ELEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-ALGORÍTMICO

Marieta Del Jesús Azúa Menéndez
Miguel Alfredo Fienco Jalca
Nelson Enrique Villacreses Figueroa
Jorge Willian Castro Guerra
Ángel Leonardo Pin Pin
Douglas Wladimir Barcia Jalca

Ciencias y Letras

3ciencias

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-ALGORÍTMICO

Marieta Del Jesús Azúa Menéndez
Miguel Alfredo Fienco Jalca
Nelson Enrique Villacreses Figueroa
Jorge Willian Castro Guerra
Ángel Leonardo Pin Pin
Douglas Wladimir Barcia Jalca

Editorial Área de Innovación y Desarrollo,S.L.

ÁREA DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO, S.L.

C/ Els Alzamora, 17 - 03802 - ALCOY (ALICANTE) info@3ciencias.com

Primera edición: **agosto 2018**

ISBN: **978-84-949151-2-3**

DOI: http://dx.doi.org/10.17993/CcyLl.2018.26

AUTORES

Marieta del Jesús Azúa Menéndez. Ingeniería en Computación y Redes en la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Tecnólogo Programador en Sistemas por la Universidad Técnica de Manabí, Magister en Educación Informática por la Universidad de Guayaquil, Maestrante en Matemática y computación por la Universidad Internacional de la Rioja. Investiga temas relacionados a Telecomunicaciones, Informática, Técnicas Multivariantes, matemáticas y computación. Actualmente, profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí Carrera de Laboratorio Clínico. Ecuador.

Miguel Alfredo Fienco Jalca. Ingeniero Civil por la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Egresado en Maestría de Ingeniería Vial por la Universidad Técnica Particular de Loja. Investiga temas relacionados con la Vialidad. Y Tránsito. Actualmente profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí en los procesos de nivelación. Ecuador.

Nelson Enrique Villacreses Figueroa. Ingeniero Eléctrico en la Universidad Técnica de Manabí, Maestrante en Matemática y computación por la Universidad Internacional de la Rioja. (La Rioja – España). Investiga temas relacionados a Telecomunicaciones, Informática, Técnicas Multivariantes, Modelado y Simulación, Sistemas Numéricos y Circuitos eléctricos. Actualmente, profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Sistema Nacional de Nivelación y Admisión. Ecuador.

Jorge Willian Guerra Castro. Ingeniero en Computación y Redes en la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Magister en Educación Informática por la Universidad de Guayaquil, Magister en Gerencia Educativa por la Universidad Estatal del Sur de Manabí. Investiga temas relacionados al área de matemáticas, didáctica, informática y telecomunicaciones. Actualmente, profesor de la Unidad Educativa Coronela Filomena Chavez Mora. Ecuador.

Ángel Leonardo Pin Pin. Obtuvo su pre-grado de Ingeniería en Computación y Redes en la Universidad Estatal del Sur de Manabí, su pos-grado o maestría en educación informática la realizó en la universidad de Guayaquil, ha realizado los cursos de CISCO – ESPOL, para fundamentar investigaciones en temas relacionados con redes y telecomunicaciones, protocolos LAN y WAN. Actualmente, profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí carrera laboratorio Clínico. Ecuador.

Douglas Wladimir Barcia Jalca. Ingeniero en Sistemas computacionales en la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Maestrante en Matemática y computación por la Universidad Internacional de la Rioja. Investiga temas relacionados a señales informáticas, matemáticas y computación Telecomunicaciones, Informática, Técnicas Multivariantes. Actualmente, profesor de la Universidad Estatal del Sur de Manabí en los procesos de nivelación. Ecuador.

PRÓLOGO

La Matemática es de las ciencias más antiguas, nacidas en la aurora de la civilización humana bajo la influencia de las crecientes necesidades prácticas, sociales, científicas y tecnológicas.

El estudio lógico-histórico del desarrollo de la Matemática, muestra que ella define un armonioso sistema lógico-abstracto capaz de integrarse al complejo sistema de conocimientos científico-tecnológicos definido por otras ciencias (naturales, técnicas, sociales).

Las matemáticas necesariamente tienen que ver con dos cuestiones centrales que legitiman su presencia en los currículos y por tanto su estudio: Primero, la función que cumplen las matemáticas en la explicación de la realidad, por la cual la humanidad las convirtió en objeto de apropiación social y de reproducción cultural en el marco de instituciones especializadas y, segundo, la naturaleza específica de su estudio.

Las competencias y habilidades a ser desarrolladas en Matemáticas están distribuidas en tres dominios de la actividad humana: la vida en sociedad, la actividad productiva y la experiencia subjetiva. Por lo que la comunidad científica (Matemáticos, Psicólogos, Pedagogos y Educadores Matemáticos, etc.) se enfrenta a complejas interrogantes: ¿Para quién Enseñamos Matemática? ¿Qué Matemática Enseñar?, ¿Cómo enseñar Matemática? ¿Cómo aprender Matemática?

Al intentar dar respuesta a las interrogantes presentadas, aparece la dicotomía: Contextualizar la matemática sin que su carácter lógico-abstracto, de generalización y rigor se debilite. Mostrar la necesidad de su estudio independiente del nivel de aplicación al área de conocimiento.

A lo anterior se une la diversidad de los estudiantes que comienzan sus estudios universitarios, relativo a: procedencia social, características del nivel de la enseñanza precedente. Lo anterior define dos planos de dificultad: el de los alumnos, porque no es posible garantizarles ciertos parámetros comunes para su formación; y el de los docentes, porque dificulta el intercambio y la comunicación de experiencias pedagógicas.

Luego la misión del profesor no puede ser tan solo la de transmitir conocimientos previamente elaborados, y mucho menos la de brindar recetas que permitan resolver determinado tipo de "problemas" matemáticos; "De hecho no se enseña a resolver problemas, sino a comprender soluciones explicadas por el profesor como ejercicios" (Gil, D y M. Guzmán, 1993).

La obra que se presenta está dirigida a desarrollar en los estudiantes las habilidades y destrezas en temas básicos de matemática, que potencien el desarrollo del razonamiento lógico-algorítmico, permitiéndoles la comprensión de que las teorías y métodos de la matemática permiten formular modelos para la interpretación y solución de problemas: de la vida en sociedad, la actividad productiva y minimizar la subjetividad en la toma de decisiones.

Para el logro de lo anterior, proponemos partir de la estrategia didáctica Enseñanza por la Resolución de Ejercicios y Problemas, para promover el desarrollo del razonamiento lógico-algorítmico.

Problemas de razonamiento lógico-algorítmico son los que no dependen tanto del contenido sino del sentido común (natural, adecuado, correcto) y la presencia de procedimientos que definan acciones a seguir.

Se conciben los ejercicios y problemas de aplicación, mediante el estudio de casos. Generalizando al final de cada tema procedimientos que puedan atacar la mayor cantidad de casos. Es decir, mediante la inducción-deducción.

Los autores

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I: DOMÍNIO DE LOS NÚMEROS REALES (R)

1.1. Operaciones. Regla de los signos. Propiedades de las operaciones en (R). Representación geométrica de los elementos de R. Método de Inducción Matemática

El concepto de número desempeña un papel esencial en la Aritmética y en general en la Matemática, en el transcurso de los estudios realizados en los diferentes cursos escolares se estudian diferentes dominios numéricos:

- Dominio de los Números reales **(R)**
  - Dominio de los Números racionales (Q)
    - Dominio de los Números enteros **(Z)**
      - Dominio de los Naturales (N)
  - Números Irracionales **(I)**

(*)

A partir de los números naturales **(N)** cada dominio ha tenido que ser ampliado por necesidades prácticas del hombre. Así, se introdujeron los números **negativos** y el **cero**, formándose los enteros **Z.** Para indicar cantidades de magnitudes, como por ejemplo, la temperatura. En el orden operacional para resolver ecuaciones de la forma: x + 5 = 4, cuya solución es x = -1, el cual representa un número entero negativo.

Un número es racional Q; si puede ser representado en la forma con p que pertenece al dominio de los enteros y q a los naturales. Los números racionales se caracterizan por tener un desarrollo decimal periódico, con infinitas cifras.

Ejemplos:

$$5=\frac{5}{1}; \quad -\frac{1}{5}; \quad 7\frac{5}{4}=\frac{33}{4}$$

$$\frac{1}{3}=0{,}3333....=0{,}\bar{3}$$ (Se lee cero período 3)

$$\frac{1}{4}=0{,}25000....$$ (Aquí el período es 0)

8 = 8,0000.... (De igual el período también es 0)

Un número es irracional I, si no es posible expresarlo en la forma $\frac{p}{q}$. Los números irracionales se caracterizan porque su desarrollo decimal no es periódico y posee infinitas cifras:

Ejemplos:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142....$

$\pi \approx 3{,}14159265....$ (Pi)

$e \approx 2{,}718....$ (Número de Euler)

Como muestra el diagrama **(*)** el conjunto de los números reales es el más amplio de los conjuntos, estudiados.

1.2. Operaciones en R

Sea S un conjunto no vacío.

Definición: Diremos que S es cerrado respecto a la operación suma, si para todo elemento $\alpha, \beta \in S, \alpha + \beta \in S$.

El conjunto de los números reales es cerrado respecto a las operaciones **Suma, Diferencia, Producto, Cociente.**

1.2.3. Suma

S: Existe **z**, tal que, **x + y = z.**

Si z < 0, implica, que x + y < 0, para x <-y.

Si z > 0, implica, que x + y > 0, para x >-y.

1.2.4. Propiedades

S_1. Conmutativa.

x + y = y + x

S_2. Asociativa.

(x + y) + z= x + (y + z)

S_3. Existencia del elemento neutro.

x + 0 = 0 + x = x

S_4. Existencia de un opuesto para cada elemento de **R**.

x + (-x) = (-x) +x = 0

1.2.5. Producto

P: Existe z, tal que, x y = z.

Si z = 0, implica, x = 0 o y = 0, o ambos son cero.

Si z < 0, implica, que x, y son de signo contrario (uno positivo, el otro negativo).

Si z > 0, implica, x, y son del mismo signo (ambos positivo o ambos negativos).

P1. Conmutativa.

x y = y x

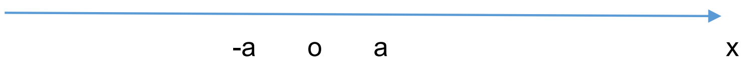
P_2. Asociativa.
$(x\ y)\ z = x\ (y\ z)$

P_3. Existencia del elemento neutro.
$x\ 1 = 1\ x = x$

P_4. Existencia de un opuesto para cada elemento de **R** diferente de 0.
$x\ x^{-1} = x^{-1}\ x = 1$

P_5. Distributiva respecto a la suma.
$z\ (x + y)\ z = zx + zy$

Consideremos una recta orientada $\mathbf{r_1}$, sobre ella coloquemos un punto **O**, tal que, a la derecha del punto coloquemos un punto **a**, al que llamaremos **escala**, a su izquierda simétrico respecto a O coloquemos el punto **–a**. Entonces la recta r_1 define un eje coordenado, denotémosle por **x**:



A cada punto sobre **x**, corresponde un número real y cada número real queda representado como un punto sobre **x**.

Ejemplos:

1. Di cuál es el dominio más restringido al que pertenecen los siguientes números:

a) -7 b) 2,005 005 005.... c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{64}$ e) $-4\frac{2}{5}$ f) 5,32

g) 2,010 110 01....

Solución:

a) **Z** b) **Q** c) **I** d) **N** e) **Q** f) **R** g) **Q**

1.2.6. Ejercicios propuestos

1. Di si son verdaderos (V) o falsas (F) las siguientes proposiciones. Justifica las falsas.

   a) $3{,}25 \notin \mathbf{Z}$

   b) $\frac{1}{5} \in N$

   c) **Q** es un dominio numérico.

   d) El número de habitantes de un país es siempre un número entero.

   e) Todo número real es racional.

   f) Todo natural es entero.

2. En la tabla se muestran las temperaturas de fusión de algunas sustancias:

Tabla 1: Temperaturas de fusión.

Temperaturas de fusión de algunas sustancias	
Sustancias	***Temperatura de fusión***
Agua	0ºC
CO_2	- 11,2ºC
Éter	- 14ºC
Parafina	70ºC

Fuente: elaboración propia.

a) Entre qué números enteros se halla la temperatura de fusión del CO_2.

b) Ordena las temperaturas de fusión en forma descendente.

Entre el agua y el éter ¿Cuál tiene menor temperatura de fusión?

c) Represente los valores de la Temperatura de fusión sobre el eje coordenado.

3. Utilizando las propiedades de los números reales demuestre que:

a) $a-(b-c)=(a-b)+c$

b) Si $ab=0$ entonces $a=0$ o bien $b=0$.

4. En la siguiente demostración justifique los pasos usando las propiedades de los números reales.

Teorema: Si $a,b,c,d \in R$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$

Demostración:

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}$

b) $=ab^{-1}dd^{-1}+cd^{-1}bb^{-1}$

c) $=adb^{-1}d^{-1}+cbd^{-1}b^{-1}$

d) $=(ad+cb)d^{-1}b^{-1}$

e) $=(ad+cb)\left(db\right)^{-1}$

f) $=\dfrac{ad+cb}{bd}$

g) Por lo tanto si $a,b,c,d \in R$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

5. Demuestre utilizando propiedades de los enteros que:

Si a y b son enteros y $a^2=2b^2$, entonces a y b son pares.

1.3. Sucesiones (progresiones) de números reales

Una sucesión de números reales es una relación que hace corresponder a cada número natural un número real. Se representa de las formas:

Mediante su término general { a_n }, para $\mathbf{n \in N}$, $\mathbf{a_n \in R}$

Representando una secuencia infinita de sus términos { a_1, a_2 ,... a_n,... }.

Cada uno de los números reales se llama **término** de la sucesión.

El conjunto ordenado de números impares {3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} es una sucesión de números reales.

Al término a_n = 3 + 2(n-1), se llama **término general (término n-esimo).** Es decir, existe una ley de formación de los elementos de la sucesión.

Sin embargo, no todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, en la importante sucesión de los números primos: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...}, no hay ninguna fórmula que exprese la ley de formación de los elementos.

1.3.1. Progresión aritmética

Consideremos la sucesión de término general a_n = 3n + 2

{5, 8, 11, 14, 17, 20,...}

Observamos que cada término de la sucesión es igual que el anterior más 3. Se dice que la sucesión an es una **progresión aritmética** y que d = 3 es la diferencia de la progresión.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números, tales que, cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por ***d***.

En la progresión anterior a_1 = 5, a_2 = 8 y d = 8- 5 = 3.

En ocasiones nos referimos a la progresión formada por los n primeros términos de la progresión; en este caso se trata de una progresión aritmética limitada.

Son progresiones aritméticas:

Los múltiplos de 2 o números pares: 2, 4, 6, 8, 10... La diferencia es d = 2.

Los múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15... La diferencia es $d = 3.$

Los múltiplos de a: $a, 2a, 3a, 4a, 5a$... La diferencia es $d = a.$

1.3.2. Término general

Fijémonos en la progresión aritmética ilimitada { a_1, a_2, ... , a_n, ... }

Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia, entonces:

$a2 = a1 + d$

$a3 = a2 + d = a1 + d + d = a1 + 2d$

$a4 = a3 + d = a1 + 2d + d = a1 + 3d$

Generalizando este proceso se obtiene el término general: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

1.3.3. Ejemplos

El término general de la progresión aritmética {5, 8, 11, 14, 17, 20,...}

$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$

El término general de una progresión aritmética en la que a1 = 13 y d = 2 es:

$a_n = 13 + (n - 1)\, 2 = 13 + 2n - 2 = 2n + 11$

Vamos a hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que :

$a_{11} = 35$ y $d = 4$.

Para ello escribimos $a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot 4$, es decir, $35 = a_1 + 40$, de donde:

$a_1 = 35 - 40 = -5$

Se puede conseguir otra expresión para el término general en función de otro término cualquiera, en lugar del primer término. Como $a_n = a_1 + (n - 1)\,_d$ y sea a_k un término cualquiera $a_k = a_1 + (k - 1)\, d$, $(k<n)$, despejando a_1 en ambas expresiones e igualando resulta: $a_n = a_k + (n-k)\, d$

1.3.4. Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado **razón**, que se representa por **r**.

1.3.5. Término general

Según la definición anterior, en la progresión geométrica, se verifica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$a_n = a_1\ r^{(n-1)}$

1.3.6. Ejemplo

¿Cuál es la razón de la progresión geométrica {3, 6, 12,...}?

La razón se obtiene dividiendo dos términos consecutivos, r = an / a(n-1):

r = 6 : 3 = 2

¿Cuál es el quinto término de una progresión geométrica en la que a1 = 2 y

r = 3?

Podemos ir hallando cada uno de los términos (2, 6, 18, 54, 162,...) multiplicando cada término anterior por 3. También se puede obtener directamente: $a_5 = a_1 \cdot r^{(5-1)} = 2\,(3)^4 = 162$

1.3.7. Inducción matemática

La comprensión del infinito es uno de los retos más apasionantes que existen. Todo lo que conoce el ser humano es finito y su experiencia sobre el mundo también lo es.

En matemáticas, el concepto de infinito es central. En la mayoría de las ocasiones, los matemáticos trabajan con conjuntos de objetos (como los números) que son infinitos. Muchas de las propiedades, resultados o teoremas se establecen para una infinidad de objetos o situaciones. La demostración de dichas propiedades requiere de métodos ingeniosos que permitan validarlas, no sólo para un número finito de casos particulares, sino para una infinidad de ellos.

Uno dé estos métodos es el Inducción Matemática, que sirve para probar o establecer que una determinada propiedad se cumple para todo número natural.

Las ideas principales se remontan a tiempos muy antiguos. Tienen razonamientos cercanos a la inducción matemática, tal es el caso de la demostración de Euclides (300 AC) sobre la existencia de una infinidad de números primos.

Alrededor del siglo X, Al-Karaji (953-1029 DC), matemático persa, musulmán, trabajó el teorema del binomio y la generación´on de sus coeficientes (triángulo de Pascal) utilizando un método que incluye los pasos principales de la Inducción.

El primer matemático en hacer una exposición explícita del Principio de Inducción Matemática fue Blaise Pascal (1623-1662. También es importante mencionar las contribuciones que hizo en este campo Pierre de Fermat, quien uso ampliamente su método del Descenso Infinito, el cual es una variante del Principio de Inducción Matemática.

Finalmente, en el siglo XIX, con base en los trabajos de Giuseppe Peano (1858-1932) y Richard Dedekind (1831-1916), se establece de manera definitiva el tratamiento sistemático y riguroso que se usa hoy en día para realizar demostraciones por Inducción Matemática.

1.4. Axiomas o postulados de Peano

1. El 1 es un número natural. 1 está en N, el conjunto de los números naturales.

2. Todo número natural n tiene un sucesor $S(n)$ (este axioma es usado para definir posteriormente la suma).

3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.

4. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor $S(n) = S(m)$, entonces, n y m son el mismo número natural $n = m$.

5. Si el 1 pertenece a un conjunto de números naturales, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. **Este último axioma es el principio de inducción matemática.**

Sea P una propiedad definida en los números naturales. Si 1 satisface esa propiedad y además si a partir de cualquier natural n que satisface esa propiedad se llega a que n+1, también la satisface, entonces cada número natural la satisface.

Para probar que una propiedad P se cumple en los números naturales, usando el principio de inducción matemática, se siguen los siguientes pasos:

1°) Se comprueba para n = 1 (Comprobación).

2°) Se asume que se cumple para n = k (Hipótesis de Inducción).

3°) Se predice que se cumple para n = k + 1 (Tesis).

4°) Se demuestra que si se cumple para n = k, entonces se cumple para n = k + 1 (Demostración).

Observación: En algunos casos la propiedad se cumple a partir de un cierto natural m > 1. Dada esa situación, en el primer paso se comprueba para n = m.

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que:

Si n es un natural, entonces n (n + 1) es divisible por 2.

a) Sea n = 1 , entonces:

n (n + 1) = 2 (Verdadero).

b) Sea n = k , entonces:

k (k + 1) es divisible por 2 (Hipótesis de inducción).

c) Sea n = k + 1 , entonces:

(k + 1)(k + 2) es divisible por 2 (Tesis).

d) Demostración:

(k + 1)(k + 2) = k (k +1) + 2(k + 1)

k (k + 1) es divisible por 2 (Por hipótesis de inducción).

2 (k + 1) es divisible por 2 (Entero par).

Por lo tanto (k + 1) (k + 2) es divisible por 2.

1.5. Ejercicios propuestos

1. Demostrar que la suma de los η primeros números naturales es igual a $\frac{\eta(\eta+1)}{2}$.

2. Probar que, $\forall \eta \in N : 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+\eta(\eta+2)=\frac{\eta(\eta+1)(2\eta+7)}{6}$.

3. Determinar si el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6.

4. Determinar si la suma de 3 enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

5. Determinar todos los números naturales para los cuales:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot \eta > 2n$.

CAPÍTULO II: CONSTRUCCIÓN DEL PLANO CARTESIANO (R2)

2.1. Representación geométrica de elementos de R2

Sean X, Y conjuntos no vacíos (al menos contienen un elemento).

El producto cartesiano de los conjuntos X, Y, lo representamos X x Y, es el conjunto de los pares ordenados (x, y), donde x X, y Y.

Ejemplo: Sean C = {1, 3} y D = {0, 2, 4}, entonces:

C x D={(1, 0), (1,2), (1,4), (3,0), (3,2), (3,4)}

D x C={(0, 1), (0,3), (2,1), (2,3), (4,1), (4,3)}

Como se observa en el ejemplo, el producto cartesiano no cumple la propiedad conmutativa del producto aritmético, como muestra C x D ≠ D x C.

El producto cartesiano se generaliza a n conjuntos. Sean los conjuntos X1, X2,..., Xn, el producto cartesiano de estos conjuntos queda expresado X1 x X2 x,..., x Xn.

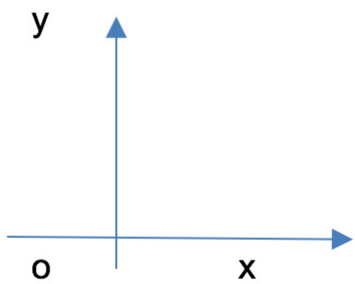
Un caso particular del producto cartesiano es la potencia de un conjunto. Sea X un conjunto cualquiera, llamaremos potencia n-esima del conjunto X, lo representamos por Xn, al producto n veces de X, Xn = X x X x,..., x X.

Como una aplicación del producto cartesiano se obtienen el plano, el espacio tri-dimensional, así como su generalización, el espacio n-dimensional.

2.2. Plano cartesiano

Sea R, conjunto de los números reales, tenemos:
$\Re^2 = \Re x \Re = \left\{(x_1, x_2) \middle| x_1, x_2 \in \Re\right\}$, caso bidimensional, geométricamente expresa, al Plano cartesiano (x , y).

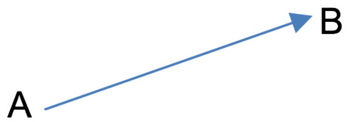
Definimos sobre el plano un sistema de coordenadas rectangulares. Sean r1, r2, ejes coordenados que se intersectan en un punto O, formando ángulos de 90°.



Denotémosle x, y. A x lo llamaremos eje de la abscisa, y eje de ordenada. Entonces cada punto queda representado por el par ordenado (x,y). Tal que a cada par ordenado corresponde un punto en $\Re^2$.

Llamaremos vector a un segmento de recta orientado con origen en A(x1,y1) y final en B(x2,y2). El vector se representa $\overline{AB} = \vec{v}$ (también se emplea la notación AB).

Ejemplo: Sea el vector



Los vectores, a diferencia de los escalares (números) que presentan sólo una característica **magnitud**. Presentan dos características: **magnitud y dirección.** La magnitud (longitud) es un número real no negativo, que expresa la distancia del punto A al punto B y la dirección por la saeta en el punto B.

Ejemplos:

Escalares: masa, temperatura, área, longitud, dinero.

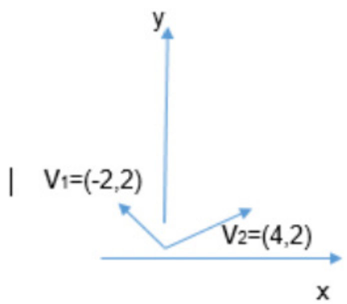
Vectores: fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración, campo eléctrico.

Lo anterior es una representación geométrica de vector muy usada por ingenieros y físicos.

Si los vectores se encuentran sobre una misma recta o sobre rectas paralelas se llaman vectores colineares. Si los puntos A y B coinciden, decimos que el vector es nulo. Su longitud es cero.

Vamos a emplear la notación algebraica que nos brinda el producto cartesiano en $\Re^2$, el vector como par ordenado (x, y), para todo x, $y \in R$ cuya magnitud es la distancia del origen (0,0) al punto P(x, y), la que se calcula $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La dirección queda definida por el punto P(x, y). Geométricamente queda representado:

Ejemplo:



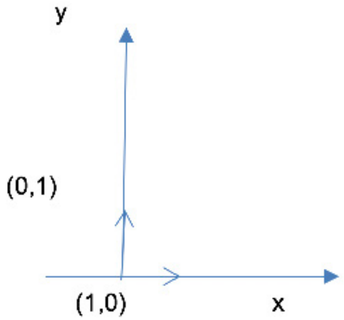
$$\left|\vec{v_1}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \qquad \left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

Sean $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ puntos cualquiera del plano, entonces para el vector AB, la longitud es expresada:

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Un vector lo llamamos unitario, si la longitud es la unidad (1).

Ejemplo: Sean los vectores, i=(1,0); j=(0,1), I i I =I j I =1.



Dados v_1=$(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$, v_2 = $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})$ $\in \Re^2$, $v_1 = v_2$, si y sólo sí, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

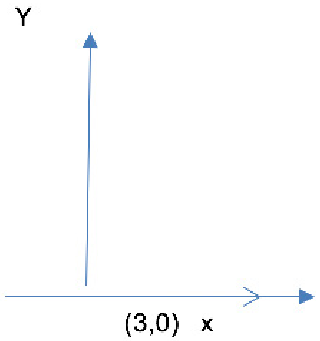
Mostremos que sobre $\Re^2 = \Re x \Re = \left\{(x_1,x_2) \middle| x_1,x_2 \in \Re\right\}$, se definen las operaciones:

2.3. Producto

Producto $\lambda \in R$ por $\left(x_1, y_1\right) \in \Re^2$.

$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) = (x_2, y_2)$; $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$; $(x_2, y_2) \in \Re^2$, $x_2, y_2 \in R$.

Ejemplo: 3 (1,0) = (3 1, 3 0) = (3,0).

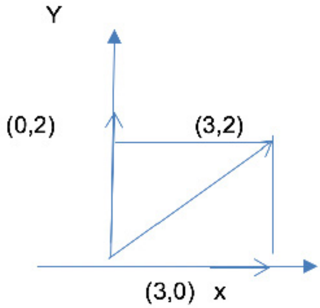


2.4. Suma

Suma de (x_1, y_1), (x_2, y_2) $\in \Re^2$.

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$; $x_3 = x_1 + x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$; $(x_3, y_3) \in \Re^2$; x_3, y_3 $\in R$.

Ejemplo: 3(1,0) + 2(0,1) = (3,0) + (0,2) = (3,2)



La diagonal del paralelogramo representa al vector (3,2).

2.5. Ejercicios propuestos

1) Representen los pares ordenados (puntos) en el plano X0Y expresados por los conjuntos C x D y D x C, del ejemplo.

2) Dados los conjuntos F = {0, 2, 4}, E= {x $\in$ N: 2 ≤ x < 4}.

a) Calcular E x F, F x E.

b) Representen los pares ordenados (puntos) en el plano X0Y.

c) Calcula la longitud de cada vector.

CAPÍTULO III: ELEMENTOS DEL ANÁLISIS COMBINATORIA

3.1. Cálculo de factorial de un número natural (N). Permutación y Combinación. Aplicación de las proporciones al cálculo de porcientos

3.1.1. Análisis combinatorio

Es la rama de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permite resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo, podemos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos, placas o loterías se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos.

Además, el estudio y comprensión del análisis combinatorio nos va a servir de herramienta para resolver y comprender problemas sobre la teoría de las probabilidades.

Sea $n \in N$. El símbolo n! se lee "ene factorial" y corresponde a la multiplicación de los números naturales consecutivos en orden descendiente, desde el n hasta 1.

n! = n (n-1) (n-2) (n-3)…1

Ejemplo: Calcular

6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

3.1.1.1. Principios fundamentales del Análisis Combinatorio

En la mayoría de los problemas de análisis combinatorio se observa que una operación o actividad aparece en forma repetitiva y es necesario conocer las formas o maneras que se puede realizar dicha operación. Para dichos casos es útil conocer determinadas técnicas o estrategias de conteo que facilitarán el cálculo señalado.

El análisis combinatorio también se define como una manera práctica, abreviada de contar; las operaciones o actividades que se presentan como eventos o sucesos.

Ejemplo:

1. Señalar las maneras diferentes de vestir de una persona, utilizando un número determinado de prendas de vestir.

2. Ordenar 5 artículos en 7 casilleros.

3. Contestar 7 preguntas de un examen de 10.

1. Designar 5 personas de un total 50 para integrar una comisión.

2. Sentarse en una fila de 5 asientos 4 personas.

3.1.2.Métodos de conteo

En diferentes casos se tomará de algún conjunto parte de sus elementos o todos ellos, para formar diferentes agrupaciones, que se van a distinguir por el orden de sus elementos o por la naturaleza de algunos de ellos. Si los elementos que forman una agrupación son diferentes entre sí, serán llamados agrupaciones sin repetición y si algunos de ellos son iguales se dirá que son agrupaciones con repetición.

Entre los métodos de conteo más conocidos tenemos: Permutación, Variación y Combinación.

3.1.2.1. Permutación

Es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos considerando el orden en su ubicación; cuando en el arreglo solo entran parte de los elementos del conjunto se llama variación. Es importante resaltar que el orden es una característica importante en la permutación, cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

Teorema:

El número de permutaciones de "n" objetos diferentes, tomados en grupos de k elementos (siendo k $\leq$n) y denotado por P_k^n , estará dado por:

$P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; donde: $n, k, N\ y\ \ 0 \leq k \leq$

Estas permutaciones son llamados lineales, porque los objetos son ordenados en una línea recta de referencia.

Ejemplo:

En una carrera de 400 metros participan 10 atletas. ¿De cuantas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce?

Se busca las diferentes ternas (k = 3) que se pueden formar con los 10 atletas (n = 10)

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\ 8\ \ 9\ \ 10}{7!} = \ 8\ \ 9\ \ 10 = 720$$

3.1.2.2. Combinación

Es cada uno de los diferentes arreglos que se pueden hacer con parte o todos los elementos de un conjunto dado, sin considerar el orden en su ubicación

El número de combinaciones de "n" elementos diferentes tomados de "k" en "k", con k$\leq$n ,está dada por:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...............(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)..........(1)}$$

Ejemplo:

Si disponemos de 5 puntos no coloniales, ¿cuál es el máximo número de triángulos que se podrán formar?

Para dibujar un triángulo solo es necesario 3 puntos en el plano, luego se escogerán 3 puntos (k = 3) de un total de 5 puntos (n = 5). Además, no importa el orden, ya que el triángulo ABC es igual al CBA; por lo tanto, se trata de una combinación.

$$C_3^5 = \frac{5!}{2! \quad 3!} = \frac{5 \quad 4 \quad 3}{3 \quad 2 \quad 1} = 10$$

OBSERVACIÓN:

1) En las permutaciones interesa el orden, se buscan ordenaciones.
2) En las combinaciones no interesa el orden, se busca agrupaciones.

3.2. Introducción a la teoría de las Probabilidades

La tarea de diseñar y fabricar un producto, cada día se hace más complejo, por la propia complejidad de los productos, la agresividad de las condiciones ambientales a que se ven sometido los productos, los costos de producción y mantenimiento.

La toma de decisiones se presenta como una relación de conflicto, entre **pasión y razón**, las teorías pirobalísticas se presentan como una herramienta útil a disminuir la pasión.

Espacio muestral: Conjunto de todos los resultados de un experimento, S.

Ejemplo: El M.E.E. quiere construir 2 nuevas hidroeléctricas (H) y quiere indicar cuantas hidroeléctricas (H) están en la Provincia de Cotopaxi (C) y cuántas en la Provincia de Guayas (G). Escribir S.

Solución: C y G toman valores 0, 1,2. Sea (C, G) $\rightarrow$ par ordenado

S = $\{(1,0),(0,1),(1,1),(0,2),(2,0),(0,0)\}$

Evento: cualquier parte de S. Cualquier $E \subseteq S$, incluye $S\, y \varphi$.

Ejemplo:

a) Cotopaxi y Guayas tienen la misma cantidad de Hidroeléctricas: $E_1 = \{(0,0),(1,1)\}$

b) Cotopaxi y Guayas no fueron tomadas en cuenta: $E_2 = \varphi$

c) Cotopaxi no recibió H: $E_3 = \{(0,1),(0,2),(0,0)\}$

d) Cotopaxi recibe al menos una H: $E_4 = \{(1,0),(1,1),(2,0)\}$

Si E3 y E4 no tienen elementos en común, se llaman eventos mutuamente excluyentes:

$$E_3 \cap E_4 = \varphi$$

Si $E_3 \cup E_4 = S$

Consideremos n el número de elementos de (S) y por (e) el número de elementos de cualquier $E \subseteq S$

Definición: Si los n elementos de S son igualmente posible y ocurren, e son considerados éxitos, entonces llamaremos probabilidad que ocurra "un" éxito:

$$P(E)=\frac{e}{n}$$

Ejemplo:

a) $P\left(E_1\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 33.3\%$

b) $P\left(E_2\right)=P\left(\varphi\right)=0$

c) $P\left(E_3\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$

d) $P\left(E_4\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$

Algunas propiedades de Probabilidad:

Dado S y $E\subseteq S$, la $P\left(E\right)$ cumple:

1. $0\leq P\left(E\right)\leq 1$
2. $P\left(S\right)=1; P\left(\varphi\right)=0$
3. Sean E1 y E2 eventos de S, MUTUAMENTE EXCLUYENTES, entonces: $P\left(E_1\cup E_2\right)=P\left(E_1\right)+P\left(E_2\right)$
4. Sean E1 yE2 eventos independientes de S, entonces:

$P\left(E_1\cap E_2\right)=P\left(E_1\right)\quad P\left(E_2\right)$

Las propiedades 3 y 4 son generalizadas para n eventos de S.

5. Sea $E^{'}$ el complemento de $E(E^{'}$ contiene todos los elementos de S que no están en $E)$, entonces $P\left(E^{'}\right)=1-P\left(E\right)$.

Demostración de las propiedades:

1. Sea $E\subseteq S$, tal que $0\leq e\leq n$, entonces:

Si $0<e<n, P\left(E\right)=\frac{e}{n}<1, 0<P\left(E\right)<1$

2. Si $e=n, P\left(E\right)=\frac{n}{n}=1=P\left(S\right),$ por ser $E=S$

Si $e=0, P\left(E\right)=\frac{0}{n}=0=P\left(\varphi\right)$, por ser $E=\varphi$

3.

$$P\left(E_1\right)=\frac{e_1}{n}, P\left(E_2\right)=\frac{e_2}{n}; P\left(E_1\cup E_2\right)=P\left(E_1\right)+P\left(E_2\right); \frac{e_1+e_2}{n}=\frac{e_1}{n}+\frac{e_2}{n}=\frac{e_1+e_2}{n}$$

4. $P\left(E_1 \cap E_2\right) = P\left(E_1\right) \quad P\left(E_2\right);$

$$\frac{e_1 \quad e_2}{n^2} = \frac{e_1}{n} \quad \frac{e_2}{n} = \frac{e_1 \quad e_2}{n^2}$$

5. Consideremos $E \; y \; E'$ son excluyentes tal que $E \cup E' = S$

$$P\left(E \cup E'\right) = P\left(S\right)$$

$$P\left(E\right) + P\left(E'\right) = 1$$

$$P\left(E'\right) = 1 - P\left(E\right)$$

Dado que el complemento de S es, de 5 se tiene:

$$P\left(\varphi\right) = 1 - P\left(S\right) = 1 - 1 = 0$$

3.3. Aplicación de la teoría de las probabilidades al estudio de sistemas

Todo producto en general puede ser considerado un sistema S, de n componentes independientes conectados, en serie, paralelo o ambas combinadas.

3.3.1. Funcionamiento de los sistemas

Sistema en serie: El sistema deja de funcionar si al menos uno de sus n componentes falla.

Sistema en paralelo: El sistema deja de funcionar si sus n componentes fallan.

3.3.2. Determinemos la confiabilidad para cada conexión

En la conexión en serie la confiabilidad de un componente no afecta la confiabilidad de los otros, entonces por la definición de confiabilidad, la probabilidad de que S funcione es igual al producto de la probabilidad de funcionamiento de cada uno de los n componentes. Aplicando 4 generalizada.

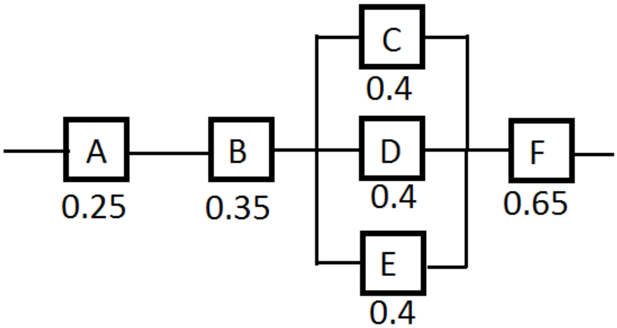
$$C_s = P_s = \prod_{i=1}^{n} P_i = P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n = \prod_{i=1}^{n} C_i$$

En la conexión en paralelo el sistema falla si sus n componentes fallan. Entonces la confiabilidad del sistema es la probabilidad de que el sistema falle, $P_s' = 1 - P_s$, obtenemos.

$$C_s = 1 - P_s = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P_i\right) = 1 - \left\{\left(1 - P_1\right)\left(1 - P_2\right) \ldots \left(1 - P_n\right)\right\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - C_i\right)$$

Ejemplo:

Dado el sistema, los valores representan los valores de confiabilidad de cada componente. Determinar la confiabilidad del sistema.



El sistema está compuesto por conexiones en serie y en paralelo.

$$C_{CDE} = 1-(1-0,4)^3 = 0,784$$
$$C_S = C_A C_B C_{CDE} C_F = (0,25)(0,35)(0,784)(0,65) = 0,04459$$

3.4. Aplicación de las proporciones al cálculo de porcientos

La proporción es uno de los conceptos estrechamente vinculados al estudio de las matemáticas. Con concepto se denomina a la relación que se da entre magnitudes medibles.

Generalmente a las proporciones se las describe como la relación entre razones. La **razón es la comparación de dos cantidades** que presentan la misma métrica, estar en la misma unidad de medida.

La **proporción es la igualdad entre dos o más razones**. O sea, **a/b = c/d,** equivale a una proporción.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces se pueden obtener cada una de las siguientes relaciones:

a) $a=\frac{b\ c}{d}$; b) $b=\frac{a\ d}{c}$; c) $c=\frac{a\ d}{b}$; d) $d=\frac{b\ c}{a}$ las cuales son de gran utilidad para el cálculo con por ciento en los estudios estadísticos, el diseño entre otras aplicaciones.

Ejemplos:

1. Calcula:

a) 25% de 76

Sabemos que: 25% = $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ y además que $76\ \frac{1}{4}=19$, por tanto la respuesta es 19.

b) ¿Qué tanto por ciento de 180 es 135?

Para realizar este ejemplo debemos aplicar una regla de tres como se ilustra a continuación:

Número	Representa en %
180	100
135	x

Por tanto, según recordamos en las proporciones se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{135 \quad 100}{180} = \frac{13500}{180}$$

x= 75%

El razonamiento empleado es aplicable al inciso a). Proponemos al lector que escriba la proporción.

3.5. Ejercicios propuestos

1. ¿De cuantas maneras pueden sentarse tres personas en una fila de 7 sillas?

2. ¿De cuantas formas distintas se pueden colocar 8 llaves en un llavero?

3. ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras pueden formarse con las letras de la palabra CIMA, sin que se repita ninguna letra? Una vez calculado el número, escríbelas todas ordenadamente.

4. ¿Cuántos subconjuntos distintos de tres elementos pueden formarse con un conjunto de 8 elementos?

5. En un club de baile de salón hay 7 chicas y 2 chicos. Se debe elegir un equipo de cuatro personas para una competición y al menos debe haber un chico en el equipo. ¿De cuántas formas se puede hacer la elección?

6. Las dimensiones de un terreno rectangular son 75 m de largo (a) y 600 dm de ancho (b). El 60% de su área se dedica al cultivo de vegetales y el resto del terreno está ocupado por una casa. ¿Qué área se dedica a cada menester?

7. En una clase de idiomas, la razón entre chicas y chicos es de 7 para 3. Si el total es de 35 alumnos, ¿cuántas chicas hay en esa clase de idiomas?

8. Para preparar una masa, es necesario emplear una taza de agua por cada cuatro tazas de harina de trigo. Si tenemos dieciséis tazas de harina, ¿cuántas tazas de agua deberíamos emplear?

9. Si yo tengo una canasta llena de peras y manzanas, de las cuales hay 20 peras y 10 manzanas. ¿Qué fruta es más probable que saque al azar de la canasta?

10. En una sala de clases hay 20 mujeres y 12 hombres. Si se escoge uno de ellos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que lapersona escogida sea hombre?

11. En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres.Han comido carne 16 hombres y 20 mujeres, comiendo pescado el resto. Si se elige una de las personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida sea hombre?

12. En un curso de 30 alumnos 18 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una persona está no sea mujer?

13. Se lanzan al aire consecutivamente dos monedas, la probabilidad de que la segunda sea cara es

14. Se lanza una vez un dado común, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par, menor que 5?:

15. La probabilidad de que al hacer rodar un dado, salga un número primo es:

16. .Se hacer rodar 2 veces un dado común y se considera la suma de los puntos obtenidos en ambos lanzamientos. La primera vez sale un número par. La probabilidad que la suma sea mayor que 10.

CAPÍTULO IV: POTENCIAS DE UN NÚMERO REAL

4.1. Operaciones

Sea **a** un número real, **n** un número fraccionario $n = \frac{x}{y}$, donde **x** que pertenece al dominio de los enteros, y a los naturales Escribamos la expresión $\mathbf{a_n} = \mathbf{a^{x/y}}$, que cumple las propiedades:

I) $a^1 = a$ **, n = 1, para todo x = y ;**

II) $a^0 = 1$ **, n = 0, para x = 0,**

Lo anterior es válido excepto para a = 0

III) Para todo n , $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Las propiedades I) y II), expresan casos particulares de III).

Para x = 1, tenemos, $a^{1/y} = \sqrt[y]{a}$, se lee raíz **y-esima**, del número real **a**.

En general, la expresión, $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$, define la raíz y-esima (radical), del producto de a por él mismo, x veces (radicando). Lo **llamaremos potencia x** del número real **a**, **ax = a a a … a**.

De la definición dada de número fraccionario y III), tenemos:

$$a^{-x/y} = \sqrt[y]{a^{-x}} = \sqrt[y]{\frac{1}{a^x}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}$$, directamente de III) $a^{-x/y} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}$

Para todo **a**, **b** número real y **n**, **m** números fraccionarios, se cumple:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ ; \qquad a^m \div a^n = a^{m-n}\ ; \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n\ ; \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4.1.1. Ejemplos

1. $\sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24}$
2. $\sqrt{20} \div \sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$
3. $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = \sqrt[3]{7^2}$
4. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[15]{3}$
5. $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$
6. $4\sqrt{3} \quad 5\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$

El trabajo con las potencias fraccionarias, podemos simplificarlos y reducirlo a expresiones equivalentes, sin que el resultado se altere, trabajando con expresiones más simples.

Ejemplo:

$\sqrt[15]{2^{30}} = 2^2$, porque $\left(2^2\right)^{15} = 2^{30}$

$\sqrt[12]{2^{24}} = 2^2$ Porque $\left(2^2\right)^{12} = 2^{24}$ luego se puede afirmar que $\sqrt[15]{2^{30}} = \sqrt[12]{2^{24}} = 2^2$

Los ejemplos muestran como aplicando las propiedades se pueden simplificar, las expresiones y reducir lo complicado e inseguro cálculo.

Ejemplo:

1. Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[8]{7^6}$ b) $\sqrt[6]{4}$ c) $\sqrt[9]{125a^6}$ d) $\sqrt[4]{625x^8y^{12}}$ e) $\sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4}$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{a^8b^3}{81z^5}}$

Recuerde emplear las propiedades anteriores.

a) $\sqrt[8]{7^6} = \sqrt[4\cdot2]{(7^3)^2} = \sqrt[4]{7^3}$

b) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt[9]{125a^6} = \sqrt[9]{\left(5a^2\right)^3} = \sqrt[3]{5a^2}$

d) $\sqrt[4]{625x^8y^{12}} = \sqrt[4]{\left(5x^2y^3\right)^4} = 5x^2y^3$

e) $\sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4} = \sqrt[3]{\dfrac{4^3z^3z}{y^3}} = \dfrac{4z}{y}\sqrt[3]{z}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{a^8b^3}{81z^5}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^8b^3}{3^4z^4z}} = \dfrac{a^2}{3z}\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{z}}$

2. Ordena los siguientes radicales de menor a mayor (en forma creciente).

a) $\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{7}$

Determinar el mcm de los radicales. Como el mcm de (3; 4, 6) = 12 debemos llevar los tres radicales al radical 12, para poder ordenar.

$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$

$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$

$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

Tenemos, los radicando que satisfacen 9<125<2401, entonces, $\sqrt[6]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$

a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[8]{12}$

$\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{12}$ como el mcm (2; 4; 8) = 8 entonces se deben expresar los tres radicales en ese índice para comparar:

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{2^2} = \sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{12}$

$\sqrt{3} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[8]{81}$

Tenemos $4 < 12 < 81$, entonces, $\sqrt[4]{2} < \sqrt[8]{12} < \sqrt{3}$

4.2. Racionalización de denominadores

La **Racionalización de denominadores** responde a la simplificación de radicales, el objetivo es eliminar los radicales del denominador de la expresión.

Mostremos en los ejemplos algunas estrategias a seguir:

Ejemplo:

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$ (se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar el radical del denominador).

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

b) $\dfrac{x-y}{2x\sqrt{x-y}} = \dfrac{(x-y)}{2x\sqrt{x-y}}\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}$

$$= \frac{(x-y)\sqrt{x-y}}{2x(x-y)} = \frac{\sqrt{x-y}}{2x}$$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Aplicando la diferencia de cuadrados, en general se obtienen las expresiones $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (a, b > 0) llamadas conjugadas, si un denominador se multiplica por la conjugada se eliminan los denominadores,($\sqrt{a}+\sqrt{b}$)($\sqrt{a}-\sqrt{b}$) = a- b.

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{-1}=-\sqrt{15}-2\sqrt{5}$$

4.3. Ejercicios propuestos

1. Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[6]{m^3}$ b) $\sqrt[4]{16x^5y^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3b^4(a+b)^3}$ d) $\sqrt[4]{\frac{128(x-y)^5}{81(x+y)^4}}$

(x > y > 0)

2. Obtén el radical común. Considera positivas todas las variables y expresiones que aparecen:

a) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{a^3}$ b) $\sqrt[3]{10}$ y $\sqrt{96}$ c) $\sqrt[8]{xyz}$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ y $\sqrt[12]{m}$

3. Si sabemos que $\sqrt[n]{a}$ **<** $\sqrt[n]{b}$ **con** $0\le a\le b$**, c mpara los siguientes radicales ordenándolos en forma decreciente:**

a) $\sqrt{10}$ $\sqrt[3]{11}$ $\sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[6]{2}$ $\sqrt[4]{5}$ $\sqrt[5]{2}$ c) $\sqrt[5]{25}$ $\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[6]{2}$

d) $\sqrt[4]{x}$ $\sqrt{y^2}$ $\sqrt[8]{x}$

(x < y, x > 1)

4. Racionaliza las siguientes expresiones considere las variables siempre positivas:

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3x}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\left(\left|b\right|<a\right)$

5. Calcular:

a) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{32}-\frac{10}{\sqrt{5}}+\sqrt{45}$ d) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$

CAPÍTULO V: ELEMENTOS DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA PLANA

5.1. Cónicas

El inicio formal de la geometría fue desarrollado por **Euclides**. En ella se comienza definiendo los términos primitivos como el **punto**, la **recta** y las **relaciones** Todos estos términos evocan una idea intuitiva.

Para comprender la definición de línea recta necesitamos conocer:

Lugar geométrico: Es el conjunto de pares ordenados, puntos (x, y), definidos por un sistema coordenado X O Y, sobre el plano. Donde X representa el eje horizontal (abscisa), Y el eje vertical (ordenada). O es el punto de intersección de los ejes. Tal que, el conjunto de pares ordenados satisface una ecuación, definen una curva, ***gráfica de la ecuación***.

Pendiente de una recta: Es la inclinación de una recta con respecto a la horizontal, eje de la abscisa.

5.2. Ecuación de la recta

Una recta queda definida por dos puntos. Sobre el plano X O Y.

Puede entenderse analíticamente como una función de una variable independiente, real. Un polinomio de grado 1, de coeficientes reales, en la variable real x, de la forma.

P(x) = m x + n, geométricamente, está definida por el conjunto de pares ordenados, (x, P(x)), que definen el lugar geométrico, de una línea sin salto, ni curvatura. Conjunto de puntos que satisfacen la ecuación.

Sean los puntos fijo sobre el plano X O Y, $\mathrm{A}(\mathrm{x}_\mathrm{A},\mathrm{y}_\mathrm{A}), \mathrm{B}(\mathrm{x}_\mathrm{B},\mathrm{y}_\mathrm{B})$. P(x, y) un punto cualquiera de X O Y. Estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BP}$ tengan la misma dirección, esto ocurre cuando son proporcionales.

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

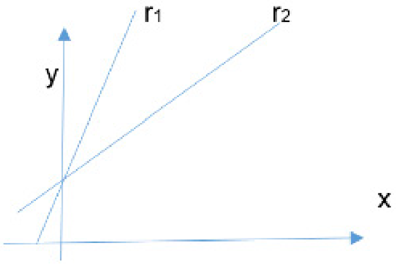
Despejando y, obtenemos la ecuación de la recta con pendiente,

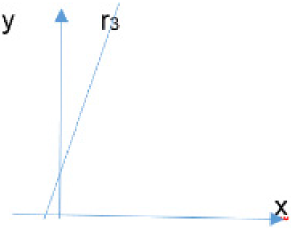
m = $\frac{\mathrm{y}_\mathrm{B}-\mathrm{y}_\mathrm{A}}{\mathrm{x}_\mathrm{B}-\mathrm{x}_\mathrm{A}}$, e intersecto en los puntos, x = 0, **y = n =** $-\frac{\mathrm{y}_\mathrm{B}-\mathrm{y}_\mathrm{A}}{\mathrm{x}_\mathrm{B}-\mathrm{x}_\mathrm{A}}\mathrm{x}_\mathrm{A}+\mathrm{y}_\mathrm{A}$. Una ecuación de la forma **y = mx + n. Ecuación general de la recta.**

Sea la recta r que pasa por los puntos $A(x_A,y_A),\ B(x_B,y_B)$. El punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$, M es:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Dado el sistema coordenado XOY. Las líneas rectas r1, r2, r3 representan rectas. r1, r2 responden a la ecuación P(x) = m x + n, r3 a la ecuación P(x) = a x, n = 0.





Dada dos rectas r1, r2, decimos que son **perpendiculares** si se cortan formando un ángulo recto (un ángulo de 90 grados).

Las rectas perpendiculares a la recta y = m x + n, son las rectas, y = (−1/m) x + k, es decir para las que se cumple, que el producto de las pendientes es igual-1.

En el plano, dos rectas son **paralelas** cuando no se cortan. Es decir, cuando no tienen puntos en común. **Dos rectas son paralelas, si tienen la misma pendiente, m.**

5.3. Ángulos y triángulos

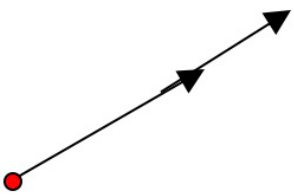
Llamamos **ángulo** a la región del plano comprendida entre dos semirrectos con origen en común. Al origen le llamamos vértice y a las semirrectas lados.

Su notación: Para nombrar los ángulos, utilizaremos los símbolos <abc y <xyz. Podemos además nombrarlos mediante una letra griega o con un número que se coloca dentro del ángulo. También se puede nombrar por la letra que represente al vértice.

Se expresan en grados o radianes.

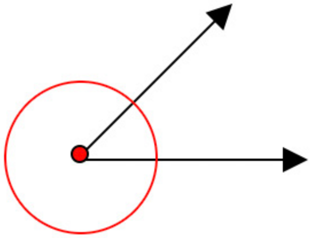
5.3.1. Los ángulos por su amplitud se clasifican

Nulos: **Si su medida es Cero. <xyz = 0°**



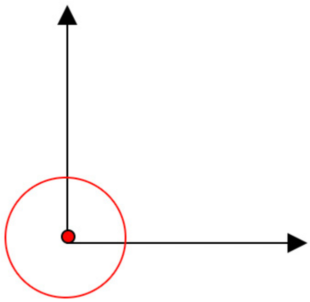
Ejemplo:

Agudos: Si su medida está comprendida entre 0° < <xyz < 90°.



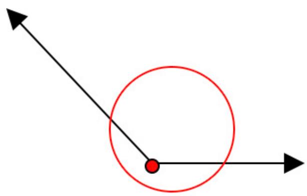
Ejemplo:

Rectos: si su medida es <xyz = 90°.



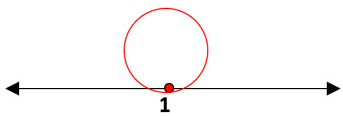
Ejemplo:

Obtusos: Si su medida está comprendida entre 90° < <xyz < 180°.



Ejemplo:

Llanos: Si su medida es 180°.



Ejemplo:

5.4. Operaciones con ángulos. (Suma y resta)

5.4.1. Suma de Ángulos

La suma de dos Angulo, <ABC y <DBE es otro ángulo <ABE tal que: m <ABE = m <ABC + m <DBE.

Ejemplo

Un ángulo mide 49° 38´45” y otro 31° 54´18”. ¿Cuánto mide la suma de estos ángulos?

49° 38´ 45”
+ 31° 54´ 18”

81° ~~93´~~ ~~63”~~
33´ 3”

63” = 60” + 3” = 1´ + 3”

Se sube 1´ a la columna de los minutos y se suma a estos.

Quedan 3´.

93´ = 60´ + 33' = 1° + 33'

Se sube 1° a la columna de los grados, y se suma a estos. Quedan 33'.

La suma buscada es 81° 33’ 3”.

5.5. Resta de Ángulos

La resta de un ángulo, <MBN, de otro <ABC de mayor medida, es otro ángulo, <NBC, tal que: m <NBC = m <ABC – m <MBN.

Ejemplo

Un ángulo mide 50° 17’ 33” y otro 25° 35’ 14”. ¿Cuánto mide la diferencia de estos ángulos?

49° 77'
~~50°~~ ~~17'~~ 33”

- 25° 35' 14”

24° 42' 19”

Como no podemos restar 35' de 17', “tomamos prestado” un grado, 1° = 60' y lo agregamos a los minutos: 60' + 17' = 77'.

La diferencia buscada es de 24° 42’ 19”.

¿Qué es la bisectriz de un ángulo y como se halla? Su gráfico.

Es el rayo que lo divide en dos ángulos de igual medida.

Clases de ángulos en termino de sus medidas y definir cada uno.

Par Lineal:

Es cuando dos ángulos son consecutivos y los lados no comunes son dos rayos opuestos.

Ángulos Suplementarios:

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.

Ángulos Complementarios:

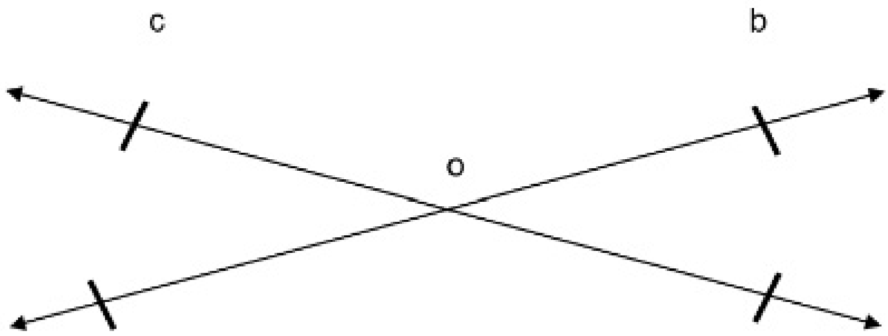
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.

¿Qué son ángulos congruentes?

Es cuando dos ángulos tienen la misma medida y su símbolo es: @.

¿Qué son ángulos opuesto por el vértice? (gráfico).

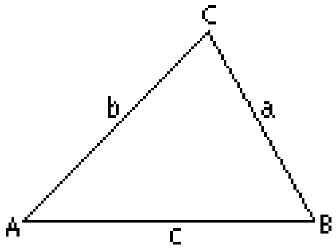
Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.



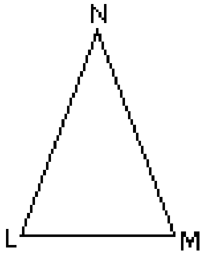
5.6. Triángulos

5.6.1. Clasificación de los triángulos por sus lados

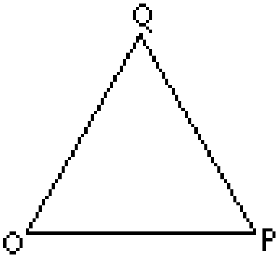
Triángulos Escálenos: No tienen ningún lado igual.



Triángulos Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.

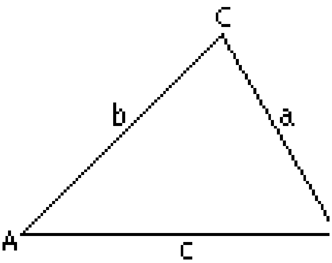


Triángulos Equiláteros: Son los que tienen tres lados iguales.

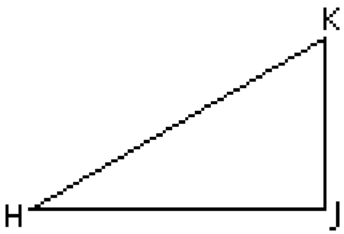


5.6.2. Clasificación de los triángulos por sus ángulos

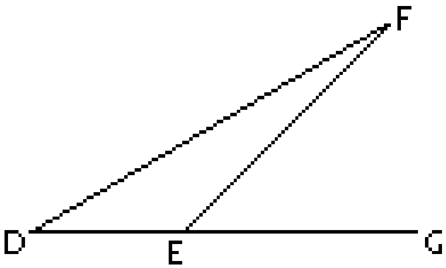
Acutángulos: Son todos los triángulos con todos los ángulos menores de 90°.



Rectángulos: Es cuando uno de sus ángulos es de 90°.



Obtusángulos: Es cuando uno de sus ángulos es mayor de 90°.



5.6.3. Perímetro y Área de un Triángulo.

El perímetro de un objeto es el valor del rededor externo de este. La medida del valor de la frontera que limita una región del plano.

Ahora, para encontrar el **perímetro** (*P*) del triángulo, suma las longitudes de los tres lados.

P = a + b+ c

El área de un objeto, es valor de la región contenido dentro de la frontera.

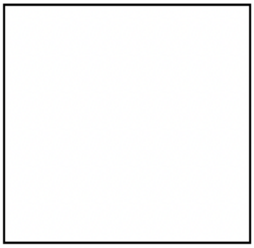
La fórmula del área de un triángulo es, (A), *A=(1/2) bh*, donde *b* es la longitud de la base del triángulo y *h* es la altura. En un triángulo rectángulo, el producto *bh* siempre se puede encontrar con la multiplicación de sus dos catetos juntas.

5.7. Cuadriláteros

5.7.1. Polígono con cuatro lados, o paralelogramo

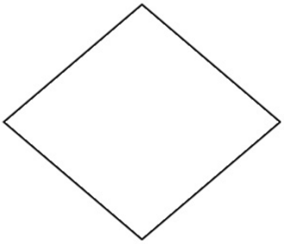
Polígono con 4 lados en el que cada lado es de igual longitud que su opuesto y los lados opuesto son paralelos entre sí.

Cuadrado: donde los cuatro lados son de igual longitud, se cortan formando ángulos rectos en ángulos rectos.

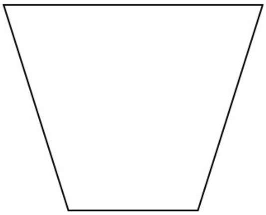


Rectángulo: sólo los lados opuestos son iguales, aunque todos los lados se cortan en ángulos rectos.

Rombo: donde todos los lados son iguales, pero éstos no se cortan en ángulos rectos.



Trapecio: Cuadrilátero con dos lados paralelo y bases de distinta longitud.



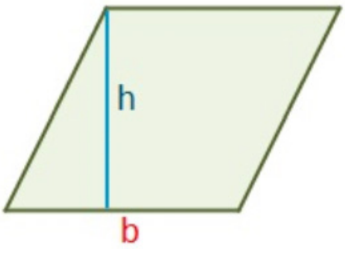
5.7.2. Perímetro y área de un paralelogramo

El **perímetro** de un **paralelogramo** es la suma de los cuatro lados.

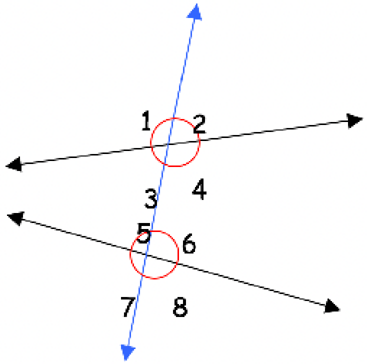
P = a + b+ c +d

Sea la base el lado *b* y la altura (*h*) relativa a la base. El **área** del paralelogramo es el producto de la base y la altura.

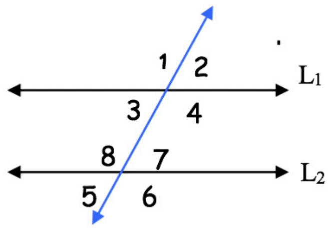
A = b h



Secante o Transversal: Es la recta que corta a otro par de rectas cualesquiera del plano.



Paralelas: Es cuando la intersección de dos rectas y una secante determina pares de ángulos alternos internos, alternos externos y correspondiente congruentes.



5.8. Polígonos (poliedros) convexos

Un polígono convexo es aquel en el que un segmento rectilíneo que une dos vértices cualesquiera del poliedro contiene sólo puntos que pertenecen a una cara o al interior del poliedro.

5.8.1. Cónicas

El primer matemático que inició el estudio de las cónicas fue Apolonio de Perga (262 – 190 a.C), que enseñó matemáticas en las universidades de Alejandría y Pérgamo. La importancia de las cónicas radica en su aplicación al estudio del movimiento de los planetas, debido a que estos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol, característica utilizada por Kepler en su estudio sobre los planetas y por Newton en Ley de Gravitación Universal.

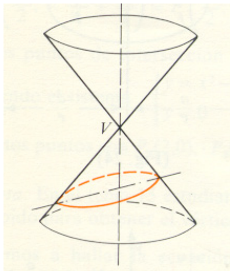
Otra aplicación de las cónicas es al estudio de los movimientos de los proyectiles, tiro horizontal y parabólico.

Se utilizan las propiedades de las cónicas para la construcción de antenas y radares, sabiendo que cualquier onda que incide sobre una superficie parabólica, se refleja pasando por el foco.

Se llaman secciones cónicas a las secciones producidas en una superficie de revolución por un plano que no pase por el vértice.

Una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = E$, representa la ecuación de una cónica con centro o vértice en el origen de coordenadas y cuyos ejes no coinciden con los ejes coordenados.

Si el plano corta todas las generatrices, la sección producida se llama **elipse**.

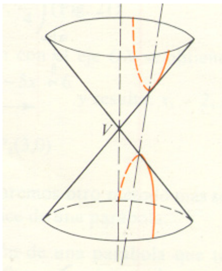


5.8.2. Circunferencia

Si además, el plano es perpendicular al eje del cono, la sección obtenida es una **circunferencia**.

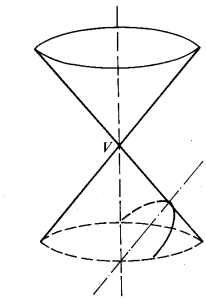
5.8.3. Hipérbola

Si el plano es paralelo a dos generatrices, entonces corta a las dos hojas del cono en una curva abierta formada por dos ramas separadas, llamada **hipérbola**.



5.8.4.Parábola

Si el plano es paralelo a una sola generatriz, la curva obtenida ya no es cerrada, está en una de las hojas del cono, consta de una sola rama y se llama **parábola**.



Desde este punto de vista, pueden establecerse los elementos notables tales como: centro, ejes, focos, directrices, y estudiar las propiedades métricas. Sin embargo se va a partir en este libro de definiciones basadas en propiedades métricas, y a partir de ahí se hallarán sus ecuaciones en un sistema cartesiano.

Distancia entre dos puntos A(a1,a2) y B(b1,b2) viene dada por:

$$\mathrm{d(A,B)} = \sqrt{(\mathrm{a}_1\text{-}\mathrm{b}_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

5.9. Ecuación analítica de la circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante. A esta distancia se le denomina radio de la circunferencia.

Sea C (a, b) el centro de la circunferencia, r el radio y P(x,y) un punto de la misma $d(C,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación obtenemos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Que es la ecuación de la circunferencia, conocidos su centro y radio.

Desarrollando la ecuación reducida: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$, restando r2 en ambos miembros:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

Si llamamos A =- 2 a ; B =- 2 b   y $C = a^2 + b^2 - r^2$, la ecuación de la circunferencia, en su forma general sería:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ejemplo: Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto (2, -1) y radio 3.

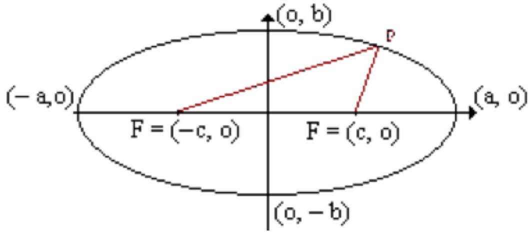
Escribimos la ecuación $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Ejemplo: La ecuación $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 4 = 0$ ¿corresponde a una circunferencia?.

Evaluemos el signo de $A^2 + B^2 - 4C$.

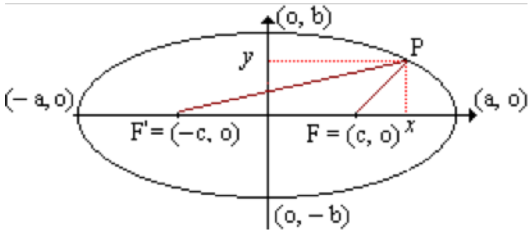
A = 3   B =- 5 y C =- 4 , entonces $3^2 + (-5)^2 - 4(-4) > 0$, podemos concluir que es la ecuación de una circunferencia.

5.10. Ecuación analítica de la elipse



Para simplificar la explicación ubiquemos a los focos sobre el eje de las x, situados en los puntos F (c,0) y F' (– c,0). Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas son (x, y). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje x. Entonces: PF + PF' = 2a. Aplicando el Teorema Pitágoras tenemos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$



Elevamos al cuadrado ambos miembros para sacar las raíces y desarrollamos los cuadrados (ver operación) queda finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si la elipse estuviese centrada en un punto cualquiera (p, q) la ecuación debería de ser:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que: $b^2x^2 + a^2y^2 - 2xpb^2 - 2yqa^2 + p^2b^2 + q^2a^2 - a^2b^2 = 0$

Si hacemos: $A = b^2$

$B = a^2$

$C = -2pb^2$

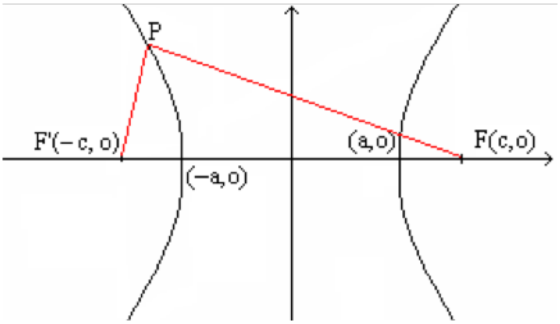
$D = -2qa^2$

$E = p^2b^2 + q^2a^2 - a^2b^2$

Tendremos la ecuación: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde podemos comprobar que es igual que la de la circunferencia excepto que los términos A y B no tienen por qué ser iguales.

5.11. Ecuación hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.



Ecuación analítica de la hipérbola: nuevamente ubiquemos los focos sobre el eje x, F = (c,0) y F' = (– c,0), y tomemos un punto cualquiera P = (x, y) de la hipérbola. En este caso, la diferencia de las distancias entre PF y PF' es igual al doble de la distancia que hay entre el centro de coordenadas y la intersección de la hipérbola con el eje x. Entonces tendremos que: PF – PF' = 2a

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y procediendo matemáticamente podemos llegar a esta expresión: $(c^2 - a^2).\ x^2 - a^2y^2 - (c^2 - a^2)\ a^2 = 0$. Nuevamente a partir del dibujo y aplicando Pitágoras podemos obtener que $c^2 = a^2 + b^2$ y por lo tanto la ecuación nos queda: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividiendo cada término por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (p, q) la ecuación queda definida:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

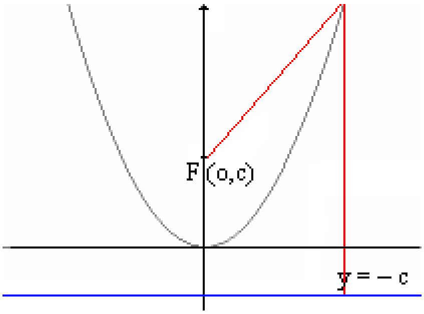
Asíntotas: son rectas que jamás cortan a la hipérbola, aunque se acercan lo más posible a ella. Ambas deben pasar por el "centro" (p, q).

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x + \left(q - \dfrac{b}{a}.p\right) \\ y = -\dfrac{b}{a}x + \left(q + \dfrac{b}{a}.p\right) \end{cases}$$

Parábola: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

5.12. Ecuación analítica de la parábola



Supongamos que el foco esté situado en el punto (0,c) y la directriz es la recta y = – c, por lo tanto el vértice está en su punto medio (0,0), si tomamos un punto cualquiera P = (x , y) de la parábola y un punto Q = (x, – c) de la recta debe de cumplirse que: PF = PQ

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + c)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros: $x^2 = 4cy$

Si la parábola no tiene su vértice en (0,0) si no en (p, q) entonces la ecuación sería: $(x- p)^2 = 4c(y - q)$

desarrollando la ecuación tendremos: $x^2 + p^2 - 2xp - 4cy + 4cq = 0$

Si hacemos D = – 2p

E = – 4c

F = $p^2 + 4cq$

obtendremos que es: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, en la que podemos observar que falta el término de y^2.

Observación: es de destacar que el término x y no aparece, la razón es que se ha supuesto que los ejes de simetría de las cónicas son paralelos a los ejes de coordenadas; en caso contrario aparecería este término, que como es lógico dependerá del ángulo de inclinación de los ejes.

5.12.1. Ejercicios Propuestos

1.- Halla la distancia entre los puntos A(2,-1) y B(-1, 3).

2.- Halla la distancia entre los puntos A(3,-2) y B(0,1).

3.- Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto (0, 0) y radio 3.

4.- Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto (3, -2) y radio .

5.- Halla el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2-8x+4y-13 = 0$.

6.- Halla el centro y el radio de la circunferencia $2x^2+2y^2-8x-4y-8 = 0$.

7.- Indica cuales de las siguientes ecuaciones se corresponden con una circunferencia:

a) $x^2+y^2-13 = 0$

b) $x^2+y^2+x+y+5 = 0$

c) $x^2+y^2+x+2y+5/4 = 0$

8.- Calcula la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ y la recta $3x + y - 5 = 0$.

9.- Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.

10.-Hallar la ecuación de la elipse de foco F(7, 2), de vértice A(9, 2) y de centro C(4, 2).

11.- Determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$ b) $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$ C) Pasa por los puntos $(4, \sqrt{8})$ y $(2\sqrt{3}, 2)$

12.-Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los vértices de la hipérbola 50 y 2.

13.-Determina la posición relativa de la recta x + y- 1 =0 con respecto a la hipérbola.

x2- 2y2 = 1

14.- Determina las ecuaciones de las parábolas que tienen:

a) De directriz x = 2, de foco (-2, 0).

15.-Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de la directriz de las parábolas:

a) $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

b) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

16.- Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical y que pasa por los puntos: A(6, 1), B(-2, 3), C(16, 6).

5.13. Trigonometría

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía.

El concepto de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría. Un ángulo trigonométrico se genera con un radio que gira. Los radios OA y OB (Figuras 1A, 2B y 3C) se consideran inicialmente coincidentes con OA. El radio OB gira hasta su posición final. Un ángulo y su magnitud son positivos si se generan con un radio que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj. Dos ángulos trigonométricos son iguales si sus rotaciones son de igual magnitud y en la misma dirección.

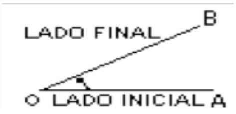


Figura 1: Ângulo trigonométrico A.

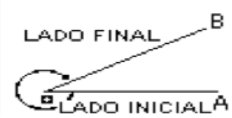


Figura 2: Ângulo trigonométrico B.

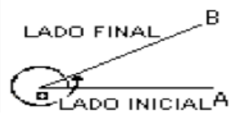


Figura 3: Ângulo trigonométrico C.

Una unidad de medida angular se suele definir como la longitud del arco de circunferencia, como s en la Figura 4, formado cuando los lados del ángulo central (con vértice en el centro del círculo) cortan a la circunferencia.

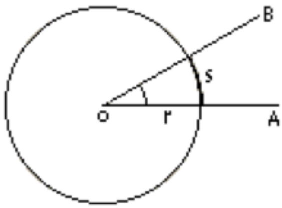


Figura 4: Arco de circunferencia.

Si el arco s (AB) es igual a un cuarto de la circunferencia total C, es decir, s = 3C, de manera que OA es perpendicular a OB, la unidad angular es el ángulo recto. Si s = 1C, de manera que los tres puntos A, O y B están todos en la misma línea recta, la unidad angular es el ángulo llano. Si s = 1/360 C, la unidad angular es un grado. Si s = YC, de manera que la longitud del arco es igual al radio del círculo, la unidad angular es un radián. Comparando el valor de C en las distintas unidades, se tiene que:

1 ángulo llano = 2 ángulos rectos = 180 grados = radianes

Cada grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas segundos. En radianes se expresan con la abreviatura rad. $61^{\circ}28'42{,}14'' = 1.073 \text{ rad} = 1{,}073$

Se sobreentiende que el último valor es en radianes. Si el ángulo está dado en radianes, entonces se puede usar la fórmula s = r para calcular la longitud del arco s; si viene dado en grados, entonces:

$$s = \frac{\pi r}{180}\,\theta$$

5.13.1. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son aquellas que dependen de la magnitud de un ángulo. Se dice que un ángulo situado en un plano de coordenadas rectangulares está en su posición normal si su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

En la Figura 3, el punto P está situado en una línea recta que pasa por el origen y que forma un ángulo con la parte positiva del eje x. Las coordenadas x e y pueden ser positivas o negativas según el cuadrante (I, II, III, IV) en que se encuentre el punto P; x será cero si el punto P está en el eje y o y será cero si P está en el eje x.

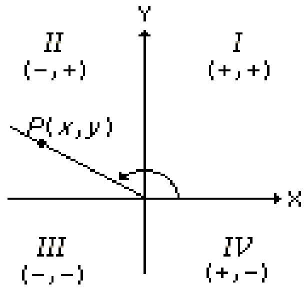


Figura 5: Punto P situado en una línea recta.

Las seis funciones trigonométricas más utilizadas pueden ser definidas de la siguiente manera. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Figura 6: Funciones trigonométricas.

Como la x y la y son iguales si se añaden 2p radianes al ángulo —es decir, si se añaden 360°— es evidente que sen () = sen. Lo mismo ocurre con las otras cinco funciones.

Dadas sus respectivas definiciones, tres funciones son las inversas de las otras tres, es decir:

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}\ ;\ \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}\ ;\ \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

Figura 7: Funciones inversas.

Si el punto P, de la definición de función trigonométrica, se encuentra en el eje y, la x es cero; por tanto, puesto que la división por cero no está definida en el conjunto de los números reales, la tangente y la secante de esos ángulos, como 90°, 270° y-270° no están definidas. Si el punto P está en el eje x, la y es 0; en este caso, la cotangente y la cosecante de esos ángulos, como 0°, 180° y-180° tampoco está definida. Todos los ángulos tienen seno y coseno, pues r no puede ser igual a 0.

Como r es siempre mayor o igual que la x o la y, los valores del seno y coseno varían entre -1 y +1. La tangente y la cotangente son ilimitadas, y pueden tener cualquier valor real. La secante y la cosecante pueden ser mayor o igual que +1 o menor o igual que -1.

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos se pueden obtener con facilidad. Por ejemplo, en un triángulo rectángulo isósceles, se tiene por el Teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45°$$

$$= 1;\ \ \text{y}\ \ \sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

5.13.2. Igualdades trigonométricas

Las siguientes fórmulas, llamadas igualdades o identidades, muestran las relaciones entre las diversas funciones trigonométricas, que se cumplen para cualquier ángulo, o pareja.

I. $\operatorname{sen}\theta \operatorname{cosec}\theta = \cos\theta \sec\theta = \operatorname{tg}\theta \operatorname{cotg}\theta = 1$

II. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta};\ \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

III. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta -$

$\operatorname{cotg}^2\theta = 1$

IV. $\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \pm \cos\theta \operatorname{sen}\phi$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta \cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

$$\operatorname{tg}(\theta \pm \phi) = \frac{\operatorname{tg}\theta \pm \operatorname{tg}\phi}{1 \mp \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\phi}$$

V. $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta);\ \cos\theta = \cos(-\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta - 180°) = \cos(\theta - 90°)$

$\cos\theta = -\cos(\theta - 180°) =$

$-\operatorname{sen}(\theta - 90°)$

5.13.3. El triángulo general

Entre las diversas aplicaciones prácticas de la trigonometría está la de determinar distancias que no se pueden medir directamente. Estos problemas se resuelven tomando la distancia buscada como el lado de un triángulo, y midiendo los otros dos lados y los ángulos del triángulo. Una vez conocidos estos valores basta con utilizar las fórmulas que se muestran a continuación.

Si A, B y C son los tres ángulos de un triángulo y a, b, c son los tres lados opuestos respectivamente, es posible demostrar que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \text{ (regla del seno)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ (regla del coseno)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)} \text{ (regla de la tangente)}$$

Figura 8: Regla del seno, coseno, tangente.

Las reglas del coseno y de la tangente tienen otras dos expresiones que se obtienen rotando las letras a, b, c y A, B, C.

Estas tres relaciones son suficientes para resolver cualquier triángulo, esto es, calcular los ángulos o lados desconocidos de un triángulo, dados: un lado y dos ángulos, dos lados y su correspondiente ángulo, dos ángulos y un ángulo opuesto a uno de ellos (que tiene dos posibles soluciones), o los tres lados.

5.13.4. Razones trigonométricas del ángulo

Suma

Sen (a + b) = sena · cosb + cosa · senb

Cos (a + b) = cosa · cosb + sena · senb

Tg (a + b) = sen (a + b) / cos (a + b) = tga + tgb / 1-tga + tgb

Trasformación de suma de productos

Sen(2a) = Sen (a + a) = 2(sena · cosa)

Cos (2a) = cos (a + a) = cos2a- sen2a

Tg (2a) = tg (a + a) = 2tga / 1- tg2a

Tabla 2: Ángulos notables.

Valores de las funciones trigonométricas en ángulos notables.								
	0º	***30º***	***45º***	***60º***	***90º***	***180º***	***270º***	***360º***
SenX	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0	-1	0
CosX	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	0	1
TgX	0	√3/3	1	√3	∅	0	∅	0

Fuente: elaboración propia.

5.14. Ejercicios propuestos

1.- Determinar cuáles si son paralelas (o perpendiculares) dos a dos.

a: $y=-3x+5$

b: $y=x/3+2$

c: $y=-3x+$

2.- Encontrar el valor de b para que las rectas perpendiculares $y=3x+1$ e $y=2x+b$ se corten en el punto $P=(2,4)$.

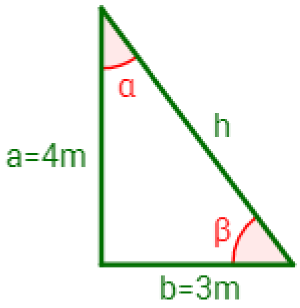
3.- Sin representar las siguientes rectas, determinar cuáles son paralelas y/o perpendiculares entre sí:

a: $y=3x+2$

b: $y=-3x+2c$

d: $y=2x+5$

4.- Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 4m y el otro mide 3m:



Calcular la hipotenusa y los ángulos α y β.

5.- Miguel desea calcular la altura de dos edificios que están situados a 100 metros el uno del otro. Como tiene acceso al edificio más alto, observa que desde la azotea de dicho edificio se avista la azotea del otro bajo un ángulo de α=73,3º. Desde la base del mismo edificio, se ve la azotea del otro edificio bajo un ángulo de β=19,29º.

¿Puede Miguel calcular la altura de los edificios con los tres datos con los que cuenta? En caso afirmativo, ¿cuál es la altura de cada uno?

6.- Un campo rectangular tiene 170 m de base y 28 m de altura. Calcular: Las hectáreas que tiene. El precio del campo si el metro cuadrado cuesta 8 dólares.

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, de 10 cm, de lado que se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 4 m de base y 3 m de altura.

8.- Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados miden 10 cm cada uno.

9.- El perímetro de un triángulo equilátero mide 0.9 dm y la altura mide 25.95 cm. Calcula el área del triángulo.

10.- Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m².

11.- El área de un trapecio es 120 m², la altura 8 m, y la base menor mide 10 m. ¿Cuánto mide la otra base?

12.- Simplificar:

1) sen (2x) / (1 + cos (2x))

2) (sen (2 a) / (1 – cos2 (a))) (sen (2 a) / cos a)

13.- Demostrar la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sin(x)} = 1 + \frac{1}{\tan(x)}$$

14.- Demostrar las siguientes igualdades:

$$\frac{\cos(x)}{\cot(x)} = \sin(x)$$

$$tg\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

CAPÍTULO VI: ECUACIÓN LINEAL

6.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Método para calcular el conjunto de la solución. Interpretación geométrica del conjunto solución

6.1.1. Ecuación lineal

Una **ecuación de primer grado o ecuación lineal**, es una relación de igualdad, que tiene una o más variables (incógnitas), elevadas a la primera potencia, resolverlas significa encontrar el valor de las variables con los que se cumple la igualdad.

Ahora bien, la ecuación dispone de elementos como: los miembros, que pertenecen a cada una de las expresiones algebraicas, o sea los valores conocidos, y por otra parte las incógnitas, que son justamente aquellos valores a descubrir.

Proponemos un algoritmo, para resolver una ecuación lineal:

1.- Reducir términos semejantes si es posible.

2.- Pasar al lado izquierdo los términos con incógnitas y al lado derecho los valores numéricos.

3.- Despejar la incógnita.

4. Determinar el valor de la incógnita.

5. Comprobar. Sustituir el valor de la incógnita en la ecuación. Verificando si se satisface la igualdad.

6.1.2. Ejemplo: Resuelve

a) $20 + x = 30$.

Los números 10 y 20 son los valores que conocemos y la x el que desconocemos. Tenemos que determinar el valor de x que hace cierta la igualdad. Entonces: $x = 30 – 20$, entonces $x = 10$.

Sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$20 +10 =30$

$30 = 30$

b) $(3/2)\ y = 9$

Multiplicando ambos miembros por el reciproco de 3/2 (2/3). Obtenemos:

$y =(2/3)\ 9$

$y = 6$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos:

(3/2) 6 = 9,

9 = 9

c) (5 + 2x)/(4x + 1) = 3/4, Multiplicando ambos miembro por (4x+1):

(5+ 2x) = 3x + 3/4, Agrupando términos semejantes,

2x-3x=-5+ 3/4

-x =-17/4

X =17/4, Sustituyendo en la ecuación, tenemos:

(5 + 2(17/4))/(4(17/4) + 1) = 3/4

3/4 = ¾

6.2. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Llamamos **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables** a dos ecuaciones de este tipo que pueden reducirse a la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

y que las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones con dos variables son las **soluciones comunes** a las dos ecuaciones que lo forman, es decir, son los pares ordenados (x; y) que satisfacen a ambas ecuaciones.

También recordarás que un sistema podía tener una **única solución, no tener soluciones, o tener infinitas soluciones.**

En este epígrafe estudiarás lo relativo a la función lineal y su representación gráfica en un sistema de coordenadas rectangulares.

Una recta en el plano puede representarse por la ecuación ax + by +c =0 (con x, y ∈ R ; a y b no simultáneamente nulos) despejando y obtenemos $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, que es precisamente la ecuación de la función lineal.

Si relacionamos las soluciones que tiene un sistema con su interpretación geométrica, concluimos que:

Si el sistema tiene **solución única** entonces podemos decir que **las rectas se intersecan en un punto.**

Si el sistema **no tiene solución** entonces podemos decir que **las rectas son paralelas.**

Si el sistema tiene **infinitas soluciones** entonces **las rectas coinciden.**

¿Recuerdas cómo analizaste sí un sistema tenía una, ninguna o infinitas soluciones?

Teniendo ahora como recurso lo aprendido sobre la función lineal y su representación gráfica, te proponemos un procedimiento mucho más rápido para determinar si un sistema tiene o no solución.

Basta transformar ambas ecuaciones del sistema a la forma y = mx + n y analizar las pendientes de cada una de ellas. Si ellas son iguales, entonces comparamos los términos independientes.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{cases}$$

Si **m1** $\neq$ **m2** el sistema tiene **una única solución** y **las rectas se intersecan.**

En el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ y $\mathbf{n_1 = n_2}$ el sistema tiene infinitas soluciones y las rectas son coincidentes y en el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ y $\mathbf{n_1 \neq n_2}$ el sistema no tiene solución y las rectas son paralelas. Ten presente que para que $\mathbf{m_1 = m_2}$, tiene que ser $\mathbf{a_1 = a_2}$ y $\mathbf{b_1 = b_2}$.

Consideremos el caso: A ∊ $\mathbf{M_{2x2}(R)}$, X ∊ $\mathbf{M_{2x1}(X)}$, B ∊ $\mathbf{M_{2x1}(R)}$, B = O, entonces (II), expresa el SEL Homogéneo,

$$\begin{cases} r_1 : a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & 0 \\ r_2 : a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Donde las ecuaciones definen las recta, r1, r2, para todo, $a_{ij} \neq 0, i = 1{,}2;\ j = 1, 2$. Presentándose las situaciones siguientes:

1-Las rectas pasan por el origen de coordenadas del plano XOY, intersectándose en este punto.

2-Las rectas son paralelas coincidentes, pasando por el origen de coordenadas.

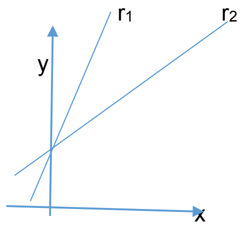
El conjunto solución, para cada caso queda expresado:

1- S1= $\left\{(x, y) \in R^2 : x = 0,\ y = 0\right\}$,

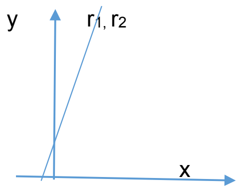
2- S2= $\left\{(x, y) \in R^2 : (x, y) \in r_1\ y\ \ (x, y) \in r_2\ \right\}$.

Los SEL Homogéneo siempre tienen solución:

1- Solución única



2- Infinitas soluciones



Consideremos el caso: A ∊ $\mathbf{M}_{2x2}$**(R)**, X ∊ $\mathbf{M}_{2x1}$**(X)**, B ∊ $\mathbf{M}_{2x1}$**(R)**, **B ≠ O**, entonces (II), expresa el SEL No Homogéneo,

$$\begin{cases} r_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ r_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Donde las ecuaciones definen las recta, r1, r2, para todo, $a_{ij} \neq 0, i = 1, 2;\ j = 1, 2$. Presentándose las situaciones siguientes:

1-Las rectas se intersectan en un punto del plano XOY, cortando los ejes coordenados. x, y.

2-Las rectas son paralelas coincidentes, cortando los ejes coordenados x, y.

3-Las rectas son paralelas no coincidentes, cortando los ejes coordenados x, y.

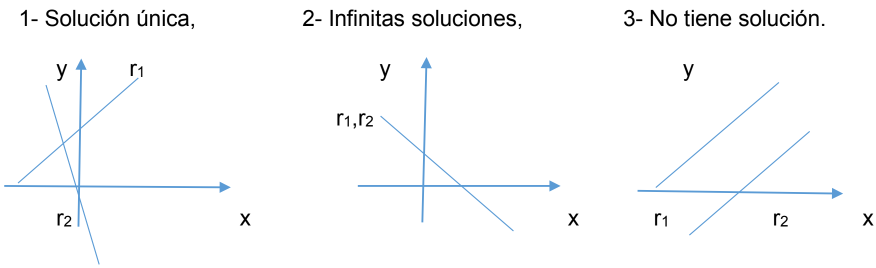
El conjunto solución, para cada caso queda expresado:

1- S1 = $\left\{(x, y) \in R^2 : x = \alpha,\ y = \beta;\ \ \alpha, \beta \in R\right\}$,

2- S2= $\left\{(x, y) \in R^2 : (x, y) \in r_1\ y\ \ (x, y) \in r_2\ \right\}$

3- S3 = ϕ

Para los SEL No Homogéneo tenemos:



Para $\Re^n$, con n$\geq$4, no es posible una representación geométrica. Lo anterior, muestra la necesidad de determinar analíticamente el conjunto solución.

6.2.1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2)

- Multiplicar convenientemente cada ecuación por un número de modo que al sumar las nuevas ecuaciones obtenidas se elimine una variable y se obtenga el valor de otra.
- Sustituir el valor de la variable obtenida en una de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra.
- Plantear el conjunto solución.

Ejemplo:

En un centro deportivo hay 400 atletas varones más que hembras. Se decidió trasladar para otro centro al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro inicial 100 hembras más que varones. ¿Cuántos atletas de cada sexo se quedaron en el centro deportivo?

Designemos con variables lo que se plantea en el problema.

Cantidad de varones…. x

Cantidad de hembras…. y

(1) x = y + 400

(2) 0,3x+100=0,8y

Sustituyendo (1) en (2) $0{,}3(y+400)+100=0{,}8y$

$$0{,}3y+120+100=0{,}8y$$

$$0{,}5y=220$$

$$y=\frac{220}{0{,}5}$$

$y=440$ y al sustituir este valor en (1) se obtiene x = 840.

$\frac{30}{100}840=252$ Cantidad de varones que se quedan.

$\frac{80}{100}440 = 352$ Cantidad de hembras que se quedan.

Respuesta: En el centro deportivo se quedaron 252 varones y 352 hembras.

6.2.2. Ejercicios propuestos

1.- Selecciona la respuesta correcta.

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ \frac{1}{2}x - y = 6 \end{cases}$$

a) __no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

El sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = 6 \end{cases}$$

a) __ no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

a) __no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

De dos rectas r_1 y r_2 conocemos que $m_1=m_2$ y $n_1=n_2$. Luego podemos afirmar que las rectas:

a) __son paralelas b) __se cortan en un punto c) __ son coincidentes

Si x + 5y = 15 corresponde a la ecuación de una recta. La ecuación que se puede seleccionar entre las siguientes para que el sistema tenga solución única es:

a) __ 2x +10y =30 b) __ $y = -\frac{1}{5}x + 8$ c) __ 5x – y = 15

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas en el sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = \frac{7}{8}x \end{cases}$$

Es: a) __ (5;4) b) __ (8;7) c) __(7;8)

2.-Resuelva y compruebe, para cada ecuación.

(3 + 5x)/5 = (4 – x)/7

4x – 3 =-12x + 5

6x +2 – 3x = (7x + 4)/3

4(2y + 5) = 3(5y – 2)

(1/5x + 2) = 3 – 2/7x

5x – 0.7 = 0.4(3 – 5x)

6x + 12x-3 – 7

3.- Resuelva los sistemas de ecuaciones usando el método de substitución.

a) $\begin{matrix} y = 2x + 3 \\ y = 3x - 5 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x - y = 4 \\ x + 3y = 12 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} 7m + 12n = -1 \\ 5m - 3n = 7 \end{matrix}$ e) $\begin{matrix} y = 0.08x \\ y = 100 + 0.04x \end{matrix}$ f) $\begin{matrix} 0.2u - 0.5v = 0.07 \\ 0.8u - 0.3v = 0.79 \end{matrix}$

4.- Con la finalidad de hacer un completamiento del uniforme (un pantalón y una camisa) de los trabajadores de una empresa, el administrador hizo una compra al almacén de 20 pantalones y 50 camisas por un valor de $ 1500.00. Posteriormente, por el mismo precio de cada pieza, se hizo una segunda compra de 5 pantalones y 4 camisas por un valor de $ 205.00. Si posteriormente llegaron a la empresa tres nuevos trabajadores, ¿cuánto debe pagar la administración por la compra de los tres últimos uniformes?

5.- Como parte de las medidas de beneficio a la población, en un consejo popular de un municipio, dos brigadas de trabajadores sociales A y B se planificaron visitar entre ambas 330 viviendas. En un momento en que fue controlada la actividad, la brigada A había visitado las dos terceras partes de la cantidad de viviendas que se había propuesto visitar, mientas que la B, había visitado el 80% de las viviendas que se había planificado visitar. Si en ese momento solo faltaban por visitar 86 viviendas, ¿cuántas habían visitado cada brigada, hasta el momento en que fue controlada la actividad?

6.- Un proveedor de la industria electrónica fabrica los teclados y pantallas para calculadoras gráficas en plantas en México y Taiwán. En la tabla se indican las cantidades producidas por hora en cada planta. ¿Cuántas horas debe operar cada planta para cumplir exactamente con un pedido de 4 000 teclados y pantallas?

Planta	Teclados	Pantallas
México	40	32
Taiwan	20	32

7.- Un experimento consiste en dar una dieta estricta a algunos animales. Cada animal va a recibir, entre otros alimentos, 20 gramos de proteína y 6 gramos de grasa. El laboratorista puede comprar dos mezclas de alimentos que tienen la siguiente composición: La mezcla A tiene 10% de proteína y 6% de grasa; la mezcla B tiene 20% de proteína y 2% de grasa. ¿Cuántos gramos de cada mezcla se deben usar para obtener la dieta adecuada para un solo animal?

CAPÍTULO VII: FUNCIONES REALES

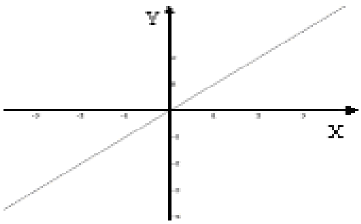
7.1. Propiedades. Estudio de la función lineal y la función cuadrática Representación geométrica

7.1.1. Función real

Sea $\Re$ el conjunto de los números reales. Se denomina función real de $\Re$ en $\Re$ a la correspondencia f formada por todos los pares ordenados que tienen como primera componente a todos los elementos x del conjunto X $\subseteq \Re$ tomados una vez. Se representa la correspondencia de la forma siguiente $f: X \subseteq \Re \rightarrow \Re$ y a ley de correspondencia por $x \mapsto f(x)$. Como regla utilizaremos la variable x como variable independiente de la función y a f(x) o y como variable dependiente.

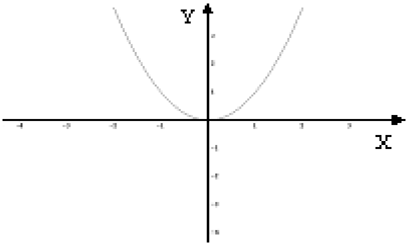
7.1.2.Ejemplos de funciones reales

a) $y = x$



En esta función la ley de correspondencia asocia a cada número real su mismo valor. Su representación gráfica como se observa es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

b) $y = x^2$



En esta función la ley de correspondencia asocia a cada número real el cuadrado de su valor. Su representación gráfica como se observa es la de una curva que está en el primer y segundo cuadrantes.

Ejercicio propuesto: Dada la función f que a cada número asocia el triple más uno:

a) ¿Es esta una función real?

b) Escriba su expresión algebraica

c) Calcule f(1) y f(¾)

7.2 Propiedades de las funciones

7.2.1. Dominio

Es el conjunto que agrupa todas las primeras componentes de los pares ordenados que forman una función.

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente en una función. Estos valores también son llamados preimágenes de la función.

Para determinar el dominio de una función tendremos en cuenta, ante todo, con qué tipo de función estamos trabajando y procederemos en consecuencia con ello.

Para el caso de la función $y = x$ su dominio es el conjunto de los números reales, en el caso de la función $y = x^2$ ¿Cuál será su dominio?

7.2.2. Imagen

Es el conjunto que agrupa todas las segundas componentes de los pares ordenados que forman una función.

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente en una función. Estos valores también son llamados imágenes de la función.

El conjunto imagen de una función se determina, en dependencia de la función de que se trate.

Para el caso de la función $y = x^2$ su imagen es el conjunto de los números reales no negativos, es decir, los mayores o iguales a cero, en el caso de la función $y = x$ ¿Cuál será su imagen?

Ejercicio propuesto: En el ejercicio 2 halle el dominio y la imagen de la función.

En general se utilizan diferentes formas para denotar a las funciones, entre otras tenemos y = x; y(x) = x2; f (x) = x; s(x) = x2; como se observa se utilizan las letras del alfabeto y un signo de igualdad donde en el miembro derecho aparece la variable del dominio expresando la ley de correspondencia y como resultado de los valores que se alcanzan en el miembro izquierdo aparece el valor de la imagen, que como observa se denota por "y", asumiendo y(x) o f(x) o s(x).

3) Ceros: En una función, son los valores de "x" que hacen que "y" sea cero. En la representación gráfica de una función, son los valores donde la curva "corta o toca" al eje de las "x".

x1 es un cero de la función f si y sólo si f(x1) = 0.

Para calcular los ceros de una función sustituimos "y" por 0 y resolvemos la ecuación planteada.

Ejemplo: **si queremos determinar los ceros de la función, $f(x) = x^2$ debemos sustituir $f(x)$ por cero y despejar el valor de x. Esto nos llevaría a resolver la ecuación $x^2 = 0$ *que es equivalente a* $x = \pm\sqrt{0} = 0$, por lo que el cero de la función es $x = 0$.**

Ejercicio propuesto: **Calcule, de existir, los ceros de las funciones siguientes:**

a) y=3x-¼

b) y=4x²-1

c) y=3

7.2.3. Inyectividad

Una función se dice inyectiva si cada elemento del conjunto imagen está asociado exactamente con una pre-imagen.

En símbolos: f inyectiva si y sólo si f(x1) = f(x2) de donde x1 = x2 para todo x1,x2 ∈ Dom f ó f inyectiva si y sólo si de x1 ≠ x2 se obtiene f(x1) ≠ f(x2) para todo x1,x2 ∈ Dom f.

Desde el punto de vista gráfico, podemos afirmar que si una función es inyectiva, cualquier recta paralela al eje de las "x" tendrá con el gráfico de la función, a lo sumo un punto común.

Si queremos analizar si una función es inyectiva procedemos según la caracterización dada anteriormente.

En el caso de la función $f(x) = x^2$ como se observa en la gráfica de esta función cualquier recta paralela al eje de las x, por encima de éste, corta al gráfico de la función en dos puntos, luego no sería inyectiva, pero, ¿Cómo probarlo?

Si utilizamos el contra recíproco $x_1 \neq x_2 \ si \ y \ sólo \ si \ x_1^2 \neq x_2^2$, este no se cumple para los valores: x1 = 1 y x2 =-1 ya que x1 ≠ x2 y x12 = x22=1

Ejercicio propuesto: ¿Es la función f(x)=x inyectiva?

Ejercicio propuesto: En el ejercicio 1 Analice si la función es inyectiva

Ejercicio propuesto: En el ejercicio 3 determine cuáles de las funciones son inyectivas

7.2.4. Sobreyectividad

Una función se dice sobreyectiva si el conjunto imagen es igual al conjunto de llegada.

Ejercicio propuesto: ¿Son las funciones f(x)=x y g(x)=x2 sobreyectivas?

Ejercicio propuesto: En los ejercicios 1 y 3 determine cuáles de las funciones son sobreyectivas.

7.2.5. Signos

Una función tiene signo positivo (signo negativo) en los valores de "x" cuyas imágenes sean números positivos (negativos).

Gráficamente, una función es positiva (negativa) para aquellos valores de "x" que cumplan que su representación gráfica se encuentre por encima (por debajo) del eje de las "x".

Por ejemplo, para determinar los intervalos donde una función es positiva (o negativa), procedemos de la siguiente forma:

Igualamos a cero la función y determinamos sus ceros.

Situamos estos ceros en una recta numérica y procedemos a resolver las inecuaciones $f(x)>0$ y $f(x)<0$.

7.2.6. Monotonía

Una función es monótona creciente (decreciente) estricta si a medida que aumentan los valores de las "x", aumentan (disminuyen) los valores de las "y".

En símbolos: f monótona creciente (decreciente) estricta en un intervalo (a;b) sí y sólo sí para todos x,,x2 ∈ (a;b) se cumple: si x1 <x2 entonces f(x1) < f(x2) (si x1 < x2 entonces f(x1) > f(x2)).

Ejemplo: La función f(x)=x2 alcanza los mismos valores para los números positivos y sus correspondientes opuestos, por ello el análisis debemos hacerlo primero para los números positivos y luego para los negativos o viceversa.

Sean x1 y x2 números no negativos y tales que x1<x2 entonces, x12 < x22, por propiedad de los números reales, por tanto la función es creciente en sentido estricto para x ∈ [0;+ ∞), es decir, a la derecha de 0.

Para el caso contrario, sean x1 y x2 números negativos y tales que x1<x2 entonces, x12 > x22, por propiedad de los números reales, por tanto la función es decreciente en sentido estricto para x ∈ (- ∞ ; 0), es decir, a la izquierda de 0.

Apoyados en los conocimientos que tenemos de las funciones f(x)=x y g(x)=x2 podemos realizar el estudio de muchas más, como son las funciones cuyas gráficas pasan por x=0 a partir de f(x)=x, las cuales son de la forma f(x)=mx.

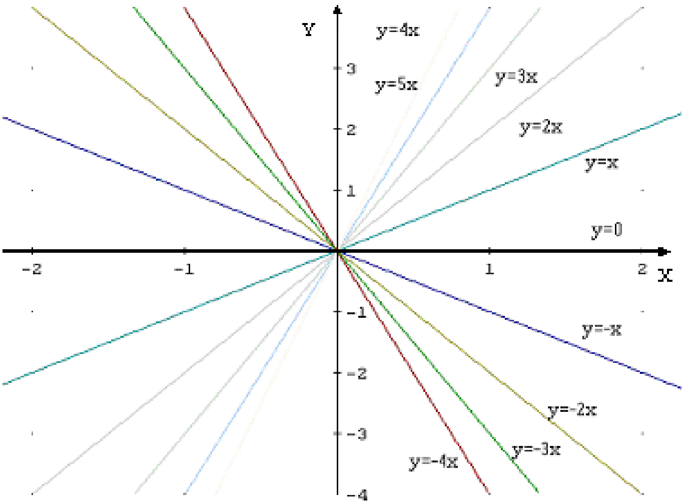


Figura 9: f(x)=x2.

Casos particulares de esta familia son y=x, y=2x, y=0, y=-3x, y=-¼ x, etc.

La función y=x2 pertenece a la familia de funciones llamadas potenciales. Los gráficos de algunas de las funciones potenciales definidas por ecuaciones de la forma $y = x^n$ ($n \in Z, n \neq 1$) se muestran a continuación, donde se puede observar algunas regularidades en el caso de los exponentes pares positivos, las gráficas se asemejan a y=x2, unas más "pegadas" al eje de ordenadas y otras menos "pegadas" (Figura 9). Para el caso de los exponentes impares se asemejan a y=x3, con la misma particularidad de la anterior (Figura 9).

En el caso de las funciones potenciales de exponentes negativos, la particularidad es que el gráfico se interrumpe en 0 y presentan regularidades semejantes a las anteriores con relación a estar más "pegadas" o menos "pegadas" al eje de ordenadas. Las propiedades que cumplen estas funciones serán estudiadas después de las ilustraciones.

7.3 Funciones potenciales de exponente par

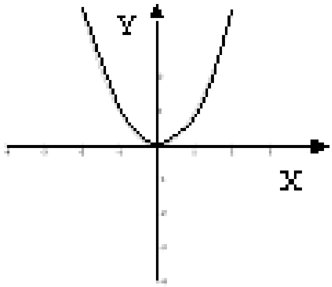


Figura 10: y=x2.

7.3.1. Dilatación

Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice dilatada si |a| > 1 (a >1 ó a <-1). Su representación gráfica se "separa" del eje de las abscisas a partir del gráfico de la función f.

Ejemplo: La función y=2x es dilatada con relación a y=x al igual que y=3x2 con relación a y=x2:

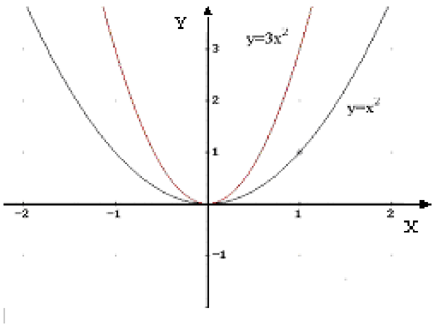


Figura 11: y=2x.

7.3.2. Contracción

Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice contraída si |a| < 1 (-1< a < 1). Su representación gráfica se "aproxima" al eje de las abscisas a partir del gráfico de la función f.

Ejemplo:

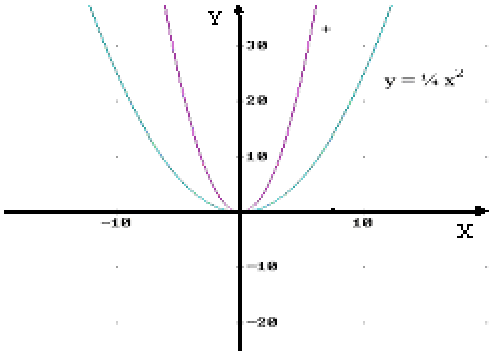


Figura 12: y = ¼ x2 es contraída con relación a y=x2.

7.3.4. Reflexión

Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice reflejada en el eje de las "x" si a < 0. Su representación gráfica sufre una simetría axial con respecto al gráfico de la función-a f(x), tomando como eje de simetría el eje de las abscisas.

Ejemplo:

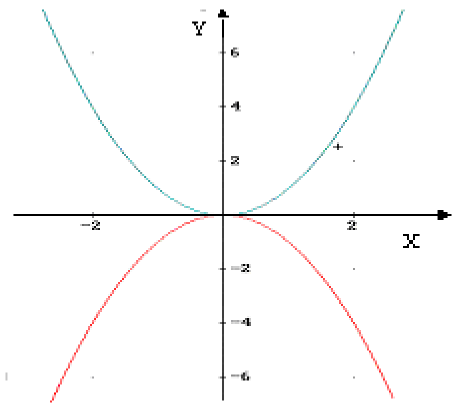


Figura 13: La función y=-x2 es reflejada respecto a la función y=x2.

7.3.5. Traslación

El gráfico de una función g del tipo g(x) = [f(x – d)] + e se obtiene a partir del gráfico de la función f trasladándolo |d| unidades en la dirección del eje de las "x", "hacia la derecha" si d < 0 y "hacia la izquierda" si d > 0 y |e| unidades "hacia arriba" si e > 0 y "hacia abajo.

Ejemplo: g(x)=(x-1)2 +1 es una traslación de f(x)=x2 en una unidad en la dirección del eje x hacia la derecha y en una unidad en la dirección del eje y hacia arriba.

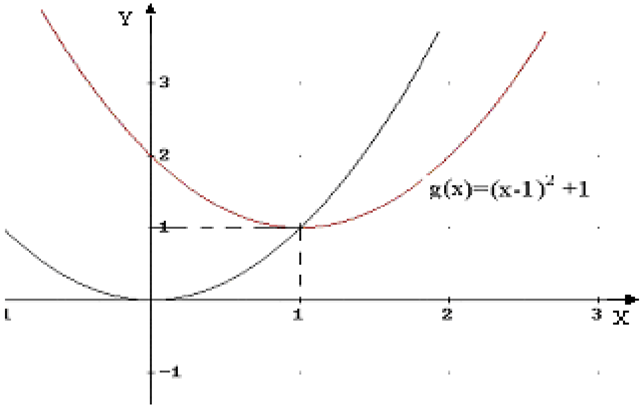


Figura 14: g(x)=(x-1)2 +1.

7.3.6. Paridad

Una función f se dice par (impar) si los argumentos opuestos tienen la misma imagen (tienen imágenes opuestas). En símbolos:

f es par si y sólo si para todo x ∈ Dom f, -x ∈ Dom f se tiene que: f(-x) = f(x)

f es impar si y sólo si para todo x ∈ Dom f, -x ∈ Dom f se tiene que: f(-x) =-f(x)

Gráficamente, se dice que una función es par si su gráfico es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas y es impar si su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.

7.3.7. Ejercicio propuesto

Analizar la paridad de las funciones siguientes:

a) f(x)= 5x+4

b) g(x)=-7x2

1. En la tabla siguiente se muestra la cantidad de agua goteada por una llave y el tiempo transcurrido.

Tabla 3: Cantidad de agua goteada.

Tiempo (minutos)	Nivel de agua (cm)
0	1
5	11
10	21
15	31
20	41

Fuente: elaboración propia.

a) Forme los pares ordenados de la correspondencia establecida y represéntelos en un sistema coordenado cartesiano y una los puntos.

b) Interprete la situación a partir del análisis de la gráfica representada.

c) ¿Cuál sería la variable dependiente y cuál la independiente?

d) Escriba la ecuación

2. Cuando un espeleólogo se pone a excavar hacia el interior de la tierra la temperatura aumenta según la fórmula siguiente:

$t = 15 + 0{,}001d$ donde t es la temperatura alcanzada en grados centígrados y d es la profundidad, en metros, desde la corteza terrestre.

a- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

b- ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100°C?

3. La figura muestra la relación entre el tiempo y la temperatura de una sustancia.

a) ¿Cuál fue la mayor temperatura que alcanzó la sustancia?

b) ¿Cuál fue la temperatura inicial?

c) ¿Durante qué tiempo la temperatura de la sustancia estuvo ascendiendo?

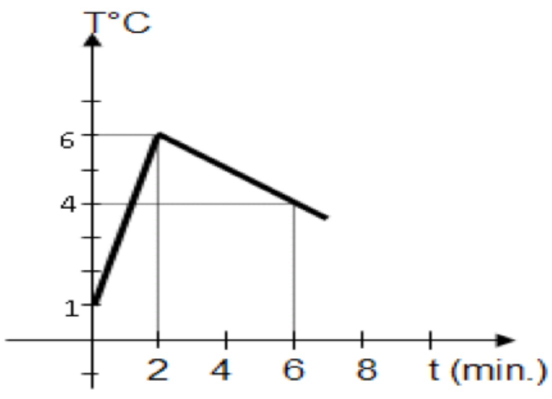


Figura 15: Relación entre el tiempo y temperatura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baldor, A. (2009). *Geometría y Trigonometría.* México D.F., México: Grupo Editorial Patria de CV.

Baldor, A. (2009). *Álgebra.* México D.F., México: Grupo Editorial Patria de CV.

Bronshtein, I. y Semendiaev, K. (1981). *Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes.* Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Burgov, C., y Nikolskii, M. (1984). *Elementos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica.* Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Gerber., H. (1992). *Algebra Lineal.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Granville, W. A. (1993). *Trigonometría Plana y Esférica.* México D.F., México: Editorial Limusa.

Krasnor, M., Kiseliov, A., Makarenko, G. y Shikin, E. (1990). *Curso de Matemáticas Superiores para Ingenieros.* Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Pérez, C.P.J.S, Otero, D.A.M. (2017). *Modulo razonamiento Lógico-Algorítmico. Curso de nivelación Universidad Metropolitana del Ecuador.* Quito, Ecuador.

Rodríguez, R. A., *et al.* (2017). *Matemática Básica para Carreras Universitarias.* Tomo I, II. Alcoy, España: Área de Innovación y Desarrollo.

Sowkowski, E. (2002). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ciencias y Letras

3ciencias