. Los problemas

Con base en Pochulu (2013-2015), propusimos ocho problemas.

Como se mencionó anteriormente, en el primer encuentro se planteó la exploración de cinco problemas usando el GeoGebra (Fig. 4.5 a 4.9), con el objetivo de que los asistentes noten semejanzas y contrastes entre los primeros dos problemas respecto a los tres restantes. Las consignas se compartieron a través de cinco archivos de GeoGebra.

Contesten las siguientes cuestiones:

- 1- ¿Qué ocurre si $a=0$ y los otros parámetros son distintos de cero? ¿Qué se obtiene?
- 2- ¿Qué ocurre si $b=0$ y los otros parámetros son distintos de cero?
- 3- ¿Qué ocurre si $c=0$ y los otros parámetros son distintos de cero?
- 4- ¿Y si $b=0$ y $c=0$?
- 5- Busquen la expresión de una parábola que corte al eje Y en $(0,-2)$ y al eje X en $(-2,0)$ y $(1,0)$, con las ramas hacia arriba. Y otra con las ramas hacia abajo.

Entrada:

Figura 4.5. Primer problema (P1) propuesto en el Curso

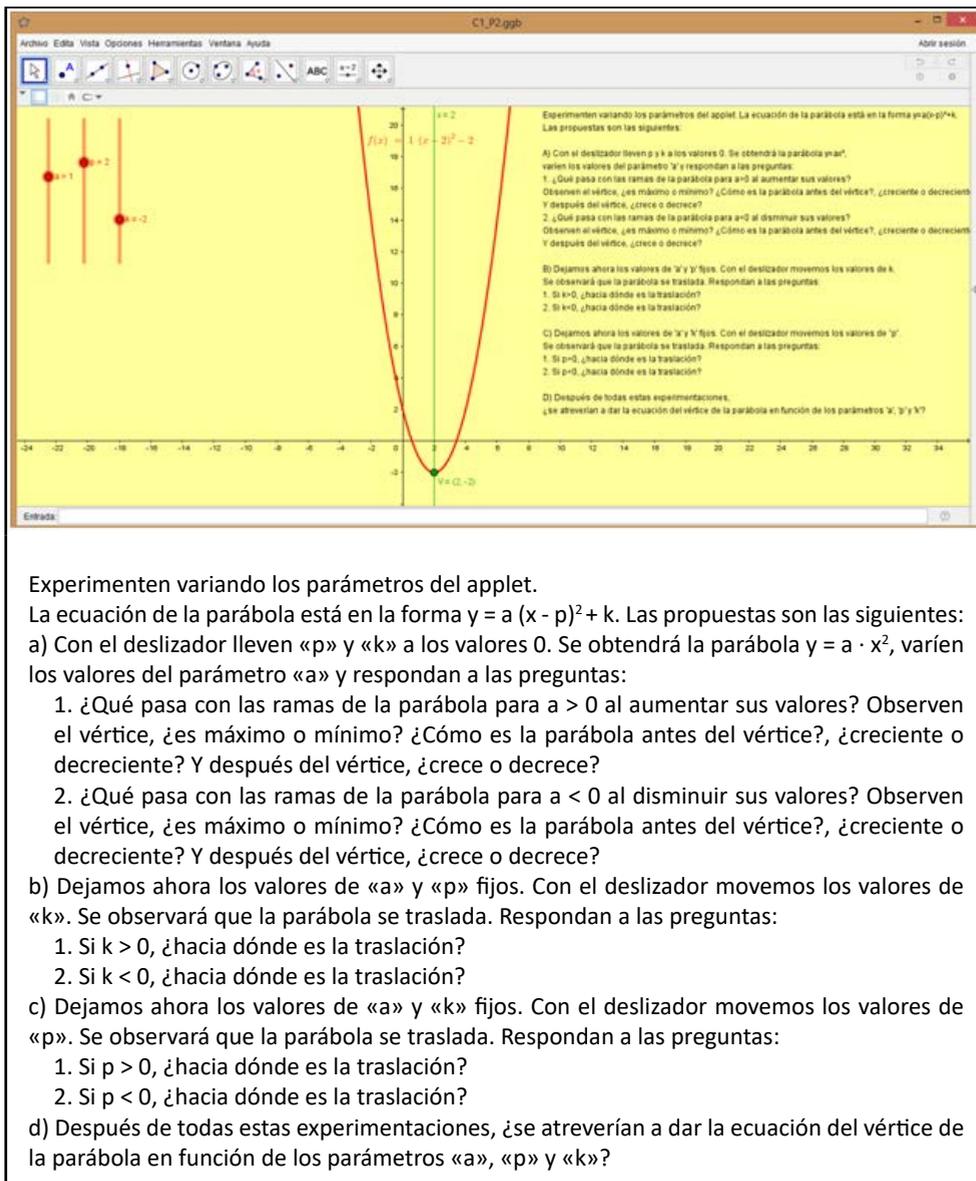
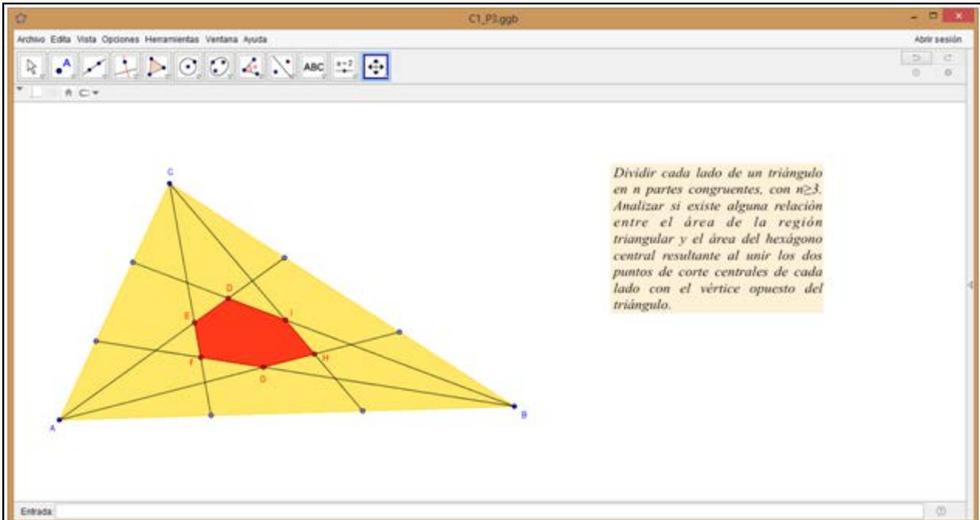
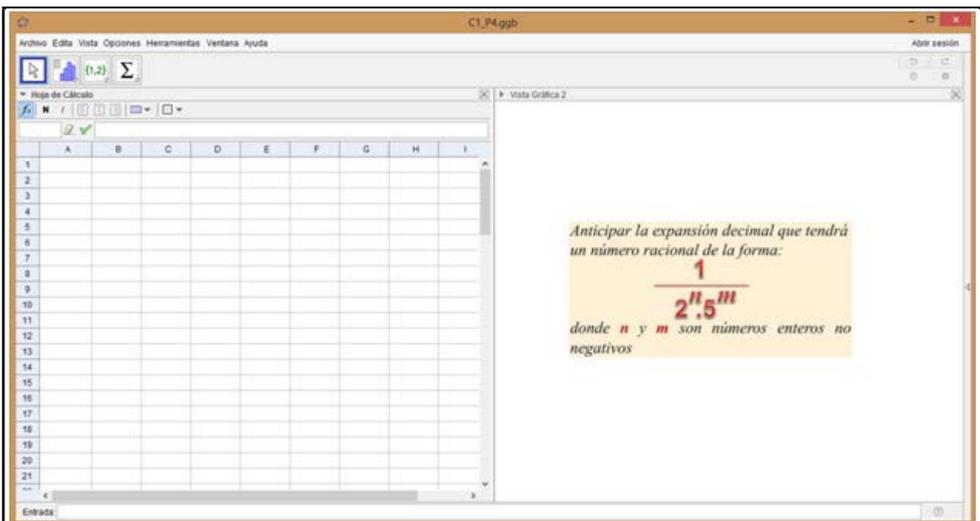


Figura 4.6. Segundo problema (P2) propuesto en el Curso



Dividir cada lado de un triángulo en n partes congruentes, con $n \geq 3$. Analizar si existe alguna relación entre el área de la región triangular y el área del hexágono central resultante al unir los dos puntos de corte centrales de cada lado con el vértice opuesto del triángulo.

Figura 4.7. Tercer problema (P3) propuesto en el Curso



Anticipar la expansión decimal que tendrá un número racional de la forma:

$$\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$$

donde n y m son números enteros no negativos

Figura 4.8. Cuarto problema (P4) propuesto en el Curso

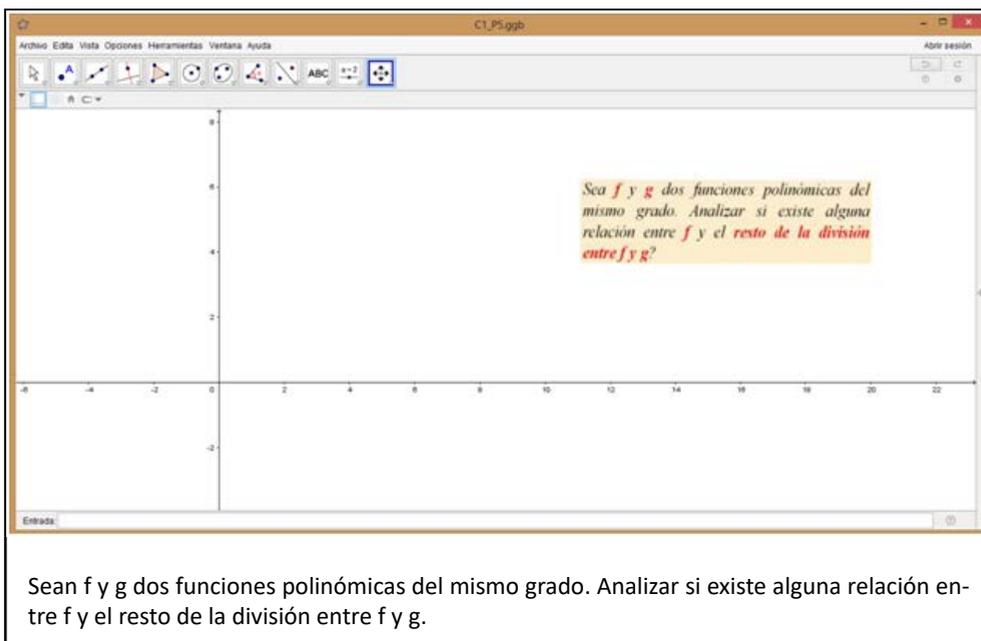


Figura 4.9. Quinto problema (P5) propuesto en el Curso

En el encuentro «Manos al GeoGebra», se plantearon los siguientes problemas (Fig. 4.10 y 4.11) con la intención de que los asistentes vivencien en primera persona, procesos resolutivos de actividades con consignas abiertas.

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir las bisectrices de los ángulos interiores del ABCD.
Analizar características y propiedades que se pueden anticipar del EFGH si se conocen las características y propiedades del ABCD.
Enunciar al menos una conjetura a partir de lo analizado en el punto anterior.
Demostrar o aproximar una demostración formal de alguna conjetura enunciada.

Figura 4.10. Sexto problema (P6) propuesto en el Curso

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c representan números reales y $a \neq 0$.

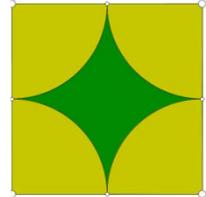
- Describir las características gráficas de la familia de curvas que resultan de variar solo el parámetro b .
- Enunciar al menos una conjetura a partir de lo analizado en el punto anterior.
- Demostrar o aproximar una demostración formal de alguna conjetura enunciada.

Figura 4.11. Séptimo problema (P7) propuesto en el Curso

En el tercer encuentro se propuso el octavo problema (Fig. 4.12) con la intención de analizar, a partir del mismo, los distintos tipos de decisiones que se encuentran involucradas en la elección de las actividades que se pretenden llevar al aula. El objetivo fue vincular lo analizado con el modelo *TPCK*.

En un prado cuadrado de 100 metros de lado, hay cuatro cabras. Cada cabra está atada en una esquina del prado con una cuerda de 50 metros, lo que le permite comer una cierta parte de la hierba. No obstante, queda una zona del prado que ninguna de ellas puede alcanzar. El propietario, tras vender tres de las cabras, desea que la restante pueda pastar en un área equivalente a la que pastaban anteriormente las cuatro cabras. Luego de pensarlo detenidamente, se le han ocurrido algunas ideas:

1. Alargar la cuerda de la cabra, dejándola atada en una de las esquinas del prado, pero ¿qué longitud le tendría que dar a la cuerda?, ¿cuál es el área con hierba que quedaría en el prado a la cual la cabra no podría llegar?
2. Atar la cabra a un poste que se encuentre ubicado en el centro del prado. Nuevamente, ¿qué longitud debería darle a la cuerda?
3. Dividir el prado en dos partes y dejar a la cabra para que pascie en uno de ellos. En este caso, ¿cómo podría hacerse la división?
 - a) Les proponemos que ayuden al propietario de la cabra a decidir cuál de todas estas alternativas podría resultar la más conveniente. Además, se tienen sospechas de que podrían existir otras alternativas que también resulten apropiadas. ¿Cuál/es podrían sugerir?
 - b) Si el prado no tuviera exactamente la forma de un cuadrado, sino que se tratara de un cuadrilátero con diagonales distintas, aunque cortadas por su punto medio, ¿seguirán siendo válidas las conclusiones obtenidas en el ítem anterior?



Para analizar:

1. ¿Qué decisiones curriculares se tomaron?
 - ¿Cuál o cuáles son los contenidos desarrollados en dicha actividad, de acuerdo al diseño curricular?
 - ¿Qué objetivos de aprendizaje se pretenden lograr?
 - ¿Qué conocimientos previos se deben tener en cuenta?
2. ¿Qué decisiones pedagógicas se tomaron?
 - ¿Qué tipo de actividad es la propuesta?
 - ¿Qué rol cumple el docente?, ¿y los alumnos?
 - ¿Qué producto final se prevé obtener?
 - ¿Se planearon estrategias de evaluación?
3. ¿Qué decisiones tecnológicas se tomaron?
 - ¿Qué necesidades pedagógicas se establecieron para seleccionar el recurso tecnológico utilizado?
 - ¿Qué recurso tecnológico fue el usado?
 - ¿Cómo se planeó la utilización del recurso?

Figura 4.12. Octavo problema (P8) propuesto en el Curso

6. Procesos de resolución a través de narrativas

Las devoluciones del TP1 estuvieron basadas en diferentes aspectos que se detectaron en las narrativas de los asistentes al Curso, en relación con el proceso de resolución del P5. Los mismos abarcaron las variadas opciones que ofrece el software (vistas previas, comandos y herramientas), los procedimientos puestos en juego al momento de dar respuesta a la consigna, como también las posibles conjeturas a las que arribaron y los sentimientos y sensaciones que experimentaron durante el desarrollo de la actividad (Tabla 4.1).

Tabla 4.1. Elementos constitutivos de las narrativas relativas a las resoluciones del P5

Procedimientos	Vistas exploradas
<ul style="list-style-type: none"> • Papel: planteos, exploraciones, resoluciones y/o verificaciones. • Utilización del algoritmo de la división entre polinomios. • Gráfica de polinomios con GeoGebra para intentar «ver» alguna regularidad. • Búsqueda de ayuda (inicio rápido, manual, online). • Consulta de material de estudio. • Exploración de casos con grados 1, 2 y 3. • Ensayos de prueba y error para ajustar/descartar utilización de comandos. • Búsqueda de contraejemplos y/o verificaciones de conjeturas. • Varios intentos, en varias sesiones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Gráfica 2d. • Algebraica. • Hoja de cálculo. • Cálculo simbólico.
Comandos y herramientas del GeoGebra	
<ul style="list-style-type: none"> • División (de polinomios): devuelve el cociente y el resto. • Resto entre polinomios: devuelve y grafica el resto de dividir dos polinomios. Puede utilizarse con coeficientes abstractos. • Deslizadores para coeficientes y exponentes. • Polinomio Aleatorio: devuelve un polinomio según el grado indicado. • Intersección entre curvas. • Suma con variable, índices, principio y fin (efecto sumatoria). • Deslizadores con animación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de áreas. • Simplifica. • Cociente entre funciones polinómicas. • Relación entre objetos. • Relaciones. • Análisis de funciones.

Conjeturas y hallazgos
<ul style="list-style-type: none"> • Grado del resto menor al grado de f o $r = 0$. • El grado de r es a lo sumo uno menos que el grado de g. • r es de un grado menos que f. • f y r no son iguales. • f y r se cortan en un único punto. • Si dividimos dos funciones polinómicas f y g de igual grado y distintas, entonces existe algún entorno en el cual f y r son próximas. • Determinación de los coeficientes de r en función de los de f y g.
Sentimientos y sensaciones
<ul style="list-style-type: none"> • Frente a la consigna: desorientación, desconcierto, cuestionamiento (acerca de la complejidad y el ámbito de aplicación, ¿qué significa «relación»? ¿cuál es el propósito de la actividad?). Condicionamiento por la forma en la que se presenta (en software, con ejes). ¿Quiero resolver un problema o dar respuesta a una consigna de un curso? • Al no obtener resultados deseados: frustración, desánimo, enojo, cuestionamiento acerca de su aprendizaje, huida. • Al obtener resultados deseados: felicidad. • Frente a la exploración del software: entusiasmo, ansiedad, desorientación.

Notamos que los asistentes buscaron diferentes y variadas herramientas del software a partir de la necesidad de resolver un problema cuya resolución resulta dificultosa a través de medios tradicionales. En las narrativas advertimos que describieron con detalle cada momento que estuvieron frente al P5. Si bien predominó una beta más descriptiva en el relato, también pudieron manifestar sentimientos y sensaciones.

Observamos que, en general, los asistentes mostraron la imperiosa necesidad de encontrar una respuesta a la consigna priorizando la generalidad y regularidad. Solo una asistente consiguió dar una respuesta (con la demostración de su conjetura) para el caso más general. Se le solicitó, además, que compartiera su trabajo con el resto de los participantes. Habilitar esta instancia permitió vivenciar un momento enriquecedor para todos los presentes. Por otro lado, comentamos a los asistentes algunas alternativas de abordaje que pueden permitir aprovechar el enunciado dándole un contexto más específico. Por ejemplo, considerar un grado particular para ambas funciones y encontrar regularidades en ese caso. También destacamos que, más allá del resultado arribado, todos los procesos que entraron en juego durante la búsqueda de alguna respuesta resultaron valiosos.

En cuanto a las narrativas de los P6 y P7, advertimos que las reacciones y posturas frente a la propuesta de resolver un problema con consigna abierta cambiaron notoriamente respecto a lo observado en el primer encuentro.

No se evidenciaron indicios de rechazos a las propuestas. Para la devolución del TP2 se contemplaron los mismos aspectos que en el trabajo práctico anterior (Tabla 4.2).

Tabla 4.2. Elementos constitutivos de las narrativas relativas a las resoluciones de los P6 y P7

Procedimientos		Vistas exploradas
<ul style="list-style-type: none"> • Papel: planteos, exploraciones, resoluciones y/o verificaciones. • Varios intentos, en varias sesiones. • Graficar. • Observar y analizar. • Describir características y relaciones. • Explorar regularidades/invariantes. • Buscar contraejemplos. • Enunciar conjeturas. • Validar con el GeoGebra. • Demostrar formalmente. 		<ul style="list-style-type: none"> • Gráfica 2d. • Algebraica. • Hoja de cálculo. • Con cuadrícula y sin cuadrícula. • Ocultando o no los ejes. • Coloreando figuras. • Ocultando etiquetas y objetos auxiliares para clarificar la vista.
Comandos y herramientas del GeoGebra		
P6		P7
<ul style="list-style-type: none"> • Polígono. • Segmento. • Bisectriz. • Mediatriz. • Intersección. • Ángulo (indica y mide). • Punto. 		<ul style="list-style-type: none"> • Deslizadores. • Función cuadrática. • Punto (vértice de la parábola). • Rastro: en punto (vértice) y en gráfica (parábola). • Lugar geométrico. • Ecuación Lugar Geométrico (arrojó errores). • Recta. • Segmento.
<ul style="list-style-type: none"> • Texto. • Cálculo de áreas con tabla. • Mover: variaciones en las figuras. • Rectas. • Cónicas. 		

Conjeturas y hallazgos del P6
<ul style="list-style-type: none"> • Si el cuadrilátero ABCD es rectángulo entonces el cuadrilátero EFGH es un cuadrado. • Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las bisectrices de sus ángulos interiores determinan el cuadrilátero convexo EFGH. Entonces, los ángulos interiores opuestos de EFGH son suplementarios. • Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las bisectrices de sus ángulos interiores determinan el cuadrilátero convexo EFGH. Entonces, cada ángulo interior de EFGH es el promedio de los ángulos interiores de ABCD cuyas bisectrices generan el ángulo opuesto a aquel. • Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, un rombo o un romboide, entonces las bisectrices se cortan en un único punto, o sea que $E = F = G = H$. • Si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces el cuadrilátero EFGH es un rectángulo. • Si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, entonces el cuadrilátero EFGH es un romboide. • Si un cuadrilátero convexo ABCD tiene dos pares de lados consecutivos congruentes entonces las bisectrices de sus ángulos interiores se intersecan en un único punto. • Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las bisectrices de sus ángulos interiores determinan el cuadrilátero convexo EFGH. Entonces, las mediatrices de los lados de EFGH se intersecan en un punto. • Si ABCD es un cuadrilátero convexo tal que las bisectrices de sus ángulos interiores determinan el cuadrilátero convexo EFGH, entonces EFGH es inscriptible. El centro de la circunferencia que lo circunscribe es la intersección de las mediatrices de sus lados. • Conjeturas recíprocas según la forma.
Conjeturas y hallazgos del P7
<ul style="list-style-type: none"> • Dada una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c reales, y $a \neq 0$, la gráfica que describen los vértices de la familia de parábolas, que se obtienen al variar el parámetro b, es una parábola cuya ley es: $g(x) = -ax^2 + c$. • Los vértices obtenidos de la familia de curvas formada por las gráficas de las $f_b(x)$, $\forall b \in R$ coinciden con el lugar geométrico de una parábola $g(x)$ cuya concavidad es opuesta. • Las gráficas que obteníamos eran todas con la misma concavidad, siendo todas traslaciones de la original. • El punto $(0, c)$ está contenido en todas las parábolas. • Si el parámetro b es negativo el vértice de las parábolas se encuentra en el primero o cuarto cuadrante. • Para que el vértice quedara sobre el eje x, la relación que debía haber entre el coeficiente principal, el coeficiente lineal y el término independiente debía ser la siguiente: $b = \pm 2\sqrt{a \cdot c}$, siempre que $a \cdot c > 0$.

Sentimientos y sensaciones
<ul style="list-style-type: none">• Frente a la consigna: casi no hubo comentarios al respecto. Excepcionalmente se describieron intentos de interpretarla, en su significado y también en nuestras expectativas e intenciones relativas a ella.• Al no obtener resultados deseados: frustración e insatisfacción. Sensaciones que funcionaron como motores de nuevas búsquedas y no desencadenaron en enojo o abandono o cuestionamientos de la actividad.• Al obtener resultados deseados: no hubo comentarios puntuales, salvo la insatisfacción por pretender abordar otro tipo de conjetura quizás más general.• Frente a la exploración del software: entusiasmo, sorpresa, posicionamiento similar al que tendrían los alumnos.

En la mayoría de los casos, los participantes detallaron y/o exploraron más de una relación observada y todos pudieron enunciar una conjetura, así como también abordar su demostración, que por lo general fue satisfactoria. En varias narrativas se destacaron que las instancias de puestas en común promovieron ajustes y/o modificaciones en los enunciados o posibilitaron nuevos caminos a explorar. También se puso de manifiesto el uso de nuevos comandos de GeoGebra, con exploraciones del software, desde un posicionamiento más autónomo y a través del uso del aplicativo para tratar de resolver el problema en cuestión. Hubo consultas con los docentes en la segunda clase, pero no surgió la necesidad de buscar en manuales y/o tutoriales herramientas adecuadas, como sucedió en el TP1. El foco de atención estuvo en resolver un problema matemático y el GeoGebra pudo convertirse en una herramienta útil para ello, a pesar de que aún el aprendizaje de sus comandos y posibilidades estuviera en pleno proceso.

7. Criterios docentes para emplear TIC

Luego de la exploración de los cinco problemas en la primera clase se efectuó una lluvia de ideas (Fig. 4.13) con el fin de hacer emerger ciertos criterios. Se tuvieron en cuenta variables como: semejanzas y diferencias entre la propia solvencia experimentada en los problemas; el arribo a las respuestas (o aproximaciones a las mismas) de los planteos de cada problema; la calidad de los procesos puestos en juego para la resolución de los problemas; la redacción de los enunciados; los tipos/cantidad de preguntas; la apertura a un pensamiento autónomo del estudiante vs. la conducción sobre la forma de pensar del estudiante; la bondad del uso del software vs. la dificultad del lápiz y papel para ciertos problemas; influencia y colaboración del docente para la resolución de la actividad.

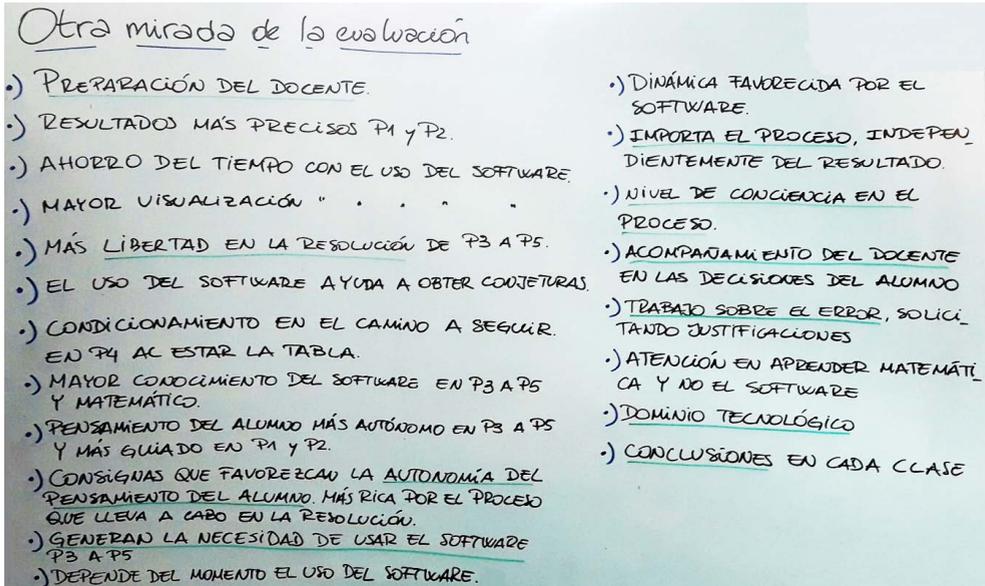


Figura 4.13. Lluvia de ideas acerca de consideraciones relativas a la resolución de problemas con TIC

A partir de la lluvia de ideas se pudo analizar el sentido y alcance de los siguientes criterios para la confección de enunciados e intervención docente para propiciar «buenas» prácticas educativas con TIC:

- Que la actividad no sea cerrada, es decir, que admita más de una única resolución.
- Que la actividad no brinde más información de la que se necesita para resolverla, es decir, no dar ayudas o aclaraciones de entrada sobre el camino a seguir.
- Que la actividad no se encuentre demasiado pautada.
- Que la actividad requiera justificar las elecciones que se realizan, así como también las que se rechazan.
- Que el uso de nuevos recursos sea necesario para resolver la actividad y no una imposición del docente.
- Que lo solicitado sea algo matemático y no referido al uso del software.
- Que se consideren momentos de anticipación de posibles errores, respuestas inesperadas, inacción, etc.
- Que ante cada tarea se prevean intervenciones docentes apropiadas.
- Que se intervenga a partir de lo que el estudiante presenta, tratando de identificar lo que piensa y cómo lo hace, evitando decir directamente si la resolución es correcta o no y solicitando explicaciones ante respuestas tanto correctas como incorrectas (no solo en las incorrectas).

8. Los trabajos finales

El trabajo final del Curso consistió en la confección, por parte de los participantes, de propuestas o secuencias con problemas abiertos tal como se presentaron en los distintos encuentros. Cada presentación podía abordar una reelaboración de algún problema de los trabajados en las clases, o bien un problema diferente a los vistos.

Las propuestas realizadas por los asistentes debieron contemplar las justificaciones basadas en los principios desarrollados en los encuentros, como también las estrategias que podrían emplear sus estudiantes al abordar el problema. Con relación a esto, tuvieron en consideración los posibles errores de los estudiantes y anticipaciones de intervenciones que realizarían como docentes.

Por último, la puesta en común tuvo como objetivo recuperar lo matemático trabajado en cada problema, en las estrategias que aparecieron en cada propuesta, y las fortalezas y debilidades que (hipotéticamente) tuvieron con el uso de los recursos informáticos para la resolución de cada trabajo.

Los trabajos finales fueron variados. Uno de los grupos propuso una actividad utilizando la vista 3D para introducir un concepto. Otro equipo se valió de una secuencia didáctica hallada en la sección «Recursos» del sitio web de GeoGebra a la que le agregaron su impronta. Un tercer grupo planteó el diseño de una pista con condiciones dadas para una carrera de autos. Dos grupos decidieron adaptar consignas de problemas abordados en el Curso. En un caso le dieron mayor apertura a las consignas del P2 y en el otro reformularon el P8.

9. La voz de los participantes: antes y después

La revisión de los cuestionarios iniciales y finales de los asistentes permitió hacer una lectura interpretativa sobre supuestos de los participantes que manifestaron antes de iniciar el Curso y algunas incidencias en ellos al finalizarlo.

Como ya se mencionó, el Cuestionario inicial (Fig. 4.14) tuvo el objetivo de conocer algunos aspectos sobre los asistentes acerca de sus expectativas sobre el Curso, el nivel de conocimiento y utilización del GeoGebra.

Con respecto al software GeoGebra:

- ¿Ha escuchado hablar del mismo?
- No..... Sí (¿dónde?).....
- ¿Lo ha usado alguna vez?
- No..... Sí (¿para qué?).....
- Si tuviera que calificar sus conocimientos con respecto al uso del software de 0 a 10, ¿qué calificación se pondría?.....
- En caso que su calificación anterior no haya sido 10, ¿qué considera que le falta?.....

Más generalmente:

- ¿Qué beneficios considera que puede aportar el uso de un software para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática?.....
- ¿Qué riesgos y/o limitaciones percibe en su uso?.....
- ¿Qué condiciones considera propicias para la incorporación del software GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática?.....
- ¿Qué espera de este curso?.....
- ¿Qué otros cursos estaría interesado en realizar?.....

Figura 4.14. Cuestionario inicial del Curso

Con respecto a sus conocimientos sobre el software, el promedio de calificaciones que los asistentes se auto-asignaron fue de 4,6 (sobre 10). En cuanto a la pregunta «¿Qué espera de este curso?», la mayoría de las respuestas giraron alrededor de la(s) palabra(s) un «mejor», «correcto», «saber más» sobre el manejo del software y «conocer más» herramientas en términos técnicos. En otras palabras, consideraron prioritario un conocimiento relativo al dominio *TK* (en términos del modelo *TPCK*), para que el mismo pueda servir como base a la planificación de secuencias o actividades para un determinado contenido. Los demás asistentes manifestaron otro tipo de necesidad, donde el acento estaba puesto en que el GeoGebra sea el recurso por el cual podrían elaborar una actividad que promueva los procesos necesarios para la adquisición de un contenido. Vale decir, que sea un componente para sus planificaciones pero no en términos técnicos. En palabras de los asistentes:

Conocer las herramientas con las que cuenta el programa, aprender a utilizarlas y poder pensar en posibles aplicaciones de las mismas en la enseñanza de distintos contenidos matemáticos.

Espero que este curso me de herramientas para incorporar el software GeoGebra en distintas unidades didácticas de manera significativa.

Que me pueda dar las herramientas necesarias para poder implementar diferentes actividades en el aula y las ventajas y desventajas del mismo.

Intentamos rescatar con el Cuestionario final (Fig. 4.15) algunos aspectos relativos a las experiencias vivenciadas en el Curso.

<ul style="list-style-type: none">• ¿Considera aplicable a su práctica de aula lo estudiado en el curso? Sí..... Parcialmente..... No..... ¿Por qué?.....• ¿En qué aspectos, abordados en el curso, le interesaría seguir profundizando?.....• ¿Qué contenidos le hubiese gustado trabajar y no fueron abordados?.....• ¿Considera que este curso promovió un análisis reflexivo acerca de la inclusión de TIC en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática? Sí..... Parcialmente..... No..... ¿Por qué?.....• ¿Considera que la implementación de cursos en forma de taller puede mejorar la formación inicial y continua de los profesores en Matemática? Sí..... Parcialmente..... No..... ¿Por qué?.....• Otros comentarios que desee hacernos llegar.....

Figura 4.15. Cuestionario final del Curso

Destinamos esta parte del capítulo para realizar un análisis a partir de las respuestas de los asistentes a los cuestionarios finales, articulando dicha información con lo relevado en los cuestionarios iniciales y con algunos aspectos mencionados en los apartados anteriores que consideramos de relevancia.

Una de las primeras vinculaciones que surge es entre una de las preguntas del cuestionario inicial: «¿Qué espera de este Curso?» con otra del cuestionario final: «¿El Curso cumplió sus expectativas?». En este punto se vislumbró una transición que partía (expresada por los asistentes) de una expectativa por adquirir conocimientos técnicos del software al reconocer la importancia de los conocimientos pedagógicos y didácticos para diseñar actividades que involucren al GeoGebra de manera significativa para sus prácticas. En palabras de los asistentes:

Tengo mayor conocimiento del tipo de problemas que se pueden trabajar con los alumnos utilizando el software y de sus fortalezas y debilidades según cómo sean abordados por el docente. Adquirí mayor experticia en el uso de comandos y herramientas del programa. El curso me permitió forjar nuevos criterios pedagógico-didácticos a la hora de diseñar y/o implementar actividades para mis alumnos con el uso del software.

Confieso que creí que solo nos iban a enseñar a utilizar comandos del software. Pero fue más allá, además de darme un mejor manejo de GeoGebra me brindó MUCHAS herramientas didácticas y pedagógicas que pueden aplicarse a cualquier otro software.

También resulta interesante señalar que los participantes consideraron importante el sustento teórico con el que estuvieron en contacto en cada encuentro. En otras palabras, en sus respuestas contemplaron satisfactoriamente el acercamiento al modelo *TPCK*, las propuestas de problemas diversos, actividades/secuencias que requieren el dinamismo que ofrece el GeoGebra y las intervenciones/decisiones del docente. Asimismo, destacaron como potencial que los estudiantes elaboren conjeturas a partir de la versatilidad visual del GeoGebra concatenado a poder demostrar o refutar tales conjeturas. Sumado a lo anterior, la reflexión sobre la coexistencia de TIC y recursos tradicionales (como el lápiz y papel), que el uso del primero no suprime la manipulación de los segundos. Varios asistentes también otorgaron importancia a la reflexión que les produjo hacer una narrativa sobre su experiencia durante el proceso de resolución para cada problema.

Con respecto al interrogante «¿Considera que este Curso promovió un análisis reflexivo acerca de la inclusión de TIC en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática?» algunos testimonios indicaron:

Sí. Porque no solo se limitó al uso de las herramientas del software, si no que se trabajó en su inclusión de manera reflexiva en el aula, o sea no tratar de hacer lo mismo que se hace con tiza y pizarrón pero más «rápido» con las TIC, sino que se propuso plantear un cambio en esos procesos de enseñanza y por consecuencia de aprendizaje.

Sí. Porque durante el curso fuimos reflexionando sobre los alcances y limitaciones del programa, así como en distintas actividades que se pueden plantear a través de él.

En relación con las respuestas anteriores, los asistentes se mostraron conscientes sobre las condiciones materiales requeridas para las implementaciones de actividades con el GeoGebra. En primer lugar, advirtieron acerca de la disponibilidad de computadoras para realizar las actividades así como de inconvenientes que pueden emerger, como por ejemplo que se «tilde» el programa. En segundo lugar, que solo se emplee el GeoGebra para las ilustraciones o visualizaciones de objetos que se dificultan hacerlos a mano alzada, o bien que lo primordial sea un conglomerado de conocimientos técnicos dejando en un plano inferior al contenido matemático que se desea enseñar. Por último, subrayaron la necesidad de sistematización en el uso del software en las clases, superando la eventualidad de su manipulación, y el registro de los procesos evaluativos.

La voz de los asistentes frente a la pregunta «¿Considera aplicable a su práctica de aula lo estudiado en el Curso?» reflejó:

Parcialmente. Considero que puede aplicarse para la enseñanza de algunos temas, lo que dificulta su aplicación (en mi caso) es la falta de un aula con computadoras para las clases y el tiempo disponible para el dictado de los temas del programa.

Sí. Porque creo que permite trabajar contenidos formales específicos de manera más ABIERTA y REFLEXIVA, abocando a la participación y protagonismo de los alumnos; y la puesta en común.

Parcialmente. Depende de las circunstancias, por ejemplo si es posible disponer de máquinas suficientes para cada estudiante. Si esto es posible creo que poco a poco se puede considerar una «actividad común» en el aula.

Por último, se preguntó a los participantes: «¿Considera que la implementación de cursos en forma de taller puede mejorar la formación inicial y continua de los profesores en Matemática?». Indicaron como aspectos favorables la reflexión y socialización de experiencias/situaciones de forma colectiva y colaborativa. A su vez señalaron que las tradiciones instaladas en las prácticas docentes confrontan con las incorporaciones de nuevos recursos, siendo estos los que proponen un cambio de paradigma en los procesos de planificación, enseñanza y aprendizaje. Así se expresaron:

Sí. Como dije al comienzo del cuestionario, favorece desde una necesidad puntual el desarrollo de autonomía en la labor docente frenando la dependencia de que siempre alguien o algo externo diga qué dar y cómo darlo. También por el mismo motivo favorece la toma de decisión e incluso fomenta el espíritu creativo y propositivo.

Sí. Muchas veces los espacios curriculares no son en sí mismo un espacio de reflexión y es muy importante contar con estos espacios, no solo en etapas avanzadas de la carrera, sino desde la etapa inicial.

Parcialmente. Pueden aportar en la formación de los docentes pero es muy difícil cambiar las prácticas docentes muy arraigadas en general.

10. Conclusiones

En el primer encuentro, los participantes interactuaron con diferentes tipos de problemas. Percibimos cierta resistencia por parte de ellos hacia los problemas abiertos (Fig. 4.7 a 4.9). Esta resistencia se manifestó mediante argumentos que aludían por un lado a la ausencia de pautas en las consignas, como pasaba en los otros dos problemas (Fig. 4.5 y 4.6), y por el otro a la falta de dominio sobre comandos del software de mayor complejidad

para abordar esos problemas abiertos. Sin embargo, con el transcurrir de las clases las resistencias se fueron suavizando y comenzaron a tener una mayor apertura a la exploración de los diferentes caminos que permiten los problemas abiertos. En la puesta en común, los asistentes participaron de una lluvia de ideas (Fig. 4.13) cuyo objetivo fue reflexionar sobre los aspectos que se deberían tener en cuenta a la hora de planificar una actividad con software. En otras palabras, qué se debe considerar para confeccionar actividades o secuencias que ubiquen al GeoGebra en un lugar de mediador (por su potencial) para abordar los contenidos matemáticos que se desean trabajar y su tratamiento se dificultaría empleando solo los recursos tradicionales (libro, papel, lápiz, etc.). Esto teniendo en cuenta, en todo momento, que el quehacer matemático es lo primordial.

En base a lo recopilado en la lluvia de ideas, agrupamos las siguientes observaciones:

- Sobre P1 y P2: las consignas resultaron ser más guiadas, lo que propicia la obtención de resultados más precisos y en menos tiempo.
- Sobre P3 a P5: los enunciados de las actividades dan lugar a mayor libertad en la búsqueda de posibles resoluciones, aunque en el P4 la presencia de una planilla de cálculo (Fig. 4.8) de algún modo condiciona el camino a seguir. La búsqueda de soluciones para estos problemas demanda la utilización del software, lo que implica tener mayor conocimiento del mismo y la utilización de determinados conceptos matemáticos. Concluyeron que, para promover este tipo de escenarios, el docente debe ser el primero en tener «la cabeza más abierta».
- Sobre el GeoGebra: su utilización ahorra tiempo en el abordaje de variados procedimientos. Permite obtener diferentes y precisas visualizaciones que se modifican dinámicamente, lo que ayuda a enunciar conjeturas, validarlas, refutarlas y vislumbrar posibles caminos de demostraciones formales. La incorporación del recurso tecnológico depende de que el momento sea propicio y el uso del mismo resulte adecuado.
- Sobre el docente, estudiante y los procesos: resulta indispensable diseñar consignas que centren su atención en aprender Matemática y no en el software, aunque debe considerarse el dominio tecnológico implicado. El docente debe acompañar al estudiante en la toma de decisiones, trabajando sobre el error y solicitando justificación (correcto/incorrecto) evitando responder directamente, para favorecer la autonomía del pensamiento crítico del alumno. El modo de plantear las actividades promueve diferentes procesos de resolución. Atravesar los mismos tomando conciencia del propio quehacer matemático resulta enriquecedor más allá del resultado al que se arribe. Este tipo de propuestas amerita pensar cómo evaluar el desempeño de los estudiantes en clases mediadas por TIC.

Consideramos que el hecho de solicitar en el TP1 una narrativa acerca de los procesos puestos en juego en la resolución del P5 resultó complementario respecto a lo trabajado en el primer encuentro. Que los asistentes intenten escribir acerca de lo experimentado en sus resoluciones, probablemente posibilitó la toma de conciencia de las diferentes instancias que componen tales procesos. Estimamos que lo vivenciado en la primera clase y lo realizado a partir del TP1 puede haber incidido favorablemente en la relajación de la resistencia que inicialmente percibimos ante las consignas abiertas, ya que en el segundo encuentro los participantes se mostraron predispuestos y entusiasmados con la propuesta de abordar problemas de ese estilo. Los docentes recorrimos los grupos de trabajo atendiendo las diferentes consultas, fundamentalmente acerca de cuestiones técnicas. En general no advertimos incomodidades con los problemas propuestos pero sí algunas inseguridades acerca de «si estaban haciendo lo correcto». En todo momento tratamos de no dar respuestas directas a ese tipo de consultas. Las instancias intermedias se utilizaron para realizar una puesta en común acerca de cómo estaban abordando los problemas. Este espacio resultó muy enriquecedor porque se pudieron mencionar y dar a conocer variadas herramientas del GeoGebra, que los diferentes grupos utilizaron, permitiendo que los docentes ampliemos de manera complementaria la información compartida, para conocer más acerca de los recursos del software pero de manera contextualizada en la resolución de problemas y sin adoptar una postura tecnicista. En la definición de las conjeturas y las formalizaciones matemáticas el GeoGebra resultó de gran ayuda para encontrar ecuaciones o mostrar regularidades que colaboraran en la maduración de las ideas. Así como también en los caminos a optar para las demostraciones de las conjeturas definidas. En la puesta en común al final de la clase, tres equipos manifestaron haber demostrado formalmente las conjeturas planteadas. El resto expresó haber llegado a demostraciones parciales. Consideramos que todo lo realizado en este encuentro resultó lo suficientemente rico como realizar la narrativa solicitada en el TP2 acerca del proceso de abordaje del problema asignado.

En el tercer encuentro a partir de un problema disparador intentamos vincular diferentes tipos de decisiones que se deben tomar para definir las propuestas que se llevan al aula, con el modelo *TPCK*. Creemos que el hecho de haber compartido los aspectos más importantes de ese modelo puede haber fortalecido el sustento teórico de lo analizado y vivenciado a lo largo de todos los encuentros. En el último de ellos, luego de la defensa de los trabajos finales, reflexionamos sobre la habilidad de conjeturar, sumamente

nombrada a lo largo del Curso, que según la Real Academia Española significa: formar juicio de algo por indicios u observaciones. Finalmente comentamos a los asistentes que notamos una incipiente evolución en los usos dados al programa:

- de un tipo pizarrón (para graficar allí y pegar el dibujo en un texto),
- pasando por bondades intermedias (menos tiempo, más estética, para corroborar),
- hacia hacer Matemática (donde entran en juego analizar regularidades, conjeturar, explorar casos, probar de distintas maneras, visualizar comportamientos, observar invariantes, buscar contraejemplos).

En la Fig. 4.16 se intenta mostrar de manera resumida dicha evolución:

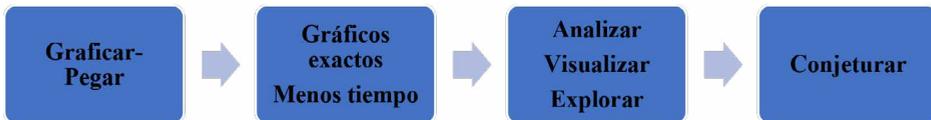


Figura 4.16. Evolución por parte de los asistentes en los usos dados al GeoGebra

A su vez, a nivel técnico destacamos la evolución observada, desde pretender «ejecutar comandos solicitados» a efectivizar «elegir comandos necesarios». Además advertimos algunos reposicionamientos y diferentes reacciones frente a consignas abiertas:

- del rechazo o resistencia,
- pasando por la consideración de lo que implica usarlas (para el alumno, para el docente y la didáctica),
- involucrándose en procesos de resolución que mostraron una decreciente resistencia y una creciente comodidad, particularmente con el uso del software,
- esbozando criterios para implementarlas,
- hacia la generación de adaptaciones y/o propuestas de enseñanza para implementaciones áulicas.

Estamos convencidos que resulta indispensable generar espacios de formación en los que se puedan abordar las demandas que la sociedad tecnológica actual le presenta a la educación. Reconocemos que la satisfacción de esas demandas no consiste en la simple incorporación de dispositivos tecnológicos en las clases. A su vez, las orientaciones curriculares vigentes (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014) tienden a resaltar la importancia de

atender no solo a los contenidos, sino además, a los procesos matemáticos que promueven la construcción del conocimiento y favorecen el desarrollo de capacidades metacognitivas, que resultan necesarias para la inserción en una sociedad mediada por TIC. En este sentido, los *curricula* promueven actividades matemáticas que den lugar a procesos como el de conjeturar, que involucra a su vez otros procesos generales y puede asociarse de manera dialógica con la resolución de problemas. El proceso de conjeturar puede estructurarse a partir de las actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar, generalizar y validar conjeturas (Álvarez, Bautista, Carranza y Soler-Alvarez, 2014).

De lo anterior entendemos que resulta todo un desafío incluir a las TIC en las prácticas de enseñanza con el objetivo de construir escenarios educativos superadores. Para ello debemos, en primer lugar, reconocer la complejidad en la que está inmerso ese desafío, reconocer que para potenciar a través de la tecnología los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los contenidos disciplinares, no solo necesitamos conocimientos técnicos acerca del manejo de un recurso tecnológico. Precisamos, además, conocimientos didácticos y pedagógicos adecuados para construir criterios que orienten nuevas formas de enseñar y aprender Matemática a través del GeoGebra.

En virtud de lo expresado por los asistentes y lo evidenciado por nosotros en sus desempeños, consideramos que las actividades y las diferentes instancias propuestas en el Curso propendieron a generar espacios de reflexión acerca de estas cuestiones. Estimamos que los participantes pudieron reconocer a través de sus propias vivencias, las experiencias inherentes a los procesos de resolución de problemas. Además, pudieron percatarse que el software GeoGebra es un recurso tecnológico accesible desde todo punto de vista, ya que es gratuito y pueden conocerse muchas de sus bondades en unas pocas jornadas a través del mismo quehacer matemático. También suponemos que mediante las actividades les fue posible advertir la versatilidad de los contenidos matemáticos que pueden abordarse, el dinamismo y las enormes ventajas que presenta respecto a medios tradicionales acerca de la representación, visualización y validación, que son instancias fundamentales para enriquecer el valioso proceso de conjeturar. Es por todos estos argumentos que consideramos que el GeoGebra es un software paradigmático respecto a la integración de TIC en las clases de Matemática y que, utilizado de manera criteriosa, puede contribuir a la generación de prácticas educativas significativamente superadoras.

Creemos que hemos podido alcanzar los objetivos planteados para el Curso y que las experiencias vivenciadas en dicha instancia han enriquecido la formación de todos los que participamos de la misma. Encontramos en las producciones de los asistentes –disponibles para todos a través de la plataforma– un valioso material de estudio que, seguramente, en la medida que lo interpelemos nos seguirá nutriendo. Esperamos que lo compartido en este capítulo proporcione nuevas ideas, inquietudes y otras reflexiones, que promuevan a través de la resignificación del uso del GeoGebra, la gestación de prácticas superadoras en las clases de Matemática.

11. Referencias bibliográficas

- Álvarez, I., Bautista, L., Carranza, E. y Soler-Alvarez, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números*, 85, 75-90.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Cuadernos de educación, estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma/ Horsori.
- Coll, C. (2009). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. En R. Carneiro, J.C. Toscano y T. Díaz. (Coord.). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo* (pp. 113-126). Madrid: Organización de los Estados Iberoamericanos.
- Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33-42.
- Jorba, J., Gómez, I. y Prat, A. (2000). *Hablar y escribir para aprender. Uso de la lengua en situación de enseñanza-aprendizaje desde las áreas curriculares*. Barcelona: Síntesis.
- Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada*. Santa Fe: Autor.
- Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Pochulu, M. D. (2013-2015). Propuesta educativa con TIC: Enseñar con TIC Matemática I (Clases 1 a 6). *Especialización Docente de Nivel Superior en Educación y TIC*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Valverde, J., Garrido, M. C. y Fernández, R. (2010). Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11(1), 203-229.

Página intencionadamente en blanco.

CAPÍTULO 5

MATERIALES DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

*Hernán Martín Alegre**
*Eliana Dominguez***
*Natalia Landaluce****
*Sofía Pípolo*****

1. Introducción

En este capítulo pretendemos dar a conocer el recorrido que realizamos en el marco del Proyecto de Investigación en torno a los materiales didácticos y las secuencias relacionadas a los mismos.

* Profesor en Matemática (UNR) y alumno de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). Docente Titular en la EESOPÍ N° 3033 «Colegio Rosario» y en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España».

** Profesora en Matemática (UNR) y alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias mención Matemática (UNR). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). Docente Titular en el ISPI N° 9024 «Inmaculado Corazón de María» y en la EESOPÍ N° 8011 «Nuestra Señora del Rosario».

*** Profesora en Matemática (UNR). Jefe de Trabajos Prácticos Dedicación Semiexclusiva en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (UNR) y Profesor Adjunto Dedicación Simple en la Facultad de Química (UCEL). Docente Titular en la EESOPÍ N° 8066 «Zona Parque» y en la EESOPÍ N° 3088 «San Bartolomé».

**** Profesora en Matemática (UNR). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

Hoy en día existen diferentes tipos de materiales didácticos que pueden ser utilizados por profesores en Matemática, entre los cuales podemos mencionar dos grandes grupos: los manipulativos tangibles (se accede a ellos por medio del sentido del tacto) y los digitales (se accede a través de dispositivos electrónicos). En particular, profundizaremos en algunos recursos manipulativos concretos y en un compendio de material audiovisual digital.

Sostenemos que estos recursos pueden marcar una diferencia en las clases de Matemática, además de servir como intermediarios para el desarrollo y enriquecimiento del alumnado durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje, dado que facilitan múltiples interpretaciones del contenido que el docente pretende enseñar.

Como profesores en Matemática, nos reúne el interés de ahondar en diferentes inquietudes que nos fueron surgiendo al transitar nuestra formación tanto inicial como continua. A partir de nuestra participación en diferentes proyectos, becas y estudios superiores en el marco de nuestra Universidad, nos hemos ido involucrando en actividades de investigación. Nuestro punto de contacto como investigadores radica en una línea de trabajo destinada a indagar sobre materiales didácticos para la enseñanza de la Matemática.

A su vez, nuestra participación en Proyectos de Extensión nos impulsó aún más en el estudio de diferentes tipos de materiales didácticos que existen en la actualidad y nos permitió involucrarnos en su uso en ámbitos educativos concretos, en conjunto con docentes en ejercicio.

2. Noción de material didáctico

Son varias las definiciones que se proponen para las nociones de recursos y materiales didácticos. Entre ellas se encuentra la de Alsina, Burgués y Fortuny (1988), quienes sostienen que se trata de todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje. Algunos autores, como Coriat (1997), optan por hacer explícita la diferencia entre materiales didácticos y recursos; en función a si fueron diseñados con fines educativos –los primeros– o no necesariamente –los segundos–.

De todos modos, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; es por ello que no hay una línea exacta que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso.

En los trabajos que llevamos a cabo y en esta oportunidad en particular emplearemos indistintamente el término material o recurso. En este marco, pretendemos poner en valor la utilización de materiales didácticos innovadores, que presenten a la Matemática como construcción (no acabada) de la actividad humana. Por ello los materiales asociados a la actividad lúdica y los materiales audiovisuales fueron de especial importancia.

3. Manipulativos tangibles en Educación Matemática

Asumiendo que los procesos de aprendizaje de la Matemática se dan en ese marco de interacción entre el sujeto que aprende y un medio instruccional (Terán y Anido, 2010) y teniendo en cuenta que el razonamiento abstracto es uno de los modos de pensamiento a promover en dichos procesos, Uicab (2009) propone incursionar en la actividad manipulativa. Según la autora, este tipo de actividad permite, a través de la visualización, ir de lo concreto a lo abstracto con el fin de proporcionar a los estudiantes elementos para la construcción de ideas matemáticas.

En cuanto a los materiales didácticos resulta importante aclarar que el mero hecho de usarlos no es garantía de «éxito». No hay que olvidarse tampoco de que el material didáctico puede ser concreto, pero que la idea está en la forma en que el alumno entiende dicho recurso y canaliza sus acciones sobre él. Los materiales no muestran por sí mismos una idea. Tampoco podemos enseñar intentando que nuestros alumnos «vean» la interpretación «correcta» de los materiales que nosotros les presentamos para trabajar. El objetivo de una actividad debería permitir y favorecer que afloren todas las interpretaciones posibles.

No es el material *per sé* el que transmite cierto conocimiento, sino que este se constituye en una ayuda para resolver ciertos problemas prácticos en un determinado contexto y suele usarse para provocar acciones (mentales, más allá de físicas).

Es por todo ello que sostenemos que la actividad matemática no debe centrarse en el recurso en sí, sino en el modo en que dicho material permite potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas fundamentales. La visualización, la exploración de casos, la imaginación de posibilidades que surgen al manipularlo, el análisis de similitudes y diferencias entre los distintos casos abordados, la elaboración de conjeturas a partir del análisis de situaciones particulares, entre otras, son habilidades

matemáticas que pueden promoverse a partir de un buen uso de materiales manipulativos.

Para ello, Ek, Haas y Uicab (2010) sugieren que el docente tenga en cuenta: en qué medida los materiales manipulativos pueden ayudar a lograr los objetivos establecidos, qué contenido se pretende abordar con dicho material, cómo conjugarlo con las características de los alumnos, a qué nivel va dirigido, en qué medida lo permite la infraestructura de la escuela y qué tipo de actividades se pueden implementar con él.

Algunos condicionamientos que plantea la utilización de materiales didácticos en la clase de Matemática son: la formación matemática y didáctica del docente, sus concepciones sobre la Matemática y su aprendizaje; el interés, la motivación o la disciplina de los alumnos; la filosofía o cultura escolar y la infraestructura que ofrece. Por su parte el conocimiento matemático a estudiar plantea al docente una serie de cuestiones metodológicas: ¿qué material didáctico conviene emplear para enseñar el contenido matemático que nos interesa?, ¿qué actividades podríamos proponer a los alumnos con ese material?, ¿cuáles serían las más adecuadas?, ¿se está produciendo algún aprendizaje como consecuencia del uso de cierto material didáctico?, ¿cómo podríamos determinar la comprensión que adquieren los estudiantes acerca de un conocimiento matemático cuando utilizan material didáctico? Para asegurar un uso adecuado de los materiales didácticos en el aula de Matemática, sin caer en el error de sobrevalorar las potencialidades de los mismos, resulta interesante reflexionar acerca de: el grado de sofisticación del material didáctico; la distancia con el concepto matemático; la eventual adicción y dependencia al mismo; las posibilidades de manipulación que pone en juego; el diseño y re-diseño de las tareas que con él se prevén.

Sostenemos que la utilización de algún recurso en particular puede potenciar el aprendizaje por parte del alumno. Es así que el uso de los materiales requiere de una preparación de los profesores para aprovecharlos convenientemente. La formación inicial y continua de los docentes influye directamente en su postura ante el empleo de un recurso. En las carreras de formación docente se suele hacer alusión a la existencia de materiales didácticos pero en pocas oportunidades se trabaja con ellos específicamente o se los utiliza como apoyo en secuencias didácticas.

Reconociendo, entonces, la diversidad de aprendizajes matemáticos que promueve el uso de los materiales didácticos, el desafío está en formar docentes criteriosos que puedan reflexionar sobre el qué, cuándo, por qué y para qué de la utilización de dichos materiales (Flores, 2006).

En lo que sigue nos detendremos en un tipo particular de manipulativo tangible (el Tangram) y posteriormente en un tipo particular de material audiovisual (un Directorio web).

4. El Tangram como material didáctico

En el marco de una tesis de Maestría en Didáctica de las Ciencias con mención en Matemática (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura) se focalizó en el uso que hacen los estudiantes avanzados y egresados recientes del Profesorado en Matemática de dicha Facultad en un tipo de material didáctico concreto manipulativo, como lo es el Tangram con sus diferentes variantes.

El interés por indagar sobre este recurso se debió a que su utilización en la clase es un aspecto a profundizar y reforzar en la formación inicial y continua del Profesorado, el cual cuenta en su gabinete con varios ejemplares de los distintos tipos de Tangram. Esta situación se observó a partir de la participación en proyectos de Extensión a la comunidad educativa en general.

El Tangram es un tipo de rompecabezas formado por un conjunto de piezas conocidas con el nombre de tans, que se obtienen al diseccionar una figura plana (por lo general, aunque existen también Tangrams espaciales). Entre sus finalidades se encuentra la disposición de las piezas para formar diferentes siluetas. Tales figuras se conocen con el nombre de tangramas. Al formarlas, las piezas no deben superponerse entre sí y deben utilizarse en su totalidad. Los distintos tipos de Tangram pueden variar en cuanto a su forma y a la cantidad de piezas que contienen.

Con base en Villarroel y Sgreccia (2011, 2012) se han identificado 13 tipos de Tangram: Chino, de Fletcher, Cardiotangram, Hexagonal, Pentagonal, Triangular, Japonés, de Lloyd, Pitagórico, Stomachion, de Brügger, Ovoide y Espacial (se presentan en este orden en la Fig. 5.1).

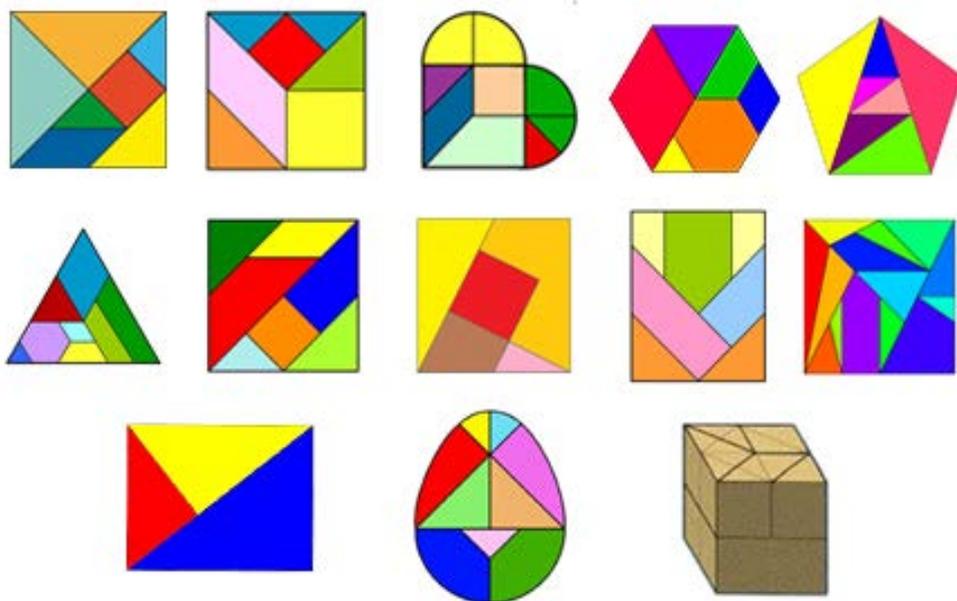


Figura 5.1. Tipos de Tangram

Cabe advertir que 11 de estos tipos (todos menos el tangram Japonés y Espacial) conforman lo relativo a Tangram del gabinete de recursos didácticos con el que cuenta en la actualidad el Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.

5. La Educación Matemática Realista como corriente de encuadre

La corriente principal que sustanció nuestra indagación ha sido la Educación Matemática Realista (Bressan, 2005), cuyo fundador fue el Dr. Hans Freudenthal (1905-1990). Esta corriente tiene las siguientes ideas centrales:

- Pensar la Matemática como una actividad humana con la finalidad de organizar el mundo que nos rodea incluyendo a la propia Matemática.
- Comprender que el desarrollo de la Matemática pasa por distintos niveles, a través de un proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente donde los contextos y modelos tienen un papel relevante, en el marco de una heterogeneidad cognitiva.

- Lograr la reinvención guiada de la Matemática, como actividad de matematización, requiere de la búsqueda de contextos y situaciones de la realidad que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo la historia de la Matemática, las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes algunas de las fuentes principales.

Estas ideas se complementan con seis principios, todos ellos relacionados entre sí, que caracterizan a la corriente didáctica:

- *Principio de actividad.* La Matemática debe ser pensada como una actividad humana, accesible a todas las personas, la cual se aprende mejor haciendo. Los alumnos son tratados como participantes activos en el proceso educativo, en el cual desarrollan por sí mismos herramientas y discernimientos matemáticos.
- *Principio de realidad.* La matematización de la realidad implica no solo mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos. Esta corriente propone partir de contextos ricos que demanden una organización matemática, promoviendo el uso del sentido común de los estudiantes y de sus estrategias informales, permitiéndoles avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización.
- *Principio de niveles.* En el aprendizaje de la Matemática los estudiantes van pasando por distintos niveles de comprensión. Para lograr pasar de nivel es necesario tener la capacidad de reflexionar sobre las actividades realizadas, constituyéndose los modelos en importantes andamios que logran tender puentes entre los niveles informal y formal, pasando de un «modelo de» una situación concreta a un «modelo para» todo tipo de otras situaciones equivalentes.
- *Principio de reinvención guiada.* Los profesores y los programas educativos desempeñan un papel importante en los procesos de aprendizaje. Los docentes deben proporcionar un ambiente de aprendizaje en el cual pueda surgir el proceso de construcción, previendo anticipar el desempeño de los alumnos, en pos a lograr escenarios que puedan funcionar como palancas para favorecer la comprensión estudiantil.
- *Principio de interrelación.* La Matemática como asignatura escolar debería trascender contenidos estancos. La interrelación se encuentra en la coherencia de la secuenciación de los contenidos, tanto en las diferentes unidades de la asignatura como en las distintas partes de una misma unidad.
- *Principio de interacción.* El aprendizaje de la Matemática es una actividad social, teniendo en cuenta la relación que puede establecerse entre los estudiantes. Esto permite la reflexión para alcanzar un nivel más elevado de comprensión. Le incumbe la enseñanza en un grupo-clase considerando, a su vez, las individualidades en el aprendizaje.

En este contexto, el término manipulable es utilizado para aquellos materiales que funcionan como modelo, abarcando materiales concretos, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e incluso símbolos.

6. Materiales digitales audiovisuales

Pensamos que los profesores tienen que conocer y entender cuáles son las tecnologías específicas más adecuadas para abordar diferentes temáticas, además de estar al tanto de cómo las tecnologías pueden cambiar (o resignificar) los contenidos. Por ello creemos que una forma de facilitar y promover un acceso adecuado es a través de los Repositorios digitales y Directorios web, los cuales tornan más accesible la producción académica que circula en la Web de un área temática particular (Aguado, 2015; San Martín, Guarnieri y Bongiovani, 2014) como, por ejemplo, como es el caso de la Educación Matemática.

En términos generales se puede decir que un Directorio web es una colección de sitios web organizados por categorías y subcategorías, que remite a los enlaces (cuando es posible), detallando una breve información sobre lo que ofrece cada uno de los sitios. Además este tipo de material puede ser actualizado de forma periódica, ampliando su base de datos de manera continua.

Particularmente el Directorio web de Material Audiovisual de la carrera (Fig. 5.2) fue creado en el año 2014, con la participación de estudiantes, egresados y docentes de la institución. Se encuentra alojado en la página institucional de la Facultad (<http://www.fceia.unr.edu.ar/fceia/pmat/>) y su última versión al momento fue diseñada mediante la herramienta DREAMWEAVER CC 2017.



Figura 5.2. Página inicial del Directorio web de Material Audiovisual

Representa una puesta en valor de numerosos y dispersos materiales que circulan en la Web (Alonso, Subirats y Martínez, 2008) con el afán de hacerlos visibles para estudiantes y docentes. Desde el 2016, en el marco de una Beca de Iniciación a la Investigación, se fueron realizando modificaciones a la presentación del sitio para darle un aspecto renovado y atrayente, además de agregar y revisar el material disponible.

Dicho Directorio web consta de tres secciones temáticas: Educación, Matemática y Educación Matemática. En cada sección hay cinco tipos de materiales audiovisuales: películas, documentales, cortometrajes, conferencias y portales (Fig. 5.3).

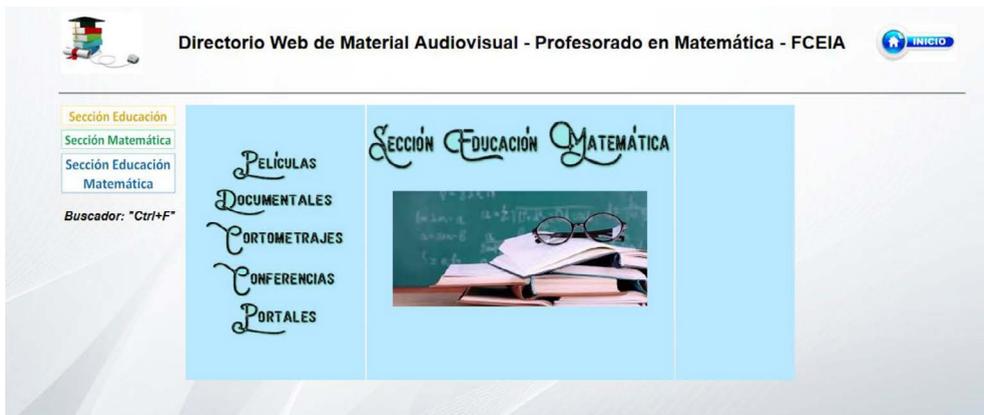


Figura 5.3. Sección Educación Matemática del Directorio web

Cada tipo de material audiovisual tiene una breve descripción caracterizada por un conjunto de datos, como se muestra en la Tabla 5.1

Tabla 5.1. Datos consignados en cada tipo de material

Tipo de material	País	Año	Género	Duración	Resumen	Link de acceso*
Películas	X	X	X	X	X	X
Documentales	X	X		X	X	X
Cortometrajes	X	X		X	X	X
Conferencias	X	X		X	X	X
Portales	X				X	X

* Se explicita en los casos de ser sitios de acceso abierto.

Antecede la descripción de cada material su denominación y una imagen. Acerca de la denominación, si la obra admite varias versiones (en distintos idiomas o diferentes traducciones) se procura consignarlas a todas. En la Fig. 5.4 ejemplificamos con la película «En busca del destino» de la sección Educación.

<p>En busca del destino (El indomable Will Hunting / Good Will Hunting)</p> 	<p>País: Estados Unidos Año: 1997 Género: Drama Duración (en minutos): 126 Resumen: Comprende a un joven rebelde y carismático con una capacidad intelectual fuera de lo normal. Al igual que sus amigos, realiza trabajos mal pagados y pasa su tiempo libre en el bar, donde en ocasiones tiene problemas con la ley. Tras una pelea en el bar, se ve obligado a ir a la cárcel. Su única esperanza es un profesor y terapeuta que queda asombrado de sus capacidades y problemas emocionales. Entre ellos empieza una conflictiva y extraña relación. Link: Acceso</p>
--	--

Figura 5.4. Datos particulares de un material del Directorio web

El Directorio web se actualiza anualmente, a partir de la colaboración de docentes y estudiantes de la carrera, a nivel tanto de su contenido como de su presentación. Además se van realizando modificaciones en el formato, reagrupando materiales, mejorando la descripción y actualizando los links de acceso. Es decir, no solo se agregan materiales sino que también se revisan los existentes. En la Tabla 5.2 resumimos cómo ha variado la cantidad de materiales alojados en el Directorio desde su creación a la actualidad.

Tabla 5.2. Cantidad de materiales en cada sección año a año

Año	Total	Educación	Matemática	Educación Matemática
2014	112	61	27	24
2015	197	118	57	32
2016	291	196	58	37
2017	366	225	83	58

En estos años el sitio ha evolucionado considerablemente y proyectamos que continúe de la misma forma en el futuro. También consideramos muy importante difundir este material tanto en la carrera como en otros Profesorados.

7. Potencial de los materiales didácticos en la Educación Matemática

Formar parte de un equipo de extensionistas vinculados al Profesorado nos permite promover el empleo de materiales didácticos en instituciones educativas de diversos niveles de escolaridad ubicadas principalmente en el sur de la provincia de Santa Fe. Reconocemos un potencial enorme en los materiales didácticos para enseñar y aprender Matemática, siempre y cuando su uso esté acompañado de una intencionalidad docente oportunamente fundamentada. Hemos ido evidenciando en terreno la trascendencia de contar en las escuelas con gabinetes de materiales manipulativos en buen estado, ordenados y a disposición del personal. Asimismo esto es insuficiente para garantizar el impacto de los mismos en términos de emancipación de los sujetos que los usan.

En el año 2011 un grupo de docentes y estudiantes del Profesorado nos propusimos llevar a cabo un Proyecto de Voluntariado Universitario, vinculado con el Programa Conectar Igualdad (modelo 1 a 1), a partir del cual iniciamos nuestras experiencias de trabajo afines a las que aquí compartimos. Allá por el año 2012, nos postulamos por primera vez en una convocatoria para Proyectos de Extensión Universitaria, viéndonos inspirados por varias cuestiones. Por un lado, la posibilidad de seguir realizando trabajos en conjunto con docentes en ejercicio y, por otro lado, la intención de fomentar el empleo adecuado de materiales didácticos para superar problemas educativos específicos, posibilitando la accesibilidad a diversos soportes que se constituyan en andamios de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Consideramos importante remarcar que concebimos a la Matemática como una construcción humana, en constante desarrollo y transformación que, junto con otras ciencias básicas, contribuye a la configuración del contexto tecnológico, económico y social en el que vivimos.

Sin embargo, lo que a veces sucede en las escuelas en torno a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, nos inquieta e invita a la participación. Asumiendo el compromiso social que compete a la Universidad en torno a problemáticas del medio detectadas, desde nuestro lugar nos propusimos abrirnos a la comunidad con propuestas concretas desde el área Matemática que contribuyan al logro de algunos ejes que consideramos vacantes. Principalmente nos focalizamos en el fortalecimiento de la formación de los docentes en ejercicio y los egresados recientes en el uso y análisis de las potencialidades de diversos recursos y juegos didácticos, como así también en la elaboración de propuestas educativas. Todo ello con el objeto de favorecer

su incorporación en la Educación Matemática que se brinda en las escuelas secundarias, y también primarias, para contribuir a la mejora de su calidad.

La inclusión significativa de variados materiales didácticos en el currículum real de cada aula, desde didácticas específicas que se hagan cargo de ello, es el objetivo principal de los Proyectos de Extensión y Voluntariado Universitario en los que hemos estado participando.

Por otro lado, otra de las demandas detectadas es la necesidad de formación de profesores en Matemática con criterios claros en la selección y reelaboración de propuestas de enseñanza, a partir de la enorme ebullición de materiales digitales de todo tipo que circulan en Internet. Una forma de facilitar y promover un acceso adecuado es a través de los Directorios web, intencionalmente confeccionados. En la formación de profesores se busca vincular aspectos disciplinares y didácticos, y para ello estas herramientas (entre otras) pueden resultar provechosas.

8. Más ejemplos de materiales manipulativos

Procuraremos dar a conocer de manera sucinta algunos de los recursos didácticos con los que fuimos trabajando en este tiempo. Podemos distinguir dos grandes grupos: juegos educativos y recursos didácticos especialmente diseñados.

El primero de los grupos está conformado por juegos de mesa tradicionales proyectados para ser utilizados con intención de enseñanza. Cuentan con instrucciones de uso y cabe advertir que pueden confeccionarse para cualquier contenido de Matemática de la escolaridad e incluso de otra asignatura escolar. Además, se prestó especial atención a involucrar distintas representaciones y registros de representación semióticos (coloquial, gráfico, tabular, simbólico; Duval 1999). También resulta oportuno señalar que estos juegos elaborados pueden utilizarse para todos los momentos de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (en el inicio del tema, durante el desarrollo, como aplicación o como cierre). Dentro de este grupo, compartimos tres: Dominó, Ludo y Bingo. En lo que sigue detallaremos algunas características de cada uno de ellos.

Dominó (Fig. 5.5). Los materiales empleados para construirlos fueron diversos: para las fichas se utilizó cartón, madera de diferentes espesores o cartulinas plastificadas en frío; mientras que para guardarlos se los colocó en bolsas de friselina especialmente diseñadas, en bolsas de plástico con cierre hermético o en cajas de cartón etiquetadas correspondientemente.



Figura 5.5. Elaboración del Dominó matemático

La cantidad de piezas de los Dominós dependió de una lógica determinada por la cantidad de objetos a representar, donde cada uno debe aparecer una cantidad par de veces.

En el gabinete del Profesorado contamos con ejemplares de Dominó para los contenidos de cuerpos (24 piezas), números naturales (28 piezas), números racionales (28 piezas), función lineal (28 piezas), área de figuras planas (28 piezas) y ángulos (28 piezas).

A continuación se muestra, a modo de ejemplo, el reglamento de juego del Dominó de ángulos.

Cantidad de jugadores: 2, 3 o 4.

¿Cómo se reparten las fichas? *Se colocan las fichas boca abajo, es decir, dejando oculta la figura con el contenido matemático. Cada jugador elige, al azar, cinco fichas del montón y las coloca de manera tal que cada ficha en juego solo pueda ser vista por el propio jugador.*

¿Quién comienza el juego? *Comienza el jugador que encuentre en una de esas imágenes un ángulo mayor a 130° . Si más de un jugador posee una ficha con esa característica comienza el que tenga el ángulo de mayor amplitud. Si hay empate, se comparan las amplitudes de los otros ángulos que aparecen en la ficha y el de mayor amplitud comienza el juego. Si ninguno de los participantes posee una ficha con un ángulo mayor a 130° , cada uno toma una cualquiera del montón hasta obtener una con la característica indicada.*

¿Cómo continúa el juego una vez ubicada la ficha inicial? *El jugador que se encuentra a la derecha del que ubica la ficha inicial, continúa el juego. Deberá elegir, entre sus fichas, alguna que contenga en una de sus mitades un ángulo de igual amplitud que alguno de los ángulos que aparecen en la ficha ubicada. Si tiene más de una ficha que cumpla esta característica, elige una de ellas. Una vez seleccionada, la coloca del lado de la hilera que corresponde.*

¿Cómo se concreta una jugada? *Cada jugador, en su turno, debe colocar exactamente una ficha. Si un jugador no posee ninguna ficha relacionada con una de las mitades de la hilera, debe tomar fichas del montón, hasta hallar una que se pueda unir a la hilera. Cuando se terminan las fichas del montón, si el último jugador que levantó no puede ubicarla ficha en la hilera, debe «pasar» su turno al siguiente jugador.*

¿Quién gana? *Gana el primer jugador que se «libera» de todas sus fichas. Si no se llega a este desenlace, el juego termina cuando ninguno de los jugadores*

puede ubicar más fichas en la hilera. En ese caso, se cuentan las fichas de cada jugador y el que tiene menos es el ganador. Si coincide la cantidad de fichas al finalizar, se suman las amplitudes de los ángulos de todas sus fichas; el que tiene la menor suma es el ganador.

Ludo (Fig. 5.6). Los materiales utilizados para su elaboración fueron cartón o madera para confeccionar el tablero, sobres para las consignas de las preguntas –relativas a varios contenidos, distinguidos con A, B, ...–, cartulinas dentro de los sobres con las respuestas, porcelana fría o arandelas pintadas para las fichas. Para su guardado se confeccionaron bolsas de friselina o se emplearon bolsas plásticas de comercios que resultaran adecuadas.



Figura 5.6. Elaboración del Ludo matemático

Las piezas que conforman este juego son el tablero –basado en el juego convencional con algunas adaptaciones para convertirlo en «ludo matemático»: signo «?» en ciertas casillas–, fichas de cuatro colores (dos por color), sobres con preguntas, cartulinas dentro con respuestas y un dado.

En el Profesorado se han diseñado ludos para trabajar números enteros, ecuaciones lineales, factorización de polinomios y números racionales –orientado al nivel secundario de educación– así como numeración del 1 al 10, figuras geométricas, múltiplos y divisores –para primaria–.

El reglamento de juego es el siguiente:

Disposición para el comienzo del juego

Pueden participar de 2 a 4 jugadores, 1 por color.

A un costado del tablero se disponen los sobres con las consignas hacia abajo.

Se selecciona el contenido matemático con el cual se va a jugar (de los que figuren en el sobre).

Desarrollo del juego

Cada jugador ubica las 2 fichas de su color en el sector de partida (triángulos blancos).

Cada jugador lanza el dado e inicia el juego el que obtenga el número más alto. Luego continúa el jugador que está a su izquierda.

Se sugiere que cada jugador disponga de lápiz y papel para eventualmente emplearlos en la resolución de las actividades propuestas en las consignas.

Para que un jugador pueda sacar una ficha del sector de partida, al arrojar el dado en su turno, debe obtener un número impar. Comienza moviéndola tantos casilleros como indica el número obtenido, partiendo desde el inicio. En cada turno el jugador selecciona la ficha que más le conviene mover y cada vez que obtiene un número impar lo habilita a sacar una ficha del sector de partida, si así lo desea.

Si un jugador obtiene un 6, mueve una de sus fichas esa cantidad de casilleros, gana un turno y vuelve a jugar. Si cae en una casilla que ya está ocupada por otro jugador, captura la ficha de su contrincante y la envía nuevamente al sector de partida. Si cae en toma un sobre y responde la consigna correspondiente al contenido con el que se está jugando; el jugador que está a su derecha lee la consigna y luego compara la respuesta dada con la que se encuentra dentro del sobre. Si responde correctamente avanza 2 casilleros; de lo contrario, retrocede 1 casillero. Cada vez que un sobre se utilice se lo retira del juego para no repetirlo.

El objetivo del juego es que cada jugador lleve las 2 fichas de su color desde el sector de partida a la casilla de llegada. Cuando un jugador da la vuelta al tablero y llega al camino de su color, donde ya no puede ser capturado por un contrincante. Para alcanzar la casilla de llegada debe hacerlo de manera exacta, de lo contrario, debe moverse sobre el camino de su color según lo indicado por el dado. Si cae en la casilla que se encuentra antes de la de llegada y responde correctamente avanza 1 solo lugar llegando así a la meta.

Bingo (Fig. 5.7). Para elaborarlo se utilizaron materiales como cartulinas y papel plastificado para confeccionar tanto los cartones del juego como las consignas de las bolillitas; envases de huevos de chocolates, de rollos fotográficos o tapas de bidones para las bolillitas; arandelas pintadas o porotos como fichas para marcar los tantos y bidones o bolsas como bolilleros.



Figura 5.7. Elaboración del Bingo matemático

El juego está conformado por 10 cartones diferentes entre sí, 50 bolillas con sus respectivas consignas, 90 fichas y un bolillero.

En nuestra Facultad contamos ejemplares de Bingos matemáticos para trabajar con números naturales, números racionales, potenciación y razones trigonométricas.

En lo que sigue se muestra el reglamento para el Bingo de números racionales.

Se forman equipos de a lo sumo 3 jugadores. A cada uno de ellos se le reparte un tablero al azar con 9 fichas.

El profesor es el encargado de extraer las bolillas con su respectiva consigna. Luego de cada extracción, si es necesario, se destina un tiempo para hacer aclaraciones sobre esta última y resolverla entre todos en el pizarrón. Por ejemplo: recordar algún concepto, realizar una operación o gráfico, buscar la respuesta en las casillas.

En cada turno, aquellos equipos que tengan en su tablero la respuesta a la consigna extraída, deben colocar una ficha sobre ella.

Cuando un equipo tenga todos los casilleros del tablero fichados debe cantar ¡¡¡BINGO!!! El equipo ganador es el primero que cante «BINGO».

Observaciones:

No está permitido el uso de la calculadora.

La realización de cálculos auxiliares queda a criterio del profesor.

Las fracciones aparecen en los tableros en su forma irreducible.

El segundo grupo está conformado por recursos didácticos exclusivamente diseñados con un propósito de enseñanza. En esta ocasión incluimos: Geoplanos, Poliformas y Sectores circulares. En lo que sigue los describimos brevemente.

Geoplano (Fig 5.8). Hay de tipo triangular, cuadrangular y circular, siendo de estos dos últimos tipos los que se han diseñado desde el Profesorado en un solo tablero (denominándose bigeoplanos). Se puede adecuar a muchos contenidos de Matemática; por ejemplo, en el marco de Proyectos de Extensión en conjunto con docentes en ejercicio, con el geoplano cuadrangular se elaboró una secuencia didáctica para introducir la razón trigonométrica seno. Con el geoplano circular en muestras itinerantes hemos promovido el diseño de creativas mandalas que esconden propiedades matemáticas.

El recurso está conformado por un tablero con clavos o tornillos incrustados en él y bandas elásticas de distintos colores e hilo, para representar sobre ellos.

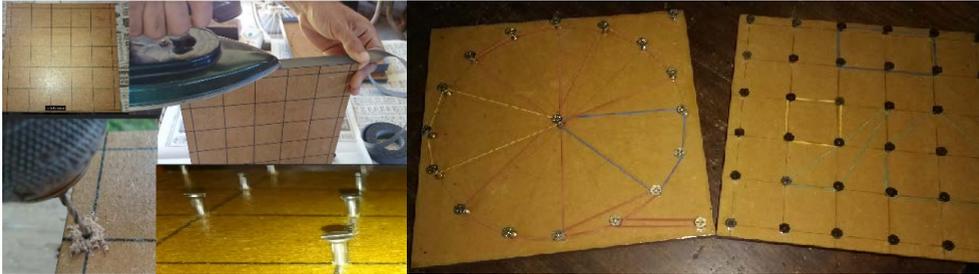


Figura 5.8. Elaboración del Geoplano

Los materiales que se utilizaron para diseñar los tableros fueron: madera MDF con forma cuadrada de 22cm de lado y 1,5cm de espesor, teniendo en cuenta que se colocan tornillos en ambas caras (caso contrario podría ser un poco más fina), 65 tornillos de 30mm (36 para la cara cuadrangular y 29 para la circular), cinta tapacantos para cubrir los bordes y barniz. Cabe advertir que antes de barnizarlos se marcaron los cuadrados o círculo/s en los tableros.

A continuación se mencionan ejemplos de variadas construcciones geométricas, empleando el geoplano cuadrangular:

Construir:

- Segmentos de distinta longitud. ¿Cuántos puedes construir?
- Segmentos paralelos a uno dado ¿Cuántos puedes construir?
- Un segmento de línea horizontal que toque a 3 tornillos. ¿Existe otro segmento con la misma característica pero con diferente longitud?
- Figuras con ejes de simetría.
- Un triángulo escaleno de área 18.
- Un cuadrado con menor área.
- Cuadrados que cumplan los siguientes requisitos: todos tendrán un mismo vértice en uno de los tornillos situado en una esquina del geoplano, el primero abarcará los 3 tornillos próximos; el segundo, los 8 tornillos próximos y así sucesivamente. ¿Cuántos cuadrados resultan?
- Figuras con el mismo perímetro pero diferente área.

Poliformas (Fig.5.9). Con las piezas de este recurso se puede armar cualquier cuerpo, en particular se diseñaron kits para construir los cinco sólidos platónicos, entre otras construcciones que pueden emerger de la imaginación y creatividad de los alumnos.

Para elaborar estas plantillas se utilizaron diferentes materiales como placas radiográficas desteñidas, cartones de variados envases o plásticos delgados. Se emplean bandas elásticas para ensamblar las piezas que pueden tener cualquier forma pero con la misma longitud de lado.

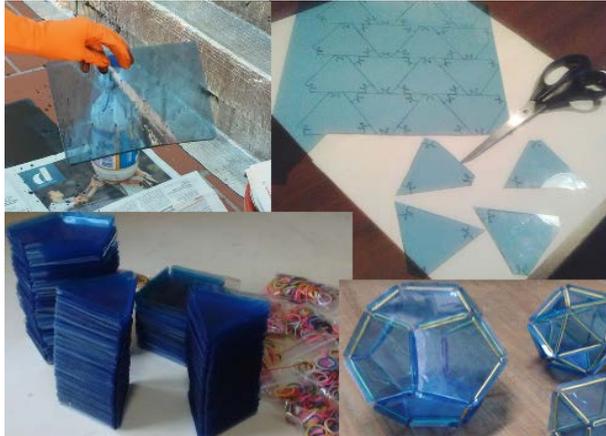


Figura 5.9. Elaboración de Poliformas

Los kits diseñados en el Profesorado cuentan con 55 piezas en total: 35 triángulos equiláteros, 7 cuadrados y 13 pentágonos regulares.

Luego de una exploración inicial con las poliformas, se invita a los alumnos a construir poliedros regulares convexos.

Se irán registrando los avances parciales en el pizarrón, procurándose llegar a que:

- Con triángulos se pueden construir tres cuerpos:



Concurren 3 en cada vértice

Tiene 4 caras en total

Se llama Tetraedro



Concurren 4 en cada vértice

Tiene 8 caras en total

Se llama Octaedro



Concurren 5 en cada vértice

Tiene 20 caras en total

Se llama Icosaedro

- Con cuadrados solo uno:



Concurren 3 en cada vértice

Tiene 6 caras en total

Se llama Hexaedro

- Con pentágonos regulares también solo uno:



Concurren 3 en cada vértice

Tiene 12 caras en total

Se llama Dodecaedro

- Con hexágonos ya no se pueden construir poliedros regulares convexos.

Sectores circulares (Fig. 5.9). Está diseñado con el objetivo de trabajar con sectores circulares, ángulos, representaciones de partes en un todo y sus equivalencias.

Para su elaboración se utilizaron discos compactos en desuso y etilvinilacetato (más conocido como goma EVA) de varios colores, para diferenciar las distintas partes en que fue dividido cada entero, pegamento para unirlos y latas metálicas (tarros de leche en desuso), cortadas y forradas, para contenerlos.



Figura 5.9. Elaboración de Sectores circulares

En el gabinete del Profesorado contamos con conjuntos de sectores circulares que incluyen un círculo representando al entero y otros 5 círculos divididos 2, 3, 4, 6 y 8 partes iguales.

Un ejemplo de actividad que se puede realizar con este recurso es:

Se comienza a representar con las piezas diferentes fracciones para analizar qué parte representan del entero, comenzando con $1/2$. Se socializa con el grupo-clase.

A continuación se solicita a los alumnos que representen $2/6$ con las piezas que tienen. Luego se buscan otras piezas que representen la misma cantidad que $2/6$. Se escriben en el pizarrón todas las fracciones que van surgiendo. Se pide lo mismo para la fracción $1/2$ y luego con otras fracciones.

9. Conclusiones

La formación inicial y continua de los profesores influye fuertemente en su postura ante el uso de materiales didácticos. Como se ha mencionado, si bien en las instituciones formadoras se nombran en reiteradas ocasiones, escasamente se trabaja haciendo un uso reflexivo de los mismos. Ese «hacer uso», desde la formación de un profesor, es un asunto que le compete a la didáctica específica, en pos a fortalecer criterios de enseñanza de la Matemática a partir del aprovechamiento del potencial del recurso en cuestión.

Se pretende dar a conocer el camino realizado a lo largo de estos años en la búsqueda de recursos que fortalezcan el aprendizaje y la enseñanza de contenidos relevados a partir del contacto con docentes de instituciones educativas. Lo compartido en el capítulo no es más que una apertura a un abanico amplio de posibilidades de diseño y armado de los recursos mencionados u otros.

Subrayamos que se trata de aprovechar estos tipos de recursos para hacer fluir la expresión de las ideas y mejorar las condiciones de trabajo en el aula, de distintos niveles educativos, con especial énfasis en la formación de profesores en Matemática.

Aclaremos que los recursos por sí solos no fortalecen la enseñanza y el aprendizaje, sino que tienen que estar acompañadas por secuencias e intencionalidades didácticas que acompañen dichos recursos. Se trata, básicamente, de nutrir la caja de herramientas del profesor en Matemática.

10. Referencias bibliográficas

Aguado, E. (2015). *Hecho en Latinoamérica: acceso abierto, revistas académicas e innovaciones regionales*. Buenos Aires: CLACSO.

Alonso, J., Subirats, I. y Martínez, M. (2008). *Informe APEI sobre acceso abierto*. Gijón: Asociación Profesional de Especialistas en Información.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Bressan, A. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 69-98). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Ed.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 155-177). Barcelona: ICE-Horsori.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Ek, G. A., Haas, N.E. y Uicab, G. R. (2010). Formemos cuadrados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 759-765.

Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *Uno*, (41), 77-97.

San Martín, P., Guarnieri, G. y Bongiovani, P. (2014). Propuesta sociotecnológica para el desarrollo de repositorios de Acceso Abierto adecuados al contexto universitario argentino. *Revista e-Ciencias de la Información*, 4(2), 1-27.

Terán, T. y Anido, M. (2010). Las propuestas de los docentes como constructores de sus propios materiales didácticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 515-523.

Uicab, G. R. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 1007-1013.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números*, 78, 73-94.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2012). Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Unión*, (29), 59-84.

Página intencionadamente en blanco.

A MODO DE CIERRE

*Marta Massa**

La formación del profesor en Matemática deviene de un proceso que ya se inicia, potencialmente, cuando alguien decide orientarse a la enseñanza de esta disciplina en función de su experiencia escolar como estudiante. Con una fuerte marcación afectiva, como señalan algunas investigaciones (Flores, Yedaide y Porta, 2013; Jackson, 1999; Porta, Álvarez y Yedaide, 2012), las prácticas de algunos de sus profesores imprimieron trazas memorables por «la pasión manifestada como interés en el estudiante, amor por el propio campo disciplinar y la seducción como estrategia para invitar al alumno a compartir esta pasión» (Porta y Yedaide, 2013, p. 39). Pero también dejan huellas las experiencias negativas. En ese contexto se configuran concepciones, actitudes y valores sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática que requieren ser revisados durante la formación inicial del profesor en función de posibles reproducciones como enseñante.

La formación académica específica, en una institución de Educación Superior, brinda la formación matemática y la formación didáctica requeridas para el ejercicio profesional de la docencia. En los diseños curriculares vigentes en este siglo se ha puesto especial interés en acompañar el proceso de integración entre estas formaciones desde las etapas iniciales mediante unidades curriculares específicas. En ellas se incorporan diferentes técnicas

* Profesora Nacional de Matemática, Física y Cosmografía (INSP), Licenciada en Física (UNR) y Doctora en Física (UNR). Profesor Titular Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

como las observaciones de aulas de Matemática, las entrevistas a profesores en actividad, los registros en videos de acontecimientos en el desarrollo de una clase (Llinares, Valls y Roig, 2008), el análisis de las propuestas en los libros de texto (Font y Godino, 2006), para que los profesores en formación analicen, discutan, evalúen y objeten con fundamento cuestiones inherentes a las prácticas de aula. Estos procedimientos promueven la revisión de las propias concepciones acerca de la disciplina y su enseñanza; la comparación de criterios y acciones entre un docente novel y uno experto, a fin de identificar los propios y reconocer puntos de trabajo (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995). Estas actividades tienden a instalar y consolidar paulatinamente la reflexión como proceso base en el desarrollo de la profesionalidad docente (Schön, 1992).

Al iniciarse en la docencia, ya como profesor en Matemática, el egresado experimenta las tensiones naturales que devienen de encontrarse con la responsabilidad de la enseñanza en un determinado curso, con decisiones que deben ser tomadas en general en el aula, ante las diversas circunstancias que se planteen en ella. A menudo, ante las contingencias de una convocatoria de una institución escolar para cubrir el reemplazo imprevisto de un docente en forma inmediata o casi inmediata, el profesor novel apela a actividades pensadas y discutidas en la etapa formativa. Pero a veces, ante la urgencia, puede recurrir a modelos de enseñanza internalizados como estudiante secundario y que fueron sujetos a revisión (y a veces a cuestionamiento a la luz de las orientaciones didácticas vigentes). Como sostiene Bozu (2010), la de los primeros años del ejercicio de la docencia «es una etapa importante en el proceso del desarrollo profesional, en la que, aparte de dudas, inquietudes y dificultades por las que atraviesa el profesor principiante, se ponen las bases del conocimiento profesional que permitirá al profesor novel afrontar los retos del quehacer educativo» (p. 56). Considera que en esta etapa «se entrelazan elementos procedentes de al menos tres ámbitos: *personales*, relativos al propio profesor debutante; *formativos*, referidos a su proceso de institución de formación inicial para las tareas docentes que debe realizar; *de práctica profesional*, concernientes tanto al ejercicio de sus roles y funciones adscritos como a los asumidos y, asimismo, al marco institucional escolar en que debe ejercerlos» (p. 66). La manera en que cada profesor articula tales ámbitos define el modo en que prosigue su desarrollo profesional y el perfil docente que irá configurando. La relación y el intercambio con otros colegas, la prosecución de estudios de posgrado o postitulación, la capacitación permanente, la reflexión sobre la práctica y sobre la propia formación, la

participación en investigaciones educativas son instancias que propician un empoderamiento profesional docente (Reyes, 2011), en tanto proceso social vivido por el profesor en conjunción con otros.

Es innegable la responsabilidad de los formadores de formadores en Educación Matemática en este proceso, cualquiera sea el área disciplinar en que se desempeñen. Ellos son quienes, al enseñar contenidos, definen miradas de los objetos matemáticos, establecen criterios, instalan precisiones lingüísticas, ofrecen la diversidad de registros y de representaciones semióticas que acompañan el razonamiento matemático y su comunicación (Duvall, 1999). En particular, para la formación de profesores, instituyen que se priorice o no un tipo de registros frente a otros y se muestre la riqueza cognitiva que emerge de las conversiones entre representaciones semióticas. La apropiación del saber a enseñar por parte de un futuro profesor requiere comprender que el conocimiento matemático precisa de argumentaciones diversas con racionalidades puestas en contexto mediante su problematización.

Desde esta perspectiva, la formación de profesores en Matemática se ha constituido en un eje de análisis que va más allá de pensar en torno a los contenidos que ha de incluir un diseño curricular actual. El conocimiento matemático que debe disponer un profesor hoy ha sido resignificado por Ball, Thames y Phelps (2008) atendiendo a la poderosa influencia que tiene la manera en que los docentes entienden la disciplina sobre la forma en que ellos la enseñan. Así estos autores diferenciaron en tres subdominios este tipo de conocimiento:

- el *conocimiento común del contenido*, entendiendo por tal a las nociones, procedimientos y habilidades para operar, formalizar ideas, derivar razonamientos, resolver problemas, que deben disponer quienes deben hacer uso de la Matemática. Es este tipo de conocimiento el que se trabaja en las aulas en las cuales se comparte la formación inicial de los futuros profesores en Matemática, licenciados en Matemática o ingenieros;
- el *conocimiento especializado del contenido*, que implica una comprensión consistente de los contenidos matemáticos involucrados para hacerlos enseñables. Este dominio involucra, por ejemplo, dilucidar entre las diferentes formas de presentar ideas matemáticas atendiendo al nivel etario del alumno, reconocer qué aspecto se está involucrando al usar una representación matemática particular, conectar las representaciones a ideas matemáticas subyacentes y a otras representaciones, formular preguntas matemáticamente productivas, discernir entre posibles ejemplos para ofrecer, apreciar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto. Este tipo de conocimiento conforma un requerimiento

profesional docente por cuanto demanda un posicionamiento con relación a la construcción del objeto matemático y sus formas de representación, en términos tanto epistemológicos como cognitivos;

- el *conocimiento en el horizonte matemático*, que atiende a la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan a través del currículum. Este tipo de conocimiento es el que un profesor ha de poner en acción para identificar posibles desviaciones en las ideas matemáticas tratadas en el aula, predecir posibles consecuencias matemáticas conflictivas de algo dicho o ejemplificado en un tratamiento escolar, resaltar y subrayar aspectos matemáticos que se consideren clave, anticipar y hacer conexiones matemáticamente consistentes, reconocer oportunidades matemáticas cuando surgen en la clase y no se tenían previstas (Sgreccia, 2012).

Los dos últimos subdominios posicionan el conocimiento matemático en el contexto de su enseñanza, con un sentido local –en lo que respecta al conocimiento especializado, a fin de hacerlo accesible al destinatario en formación–, y con una proyección amplia que ubica el contenido en su proceso de construcción conceptual y, al mismo tiempo, funciona como una ‘vigilancia epistemológica’ (Bachelard, 1988). La relación entre uno y otro subdominio resulta fundamental para posicionar una reflexión crítica que acompañe la toma de decisiones docentes.

Siguiendo la línea teórica instalada por Shulman (1986) relativa al *conocimiento didáctico del contenido*, Ball et al. (2008) proponen otros tres subdominios que acompañan el desarrollo del *conocimiento matemático para la enseñanza* requerido en la formación del profesor:

- el *conocimiento del contenido y de los alumnos*, que integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos (Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf, 2008). Este tipo de conocimiento está focalizado en cuestiones asociadas con el aprendizaje y con el proceso de comunicación lingüística. Le permite al docente anticipar qué pueden probablemente pensar o encontrar confuso sus alumnos sobre determinada explicación, predecir dificultades, orientar progresivamente instancias para el desarrollo del razonamiento matemático;
- el *conocimiento del contenido y del currículum*, comprende el conocimiento de aquello que está normado jurisdiccionalmente e institucionalmente en el sistema educativo formal, y sus fundamentos. Incorpora tanto una perspectiva longitudinal de la enseñanza de la Matemática como transversal para su articulación en las instancias formativas del alumno. Involucra un conocimiento de «los programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado, la variedad de materiales disponibles en relación con tales programas y el conjunto de características que sirven tanto como

- indicación o contraindicación para el uso de materiales curriculares particulares en circunstancias específicas» (Sgreccia, 2012, p. 68);
- el *conocimiento del contenido y de la enseñanza*, comprende los aspectos didácticos para hacer accesible un contenido matemático a otros, las formas de secuenciar contenidos y abordar su desarrollo, las ventajas y desventajas didácticas de las representaciones que se usan para enseñar un contenido específico, las orientaciones para organizar la gestión de la clase, los recursos didácticos, la manera de organizar un diálogo didáctico, la selección de ejemplos y contraejemplos, los criterios para el diseño de los instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

El diseño curricular de un Profesorado en Matemática se organiza con la intención de brindar los conocimientos necesarios para abordar la enseñanza de la disciplina en la educación secundaria y superior. La manera en que se desarrolla la enseñanza y se articulan los diferentes contenidos define el perfil de un programa formativo institucional, es decir, el alcance dado a cada uno de los subdominios implicados en el *conocimiento matemático para la enseñanza*. Esto involucra a los actores del proceso formativo: los profesores responsables de cada unidad curricular en función del sentido, profundidad y proyección que otorga a los contenidos abordados, a los estudiantes como futuros profesores en función de la manera en que asumen su compromiso con el aprendizaje y a quienes gestionan el funcionamiento de la carrera. La revisión periódica de este proceso permite reconocer fortalezas y debilidades, formular posibles cursos de acción y reorientar actividades.

En este sentido, la investigación se constituye en un medio de construcción sistemática de conocimientos a fin de posibilitar la elaboración y sistematización de experiencias innovadoras así como la producción de saberes específicos para la práctica educativa. Involucrar en la misma a los estudiantes avanzados, egresados de la carrera y profesores-investigadores en Educación Matemática es una forma de instalar una reflexión sustentada en información sistematizada así como también generar nuevas instancias de actuación profesional para contribuir a la producción de conocimiento didáctico en Matemática.

Los capítulos que anteceden sintetizan las indagaciones desarrolladas por un conjunto de docentes en Matemática, varios de ellos noveles, y estudiantes avanzados en el marco de un Proyecto de Investigación centrado en los procesos de formación inicial y continua del conocimiento profesional docente de profesores en Matemática. Si bien los estudios se han centrado en un Profesorado específico, las metodologías desarrolladas, los enfoques

teóricos adoptados y las perspectivas emergentes de sus resultados pueden orientar prácticas investigativas en otras instituciones formadoras.

Más allá de los resultados específicos de cada eje de trabajo, que han sido descritos en forma detallada, es importante resaltar el proceso de formación de quienes han participado del mismo y la apertura hacia otro ámbito de actuación profesional docente: la investigación en Educación Matemática.

Los objetos de estudio han sido diferentes. Se han indagado las cualidades de aquellos profesores que los ingresantes al Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, han reconocido como memorables y en forma comparativa entre los que les enseñaron Matemática y los de otras disciplinas. Los resultados evidencian el predominio de rasgos vinculados con el modo de gestión de la clase y relativos al trato con los alumnos. Los recursos didácticos para la enseñanza de la Matemática en la educación secundaria y, en particular, las posibilidades didácticas de un recurso digital como GeoGebra han sido objetos de un análisis específico en dos investigaciones comunicadas. Ambas se han caracterizado por un análisis de las secuencias para su uso en el aula, así como relativo a los procesos de formación y de acompañamiento docente para su uso en la construcción de conocimiento matemático. Otra de las investigaciones se ha focalizado en las prácticas de enseñanza para la construcción de conocimientos de Geometría en la formación inicial de profesores en Matemática, buscando indicadores que permitan reorientar o afianzar aspectos formativos específicos de la carrera. En este mismo sentido, ha interesado caracterizar los subdominios del *conocimiento matemático para la enseñanza* a partir de las evidencias emergentes en las narrativas que futuros profesores en Matemática realizan sobre su propio desempeño en instancias de Residencia, es decir, a finales de su formación inicial.

Más allá de los aspectos propios de cada uno de los estudios que se describen en este libro y que se constituyen en insumos para una didáctica específica, lo más importante de su contenido es lo que no está escrito (pero que queda suspendido en las entre líneas): los acuerdos para la organización de un trabajo conjunto (y respetarlo porque existe interdependencia), las formas de sortear imprevistos, las diferentes miradas para encontrar indicadores de las categorías teóricas asumidas en la información recogida, las discusiones para sostener hallazgos e interpretaciones propias, la apertura para entender y valorar las del otro y la capacidad para sintetizar aportes en

los seminarios grupales. Estos procesos han posibilitado vivir la experiencia de otra actuación profesional: la producción de conocimientos didáctico, emergente de cada uno de estos estudios y una comunicación argumentada de los mismos. Ello ha permitido, si bien en forma parcial, empezar a cubrir un área de vacancia en la oferta formativa del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, la experiencia de compartir la construcción de conocimiento matemático para la enseñanza fundamentado y metodológicamente validado. Seguramente en esas experiencias, algunos han agudizado su mirada, han encontrado nuevos interrogantes, se han replanteado ideas... El camino está abierto...

1. Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.
- Blanco, L., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en ciencias experimentales y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación*, (307), 427-446.
- Bozu, Z. (2010). El profesorado universitario novel: estudio teórico de su proceso de inducción o socialización profesional. *Revista Electrónica de Investigación y Docencia*, (3), 55-72.
- Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S. y Zopf, D. (2008). «Mathematical knowledge for teaching»: Adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 171-197.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali: Universidad Del Valle.
- Flores, G., Yedaide, M. M. y Porta, L. (2013). Grandes Maestros: Intimidad entre la educación y la vida. Pasión por enseñar en el aula universitaria. *Revista de Educación*, 4(5), 173-188.
- Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-88.
- Jackson, P. (1999). *Enseñanzas Implícitas*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 59-82.

- Porta, L. y Yedaide, M.M. (2013). La pasión educa: enunciaciones apasionadas de profesores memorables universitarios. *Revista Argentina de Educación Superior*, 5(6), 35-50.
- Porta, L., Alvarez, Z. y Yedaide, M. M. (2014). La enseñanza apasionada como agente emancipatorio en la formación de formadores. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía*, 7(1), 51-68.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de Matemáticas*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa. México: CINVESTAV.
- Schön, D. A. (1992). *La formación de profesores reflexivos*. Madrid: Paidós-MEC.
- Sgreccia, N. (2012). *La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica*. Tesis de Doctorado en Humanidades y Artes con mención en Ciencias de la Educación. Rosario: Universidad Nacional de Rosario.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 9(2), 1-30.

SOBRE LOS AUTORES

Natalia Sgreccia

Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Magíster en Didácticas Específicas con mención en el área Matemática (UNL) y Doctora en Humanidades y Artes con mención en Ciencias de la Educación (UNR). Profesor Asociado Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

Elisa Petrone

Licenciada en Matemática (UNR) y Magíster en Docencia Universitaria (UTN). Profesor Titular Dedicación Exclusiva jubilada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

Mariela Cirelli

Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR) y Licenciada en Matemática (UNR). Profesor Adjunto Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Jefe de Trabajos Prácticos en la Facultad de Ciencias Empresariales (Universidad Austral).

María Beatriz Vital

Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Licenciada en Matemática (UNR) y alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias mención Matemática (UNR). Profesor Adjunto Dedicación Semiexclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Docente Titular en la EESOPÍ N° 8007 «Colegio Escuelas Pías».

María Sol Mengarelli

Profesora en Matemática (UNR). Ayudante de Primera Categoría Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Reemplazante del Nivel Secundario.

Leticia Peralta

Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR). Jefe de Trabajos Prácticos Dedicación Simple en las Facultades de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, y de Ciencias Económicas y Estadística (UNR) y Docente Titular en la EESOPÍ N° 8010 «Nuestra Señora de la Misericordia».

Virginia Ciccio

Profesora en Matemática (UNR) y alumna del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática (UNCPBA). Profesor Adjunto y Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Docente Interina en la ENS N° 33 «Dr. Mariano Moreno».

Sabrina Grossi

Profesora en Matemática (UNR) y alumna de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), Docente Titular en la EESOPÍ N° 3033 «Colegio Rosario» y en la EEMPA N° 3041 «Padre Barbé».

Lucía Schaefer

Profesora en Matemática (UNR), alumna de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME) y del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática (UNCPBA). Ayudante de Primera Dedicación Semiexclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y Docente Titular en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España».

Gladys Brunini

Profesora en Matemática (UNR) y Especialista Docente de Nivel Superior en Educación y TIC (ME). Docente Suplente Término Fijo en la EEAT N° 36 «José Campodónico» y en el ISFD «Chajarí».

Facundo Chirino

Profesor en Matemática (UNR) y alumno de la Maestría en Práctica Docente (UNR). Docente Titular en la EESOPÍ N° 8239 «Colegio Los Arroyos».

Valeria Donato

Profesora en Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR) y Especialista Docente de Nivel Superior en Educación y TIC (ME). Docente Titular en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España» y en la EESOPÍ N° 3088 «San Bartolomé».

Hernán Martín Alegre

Profesor en Matemática (UNR) y alumno de la Especialización en Matemática en la Escuela Secundaria (ME). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), Docente Titular en la EESOPÍ N° 3033 «Colegio Rosario» y en la EESOPÍ N° 3039 «Colegio Parque de España».

Eliana Dominguez

Profesora en Matemática (UNR) y alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias mención Matemática (UNR). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR). Docente Titular en el ISPI N° 9024 «Inmaculado Corazón de María» y en la EESOPi N° 8011 «Nuestra Señora del Rosario».

Natalia Landaluce

Profesora en Matemática (UNR). Jefe de Trabajos Prácticos Dedicación Semiexclusiva en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (UNR) y Profesor Adjunto Dedicación Simple en la Facultad de Química (UCEL). Docente Titular en la EESOPi N° 8066 «Zona Parque» y en la EESOPi N° 3088 «San Bartolomé».

Sofía Pípolo

Profesora en Matemática (UNR). Ayudante de Primera Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

Marta Massa

Profesora Nacional de Matemática, Física y Cosmografía (INSP), Licenciada en Física (UNR) y Doctora en Física (UNR). Profesor Titular Dedicación Simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

OTRAS PUBLICACIONES DE FAHRENHOUSE

www.fahrenheithouse.com

LIBROS

- García Carrasco, J., & Canal Bedia, R. (2018). *Así somos los humanos: plásticos, vulnerables y resilientes*.
- Kaufmann, C. (Ed.). (2018). *Estudios sobre historia y política de la educación argentina reciente (1960-2000)*.
- Kaufmann, C. (Dir.). (2018). *Dictadura y Educación. Tomo 2: Depuraciones y vigilancia en las universidades nacionales argentinas*.
- Marim, V., & Manso, J. (2018). *A formação inicial do professor de educação básica no Brasil e na Espanha*.
- Kaufmann, C. (Dir.). (2017). *Dictadura y Educación. Tomo 1: Universidad y Grupos Académicos Argentinos (1976-1983)*.
- Herrán Gascón, A. de la. (2017). *Reflexiones pedagógicas desde el enfoque radical e inclusivo de la formación*.
- Martín-Sánchez, M., & Groves, T. (Eds.). (2016). *La formación del profesorado. Nuevos enfoques desde la teoría y la historia de la educación*.
- Cassano, F. V. (2016). *Penser la laïcité dans la société multiculturelle. Analyse historique du contexte français et réflexions pédagogiques*.
- González Gómez, S., Pérez Miranda, I., & Gómez Sánchez, A. M. (Eds.). (2016). *Mors certa, hora incerta. Tradiciones, representaciones y educación ante la muerte*.
- Herrán Gascón, A. de la. (2015). *Pedagogía radical e inclusiva y educación para la muerte*.
- Cagnolati, A. (Ed.). (2015). *The borders of Fantasia*.
- Hernández Huerta, J. L., Cagnolati, A., & Diestro Fernández, A. (Eds.). (2015). *Connecting History of Education. Scientific Journals as International Tools for a Global World*.
- Cagnolati, A., & Hernández Huerta, J. L. (Eds.). (2015). *La Pedagogía ante la Muerte: reflexiones e interpretaciones en perspectivas histórica y filosófica. Simposio de Historia de la Educación. Actas*.
- Hernández Díaz, J. M. (Coord.). (2014). *Influencias italianas en la educación española e iberoamericana*.
- Hernández Díaz, J. M. (Coord.); Hernández Huerta, J. L. (Ed.). (2014). *Historia y Presente de la Educación Ambiental. Ensayos con perfil iberoamericano*.
- Hernández Huerta, J. L. (Coord.). (2014). *En torno a la Educación Social. Estudios, reflexiones y experiencias*.
- Hernández Huerta, J. L., Quintano Nieto, J., & Ortega Gaité, S. (Eds.). (2014). *Utopía y Educación. Ensayos y Estudios*.

REVISTAS

- Foro de Educación* (www.forodeeducacion.com)
- Espacio, Tiempo y Educación* (www.espaciotiempoyeducacion.com)
- El Futuro del Pasado* (www.elfuturodelpasado.com)

Esta obra propende a socializar con la comunidad de educadores matemáticos de manera sintetizada nuestros aportes relativos a la construcción de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) desde los ejes en los que hemos aventurado en el Proyecto de Investigación «Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática» (1ING445, 2014-2017). Son cinco: la Biografía escolar en la formación del profesor en Matemática, entendida como el cúmulo de experiencias que los docentes han tenido siendo alumnos; las Narrativas pedagógicas como dispositivos en la formación docente, en tanto relatos subjetivos y dinámicos que posibilitan reconstruir el pasado; la Geometría que el profesor va configurando en su formación, como la tradicional rama de la Matemática que estudia las figuras y sus propiedades; el GeoGebra, como software paradigmático que conjuga diversas ramas de la Matemática y cuyas posibilidades didácticas dependen del profesor; los Materiales didácticos de los que puede valerse un profesor para su tarea de enseñanza de la Matemática. Esperamos que los resultados de nuestras investigaciones contribuyan a la formación de profesores en Matemática tanto en su etapa inicial como continua. Consideramos que si se estudian los procesos de acompañamiento en los que se construye el conocimiento propio de esta profesión y se generan propuestas fundamentadas desde los resultados de la investigación se está materializando una contribución superadora.