

# FUNDAMENTOS DE FÍSICA APLICADA EN LA INGENIERÍA

*Oscar Gabriel Toapanta Cunalata  
Willan Pablo Castillo Herrera*

Ingeniería y Tecnología





# **FUNDAMENTOS DE FÍSICA APLICADA EN LA INGENIERÍA**

*Oscar Gabriel Toapanta Cunalata  
Willan Pablo Castillo Herrera*



**Editorial Área de Innovación y Desarrollo, S.L.**

Quedan todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, distribuida, comunicada públicamente o utilizada, total o parcialmente, sin previa autorización.

© del texto: **los autores**

ÁREA DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO, S.L.

C/ Els Alzamora, 17- 03802- ALCOY (ALICANTE) [info@3ciencias.com](mailto:info@3ciencias.com)

Primera edición: **junio 2019**

ISBN: **978-84-949985-9-1**

DOI: <http://dx.doi.org/10.17993/IngyTec.2019.51>

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO I: PRIMERA LEY DE NEWTON. SISTEMA DE REFERENCIAS INERCIALES..</b>	<b>13</b>
1.1. Concepto de Fuerza. Medición Dinámica de la Fuerza.....	17
1.2. Masa Inercial. Segunda Ley de Newton .....	19
1.3. Tercera Ley de Newton .....	22
1.4. Medición Estática de Fuerzas .....	25
1.5. Ejemplos de Aplicación de las Leyes de Newton .....	27
1.5.1. <i>Las Fuerzas en la Naturaleza g</i> .....	32
1.6. Interacciones Gravitacionales .....	32
1.7. Interacciones Electromagnéticas .....	33
1.8. Fuerzas de Fricción .....	34
1.9. Problemas .....	40
<b>CAPÍTULO II: ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO .....</b>	<b>45</b>
2.1. Dinámica de la Rotación del Cuerpo Rígido .....	45
2.1.1. <i>Introducción</i> .....	45
2.2. Torque o Momento de una Fuerza.....	46
2.3. Introducción .....	55
2.4. Centro de Masa de un Sistema de Puntos Materiales.....	55
2.5. Choques en una Dimensión .....	64
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>73</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Al usar superficies más lisas y lubricadas, el bloque recorre una mayor distancia sobre la superficie horizontal, antes de detenerse .....	13
<b>Figura 2.</b> Esquema del riel y del bloque en forma de V invertida.....	16
<b>Figura 3.</b> Definición operacional de fuerzas a partir de la aceleración producida sobre un objeto patrón $F$ (en unidades de fuerza) = $a$ ( $m/s^2$ ) .....	18
<b>Figura 4.</b> Fuerza .....	19
<b>Figura 5.</b> Dos bloques de cobre de volúmenes diferentes. El bloque A tiene mayor masa que B ...	22
<b>Figura 6.</b> Análisis de las fuerzas presentes en el caso de un bloque que cuelga del techo por medio de una cuerda. a) Sistema en su conjunto. b) Diagrama de fuerzas del bloque. c) Diagrama de fuerzas de la cuerda.....	24
<b>Figura 7.</b> Dinamómetro .....	27
<b>Figura 8.</b> Un bloque se sostiene sobre la superficie lisa de un plano inclinado mediante una cuerda. b) Diagrama de fuerzas. El bloque se representa por un punto.....	28
<b>Figura 9.</b> a) Máquina de Atwood. b) Diagrama de fuerzas de ambos cuerpos .....	30
<b>Figura 10.</b> Sección transversal de una pista con peralte mostrando las fuerzas que actúan sobre el vehículo (no se considera la fricción). La componente $N$ se apunta hacia el centro de giro .....	31
<b>Figura 11.</b> a) Movimiento de un cuerpo atado a una cuerda, que describe un círculo vertical de radio $R$ . b) Diagrama de fuerzas el cuerpo en el punto más alto suponiendo nula la tensión en la cuerda .....	31
<b>Figura 12.</b> Bloque en reposo sobre una mesa horizontal .....	35
<b>Figura 13.</b> Dos superficies sólidas, secas, en contacto .....	36
<b>Figura 14.</b> Un bloque situado sobre una superficie horizontal con fricción es sometido a la fuerza. ....	37
<b>Figura 15.</b> Diagrama de fuerzas del bloque de la Figura G15 .....	38
<b>Figura 16.</b> Diagrama de fuerzas del auto en el epígrafe 1.6 .....	39
<b>Figura 17.</b> Dos bloques de masas $m_1$ y $m_2$ están en contacto sobre una mesa sin fricción .....	40
<b>Figura 18.</b> Bloque de masa 5,0kg contra una pared vertical .....	42
<b>Figura 19.</b> Bloque se pone en movimiento bajo la acción de la fuerza.....	43
<b>Figura 20.</b> Vista superior de una regla fina que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y que puede rotar alrededor de un eje fijo, normal a la Figura y que coincide con el eje $oz$ .....	45
<b>Figura 21.</b> Inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje dado.....	46
<b>Figura 22.</b> Torque de una fuerza respecto al punto 0.....	47
<b>Figura 23.</b> Definición del torque o momento de una fuerza respecto a un eje. Se ha considerado que la fuerza está aplicada en un punto de un cuerpo rígido que está obligado a rotar respecto a un eje fijo y se ha tomado como eje de referencia el propio eje de rotación .....	48
<b>Figura 24.</b> Cuerpo alrededor del eje fijo .....	49
<b>Figura 25.</b> Masa del cuerpo, sino también cómo ella está distribuida con respecto al eje en cuestión.....	49
<b>Figura 26.</b> Cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.....	50
<b>Figura 27.</b> Cuerpo formado por dos esferas .....	51
<b>Figura 28.</b> Cuerpo rígido como un sistema particular de puntos materiales que guardan distancias fijas entre sí .....	52
<b>Figura 29.</b> (a) Se cuelga un cuerpo de masa $m$ en el extremo libre de la cuerda, en el ejemplo anterior. (b) Diagramas de fuerzas del disco y del cuerpo.....	53
<b>Figura 30.</b> Centro de masa de un sistema de puntos materiales .....	57
<b>Figura 31.</b> Centro de masa .....	58

<b>Figura 32.</b> Centro de masa .....	59
<b>Figura 33.</b> Variación de la fuerza impulsiva con el tiempo. El área bajo la curva es igual al impulso mecánico. Se muestra también la fuerza media entre $t_1$ y $t_2$ , $F_m$ .....	62
<b>Figura 34.</b> Choque de dos puntos materiales .....	63
<b>Figura 35.</b> Comparación entre los impulsos producidos por la fuerza impulsiva y por las fuerzas externas durante un choque.....	64
<b>Figura 36.</b> Choque central elástico de dos esferas de masas $m_1$ y $m_2$ .....	65
<b>Figura 37.</b> Péndulo balístico .....	66

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

<b>Ilustración 1.</b> Segunda ley de Newton .....	61
---	----



## AUTORES



**Oscar Gabriel Toapanta Cunalata:** Ingeniero en Mecánico en la Universidad Politécnica del Chimborazo (ESPOCH), Maestrante en Mecánica con mención en Diseño por la Universidad Técnica de Ambato (UTA), investiga temas relacionados con las matemáticas y la física, se ha desarrollado como Profesor de Física, Matemática y Metodología de la Investigación durante 5 años y como Ingeniero de Operaciones y Facilidades Producción Petrolera durante 5 años. Actualmente, profesor del Instituto Superior Benjamín Araujo. Ecuador.



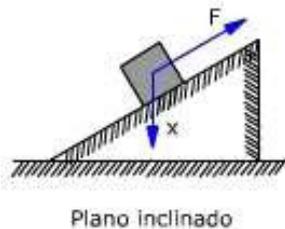
**Willan Pablo Castillo Herrera:** Ingeniero en Mecánico en la Universidad Politécnica del Chimborazo (ESPOCH), Maestrante en Mecánica con mención en Diseño Mecánico por la Universidad Técnica de Ambato (UTA), investiga temas de Matemáticas, Física y Generación de Energía Eléctrica utilizando Motores de Combustión interna Crudo/Diésel durante 5 años. Actualmente, Técnico Mecánico de Planta de Generación Eléctrica de la Empresa de Exploración y Explotación de Hidrocarburos Petroamazonas EP. Ecuador.



## INTRODUCCIÓN

En el libro nos referimos a movimientos rectilíneos con velocidad constante o variable, a movimientos circulares, etc. Pero no analizamos porqué un cuerpo se mueve siguiendo una trayectoria dada o qué lo obliga a variar su velocidad; en resumen, no aludimos a las causas que provocan el movimiento y sus variaciones.

Es éste precisamente el contenido de la dinámica, que será abordada en el presente capítulo. Como hasta ahora, consideraremos al cuerpo en movimiento como un punto material. La dinámica del sistema de puntos materiales y de sólidos rígidos será abordada en capítulos posteriores.



La dinámica representa un esquema más completo, más cercano a la realidad, por cuanto considera el movimiento de un cuerpo en relación con sus interacciones con el resto de los cuerpos que forman el medio que lo rodea. Estas interacciones son inevitables, pues aun cuando pueden ser disminuidas en determinadas circunstancias, estarán siempre presentes y determinan el carácter del movimiento.

La base sobre la que descansa la dinámica, y en definitiva toda la mecánica clásica o mecánica newtoniana, son las tres leyes del movimiento mecánico llamadas leyes de Newton. Las leyes de Newton, como todas las leyes en la Ciencia y la Física en particular, son el resultado de la generalización de un gran número de hechos experimentales. Para su formulación, Newton realizó una brillante síntesis de todas las observaciones y experimentos realizados por sus predecesores, entre los que se destaca la figura de Galileo Galilei.



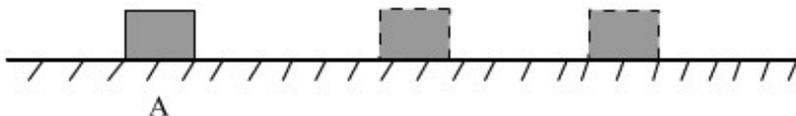
## CAPÍTULO I: PRIMERA LEY DE NEWTON. SISTEMA DE REFERENCIAS INERCIALES

Las ideas que condujeron a la formulación de la primera ley de Newton están ligadas al análisis de las causas que provocan o modifican el movimiento mecánico. Antes de los trabajos de Galileo se pensaba que era necesaria la acción de agentes externos para mantener el estado de movimiento o de un cuerpo; se decía que el reposo era su estado natural. De esta forma, para que un cuerpo se moviera con MRU debía ser continuamente empujado por otro, o de lo contrario se detenía.

A favor de esta tesis se argumentaba el hecho de que, en la práctica, un cuerpo que es puesto en movimiento mediante una acción exterior (por ejemplo, un bloque que es empujado con la mano sobre una superficie horizontal), termina por detenerse poco después de cesar ésta.

Nosotros sabemos que al eliminarse las causas que iniciaron el movimiento, no se eliminan completamente todas las acciones exteriores sobre el cuerpo y por ello resulta imposible demostrar, en la práctica, cuál sería su verdadero comportamiento en caso de moverse sin influencia alguna del medio exterior.

Galileo se cuestionó seriamente las ideas anteriores que establecían el reposo como estado natural de los cuerpos. Para ello acudió a la experimentación y a la inducción, estableciendo un método muy empleado desde entonces en la ciencia. El método consiste en realizar una serie de experimentos en condiciones cada vez más parecidas a las del modelo ideal e inducir el comportamiento del sistema en la situación límite del modelo o hipótesis. En el caso concreto que se analiza, se disminuye sucesivamente la acción de los agentes externos y se induce el comportamiento del cuerpo en el supuesto de que éstos no influyan en lo absoluto sobre él. Las ideas básicas de Galileo, en este sentido, están contenidas en el experimento que se describe en la Figura 1.



**Figura 1.** Al usar superficies más lisas y lubricadas, el bloque recorre una mayor distancia sobre la superficie horizontal, antes de detenerse.

**Fuente:** elaboración propia.

Supongamos que un bloque suficientemente liso es lanzado con cierta velocidad inicial sobre una superficie horizontal, en el punto A. El bloque recorrerá cierta distancia

antes de detenerse. Si, mediante algún procedimiento, pulimos las superficies en contacto y repetimos el experimento con igual velocidad inicial, la distancia recorrida será mayor que en el caso anterior. Podemos ahora usar un lubricante entre las superficies en contacto, con lo cual obtenemos una distancia aún mayor antes de detenerse, al disminuir sensiblemente el efecto de la fricción. Una situación cercana al límite se obtiene mediante el uso del llamado riel de aire en el cual un bloque de sección transversal en forma de V invertida se desliza sobre una película de aire que es lanzada a presión mediante un compresor por pequeños orificios ubicados en los planos laterales de un riel, cuya sección transversal es también en forma de V invertida (Figura 2). En este caso la fricción es mínima y sólo debido a la interacción del bloque con la película de aire

Se requiere verdaderamente un riel de gran longitud para lograr que el bloque se detenga, una vez que adquiere cierta velocidad inicial.

Los resultados de estos experimentos nos permiten ahora extrapolar y decir qué sucedería si pudiera eliminarse completamente la fricción: el cuerpo sobre el que no se ejercen acciones externas y que es puesto inicialmente en movimiento, continuará indefinidamente con velocidad constante (MRU). Se necesitan acciones externas para variar la velocidad de un cuerpo (para producirle una aceleración) pero no se necesitan para mantenerlo. El movimiento rectilíneo uniforme es tan natural como el reposo.

Las conclusiones anteriores fueron adoptadas por Newton como su primera ley, la cual podemos enunciar de la siguiente forma: Todo cuerpo mantiene su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que otros cuerpos ejerzan acciones sobre él y lo obliguen a cambiar de estado.

Esta ley es también llamada ley de la inercia, ya que se denomina inercialidad a la propiedad que tienen los cuerpos de resistirse a variar su estado de reposo y en general, su velocidad. Aunque no está explícito en la ley, se deduce que el estado de reposo o de MRU se mantiene no solamente cuando no están presentes acciones externas, sino también cuando las mismas existen, pero ellas se contrarrestan exactamente. Así, en el ejemplo descrito en la Figura 1, aun cuando se disminuya al mínimo el efecto de la fricción entre las superficies en contacto, están presentes las acciones de la Tierra, que atrae al bloque, y de la superficie horizontal, que no permite que éste caiga hacia abajo. Ambas acciones se contrarrestan exactamente y no intervienen en el análisis.

Como se analizó, tanto el reposo como el movimiento tienen carácter relativo, es decir, debemos indicar siempre respecto a qué sistema de referencia ambos estados de un cuerpo tienen lugar. Nos podemos preguntar respecto a qué sistema de referencia se cumple la primera ley. Para aclarar las ideas analicemos el siguiente ejemplo. Supongamos que un tren se mueve con rapidez constante por un tramo recto de vía y que en su interior un hombre observa un bloque que está en reposo sobre una mesa horizontal fija al piso del coche. Las superficies en contacto son suficientemente lisas de manera que es despreciable el efecto de la fricción entre ellas. De pronto el tren comienza a frenar ¿Qué sucede al bloque? El pasajero observará que el bloque comienza a moverse aceleradamente en el mismo sentido del movimiento del tren. Antes y durante el frenado, las únicas acciones ejercidas sobre el bloque eran las de la Tierra y la superficie de la mesa y ambas se contrarrestaban exactamente, luego para el pasajero existirá una violación de la ley de inercia, ya que el cuerpo abandona el estado de reposo sin que se ejerzan nuevas acciones sobre él. Es evidente que respecto a un sistema de referencia fijo al tren cuando éste está acelerándose cumple la primera ley.

Supongamos que un segundo individuo está en reposo fuera del tren, junto a la vía férrea y que puede observar al bloque a través de la ventanilla. Al producirse el frenado, él verá que el bloque continúa moviéndose en línea recta con rapidez constante e igual a la que tenía al principio, lo cual puede explicar, de acuerdo con la primera ley, por no existir nuevas acciones externas que lo obliguen a variar su velocidad. En resumen, todo parece indicar que, para un sistema de referencia fijo a la Tierra, se cumple la primera ley y que la misma se incumple en un sistema que está acelerado respecto a ésta. Se acostumbra a llamar inercial a todo sistema de referencia en que se cumple la ley de la inercia y no inercial a todo aquel en que no se cumple.

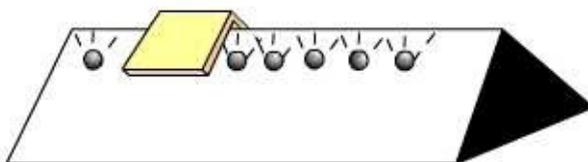
Al formular sus tres leyes de la dinámica, Newton supuso que las mismas se cumplían respecto a un sistema de referencia fijo al espacio absoluto. Para Newton, el espacio era algo parecido a una caja, donde se pueden situar los objetos y, por lo tanto, su existencia era independiente de la propia materia. Se refería al movimiento absoluto respecto al espacio absoluto. Tal posición es netamente metafísica y no se corresponde a nuestras concepciones actuales. Las propiedades del espacio están determinadas por la propia materia, el espacio es una forma de existencia de ésta y sólo tiene sentido en relación con ella. El movimiento de los cuerpos sólo puede determinarse en relación con otros cuerpos.

En correspondencia con los resultados del ejemplo descrito con anterioridad, en un gran número de casos puede suponerse que un sistema de referencia fijo a la Tierra es inercial y de hecho lo asumiremos así en nuestras consideraciones posteriores. Sin embargo, debe recordarse que ésta se mueve respecto al sol y las estrellas siguiendo una trayectoria curvilínea y que además gira sobre su eje, por lo que, en rigor, tales sistemas ligados a la superficie terrestre poseen cierta aceleración. Esto se hace evidente en determinados fenómenos, tales como el movimiento de las corrientes marinas y de los vientos, la desviación de la vertical de los cuerpos que caen libremente, etc.

Se ha establecido experimentalmente que un buen sistema de referencia inercial lo constituye el llamado sistema heliocéntrico en el cual se fija el origen de coordenadas en el sol y los ejes se dirigen hacia estrellas fijas escogidas convenientemente. La aceleración de cualquier punto sobre la superficie terrestre respecto al sistema heliocéntrico es verdaderamente pequeña, lo que justifica el que muchas veces pueda desprejiciarse a los efectos prácticos y considerar que es inercial cualquier sistema fijo a la Tierra.

En lo sucesivo, cuando nos refiramos al movimiento de la propia Tierra, debemos entender que éste está referido al sistema heliocéntrico, (gravitación) donde nos referiremos con frecuencia a dicho movimiento.

No es difícil comprender que todo sistema de referencia que se mueve con MRU respecto a un sistema inercial, es también inercial (análogamente, todo sistema acelerado respecto a un sistema inercial, será no inercial). En efecto, la aceleración de un cuerpo es la misma en todos los sistemas de referencia que se mueven entre sí con velocidad constante y por lo tanto un cuerpo que está en estado de reposo o de MRU en un sistema inercial, al no existir interacciones netas con otros cuerpos, también lo estará en un segundo sistema que se mueve respecto a éste con velocidad constante. Luego, existirán infinitos sistemas de referencia inerciales pudiendo incluirse entre ellos, a los efectos prácticos en gran número de casos, a todos los sistemas ligados a la Tierra o que se mueven respecto a ésta con MRU.



**Figura 2.** Esquema del riel y del bloque en forma de V invertida.

**Fuente:** elaboración propia

## 1.1. Concepto de Fuerza. Medición Dinámica de la Fuerza

En la vida diaria es común asociar el concepto de fuerza al esfuerzo muscular que se requiere para mover un cuerpo de lugar, comprimir un resorte, subir un cuerpo hasta cierta altura, etc. Desde luego, aceptamos que no siempre se requiere un esfuerzo muscular, ya que la misma acción puede ser realizada mediante un motor o en general mediante otro cuerpo cualquiera. Queda claro, sin embargo, que la fuerza está asociada siempre a la interacción entre cuerpos.

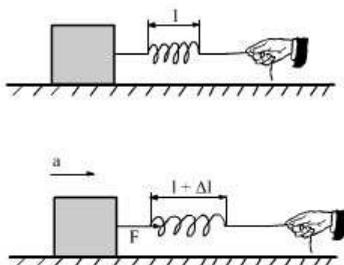
Antes de los trabajos de Galileo, la fuerza era concebida como la acción necesaria para mantener un cuerpo en movimiento. Ya sabemos que la primera ley de Newton precisamente establece la naturalidad del estado de movimiento rectilíneo y uniforme, tanto como del reposo, es decir, no se requieren acciones externas para mantener un cuerpo en movimiento; pero sí se requieren para cambiar su estado, es decir, para producirle una aceleración. Podemos entender la fuerza como una medida de la intensidad de la interacción de un cuerpo dado, con otros cuerpos, como resultado de la cual éste sufre una aceleración.

Desde luego, ésta es una definición más bien cualitativa, imprecisa. Como se señaló en el Capítulo I, al definir una magnitud física se requiere, necesariamente, establecer el método de medirla. Por otro lado, producir una aceleración no es el único efecto de una fuerza. Como resultado único de la interacción entre los cuerpos puede ocurrir también la simple deformación de los mismos, como es el caso de la compresión de un resorte.

Existen dos métodos fundamentales para definir operacionalmente (medir) la fuerza, basados en la aceleración (método dinámico) y en la deformación (método estático) que sufre un cuerpo elegido convenientemente bajo la acción de la misma. Abordaremos a continuación el método dinámico de medición de la fuerza, en tanto el método estático será abordado en el epígrafe 1.3.

Escojamos un objeto patrón (posteriormente haremos referencia a cuál es el patrón adecuado), digamos, en forma de bloque al cual se fija un resorte ligero de longitud inicial 1 (sin deformación) y que descansa sobre una superficie horizontal (Figura 3). Las superficies en contacto han sido pulidas y suficientemente lubricadas para hacer despreciables los efectos de la fricción. En estas condiciones, tiramos del otro extremo del resorte con la mano hasta lograr que el objeto se mueva con una aceleración igual a  $1 \text{ m/s}_2^2$ .

Podemos suponer que, entonces, la fuerza producida por el resorte sobre el objeto es de 1 unidad de fuerza. A la vez, el resorte se mantiene estirado una longitud  $l$ , que resulta ser la misma siempre que se alcanza ese valor de la aceleración. Si ahora tiramos más fuertemente del resorte de manera que el objeto se mueva con una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ , diremos que el resorte ejerce una fuerza de 2 unidades, y en general, si al tirar de una forma cualquiera, el patrón sufre una aceleración de  $a \text{ m/s}^2$ , diremos que el resorte ejerce una fuerza de magnitud  $F$  (en unidades de fuerza) que es numéricamente igual que  $a$  (en metros por segundo al cuadrado).



**Figura 3.** Definición operacional de fuerzas a partir de la aceleración producida sobre un objeto patrón  $F$  (en unidades de fuerza) =  $a$  ( $\text{m/s}^2$ ).

**Fuente:** elaboración propia.

La magnitud fuerza, así definida resulta ser una magnitud vectorial. Ella posee un valor numérico, establecido a partir del procedimiento anterior y también posee dirección y sentido, que podemos tomar igual a los que corresponden a la aceleración producida. Además, puede comprobarse que las fuerzas se suman como los vectores. En efecto, supongamos, a título de ejemplo, que aplicamos al patrón, fuerzas de 3 unidades a lo largo del eje  $ox$  y de 4 unidades a lo largo del  $oy$ .

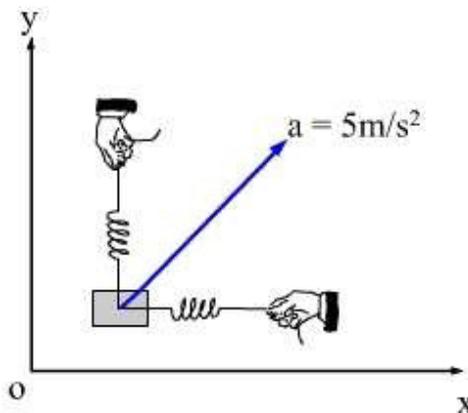
Para ello podemos emplear dos resortes análogos al descrito anteriormente y los halamos por los extremos libres hasta que sufren estiramientos que corresponden a valores de la aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  y  $4 \text{ m/s}^2$  respectivamente cuando actúan de forma independiente. El experimento muestra la aceleración con que se mueve el bloque es de  $5 \text{ m/s}^2$  según una línea recta que forma un ángulo de  $36,9^\circ$ , con el eje  $oy$  lo que corresponde a una fuerza de 5 unidades en esa misma dirección y sentido.

El mismo resultado se obtiene al sumar vectorialmente fuerzas de 3 y 4 unidades según los ejes  $ox$  y  $oy$  respectivamente, siguiendo el procedimiento normal de suma de vectores.

En todos los ejemplos anteriores hemos supuesto que el objeto patrón se encontraba al inicio en reposo. Sin embargo, todo ocurre de forma análoga sí al aplicar las fuerzas éste se estaba moviendo con velocidad constante.

Si convenimos en tomar como objeto patrón, al patrón de masa (ver epígrafe 1.3), entonces la unidad de fuerza que resulta en este procedimiento es denominada el newton (N), que es la unidad correspondiente en el Sistema Internacional de Unidades. Es decir, cuando la fuerza actúa sobre el patrón de masa (1 kg) (Ver Figura 4).

$$F \text{ (en newton)} = a \text{ (en m/s}^2\text{)} [3-1]$$



**Figura 4.** Fuerza.  
**Fuente:** elaboración propia.

En el próximo epígrafe veremos más exactamente la definición de las unidades de fuerza.

## 1.2. Masa Inercial. Segunda Ley de Newton

En el epígrafe anterior vimos que, al aplicar fuerzas diferentes sobre un mismo cuerpo, le producían diferentes aceleraciones, cuyos valores fueron tomados como medida cuantitativa de dichas fuerzas. Nos preguntamos ahora, qué sucede si se aplica una misma fuerza sobre cuerpos diferentes. La experiencia demuestra que se obtienen aceleraciones diferentes y esto se explica diciendo que estos cuerpos poseen diferentes valores de la masa inercial, o simplemente de la masa.

La masa inercial o masa de un cuerpo es una de sus características más importantes y mide la inercialidad  $g$  del mismo, es decir, su resistencia a ser acelerado bajo la acción de una o varias fuerzas; a mayor masa, mayor es la inercialidad del cuerpo,

es decir, su oposición a variar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. La masa está asociada a la cantidad de sustancia que forma el cuerpo. Supongamos, por ejemplo, que se tienen dos bloques A y B hechos de una misma sustancia, digamos de cobre, pero de volúmenes diferentes. Resulta evidente que el bloque A, de mayor volumen, posee mayor masa inercial y, además, si se aplica a ambos una misma fuerza de magnitud  $F$  (se desprecian los efectos de la fricción con la superficie de contacto), dicho bloque sufrirá una menor aceleración que el bloque B. La aceleración recibida por un cuerpo bajo los efectos de una fuerza dada, es inversamente proporcional a su masa.

Newton consideraba que la masa es una medida de la cantidad de materia de los cuerpos, punto de vista que, lamentablemente, es aún sostenido por algunos autores y reviste un carácter metafísico.

Es erróneo identificar el concepto de materia con una de sus propiedades, en este caso la masa.

Otra opinión igualmente errada es la debida a algunos físicos idealistas que atribuyen a esta magnitud solamente un carácter formal, como un coeficiente numérico necesario para la formulación de las ecuaciones de la mecánica. La masa, como vimos con anterioridad nos informa sobre la existencia objetiva de las propiedades inerciales de los cuerpos.

En la mecánica clásica o newtoniana se supone que la masa de un cuerpo es una magnitud constante que no depende de la velocidad del mismo. En el capítulo siguiente analizaremos con mayor detalle el alcance real de esta afirmación.

Las ideas expresadas con respecto a la Figura 5 permiten acercarnos a una definición cuantitativa de la masa. Con este objetivo realicemos el siguiente experimento. Consideremos dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  y apliquemos a los mismos, de forma independiente, las fuerzas de magnitud  $F$  y  $F'$ . Si determinamos las relaciones entre las aceleraciones correspondientes  $a_1$  y  $a_2$  (producidas por  $F$ ) y  $a'_1$  y  $a'_2$  (producidas por  $F'$ ) obtendremos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1}$$

Luego, podemos escribir:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1}$$

Si uno de los cuerpos, digamos el de masa  $m_2$ , es el patrón de masa cuya masa es de 1 kg, entonces la relación 3-3 permite determinar de inmediato la masa  $m_1$ . En efecto, en este caso:

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{a_2}{a_1}$$

La mayoría de los sistemas de unidades que se emplean en la práctica no definen las unidades de las tres magnitudes que aparecen en la expresión 3-5 de forma independiente, sino que utilizan esta propia expresión para definir las unidades de una de ellas (la fuerza o la masa) en función de las correspondientes a las otras dos.

En el Sistema Internacional de Unidades, la fuerza es una magnitud derivada. Su unidad, el newton (N) se define como la fuerza que al actuar sobre un cuerpo de masa 1kg le imprime una aceleración de  $1\text{m/s}^2$ , es decir, se tiene la equivalencia:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

En el sistema limado CGS (centímetro, gramo, segundo) la unidad de fuerza es llamada la dina y corresponde a la fuerza que, al actuar sobre un cuerpo de masa 1g, le imprime una aceleración de  $1 \text{ cm/s}^2$ . Resulta evidente que  $1\text{N}=10^5$ dinas.

Recuérdese que, en realidad, la aceleración es una magnitud derivada ya que sus unidades se derivan de las unidades de longitud y tiempo. Por lo tanto, los dos sistemas de unidades señalados consideran como magnitudes fundamentales la masa, la longitud y el tiempo.

Existen otros sistemas de unidades, menos utilizados que los anteriores, pero de cierta importancia en algunas ramas de la ciencia y la técnica y en algunos países en particular, que consideran como magnitudes mecánicas fundamentales a la fuerza, la longitud y el tiempo. Entre ellas tenemos el Sistema Inglés Gravitacional, cuyas unidades básicas son la libra (lb) el pie y el segundo. En este sistema la masa es una magnitud derivada y su unidad.

El slug, se define como la masa de un cuerpo que adquiere una aceleración de  $1\text{pie/s}^2$  cuando sobre él actúan una fuerza de 1 libra. Se encuentra que  $1 \text{ lb} = 4,45 \text{ N}$  y que  $1\text{slug} = 14,6 \text{ kg}$ .

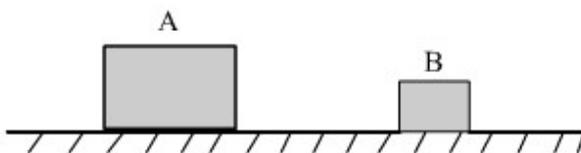
En el epígrafe 1.6 nos referiremos al llamado Sistema MKS Técnico el cual también considera a la masa como una magnitud derivada.

La expresión 3-5 es, en realidad, una ecuación vectorial ya que tanto la fuerza como la aceleración son magnitudes vectoriales y puesto que  $m$  es un escalar positivo, las direcciones y sentidos de ambas coinciden en correspondencia con lo establecido en el epígrafe anterior. Luego, podemos reescribirla como:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La expresión vectorial 1-6 es equivalente a tres ecuaciones escalares correspondientes a la descomposición de los vectores  $\vec{F}$  y  $\vec{a}$  en sus componentes rectangulares. De hecho, esta descomposición siempre se hace en la práctica a la hora de resolver los problemas como se verá *a posteriori*.

Aclaremos, finalmente, que la segunda ley, al igual que la primera, sólo se cumple respecto a sistemas de referencia inerciales.



**Figura 5.** Dos bloques de cobre de volúmenes diferentes. El bloque A tiene mayor masa que B.

**Fuente:** elaboración propia.

### 1.3. Tercera Ley de Newton

Para completar el conjunto de las leyes de Newton del movimiento mecánico, veamos su tercera ley.

En el epígrafe 1.3 interpretamos la fuerza como una magnitud física vinculada a las interacciones entre los cuerpos, que mide, de cierta forma, la intensidad de estas interacciones. Es decir, cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza, ella necesariamente, es el resultado de la acción sobre él, de otro cuerpo que forma parte del medio ambiente. La experiencia demuestra que las acciones entre los cuerpos que interactúan son mutuas, es decir, si el cuerpo A ejerce una acción sobre el cuerpo B, a la vez el cuerpo B ejerce una acción sobre el cuerpo A. En correspondencia con ello, si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, simultáneamente el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A. La experiencia también demuestra que ambas fuerzas son de igual magnitud, están contenidas en la línea recta que une a ambos cuerpos, supuestos puntos materiales (esto no es completamente general ya que supone despreciable el tiempo que tardan en transmitirse las acciones entre los cuerpos. Volveremos a estos aspectos posteriormente en el texto) y tienen sentidos

opuestos. Esto constituye el contenido de la tercera ley que puede ser enunciada de la siguiente forma: Las acciones mutuas entre dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentidos contrarios. Matemáticamente, la tercera ley puede formularse así:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Sobre el bloque actúa la atracción de la Tierra, que representamos por el vector  $\vec{F}_g$ .

Sobre la cuerda actúan la fuerza señalada  $\vec{T}$ , la fuerza de atracción de la Tierra  $\vec{f}_g$ .

Cuál tiene mayor peso entre dos cuerpos dados. Para ello basta coger los cuerpos en las manos y precisar cuál de los dos nos presiona más fuertemente hacia abajo, o lo que es lo mismo, en cuál de los dos se requiere un mayor esfuerzo muscular para mantenerlos colgados en reposo.

En general podemos definir el peso de un cuerpo como la fuerza que él ejerce sobre su apoyo o sostén cuando está en reposo respecto a éste.

Es común en la literatura docente decir que el peso de un cuerpo es igual a la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre él. Esto es válido (aproximadamente) sólo en el caso en que dicho cuerpo esté en reposo respecto a la superficie terrestre (o que se mueva con MRU). Para convencernos de ello analicemos varios ejemplos. Primeramente, centremos nuestra atención en el bloque de la Figura 6. Vimos que, en este caso, el cuerpo se encuentra en reposo y por ello se cumple que:

$$\vec{F}_g = -\vec{T}$$

Libremente con la misma aceleración la cual tiene, además, el mismo valor durante todo el recorrido, si la altura desde la cual se produce la caída no es muy grande. Esta es la llamada aceleración de la gravedad cuyo valor modular representamos por la letra  $g$ . Suponiendo que durante la caída libre la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la que ejerce la Tierra sobre el mismo (se desprecian los efectos de la fricción con el aire); entonces, aplicando la segunda ley de Newton podemos escribir:

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} \quad [3-8]$$

Donde  $\vec{F}_g$  designa a la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo,  $m$  es su masa y  $\vec{g}$  es un vector dirigido aproximadamente hacia el centro de la Tierra y cuyo valor modulares  $g$ .

Si consideramos solamente los valores modulares, entonces [3-8] puede reescribirse como:

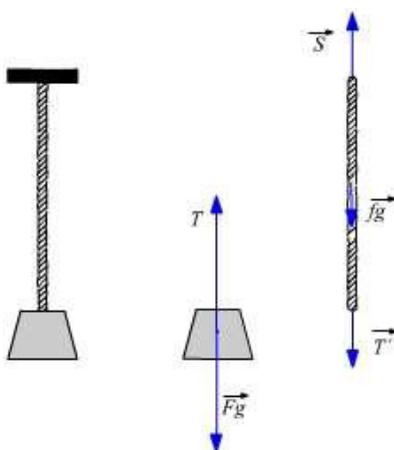
$$Fg=m \cdot g \quad [3-8a]$$

Supongamos ahora que el cuerpo está en reposo respecto a la superficie terrestre. Para ello es necesario que su apoyo o sostén ejerza sobre él una fuerza de igual magnitud y dirección que  $\vec{F}_g$  y de sentido contrario. Pero entonces, por la tercera ley de Newton, el cuerpo a su vez ejercerá una fuerza sobre dicho apoyo o sostén de igual magnitud, dirección y sentido que  $\vec{F}_g$  (o sea, iguala  $\vec{F}_g$ ) la cual coincide con su peso, de acuerdo con la definición, y que denotaremos como  $\vec{P}$  terrestre para suministrarle una aceleración dada pues la masa es la misma en ambos lugares.

La expresión 3-9 o 3-9a permite, además, llegar a otra conclusión de interés. Supongamos que se tienen dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , situados en reposo en un mismo lugar de la Tierra. Como  $g$  es la misma para ambos, se tiene:

$$P_1 = m_1 g \quad P_2 = m_2 g \quad \text{y de aquí} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

La unidad de masa, en el sistema técnico, se deriva directamente de la expresión 3-5. Como tal se escoge la masa de un cuerpo que, bajo la acción de una fuerza de 1kgf, adquiere la aceleración de  $1m/s_2$ . Esta unidad no tiene un nombre especial y se denomina simplemente unidad técnica de masa (utm). Es evidente que  $1utm=9,8kg$ . Se deja al alumno la demostración de esta sencilla relación.



**Figura 6.** Análisis de las fuerzas presentes en el caso de un bloque que cuelga del techo por medio de una cuerda. a) Sistema en su conjunto. b) Diagrama de fuerzas del bloque. c) Diagrama de fuerzas de la cuerda.

**Fuente:** elaboración propia.

## 1.4. Medición Estática de Fuerzas

Abordaremos ahora el procedimiento estático, es decir, aquel que se basa en considerar la deformación que sufre un cuerpo sobre el que actúa una fuerza, como medida de la propia fuerza.

Estaremos de acuerdo en que el cuerpo que se utilice para sufrir la deformación debe ser un cuerpo elástico. Vale la pena recordar que se denomina elasticidad a la propiedad de los cuerpos de recuperar su forma original al cesar la acción que los ha deformado. Todos los cuerpos en la naturaleza poseen elasticidad dentro de ciertos límites. Esto significa que para un cuerpo dado existe una deformación máxima (límite de elasticidad), sobre pasada la cual no recupera por sí solo su forma original. Los cuerpos que admiten grandes deformaciones sin rebasar el límite de elasticidad son denominados cuerpos elásticos. Un ejemplo típico lo constituye el resorte en forma de espiral que se obtiene enrollando convenientemente un alambre fino de acero. Para la medición estática de fuerzas este dispositivo se dota de un indicador en uno de sus extremos y de una escala por la cual se desliza el indicador. El instrumento así obtenido es llamado **dinamómetro**, un esquema del cual se muestra en Figura 7. Para medir una fuerza dada, basta aplicar ésta al extremo libre del resorte hasta que llegue al equilibrio y medir su magnitud por la deformación sufrida, la cual se determina por el movimiento del indicador sobre la escala (el dinamómetro en sí mismo no debe estar acelerado).

Desde luego, se requiere una calibración inicial del instrumento. Para comenzar puede situarse el cero de la escala en la posición que marca el indicador cuando no se está aplicando fuerza alguna. Como fuerza unitaria puede escogerse la atracción de la Tierra sobre un cuerpo patrón en un lugar determinado. Supongamos, por ejemplo, que utilizamos un bloque cuya masa, en kg, es  $m=1/g$  ( $g$  es el valor de la aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ ).

Si colgamos el cuerpo del resorte, una vez alcanzado la posición de equilibrio estaremos en una situación completamente análoga a la descrita en el ejemplo 3.1 (Figura 1). Usando las mismas denominaciones que allá, para las diferentes fuerzas, tendremos:

$$P=mg= \frac{1}{g} \text{ kg} \cdot \text{g}/\text{s}^2=1\text{N}$$

Y puesto que  $\vec{p} = -\vec{T} = \vec{T}'$ :

Tenemos que  $T'=1\text{N}$  ( $T'$  es el valor modular de  $\vec{T}'$ ).

Luego la fuerza aplicada al extremo del resorte es de 1newton y puede escribirse 1N en la posición que marca el indicador (obsérvese que  $\vec{T}'$  es la fuerza que se quiere medir).

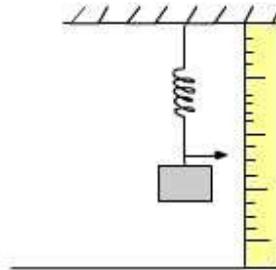
Si ahora colgamos 2, 3, etc., cuerpos análogos al anterior, podemos escribir sucesivamente 2N, 3N, etc., en las posiciones respectivas del indicador y con ello queda calibrada la escala del dinamómetro. Ahora podemos usar este instrumento para medir fuerzas cualesquiera, aunque no correspondan a la atracción de la Tierra sobre un cuerpo dado.

En este procedimiento se hace uso explícito de la primera y de la tercera ley de Newton. En efecto, al considerar la igualdad  $\vec{F} = -\vec{F}'$ .

Puntualicemos, antes de pasar a las aplicaciones, algunas circunstancias que se derivan de las leyes y conceptos estudiados en este capítulo y en el capítulo anterior.

Vimos que la segunda ley de Newton, que puede ser considerada la ley fundamental de la mecánica, se cumple en los sistemas inerciales de referencia. Por otro lado, quedó establecido en el epígrafe 2.5, que la aceleración de un cuerpo es la misma en todos los sistemas de referencia que se mueven entre sí con velocidad constante y de esto se deriva que todo sistema de referencias que se mueve con velocidad constante respecto a un sistema inercial es también un sistema inercial. En resumen, todos los sistemas inerciales de referencia que existen, se mueven uno respecto a otros con MRU y la aceleración de un cuerpo cualesquiera es la misma en todos ellos. Pero, según la segunda ley, ello implica que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo serán también las mismas en cualquiera de dichos sistemas. Concluimos, sin mayores dificultades, que todos los fenómenos mecánicos se describen de la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Supongamos, por ejemplo, que estamos en el interior de un barco que avanza en aguas tranquilas con velocidad constante. En estas circunstancias, si lanzamos un cuerpo hacia arriba, al descender caerá nuevamente en nuestra mano, si damos un salto, avanzaremos la misma distancia si éste se realiza en sentido del movimiento del barco o en sentido contrario, y si lanzamos un objeto, éste describirá un movimiento parabolic como el descrito en el capítulo II, (despreciando la fricción con el aire) respecto al barco, etc. Estas circunstancias fueron observadas en su tiempo por Galileo el cual las resumió en el llamado principio de relatividad clásico que puede ser formulado de la siguiente forma: no es posible, mediante experimentos mecánicos realizados en el interior de un sistema de referencia inercial, determinar si éste se encuentra en reposo o en MRU.

Este principio fue generalizado posteriormente por Einstein quien estableció que tal determinación es imposible de realizar cualquiera sea la clase de experimentos que se utilicen: mecánicos, eléctricos, luminosos, etc.



**Figura 7.** Dinamómetro.  
**Fuente:** elaboración propia.

### 1.5. Ejemplos de Aplicación de las Leyes de Newton

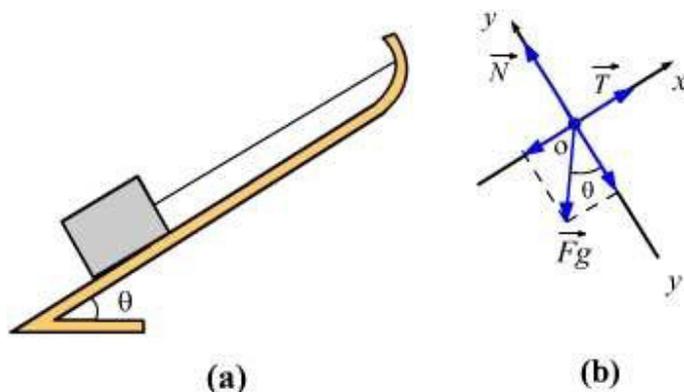
Antes de desarrollar ejemplos de aplicación de las leyes Newton, resulta útil indicar el procedimiento general que se aplica para resolver problemas dinámicos sencillos. El mismo consta de varios pasos:

- a) Identificar el cuerpo al cual se refiere el problema (que será considerado como un punto material) así como los restantes cuerpos que conforman el medio ambiente y que ejercen acciones (fuerzas) sobre el primero.
- b) Seleccionar un sistema (inercial) de referencia adecuado. El origen y las direcciones de los ejes rectangulares serán ubicados de forma tal que se simplifique el resto de los pasos.
- c) Realizar el **diagrama de fuerzas o de cuerpo libre** del cuerpo en cuestión. Para ello deben ubicarse todas las fuerzas que actúan sobre el mismo y descomponer estas en sus componentes rectangulares según los ejes coordenados establecidos.
- d) Escribir la segunda ley de Newton para cada uno de los ejes coordenados.
- e) Escribir las ecuaciones de ligadura presentes en la situación dada. Vistas en sentido amplio, las ecuaciones de ligaduras o en relaciones preestablecidas por las condiciones del problema y que ligan dos o más magnitudes cinemáticas o dinámicas. Ejemplos de tales ecuaciones pueden ser la relación entre las aceleraciones de dos cuerpos que se mueven atados por

una cuerda, la igualdad entre las magnitudes de dos fuerzas que forman un par de acción y reacción, etc.

- f) Resolución del sistema de ecuaciones que resulta de los puntos d y he a fin de encontrar los valores de las incógnitas del problema.
- g) Análisis de los resultados desde el punto de vista numérico, dimensional, etc.

Ejemplo la Figura 8 muestra un bloque de masa  $m$  que se encuentra en reposo sobre la superficie lisa de un plano inclinado un ángulo respecto a la horizontal, por medio de una cuerda ligera e inextensible. a) Calcule el valor de la tensión en la cuerda y de la reacción normal de la superficie sobre el bloque en función de  $m$ . b) Supongamos que se corta la cuerda junto al bloque. Calcule la aceleración con que baja por el plano.



**Figura 8.** Un bloque se sostiene sobre la superficie lisa de un plano inclinado mediante una cuerda. b) Diagrama de fuerzas. El bloque se representa por un punto.

**Fuente:** elaboración propia.

## SOLUCIÓN

Resulta evidente que el cuerpo a tener en cuenta es el bloque y que los demás cuerpos que ejercen acciones sobre él son la superficie del plano, la cuerda y la Tierra que lo atrae hacia su centro. En la Figura 8 b se muestra el diagrama de fuerzas del bloque, así como el sistema de referencia que supondremos fijo a la Tierra, con su origen en algún punto del propio plano, con eje  $ox$  paralelo al plano y el eje  $oy$  perpendicular a éste. Observe que esta elección del sistema conlleva a que solamente (que sigue).

Si se corta la cuerda, el bloque se moverá aceleradamente según el eje  $ox$ , bajo la acción de la componente de la fuerza de gravedad paralela al mismo. En este caso podemos reescribir la segunda ley de Newton como:  $\vec{N}$ .

## SOLUCIÓN

En la Figura 9b se muestran los diagramas de fuerza de ambos cuerpos. Se ha tomado un sistema de referencia fijo a la Tierra con el eje  $oy$  vertical y el sentido positivo hacia arriba.

Los bloques se han representado por puntos materiales. La tensión en la cuerda  $\vec{T}$ , es la misma en ambos lados durante el movimiento por ser una cuerda inextensible y de masa despreciable y ser despreciable la masa de la polea (la influencia de esta magnitud en la tensión será analizada en el capítulo VI). Ya que todo el movimiento ocurre en el eje vertical solo escribiremos las ecuaciones para las componentes en este eje.

Para el cuerpo de masa  $m_1$ :

$$T - m_1g = m_1a_{1y}$$

Para el cuerpo de masa  $m_2$ :

$$T - m_2g = m_2a_{2y}$$

Pero existe una ecuación de ligadura pues los movimientos de los cuerpos no son independientes. Esta es:

$$a_{1y} = -a_{2y}$$

Podemos suponer que  $m_2 > m_1$  y escribirá  $a_{1y} = a$  y  $a_{2y} = -a$  donde  $a$  es la magnitud de la aceleración de ambos cuerpos. Luego podemos reescribir las ecuaciones de movimiento como:

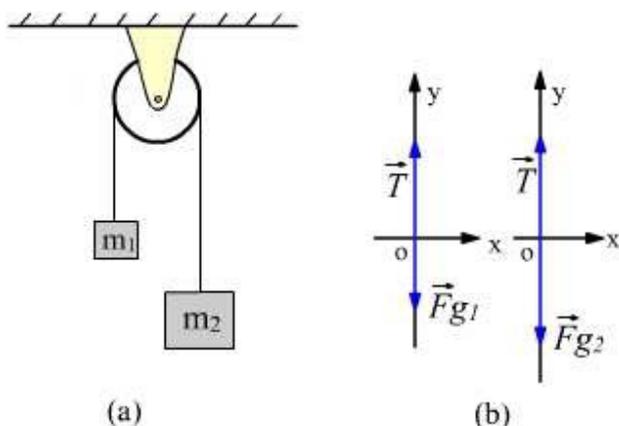
$$T - m_1g = m_1a$$

$$T - m_2g = -m_2a$$

y entre esas dos ecuaciones pueden calcularse fácilmente  $a$  y  $T$ :

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad \text{y} \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_2 + m_1} g$$

Podemos estar seguros de que sobre el cuerpo en cuestión actúa una fuerza  $\vec{F}_c$ .



**Figura 9.** a) Máquina de Atwood. b) Diagrama de fuerzas de ambos cuerpos.

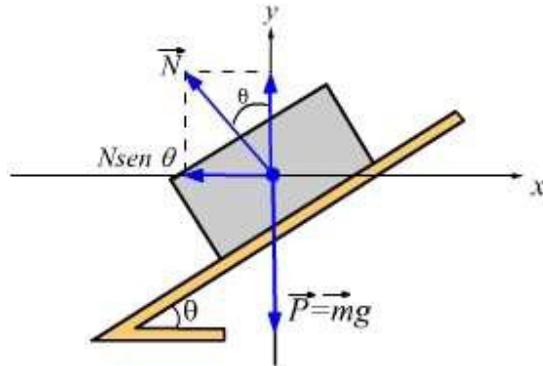
**Fuente:** elaboración propia.

Las pistas de carrera donde se han de desarrollar grandes velocidades, y en general las curvas en las carreteras, son dotadas de un ángulo de inclinación por sobre la horizontal, denominado ángulo de peralte (Figura 10). En este caso, además de la fuerza de fricción, habrá una componente de la reacción normal de la carretera, que actuará directamente hacia el centro de rotación contribuyendo a crear la fuerza centrípeta necesaria para el giro.

La segunda ley de Newton es igualmente válida en el caso más general de un movimiento circular no uniforme, es decir, que ocurre con rapidez variable

En este caso, la aceleración, en un instante dado, puede ser escrita como la suma de una componente normal y una componente tangencial. En consecuencia, debe estar aplicada sobre el cuerpo que gira una fuerza que poseerá también una componente normal y una componente tangencial, o sea:

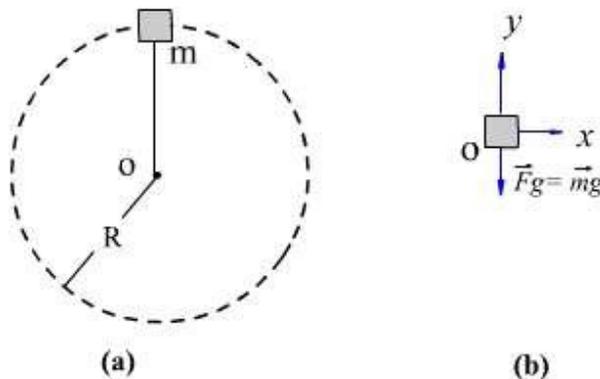
$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_N + \vec{a}_T) = ma_N\vec{N} + ma_T\vec{T} = \vec{F}_N + \vec{F}_T$$



**Figura 10.** Sección transversal de una pista con peralte mostrando las fuerzas que actúan sobre el vehículo (no se considera la fricción). La componente  $N$  se apunta hacia el centro de giro.

**Fuente:** elaboración propia.

Ejemplo un pequeño cuerpo de masa  $m$  está atado al extremo de una cuerda inextensible y es obligado a girar en un círculo vertical de radio  $R$  (Figura 11a). Determine la rapidez que debe poseer el cuerpo en el punto más alto de la trayectoria para que la tensión de la cuerda en ese punto sea nula.



**Figura 11.** a) Movimiento de un cuerpo atado a una cuerda, que describe un círculo vertical de radio  $R$ . b) Diagrama de fuerzas el cuerpo en el punto más alto suponiendo nula la tensión en la cuerda.

**Fuente:** elaboración propia.

## SOLUCIÓN

Resulta evidente que en cualquier punto de la trayectoria sobre el cuerpo actuarán la atracción gravitacional y la tensión de la cuerda. La componente de la resultante de ambas fuerzas, que estará dialmente hacia el centro, será la fuerza centripetal necesaria para realizar el giro. En la Figura 11b se muestra el diagrama de fuerzas

del cuerpo, en el punto más alto de su trayectoria y en las condiciones extremas que plantea el problema. En este caso la tensión en la cuerda es nula y solo actúa:

$$F_c = mg = m \frac{v^2}{r}$$
$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{Rg}$$

### 1.5.1. Las Fuerzas en la Naturaleza $g$

En los epígrafes precedentes de este capítulo, aparte de establecer el concepto de fuerza.

Nos hemos relacionado con fuerzas de orígenes diferentes tales como: las fuerzas de origen muscular, las producidas por la atracción de la Tierra sobre todos los cuerpos situados en sus inmediaciones; fuerzas producidas por cuerdas tensas, por el contacto entre los cuerpos o por el rozamiento entre superficies sólidas y las ejercidas por cuerpos que han sufrido una deformación como el caso del resorte.

En el presente epígrafe pretendemos profundizar en la naturaleza y propiedades de varias de estas fuerzas, que son las que más comúnmente nos encontramos en la vida diaria y precisar las leyes aproximadas que las rigen.

La física moderna reconoce cuatro tipos fundamentales de interacciones en la naturaleza, las cuales incluyen, de una u otra forma, a todos los tipos de fuerzas conocidas. Estas son las **interacciones gravitacionales** (provocadas por la gravitación), electromagnéticas (que se ejecutan a través del campo electromagnético), las llamadas interacciones fuertes (que garantizan el enlace de las partículas del núcleo atómico) y las interacciones débiles (que son responsables de muchos de los procesos de desintegración de las partículas elementales). En el marco de la física clásica a que se refiere el presente texto solamente han sido abordados los dos primeros tipos de interacciones.

## 1.6. Interacciones Gravitacionales

En el Capítulo VII se realizará un estudio detallado de este tipo de interacción, cuya ley fundamental es la llamada ley de gravitación universal formulada por Newton a partir de la síntesis de los trabajos de sus antecesores y de sus propias observaciones y conclusiones. Esta ley establece a qué es igual la fuerza (de atracción) gravitacional entre dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$  separados una distancia  $r$  entre sí.

Es también válida cuando uno o ambos puntos se sustituyen por cuerpos esféricos homogéneos, para el caso en que como distancia entre ellos se considera la distancia entre sus centros.

Como señalamos con anterioridad, en el caso particular y más común en que se considera la atracción gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo de masa  $m$  situado en las cercanías de su superficie, puede asumirse como expresión de la fuerza el producto  $mg$ . En esta expresión  $g$  es la magnitud de la llamada aceleración de la gravedad y para ella es común tomar el valor de  $9,8\text{m/s}^2$ . Esta sustitución tiene sólo un carácter aproximado, pero puede ser asumida sin mucho error en la mayoría de los casos prácticos. En los Capítulos VII y VIII mostraremos que, en realidad, el valor de  $g$  obtenido a partir de la ley de gravitación universal es ligeramente superior al señalado aquí, en virtud del movimiento de rotación de la Tierra.

### 1.7. Interacciones Electromagnéticas

Estas interacciones se caracterizan por la fuerza que experimentan las partículas cargadas eléctricamente bajo la acción del campo electromagnético. Ellas serán estudiadas en detalle en la parte II del presente texto y no serán abordadas aquí. De momento diremos solamente que las **fuerzas de origen electromagnético** son mucho más fuertes que las de origen gravitacional. Así, por ejemplo, las fuerzas eléctricas entre las partículas cargadas que forman el átomo son millones de veces superiores que las fuerzas gravitacionales entre las mismas partículas, siendo las últimas despreciables frente a las primeras.

Tanto las fuerzas elásticas como las fuerzas de fricción tienen su origen en la interacción entre las moléculas y los átomos de la sustancia de la cual están constituidos los cuerpos. Por ello, la naturaleza de estas fuerzas es netamente electromagnética.

Nos referimos a la fuerza elástica que ejerce un resorte una vez que ha sufrido una deformación  $x$  (aumento o disminución de la longitud respecto a su valor normal), sobre el cuerpo que le produjo la misma. El origen de esta fuerza radica en la atracción que ejercen entre sí los átomos del resorte. Desde luego, dado el gran número de átomos, es imposible calcular todas las fuerzas individuales y sumarlas vectorialmente para obtener la fuerza resultante. Por ello es preferible recurrir a una ley empírica aproximada que relacione a esta fuerza con parámetros macroscópicos. Tal es el caso de la ley de Hooke que relaciona la magnitud de la fuerza elástica con el valor de la deformación  $x$ . Esta ley es válida no solamente para los resortes sino en general para todos los cuerpos dentro del límite de elasticidad.

Algo análogo ocurre con las fuerzas de fricción. Si pretendiéramos calcular detalladamente las fuerzas que aparecen entre dos superficies sólidas en contacto y en movimiento relativo, deberíamos calcular las fuerzas electromagnéticas entre los átomos que conforman las mismas para obtener la resultante. Un análisis de dicha naturaleza, a nivel microscópico, es prácticamente imposible. En su lugar es costumbre utilizar leyes simples de carácter empírico que permiten relacionar a las fuerzas de fricción con las características macroscópicas del propio cuerpo y del medio que lo rodea.

Por la extraordinaria importancia que revisten estas fuerzas, tanto en nuestra vida diaria como en la técnica, dedicaremos un epígrafe independiente para considerar sus particularidades.

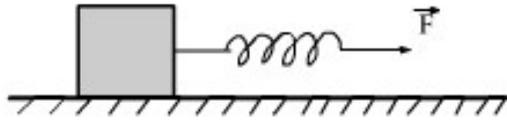
### 1.8. Fuerzas de Fricción

Las **fuerzas de fricción**, también llamadas de rozamiento, aparecen, en sentido general, durante el desplazamiento relativo de cuerpos en contactos o de unas partes de un cuerpo respecto a otras.

Las fuerzas de fricción que aparecen entre capas contiguas de un fluido (líquido o gas), debido al desplazamiento relativo entre ellos, y las que se generan por el movimiento de un sólido en el seno de un fluido son denominadas fuerzas de viscosidad. De momento estudiaremos las fuerzas de fricción originadas por el desplazamiento entre superficies sólidas secas, que se hallan en contacto.

Consideremos un bloque en reposo sobre una mesa horizontal y atemos al mismo uno de los extremos de un dinamómetro de masa despreciable. Apliquemos al otro extremo, una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud pequeña  $F$ , que puede ser medida en la escala de este instrumento. Si el bloque es suficientemente pesado y las superficies en contacto no son muy pulidas, no observaremos movimiento alguno.

Ya que la aceleración del bloque es nula y se está aplicando la fuerza  $\vec{F}$  hacia la derecha, debe existir otra fuerza hacia la izquierda de igual magnitud a fin de que la resultante sea nula en correspondencia con la Segunda Ley de Newton. Esta segunda fuerza sólo puede ser aplicada por la superficie de la mesa sobre la superficie del bloque en dirección tangencial a esta y es llamada fuerza de fricción estática,  $\vec{f}_s$ .



**Figura 12.** Bloque en reposo sobre una mesa horizontal.

**Fuente:** elaboración propia.

1. Tanto la fuerza máxima de fricción estática como la fuerza de fricción cinética son directamente proporcionales a la magnitud de la fuerza normal entre las superficies en contacto. Este hecho permite definir los llamados coeficientes de fricción estática y cinética ( $s$  y  $k$  respectivamente) mediante las relaciones:

$$f_{sm} = sN$$

$$f_k = kN$$

2. Las magnitudes de las fuerzas de fricción estática máxima y cinética son aproximadamente independientes del área de las superficies en contacto, dependen de la naturaleza de la sustancia que forman las mismas y de su rugosidad. Dentro de ciertos límites, la fricción disminuye con el aumento del pulido de las superficies.
3. La fuerza de fricción cinética entre superficies sólidas secas en contacto es aproximadamente independiente de la rapidez relativa entre ellas.

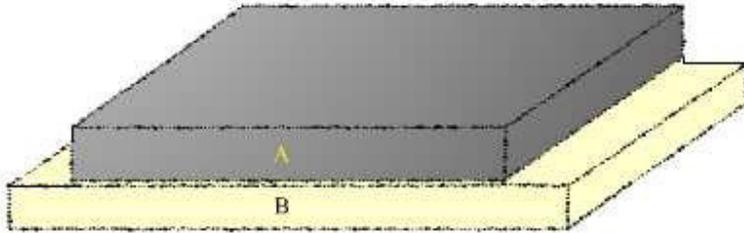
Elas relacionan las magnitudes de vectores que son perpendiculares entre sí y por tanto no pueden ser vistas como relaciones vectoriales. Obsérvese, además, que los coeficientes **s** y **k** son adimensionales ya que cada uno de ellos es igual al cociente de las magnitudes de dos fuerzas.

Los valores de los coeficientes estático y cinético de fricción están dados para cada par de superficies particulares, son generalmente menores que 1 y para ellos se cumple que  $s > k$ . Ellos dependen de la naturaleza de las sustancias que forman ambas superficies, de la rugosidad de las mismas y de la temperatura.

Aun cuando a simple vista una superficie sólida pueda parecer pulida, a escala microscópica está provista de rugosidades (entrantes y salientes). Cuando dos superficies (por ejemplo, las superficies A y B en la Figura 13) entran en contacto, se produce una interpenetración mutua de sus rugosidades y si una de ellas (A) trata de deslizarse sobre la otra (B) aparecen fuerzas de contacto no compensadas sobre

la primera que se oponen al desplazamiento. Este es, en buena medida, el origen de las fuerzas de fricción estática a que aludimos con anterioridad.

Si la fuerza aplicada sobre la superficie A es suficientemente grande se produce deformaciones plásticas de las rugosidades o simplemente éstas se rompen y se inicia el movimiento.



**Figura 13.** Dos superficies sólidas, secas, en contacto.

**Fuente:** elaboración propia

Las ideas expuestas explican el hecho conocido de que un mayor pulido de las superficies en contacto disminuye las fuerzas de fricción por deslizamiento. Esta disminución ocurre, sin embargo, dentro de ciertos límites. En efecto, en muchos puntos de contacto entre las dos superficies, las moléculas de ambos cuerpos están tan cercanas entre sí, que ejercen fuerzas intermoleculares fuertes entre ellas dando lugar al fenómeno conocido como adhesión superficial. Se produce una especie de soldadura en frío, de ambas superficies en esos puntos.

Cuando una superficie se desliza o intenta deslizarse sobre la otra, además del efecto señalado, de las rugosidades, deben romperse las pequeñas soldaduras, lo que contribuye también a las fuerzas de fricción. A medida que aumenta la planicidad de las superficies en contacto, es mayor el área efectiva de las zonas donde ocurre la adhesión y por ello a partir de un cierto estado de las mismas, el pulido posterior incrementa en lugar de disminuir, la fricción por deslizamiento.

Las fuerzas de fricción por rodadura son mucho menores, en general, que las que aparecen durante el deslizamiento, lo que explica las ventajas de la rueda. Cuando un cuerpo rueda sobre otro, las rugosidades de las superficies en contacto se van separando y los contactos soldados se arrancan en lugar de deslizar todo lo cual contribuye a una disminución sustancial de la fricción.

En la técnica es común disminuir los efectos negativos de la fricción sustituyendo el desplazamiento de unas superficies sobre otras por la rodadura. Para ello se emplean los dispositivos llamados rodamientos (cajas de bolas o roletes). Además,

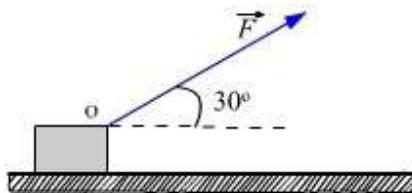
es conocido que una capa de lubricante entre las superficies en contacto, aun cuando sea muy fina, disminuye drásticamente las fuerzas de fricción entre ellas, tanto en el deslizamiento como en la rodadura.

La fricción, en muchos casos, resulta beneficiosa. De hecho, no podríamos caminar si no existiera fricción entre nuestros zapatos y el piso. Tampoco podrían moverse los transportes automotores. En casos como estos es común tratar de aumentarla fricción haciendo rugosas las superficies en contacto, evitando la humedad o la presencia de lubricantes en las carreteras, etc.

Desarrollaremos a continuación algunos ejemplos de problemas de dinámica considerando la presencia de las fuerzas de fricción.

**Ejemplo:** un bloque de masa 10,0kg y que descansa inicialmente sobre una superficie horizontal, es sometido a una fuerza constante  $\vec{F}$ , cuya magnitud de 100 N, en una dirección que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal como se muestra en la Figura 14. Se conoce que el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es de 0,500 en tanto el coeficiente de fricción cinética es de 0,300.

- Calcule la fuerza de fricción estática máxima entre el bloque y la superficie.
- Analice si la fuerza  $\vec{F}$  es capaz de poner al bloque en movimiento.
- En caso de que su respuesta al inciso b) sea afirmativa, calcule la aceleración del movimiento



**Figura 14.** Un bloque situado sobre una superficie horizontal con fricción es sometido a la fuerza.

**Fuente:** elaboración propia.

## SOLUCIÓN

- En la Figura 15 se muestra el diagrama de fuerzas del bloque. Se ha considerado un sistema de referencia fijo a la superficie horizontal.

Para el eje vertical podemos escribir:

$$N + F_{sen} - mg = 0 \text{ y } N = mg - F_{sen}$$

Luego:

$$fsm = sN = s(mg - F \sin \theta)$$

$$fsm = 0,5(10\text{kg} \cdot 9,8\text{m/s}^2 - 100\text{N} \cdot \sin 30^\circ) = 24,0\text{N}$$

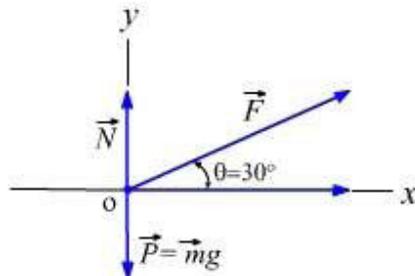
- b) Como  $fsm = 24\text{N}$  y la fuerza horizontal aplicada hacia la derecha es  $F \cos 30^\circ = 100 \cdot \text{N} \cdot \cos 30^\circ = 86,6\text{N}$ , se iniciará el movimiento.
- c) Para calcular la aceleración que adquiere el bloque debemos plantear la segunda ley en el eje  $ox$ :

$$F \cos \theta - f_k = m a_x$$

O sea:

$$F \cos \theta - \mu_k N = m a_x$$

$$Y \quad a_x = \frac{F \cos \theta - \mu_k N}{m}$$



**Figura 15.** Diagrama de fuerzas del bloque de la Figura G15.

**Fuente:** elaboración propia.

Ejemplo una curva peraltada se diseñó para que el tráfico se mueva, en cualesquiera condiciones, a una velocidad máxima de 60km/h. Su radio es de 200m. Supongamos que un automóvil se mueve por un tramo recto a 80km/h y penetra en la curva. Calcule el coeficiente mínimo de fricción entre las llantas y la carretera que permita a dicho automóvil recorrer la curva sin resbalar hacia afuera.

## SOLUCIÓN

Por el enunciado del problema podemos deducir que el ángulo de peralte de la curva fue calculado de manera que la componente  $N \sin \theta$ , de la fuerza normal sobre el

vehículo, aportara la fuerza centrípeta necesaria para el giro, a la velocidad máxima  $v=60\text{km/h}$ , sin contar con los efectos de la fricción.

Luego, podemos escribir, en relación con la referida Figura 16, que:

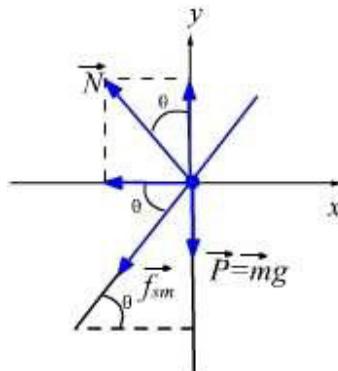
$$N \operatorname{sen} \theta = m \frac{v^2}{R}$$

Sustituyamos, en ambas ecuaciones, fsm por el producto N, dividamos miembro a miembro la primera entre la segunda para eliminar N y despejemos s, es decir:

$$\frac{N \cos \theta - N \mu_s \operatorname{sen} \theta}{N \operatorname{sen} \theta - N \mu_s \cos \theta} = \frac{mg}{\frac{mv^2}{R}}$$

$$\mu_s = \frac{1 - \frac{v^2}{v'^2}}{\frac{v^2}{gR} + \frac{gR}{v'^2}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

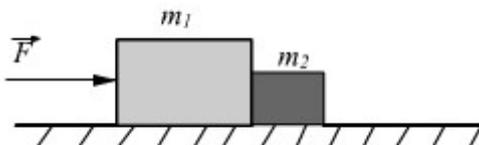


**Figura 16.** Diagrama de fuerzas del auto en el epígrafe 1.6.

**Fuente:** elaboración propia.

## 1.9. Problemas

1.- Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  están en contacto sobre una mesa sin fricción. Se aplica una fuerza sobre uno de los bloques, como se indica en la Figura 17. Suponga que  $m_1=2,0\text{kg}$ ,  $m_2=1,0\text{kg}$  y  $F=3,0\text{N}$ . a) Determine la fuerza de contacto entre los dos bloques. b) Si la misma fuerza se aplicara sobre el cuerpo de masa  $m_2$  (dirigida hacia la izquierda), ¿la fuerza de contacto sería la misma que en el inciso a)? En caso negativo, calcúlela.



**Figura 17.** Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  están en contacto sobre una mesa sin fricción.  
**Fuente:** elaboración propia.

**Respuesta:** a) 1,0N; b) no, sería de 2,0N

2.- a) ¿Qué fuerza resultante es necesaria para comunicar a un automóvil que pesa 800Kg una aceleración de  $2,4\text{m/s}^2$ ? b) ¿Qué fuerza resultante se precisa para facilitar a un bloque cuya masa es 1600g una aceleración de  $8\text{ cm/s}^2$ ? c) ¿Qué fuerza resultante es capaz de comunicar a un bloque de masa 1600Kg una aceleración de  $8\text{m/s}^2$ ?

**Respuesta:** a) 186 kg; b) 12800 dinas; c) 12800 N

3.- Un cuerpo de masa 15 Kg descansa sobre un plano horizontal liso y se hace actuar sobre él una fuerza horizontal de 30N. a) ¿Qué aceleración le produce? b) ¿Qué espacio recorrerá en 10s, y cuál será la velocidad al cabo de los 10s?

**Respuesta:** a)  $2\text{m/s}^2$ ; b) 100m c)  $20\text{ m/s}^4$ .-Halle la aceleración de los bloques en la Figura 17 y la tensión en hilo. Suponga que no existe fricción, que las masas de la polea y el hilo son despreciables 1-18. que éste último es inextensible. Considere  $m_1=2,0\text{kg}$  y  $m_2=3,0\text{kg}$

4.-Halle la aceleración de los bloques en la Figura 17 y la tensión en hilo. Suponga que no existe fricción, que las masas de la polea y el hilo son despreciables 1-18. que éste último es inextensible. Considere  $m_1=2,0\text{kg}$  y  $m_2=3,0\text{kg}$

**Respuesta:** a)  $3,9\text{m/s}^2$ , T 12kg

5.-Un cuerpo se cuelga por medio de un dinamómetro, del techo de un elevador. La lectura del dinamómetro es 98N cuando el mismo se encuentra en reposo. a) ¿Cuál será su lectura cuando el elevador se mueve hacia arriba con una rapidez constante de 2 m/s? b) ¿Y si se mueve hacia abajo con una aceleración constante de magnitud  $2\text{m/s}^2$ ?

**Respuesta:** a) 98N; b) 78N

6.- Se proyecta horizontalmente un electrón con una rapidez de  $1,2 \cdot 10^7$  m/s en una región donde existe un campo eléctrico que ejerce sobre él una fuerza vertical constante de  $4,5 \cdot 10^{-16}$  N. La masa del electrón es de  $9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. Determine la distancia que se desvía durante el tiempo que emplea en moverse 30 mm en dirección horizontal. ¿Considera usted en los cálculos el efecto de la fuerza de gravedad sobre el electrón?

**Respuesta:** 1,5mm

7.- Un avión de combate desciende en picada con una rapidez de 540km/h y describe, al nivelarse, un arco de circunferencia de 300m de radio. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto, cuya masa es de 80,0Kg, en el punto más bajo de la trayectoria?

**Respuesta:**  $6,78 \cdot 10^3\text{N}$

8.- Una piedra de masa 1Kg atado al extremo de una cuerda de 1m de longitud, cuya carga de ruptura es 500N, describe una circunferencia horizontal sobre el tablero de una mesa sin rozamiento. Se mantiene fijo el otro extremo de la cuerda. Calcular la máxima velocidad que la piedra puede alcanzar sin romper la cuerda.

**Respuesta:** 22 m/s

9.- Una esfera cargada de masa  $3,0 \cdot 10^{-4}\text{kg}$  se suspende de una cuerda. Sobre la esfera actúa horizontalmente una fuerza tal que la cuerda forma un ángulo de  $37^\circ$  con la vertical, cuando se encuentra en reposo. Determine la magnitud de la fuerza eléctrica y la tensión en la cuerda.

**Respuesta:**  $F_e=2,2 \cdot 10^{-3}\text{N}$ ,  $T=3,7 \cdot 10^{-3}\text{N}$

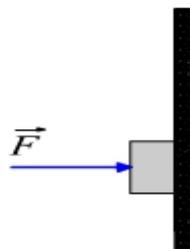
10.- Un bloque se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo con la horizontal (Figura 18). Comienza a aumentar el ángulo y se encuentra que el deslizamiento se inicia justamente cuando se alcanza un determinado valor. Calcule, con este dato, el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano

**Respuesta:**  $-\mu_s = \tan s$ .

11.- Un bloque de masa 2,5 slugs se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,30, y el coeficiente dinámico, 0,25. El bloque es sometido a una fuerza horizontal variable  $P$ , que es inicialmente nula y aumenta con el tiempo a razón constante de 2lb/s. a) ¿Cuándo iniciará el bloque el movimiento? b) ¿Cuál será su aceleración 8s después de iniciar su movimiento?

**Respuesta:** a) 12s después de aplicar la fuerza; b) 8 pies/s<sup>2</sup>

12.- Una fuerza horizontal de 90N presiona un bloque de masa 5,0kg contra una pared vertical (Figura 18). El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es de 0,60 y el coeficiente de fricción cinemática es 0,40. Suponiendo que el bloque no se encuentra en movimiento o inicialmente: a) ¿Se pondrá en movimiento? b) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la pared sobre el bloque, en este caso? c) Si se inicia el movimiento empujando el bloque hacia abajo con la mano ¿se frenará o se acelerará hacia abajo, al abandonarlo?



**Figura 18.** Bloque de masa 5,0kg contra una pared vertical.

**Fuente:** elaboración propia.

**Respuesta:** a) No; b) una fuerza de 90N hacia la izquierda y una fuerza de 49N hacia arriba

13.- Una curva circular, de una carretera, se diseña para que el tráfico se mueva a 60 km/h. a) Si el radio de la curva es de 150 m, ¿cuál es el ángulo de peralte adecuado? b) Si la curva no estuviera peraltada, ¿cuál debería ser el coeficiente de fricción mínimo entre las gomas de los autos y la carretera para que estos no resbalaran a esa rapidez?

**Respuesta:** a)  $11^\circ$ ; b) 0,19

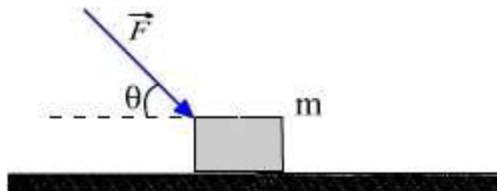
14.- Suponga que el kilogramo patrón pesa exactamente 9,8N a nivel del mar sobre el ecuador de la Tierra, si ésta no girara. Teniendo en cuenta que su radio en el ecuador es  $6,40 \cdot 10^6$ m y que un punto situado en su superficie en esa zona se mueve a 465m/s respecto a un sistema de referencia fijo a las estrellas, determine: a) La fuerza centrípeta necesaria para mantener al kilogramo patrón en su trayectoria circular. b) La fuerza ejercida por el kilogramo patrón sobre un dinamómetro del que está suspendido, en el ecuador (su peso aparente).

**Respuesta:** a) 0,0338N; b) 9,77N

15.- Determine si el bloque de la Figura 19 se pone movimiento bajo la acción de la fuerza F. Considere  $m=10$ kg,

$F=200$ N,  $\theta=30^\circ$  y  $\mu_s=0,6$ .

**Respuesta:** Sí



**Figura 19.** Bloque se pone en movimiento bajo la acción de la fuerza.

**Fuente:** elaboración propia.

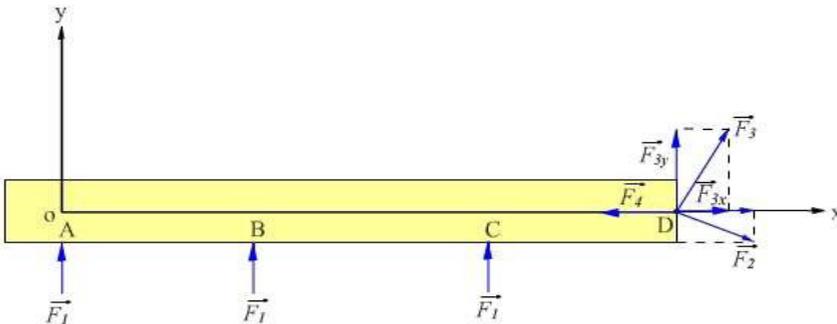


## CAPÍTULO II: ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

### 2.1. Dinámica de la Rotación del Cuerpo Rígido

#### 2.1.1. Introducción

Como resultado de la interacción con otros  $\vec{\alpha}$  cuerpos, sobre un punto material de masa  $m$  actúa una fuerza  $\vec{F}$ , esta le imprime al mismo una aceleración  $\vec{a}$  en correspondencia con la segunda ley de Newton, es decir, se satisface la ecuación  $\vec{F} = m\vec{a}$ , define la aceleración angular.



**Figura 20.** Vista superior de una regla fina que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y que puede rotar alrededor de un eje fijo, normal a la Figura y que coincide con el eje oz.

**Fuente:** elaboración propia.

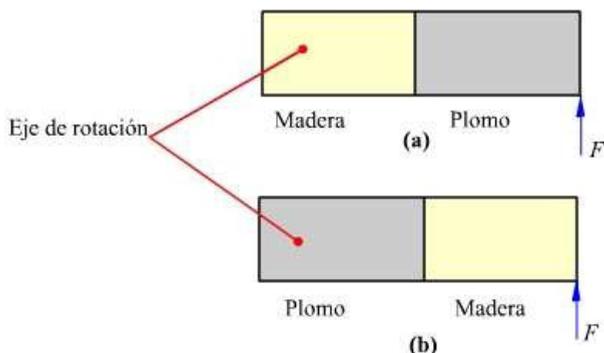
Supongamos ahora que aplicamos de forma independiente en el punto D fuerzas de igual magnitud, pero de direcciones diferentes. De nuevo observaremos diferentes resultados para la aceleración angular producida. La fuerza  $\vec{F}_4$  cuya línea de acción pasa por el eje de giro, no produce aceleración angular. Una fuerza como  $\vec{F}_3$ .

Como se recordará del Capítulo I, la masa de un cuerpo (punto material) es una medida de la inercialidad del mismo, de su oposición a ser acelerado linealmente. Surge de nuevo una interrogante, ¿representará la masa de un sólido rígido, su inercialidad en la rotación respecto a un eje fijo, es decir, su oposición a sufrir una aceleración angular? Nuevamente debemos responder negativamente y remitirnos al experimento, supongamos, al igual que antes, que estudiamos la rotación de una regla fina que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, respecto a un eje que pasa por sus extremos y es normal al plano de la regla. Sin embargo, consideraremos que ésta ahora está constituida por dos partes unidas, de iguales dimensiones, pero de materiales diferentes, una de madera liviana y la otra de

plomo. Analizaremos la aceleración angular producida por una fuerza  $\vec{F}$  contenida en el plano de la regla y aplicada perpendicularmente al lado mayor de ésta, en su extremo libre. Realizaremos dos experimentos diferentes intercambiando la posición de las partes de madera y plomo respecto al eje de rotación.

Encontraremos que en el caso (b), la magnitud de la aceleración angular producida es mayor que en el caso (a). Sin embargo, la masa del cuerpo que rota es en ambos casos la misma. Solo ha variado la distribución de masa respecto al eje de rotación. Vemos que en el caso (b) la masa del cuerpo está más concentrada en una zona cercana al eje de rotación.

No es, en efecto, la masa del cuerpo la que determina únicamente su inercialidad durante el movimiento de rotación. Debe tenerse en cuenta también cómo ella está distribuida respecto al eje. Definiremos el llamado momento de inercia  $I$  de un cuerpo rígido respecto a un eje dado, magnitud ésta que tiene en cuenta ambos aspectos y que juega en la dinámica de la rotación del cuerpo rígido el mismo rol que la masa en la dinámica del punto material.



**Figura 21.** Inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje dado.

**Fuente:** elaboración propia.

## 2.2. Torque o Momento de una Fuerza

Aunque estamos abordando la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, comenzaremos definiendo el torque o momento de una fuerza con respecto a un punto, cuando dicha fuerza actúa sobre un punto material aislado. Esto será utilizado posteriormente en el texto. Por simplicidad, tomaremos como punto de referencia al propio origen de coordenadas.

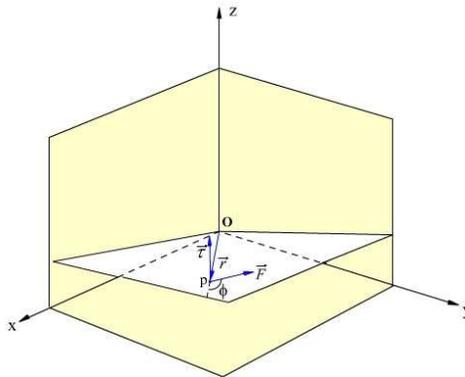
Supongamos que una fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre un punto material situado en  $P$ , con vector de posición  $\vec{r}$  respecto a un sistema de coordenadas (Figura 6). Entonces

definiremos el **torque o momento de la fuerza**  $\vec{\tau}$  respecto al punto 0 (Origen del Sistema) como  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ .

Las dimensiones del torque son, al igual que las del trabajo,  $ML^2 T^{-2}$  y se mide en N.m en el Sistema Internacional. Esta unidad, sin embargo, no debe confundirse con el joule definido en el Capítulo IV. El trabajo y el torque son magnitudes muy diferentes.

Pasemos ahora a considerar el caso de mayor interés en el presente capítulo que es el concepto de torque o momento de una fuerza con respecto a un eje o torque axial. Para acercarnos más a la situación que nos incumbe, supondremos que la fuerza actúa no sobre un punto material aislado, sino sobre un punto que pertenece a un cuerpo rígido que es obligado a girar con respecto a un eje que está fijo en un sistema de referencia. A una situación semejante nos referimos en el epígrafe anterior al considerarla rotación de una regla que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, respecto a un eje fijo que pasa por uno de sus extremos.

Supondremos, por comodidad, que el cuerpo rígido tiene forma de paralelepípedo rectangular, como se muestra en la Figura 22. El mismo puede girar en torno a un eje que coincide con el eje oz de un sistema de coordenadas y su cara anterior está contenida en el plano xoy del sistema.



**Figura 22.** Torque de una fuerza respecto al punto 0.

**Fuente:** elaboración propia.

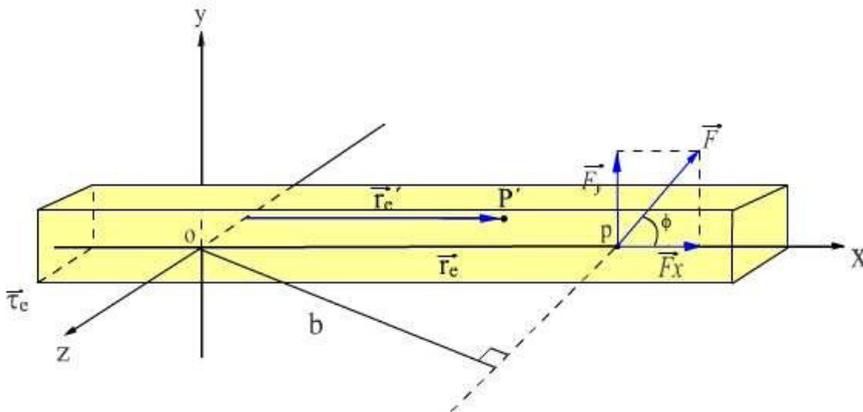
La fuerza  $\vec{F}$  está aplicada en el punto P del cuerpo, que supondremos se encuentra en la cara anterior, y está contenida también en el plano xoy. Llamémosle  $\vec{F}_e$ .

Obsérvese, además, que hemos considerado solamente fuerzas que están contenidas en un plano perpendicular al eje de rotación. Aunque este aspecto resta generalidad a nuestra definición, la misma es adecuada para los fines de estudiar el movimiento de rotación del cuerpo alrededor de un eje fijo, ya que las componentes de las

fuerzas que están en la dirección de este eje, no pueden producir ningún efecto en la rotación del cuerpo respecto al mismo.

El torque respecto a un eje que coincide con el eje  $oz$ , según 3, está en la propia dirección de dicho eje y su sentido es el que se obtiene aplicando la regla de la mano derecha (ver Figura 23). El valor modular del torque es  $e=re F \sin$  [2-4] donde  $e$ ,  $re$  y  $F$  representan los valores modulares respectivos, de los vectores que aparecen en 2-3 y es el ángulo entre  $\vec{r}_e$  diferentes puntos de éste. Nos limitamos, de nuevo, al caso en que las fuerzas están contenidas en el plano  $xoy$ , o en planos paralelos a éste. Cada fuerza posee su propio torque que será un vector dirigido según el eje  $oz$ , y se habla de un torque resultante, el cual puede ser encontrado como la suma vectorial de los torques individuales, o sea:

$$\vec{\tau}_x = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots + \vec{\tau}_n$$



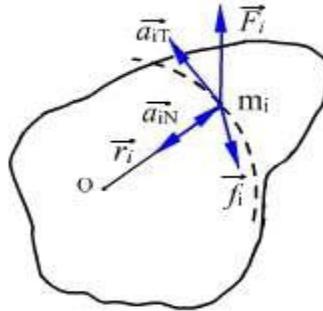
**Figura 23.** Definición del torque o momento de una fuerza respecto a un eje. Se ha considerado que la fuerza está aplicada en un punto de un cuerpo rígido que está obligado a rotar respecto a un eje fijo y se ha tomado como eje de referencia el propio eje de rotación.

**Fuente:** elaboración propia.

Supongamos que un cuerpo rígido puede rotar sin fricción alrededor de un eje fijo. Se muestra un corte del mismo por un plano perpendicular al eje de rotación Figura 24. Hemos denominado O al punto de intersección del eje con el plano. Consideremos al cuerpo formado por un número n (grande) de puntos materiales de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

Cada uno de estos puntos materiales puede estar sometido a fuerzas externas ejercidas por otros cuerpos del medio ambiente, y a fuerzas internas debidas a la interacción gravitatoria y electromagnética con el resto de los puntos del cuerpo.

Denominaremos  $\vec{F}_i$  y  $\vec{f}_i$  donde es el valor modular de la aceleración angular del cuerpo alrededor del eje fijo.

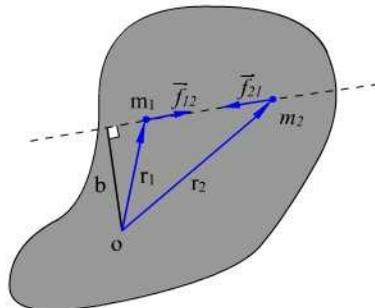


**Figura 24.** Cuerpo alrededor del eje fijo.  
**Fuente:** elaboración propia.

En este caso particular  $\vec{\alpha}$ , hemos denotado por  $\vec{f}_{12}$ .

El momento de inercia juega aquí el mismo rol que la masa en la traslación, es decir, representa la inercialidad o la oposición del cuerpo que rota, a ser acelerado angularmente. Obsérvese que, para un determinado torque resultante, es mayor a medida que  $I$  es menor y viceversa.

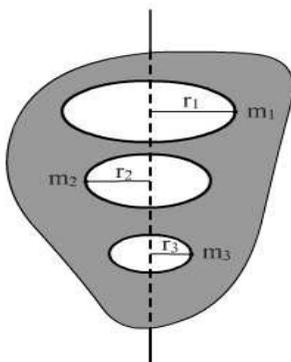
El estudiante puede comprobar que el momento de inercia, definido por la expresión cumple, en efecto, con los aspectos que fueron señalados de manera cualitativa. Esta magnitud tiene en cuenta no solamente la masa del cuerpo, sino también cómo ella está distribuida con respecto al eje en cuestión. Así, por ejemplo, la sumatoria en la Figura 25 será mayor cuanto más alejados del eje estén los puntos materiales que forman el cuerpo.



**Figura 25.** Masa del cuerpo, sino también cómo ella está distribuida con respecto al eje en cuestión.  
**Fuente:** elaboración propia.

Queda claro ahora que, en el caso (b) del ejemplo descrito en la Figura 21, el momento de inercia de la regla, respecto al eje de rotación, es menor que en el caso (a), debido a una mayor concentración de la masa en las cercanías del eje. Esto explica el hecho de que la aceleración angular es mayor en ese caso. Vale la pena aclarar que  $r_1$ , en la expresión Figura 24, no es la distancia del punto material de masa  $m$  hasta un origen, sino hasta el eje que se considere.

La Figura 26 es una vista de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. En ella se muestran diferentes puntos materiales y sus distancias hasta el eje, a fin de aclarar estas ideas. Debe también recalcar el hecho de que un cuerpo dado tiene diferentes valores del momento de inercia respecto a ejes diferentes y por ello es imprescindible especificar siempre en relación a qué eje lo estamos calculando. Esto es debido a que, al variar el eje, varía en general la distribución de masa respecto al mismo. En otras palabras, un mismo punto de masa tiene diferentes distancias  $R_i$ , respecto a ejes diferentes y por ello también serán diferentes los valores del producto  $m_i r_i^2$ .



**Figura 26.** Cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.  
**Fuente:** elaboración propia.

Considérese un cuerpo formado por dos esferas de masa 5,0kg cada una, que están unidas por una barra rígida de 1,0m de longitud y de masa despreciable. Considere las esferas como puntos materiales, es decir, de diámetros mucho menores que la distancia entre ellas y determine el momento de inercia.

- a) Con respecto a un eje perpendicular a la barra rígida y que pasa por su centro.**
- b) Con respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de una de las esferas.**

## SOLUCIÓN

a) Dadas las condiciones del problema podemos suponer al cuerpo formado por dos puntos materiales de masas y distancias hasta el eje, conocidas.

Luego:

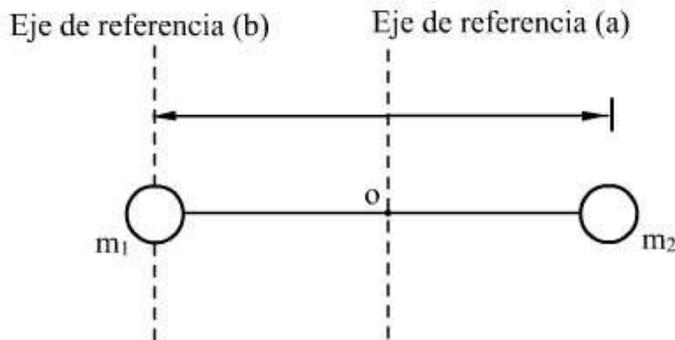
$$I_0 = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m l^2$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \cdot 5(1)^2 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b) En este caso, el eje pasa por el punto material de:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m \cdot 0 + m(l)^2 = ml = 5 \cdot 1 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



**Figura 27.** Cuerpo formado por dos esferas.

**Fuente:** elaboración propia.

En el desarrollo de este capítulo hemos considerado a un cuerpo rígido como un sistema particular de puntos materiales que guardan distancias fijas entre sí. Sin embargo, el número de tales puntos (átomos, por ejemplo) es tan grande y su separación tan pequeña que podemos suponerlo formado por una distribución continua de masa. En este caso, para hallar el momento de inercia podemos suponer al cuerpo dividido en un número muy elevado de pequeñas porciones, de masa. La distancia  $R_i$  se toma desde un punto cualquiera de cada porción, hasta el eje de referencia. Es evidente que el proceso es más exacto en la medida en que las porciones sean más pequeñas, con lo cual su número se incrementaría. En rigor, debemos suponer al cuerpo dividido en elementos infinitesimales de masa,  $dm$ , siendo  $r$  la distancia de dicho elemento al eje. Entonces la sumatoria que aparece debe ser sustituida por una integral, es decir:

$$I = \int_c r^2 dm$$

Si llamamos a la densidad (uniforme en todo el cuerpo) podemos escribir que  $dm=dV$ , donde  $dV$  es el volumen de la capa mencionada. De acuerdo con la figura, resulta ser  $dV=2 rLdr$ , luego el momento de inercia respecto al eje central será:

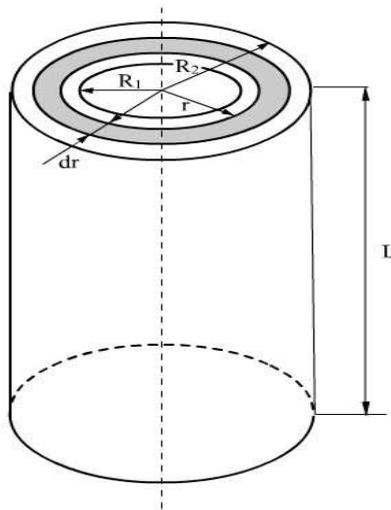
$$I = \int_c r^2 dm = \int_v r^2 \rho dV = 2\pi L\rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

Por otro lado, se puede considerar un aro como un cilindro hueco de pared muy delgada. En ese caso  $R_1 = R_2 = R$  obtenemos que nos da el momento de inercia de un aro de masa  $M$  y radio  $R$ , respecto a su eje central.

$$I=MR^2$$

Comparando la Figura 27 y la Figura 28 vemos que el momento de inercia de un aro de masa  $M$  y radio  $R$  es dos veces mayor que la de un cilindro macizo de iguales masa y radio. Esto se explica por el hecho de que en este último cuerpo la mayor parte de la masa está a una distancia del eje menor que  $R$ .

La Tabla muestra los momentos de inercia de varios sólidos regulares de densidad uniforme respecto a diversos ejes de simetría. En todas las expresiones,  $M$  representa la masa total del cuerpo. Estos resultados se obtienen siguiendo un proceso análogo al descrito anteriormente.



**Figura 28.** Cuerpo rígido como un sistema particular de puntos materiales que guardan distancias fijas entre sí.

**Fuente:** elaboración propia.

Existe una relación sencilla entre el momento de inercia  $I$ , de un cuerpo rígido respecto a un eje cualquiera y el momento de inercia  $I_{cm}$  respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por su centro de masa. Si  $M$  es la masa del cuerpo y  $h$  es la distancia entre los ejes, las relaciones  $I=I_{cm}+Mh^2$  [6-36].

La igualdad 6-36 se conoce con el nombre de Teorema de Steiner o de los ejes paralelos y no será demostrado aquí. El alumno interesado puede consultar la demostración en cualquier libro de Física General.

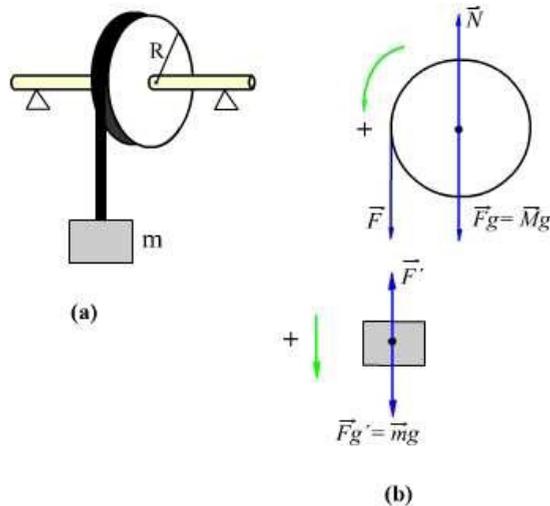
Aplicando este resultado podemos obtener el momento de inercia en el inciso b).

En efecto, utilizando las mismas denominaciones empleadas allá y en vista de la relación 6-36 se tiene:

$$I = I_{cm} + Mh^2 = I_0 + 2m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 = ml^2$$

a) Como se observa en la Figura 18, las únicas fuerzas externas que actúan sobre el disco  $\vec{F}$  son la fuerza  $\vec{F}$  aplicada al extremo libre de la cuerda, la fuerza de gravedad y la reacción normal del eje. Las dos últimas están contenidas en una recta que pasa por el eje de giro y por tanto sus torques, respecto a este eje, son nulos. El torque es positivo e igual a  $FR$ . Luego, la ecuación queda como:

$$FR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha$$



**Figura 29.** (a) Se cuelga un cuerpo de masa  $m$  en el extremo libre de la cuerda, en el ejemplo anterior. (b) Diagramas de fuerzas del disco y del cuerpo.

**Fuente:** elaboración propia.

Podríamos estar tentados a pensar que este problema se resuelve igual que el anterior, suponiendo que en el extremo libre de la cuerda se ejerce una fuerza de magnitud igual a  $F'g=mg$  que es la magnitud de la fuerza de gravedad  $\vec{F}'_g$  que actúa sobre el cuerpo. Sin embargo, esto no es cierto.

La razón de ello está en el hecho de que el cuerpo cae aceleradamente y por lo tanto  $F'g > F'$  donde hemos llamado  $F'$  al módulo de la fuerza que ejerce la cuerda sobre éste. Ya que la cuerda es de masa despreciable, ella simplemente transmite las acciones, es decir, la fuerza  $\vec{F}$  sobre el disco es de magnitud  $F=F'$  y por lo tanto  $F'g=mg > F$ . Así, en este caso el disco está sometido a un torque menor que en el ejemplo anterior y tanto su aceleración angular como la aceleración tangencial de un punto del borde serán menores que allá.

Aplicando la expresión (3-6), en forma escalar, al movimiento lineal del cuerpo, se obtiene:

$$mg - F = mg - F' = ma \quad (a)$$

Por otro lado, aplicando (6-29) al movimiento de rotación del disco se tiene:

$$FR = I \alpha \quad (b)$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. Debemos encontrar una tercera ecuación, que saldrá de la ligadura existente entre la rotación del disco y la traslación del cuerpo. En efecto, la aceleración  $a$  con que desciende este último es de igual valor que la aceleración tangencial  $a_T$  de un punto cualquiera del borde del disco, ya que están unidos por una cuerda inextensible. Pero conocemos de (6-13) que  $a_T = R\alpha$ , luego podemos escribir:

$$a = a_T = R\alpha \quad (c) \text{ Sustituyendo (c) en (a), obtenemos } mg - F = mR\alpha \quad (d)$$

Despejando  $F$  en (b) y sustituyendo en (c), podemos despejar para llegar a:

$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R} = \frac{2 \cdot 9,8}{\left(2 + \frac{20}{2}\right)0,5} \approx 3,3 \text{ rad/s}^2$$

Que en los ejemplos que acabamos de describir, en la máquina de Atwood ni la fuerza de gravedad ni la reacción normal del eje sobre la polea producen torques externos. Sólo debemos tener en cuenta los torques aplicados en ambos lados de la polea a través de la cuerda. Ya que el brazo es el mismo (igual al radio), entonces las fuerzas aplicadas deben tener magnitudes diferentes a fin de que los torques

correspondientes sean también de magnitudes diferentes y, en definitiva, el torque resultante sea de magnitud diferente de cero.

Antes de concluir el estudio de la dinámica del punto material resulta de interés definir una nueva magnitud física, cuya relevancia quedará clara a posteriori, y que es denominada momento lineal, o como le llamó el propio Newton, cantidad de movimiento lineal.

Supongamos que, en un instante dado:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

### 2.3. Introducción

En los capítulos precedentes desarrollamos la cinemática y la dinámica del punto material, es decir, tratamos a los cuerpos como si fueran puntos materiales, dotados de una cierta masa, pero de dimensiones despreciables.

En este capítulo ampliaremos nuestro estudio de la dinámica, considerando el caso más común e importante del movimiento de varios puntos materiales o de un sistema de puntos materiales.

En la primera parte del capítulo definiremos el centro de masa del sistema, explicaremos cómo se calcula su posición y estudiaremos su movimiento. Posteriormente definiremos la cantidad de movimiento lineal o momento lineal del sistema de puntos materiales, analizaremos el principio de conservación de esta magnitud y consideraremos ejemplos de aplicación de este principio a través del estudio de los choques.

### 2.4. Centro de Masa de un Sistema de Puntos Materiales

Dejamos establecido que durante la traslación pura de un cuerpo todos sus puntos describen trayectorias análogas. Puede entonces describirse el movimiento de traslación del cuerpo en su conjunto describiendo el movimiento de uno cualquiera de sus puntos. Cuando se considera el movimiento real en la naturaleza, de un cuerpo extenso o de un sistema de cuerpos (los cuales pueden, además de trasladarse, rotar, vibrar, etc.), esto no es posible. Sin embargo, aún en este caso, puede estudiarse su movimiento de traslación considerando solamente el movimiento de un punto particular asociado a dicho cuerpo o sistema de cuerpos, que es el llamado centro de masa.

Este concepto resulta, además, de gran utilidad al aplicar la ley de conservación del momento lineal a un sistema de puntos materiales e incluso, a la hora de caracterizar la rotación de un cuerpo rígido. Comencemos definiendo el centro de masa de un sistema compuesto por dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , situados en las posiciones que se muestran en la Figura 30. Se ha escogido, como sistema de referencia, uno cuyo eje  $ox$  coincide con la recta que une ambos puntos.

Con esa elección, la posición de éstos queda dada por las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ .

En estas condiciones, se define el centro de masa del sistema de los dos puntos materiales, como el punto situado en el segmento de recta que los une y cuya coordenada viene dada por la expresión:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Que se muestra, cualitativamente, en la Figura 5; Si  $m_2 > m_1$ , el centro de masa estará situado casi en la misma posición que el punto material de masa  $m_2$ .

En general, el centro de masa de un sistema de puntos materiales, el cual eventualmente puede ser un cuerpo sólido, está siempre cercano a la zona donde está la mayor concentración de la masa del sistema.

Obsérvese finalmente, que el centro de masa tiene la propiedad de que el producto de la masa total del sistema por su distancia al origen es igual a la suma de los productos de la masa de cada punto material por su distancia al origen, es decir:

$$(m_1 + m_2) x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad [5-2]$$

Supongamos ahora que, en lugar de dos puntos materiales, analizamos un sistema de  $n$  puntos materiales de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , localizados en una línea recta, que puede ser tomada como el eje  $ox$  de un sistema de referencia. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , las coordenadas respectivas en el sistema de referencia señalado. Entonces se define la posición del centro de masa del sistema como:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

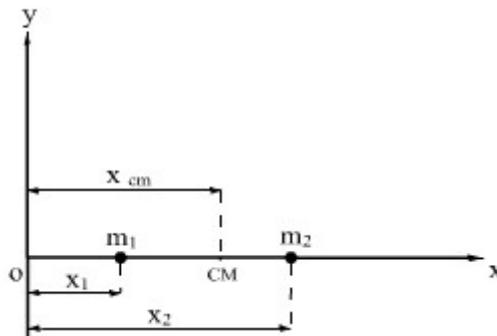
Si ahora suponemos que tenemos un sistema de  $n$  puntos materiales distribuidos en el espacio, de masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y coordenadas  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \dots (x_n, y_n, z_n)$ , las coordenadas del centro de masa serán:

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \\ y_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \\ z_{\text{cm}} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \end{aligned} \quad [5-5]$$

Obsérvese que las tres ecuaciones escalares 5-5 pueden ser escritas de una manera simple y elegante empleando notación vectorial; es decir, esas ecuaciones son equivalentes a:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}$$

donde es  $\vec{r}_i$  el vector de posición del punto material de masa  $m_i$ , respecto al sistema de referencia utilizado y  $\vec{r}_{\text{cm}}$ :



**Figura 30.** Centro de masa de un sistema de puntos materiales.  
**Fuente:** elaboración propia.

La posición del centro de masa será:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{3} = \frac{6}{3} = 2m$$

Un cuerpo rígido, tal como una barra metálica, podemos imaginarla como un sistema de puntos materiales estrechamente unidos y el número de puntos materiales (por ejemplo, átomos) es tan grande y su espaciamento tan pequeño, que podemos considerar el cuerpo como si tuviese una distribución continua de masa.

El procedimiento para obtener la expresión para el centro de masa, en este caso, es el siguiente: primeramente, subdividiremos el cuerpo en  $n$  pequeños elementos de masa  $m_i$  localizados aproximadamente en los puntos  $(x_i, y_i, z_i)$  y las ecuaciones 5-3 y 5-5 nos darán las coordenadas del centro de masa del cuerpo en cuestión, es decir:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i}{M}$$

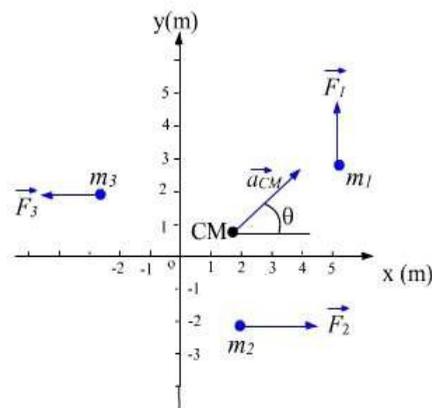
$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \rho x dV$$

**La masa total  $M$  de nuestro sistema es:**

$$M = 2\text{kg} + 5\text{kg} + 6\text{kg} = 13\text{kg}$$

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Donde:  $\vec{a}_{cm}$



**Figura 31.** Centro de masa.  
**Fuente:** elaboración propia.

**SOLUCIÓN**

Primero encontramos las coordenadas del centro de masa aplicando la ecuación 5-6:

$$x_{\text{cm}} = \frac{(8 \cdot 4) + (4 \cdot 1) + (4 \cdot -2)}{8 + 4 + 4} = 1.75\text{m}$$

$$m_1 = 8\text{kg}$$

$$m_2 = 4\text{kg}$$

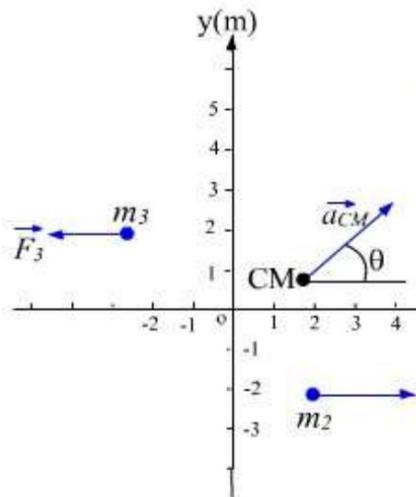
$$F_1 = 16\text{N} \quad F_2 = 14\text{N} \quad F_3$$

Por consiguiente, el módulo  $F$  de la fuerza resultante es:

$$F = \sqrt{8^2 + 16^2} = 18\text{N}$$

Definimos la cantidad de movimiento lineal o momento lineal de un punto material en un instante dado,  $\vec{P}$  o como la magnitud vectorial dada por la expresión:  $\vec{P} = m\vec{v}$  donde  $M$  es la masa total del sistema.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$



**Figura 32.** Centro de masa.  
**Fuente:** elaboración propia.

La expresión 5-20 es una generalización de la expresión 3-16, que define el momento lineal de un punto material. Ella sugiere que el momento lineal del sistema es el que

corresponde a un solo punto de masa igual a la masa del sistema  $M$ , y que se mueve con una velocidad igual a la velocidad del centro de masa  $\vec{v}_{cm}$  que la resultante de las fuerzas externas sobre ambos puntos materiales es nula durante dicha interacción. Entonces podemos afirmar que:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{01} + \vec{P}_{02}$$

## SOLUCIÓN

No resulta difícil entender que durante el disparo se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema revólver + bala. En efecto, la fuerza gravitatoria que actúa sobre ambas es compensada por lo que ejercen los apoyos que los sostienen y no existe una acción neta. Existe, sin embargo, una razón de tipo más general que es bueno exponer desde ahora. En fenómenos tales como los disparos, las explosiones y los choques aparecen fuerzas internas de gran magnitud que producen fuertes variaciones de la cantidad de movimiento de los cuerpos individuales que interactúan. Además, si consideramos nuestros análisis un instante inmediatamente antes y un instante inmediatamente después del suceso, el intervalo de tiempo a considerar es extraordinariamente pequeño. Por ambos motivos es una buena aproximación, en la mayoría de los casos, suponer despreciables los efectos de fuerzas externas, tales como la gravitatoria, la de fricción, etc. Es decir, podemos suponer que durante el tiempo en que ocurren eventos como los señalados, se conserva la cantidad de movimiento lineal total del sistema de los cuerpos que interactúan.

En nuestro análisis, consideramos como sistema de referencia un eje coordenado cuya dirección coincide con la dirección de la velocidad de salida de la bala inmediatamente después del choque. Ya que todo ocurre en una dimensión, trabajaremos con valores escalares.

Inicialmente tanto la bala como el revólver se encuentran en reposo, por tanto, la cantidad de movimiento o lineal total del sistema es igual a cero ( $P_0 = 0$ ).

Después de la explosión, la bala se desplaza hacia adelante con una cantidad de movimiento  $m_1 v_1$  y como la cantidad de movimiento del sistema es igual a cero, el revólver debe adquirir una cantidad de movimiento  $m_2 v_2$  en sentido opuesto al de la bala.

$$P_o = P$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$0 = 0,01 \text{ kg} \cdot 450 \text{ m/s} + 0,9 \text{ kg} \cdot v_2$$

$$v_2 = -\frac{0,010 \text{ kg} \cdot 450 \text{ m/s}}{0,900 \text{ kg}} = -5,00 \text{ m/s}$$

$$mu = m_1 v_1 \cos 45^\circ + m_2 v_2 \cos 30^\circ - m_3 v_3 \cos 60^\circ$$

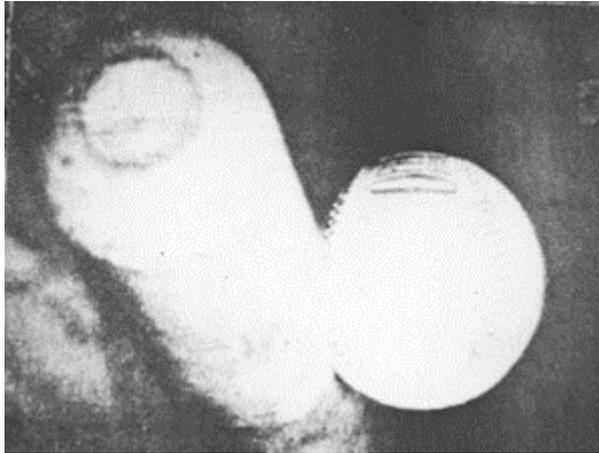
$$0 = m_1 v_1 \sin 45^\circ + m_2 v_2 \sin 30^\circ + m_3 v_3 \sin 60^\circ$$

### Aplicando la ley de conservación del momento, obtenemos:

Supongamos que la interacción entre los cuerpos que chocan ocurre entre los instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  y que nos interesamos por conocer la variación en la cantidad de movimiento lineal que sufre uno de ellos, por ejemplo, la pelota de béisbol en el ejemplo descrito anteriormente.

Podemos usar la segunda ley de Newton para un punto material de la cual obtenemos:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$



**Ilustración 1.** Segunda ley de Newton.

**Fuente:** elaboración propia.

En la Figura 33 se muestra una posible variación en el tiempo de la fuerza impulsiva entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ .

Obsérvese que el área sombreada (área bajo la curva) es justamente la magnitud del impulso.

En la forma en que está definido, el impulso resulta una magnitud poco útil en la mayoría de los problemas en física. Esto está relacionado con la imposibilidad de conocer, en la práctica, la forma en que varía la fuerza impulsiva con el tiempo.

Una forma alternativa de enfocar el problema es a través de la fuerza media  $\vec{F}_m$ .

$$J = p_2 = mv = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot 60 \text{m/s} = 3,0 \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J = 3,0 \text{N} \cdot \text{s}$$

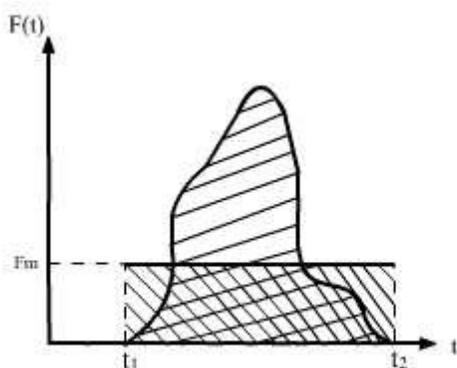
Pero el tiempo de caída puede ser obtenido a partir de los resultados y resulta ser:

$$\Delta t = \frac{v_1}{g} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{g}$$

La fuerza de gravedad de magnitud  $mg$ . Es decir, para el impulso obtenido se cumple:

$$J = (F_{\text{suelo}} - mg)\Delta t$$

Pueden suponerse como puntos materiales. Para ello nos apoyaremos en las leyes generales de la conservación de la cantidad de movimiento lineal y del a energía del sistema.



**Figura 33.** Variación de la fuerza impulsiva con el tiempo. El área bajo la curva es igual al impulso mecánico. Se muestra también la fuerza media entre  $t_1$  y  $t_2$ ,  $F_m$ .

**Fuente:** elaboración propia.

El caso más común de choque es aquél en que dos puntos materiales se aproximan y entran en contacto durante un intervalo de tiempo muy pequeño, produciéndose un intercambio entre sus cantidades de movimiento. Un ejemplo típico es el choque central entre dos bolas de billar.

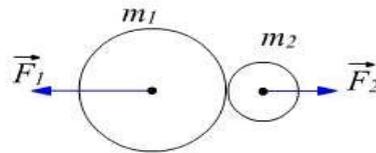
Aclaremos, sin embargo, que el concepto de choque en Física, tiene una interpretación más amplia que la que se acostumbra a dar en la vida cotidiana. Durante el choque entre dos partículas sub atómicas, por ejemplo, entre dos protones, aparecen fuerzas electrostáticas relativamente grandes, que actúan

durante un breve tiempo y que alteran sensiblemente el movimiento de ambos, sin necesidad de que entren físicamente en contacto, o sea, sin que se toquen. Una gran parte de nuestro conocimiento sobre las partículas atómicas y nucleares se ha obtenido experimentalmente observando los efectos de choques entre ellas, según las características descritas.

Como ya sabemos, durante el choque de dos puntos materiales aparece, sobre cada uno de ellos, una fuerza de grandes proporciones que actúa durante un intervalo de tiempo muy pequeño y que varía de forma irregular con el tiempo. Son las llamadas fuerzas impulsivas.

$$\vec{F}_1(t) = -\vec{F}_2(t)$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2(t) dt$$



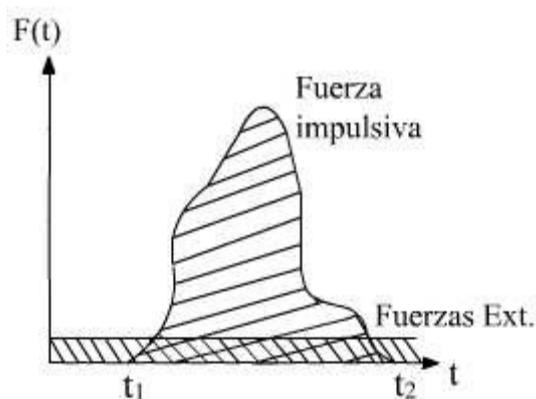
**Figura 34.** Choque de dos puntos materiales.

**Fuente:** elaboración propia.

En la Figura 35 se da una idea comparativa de los impulsos debidos a la fuerza impulsiva y a las fuerzas externas, durante el choque. Se hace evidente la posibilidad de despreciar los efectos de las fuerzas externas. Vale la pena recalcar que todo lo que se necesita para justificar la aplicación y conservación de la cantidad de movimiento lineal total durante el choque es que el mismo se efectúe en un intervalo de tiempo muy pequeño. Pasemos a continuación a estudiar concretamente algunos tipos de choques.

Es común clasificar los choques según se conserve o no, durante los mismos, la energía cinética total de los Cuerpos que interactúan así, se denominan choques elásticos a aquellos choques durante los cuales se conserva la energía cinética e inelásticos a aquellos donde no se conserva. También se llama choque inelástico o plástico a aquel choque en que los cuerpos que chocan quedan unidos y no se separan después del choque.

Los únicos choques elásticos conocidos son los que tienen lugar entre las partículas atómicas y subatómicas, es decir la mayoría de los choques son inelásticos. Sin embargo, teniendo en cuenta la naturaleza de los cuerpos que chocan (como, por ejemplo: el choque entre dos bolas de marfil), podemos tartar algunos choques aproximadamente como choques elásticos, (no se cumpliría si las bolas fueran de plastilina).



**Figura 35.** Comparación entre los impulsos producidos por la fuerza impulsiva y por las fuerzas externas durante un choque.

**Fuente:** elaboración propia.

## 2.5. Choques en una Dimensión

En general, el análisis de los fenómenos provocados por el choque de cuerpos sólidos elásticos es complejo. Sin embargo, considerando un choque elástico unidimensional aun cuando las fuerzas de interacción durante el impacto no se conozcan, podemos determinar el movimiento de los cuerpos después del choque a partir del movimiento de estos antes del choque. Para simplificar, consideraremos el caso más sencillo de un choque elástico de dos esferas lisas que no giran, cuyos centros se mueven sobre una misma línea recta antes y después del choque. Un choque de estas características recibe el nombre de choque central.

En un choque central las velocidades antes y después de chocar tienen la misma dirección, como se muestra en la Figura 2.

Las masas de las esferas son  $m_1$  y  $m_2$ . Sean  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  las velocidades antes del choque y  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , las velocidades después del impacto. Supondremos que las esferas no giran ni antes ni después del choque.

La conservación de la cantidad de movimiento lineal se expresa a través de la relación 5-28 es decir:

$$\vec{P}_0 = \vec{P} \quad \text{o} \quad m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$v_2 \approx 0 \quad v_1 \approx -u_1 y$$

Esto es, cuando una esfera ligera choca con otra muy pesada en reposo, la primera rebota con una velocidad de magnitud aproximadamente igual a la de la velocidad que tenía antes de chocar y la esfera más pesada permanece casi en reposo. Por ejemplo, esto sucede, cuando dejamos caer una pelota de goma verticalmente sobre una superficie horizontal o cuando lanzamos la pelota contra una pared. En ambos casos, la masa de la pelota es casi despreciable en comparación con la del otro cuerpo que interactúa (la Tierra o la pared, según el caso).

Finalmente, si  $m_2$  es mucho menor que  $m_1$ ,  $m_2 \ll m_1$ , con el mismo análisis anterior, obtenemos:

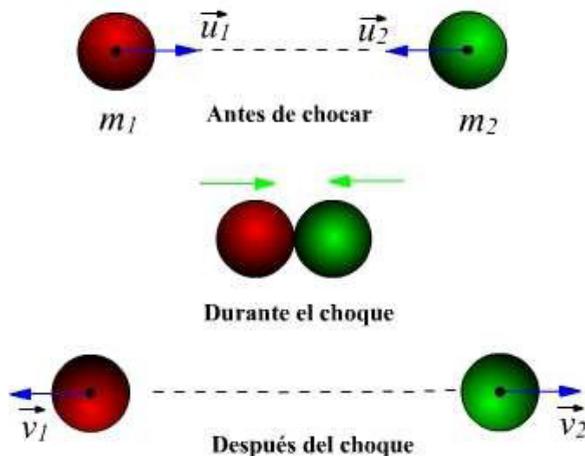
$$v_1 \approx u_1$$

$$v_2 \approx 2u_1$$

Esto significa que la velocidad de la esfera incidente de gran masa casi no cambia durante el choque con la esfera ligera en reposo, pero esta última, sale expelida aproximadamente con el doble de la velocidad de la esfera incidente. Por ejemplo, el movimiento de una bola de billar prácticamente no se afecta porque choque contra una pelota de plástico del mismo tamaño, inflada con aire.

Un análisis diferente al realizado hasta ahora requiere el caso de un choque completamente inelástico. Supongamos que dos esferas de masas  $m_1$  y  $m_2$  y velocidades  $\vec{u}_1$ .

Esta expresión permite obtener  $\vec{v}$ .



**Figura 36.** Choque central elástico de dos esferas de masas  $m_1$  y  $m_2$ .

**Fuente:** elaboración propia.

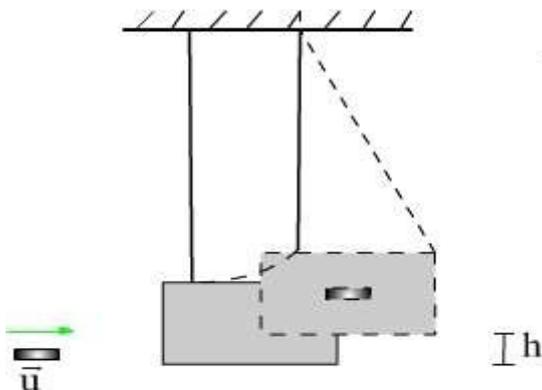
## SOLUCIÓN

La conservación de la cantidad de movimiento lineal establece que:

$$\vec{I}_0 = \vec{I}$$

### Ejemplo el péndulo balístico:

El péndulo balístico es un dispositivo que se utiliza para conocer la velocidad de las balas mediante un choque completamente inelástico entre la bala y el péndulo. Generalmente consta de un gran bloque de madera sostenido verticalmente por dos cuerdas (Figura 2). Supongamos un caso concreto en el cual una bala de masa  $m=2g$  avanza horizontalmente y lleva una velocidad de  $500m/s$ . La bala choca contra un péndulo balístico de masa  $m=1kg$ , suspendido por dos cuerdas de  $1m$  de largo cada una y se incrusta en él. a) ¿Qué altura subirá el péndulo con respecto a su posición inicial antes de empezar a oscilar? b) ¿Qué porcentaje de la energía cinética de la bala se pierde en este choque?



**Figura 37.** Péndulo balístico.  
**Fuente:** elaboración propia.

## SOLUCIÓN

Si el tiempo que dura el choque (tiempo requerido para que la bala quede en reposo con respecto al bloque) es muy pequeño, comparado con el período de oscilación del péndulo, las cuerdas que sirven de soportes permanecen prácticamente verticales durante este tiempo. Por tanto, durante el choque, no actúan fuerzas exteriores horizontales sobre el sistema y se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento lineal del mismo entonces si es la velocidad de la bala; la cantidad de movimiento inicial del sistema es  $m\vec{u}$ .

Por tanto, la energía total después del choque es 0,2% de la energía cinética inicial de la bala. Más del 99% de la energía cinética inicial se pierde y se convierte fundamentalmente en calor

Si el tiempo que dura el choque (tiempo requerido para que la bala quede en reposo con respecto al bloque) es muy pequeño, comparado con el período de oscilación del péndulo, las cuerdas que sirven de soportes permanecen prácticamente verticales durante este tiempo. Por tanto, durante el choque, no actúan fuerzas exteriores horizontales sobre el sistema y se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento lineal del mismo.

Entonces sí  $\vec{u}$  es la velocidad de la bala; la cantidad de movimiento inicial del sistema es  $m\vec{u}$ .

b) La energía cinética de la bala inicialmente es  $1/2 mu^2$  y la energía cinética total, inmediatamente después del choque es  $1/2(m+M)v^2$ .

**La relación:**

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2}{\frac{1}{2}mu^2} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = \frac{m}{m+M}$$

Una vez terminado el choque, el péndulo y la bala oscilan hasta una altura máxima  $h$ , es decir hasta que la energía cinética se convierta en energía potencial gravitatoria. Entonces aplicando la conservación de la energía mecánica para esta parte del movimiento, obtenemos:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh$$

dimensiones, esto no es posible. Analicemos, por ejemplo, el caso más simple de un choque elástico bidimensional de dos puntos materiales. La conservación de la energía cinética y de la cantidad de movimiento lineal total del sistema sólo aportan tres ecuaciones (téngase en cuenta que, por su naturaleza vectorial la conservación de  $\vec{P}$  aplicando el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, tendremos:

$$m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

[5-38]

Como señalamos anteriormente a partir de la ecuación 5-38 obtenemos dos ecuaciones escalares; para la componente x de la cantidad de movimiento tenemos aplicando la ley de conservación de:

$$\vec{P} \text{ sen } \theta_2 = \frac{v_1}{v_2} \text{ sen } \theta_1$$

b) Si la fuerza F aumenta durante 1,5s linealmente con el tiempo a partir de cero, y después de esto, disminuye a cero en 5s, calcule la fuerza máxima ejercida sobre el cuerpo. Suponga que la fuerza F es la única que obra sobre el cuerpo.

### Respuesta

4.- Una pelota de béisbol tiene una masa de 150 g. a) Si la velocidad de una pelota lanzada es de 24 m/s y después de haber sido bateada es de 36 m/s, en sentido opuesto, calcule el incremento de la cantidad de movimiento de la pelota y el impulso del golpe. b) Si la pelota permanece en contacto con el bate durante 0,002s, calcule la fuerza media del golpe.

### Respuesta

5.- Un bloque de masa 100g. se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano horizontal liso. Es sometido a una fuerza horizontal  $F=104+3 \times 10^3 t$ , en la que F se expresa en dinas y t en segundos. No hay rozamiento.

- Dibujar una gráfica de la fuerza en función del tiempo para valores de t comprendidos entre  $t=0$  y  $t=5s$ .
- ¿Cuál es el impulso mecánico durante los primeros cinco segundos?
- ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando  $t=5s$ ?
- ¿Qué trabajo se ha realizado en los 5 primeros segundos?

### Respuesta

6.- Un proyectil de masa  $0,05\text{Kg}$ , que se mueve con una velocidad de  $400\text{m/s}$ , penetra una distancia de  $0,1\text{m}$  en un bloque de madera firmemente sujeto al suelo. Se supone que la fuerza deceleradora es constante. Calcular: a) la deceleración del proyectil; b) la fuerza deceleradora; c) el tiempo que dura la deceleración; d) el impulso mecánico del choque. Compárese la respuesta del apartado d) con la cantidad de movimiento inicial del proyectil.

### Respuesta

7.- Dos bloques de masas  $300\text{g}$  y  $200\text{g}$  se mueven uno hacia el otro sobre una superficie horizontal lisa con velocidades de  $50\text{cm/s}$  y  $100\text{cm/s}$ , respectivamente.

- Si los bloques chocan y permanecen unidos, calcular su velocidad final.
- Calcular la pérdida de energía cinética durante el choque.
- Calcular la velocidad final de cada bloque si el choque es perfectamente elástico.

### Respuesta

8.- Una bola, con masa de  $4\text{kg}$  y velocidad  $1,20\text{ m/s}$  choca frontalmente con otra bola de masa  $5\text{kg}$  moviéndose a  $0,60\text{ m/s}$  en la misma dirección. Encontrar:

- Las velocidades de las bolas después del choque.
- El cambio de la cantidad de movimiento de cada bola.

### Respuesta

9.- Un cañón de  $105\text{ mm}$  dispara un proyectil de  $8\text{kg}$  con una velocidad inicial de  $570\text{ m/s}$ . ¿En cuántos kilómetros por hora disminuirá la velocidad del avión sobre el cual se encuentra montado el cañón cuando el proyectil se lanza directamente hacia adelante? Considere la masa del avión igual a  $16000\text{kg}$ .

### Respuesta

10.- Un automóvil de 2000Kg que avanza a lo largo de una calle en dirección Este, choca a la velocidad de 60Km/h, con un camión que pesa 4ton y que atraviesa la misma calle en dirección Sur a la velocidad de 20Km/h. Si como consecuencia del choque quedan unidos, ¿cuál es la magnitud y dirección de su velocidad inmediatamente después del choque?

### Respuesta

11.- Se dispara una bala de 0,1kg en dirección horizontal y choca con un bloque de madera de 2kg que está en reposo sobre la mesa. La bala queda incrustada en el bloque y el conjunto “bala-bloque” resbala sobre la mesa y recorre 1,15m hasta que se para. Si el coeficiente de rozamiento es de 0.3, calcule:

- a) La fuerza de rozamiento.
- b) La velocidad con que empieza a moverse el conjunto “bala-bloque”
- c) La velocidad de la bala antes del choque inelástico.

### Respuesta

12.- Una bala de rifle, de masa 10g; choca con un bloque de masa 990g que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa y queda incrustada en él. El bloque está unido por el lado opuesto al del impacto del proyectil a un resorte en hélice que a su vez está fijado a una pared. El choque comprime el resorte 10cm. El calibrado del resorte indica que para comprimirlo 1cm es necesaria una fuerza de 100000dinas.

- a) Calcular la energía potencial máxima del resorte.
- b) Calcular la velocidad del bloque justamente después del choque.
- c) ¿Cuál era la velocidad inicial de la bala?

### Respuesta

13.- Un bloque de plomo de masa 40,0g se mueve horizontalmente con una velocidad de 60 m/s y choca inelásticamente con una esfera de plomo de 450,0g. Considerando que la esfera de plomo estaba inicialmente en reposo, calcule el calentamiento que resultará del choque.

### Respuesta

14.- Un electrón en movimiento choca elásticamente de frente con un protón fijo. Las fuerzas entre los dos dependen únicamente de la separación. ¿Qué parte de la energía cinética inicial del electrón es transferida al protón? La masa del protón es 1840 veces la masa del electrón.

**Respuesta**

15.- Un proyectil de 5g es disparado horizontalmente contra un bloque de madera de 3 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,2. El proyectil queda incrustado en el bloque y se observa que éste desliza 25 cm sobre la superficie. ¿Cuál era la velocidad del proyectil?

**Respuesta**

16.- Un cuerpo de masa 5,0kg y que se mueve a 2,0m/s choca elásticamente con otro cuerpo de 8,0kg inicialmente en reposo. Halle la velocidad de cada uno, teniendo en cuenta que el primer cuerpo, después del choque, se desvía 50° de su dirección original. Expresar las direcciones con respecto al cuerpo incidente.

**Respuesta**

17.- Un núcleo originalmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón de cantidad de movimiento  $9,22 \cdot 10^{-21}$  N.s. En ángulo recto a la dirección del electrón, es emitido un neutrino de cantidad de movimiento  $5,33 \cdot 10^{-21}$  N.s:

- a) ¿En qué dirección retrocede el núcleo residual?
- b) ¿Cuál es su cantidad de movimiento?

**Respuesta**



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alonso, A. y Finn, E.** (1995). *Física*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Alonso, M. y Finn, E.** (1970-1971) *Física*. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano.
- Alonso, M. y Finn, E.** (1995). *Física*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Bedford, A. y Fowler, W.** (1996). *Mecánica para Ingeniería: Dinámica*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Carter, R.** (1993). *Electromagnetismo para ingeniería electrónica* (2ª ed.). México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Cheng, D.** (1997). *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Fermi, E.** (1968). *Termodinámica*. Buenos Aires: EUDEBA.
- Feynman, R., Leighton, R. y Sands, M.** (1987). *Física*. Vol. II (Electromagnetismo y Materia). México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Hans, O.** (1989). *Physics* (2ª ed.). New York: W. W. Norton.
- Kip, A.** (1988). *Fundamentos de Electricidad y Magnetismo*. México: Mc Graw Hill.
- Lea, S. y Burke, J.** (1999). *Física: La naturaleza de las cosas*. Tomos I (Calor). México: International Thomson Editores.
- Lea, S. y Burke, J.** (1999). *Física: La naturaleza de las cosas*. Tomo II (Electromagnetismo). México: International Thomson Editores.
- Mckelvey, J. P. y Grotch, H.** (1981). *Física para Ciencias e Ingeniería*. Tomo I (Calor). México: Harla.
- Mckelvey, J. P. y Grotch, H.** (1981). *Física para Ciencias e Ingeniería*. Tomo II (Electromagnetismo). México: Harla.
- Purcell, M.** (1969). *Electricidad y Magnetismo*. Berkeley Physics Course. Vol. 2. Barcelona: Reverté, S. A.
- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K.** (1997). *Física*. (4ª ed.). Vol. 1. México: CECSA.
- Rodríguez, F.** (1984). *Temas de electricidad y magnetismo*. Buenos Aires: EUDEBA.

**Sears, F.** (1959). *Introducción a la termodinámica, teoría cinética de los gases y mecánica estadística*. Barcelona: Reverté, S. A.

**Serway, R.** (2002). *Física* (5ª ed.). Tomo 1. España: McGraw-Hill.

**Tipler, P.** (1983). *Física*. Barcelona: Reverté, S. A.

**Weaston, F.** (1967). *Fundamentos de física: Electricidad y magnetismo*, Madrid: Aguilar.

**Zemansky, M.** (1968). *Calor y termodinámica* (3ª ed.). Madrid: Aguilar.







Ingeniería y Tecnología

