SEIEM XXIII 2019 Valladolid

Investigación en Educación Matemática XXIII

Valladolid, 4, 5 y 6 de septiembre de 2019

Editores:

José M. Marbán, Matías Arce, Ana Maroto,
José M. Muñoz-Escolano y Ángel Alsina

Universidad de Valladolid
Facultad de Educación y Trabajo Social
Campus Miguel Delibes

seiem2019@uva.es/
http://seiem2019.uva.es/
@xxiiiseiem2019

Patrocinan:

Investigación en Educación Matemática
XXIII

Universidad de Valladolid

Investigación en Educación Matemática
XXIII

José M. Marbán, Matías Arce, Ana Maroto,
José M. Muñoz-Escolano y Ángel Alsina (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Valladolid, 4, 5 y 6 de septiembre de 2019

Investigación en Educación Matemática XXIII

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n
18071 Granada (España)

Dr. José M. Marbán
Dr. Matías Arce
Dra. Ana Maroto
Dr. José M. Muñoz-Escolano
Dr. Ángel Alsina

Diseño del logo, cartel y portada: María Astrid Cuida Gómez
Maquetación de la portada: Laura Conejo Garrote

ISBN: 978-84-09-16492-9
ISSN: 1888-0762

Cítese como:
Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII*. Valladolid: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

ÍNDICE

PRESENTACIÓN....................15

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I. UNA PERSPECTIVA INTERNACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA....................17

UNA PERSPECTIVA INTERNACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
Barquero, B. 19

MATHEMATICAL MODELLING - BACKGROUND AND CURRENT PROJECTS IN GERMANY
Greefrath, G.....................23

AVANCES EN LAS INVESTIGACIONES EN ESPAÑA SOBRE EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
Ferrando, I. 43

TEACHING AND LEARNING MATHEMATICAL MODELLING: A BROAD AND DIVERSIFIED BUT SPECIFIC RESEARCH FIELD
Carreira, S.....................65

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA 89

UN BREVE BALANCE DE LA INVESTIGACIÓN EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA
Maz-Machado, A. 91

LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL SIGLO XVIII A TRAVÉS DE LIBROS HISTÓRICOS Y SU REFLEJO EN LA ENSEÑANZA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE MANUALES
López-Esteban, C. 95

OBSERVACIONES ACERCA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA
Puig, L. 117

"MATHEMATICS IS NOT A STALACTITE HANGING OVER A STALAGMITE" (W. KUYK) – THE PRODUCTIVE ROLE OF TEACHING
Schubring, G.....................131

COMUNICACIONES 141

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DE LUGARES GEOMÉTRICOS
Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. 143

LA REPRESENTACIÓN DE PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN CON ALUMNOS DE 4 AÑOS
Acosta, Y. y Alsina, Á. 153

RAZONAMIENTOS Y ESQUEMAS DE PRUEBA EVIDENCIADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO: RELACIONES CON EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
Arce, M. y Conejo, L. 163

CRITERIOS UTILIZADOS POR UN FORMADOR DE FUTUROS PROFESORES AL REFLEXIONAR SOBRE SU PRÁCTICA
Arceo-Luna, A. R., Breda, A., Font, V. y Páez, D. A. 173

JUSTIFICACIÓN Y EXPRESIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DE UNA RELACIÓN FUNCIONAL POR ESTUDIANTES DE CUARTO DE PRIMARIA
Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. 183

PROFESORES DE EDUCACIÓN INFANTIL Y ENSEÑANZA FUNDAMENTAL NEGOCIANDO SIGNIFICADOS AL PLANEAR UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA SOBRE SISTEMA DE MEDIDAS
Barbosa-Bemme, L. S., Aguiar-Isaia, S. M., Llinares, S., Valls, J. y Scremin, G. 193

FORMACIÓN DE PROFESORADO DE SECUNDARIA. TRABAJANDO LA GENERALIZACIÓN A PARTIR DEL USO DE FUENTES HISTÓRICAS
Barreras, Á. y Oller-Marcén, A. M. 203

IDENTIFICACIÓN Y USO DE LOS ATRIBUTOS DE LOS POLÍGONOS POR ESTUDIANTES DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: RELACIONES IMPLICATIVAS
Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. 213

CONFLICTOS SEMIÓTICOS DE ALUMNOS DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE PORCENTAJES
Burgos, M. y Godino, J. D. 223

APROXIMACIÓN A LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS QUE ESTABLECEN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA EN TAREAS DE MEDIDA Y COMPARACIÓN DE ÁREAS
Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. 233

¿AYUDAN LOS MATERIALES MANIPULATIVOS A RESOLVER TAREAS MATEMÁTICAS? SÍ, PERO...
De Castro, C. y Palop, B. 243

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN Y SUS ROLES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. 253

EXTRAPOLACIÓN DE VALORES EN UN GRÁFICO. UN ESTUDIO CON ESCOLARES CHILENOS
Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. y Arteaga, P. 263

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN: ANÁLISIS DE LAS PREMISAS UTILIZADAS AL MODELIZAR
Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J. 273

AVANZANDO EN LA CARACTERIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE CONJETURAR Y PROBAR DE LOS MATEMÁTICOS PROFESIONALES
Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. 283

IDENTIFICACIÓN DE ERRORES ESCOLARES EN MATEMÁTICAS POR MAESTROS EN FORMACIÓN
Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. 293

DISCURSO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO USAN EL MÉTODO ABN
Gallego-Sánchez I., Caro-Torró, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. 303

LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y TAREAS NUMÉRICAS EN ALUMNADO DE SECUNDARIA Y FUTUROS PROFESORES
García-Alonso, I. y Bruno, A. 313

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN EL AULA DE PRIMARIA Y SECUNDARIA. UN ESTUDIO CON PROFESORES
García-Alonso, I., García-Díaz, A. y Camacho-Machín, M. 323

CREENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO DE MAESTRO
García-Moya, M., Gómezescobar, A. y Fernández-Cézar, R. 333

PLAN DE ACCIÓN PARA LA REDUCCIÓN DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA PARA LA MEJORA DE SU FORMACIÓN
Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L. 343

LA IMPORTANCIA DE LA UTILIDAD Y EL INTERÉS PARA EXPERIMENTAR FLUJO CON TAREAS MATEMÁTICAS
Gil, E., Castillo, F. J. y Montoro, A. B. 353

ESTUDIO CUALITATIVO DE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA SOBRE LA MAGNITUD DE LAS FRACCIONES
González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. 363

IDENTIFICANDO CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CUANDO DEFINEN
González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. 373

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS
Hau-Yon, F. y Zapata, M. 383

IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA REFLEXIÓN DE PROFESORES: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIO DE CLASES
Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. 393

EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN EN LIBROS ESPAÑOLES DE MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII
Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. 403

INTRODUCIENDO LOS REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES DURANTE DOS CICLOS DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN
Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A. M. 413

¿QUÉ CONOCIMIENTOS DE LA MEDIA ARITMÉTICA TIENEN LOS ESTUDIANTES AL INICIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA?
Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. 423

CAMBIOS EN CÓMO ESTUDIANTES PARA MAESTRO ANTICIPAN RESPUESTAS DE NIÑOS DE PRIMARIA
Montero, E. y Callejo, M. L. 433

¿EXISTE DESCONEXIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA?
Monterrubio-Pérez, M. C., González-Astudillo, M. T., García-Olivares, A., Rodríguez-Cornejo, P. y Rodríguez-Barrueco, M. J. 443

¿A MAYOR ANSIEDAD MENOR RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS?
Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. 453

CÓMO DEFINEN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: ANÁLISIS DE SUS DEFINICIONES DE POLÍGONO
Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. 463

UN ACERCAMIENTO AL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L.C. 473

CONOCIMIENTO SOBRE LOS ESTUDIANTES COMO RESOLUTORES DE PROBLEMAS MANIFESTADO POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. 483

SOPORTES LINGÜÍSTICOS MATEMÁTICAMENTE RELEVANTES EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA
Planas, N., Badillo, E. y Chico, J. 493

ACTIVIDAD *SCAFFOLDING* EN GEOMETRÍA PARA DESARROLLAR HABILIDADES DE ARGUMENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL
Ricart, M., Beltrán-Pellicer, P. y Estrada, A. 503

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO CERO, EN ALUMNOS DE ESCUELA ELEMENTAL
Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E. 513

MODELOS PARA EL ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN ENTRE SECUNDARIA Y UNIVERSIDAD EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA
Rodríguez-Cisneros, L. y Perdomo-Díaz, J. 523

RELACIONES ENTRE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA E INDAGACIÓN EN UN CONTEXTO ARQUEOLÓGICO
Sala, G., Font, V. y Barquero, B. 533

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE FUTUROS PROFESORES A UN CUESTIONARIO SOBRE EL DESARROLLO DE LA CREATIVIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS
Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. 543

EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE EXPERIENCIAS ALEATORIAS EQUIVALENTES
Sánchez, E., González, A., Sánchez, M. y Carrasco, G. 553

LA MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR SOBRE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS
Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Valls, J. 563

ESTRUCTURAS Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 2º DE PRIMARIA EN UNA APROXIMACIÓN FUNCIONAL DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. 573

COMPONENTES DEL SENTIDO ESTADÍSTICO IDENTIFICADOS EN UN CICLO DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA DESARROLLADO POR FUTURAS MAESTRAS DE PRIMARIA
Ubilla, F. 583

CARACTERIZACIÓN DE LOS ARGUMENTOS DADOS POR PROFESORES EN FORMACIÓN A UNA TAREA SOBRE DERIVADA
Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. 593

PÓSTERES..603

IMPLEMENTANDO ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DEL CÁLCULO TÁCTICO EN PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Bracho-López, R. y García-Pérez, M. T. 605

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN CUANDO CREAN Y RESUELVEN UNA TAREA DE PROBABILIDAD
Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 606

RENOVACIÓN METODOLÓGICA EN ESTADÍSTICA BASADA EN LA CREACIÓN DE PROBLEMAS
Alvarado, H. y Retamal, L. 607

PERFILES DE APRENDIZAJE DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA EN BASE A SU DESARROLLO COMPETENCIAL ESTADÍSTICO Y SU ACTITUD HACIA LA ESTADÍSTICA
Anasagasti, J., Subinas, A. y Berciano, A. 608

PERCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DEL RESTO DE LA DIVISIÓN
Ariza-Ruiz, D. y Gómez, B. 609

FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA EN EL USO DEL TEOREMA DE PICK POR LOS ALUMNOS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Arnal-Palacián, M. 610

LA SUMA DE LAS AMPLITUDES DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PRETENDIDO *VERSUS* MOVILIZADO
Barrera-Castarnado, V. J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. 611

DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA COMPRENSIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL
Begué, N. y Gea, M. M. 612

ANÁLISIS DEL EFECTO DE UN PROGRAMA DE ESTÍMULO MATEMÁTICO EN ADOLESCENTES EN RIESGO DE EXCLUSIÓN SOCIAL
Blanco T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., Salgado, M., Salinas-Portugal, M. J., González-Sequeiros, P. y González-Roel, V. 613

PROYECTOS STEAM CON FORMATO KIKS PARA LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS LOMCE
Blanco, T, F., Ortiz-Laso, Z. y Diego-Mantecón, J. M. 614

IMPLICACIÓN DE LA REFLEXIÓN DURANTE EL PRÁCTICUM: UN CASO CON PROFESORES COLOMBIANOS
Castellanos-Sánchez, M. T., Flores, P. y Moreno, A. 615

IDEAS PREVIAS A UN CURSO DE CÁLCULO: CONCEPCIONES DEL ALUMNADO SOBRE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN
Cox-Figueroa, E., Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. 616

UN ANÁLISIS DE LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN MEDIA EN COLOMBIA
Franco-Buriticá, E., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. 617

EXPERIENCIA DE EVALUACIÓN FORMATIVA EN MATEMÁTICAS PARA FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. N. 618

PROPUESTA DE UNA TAREA PROFESIONAL PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
García-Honrado, I., Alonso-Castaño, M., Lorenzo, E. y Muñiz-Rodríguez, L. 619

COMPARACIÓN DE ESQUEMAS GRÁFICOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO PARA ANALIZAR UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS COMPLEJAS
García-Mora, E. y Díez-Palomar, J. 620

DIFICULTADES EN LOS PROCESOS DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS
García-Moreno, M. A., Arnau, D., González-Calero, J. A. y Arevalillo-Herráez, M. 621

PRESENCIA DE LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA ENSEÑANZA DE GRADO EN ESPAÑA
González, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. 622

ORIENTACIÓN COGNITIVA DE TAREAS SOBRE INTERVALOS DE CONFIANZA EN LIBROS DE BIOESTADÍSTICA
González-Ruiz, I., Estrella, S., González, M. J. y González-Astudillo, M. T. 623

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA FORMATIVA SOBRE VARIACIÓN LINEAL CON FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA
Herrera-García, K. J., Dávila-Araiza, T., Giacomone, B. y Beltrán-Pellicer, P. 624

EL TRATAMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XVIII: LOS *ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS* DE BENITO BAILS
León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D., Madrid, M. J., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. 625

ANÁLITICA DE DATOS DE APRENDIZAJE EN UN CURSO UNIVERSITARIO DE ESTADÍSTICA CON *READ AND LEARN*
López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. 626

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA EN EL SIGLO XVIII: LA OBRA DE JUAN JUSTO GARCÍA
Madrid, M. J., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Maz-Machado, A. 627

IDONEIDAD DIDÁCTICA: ¿UNA HERRAMIENTA PARA REFLEXIONAR SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN CONDICIONES DE MASIVIDAD?
Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. 628

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN TORNO AL CONCEPTO DE LOGARITMO
Martín-Barcala, A. y González-Astudillo, M. T. 629

DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO EN ALUMNADO DE EDADES TEMPRANAS Y MAESTRAS/OS (ACTIVO Y EN FORMACIÓN)
Martínez-Romero, M., Huerta, M. P. y Andrés, L. 630

CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UNA PAUTA DE OBSERVACIÓN DE CLASES DE MATEMÁTICAS
Martínez-Videla, M. V. y Perdomo-Díaz, J. 631

DIFICULTADES CON PORCENTAJES EN MAESTROS EN FORMACIÓN
Maz-Machado, A., Valverde, C., Piedra, R. y Jiménez-Fanjul, N. 632

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA AL COMPARAR RAZONES
Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Fernández, C. 633

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO
Montero, E. y Callejo, M. L. 634

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE DOS ETAPAS EN LOS LIBROS DE CUARTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Ngonde-Ernesto, L. y Gavilán-Izquierdo, J. M. 635

GÉNERO Y ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD
Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Casas-Rosal, J. C. y Gutiérrez-Rubio, D. 636

ESTIMACIONES NUMÉRICAS APOYADAS EN REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN ALUMNADO DE SECUNDARIA
Perdomo-Díaz, J., Almeida, R. y Bruno, A. 637

ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS EN PROBLEMAS DE CINEMÁTICA
Pérez-Bueno, B., de las Heras, M. A. y Jiménez-Pérez, R. 638

REACCIONES DE LOS PROFESORES A LOS ERRORES Y ESTRATEGIAS NO PREVISTAS DE LOS ESTUDIANTES
Pinzón, A., Gómez, P. y González, M. J. 639

TENSIONES EN LAS CONCEPCIONES DE PROFESORES CHILENOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO SELECCIONAN PROBLEMAS
Piñeiro, J. L. y Vásquez, C. 640

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI EN 3 DIMENSIONES
Pla-Castells, M. y Segura, C. 641

ESTRATEGIAS DE GENERALIZACIÓN CERCANA Y LEJANA EN NIÑOS DE 6 Y 7 AÑOS
Polo-Blanco, I. y Goni-Cervera, J. 642

ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS NUMÉRICAS TEMPRANAS POR UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA
Polo-Blanco, I. y González, E. M. 643

INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS DE CAMBIO EN UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DEL ESPECTRO

AUTISTA
Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A. y González, M. J. 644

INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN CONJUNTA DE PROBLEMAS AUTÉNTICOS
Ramos, M., Muñoz, N. y Sánchez-Barbero, B. 645

DESARROLLO DE LA ARGUMENTACIÓN DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA
Retamal, L. y Alvarado, H. 646

VÍDEOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ALUMNADO DE ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS
Ribera, J. M. y Rotger, L. 647

DEFINICIÓN Y VALIDACIÓN EMPÍRICA DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR LAS CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, A. 648

EVIDENCIA DE LAS CONCEPCIONES DE FUTUROS PROFESORES SOBRE EL CONCEPTO DERIVADA
Rodríguez-Nieto, C. y Rodríguez-Vásquez, F. M. 649

INTRODUCCIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL MEDIANTE ACTIVIDADES DESENCHUFADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS
Ros-Esteve, M., López-Iñesta, E. y Diago, P. D. 650

TAREAS DE REPRESENTACIÓN ESPACIAL EN EL AULA DE TRES AÑOS: DETECCIÓN DE DIFICULTADES
Salgado, M., Berciano, A. y Jiménez-Gestal, C. 651

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS CUANDO RESUELVEN CONJUNTAMENTE PROBLEMAS REALISTAS EN AULAS DE SECUNDARIA
Sánchez-Barbero, B., Ciudad, J. C., Galán, E., Chamoso, J. Mª., Vicente, S., Rodríguez, Mª. M., Cáceres, Mª. J. y Salomón, Mª. S. 652

ESTUDIO SOBRE COMPLEJIDAD-DIFICULTAD EN TAREAS CON PATRONES DE REPETICIÓN CON NIÑOS CON TEA-1
Santágueda-Villanueva, M., Yáñez, D. F. y Diago, P. D. 653

“DE LO QUE QUEDA”, HACIA UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE
Sanz, M. T., Valenzuela, C. y Figueras, O. 654

DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA METACOGNITIVA: HACIA LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL
Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. 655

CREENCIAS DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
Van Vaerenbergh, S. 656

LA INFLUENCIA DE LA ORGANIZACIÓN TEMPORAL DE LA INFORMACIÓN EN LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS DE CAMBIO
Yáñez, D. F., Diago, P. D., Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. ..657

ESTRATEGIAS Y DIFICULTADES EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA CON NATURALES Y FRACCIONES
Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. 658

PRESENTACIÓN

En una ocasión, hace ya mucho tiempo, como en los cuentos tradicionales, ante los nervios de la que por aquel entonces fue mi primera ponencia en un congreso, reducida a diez minutos que se antojaban absolutamente insuficientes a la incipiente juventud científica y el deseo de hablar durante horas de aquello en lo que trabajaba y que me entusiasmaba, alguien a quien siempre he tenido como referente me dijo: “si tienes que hablar durante horas, apenas necesitas prepararte durante unos minutos; ahora bien, para hablar durante cinco minutos, y hacerlo bien, necesitas preparar tu intervención durante horas”. Ese recuerdo y esa certeza vuelven a mí a la hora de escribir esta presentación. Apenas dos hojas para resumir el trabajo de todo un año, para presentar unos resultados que no son sino la punta de un iceberg oculto en su mayor parte bajo las aguas de un trabajo diario de investigación en un área que, en simposios como este, encuentra una de sus mejores oportunidades para reivindicarse y para lucir.

El simposio anual de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), sin duda una de sus actividades más significativas y carismáticas, regresó a Valladolid, veinte años después, tras la designación de la candidatura presentada por el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid en el transcurso del anterior simposio celebrado en Gijón en 2018, y lo hizo acogiendo a 180 congresistas que, del 4 al 6 de septiembre de 2019, situaron a Valladolid como punto de referencia para la investigación en Educación Matemática.

La Facultad de Educación y Trabajo Social actuó como sede principal de las actividades de un simposio cuyo comité organizador local se ocupó, con absoluta entrega, dedicación e ilusión, de brindar una cálida acogida a los participantes, así como de crear una atmósfera óptima para el encuentro de expertos, el intercambio de ideas, la visualización de avances y resultados, la consolidación de esfuerzos y grupos y el apoyo a iniciativas emergentes.

El acto inaugural del evento tuvo lugar en el Paraninfo de la Universidad de Valladolid y contó con la participación en la mesa de autoridades del Rector de la Universidad de Valladolid, del Secretario General de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, de la Concejala de Educación, Infancia, Juventud e Igualdad del Ayuntamiento de Valladolid, de la Presidenta de la SEIEM y del propio Coordinador Local del Simposio. El acto contó también con la presencia de otras autoridades como el Director del Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVa), el Director del Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa (CFIE) de Valladolid, la Presidenta de la Sociedad Castellano y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, el Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), la Presidenta de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SPIEM) y el Decano de la Facultad de Educación y Trabajo Social.

Con carácter previo al mencionado acto tuvo lugar en la Facultad de Educación y Trabajo Social, en la mañana del miércoles 4, un taller-seminario de formación y docencia universitaria titulado “La evaluación vista como aprendizaje” a cargo de la Dra. Neus Sanmartí Puig (Universidad Autónoma de Barcelona), con un enorme éxito de participación (90 asistentes) y de valoración.

El simposio se organizó, como suele ser habitual, en torno a diferentes actividades científicas, destacando la organización de dos seminarios monográficos de investigación, dos sesiones de presentación de comunicaciones (46 en total), dos sesiones de exposición de pósteres (54) y cuatro sesiones de trabajo en diferentes grupos temáticos de investigación (8 grupos).

En relación con los seminarios de investigación, las temáticas elegidas para este año fueron, por un lado, la denominada “Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática”, cuyo desarrollo tuvo lugar en el Paraninfo de la Universidad de Valladolid tras el acto inaugural y bajo la coordinación de la Dra. Berta Barquero (Universidad de

Barcelona); y, por otro lado, la segunda temática llevó por título “Historia de las matemáticas y de la educación matemática”, coordinada en esta ocasión por el Dr. Alexander Maz-Machado (Universidad de Córdoba), seminario celebrado ya en la Facultad de Educación y Trabajo Social. Ambos seminarios contaron con la participación de ponentes con amplia trayectoria y reconocimiento internacional como el Dr. Gert Schubring (Universität Bielefeld, Alemania / Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil), galardonado este mismo año con la medalla Hans Freudenthal ICMI 2019, la Dra. Susana Carreira (Universidade do Algarve, Portugal), el Dr. Gilbert Greefrath (Universität Münster, Alemania), la Dra. Irene Ferrando (Universidad de Valencia), la Dra. Carmen López (Universidad de Salamanca) y el Dr. Luis Puig (Universidad de Valencia).

El simposio incluyó también un emotivo acto homenaje a la figura del Dr. Tomás Ortega del Rincón, recientemente jubilado y Director del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática de la UVa hasta apenas unos días antes de la celebración del evento, por su apoyo e impulso a la investigación en Educación Matemática, llegando a ostentar durante algunos años la presidencia de la propia SEIEM.

Este libro de actas ofrece en detalle cada una de las ricas aportaciones científicas que, en sus diferentes modalidades, se han mencionado previamente. Sin embargo, no puedo sino insistir en que lo que ahora se presenta es un cuadro, un bello lienzo para el que ha sido necesaria la participación y colaboración de muchas personas y entidades. Por un lado, hay que destacar la destreza y creatividad de las investigadoras y los investigadores que lo han llenado de color con sus aportaciones, así como el arduo y riguroso trabajo de revisión previo a su aceptación, gestionado por el comité científico bajo la excelente coordinación del Dr. José M. Muñoz-Escolano (Universidad de Zaragoza) y el Dr. Ángel Alsina (Universidad de Girona), junto con el también delicado trabajo de edición de quienes suscriben la edición científica de este volumen. Por otro lado, están todas las personas y entidades que han proporcionado los materiales necesarios para el lienzo y que conforman una lista casi interminable que comienza con todos los componentes de los propios comités científico y local, que sigue con el equipo de apoyo que ha cuidado cada detalle del desarrollo del simposio en tres días tan intensos como entrañables y productivos, y que continúa, en un ejercicio arriesgado en el que no queremos olvidar a nadie, con la colaboración de la Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid, de la Facultad de Educación de Segovia, de las Facultades de Derecho y Medicina de Valladolid, del Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVa), de Turismo de Valladolid, del Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa de Valladolid, de la agencia de viajes *B The Travel Band* de la Universidad de Valladolid, del Ayuntamiento de Valladolid, que se volcó con la iniciativa de principio a fin abriendo las puertas de la ciudad al evento, de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, también implicada en todo su desarrollo en una clara apuesta por la Educación Matemática y, por supuesto, de la Universidad de Valladolid, con el Rector a su cabeza, en una colaboración tanto profesional como personal que agradecemos muy sinceramente, con la participación activa también de su Vicerrector de Investigación, con el apoyo amable y necesario de su Vicerrectora de Economía y con las significativas contribuciones, económicas y de trabajo, de su Área de Didáctica de la Matemática y de su Grupo de Investigación Reconocido “Educación Matemática”.

Es momento ahora para el recuerdo de lo vivido y para el deleite ya pausado, sin la tensión propia del evento, de la lectura de todas y cada una de las magníficas contribuciones que conforman este volumen que supone solo un punto y seguido en la ya dilatada trayectoria de los simposios de la SEIEM, confiando en que el de Valladolid fuera del agrado de quienes lo vivieron y deseando el mayor de los éxitos al que tendrá lugar en Valencia en 2020.

En Valladolid, a 30 de octubre de 2019.

José María Marbán Prieto

Coordinador Local del XXIII Simposio de la SEIEM

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I. UNA PERSPECTIVA INTERNACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Research Seminar I. International perspectives on teaching and learning of mathematical modelling

Coordinadora:

Berta Barquero (Universitat de Barcelona)

Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática

Ponentes:

Gilbert Greefrath (Universität Münster, Alemania)

Mathematical modelling - background and current projects in Germany

Irene Ferrando (Universitat de València)

Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Susana Carreira (Universidade do Algarve, Portugal)

Teaching and learning mathematical modelling: a wide, multi- connected and yet specific research field

UNA PERSPECTIVA INTERNACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

International perspectives on teaching and learning of mathematical modelling

Barquero, B.

Universitat de Barcelona

El ámbito de modelización matemática se ha convertido, en las últimas décadas, en un ámbito crucial en y para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la actualidad vivimos las consecuencias de una larga tradición y un consenso compartido por distintas comunidades, la de investigadores, la de profesores y la de políticos educativos, entre otras, sobre el importante papel que debe desempeñar la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Si nos centramos en los contextos e instituciones escolares, son claros y fácilmente contrastables los avances sucedidos en los últimos 30 años en lo que se refiere a la transposición de algunas de las conceptualizaciones y recomendaciones sobre la modelización matemática y su enseñanza, desarrolladas en el ámbito de la investigación, a las realidades escolares en los distintos niveles educativos. Este ha sido el caso, por ejemplo, de la caracterización de la competencia en modelización (Niss, 2002) que ha guiado -y sigue haciéndolo- las reformas curriculares en Dinamarca; los *Common Core State Standards for Mathematics* en Estados Unidos, que incluyen la modelización como uno de los dominios matemáticos a desarrollar; o su inclusión en el marco de evaluación de PISA (Rico, 2006; OECD, 2013, 2019) que ha orientado muchas de las reformas curriculares en Europa. Según Burkhardt (2018, p. 74) esto ha sucedido por varias razones que, según él mismo describe:

> The importance of mathematical modelling in the school curriculum is clear. It both demonstrates the widespread applicability of mathematics and enhances mathematical understanding through inquiry. It serves as a powerful corrective to those who view mathematics as a set of discrete facts and procedures to be taught and learned.

No obstante, distintos autores siguen destacando una notable brecha entre los destacados avances de la investigación en modelización matemática, por un lado, y el impacto efectivo en las aulas, por otro lado (Burkhardt, 2018, o Blum, 2015, entre otros). Son diversas las cuestiones que siguen abiertas como, por ejemplo, las carencias de infraestructura matemático-didáctica para la enseñanza de la modelización, su (in-)compatibilidad con la evaluación o el análisis del impacto y/o posibilidades de difusión a través de la formación del profesorado (Carreira, Barquero, Kaiser y Cooper, 2019).

En lo relativo al ámbito de la investigación, durante las últimas décadas se han utilizado diversidad de marcos teóricos para abordar la problemática de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. A menudo ha surgido interés en clarificar y conectar los distintos enfoques teóricos para describir, diseñar y analizar actividades de modelización (Cai et al., 2014; Kaiser y Sriraman, 2006). En otras ocasiones, se insiste en la necesidad de explicitar la forma en que se conceptualiza la modelización matemática en un marco de investigación determinado, y en cómo esta forma de entender la modelización impacta en el diseño de prácticas de aula y en el estudio de las condiciones que facilitan y de las restricciones que aparecen para la difusión y supervivencia a largo plazo de la modelización en las prácticas escolares. Es lo que, desde la teoría antropológica de lo didáctico, se denomina como la dimensión epistemológica y la dimensión ecológica del problema de la modelización matemática (Barquero, Bosch y Gascón, 2019) y se asume que su explicitación

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 19-22). Valladolid: SEIEM.

puede ayudar a delimitar los distintos ámbitos de actuación y ayudar en la articulación de los resultados derivados de la investigación.

Tomando estas reflexiones como punto de partida, este Seminario quiere abrir el debate sobre algunos de los puntos previamente mencionados. Vamos a contar con tres ponencias que van a aportar distintos, aunque complementarios, puntos de vista. En primer lugar, contaremos con el investigador alemán Gilbert Greefrath, de la Universidad de Münster, quien ha desarrollado gran parte de su trayectoria investigadora en el ámbito de la modelización matemática, representante de la tradición alemana en modelización con gran impacto a nivel mundial, y quien ha sido en encargado de liderar el *Topic Survey* del ICME-13 sobre la corriente alemana en modelización (Greefrath y Vorhölter, 2016). En segundo lugar, la investigadora Irene Ferrando, de la Universitat de Valencia, quien ha participado en múltiples ocasiones en los grupos internacionales de discusión y, a nivel español, lleva años encargándose de las Jornadas de Modelización Matemática, celebradas desde el año 2005, y de la revista *Modelling in Science, Education and Learning*. En tercer lugar, la investigadora Susana Carreira, de la Universidad del Algarve, con quien he tenido el placer de liderar los grupos de trabajo de los últimos tres CERME (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*) y quien ha sido un puntal clave en la comunidad europea e internacional a la hora de buscar puntos de encuentro entre las distintas líneas de investigación. Cada uno de los ponentes aportará su visión sobre la evolución del ámbito de investigación y práctica escolar de la modelización matemática.

En particular, las dos primeras ponencias van a aportar su perspectiva nacional de la evolución de dicho ámbito de investigación en cada uno de los países representados, Alemania y España respectivamente. Para facilitar el debate se les plantearon las siguientes cuestiones:

- *Estado actual de la enseñanza y aprendizaje de la modelización en vuestro país*: ¿Qué papel tiene la modelización matemática en vuestro país? ¿Qué debate ha habido sobre qué es la modelización y sobre su enseñanza y aprendizaje? ¿Qué desarrollo se puede destacar sobre la conceptualización de la modelización y el impacto que ha tenido en las reformas curriculares?

- *Investigaciones sobre modelización matemática en vuestro país:* ¿Cuáles son los enfoques teóricos utilizados en la investigación sobre modelización? ¿Qué problemas de investigación se han abordado? ¿Qué realidades empíricas y metodologías se proponen? ¿Se pueden destacar desarrollos importantes a nivel teórico y/o metodológico en lo que se refiere a este ámbito de investigación?

- *Investigación llevada a la práctica:* ¿Qué ejemplos concretos muestran el diseño, implementación y análisis de actividades de modelización, fundamentados por la investigación, en contextos escolares? ¿Cuáles son las principales condiciones que se han creado y las limitaciones o restricciones que han aparecido?

- *Líneas de futuro desarrollo de la investigación sobre modelización en vuestro país:* ¿Cuáles son las líneas de futuro desarrollo de este ámbito de investigación?

Durante el Seminario vamos a poder escuchar las respuestas de dos de los conferenciantes. Por un lado, Gilbert Greefrath mostrará la importancia de la modelización matemática como campo de investigación en Alemania y su integración como una de las competencia clave en los estándares educativos de este país desde hace ya algunos años. Para mostrar algunos ejemplos concretos se va a apoyar en casos prácticos derivados de distintos proyectos de investigación sobre la medición de la competencia de modelización, el uso de herramientas digitales y de investigaciones sobre la formación del profesorado. Por otro lado, Irene Ferrando se encargará del caso de la comunidad investigadora en España. Mostrará la diversidad y riqueza de investigaciones que ha habido estos últimos años que abarcan desde la educación infantil hasta la formación de profesores, pasando por la educación obligatoria y la universitaria. Dada la heterogeneidad de las temáticas y de los enfoques teóricos adoptados, el objetivo central de su ponencia es la de introducir un panorama de los avances realizados y del impacto de estos en la investigación del campo de la modelización a nivel internacional.

La ponencia de Susana Carreira va a centrarse en dar una visión europea e internacional sobre la evolución que ha tenido este ámbito de investigación en los últimos años. Para ello, se focalizará, en primer lugar, en las comunidades internacionales ICTMA e ICME, para centrarse entonces en la comunidad europea de investigadores que han participado en el grupo de trabajo temático sobre *Applications and modelling* del CERME en la última década. Este análisis nos muestra un buen resumen de las distintas tendencias y su evolución. Con ello, y a mi parecer personal, nos muestra la gran riqueza de esta comunidad que, adoptando distintos marcos teóricos y metodológicos, cada dos años ha tenido la oportunidad de priorizar la búsqueda de puntos comunes de discusión entre los cuales se vislumbra, cada vez con más claridad, nuevos frentes para un futuro de investigación prometedor.

Deseamos que este seminario sirva de estímulo para seguir profundizando en los diferentes temas abordados, y que abra nuevas cuestiones para seguir discutiendo a nivel nacional e internacional en un futuro próximo. Me resta agradecer a la Junta Directiva de la SEIEM la invitación a coordinar este seminario y al intenso trabajo y dedicación durante estos últimos meses con los compañeros, ponentes, que han hecho realidad este seminario.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: the case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1624602

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal changes* (pp. 73–96). Cham, Suiza: Springer International Publishing.

Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling—a 50 year study. *ZDM*, *50*(1-2), 61-75.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo-Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., … y Kwon, O. N. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 145–172). Vancouver, Canadá: IGPME.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G. y Cooper, J. (2019). Introducing CERME's Thematic Working Group 6 – Applications and Modelling. *Newsletter of the European Mathematical Society, Mathematics Education, ERME Column, 111*, 48-49.

Greefrath, G. y Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. *ICME-13 topical surveys*. Cham, Suiza: Springer International Publishing.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project*. Roskilde, Dinamarca: Roskilde University.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. París, Francia: OECD Publishing.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario 2006*, 275-294.

MATHEMATICAL MODELLING - BACKGROUND AND CURRENT PROJECTS IN GERMANY

Modelización Matemática – Antecedentes y proyectos en la actualidad en Alemania

Greefrath, G.

University of Münster, Germany

Abstract

Mathematical modelling is an important field of research in mathematics education in Germany and a key competence in educational standards. The significance of modelling problems in schools and teacher training has increased in the past few decades with various research projects. This article aims to clarify important aspects of the current status of mathematical modelling in the German-speaking world. The background to the German modelling discussion will be set out and the current significance for modelling in German educational standards presented. Research projects on the measurement of modelling competence, the use of digital and strategic tools and research on teacher training are described. Various modelling cycles are also presented and their goals and use under various circumstances outlined. The situation in schools is set out and current and future fields of research identified.

Keywords: *mathematical modelling, Germany, research, educational practice.*

Resumen

La modelización matemática es un campo importante de investigación en educación matemática en Alemania y una competencia clave en los estándares educativos. La importancia de los problemas de modelización en las escuelas y en la formación del profesorado ha aumentado en las últimas décadas con varios proyectos de investigación. Este artículo pretende aclarar aspectos importantes sobre el estado actual de la modelización matemática en el contexto de los países de habla alemana. Se presentan los antecedentes de la discusión sobre modelización, así como su papel y relevancia actual en los estándares educativos alemanes. Se describen algunos de los proyectos de investigación más relevantes sobre la medición de la competencia de modelización, el uso de herramientas digitales y sobre la formación del profesorado. Se muestran a la vez distintos ciclos de modelización, así como sus objetivos y usos, de acuerdo con las líneas de investigación previamente citadas. Por último, se describe la situación en las escuelas y se identifican líneas futuras de investigación.

Palabras clave: *modelización matemática, Alemania, investigación, práctica educativa.*

INTRODUCTION AND BACKGROUND

The use of application-oriented tasks to learn mathematics has a long history in Germany. Mathematical modelling became particularly well known in Germany in the 1980s. Blum (1985) described many application examples which reflected a wide range of topics. It became clear that the discussion on applications and modelling was increasingly significant. One of the most well-known modelling cycles in Germany (see Figure 1) was also mentioned by Blum (1985).

Greefrath, G. (2019). Mathematical modelling – Background and current projects in Germany. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 23-41). Valladolid: SEIEM.

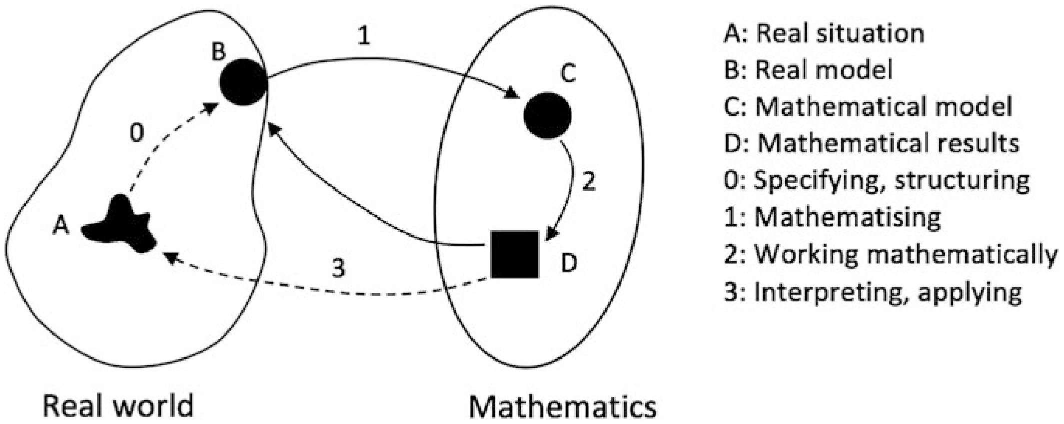


Figure 1. Modelling cycle by Blum (Blum & Kirsch, 1989, p. 134)

The founding of the German-speaking ISTRON Group by Werner Blum and Gabriele Kaiser in 1990 contributed to an increase in the intensity of the modelling discussion in Germany. The idea of ISTRON is to increase the number of applications that appear in mathematics classes. Research on modelling has also been increased significantly. Germany has also hosted important conferences on mathematical modelling (ICMI Study, ICTMA 1987 and 2009).

Different goals at various levels are pursued with the focus on application in mathematics classes. The particular opportunity of dealing with applications in mathematics classes is that interesting insights into both mathematics as a subject and in reality, are possible. We distinguish between content-based, process-based and general goals of application-oriented mathematics classes below.

The *content-based goals* of application-oriented mathematics classes can be described for two areas. Learning mathematical terms and structures (Strehl, 1979, p. 26) and knowledge of the environment are both content-based goals. In addition to the inner-mathematical goals, a further goal is enabling people to perceive and understand our world. This also corresponds to the first of Winter's three basic experiences that each student should be taught in mathematics classes (Winter, 1996). The classical content of arithmetic such as quantities and interest calculation are particularly important when it comes to achieving content-based goals. They contribute to achieving the content-based goals in both categories. Quantities, for example, are mathematical objects with generalizable structures, and working with quantities also requires people to engage with their environment. The development of concepts about quantities is a key part of working with quantities in mathematics classes. Students can only check the results of tasks for plausibility if they have the relevant concepts about certain important units. Concepts about volume, for example, could be that a pack of milk is 1 litre or that a half-filled bathtub is 100 litres.

Goals are often set out for *application-oriented mathematics* classes in which it is not the outcome in terms of the knowledge of mathematical content that is the focus, but rather the process taken to achieve these results. Discussions and analyses of the environment using mathematical tools are also important (Spiegel & Selter, 2006, p. 74). Dealing with application orientation in mathematics classes requires general mathematical competence and problem-solving competence. The key heuristic strategies linked to problem solving such as working with analogies or working backwards can be used and promoted when working on application-oriented tasks. These goals also fit with the third of Winter's three basic experiences for a general mathematics class: mathematics classes should aim "to develop, by working on tasks, problem-solving competence that go beyond mathematics" (Winter, 1996). We can make a distinction here between two further areas: on the one hand, there are *process-based goals* which are specific to classes with an application orientation, and on the other hand, there are process-based goals that are relevant to mathematics classes as a whole. One key aim of application-oriented mathematics classes is developing *modelling competence*, in other words the ability to transfer problems from reality to mathematics in a suitable way for them to be processed and solved. The step of mathematization, in other words the finding or determination of a suitable mathematical model, is also an important goal (Fricke, 1987, p. 11 et seqq.). Modelling competence also involve content elements such as metaknowledge about modelling processes and knowledge of different mathematical models such as proportional relation. The focus in the case of modelling, however, is the potential to solve a modelling problem. So, the focus is on the process, not the result, in other words a process-based goal. However, while developing modelling competence is a goal that typically assumes a link to a real situation, this is not the case when it comes to problem-solving competence. In many cases, application-oriented tasks should be viewed as a problem, the solution of which also requires problem-solving competence; there are, however, many inner-mathematical problems, the solution of which does not come under the category of applications. This includes, for example, mathematical proofs. Problem-solving competence is therefore a process-based goal that cannot be attributed exclusively to application-oriented mathematics classes but rather is relevant to mathematics classes in general (Strehl, 1979, p. 26). Other process-based goals that can be achieved in application-oriented mathematics classes but are also relevant to mathematics classes in general and beyond is arguing, reflecting (Radatz & Schipper, 1983, p. 20 et seqq.) and the use of suitable tools such as measuring devices and digital tools.

There are also goals that are not specific to the content and processes of application-oriented mathematics classes but rather go beyond this. These goals can in some cases also be achieved in other subjects. One goal of application-oriented mathematics education is to increase motivation. Substantive problems at the start of a learning process can achieve this goal particularly well (Maier & Schubert, 1978, p. 14). Application-oriented mathematics classes can also contribute significantly to the general goals of mathematics classes due to their link to the real life. Through the everyday problems experienced in class that can be mathematically processed, the purpose of mathematics as a subject becomes clear to students. The focus on application means the students can also be better prepared for training, jobs, study and everyday life (Westermann, 2003, p. 148). The application orientation on calculation problems suggests using the associated sciences to a greater extent. Application-oriented mathematics class is a good point of reference for working with other subjects but also with mathematics itself. The implementation of cross-subject projects is also a general goal (Jahner, 1985, p. 25 et seqq.). During application-oriented mathematics classes, students also look at social problems. Mathematics has a general educational nature (Westermann, 2003, p. 148). If this happens in class, students are at least prepared to subsequently handle political, social and economic problems thanks to the real applications (Maier & Schubert, 1978, p. 15). For example, the discussion of tax models is a possible element of socially relevant content in application-oriented mathematics class. Discussing social and political problems means students will ultimately have the competence to take responsibility in society (see Blum, 1996; Kaiser-Meßmer, 1986; Greefrath, 2018).

CURRENT SITUATION IN TERMS OF MATHEMATICAL MODELLING IN GERMANY

Nowadays, application orientation is a natural component of mathematics classes and educational standards in Germany. Modelling has been included as a competence in the educational standards (KMK, 2012) and the curricula of the various federal states. The Standing Conference of the Ministers of Education and Cultural Affairs in Germany has a general strategy on educational monitoring since 2006. It aims to increase the focus on competence in the education system. The general competence of modelling plays an important role in the subject of mathematics. In addition to international student assessment studies (PISA, TIMSS), there are also national student assessment studies and comparative studies (VERA). These tests are carried out in grades three and eight of all comprehensive schools and look at the competence students have obtained at a given point in time. The aim of the comparative studies is to give teachers differentiated feedback of the requirements their students are meeting based on the educational standards. In addition, Germany has a pool of advanced level qualification examination questions that federal states can use since

2017. This is an important step in terms of improving the quality of the examination questions and gradually aligning the level of requirements in the various federal states. The questions were developed on the basis of the educational standards. Accordingly, there are elements of questions that test the modelling competence in the German advanced level qualification examination questions. In general, the examination requirements should include a balanced ratio of formal and application-oriented questions (KMK, 2012, p. 24).

RESEARCH ON MATHEMATICAL MODELLING IN GERMANY

There are many research projects on mathematical modelling in Germany. There has been a significant increase in the past ten years. In addition to this increase, there have also been considerable methodological developments. This could be one reason for the changes in terms of the type of research projects carried out on mathematical modelling in the past few decades. Research projects on modelling now more commonly use experimental control group designs and sophisticated statistical methods to analyse various research questions. Some research results on mathematical modelling are presented below by way of an example.

Discussion of modelling cycles

In Germany, different modelling cycles are used and discussed intensively. The entire modelling process is often presented in an idealised version as a modelling cycle. Idealised means that this representation itself is also a model. These models of mathematical modelling can be accentuated. The literature therefore contains various cycle representations of modelling. We are now presenting some of these modelling cycles in order of increasing complexity of the step from the situation to the model.

We use simple mathematising to describe modelling cycles in which just one step is used from the situation to the model. This step is called “modelling/mathematization” in Ortlieb (2004) (see Figure 2). Modelling is now the general term for the entire cycle process. In the past, this process was also known as model building. Mathematization, as in the case of Ortlieb, is the standard term for the step that ends with the creation of the mathematical model. A particularly clear representation of this generally recognised model of modelling comes from Schupp (1989) and can be broken down into the dimension of mathematics and the world, which is generally standard. An equal distinction is also made between problem and solution in a second dimension.

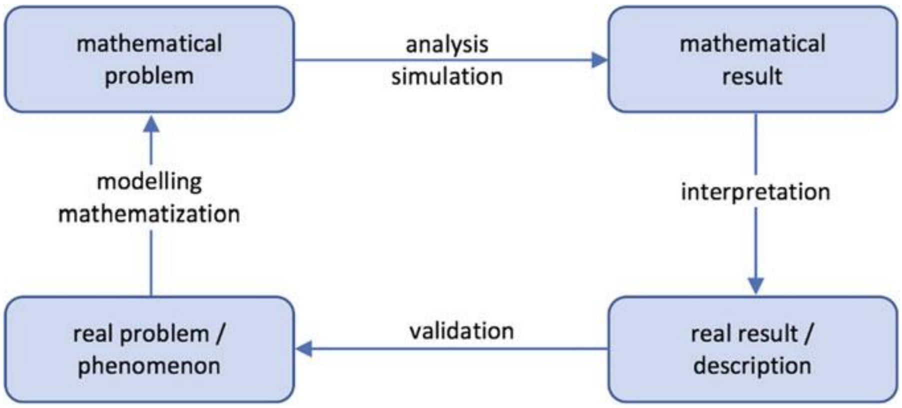


Figure 2. Modelling cycle according to Ortlieb (2004, p. 23)

In the case of the models mentioned, it is often noted that the cycle is not always complete or can be passed through several times. Büchter and Leuders (2005, p. 76) and Maaß (2015, p. 202) represent this multiple passing through of the modelling cycle as a modelling spiral. This also makes development during the modelling process clear. Experience with the problem increases after each cycle. Here, too, a distinction is made between the real and the mathematical model, but the specification of the problem is formulated as a separate step between reality and the model.

One of the most well-known modelling cycles in Germany was described by Blum (1985, see Figure 1). Here, an intermediate step is added for the creation of the mathematical model, with simplification into the reality, the real model, being viewed as another separate step. This model was developed together with Kaiser-Meßmer (1986) and is used by many authors. Maaß (2006) and Kaiser and Stender (2013) also add the interpreted solution as an intermediate step between the mathematical results or the mathematical solution and the real situation or reality (see Figure 3). The intermediate step clarifies the different processes of "interpreting" and "validating" in the second half of the modelling cycle.

A more comprehensive model of modelling by Blum and Leiß (2007) was created from a cognitive perspective (see Figure 4). The model created by Blum (1985) was expanded to include the situation model. The creation of the mathematical model is addressed in greater detail and the process of the individual creating the model is set out in greater detail. The situation model describes the mental representation of the situation by the individual. The model by Fischer and Malle (1985) also describes the step from the situation to the mathematical model in detail. The addition of data acquisition is interesting here and plays a role in many open modelling or application tasks. For example, a lot of information needs to be determined by estimation when carrying out Fermi tasks.

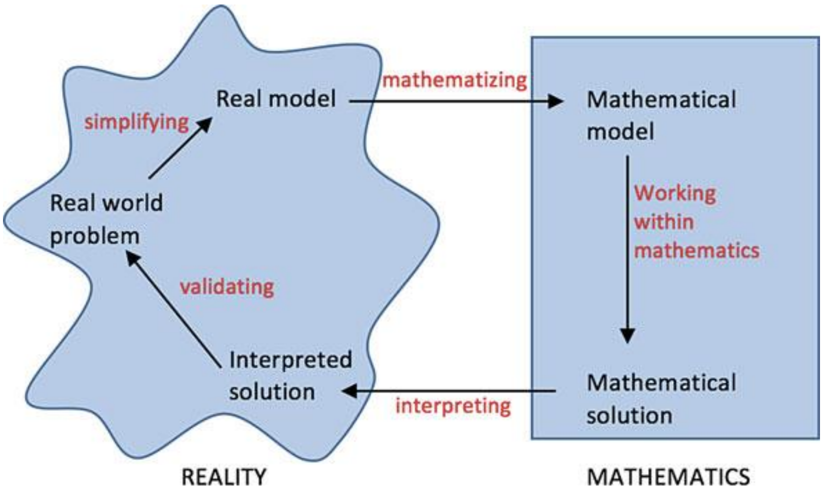


Figure 3. Modelling cycle according to Maaß (2006, p. 115)

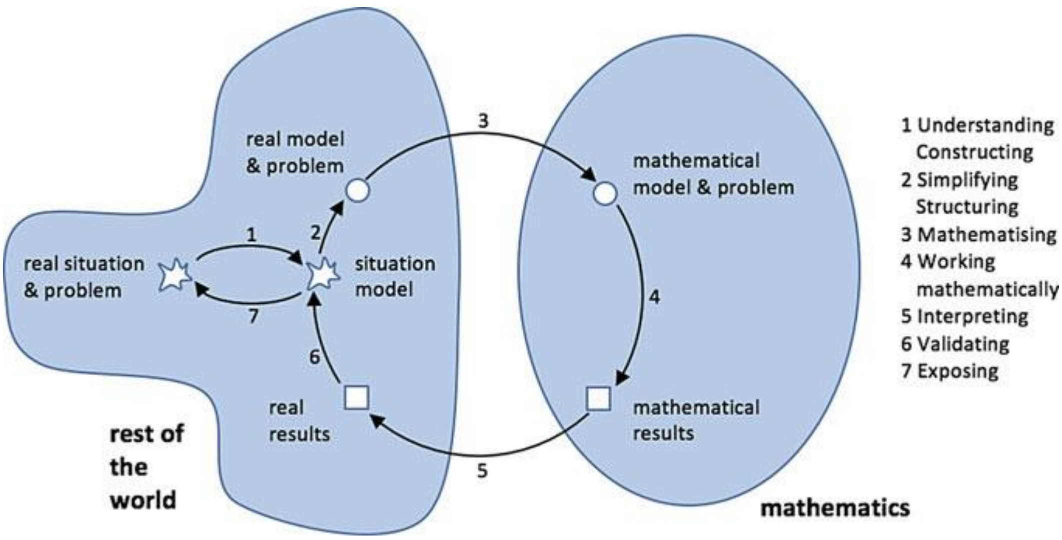


Figure 4. Modelling cycle according to Blum and Leiß (2007, p. 225)

The different models of modelling shown have different points of focus depending on their target group, the subject matter of the research and the research interest. In particular, a distinction must be made between normative and descriptive models of modelling. A certain model could be used to describe the activities carried out by school students during an empirical investigation. Very complex models such as those set out in Figure 4 are suitable for this. A cycle such as that set out in Figure 2 could also be used in a normative manner as support for students when processing modelling tasks in a classroom environment (Greefrath & Vorhölter, 2016).

Measurement of modelling competence

The assessment of modelling competence generally depends on the underlying concept of a competence. Modelling competence not only involve the ability to model but also a willingness to address problems with mathematical aspects from reality using mathematical modelling (Kaiser, 2007, p. 110). For this, a written test was developed that confronts students with a selection of situations that can be processed using mathematical methods (Hankeln, Adamek, & Greefrath, 2019).

In constructing a test, it is necessary to decide whether to use holistic or atomistic modelling tasks (Blomhøj & Jensen, 2003). Holistic tasks require a full modelling cycle to be carried out while atomistic tasks are pre-constructed and focus on one or two steps in the modelling process. The use of holistic tasks is sensible when measuring general modelling competence. This has already been done in various studies (Kreckler, 2017; Rellensmann, Schukajlow, & Leopold, 2017; Schukajlow, Kolter, & Blum, 2015). In atomistic tasks, the students only need to process problems that require a limited range of modelling competence. These tasks cannot be used to obtain information about whether a person would generally be able to carry out a full modelling process. However, atomistic tasks can be used to measure different modelling competencies separately from one another, which is not possible with holistic tasks. There are already tests that use atomistic modelling tasks, but these summarise various competencies (Brand, 2014; Zöttl, Ufer, & Reiss, 2011). A test has therefore been constructed that records the competencies of simplifying, mathematising, interpreting and validating separately. Holistic tasks are not used due to the large number of test items that would be required. One example item for the competency of simplifying is the one proposed in the lighthouse task (see Figure 5).

The students’ task is to select all of the information that is relevant to the calculation of the distance to the horizon. This multiple-choice item is thought to measure the competency of identifying relevant quantities and key variables. This is part of the definition of the competency of simplifying. Corresponding items for the other competencies were also developed. There are pre-tests and post-tests, each with two groups in a multi-matrix design. Each test booklets consists of 16 items and takes 45 minutes to complete. An evaluation of the test instrument involving 3300 completed tests was able to show that the data collected can best be described using a four-dimensional between-item model in which the various competencies are recorded as separate dimensions of a latent construct. This result shows how certain the modelling competencies in question can be empirically measured. It was also possible to conclude that the competencies of simplifying, mathematising, interpreting and validating can be understood as different components of a global modelling competence (Hankeln et al., 2019).

Promotion of modelling competence

Some research focuses on how to promote modelling competence in school using various different tools. One example of a project that took into account the investigation of the promotion of modelling competence is the LIMo project at the University of Münster (2015-2018). The aim of the project was to investigate whether modelling competence can be promoted using digital tools such as dynamic geometry software and using strategic tools such as a solution plan. In order to do this, an interventional study was carried out in spring 2016 in a quasi-experimental pre/post/follow-up design in 44 grade nine classes in German grammar schools and the development of the students' competence was measured using a previously developed modelling test with items testing the competencies. The intervention consisted of a series of four class sessions (each of 45 minutes) on modelling tasks. During the class, for example, students had to calculate the lawn area of a castle garden. A sketch of the castle garden was available for this (see Figure 6). The students initially had to discuss which green areas belonged to the castle garden and what simplifications they could make to calculate the area.

During their summer vacation, Marcus and Irina are standing on top of a lighthouse and enjoying the view. "How far is it to the horizon?" Irina asks.

Mark all of the following information that you consider to be important to calculating the distance to the horizon.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bf/Louisbourg_Lighthouse.jpg

☐	Between the lighthouse and the ocean, there are 25 m of sandy beach.	☐	The two are standing on the Atlantic coast in France.
☐	There are no clouds in the sky.	☐	The radius of the earth measures 6370 km.
☐	The lighthouse is 83 m high.	☐	The lighthouse's light shines as far as 10 km.

Figure 5. The Lighthouse Task (translated): multiple-choice item that measures competencies in simplifying a problem (Hankeln et al., 2019, p. 148)

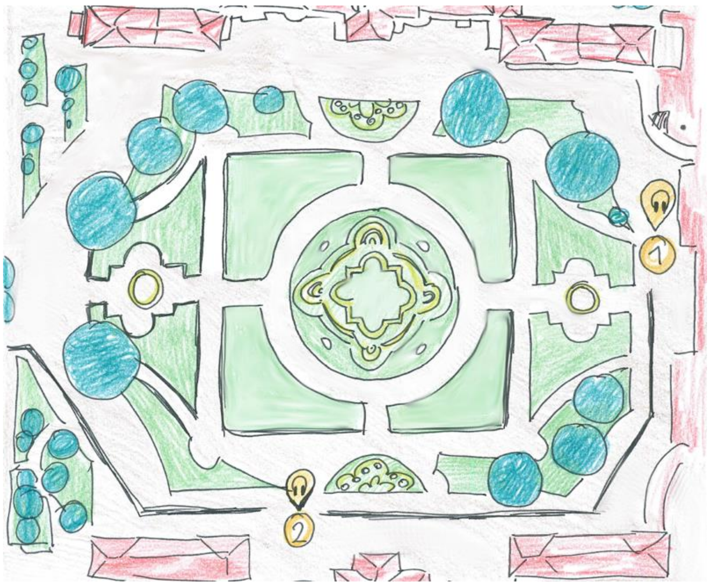


Figure 6. Sketch of the castle grounds (Hankeln, 2018, p. 152)

The 44 classes were broken down into three groups of approximately the same size. All of the groups worked on the same modelling tasks, with one modelling task being completed in each session. One group also used dynamic geometry software (GeoGebra), the second group used a five-step strategic solution plan with cognitive learning strategies in each step in the modelling process that was available on posters and worksheets for the entire investigation, and the third group used neither of the tools.

Only a short-term improvement in performance for the competencies of interpreting and validating was able to be identified for the strategic solution plan for the entire sample of consisting of both of the test groups investigated with and without a solution plan. There was a small effect of the point at which the measurement was carried out. The investigation of group membership as a factor for the development of competence showed that the solution plan has a minor effect on the development of the competency of interpreting, while no interaction effect between the test group and the time of measurement was able to be identified for the other competencies. In terms of long-term competence development, with a further measurement point defined three months after the class sessions, there was a long-term, stable increase in the competency of interpreting in the solution plan group (Adamek, 2018).

In terms of the use of the dynamic geometry software, it was assumed that it was not the modelling competencies that the students had at the first measurement point that had an impact on the effectiveness of the intervention with or without DGS but rather their competence in using the software that played a role. This assumption was confirmed in that no significant interaction effects were able to be identified between the competencies at the first measurement point and the test group. The class unit on DGS correspondingly had an equal effect on the competency development of students who were initially stronger and those who were initially weaker. The analysis of the data collected, however, showed that the factor of test group did not have a significant impact in any of the competencies taken into account. Contrary to expectations, the competencies did not differ accordingly (Hankeln, 2018).

The link between program-related self-efficacy, the competency of mathematization and the beliefs on the dynamic geometry software were also analysed within the group with dynamic geometry software. There is a significant correlation between program-related self-efficacy and the beliefs on the software. Students who felt more confident about their competence with the tool rated the software more positively and vice versa. It was also possible to show that the program-related self-efficacy was a significant predictor for mathematization competency in the post-test, even if we controlled for the pre-test. Students with a higher program-related self-efficacy improved their mathematization competency more than students with a lower self-efficacy, albeit with a small effect size ($\beta = 0.16$) (Greefrath, Hertleif, & Siller, 2018).

Competence to teach mathematical modelling

Teachers' professional competence can be described using various models based on Shulman (1986) in which the core areas of competence of teachers are described. Based on the model used in the COACTIV study (Baumert & Kunter, 2013) and a theoretically derived dimensions of competence by Borromeo-Ferri and Blum (2009), a model was developed specifically for the teaching of mathematical modelling.

Certain aspects and areas of competence were selected from the COACTIV model (Baumert & Kunter, 2013) with a focus on the teaching of mathematical modelling. In the field of professional knowledge, pedagogical content knowledge is characterised by specific content with regard to the teaching of mathematical modelling. The beliefs and self-efficacy can also be specified in terms of mathematical modelling. Pedagogical content knowledge was broken down into four areas of competence taking into account the dimensions of competence by Borromeo-Ferri and Blum (2009). These include knowledge of interventions, modelling processes, modelling tasks and goals of modelling. Diagnostic competence concerning knowledge of modelling processes, for example, consists of the ability to identify modelling phases and the ability to recognise difficulties in the modelling process. A quantitative test instrument on the teaching of mathematical modelling was developed on the basis of the structural model. The test consists of two parts: in the first part, modelling-specific pedagogical content knowledge is recorded in a performance test. In order to do this, a total of 70 dichotomous test items were operationalised in a multiple choice and combined single choice format. The items in the fields of knowledge about modelling processes and knowledge about interventions relate to modelling tasks that are supplemented with text vignettes on specific solution processes of students (example item, see Figure 7). In a second part of the questionnaire, beliefs and self-efficacy with regard to mathematical modelling are recorded in five scales. Abbreviated scales on constructivist and transmissive beliefs about teaching and learning in mathematics based on Staub and Stern (2002) were used. The scale on the application aspect by Grigutsch, Raatz and Törner (1998) was adapted to the content of mathematical modelling. A scale representing the use of mathematical modelling in the classroom was developed. A newly developed instrument which focuses on self-efficacy in the perception and rating of performance heterogeneity was used to determine the expectations of self-efficacy. The full test has been published (Klock & Wess, 2019).

Example item text vignette: container (grade 8)

Containers are used to store construction materials or collect construction waste on many construction sites. These containers have a specific shape to facilitate loading and unloading. How much sand is in the container shown?

STUDENT 1: It contains exactly 7,160,000 cubic metres of sand. Can that be right?

STUDENT 2: It could well be right, you calculated it with your calculator.

STUDENT 1: Well yes. Then it's right.

STUDENT 3: It’s definitely right. I can imagine it.

Which phase of the solution process are the students mainly in? Please mark accordingly.

Mathematising □

Working mathematically □

Interpreting □

Validating □

Diagnose the students’ problem with working through the task in this situation. Please mark accordingly.

The students...

...have problems making assumptions. □

...are not checking their solution sufficiently for plausibility. □

...are drawing an incorrect conclusion from their mathematical result. □

...are using an unsuitable mathematical model. □

Figure 7. Example item text vignette (Klock & Wess, 2019, p. 22)

When piloting the test instrument, data from 156 teacher training students (66.9% female) at various universities in Germany were collected. At the point at which the data were collected, the students were either at the end of their Bachelor's degree (12.7%) or doing a Master's degree (87.3%). The results of the pilot study show that the structural model of the teaching of mathematical modelling in this form was able to be empirically confirmed. Only the scale of transmissive beliefs about the learning and teaching of mathematics showed no significant charge or explained variation. Here further research is needed (Klock, Wess, Greefrath, & Siller, 2019).

Modelling in teacher training

The implementation of teaching and learning laboratories enables the inclusion of practical elements in teacher training studies at an earlier stage. An important goal of teaching and learning laboratories is the professionalization of future teachers through reflection on the teaching and learning process (Putnam & Borko, 2000). The teaching and learning laboratory MiRA$^+$ specialising in modelling was developed at the University of Münster. It is integrated into the training for grammar school teachers and consists of a lecture series with 12 seminar sessions and additional blended learning formats in the field of the design of modelling tasks. The lecture series consists of a theory-based preparatory phase, a practical phase and a reflection phase. The key element in terms of content of all phases consists of modelling processes and sensitisation to and potential-oriented handling of heterogeneity.

The preparatory phase of the seminar looks at selected backgrounds of mathematical modelling (modelling cycle, modelling competencies) and the own working on a modelling task (Figure 8). Individual promotion is discussed in connection with a productive way of handling heterogeneity. Based on this, criteria for suitable modelling tasks are then created and tasks of this type are developed by the teacher training students as part of a blended learning format with various feedback cycles for use in the practical phase are developed. Criteria and indicators on specific individual processes of modelling are then created to monitor and diagnose the students learning processes in the teaching and learning laboratory sessions in this way. The development of modelling tasks and the creation of a suitable catalogue of criteria which deals intensively with the diagnostic individual processes forms the basis for the promotion of modelling-specific diagnostic and task-based competence.

In the practical phase, a team of three teacher training students (Master of Education) supports a small group of Grade 9 students with the processing of the modelling tasks they have created during the 90-minute project sessions. The teams monitor the competencies of mathematical modelling in a targeted manner and record these in the previously created monitoring sheet. The Grade 9 students work on content that enhances the curriculum in motivating project contexts. This interlacing of theory and practice in the context of diagnostic actions and tasks represents the practical promotion of modelling-specific diagnostic and task-based competence.

During the reflection phase, the project sessions are first discussed in the form of written reflection discussions so people can benefit from the experiences of other seminar participants. Cross-task, theory-based group reflections on the respective areas of focus of the monitoring are carried out taking into account the heterogeneity aspects of the learning groups monitored in particular. The teacher training students added to their diagnostic assessments with feedback from their colleagues. The knowledge obtained is then used to professionalise the participants' own teaching activities and to evaluate the modelling tasks they created. The teacher training students also reflect on and where necessary adapt the modelling tasks in light of the criteria for good modelling tasks drawn up in the preparatory phase. The experience and knowledge gained are summarised in a reflection report.

Figure 8. Hot air balloon task: "How many litres of air are in this hot air balloon?"

As part of a study, an investigation was carried out to determine the extent to which aspects of the modelling-specific diagnostic and task-based competence can be promoted among future teachers in the mathematical teaching and learning laboratory MiRA^{+}. Data were collected from 96 teacher training students using a pencil and paper test in the pre-post design (Klock et al., 2019). In addition to the experimental group at the University of Münster ($N = 35$) and the comparison group at the University of Koblenz-Landau ($N = 43$) where they used predefined modelling tasks, a baseline group in Münster ($N = 18$) was also recorded to control the test repetition effect. It was shown that the experimental group showed significant improvements with a major effect in the three aspects of development, analysis and multiple solutions while the comparison group from Koblenz only showed significant improvements with a moderate effect in the aspect of the analysis of modelling tasks and the baseline group no significant changes. In terms of the aspect of modelling-specific diagnostic competence, both the experimental group and the comparison group showed significant improvements over time with a major and moderate effect respectively in the aspects of identifying the modelling phase and difficulties in the modelling process, while the baseline group once again showed no significant changes. Accordingly, the focus of the development of modelling tasks in the teaching and learning laboratory at the University of Münster was reflected in the significant developments that go beyond all aspects of modelling-specific task-based competence while the promotion of diagnostic competence, which was deemed to be equal in both locations, was demonstrated by the results of the difference analyses (Wess & Greefrath, in press).

Modelling with digital tools

When working on application-based problems in particular, a digital tool can support teachers and students. Using digital tools in mathematics class can facilitate the introduction of more complex applications and modelling into daily practice in the classroom (Henn, 2007). Digital tools are currently frequently used for application-based problems to process models with complex function terms, for example, or to decrease the calculation effort. Digital tools can be used in different ways in class for the application and modelling.

One of these possible uses is experimenting or discovering (see Hischer, 2016, p. 180). For example, dynamic geometry software or table calculations can be used to transfer a real situation into a geometric model that can be used for experimenting. A very similar activity to experimenting is simulating real situations using the digital tools. Simulations are experiments with models that aim to provide knowledge about the real system shown in the model or the model itself (Greefrath & Weigand, 2012). For example, predictions about the population of a certain type of animal in different environmental conditions are possible using a simulation. From an applied mathematics perspective, simulations using digital tools can be seen as part of a modelling cycle in which a numerical model developed from the mathematical model is tested to validate the conceptional model by comparing it to the measurement results (Sonar, 2001). It is then possible to think about the mathematical justifications for the solution that is obtained after the experiment or simulation. Digital tools can be also used for visualisation in class. For example, specific data can be presented using a computer algebra system or statistical application in a coordinate system. This can be the starting point for the development of a mathematical model. A widespread use of digital tools is the calculation of numerical or algebraic results that students would not be able to obtain without a digital tool or would not be able to obtain in a reasonable amount of time. One example of this is the calculation of optimal complex packaging problems such as milk packaging (Böer, 1993). If this problem is addressed using functions and differential calculus, you get broken rational functions in which the zero of the first derivative is difficult to determine using school mathematics. The identification of algebraic representations from specific information is one of the calculations that can be carried out using digital tools. If, for example, a functional equation is determined from the existing data, the digital medium is also used as a calculation tool. This so-called *algebraisation* is characterised by real data being input into the digital tool and an algebraic equation being obtained. Controlling is also a sensible use of digital tools in learning processes. Digital tools can support control processes, for example with the determination of functions of specific properties in different ways. If, for example, a functional equation under certain conditions is sought, the corresponding result can be controlled both by algebraic tracking of the calculations using a digital tool and by using graphical or numerical processes, regardless of whether the result was obtained with a digital tool or not. If digital media with internet access are used in mathematics classes, they can also be used to research information, for example in connection with application contexts. Digital tools can be used in mathematics class to carry out important and varied tasks. They do not, however, replace the understanding of mathematical ideas. Digital tools can be used to support this understanding, however, as they can provide assistance with the experimenting, visualisation and calculation of examples. An exploratory phase with the digital tool is an important aid to in-depth understanding of a central concept.

The various uses of digital mathematical tools are effective in different parts of the modelling cycle in application-oriented tasks. Control processes generally belong in the final stage of the cycle. The calculations are carried out using the mathematical model created, which for example is a function in the analysis. A more precise analysis shows that the digital tools can be sensibly used when modelling in all phases of the modelling cycle.

If you look at the step of calculating using digital tools in greater detail, the processing of modelling problems using a digital tool requires two translation processes. The modelling task first needs to be understood, simplified and translated into the language of mathematics. The digital tool can, however, only be used when the mathematical expressions have been translated into the language of the digital tool and a digital tool model has been developed. The results from the digital tool then have to be transformed back into the language of mathematics. Ultimately, the original problem can be solved if the mathematical results relate to the real situation. These translation processes can be set out in an expanded modelling cycle (see Figure 9) which, in addition to the real world ("rest of the world") and mathematics also takes into account the digital tool (see Savelsbergh et al., 2008; Greefrath, 2011). Current studies (Greefrath & Siller, 2017) show, however, that an integrated modelling cycle in which digital tools can be used in each step better describes actual modelling activities with digital tools (Greefrath, 2018).

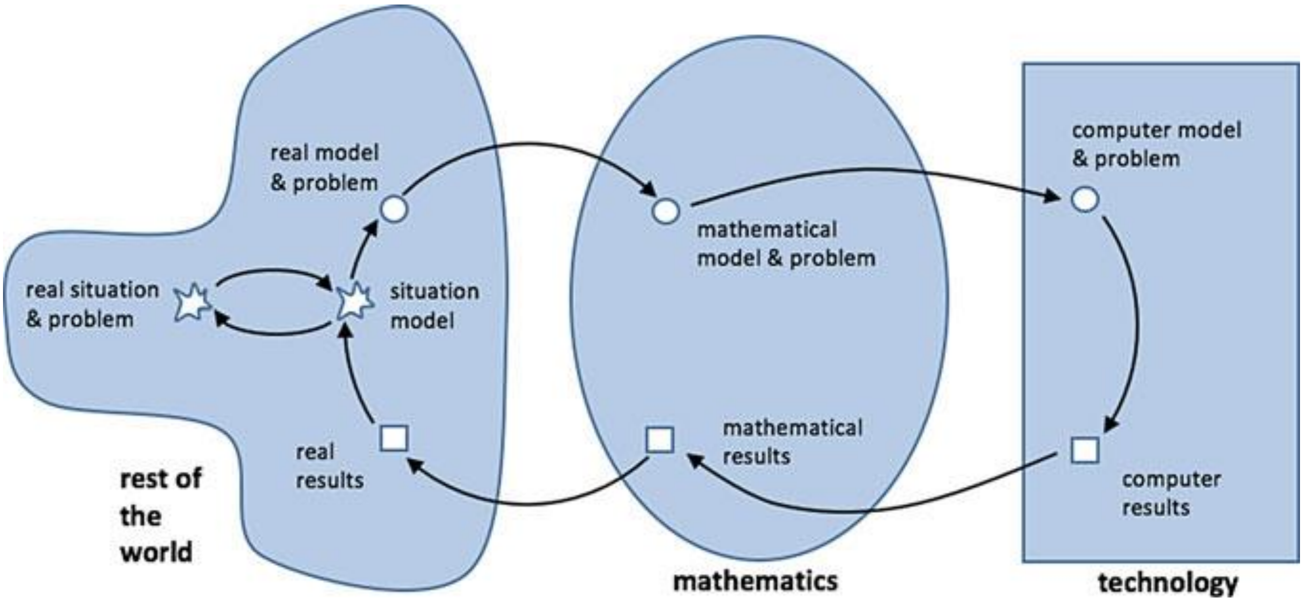


Figure 9. Possible use of digital tools in modelling cycles (Greefrath, 2011, p. 303)

MATHEMATICAL MODELLING IN SCHOOLS

Modelling has been much discussed in the German-speaking world in both mathematics education and school practice since the ISTRON Group was founded in Germany in the year 1990. There are a wide range of materials for how modelling can be taught in class (e.g. materials for reality-based mathematics classes ISTRON or material for mathematics course units MUED). Various approaches are followed to establish links to reality and modelling more strongly in schools. The possibilities that Fermi tasks and solution plans offer are presented below by way of an example. Challenges in the classroom can be also set out.

Challenges

Application-oriented tasks are not used as intensively as would be desirable in classrooms for a variety of reasons. There are, for example, organisational, personal and material-based obstacles.

Tasks on applications and modelling tasks often require longer to process than the time available in class. Extensive research or experiments sometimes need to be carried out for applications of this type. Project work is ideal for this if it appears to be organisationally possible. It is also difficult to include correspondingly extensive tasks in examinations. This in turn has an effect on the actual use in class and the students' motivation. The use of tasks from contexts outside of mathematics presents both students and teachers with new challenges. There may be personal reservations about challenging or additional activities (such as simplification and translation in the mathematical model) in mathematics classes. For teachers, too, application-oriented mathematics classes require a lot of different competencies (Blum, 2015).

Nowadays there are many materials that include links to the real world, but material and modelling tasks are not yet sufficiently well integrated into many schoolbooks that additional materials are not required. One difficulty when it comes to modelling tasks is the issue of the assessment of students' work. Maaß (2007) suggests that both the mathematical calculating and the modelling process be included in the assessment. She proposes that the development of the real model, the interpretation of the solution, the critical reflection, the documentation and the type of approach also be included in addition to the mathematical calculating.

Students may also have difficulties in many cases in application-oriented classes (Blum, 2015). Problems may occur in many places when working on modelling tasks in particular, which should be clarified on the modelling cycle (Maaß, 2004). Problems can occur when creating the real model and the mathematical model in the first steps of the idealised modelling cycle. False assumptions may be included in the model or the real situation inappropriately simplified. Students often do not have knowledge of relevant quantities, for example in terms of lengths and numbers. In the case of these difficulties, the text of the task and the representation of the problem play a particular role. A clear drawing can often have a positive impact on the understanding of the problem. Problems can also occur when transferring the real model to the mathematical model. It depends, among other things, on the available mathematical models, for example linear functions. False symbols and algorithms may be selected, or mistakes may be made in the formulas. Problems can also occur when working in the mathematical models. Students often identify the mistakes in calculation themselves in modelling tasks, but they need a suitable opportunity. The interpretation and validation of the results of the mathematical model are often not taken seriously enough. Students are often lacking control competence, particularly when it comes to considering the plausibility. Validation in particular must be addressed in greater detail (Maull & Berry, 2001).

While the difficulties mentioned can be specifically attributed to specific points in the modelling cycle, there are also difficulties that affect the entire modelling process. Students may lose their overview and stop pursuing their solution plan or not create a link to mathematics to further process their solution plan. It is also problematic when students are unable to show their work, because they do not document their work in sufficient detail. This means that their competence is very difficult to assess (Maaß, 2004). Here it is helpful if the students get a clear structure for their work.

There are various options to counteract these difficulties that may arise for students working on modelling tasks. On the one hand, there are tasks on particular competencies of modelling enable certain areas of the modelling cycle such as validation to be targeted (for example Fermi tasks), and on the other strategic solutions plans that were specifically developed for modelling tasks. Making students aware of the modelling by setting out the cycle can prevent mistakes that affect the entire modelling cycle (Greefrath, 2018).

Example: Fermi tasks

Fermi tasks can be characterised as specific modelling tasks (Kaiser & Stender, 2016). Fermi tasks are under-determined, open tasks with a clear end goal but unclear starting point and an unclear transformation with the focus on the data acquisition, mostly through multiple instances of guess work. They are named after the nuclear physicist and Nobel prize winner Enrico Fermi (1901-1954). He was known for his rapid solution of problems for which there were practically no data.

The classic example of a Fermi task is the determination of the number of piano tuners in Chicago. There is initially no information on this. It is possible, however, to gradually estimate the quantity by making sensible assumptions about the number of inhabitants in Chicago, the size of a household, the percentage of households with a piano, the period of time between two piano tunings, the duration of a piano tuning session and the workload of a piano tuner with an accuracy of around 100, thereby sensibly answering the question. The answer is therefore determined by making a suitable selection and sensibly estimating the intermediate data.

Other than their openness, Fermi tasks are also characterised by their link to reality and a certain accessibility. They are challenging and do not merely stimulate the person tackling them to ask further questions but also to use mathematics in the world. The term Fermi tasks is also used in a broader sense for open tasks in which the task consists of just a question or a small amount of information and where applicable a figure. When using Fermi tasks in mathematics classes, the focus is less on the calculation and more on the other steps in the modelling cycle such as simplifying and validating. Fermi tasks can teach students how to handle inaccuracy, which often does not take on a particularly significant role in mathematics classes. Fermi tasks promote estimation and working with inaccurate information in particular. Mathematising to models which are as simple as possible also plays an important role. Fermi tasks in the broader sense can also focus on researching and experimenting and on finding various approaches. Students also learn to ask questions themselves and develop heuristic strategies. They use everyday knowledge and calculate using quantities (Büchter, Herget, Leuders, & Müller, 2006; Leuders, 2001, p. 104).

Fermi tasks are used regularly in German comparative studies in Grade 8. A more precise investigation of nine Fermi tasks of this type from tests in the years 2015-2018 showed that all of the items could be assigned to the field of arithmetic and they can generally be assigned to the general idea of measurement. Mathematical modelling is felt to be the most important process as a general competence in almost all cases. The openness of the task is generally achieved (solely) through an unclear starting position. This openness is mostly based on information being missing from the task text. There are, however, three tasks that cannot be deemed to be either under-determined or over-determined. The authenticity found in almost all of the tasks is achieved by an authentic situation. In one case, however, a hypothetical problem is given (whether the routes to school of all of the students in a school could be longer than the distance from the earth to the moon), so in this example we cannot refer to an authentic context. In almost no instances can the use of mathematics be seen as authentic. None of the tasks used is currently really relevant to the students themselves. To solve most of the tasks, the students need to work along a modelling cycle. All of the competencies of modelling occur in almost all of the Fermi tasks. Only one task aims to estimate the length of a bee using a photo with a focus on only very few modelling competencies. The assumption can be made that the full modelling cycle will not be worked through but that only simplification is needed to successfully estimate the answer. Fermi tasks are a good opportunity to include authentic situations in tests and examination questions. For example, the volume of a dustbin should be determined using a photograph. In this way, test and examination questions can be more open and include contexts relevant to students. This promotes modelling competence and this aspect is then included in class development. This is possible at varying degrees of difficulty, which may be dependent on the number of quantities (like number, length, weight) used (Greefrath, 2019).

Example: strategic solution plans

One option to help students working on modelling tasks is to use strategic solution plans. These are often based on steps in the modelling process or competencies that play an important role in modelling. Solution plans can help students process modelling tasks. As part of the DISUM project, Blum (2010) developed a solution plan for students based on a simplified modelling cycle. This solution plan comprises four steps: understanding the task, creating the model, using mathematics and explaining the result. Each step is explained to students using a question and a number of explanatory points.

Blum’s solution plan is one of what are known as indirect general strategic tools as it makes reference to general technical modelling methods but in principle does not provide any specific assistance based on the content of the task. The universality of the strategic tool, however, is left out in favour of content-based information in two steps of this solution plan. The reference to equations and Pythagoras’ theorem means that the strategic tool is content-based. This solution plan can be edited for students. Its use can also be practised using sample tasks. In a study by Schukajlow, Krug and Rakoczy (2015) as part of the DISUM project, significant differences in student performance were able to be demonstrated when modelling using this solution plan with reference to the content area of “Pythagoras’ theorem”. Teaching using the solution plan proved to be a more effective form of teaching and learning. In addition to this, students in the solution plan group also have perceived stronger the use of the solution plan.

A five-step solution plan was used in the LIMO ("Lösungs-Instrumente beim Modellieren" [Solution tools in modelling]) project at the University of Münster. This solution plan comprises the steps: 1) Understanding and simplifying, 2) Mathematising, 3) Working mathematically, 4) Interpreting, and 5) Controlling. Five steps have been selected to highlight the step of validating the result and the path to a solution (Adamek, 2018).

The actual path to a solution does not always follow the same route as the respective predefined solution plan. Even if students' solutions that are fixed in writing are sometimes similar in structure and based on the solution plan, the detailed solution process varies considerably. This recalls the individual modelling routes described by Borromeo-Ferri (2018). Whether or not the solution plan plays a role in the solution process or merely impacts the outcome, the key question in the assessment is the effectiveness of these plans in providing assistance with the solution. The assumption should be made that there are students who will find it extremely difficult to use a plan of this type and others who will only need a short introduction to use the plan (Greefrath, 2018).

OUTLOOK

On the one hand, mathematical modelling is a fixed component of the current educational standards and schoolbooks in Germany. On the other hand, as in most countries, applications and modelling play a less significant role in everyday teaching and classroom activities. The empirical results presented show some areas of focus of research on modelling and application in the past few years in Germany. New test instruments provide opportunities for research and development of teaching and learning. The impact of digital tools on school practice and research projects on mathematical modelling is seen as an important task. Effective promotion of modelling competence among students and the professionalization of future teachers are currently the core elements of research. At the same time, tools and strategies are being developed and researched to help students to model problems independently and train teachers to teach mathematical modelling (Barquero, Carreira, & Kaiser, 2017; Greefrath & Vorhölter, 2016). In the future, digital media could offer new impetuses for mathematical modelling both for classes in school and for research methods at universities.

References

Adamek, C. (2018). *Mathematisches Modellieren mit Lösungsplan. Eine empirische Untersuchung zur Entwicklung der Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern* (Umpublished doctoral dissertation). Universität Münster, Münster, Germany.

Barquero, B., Carreira, S., & Kaiser, G. (2017). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 877-883). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Baumert, J., & Kunter M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers* (pp. 25-48). Boston, USA: Springer.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123–139.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterber, 32*(2), 195–232.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Eds.), *Trends und Perspektiven (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 23)* (pp. 15-38). Vienna, Austria: Hölder Pichler Tempsky.

Blum, W. (2010). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule, 52*(34), 42–48.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal changes* (pp. 73–96). New York, USA: Springer International Publishing.

Blum, W., & Kirsch, A. (1989). The problem of the graphic artist. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Meßner, & L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 129-135). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood.

Böer, H. (1993). Extremwertproblem Milchtüte. Eine tatsächliche Problemstellung aktueller industrieller Massenproduktion. In W. Blum (Ed.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht* (pp. 1–16). Hildesheim, Germany: Franzbecker.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education.* Cham, Switzerland: Springer.

Borromeo-Ferri, R., & Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education – experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 2046–2055). Lyon, France: ERME.

Brand, S. (2014). *Erwerb von Modellierungskompetenzen. Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen*. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Büchter, A., & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen.* Berlin, Germany: Cornelsen Scriptor.

Büchter, A., Herget, W., Leuders, T., & Müller, J. H. (2006). *Die Fermi-Box. Lebendige Mathematik für Alle.* Seelze, Germany: Friedrich.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik.* Mannheim, Germany: Bibliographisches Institut.

Fricke, A. (1987). *Sachrechnen. Das Lösen angewandter Aufgaben*. Sttutgart, Germany: Klett.

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling— Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – ICTMA14* (pp. 301–304). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Berlin, Germany: Springer Spektrum.

Greefrath, G. (2019). Fermi-Aufgaben in Vergleichsarbeiten in Klasse 8 – Kriterien und Ergebnisse. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Eds.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (pp. 19-32). Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM, 50*(1-2), 233-244.

Greefrath, G., & Siller, H-S. (2017). Modelling and Simulation with the help of digital tools. In G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 529-539). Cham, Switzerland: Springer.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling. Approaches and Developments from German Speaking Countries.* Cham, Switzerland: Springer.

Greefrath, G., & Weigand, H-G. (2012). Simulieren – mit Modellen experimentieren. *Mathematik lehren, 174*, 2–6.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3–45.

Hankeln, C. (2018). *Mathematisches Modellieren mit dynamischer Geometrie-Software. Ergebnisse einer Interventionsstudie.* Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Hankeln, C., Adamek, C., & Greefrath, G. (2019). Assessing sub-competencies of Mathematical Modelling - Development of a new test instrument. In G. A. Stillman, & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 143-160). Cham, Switzerland: Springer.

Henn, H-W. (2007). Modelling pedagogy—Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 321–324). New York, USA: Springer.

Hischer, H. (2016). *Mathematik –Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele.* Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Jahner, H. (1985). *Methodik des mathematischen Unterrichts. Begründet von Walther Lietzmann.* Wiesbaden, Germany: Quelle & Meyer, Heidelberg.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 110-119). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood.

Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 277–293). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Kaiser, G., & Stender, P. (2016). Die Kompetenz mathematisch Modellieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & R. Roppelt (Eds.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (pp. 95-106). Brunswick, Germany: Schroedel.

Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Theoretische Konzeptionen. Bd. 2 – Empirische Untersuchungen. Anwendungen im Mathematikunterricht, Bd. 1.* Bad Salzdetfurth, Germany: Franzbecker.

Klock, H, & Wess, R. (2018). *Lehrerkompetenzen zum mathematischen Modellieren - Test zur Erfassung von Aspekten professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens*. Münster, Germany: WWU-Publikationsserver MIAMI.

Klock, H, Wess, R, Greefrath, G, & Siller, H-S. (2019). Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens bei (angehenden) Lehrkräften - Erfassung und Evaluation. In T. Leuders, E. Christophel, M. Hemmer, F. Korneck, & P. Labudde (Eds.), *Fachdidaktische Forschungen zur Lehrerbildung* (pp. 135-146). Münster, Germany: Waxmann.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Cologne, Germany: Wolters Kluwer.

Kreckler, J. (2017). Implementing modelling into the classroom: Results of an empirical research study. In G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 277-287). Cham, Switzerland: Springer.

Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin, Germany: Cornelsen Scriptor.

Maaß, J. (2015). *Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.* Münster, Germany: WTM.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim, Germany: Franzbecker.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113–142.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I.* Berlin, Germany: Cornelsen.

Maier, H., & Schubert, A. (1978). *Sachrechnen: Empirische Befunde, didaktische Analysen, methodische Anregungen.* Munich, Germany: Ehrenwirth.

Maull, W., & Berry, J. (2001). An investigation of student working styles in a mathematical modelling activity. *Teaching Mathematics and Its Applications, 20*(2), 78–88.

Ortlieb, C. P. (2004). Mathematische Modelle und Naturerkenntnis. *Mathematica didactica, 27*(1), 23–40.

Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4–15.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover, Germany: Schroedel.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 53–78.

Savelsbergh, E. R., Drijvers, P. H. M., van de Giessen, C., Heck, A., Hooyman, K., Kruger, J. H. J., …, & Westra, R. H. V. (2008). *Modelleren en computer-modellen in de b-vakken: advies op verzoek van de gezamenlijke b-vernieuwingscommissies.* Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM, 47*(7), 1241-1254.

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 393–417.

Schupp, H. (1989). Applied mathematics instruction in the lower secondary level—Between traditional and new approaches. In Blum, W., et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 37–46). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Sonar, T. (2001). *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Brunswick, Germany: Vieweg.

Spiegel, H., & Selter, C. (2006). *Kinder & Mathematik – Was Erwachsene wissen sollten.* Seelze, Germany: Kallmeyer.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344–355.

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens.* Freiburg, Germany: Herder.

Wess, R., & Greefrath, G. (in press). Lehr-Lern-Prozesse zum mathematischen Modellieren im Lehr-Labor MiRA+ initiieren und erforschen. Mathematica didactica, 42.

Westermann, B. (2003). Anwendungen und Modellbildung. In T. Leuders (Ed.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (pp. 148–162). Berlin, Germany: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen DMV, 4*(2), 35–41.

Zöttl, L., Ufer, S., & Reiss, K. (2011). Assessing modelling competencies using a multidimensional IRT approach. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – ICTMA14* (pp. 427–437). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

AVANCES EN LAS INVESTIGACIONES EN ESPAÑA SOBRE EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Spanish research about modelling in mathematics teaching and learning

Ferrando, I.

Universitat de València

Resumen

En este trabajo se aborda una revisión de los avances de investigación desarrollados en España sobre el uso de la modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pretende obtener una recopilación organizada de los trabajos realizados en los últimos años. Una de las características de los estudios descritos es la variedad de enfoques teóricos que se utilizan y que, sin duda, da cuenta de la diversidad de investigaciones realizadas en nuestro país centradas en la modelización; un área de investigación que ya cuenta con una larga tradición en el ámbito internacional y que, en los últimos años, se ha enriquecido de las contribuciones internacionales de distintos grupos de investigación españoles.

Palabras clave: *modelización, EMR, resolución de problemas, educación obligatoria, educación superior, formación de profesores.*

Abstract

This work deals with a review of the research advances developed in Spain on the use of modelling in the process of teaching and learning mathematics. The aim is to obtain an organised compilation of the work carried out in the last years. One of the characteristics of the described studies is the diversity of theoretical approaches that are used and that, undoubtedly, reflects the variety of research done in our country focused on modelling; a research area that already has a long tradition in the international context and that, in the last years, has been enriched by the international contributions of different Spanish research groups.

Keywords: *modelling, RME, problem solving, compulsory education, high education, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta contribución es mostrar un panorama de la investigación realizada en nuestro país centrada en el uso de la modelización. Tal y como veremos, se trata de una investigación diversa – tanto en los objetivos perseguidos por los diferentes grupos de trabajo como en las perspectivas teóricas en que se basan – que ha interesado a numerosos investigadores de nuestro país. En efecto, no resulta sorprendente que la modelización sea, desde hace ya hace varias décadas, un tema de investigación central en el área de investigación de didáctica de las matemáticas en el ámbito internacional. Ciertamente, cuando nos preguntamos por qué es necesario aprender matemáticas una de las respuestas inmediatas es porque éstas resultan fundamentales para entender y enfrentarse al mundo. Así, los alumnos requieren, cuando se les presenta un concepto matemático –y por tanto, a menudo, abstracto– nuevo, entender “para qué sirve”, “a qué se aplica”.

Desde la comunidad de investigadores en Educación Matemática se ha dado respuesta a esta necesidad promoviendo investigaciones ligadas a la conexión entre matemáticas y realidad. La

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 43-64). Valladolid: SEIEM.

Educación Matemática Realista (EMR), que se remite a la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983, y también Puig, 2001), incide en que las matemáticas poseen un valor educativo en tanto que permiten comprender cómo se organiza nuestro entorno social y cultural. Esta perspectiva propicia un enfoque educativo universal en el que, aunque que no todos los que aprenden matemáticas van a ser usuarios profesionales de las matemáticas, las matemáticas sí que pueden ayudarles a resolver problemas cotidianos.

Así, la EMR trajo consigo una perspectiva novedosa en el uso de contextos en la educación matemática: los contextos considerados no sólo como un área de aplicación de las matemáticas aprendidas sino también como elementos clave en la introducción de conceptos matemáticos. Cuando las matemáticas se aplican en una situación extra-matemática a través, por ejemplo, de un problema contextualizado, se distinguen una serie de pasos que incluyen el proceso de comprensión y de simplificación de la situación, la reformulación de la situación en términos matemáticos (la obtención de un modelo), el trabajo matemático a partir de ese modelo y la evaluación o validación del resultado matemático obtenido en términos de la situación original. En la literatura existen numerosos esquemas o modelos que recogen, con más o menos detalles, este proceso que, como cabe esperar, es cíclico, ya que las fases finales de validación pueden obligarnos a iniciar un nuevo recorrido para hallar un modelo mejor que dé una respuesta más ajustada a la situación de partida. La primera descripción esquemática del proceso de resolución de una tarea de modelización se debe a Pollak (1977) que expone y explica –por primera vez– el ciclo de modelización que, durante los 30 años siguientes, ha dado lugar a otros muchos (cada uno con sus particularidades). En Borromeo-Ferri (2006) se analizan y comparan diferentes ciclos de modelización y se recogen los más utilizados en la literatura.

De la descripción del proceso de modelización se infiere que la resolución de una tarea de modelización exige, desde el punto de vista del resolutor, una alta demanda cognitiva. En efecto, ésta se refleja en las dificultades de los estudiantes, tal y como muestran algunos estudios empíricos (véase, por ejemplo, Galbraith y Stillman, 2006). Las primeras dificultades al resolver tareas de modelización derivan de la importancia del contexto, en este sentido, De Lange (citado en Van den Heuvel-Panhuizel, 2019) explica que los contextos son la vía para desarrollar conceptos, pero hay que tener cuidado de no viajar en el tren que va por la vía equivocada. Respecto a la importancia de escoger un contexto adecuado, es recomendable leer el trabajo que Pollak publicó en uno de los primeros números de la revista *Educational Studies in Mathematics* en 1969. En él, el autor describe y analiza algunas tareas contextualizadas. En particular, reflexiona sobre los enunciados de algunos problemas –similares a algunos habituales en los libros de texto– en cuya formulación encontramos palabras que configuran contextos, que según Pollak (1969), simplemente hacen que el problema “suene mejor” (p.394). Sirva como ejemplo el siguiente:

> El anuncio de un ventilador eléctrico dice que éste mueve 95,5 metros cúbicos de aire por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará el ventilador en cambiar todo el aire de una habitación cuyas dimensiones son 8 metros de ancho, 7’5 metros de largo y 3 metros de alto?

En este caso, del contexto del problema se interpreta que todo el aire de la habitación se elimina antes de que entre aire nuevo, sin embargo esto no es verdad: el aire previo se mezcla y se diluye. Por tanto, no cualquier contexto sirve cuando queremos utilizarlo para introducir un contenido matemático.

Por otro lado, en muchas ocasiones el contexto del problema no tiene influencia real en su resolución, en efecto, la mayoría de los problemas “contextualizados” que se encuentran en los libros de texto se resuelven con éxito directamente siguiendo los siguientes pasos: ignora el contexto, extrae los datos del texto y realiza un cálculo siguiendo un esquema que, en la mayoría de los casos, consiste en reproducir el último procedimiento trabajado en clase. Estos procedimientos, que inciden en ignorar el significado que el contexto pueda aportar al enunciado del problema, provocan que a menudo las matemáticas sean algo que no tiene demasiado sentido para los estudiantes o, en el mejor de los casos, que las vean como una herramienta potente con propiedades mágicas (Schoenfeld, 1991, p. 327). Así, una de las cuestiones que interesan en las investigaciones basadas en el uso de tareas de modelización es analizar, a partir de la actividad tanto del alumno como del profesor, aspectos relativos al diseño y a la resolución de tareas que promuevan un aprendizaje comprensivo (y no simplemente basado en la reproducción o en la mera aplicación de procedimientos).

A lo largo de esta introducción se han tratado algunos elementos que articulan la investigación centrada en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas: la naturaleza de los contextos, el diseño de tareas de modelización, el análisis del proceso de resolución o la observación de los estudiantes al resolverlas. Las investigaciones realizadas en España en este campo parten, como veremos, de la idea de mostrar las matemáticas a través de contextos de forma que los estudiantes puedan darles sentido de forma significativa e integrada. Sin embargo, como pondremos en evidencia en los apartados siguientes, existen elementos diferenciadores en las investigaciones desarrolladas por los distintos grupos de trabajo. Especialmente, aparecen diferencias notables en los enfoques teóricos en que se basan las investigaciones, y esto, sin duda, es una característica sumamente enriquecedora que, sin embargo, puede repercutir en que existan dificultades de comunicación entre los diferentes investigadores que comparten intereses comunes.

La investigación relativa a la modelización es amplia y diversa, desde trabajos de perfil teórico hasta investigaciones centradas en el diseño y análisis de recursos basados en el uso de la modelización. En los avances realizados en España en los últimos años, las investigaciones desarrolladas abarcan desde la educación infantil hasta la formación de profesores, pasando por la educación obligatoria y la universitaria. Dada la heterogeneidad de las temáticas y de los enfoques, no es sencillo categorizar de forma unívoca los trabajos, ni tampoco unificar las perspectivas teóricas utilizadas. El objetivo de esta contribución es mostrar, de forma accesible, un panorama de los avances realizados y del impacto de estos en la investigación del campo de la modelización a nivel internacional.

Para estructurar la presentación de los avances, se organizarán las investigaciones según los niveles académicos a los que se refieran. Así, en la primera parte del capítulo se describirán los estudios centrados en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas desde las primeras edades (educación infantil), hasta los cursos de transición a la universidad (bachillerato). En la segunda parte, se tratará, a partir de la exposición de diferentes trabajos, la necesidad de introducir la modelización en la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de carácter científico-técnico. Finalmente, se recopilarán los resultados de algunas investigaciones centradas en las dificultades derivadas de incorporar la modelización en la práctica docente y, por último, se relacionarán con las investigaciones relativas a la formación de profesores en modelización. En el apartado de conclusiones se establecerán algunas líneas de investigación abiertas.

INVESTIGACIONES BASADAS EN EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN NO UNIVERSITARIA

En la introducción, se ha planteado la necesidad de incorporar problemas contextualizados a través de los cuales los estudiantes puedan dar sentido a conceptos matemáticos, sin embargo, es fundamental reflexionar sobre la naturaleza de estas tareas (y de los contextos involucrados) para que realmente se resuelvan siguiendo un proceso de modelización y no simplemente aplicando procedimientos matemáticos de forma más o menos mecánica. Estas cuestiones pueden tratarse desde dos perspectivas complementarias en función del uso que se haga de la modelización en el proceso de enseñanza. En efecto, tal y como apuntan Julie y Mudaly (2007), la modelización puede ser el vehículo para promover el aprendizaje de un contenido matemático concreto; pero también puede introducirse en el proceso de enseñanza y aprendizaje como un contenido en sí mismo, a partir de tareas cuyo objetivo es promover el desarrollo de la competencia matemática en el alumnado.

El término competencia matemática se refiere, siguiendo a Rico (2006), a “las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos” (p. 49). Sin embargo, en la definición de Niss (2003) se enfatiza el aspecto funcional de la competencia matemática, lo que implica incidir en el contexto de la actividad matemática; para este autor, la competencia matemática es la capacidad de utilizar las matemáticas en una variedad de contextos en los que las matemáticas pueden jugar un papel. En Rico (2009) se recogen las aportaciones de diversos expertos en educación matemática de nuestro país centradas en la construcción de modelos y en la resolución de problemas como elementos clave en el desarrollo de la competencia matemática. Como se mostrará a continuación, una parte de las investigaciones desarrolladas en nuestro país se centra en la relación entre competencia matemática y el proceso de resolución de tareas de modelización, mientras que otros trabajos se centrarán en el uso de la modelización como vía para introducir contenidos matemáticos.

Modelización en Educación Infantil y Primaria

Ruiz-Higueras, García y Lendínez (2013) plantean cómo las actividades de modelización pueden permitir al alumnado de Educación Infantil establecer conexiones entre el mundo sensible y un modelo de éste, lo que conlleva la problemática del diseño de situaciones que les permitan construir con sentido conocimientos matemáticos. En su propuesta describen una secuencia de situaciones, todas ellas en contextos muy cercanos a la realidad de los alumnos de esta edad, que les permiten construir conocimientos matemáticos. Se plantean, por ejemplo, actividades basadas en el empaquetado de regalos, la construcción de puentes para jugar con coches, la localización o ubicación de un objeto a partir de un mapa o la descripción mediante un esquema escrito del recorrido de una persona que se desplaza en un plano. Todas las tareas ponen en juego procedimientos ligados a la orientación espacial, pero también a la medida, al conteo o a la comunicación oral y escrita de argumentos matemáticos. Además, en base a los resultados del análisis de la implementación de las propuestas planteadas, los autores concluyen que la interacción de los alumnos de infantil con el medio real a través de estas actividades de modelización resulta clave para activar competencias matemáticas.

Ruiz-Higueras y García (2011) diseñan una experiencia para Educación Infantil que parte de una cuestión inicial (generatriz): ¿cómo alimentar a unos gusanos de seda con hojas de morera? Se trata de una cuestión que no es abordable directamente por los estudiantes; la investigación se centra en analizar cómo la maestra deriva cuestiones graduadas en dificultad creciente para responder a la cuestión inicial. Se concluye que, a partir de estas cuestiones y de su organización en el desarrollo de la actividad matemática, se pueden construir procesos de modelización matemática. En Ruiz-Higueras (2008) se presentan una serie de situaciones que permiten a los alumnos de Educación Primaria construir, de nuevo a través de una secuencia de cuestiones matemáticas de complejidad creciente, modelos de sistemas ubicados en dominios cercanos a su realidad. Una de las situaciones presentadas parte del cambio de cromos, una actividad habitual en los patios de recreo de todas las escuelas que da lugar a una actividad matemática muy rica en la que se trabaja el concepto de razón de cantidades y el procedimiento de la comparación de razones; además, la situación constituye un escenario idóneo para que los estudiantes den un sentido funcional a sus conocimientos relativos a la multiplicación y la división.

En Educación Primaria algunas investigaciones han analizado propuestas didácticas que partían de una cuestión inicial que, a priori, parece no abordable por los estudiantes, pues consiste en obtener una estimación de una magnitud no alcanzable. Esta clase de problemas, también conocidos como problemas de Fermi, son aquellos que se resuelven obteniendo una estimación razonada de cantidad que, por su tamaño, no podemos concebir sin recurrir a algún procedimiento, algoritmo o esquema matemático. Se trata, por tanto, de problemas aparentemente sencillos en su formulación pero que, según el contexto de la pregunta, pueden tener un papel importante en relación a la comprensión del entorno y, en ocasiones, relevancia social. Durante los últimos años, varios investigadores españoles se han interesado en este tipo de problemas que, tal y como muestran los resultados de diferentes investigaciones, promueven la generación de modelos por parte de los estudiantes y, además, tienen la ventaja de ser accesibles (Ärlebäck, 2009).

En el trabajo de Stohlman y Albarracín (2016) se recapitulan y categorizan las investigaciones sobre el uso de la modelización en la Educación Primaria concluyendo que la modelización da la oportunidad, en los grados elementales, de introducir procesos de modelización y de promover resultados a largo plazo que deberían analizarse a través de investigaciones basadas en estudios longitudinales. En Albarracín y Gorgorió (2019) se presentan los resultados del análisis cualitativo de una experiencia desarrollada con alumnos de 10 y 11 años. Los resultados muestran que, en efecto, los problemas de estimación de grandes cantidades dan la oportunidad a alumnos de corta edad de desarrollar modelos matemáticos y que, por tanto, son una herramienta útil para introducir la modelización en la Educación Primaria.

En Pla-Castells, Ferrando y Robledo (2019) y en Pla-Castells y Ferrando (en prensa) se describe y analiza una secuencia de problemas de Fermi diseñada usando una técnica heurística consistente en reducir y ampliar las dimensiones de la cuestión inicial para hacerla accesible a estudiantes de segundo de primaria. La cuestión inicial de la secuencia era: ¿hay suficientes habitantes en tu localidad para rodearla formando una cadena humana? Partiendo de este problema, inaccesible para los alumnos, se plantean otras preguntas más sencillas (reducción) que permiten que los estudiantes desarrollen estrategias de resolución. A continuación, a través de una secuencia graduada de nuevos problemas (ampliación), se promueve que los alumnos apliquen sus estrategias y las generalicen, dando respuesta a la cuestión inicial.

En Albarracín, Ferrando y Boliart (2017) se presenta un estudio centrado en analizar la evolución de las estrategias de resolución de un mismo problema de Fermi propuesto a alumnos de edades comprendidas entre 8 y 16 años (participaron alumnos de 2º, 4º y 6º de Educación Primaria y 2º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria). El problema planteado consiste en obtener un número estimado del número de posibles asistentes a un concierto celebrado en el patio del centro escolar (que tiene forma rectangular). Pese a las limitaciones del estudio, se identifica una evolución de los modelos identificados que se interpreta desde dos perspectivas. Por un lado, los resultados del análisis permiten identificar elementos relativos a la comprensión del concepto de área y a los procedimientos implicados en la medida de esta magnitud en cada nivel; por otro lado, se puede deducir el tipo de actividad de estimación (teniendo en cuenta no solo la magnitud implicada, sino otros aspectos ligados al contexto de problema) que puede resultar adecuada a cada edad.

Modelización en Educación Secundaria

De las investigaciones previamente descritas, se deduce que los problemas de Fermi promueven en los estudiantes el razonamiento basado en el uso de modelos y tienen la ventaja de que, aunque a priori pueden resultar desconcertantes (los alumnos no están acostumbrados a resolver tareas sin datos numéricos), después de una breve reflexión, son capaces de abordarlos sin excesiva dificultad. En la tesis doctoral de Lluís Albarracín se plantea una investigación empírica basada en analizar las respuestas de estudiantes de Educación Secundaria a una serie de problemas de Fermi, con el objetivo de categorizar estrategias de resolución (Albarracín, 2011). De su investigación inicial se deducen algunos resultados interesantes: en base al análisis de las producciones de los estudiantes se infiere que los problemas de estimación planteados dan la oportunidad a los resolutores de, en base a su creatividad y en función de su nivel de competencia matemática, producir diferentes estrategias que llevan a una solución correcta. Para ello, los estudiantes deben simplificar la realidad, distinguiendo variables necesarias y accesibles y, así, desarrollar modelos que varían en función del contexto del problema (Albarracín y Gorgorió, 2013, 2014).

En relación a los problemas de Fermi, durante los últimos años se han realizado diversas investigaciones centradas en analizar un tipo concreto de problemas de estimación: aquellos que consisten en obtener el número aproximado de elementos en un área acotada. Por un lado, a partir de la definición de modelo de Lesh y Harel (2003), Gallart, Ferrando, García-Raffi, Albarracín y Gorgorió (2017) presentan una herramienta que permite analizar los modelos matemáticos producidos por los estudiantes cuando se enfrentan a estos problemas de modelización. Esta herramienta, utilizada en un análisis comparativo entre estudiantes con y sin experiencia en modelización, permite identificar elementos diferenciadores en los modelos producidos por estudiantes con experiencia previa. En Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió (2017) se muestra que los alumnos que ya se han enfrentado a tareas de modelización (no necesariamente problemas de Fermi) son capaces, desde el primer momento, de utilizar conceptos matemáticos formales y, además, los modelos utilizado son más complejos.

Las investigaciones realizadas con problemas de Fermi ponen de manifiesto que este tipo de problemas permiten integrar las matemáticas escolares con los conocimientos derivados de la vida cotidiana, promoviendo, por tanto, una mejor comprensión del mundo por parte de los estudiantes. Además, el grado de autenticidad de la formulación de los problemas planteados resulta clave para que los estudiantes se cuestionen sobre la validez de la respuesta obtenida, promoviendo la fase de validación del proceso de modelización y, además, les permite contrastar sus respuestas con otras (las de diferentes medios de comunicación, en problemas como aquellos que se contextualizan en manifestaciones multitudinarias). Este proceso fomenta sin duda el desarrollo del pensamiento crítico y ayuda a que los estudiantes aprecien el valor de las matemáticas en su papel de ciudadanos que se cuestionan la información recibida (Albarracín y Gorgorió, 2015, 2018). Los resultados de estas investigaciones están en línea con los trabajos centrados en el contexto, entre los cuales, de los realizados en nuestro país, destaca la contribución de Alsina (2007) en el 14º estudio del ICMI y también el enfoque de la modelización como vía para introducir contenidos transversales tales como los planteados por Sala, Font, Giménez y Barquero (2017).

En el trabajo realizado por Aymerich, Gorgorió y Albarracín (2017) se describe un estudio exploratorio cuyo objetivo central es caracterizar los modelos obtenidos por los estudiantes a partir de una herramienta de análisis que también se basa en la definición de modelo de Lesh y Harel (2003). Sin embargo, la particularidad de este estudio es que se incorpora una representación en forma de grafo, esto permite analizar la estructura de los modelos producidos y, de esta forma, compararlos según su complejidad. Otra singularidad de esta investigación es que el contexto de la actividad diseñada implica que los estudiantes analicen e interpreten datos mediante técnicas estadísticas; en efecto, la tarea (adaptada de una actividad del proyecto NRICH), consistía en que los alumnos, a partir de los datos de los sueldos de los empleados de cinco empresas, obtuvieran una idea de la estructura de cada empresa y las clasificaran en base a sus propios criterios.

Por su naturaleza matemática, se pueden establecer conexiones directas entre los contenidos del bloque de análisis y algunos elementos del proceso de modelización. En particular, es posible trabajar el concepto de función entendida como modelo de una relación entre variables que cuantifican propiedades de un fenómeno o contexto dinámico. Las investigaciones que describimos a continuación siguen lo que algunos autores han denominado *modelización funcional*, entendida como la producción de modelos en los que intervienen relaciones funcionales entre variables (véase, por ejemplo, Puig y Monzó, 2013).

En el estudio desarrollado por Solar, Deulofeu y Azcárate (2015), el punto de partida es el enfoque competencial del conocimiento matemático, que parte de la premisa de que, aunque la competencia en modelización es transversal a los contenidos, los procesos que la conforman dependen del tema que se trate (p. 192). Así, los autores desarrollan una propuesta que se inscribe en el tema de “interpretación de gráficas funcionales” pero, además su trabajo incluye un desarrollo teórico que consiste en describir la elaboración del *Modelo de Competencia Matemática* (MCM) que relaciona contenidos, procesos y niveles de actividad. El MCM se aplica por tanto a la competencia en modelización y permite a los autores relacionar las tareas, los procesos, las fases de modelización y los niveles de complejidad (reproducción, conexión, generalización o reflexión). La metodología de este trabajo se basa en diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica, dirigida a alumnos chilenos de octavo grado, que incluye seis tareas clasificadas en tres etapas. La primera etapa de la unidad tiene como objetivo desarrollar la noción de sistema de referencia. La segunda etapa introduce la noción de dependencia de variables, y la tercera se centra en la interpretación y construcción de gráficas (en particular, en la interpretación de las variaciones). Una de las actividades descritas en el trabajo (planteada en la tercera parte) tiene la peculiaridad de que proviene de una noticia de prensa y promueve que los alumnos reflexionen, no solo sobre la gráfica, sino también sobre la interpretación del periodista a partir de los datos presentados (en el texto de la noticia se especula sobre la posible relación entre la disminución de la velocidad media de coches accidentados y el aumento del número de accidentes). Para el análisis, se observan las interacciones entre docente y alumnos y se caracterizan mediante cuatro indicadores asociados a la competencia en modelización: tareas, procesos, fases de modelización y nivel de complejidad. En particular, para analizar las fases de modelización, los autores se basan en la descripción del proceso de modelización establecido por Maaβ (2006), en el que se distinguen las fases de simplificación, matematización, trabajo matemático, interpretación y validación. Estas cinco fases se relacionan con ocho procesos y, así, los investigadores pueden identificar, en base a las acciones de los estudiantes durante sus interacciones con el docente, la fase del proceso en que se encuentran. Una de las singularidades de este trabajo es que la secuencia de tareas es la clave para desarrollar el proceso de modelización y que, además, el análisis de la experiencia realizada permite relacionar, en el marco del tema de interpretación de funciones, tareas con procesos y con fases del ciclo de modelización, aunque no se observa una correspondencia completa entre ellos.

El trabajo de Búa, Fernández y Salinas (2016) también pone el foco en el concepto de función, sin embargo, el enfoque es algo distinto: los alumnos obtienen un modelo (que toma la forma de una función) y lo aplican para dar respuesta a una serie de preguntas contextualizadas en un problema realista. El objetivo de la investigación es analizar, en base al análisis cualitativo de la experiencia diseñada, si los alumnos son capaces de generar un modelo matemático, y se comprueba el uso de competencias matemáticas asociadas al modelo obtenido. El punto de partida de la experiencia es una problemática de interés medioambiental: el vertido de petróleo en el mar, los alumnos deben averiguar la cantidad de petróleo vertido. La experiencia se desarrolló con alumnos de primer curso de bachillerato y, en la resolución de la tarea, podían hacer uso del programa GeoGebra. Además, la propuesta incluye una fase inicial de experimentación en el aula y toma de datos, simulando el vertido con aceite y agua. Durante esta fase los alumnos recogían datos que posteriormente les permitían construir un modelo funcional. En el trabajo se transcriben algunas conversaciones entre estudiantes y, a partir de éstas, se reconstruye el proceso de resolución. La segunda fase de la actividad consiste en, a partir de los datos tomados previamente, obtener la función de ajuste. En la tercera fase, los alumnos aplican el modelo obtenido a un caso real, la catástrofe del Prestige que, en 2002, se hundió en las costas de Galicia provocando una marea negra de grandes proporciones. En las conclusiones del trabajo se incide en la utilidad de las tareas de modelización para identificar dificultades de los alumnos al aplicar procedimientos conocidos en un contexto real, llegando a la conclusión de que la experiencia permite identificar la diferencia entre saber y saber hacer tratada por Gascón (2011). Estas conclusiones se confirman en estudios similares en los que los alumnos se enfrentar a modelizar otros fenómenos físicos tales como el alargamiento de un muelle sometido a un peso (Búa, Fernández y Salinas, 2015) o el enfriamiento de un termómetro previamente calentado (todos ellos están recogido en la tesis doctoral de Búa, 2016).

Las investigaciones realizadas por Ortega y Puig (2015, 2017) también van en la línea de las anteriores en el sentido de que se basan en el diseño y el análisis de un modelo de enseñanza basado en el uso de la modelización para trabajar contenidos del bloque de análisis: el aprendizaje de las familias de funciones y la comprensión del significado de los parámetros. Además, como en los trabajos derivados de la tesis de Búa (2016), las experiencias diseñadas se dirigen a alumnos de bachillerato y su diseño incluye una parte dedicada a la experimentación y toma de datos, ya que el punto de partida es también la experimentación de diferentes fenómenos físicos. Por otro lado, igual que en el trabajo de Solar et al. (2015), la propuesta se diseña de forma secuencial, de forma que la propia estructura ayuda a alumno a avanzar en el ciclo de modelización. Hasta aquí los puntos en común, la particularidad de estos trabajos, descritos en la tesis de Ortega (2018), radica en que el objetivo de la investigación es elaborar un *Modelo Teórico Local* (MTL) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) que permite conocer las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a trabajar con un modelo de enseñanza. Además, se concluye -confirmando estudios previos realizados por Puig y Monzó (2013)– que algunos aspectos del diseño del modelo de enseñanza –el análisis cualitativo del fenómeno y el conocimiento previo de los estudiantes sobre los parámetros de las funciones– resultan claves en las fases de matematización e interpretación del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2006). Otro elemento singular de la tesis doctoral de Ortega (2018) y que, de alguna forma, ha caracterizado diferentes trabajos de investigación realizados en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Valencia, es la introducción de herramientas digitales para, a partir de la toma de datos de fenómenos físicos, diseñar y analizar modelos de enseñanza en los que se trabaja el proceso de modelización para introducir conceptos ligados a las familias de funciones y el significado de los parámetros. Así, se han realizado investigaciones con diferentes entornos digitales de aprendizaje tales como GeoGebra, Matlab, tabletas o calculadoras gráficas, siempre conjugando entornos que permitieran a los alumnos tomar datos (a partir de la experimentación de fenómenos físicos) y también tratarlos (véase, además de los ya citados, Puig, 2013; Monzó y Puig, 2007 y 2010; y Monzó, Navarro y Puig, 2016). La tesis doctoral de Infante (2016) se enmarca también en este paradigma de investigación, con la particularidad de que los contextos de partida no son fenómenos físicos sino fenómenos ligados a situaciones económico-administrativas y, además, la investigación se realiza en el primer curso de un grado de educación superior.

En Diago, Ortega, Puig y Ferrando (2016) se comparan dos propuestas desarrolladas en el marco de un estudio centrado en el uso de dispositivos digitas (tabletas) en tareas cuyo punto de partida es un fenómeno que se analiza a través de la toma de datos. Sin embargo, cada una de las propuestas se enmarca en una visión de la modelización (en el sentido de Julie y Mudaly, 2007), analizándose las semejanzas y las diferencias entre dos modelos de enseñanza en los que, en ambos casos, el punto de partida es un fenómeno físico: el enfriamiento de un líquido y la distribución de la intensidad del sonido. El fenómeno de la distribución de la intensidad del sonido aparece también en Ferrando, Pedro y Puig (2017), aunque en este trabajo el objetivo es analizar una propuesta más dirigida que pretende introducir el concepto de función de dos variables. En efecto, tal y como se muestra en los resultados de dicho estudio, el concepto de función de dos variables, aunque no es un contenido curricular, puede ser accesible a los estudiantes de bachillerato cuando se presenta en un contexto adecuado.

En Ortega, Puig y Albarracín (2019) se continúa con línea de investigación centrada el uso de tabletas en el diseño e implementación de propuestas de enseñanza que parten de un fenómeno, pero con un objetivo complementario a los trabajados en investigaciones previas. En él se analiza la influencia de las características de las aplicaciones digitales utilizadas en las fases del ciclo de modelización en las que se pasa de la realidad a las matemáticas (o viceversa). En este trabajo se analiza la tarea del bote de la pelota, que consiste en que los estudiantes obtengan un modelo funcional que relacione el tiempo con la altura alcanzada por la pelota; así, se analiza cómo, durante la fase de matematización, el uso de una aplicación digital (Video Physics®) influye en las acciones de los estudiantes. Este trabajo, y también el realizado por Ruiz, Bosch y Gascón (2011), dan por tanto respuesta a la necesidad planteada por Grigoraş, García y Halverscheid (2011) de realizar investigaciones sobre la interacción de la tecnología en situaciones de modelización.

En las investigaciones que se han comentado hasta ahora, hay un elemento en común: todas ellas intentan conseguir que los conocimientos matemáticos que se estudian en la educación secundaria no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y procedimientos, sino que sean más bien, gracias a la articulación a través de la modelización, herramientas capaces de dar respuesta a cuestiones problemáticas de las que los estudiantes se puedan apropiar (a través del diseño adecuado de un contexto). En el trabajo de Fonseca, Gascón y Lucas (2014) abordan esta cuestión desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El punto de partida de la propuesta analizada en este trabajo es una cuestión generatriz que, en este caso, se relaciona con el área de ciencias de la salud ya que trata sobre el estudio de la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. En este estudio se postula que, a partir de esta cuestión, se pueden plantear una serie de cuestiones secundarias que no son sino simplificaciones del problema inicial. Estas cuestiones secundarias permiten estudiar y comparar diferentes modelos funcionales relativos a la situación inicial. Más adelante, en lo que los autores denominan "segundo nivel de modelización funcional", se amplía el modelo funcional anterior dando la oportunidad de introducir las familias de funciones de forma que, con el apoyo del programa GeoGebra, puede darse una respuesta parcial (pero algo más compleja) a la cuestión inicial. En el tercer nivel de modelización se introduce la variación de los parámetros y se completan las conclusiones previas. Las concatenaciones de las cuestiones y sub-cuestiones que aparecen en cada nivel es lo que, desde la perspectiva de la TAD, se conoce como *Modelo Epistemológico de Referencia* (véase también Ruiz et al., 2011).

En la tesis de Gallart (2016) se desarrolla una investigación centrada en cómo las tareas de modelización son un instrumento clave para desarrollar la competencia matemática. En este estudio, se presentan dos análisis que dan respuesta a dos cuestiones complementarias. Por un lado, partiendo del trabajo de Blomhøj y Jensen (2007), se analizan las actuaciones de los estudiantes durante el proceso de resolución, lo que permite observar que la resolución de tareas de modelización es clave para activar diferentes competencias matemáticas (véase Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015). Por otro lado, a través de un estudio cuantitativo basado en el diseño y el análisis de un test de competencia matemática, se evalúa de forma cuantitativa el impacto de introducir experiencias de esto tipo (véase Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014) llegando a la conclusión de que, efectivamente, la práctica a través de actividades de modelización repercute en una mejora significativa de la competencia matemática. La particularidad de las tareas de modelización utilizadas en la tesis de Gallart (2016) es que todas ellas consisten en actividades abiertas, contextualizadas en la realidad de los estudiantes, y que los alumnos deben abordar de forma autónoma, con una mínima ayuda por parte del profesor. Una de las actividades analizadas en el estudio consiste en pedir a los alumnos que se enfrenten a un problema auténtico que les afectaba directamente: debido a una plaga se talaron todos los árboles del patio de recreo y se les pidió a los estudiantes que reflexionaran sobre la necesidad de plantar nuevos árboles en el patio a fin de mejorar las zonas de sombra. En esta experiencia los estudiantes trabajaban en grupo y disponían de cuatro sesiones para trabajar de forma autónoma sobre los problemas planteados, en la quinta sesión de trabajo cada grupo debía exponer su resolución ante sus compañeros, esto implica que el grado de responsabilidad de los estudiantes se modifica respecto a la práctica de aula habitual y, por supuesto, eso implica cambios en el papel del docente.

En efecto, al implementar tareas de modelización en las que el objetivo central es el desarrollo de la competencia matemática y no –o no tanto– la introducción de un concepto o procedimiento matemático concreto, el papel del profesor es importante, ya que debe dejar suficiente autonomía a los estudiantes, pero sus intervenciones deben promover que los alumnos resuelvan la tarea con éxito. En Gallart, Ferrando y García-Raffi (2018) se caracterizan los roles que puede asumir el docente durante la gestión de una actividad de modelización. Esta caracterización amplía el trabajo de Burkhardt (2006), uno de los elementos identificados es la importancia de las últimas fases del proceso de modelización: la fase de comunicación de resultados y de validación. En efecto, cuando se implementa una tarea de modelización en el aula y los alumnos trabajan en grupos, se observan dos tipos de debates: el debate intra grupo, entre miembros de un mismo grupo que trabajan juntos en la misma tarea; y el debate inter grupo, entre miembros de distintos grupos que trabajan por separado en la misma tarea. Cuando, al finalizar una tarea, los alumnos comunican a sus compañeros la resolución realizada, se produce el debate inter grupo; en este punto, el papel del profesor como moderador y como experto resulta fundamental para que, del debate, se derive una institucionalización de conocimientos.

Otro de los aspectos importantes ligados a la práctica del profesor es el diseño de las tareas de modelización; en efecto, tal y como hemos comentado previamente, una de las dificultades de la introducción efectiva de la modelización en el aula radica en la falta de recursos y las dificultades que los profesores encuentran al implementar tareas de modelización que se alejan mucho de aquellas que acostumbran a proponer a sus estudiantes. En esta línea, Ferrando, García-Raffi y Sierra (2015) presentan una investigación en la cual el objetivo central es diseñar y analizar un material de enseñanza dirigido a profesores que no tienen experiencia en la implementación de tareas de modelización. El diseño descrito en este trabajo parte de algunos obstáculos ligados a la integración de la modelización en la enseñanza de las matemáticas que se trabajan en detalle en otros estudios (y que se comentarán más adelante). La particularidad de la propuesta presentada es que consta de dos materiales complementarios: una guía para el profesor con una descripción detallada de cómo llevar la actividad de modelización al aula, y una guía para el alumno que parte de una propuesta de actividad que se denomina “modelo cero”. Esta actividad es el punto de partida del proceso de modelización, el objetivo de este diseño es ayudar a los alumnos a abordar un proceso que, a priori, no han trabajado nunca, planteándoles un modelo inicial que ellos deben refinar a partir de sucesivos recorridos del ciclo de modelización. En las conclusiones de este estudio exploratorio se discuten los resultados de la experiencia tanto desde la perspectiva del alumnado como del profesor, y uno de los aspectos importantes que se apuntan es la importancia de la incorporación de un “modelo cero” que permite preservar el trabajo autónomo por parte de los alumnos y de la guía del profesor que sirve de ayuda al docente inexperto a gestionar el desarrollo de la actividad en el aula.

Las investigaciones descritas hasta ahora se centran en el análisis del proceso de resolución de tareas de modelización, o bien desde la perspectiva del profesor como gestor de la actividad matemática, o bien desde la perspectiva del alumno analizando, a partir de sus actuación, el proceso de resolución de la tarea. Sin embargo, las particularidades de las tareas de modelización permiten desarrollar investigaciones centradas en las dificultades, en particular en las dificultades de los estudiantes.

Investigaciones centradas en las dificultades

Cuando pensamos en las dificultades derivadas de la implementación de tareas de modelización surgen de forma espontánea tres posibles fuentes: los alumnos, los profesores –que pueden encontrar obstáculos al enfrentarse a un tipo de actividad nueva para ellos (véase Blum y Borromeo-Ferri, 2009)–, y el sistema, entendido como todo aquello que no depende del profesor ni del estudiante pero que, de alguna forma, impacta en la educación (programas educativos, recursos disponibles, organización de los centros, familias…). A continuación, se comentarán algunos trabajos cuyo punto de partida son los obstáculos que encuentran los alumnos en el contexto educativo. Más adelante se abordarán las dificultades institucionales y de los docentes.

En el trabajo de Vicente, Van Dooren y Verschaffel (2008), el objetivo central es identificar y analizar los obstáculos que encuentran los alumnos cuando se enfrentan a resolver problemas de modelización. El estudio aporta una serie de premisas que pretenden reconceptualizar el papel de la resolución de problemas realistas, se incide en la importancia de abandonar la creencia de que los problemas (en particular, los problemas de contexto) son meros ejercicios de práctica de procedimientos matemáticos conocidos. Para conseguir esto, es necesario diseñar actividades en las que el contexto y el conocimiento del alumnado respecto a éste sea necesario en el proceso de resolución y, además, el proceso de resolución requiera la comparación de procedimientos alternativos y su validación.

En Socas, Ruano y Hernández (2016) se basan en el Análisis Didáctico derivado del Enfoque Lógico Semiótico para estudiar las dificultades y errores de alumnos de Educación Secundaria que se enfrentan a situaciones de modelización. Para proceder a este estudio, que también incluye cuestiones que no están directamente relacionadas con la modelización, los investigadores diseñaron un cuestionario con numerosos apartados entre los cuales se incluyen seis cuestiones de modelización (los detalles sobre el diseño del cuestionario están en Ruano y Socas, 2001) y el cuestionario se pasó a 60 estudiantes de entre 16 y 17 años. El análisis de los errores se basa en el modelo de Socas (2007) y arroja resultados muy interesantes: se identifican tres orígenes de los errores, y el más frecuente es la ausencia de sentido que se manifiesta, por un lado, en la dificultad para finalizar con éxito razonamientos aritméticos o geométricos y, por otro, en las dificultades ligadas a los procesos de sustitución y generalización (propios del uso del lenguaje algebraico).

Estas dificultades de los estudiantes, en particular las dificultades o restricciones epistemológicas en la forma de entender y desarrollar la modelización matemática cuando ésta implica el uso del álgebra, derivan, según observa Bolea (2002) en su tesis doctoral, de lo que se denomina aritmetización del álgebra escolar, es decir, en que los procesos algebraicos se presentan habitualmente poniendo en foco en los procedimientos aritméticos. Bolea, Bosch y Gascón (2004) plantean como solución la integración de la modelización en la enseñanza del álgebra en la Educación Secundaria. Esta integración puede hacerse efectiva promoviendo el uso del álgebra como herramienta de modelización. Sin embargo, este enfoque está ausente en los libros de texto y, por tanto, también lo está en el sistema educativo, ya que los docentes carecen de los recursos necesarios para poder integrar la modelización en su práctica educativa. En García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch (2006), se incide en que, aunque la resolución de problemas en general, y la modelización en particular, aparece en los programas educativos oficiales como herramientas para integrar contenidos, existe el problema “de la desconexión de las matemáticas escolares”, que se refiere a la necesidad (y a las dificultades) de establecer relaciones entre los bloques del currículo. En la última parte de este trabajo se presentan y discuten las aportaciones de la tesis doctoral de García (2005), que diseña un marco epistemológico de referencia que, en el presente estudio resulta clave para diseñar la propuesta de los denominados *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI), cuyo punto de partida es una cuestión que requiere la construcción de un modelo y su posterior refinamiento, en base al cuestionamiento de su validez. La cuestión de partida en la propuesta de REI del trabajo de García et al. (2006) se delimita en un contexto socioeconómico: la elección de criterios para escoger un plan de ahorro. Los autores concluyen que este tipo de dispositivos didácticos, basados en secuencias, tareas y técnicas cuyo punto de partida es una cuestión inicial derivada de un problema real, pueden dar respuesta a la problemática de la desconexión entre contenidos y bloques curriculares.

En este apartado se han recogido los resultados de diferentes investigaciones centradas en el uso de la modelización desde la Educación Infantil hasta los cursos de preparación para los estudios superiores. Tal y como se ha mostrado, muchas de las investigaciones apuntan las oportunidades derivadas de la introducción de la modelización (que dan respuesta a las dificultades de los estudiantes) pero en otras se identifican algunas dificultades resultantes de las condiciones institucionales. Como se mostrará en el siguiente apartado, estos obstáculos para introducir la modelización de forma efectiva en las aulas no son un problema exclusivo de la educación escolar.

INVESTIGACIONES BASADAS EN EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LAS ENSEÑANZAS SUPERIORES CIENTÍFICO-TÉCNICAS

En la investigación desarrollada en la tesis doctoral de Barquero (2009) se apunta que los manuales científicos a menudo disimulan el carácter no lineal de la evolución de la ciencia y esto deriva en que, en los estudios superiores de ciencias experimentales, las matemáticas se enseñan desde una perspectiva basada, casi en exclusiva, en la introducción de conceptos, técnicas y teorías ya muy cristalizadas. Se trata de lo que Hernández (1995) denomina la "euclideanización"[i] de la enseñanza de las matemáticas, en referencia a la presentación formal y axiomática de los contenidos, donde se incide en el pensamiento lógico-deductivo como única herramienta válida para adquirir los conocimientos matemáticos. Esto implica que la modelización matemática, caso de introducirse, se hace en forma de aplicaciones de procedimientos matemáticos que se aplican a situaciones concretas, evitando así la formulación de preguntas que den lugar a cuestionar, por ejemplo, el grado de adecuación de un modelo respecto a otro. El resultado de esto es que, en estos estudios, las matemáticas parecen mostrarse como independientes del resto de disciplinas científicas, como un mero lenguaje formal que, aplicado correctamente, permite dar respuesta a problemas concretos (primero se enseñan las herramientas matemáticas y, posteriormente –y no sistemáticamente-, se aplican). Tal y como concluye la autora, tras un análisis de las guías docentes de diferentes asignaturas de matemáticas en los grados de Ciencias Experimentales, en estos estudios no llega a plantearse el problema didáctico de articular los contenidos matemáticos para integrarlos como instrumentos necesarios para modelizar cuestiones relativas al ámbito de la ciencia (Barquero, 2009, p. 289), relegando, si aparecen, las aplicaciones al final de los temas, como algo meramente anecdótico. Sin embargo, tal y como veremos a continuación, durante los últimos años tanto profesores de matemáticas de educación superior como investigadores en didáctica de la matemática, se están esforzando por dar respuesta a los efectos de lo que los autores denominan y caracterizan como "aplicacionismo" (véase Barquero, Bosch y Gascón, 2013 y 2014).

La preocupación por mejorar la enseñanza de las matemáticas en los estudios científicos técnicos no es reciente, ya Puig Adam (1979) comentaba en el prólogo de su libro de Cálculo Integral que "en la enseñanza de las matemáticas es necesario substituir el formalismo por el pensamiento intuitivo y las matemáticas han de estar en contacto con situaciones de la realidad". Y, sin embargo, esa revolución contra el formalismo defendida por Puig Adam no se produjo de forma generalizada. En efecto, 20 años después, Fortuny y Gómez (2002) todavía apuntaban que en la educación matemática superior la intuición y las aplicaciones seguían en segundo plano. A tenor de lo leído en diferentes trabajos, a finales del siglo XX las experiencias basadas en el uso de la modelización y las aplicaciones en la educación superior eran, al parecer, excepcionales.

En el trabajo de Sánchez-Pérez, García-Raffi y Sánchez-Pérez (1999) se expone y analiza el resultado de una experiencia didáctica llevada a cabo en una escuela de ingeniería técnica. La experiencia consiste en la realización de unas prácticas de modelización cuyo planteamiento está basado en problemas de ingeniería con un contexto real, con el objetivo de que los estudiantes (de primero) asuman la conveniencia (y la necesidad, como futuros ingenieros) de entender los conceptos matemáticos como herramientas para comprender mejor las técnicas propias de la ingeniería. En esta propuesta se pretende implicar a los alumnos a enfrentarse a un problema real y abordarlo mediante conocimientos matemáticos, evitando la resolución mecánica y promoviendo la comprensión de las matemáticas en relación al contexto del problema. En el trabajo se describen los detalles del diseño del curso de modelización, incluyendo no sólo la metodología de trabajo sino también ejemplos de las propuestas de prácticas de modelización (cuyos contextos son diversos, aunque todos ellos relacionados con el campo de estudio de la ingeniería de obras públicas). Además, en base a la documentación recogida durante la experiencia, se analiza cualitativa y cuantitativamente el resultado de la experiencia. En las conclusiones se incide en que las dificultades más importantes derivan, casi de forma exclusiva, de las restricciones organizativas de la Universidad y que, respecto a la respuesta del alumnado, esta es favorable ya que aumenta su motivación no sólo en la asignatura en la que se puso en marcha la experiencia, sino también en el resto, lo cual da cuenta del carácter interdisciplinar de esta experiencia basada en el uso de la modelización.

En la misma línea que los autores anteriores, Fortuny y Gómez (2002) presentan los resultados de una experiencia basada en el uso del proceso de modelización matemática como herramienta de innovación en la enseñanza de las matemáticas en la formación de los ingenieros técnicos. Se estudian la viabilidad y la eficiencia de implantar técnicas de modelización, a través del diseño de distintas unidades didácticas –que los alumnos trabajan en el aula de forma guiada, identificando la necesidad de conocer herramientas matemáticas concretas en contextos– y de proyectos –más complejos que las unidades didácticas, requieren trabajo autónomo fuera del aula–. Como principales resultados se destacan las aportaciones metodológicas referentes a aspectos cognitivos, epistemológicos y heurísticos del aprendizaje del alumnado. En la tesis doctoral de Gómez (1998) se recogen los resultados completos de esta y otras experiencias posteriores, analizando así la evolución del proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes participantes, incidiendo también en identificar los obstáculos derivados del cambio en el rol del profesor, su perfil formativo y la preparación del material.

Al hilo de las dificultades identificadas en Barquero (2009) –la secuenciación de los contenidos matemáticos basada en enseñar primero unos conocimientos elementales para luego aplicarlos, sin apenas reflexión, a situaciones prototípicas, lo que denominan “aplicacionismo”–, Barquero, Bosch y Gascón (2011) reflexionan sobre cómo estructurar la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de forma que la enseñanza se organice en torno a uno o a varios proyectos de modelización. Para ello, utilizan la noción antes mencionada de REI como dispositivo didáctico que permite integrar la modelización a partir de su estructura basada en la relación entre cuestiones y respuestas. Así, se presentan los detalles de un REI, así como las condiciones y la metodología de la experiencia desarrollada a lo largo de cinco cursos académicos con estudiantes de primer curso de ingeniería. Posteriormente, se reconstruye el desarrollo de la implementación del REI a partir de las respuestas de los estudiantes a las cuestiones derivadas de la cuestión inicial y, finalmente, se recogen tanto los aspectos positivos identificados como las restricciones institucionales halladas durante la experiencia. Respecto a las restricciones institucionales, los autores dedican el último apartado del artículo a describirlas distinguiendo entre las restricciones de nivel pedagógico y disciplinar (las limitaciones derivadas de la organización de la docencia en los grados, desde la distribución horaria hasta la organización de los grupos así como las restricciones de contenidos que pueden introducirse en las clases), las restricciones relativas al reparto de responsabilidades y a la autonomía asumida por los estudiantes. Así, Barquero et al. (2011) sistematizan en su investigación las observaciones apuntadas por Sánchez-Pérez et al. (1999).

En línea con esto, en la tesis de Serrano (2013) se desarrolla una investigación centrada no solo en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en la educación superior, sino las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la educación secundaria y la superior. La investigación se realiza en el marco de los estudios de ciencias económicas y, además de analizar la respuesta institucional a estas discontinuidades, se propone una respuesta propia basada en la tesis doctoral de Fonseca (2004). Posteriormente se presenta el diseño y el análisis de una propuesta de implementación de un REI basado en los trabajos de Barquero (2009) y Barquero et al. (2011).

A continuación, se describirán, en primer lugar, algunas investigaciones enfocadas a estudiar los obstáculos relativos a la práctica docente para, a continuación, comentar aquellos trabajos o actuaciones concretas que intentan dar respuesta a estas limitaciones a través de la formación del profesorado.

INVESTIGACIONES RELATIVAS A LAS DIFICULTADES DEL PROFESORADOS Y RESPUESTAS DESDE LA FORMACIÓN DOCENTE

Una problemática de interés en las investigaciones en el área de la modelización es determinar y analizar los condicionantes derivados de los programas educativos (las restricciones institucionales) y las dificultades identificadas por los docentes en la integración de la modelización. Cabassut y Ferrando (2013, 2015 y 2017) desarrollan una investigación comparativa entre Francia y España centrada en estos aspectos.

La investigación se desarrolla en tres fases. En primer lugar, los autores realizan un análisis comparativo de los programas educativos de Francia y España, identificando las diferencias y semejanzas, en particular, las que tenían que ver con el uso de la modelización (Cabassut y Ferrando, 2013). De este estudio se arrojan conclusiones interesantes. Pese a que en ambos países la modelización aparece en los programas educativos de Educación Secundaria como un conocimiento que debe ser enseñado, hay diferencias importantes respecto a los recursos disponibles en uno y otro país. En Francia, donde la educación está centralizada, existen recursos oficiales a disposición del profesorado que pueden resultar útiles para que los docentes incorporen la modelización de forma efectiva, en España esto no es una práctica generalizada (tal y como también apuntan el García, Wake y Maaβ, 2010).

La segunda fase de la investigación desarrollada consiste en diseñar un cuestionario dirigido a profesores, formadores y autores de recursos educativos cuyo objetivo era detectar las dificultades ligadas al uso de la modelización en Educación Primaria y Secundaria (Cabassut y Ferrando, 2015). El diseño de este cuestionario se basa en una revisión bibliográfica de diferentes trabajos centrados en los obstáculos derivados de la integración de la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Éste consiste en un formulario en línea compuesto por 85 preguntas de respuesta múltiple organizadas en varios apartados: datos biográficos, concepción y práctica de las matemáticas educativas, concepción y práctica de la modelización en la enseñanza, y dificultades ligadas al uso de la modelización. Este último apartado es el más amplio y se incluyen preguntas relativas a los elementos que, en base a estudios previos, resultan más problemáticos: el tiempo, la evaluación, la organización de las clases, el contexto, el trabajo de los estudiantes y los recursos.

En la tercera fase, se analizan las respuestas obtenidas a través de la versión en línea del cuestionario inicial (Cabassut y Ferrando, 2017). A partir de las respuestas de profesores de Educación Primaria, Secundaria y Superior y de formadores de profesores, el análisis en conglomerados permite separar la muestra identificando cuatro grupos de sujetos. La primera clase incluye a aquellos que manifiestan dificultades tanto con las matemáticas como con la modelización y son reacios a su uso en la enseñanza. La segunda comprende a los que son positivos frente a la modelización y no encuentran muchas dificultades, aunque no necesariamente la integren en su práctica habitual, en este grupo los docentes españoles están sobrerepresentados (esto concuerda con los resultados del análisis de relación entre variables que también se presenta en el estudio). El tercer grupo incluye los que son positivos respecto al uso de la modelización y neutrales respecto a las dificultades y el cuarto representa a aquellos que eran neutrales tanto respecto a la modelización como respecto a las dificultades (en este grupo había un número importante de docentes, muchos de ellos maestros de primaria, que manifestaban desconocer el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas en particular).

A partir de los resultados de esta investigación, se inició un trabajo de diseño de formación continua del profesorado que diera respuesta a las dificultades identificadas en el estudio (fundamentalmente ligadas al diseño de tareas y a la falta de tiempo y a la implicación de los estudiantes en este tipo de actividades). Así, en la Comunitat Valenciana se está implementando desde el curso 2017/18 un programa de formación continua dirigido a profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria en colaboración con el centro de formación continua específico CEFIRE CTEM, dependiente de la Conselleria d'Educació, Cultura i Sports de la Generalitat Valenciana. Algunos aspectos del diseño de este programa de formación, que incluye una parte de formación en línea y otra parte semipresencial, en la cual los docentes participantes deben implementar y analizar una propuesta de modelización en su clase, se detallan en Ferrando, Segura y Pla-Castells (2017).

Finalmente, se describirán algunos avances desarrollados en el marco del diseño de la formación inicial de maestros y profesores en el uso de la modelización en la enseñanza. En el trabajo de Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2018), los autores analizan el resultado de implementar una propuesta de modelización en la formación matemática de los futuros maestros. No se trata de enseñarles a usar la modelización sino más bien, en línea con las investigaciones realizadas en el ámbito de los estudios superiores científico-técnicos, de usar la modelización para enseñar matemáticas. Sin embargo, teniendo en cuenta el carácter profesional de los estudios de magisterio, es lógico pensar que la utilidad de implementar este tipo de propuestas va más allá del conocimiento matemático y, sin duda, promueven que los futuros maestros se familiaricen con la modelización. Los resultados del trabajo se basan en el análisis de las grabaciones de las conversaciones y de los registros escritos, así, los investigadores consiguen, basándose en el ciclo de modelización, una reconstrucción temporal del proceso de resolución seguido por los futuros maestros al enfrentarse a una tarea de modelización. El tipo de análisis desarrollado en este trabajo es muy similar (aunque no se presenta mediante el mismo esquema) al que es utilizado en el trabajo de Albarracín y Gorgorió (2019) y que consiste en identificar, a partir de las grabaciones obtenidas durante el proceso de resolución de una tarea de modelización, en qué fase del ciclo se encuentran los resolutores en cada momento. Recientemente se ha presentado una herramienta interactiva, descrita en Pla-Castells y García-Fernández (en prensa), que permite al investigador recoger, al tiempo que escucha las conservaciones grabadas, la fase del ciclo en que se encuentran los alumnos. Esta herramienta, sin duda, facilitará en el futuro el desarrollo de investigaciones basadas en el análisis de las interacciones entre estudiantes o entre estudiantes y profesor. Una de las conclusiones valiosas del trabajo de Montejo-Gámez et al. (2018) es que el uso de tareas de modelización permite que afloren algunas dificultades de los futuros maestros que, posiblemente, no serían percibidas trabajando tareas rutinarias, en particular dificultades ligadas a la medida de magnitudes y los procesos asociados (incluida la toma de medidas *in situ*).

El dispositivo didáctico denominado REI ya comentado previamente se ha utilizado también en investigaciones sobre la formación continua de profesores. En Barquero, Bosch y Romo (2018) se propone y describe el diseño y la implementación de los denominados REI para la formación del profesorado (REI-FP) en un curso en línea y a distancia dirigido a futuros profesores de Educación Secundaria y Universitaria de México, en un curso denominado "Procesos de Institucionalización de las Matemáticas Escolares". Se pretende conectar los resultados de investigaciones con las dificultades de la práctica educativa para la enseñanza de la modelización matemática. La problemática abordada en dicho curso parte de cuestionar cómo incluir la modelización en el proceso de enseñanza y cómo asegurar su institucionalización y supervivencia a lo largo del tiempo. Así, en la experiencia se describe que, en la primera fase, los participantes se enfrentaron a resolver una tarea de modelización y, en la segunda fase, debían reflexionar sobre cómo implementar esa misma tarea en un aula; por último, debían implementarla y reflexionar sobre los resultados. Los resultados del trabajo muestran que resulta muy efectivo comenzar por proponer una tarea de modelización a los futuros maestros y que la tercera fase, la de implementación, es particularmente efectiva para crear el medio apropiado con los profesores para indagar sobre la existencia de restricciones institucionales para la implementación de tareas de modelización en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los aspectos que, sin duda, pueden contribuir al avance la investigación en modelización y en la integración efectiva de ésta en la educación matemática es la colaboración con investigadores y docentes de otros países a través de proyectos internacionales y la difusión de trabajos de investigación y de propuestas de innovación a través de publicaciones especializadas. En García y

Ruiz-Higueras (2011) se incide en cómo la comunidad de investigación centrada en la modelización matemática puede ayudar a los docentes a mejorar sus prácticas de enseñanza a través de la modelización. El punto de partida es la descripción de un proyecto de colaboración financiado por la Unión Europea (proyecto LEMA, acrónimo de *Learning and Education through Modelling and Applications*) cuyo objeto es diseñar un programa de formación de profesores de primaria y secundaria en modelización para su uso en diferentes países europeos, considerando, por supuesto las particularidades sociales y culturales de cada país. En el trabajo se analizan los resultados del proyecto LEMA y se reflexiona sobre el impacto que estos pueden tener en la práctica de los profesores. En este punto conviene destacar la participación de algunos investigadores españoles en proyectos internacionales que, desde diferentes perspectivas, tienen entre sus objetivos el diseño de recursos que ayuden al profesorado a integrar la modelización en la enseñanza de las matemáticas, tales como el ya citado proyecto LEMA, o los proyectos PRIMAS[ii] (véase Dorier y García, 2013) y MASCIL[iii] (véase García, Romero, Abril y Quesada, 2018).

Respecto a la difusión de los avances realizados en nuestro país, conviene valorar el papel de las revistas especializadas. Un ejemplo es, desde el año 2008, la revista *Modelling in Science, Education and Learning*[iv], publicada en línea por la Universitat Politècnica de València. La revista, que se publica únicamente en línea (todos los artículos están disponibles en acceso abierto), recoge las contribuciones de profesores, tanto de Educación Secundaria como de Educación Superior, que describen el diseño y desarrollo de experiencias basadas en el uso de la modelización. En su origen la revista nació con un carácter nacional y estaba dirigida, fundamentalmente, a la comunidad de profesores de matemáticas de secundaria y universidad, pero progresivamente, gracias a la difusión derivada de las Jornadas de Modelización Matemática que se han celebrado cada dos años desde el año 2010, la revista ha ido ganando visibilidad y se ha enriquecido con trabajos que tienen un carácter investigador y que abordan más niveles educativos. Además, en los últimos años, el comité editorial se ha beneficiado de la presencia de investigadores franceses, alemanes y brasileños.

CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo, se han recogido los avances desarrollados en trabajos diversos con la característica común de que todos ellos se centran en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Como se ha mostrado, la riqueza de la integración de la modelización en la educación matemática radica en que ésta permite abordar investigaciones desde dos puntos de vista complementarios: el enfoque de la investigación basada en el diseño de tareas de modelización y, por tanto, de modelos matemáticos que ayuden a dar una formación matemática sólida para todos los alumnos; y el de la investigación didáctica centrada en el uso de la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero, además, es justo reconocer el esfuerzo importante que nuestros investigadores han realizado durante la última década para dar una perspectiva internacional a los avances realizados en nuestro colaborando en proyectos y comités de organización de eventos científicos de carácter internacional, sin duda estas sinergias han resultado claves para darle visibilidad y entidad a los avances realizados en nuestro contexto.

Así, la investigación alrededor del uso de la modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es amplia, y, por descontado, quedan muchas líneas de investigación abiertas, tanto de corte teórico como empírico. En efecto, es importante cerrar algunas reflexiones teóricas sobre la naturaleza de los modelos ya que, cuando nos enfrentamos a analizar producciones de estudiantes, uno de los problemas que encontramos es identificar los aspectos intrínsecos de sus respuestas que se ajustan a lo que entendemos como modelo (¿cómo diferenciarlo de los procesos o los conceptos que subyacen en la resolución?). Hay algunos estudios teóricos en esta línea (Lesh y Harel, 2003), pero ciertamente se pueden enriquecer.

Respecto a los estudios de carácter empírico y volviendo a la importancia de los contextos, es importante seguir avanzando en la relación entre los contextos de las tareas de modelización y los procesos de resolución. Esto, indudablemente, resultaría clave para dar respuesta a cuestiones relativas al diseño de tareas. Obviamente, para abordar este tipo de estudios convendría centrarse en un tipo concreto de tareas en las que fuera posible identificar elementos en el contexto (variables) que pudieran relacionarse con estrategias de resolución. Los problemas de estimación del número de elementos en un recinto acotado pueden ser útiles en esta línea, ya que, en base a los estudios realizados hasta ahora, se cuenta con información suficiente respecto a las estrategias de resolución posibles y, dado que se trata de problemas relativamente sencillos en su formulación, parece factible aislar elementos en el contexto que puedan relacionarse con los procedimientos de resolución.

Se constata, a partir de las descripciones de diferentes investigaciones que, a menudo, en las experiencias basadas en implementar tareas de modelización los alumnos suelen trabajar en grupo y, tal y como se ha descrito, se han realizado avances relativos del profesor durante la gestión del trabajo en grupo. Sin embargo no hay muchos estudios centrados en analizar las interacciones entre los estudiantes al resolver una tarea de modelización y, los que hay, son a pequeña escala, se trata de estudios de casos, incluso, en ocasiones, en experiencias realizadas fuera del aula ordinaria. En efecto, desarrollar este tipo de trabajos es complicado porque se requiere recabar mucha información a partir de las experiencias de aula (grabaciones de vídeo y de voz, al menos) y, además, el análisis de la información recogida necesita mucho tiempo. Sin embargo, ya se están implementando algunas herramientas de recogida y análisis de datos que pueden facilitar mucho la tarea de los investigadores y ayudarles a obtener resultados en esta dirección.

Finalmente, es necesario completar algunas reflexiones sobre cómo integrar la enseñanza basada en la resolución de tareas de modelización matemática en la práctica docente, en particular en la educación obligatoria. En efecto, según evidencian algunas de las investigaciones comentadas, la introducción de la práctica de la modelización parece repercutir positivamente en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos, pero, además, promueve que las matemáticas se entiendan desde un punto de vista funcional, como una herramienta eficaz para el análisis de cuestiones sociales o culturales. Así, si tal y como se ha comentado en la introducción las matemáticas han de aprenderse a través de su uso, la modelización resulta indispensable en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Agradecimientos

La autora agradece el apoyo financiero del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación orientada a los Retos de la Sociedad de la Agencia Española de Investigación-FEDER a través del proyecto EDU2017-84377-R.

Referencias

Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.

Albarracín, L., Ferrando, I. y Boliart, J. (2017). Estudio de los modelos matemáticos producidos por alumnos de enseñanza obligatoria al resolver un problema de Fermi. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 109-118). Zaragoza: SEIEM.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *RELIME, 16*(3), 289-315.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2015). On the role of inconceivable magnitude estimation problems to improve critical thinking. En U. Gellert, J. Giménez, C. Hahn y S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 263-277). Cham, Suiza: Springer.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2018). Students estimating large quantities: from simple strategies to the population density model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(10), em1579.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in Primary Education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 27*(2), 45-57.

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols … More objects, more context, more actions. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 35-44). Boston, EE. UU.: Springer.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Aymerich, À., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2017). Modelling with statistical data: Characterisation of student models. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 37-47). Cham, Suiza: Springer.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339-352.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 33*(3), 307–338.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 83–100.

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM, 50*(1-2), 31-43.

Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 45-56). Boston, EE. UU.: Springer.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling up" - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En M. Bosch (Ed.), *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Barcelona: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull y ERME.

Bolea, P. (2002) *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95.

Búa, J. B. (2016). *Modelización y matematización en el contexto de tres fenómenos físicos* (Tesis doctoral no publicada). Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Búa, J. B., Fernández, M. T. y Salinas, M. J. (2015). Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso. *Educación Matemática, 27*(1), 91-122.

Búa, J. B., Fernández, M. T. y Salinas, M. J. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *RELIME, 19*(2), 135-164.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM, 38*(2), 178-195.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (2013). Modelling in French and Spanish syllabus of Secondary Education. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 1845-1854). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (2015). Conceptions in France about mathematical modelling: Exploratory research with design of semi-structured interviews. En K. Krainer, K. y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 827-833). Praga, República Checa: Charles University y ERME.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in teaching modelling: A French-Spanish exploration. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 223-232). Cham, Suiza: Springer.

Diago, P., Ortega, M., Puig, L. y Ferrando, I. (2016). Diseño e implementación de tareas de modelización con iPad®'s: un enfoque dual. *Modelling in Science Education and Learning, 9*(1), 35-56.

Dorier, J. L. y García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM, 45*(6), 837-849.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema, 31*(57), 220-242.

Ferrando, I., García-Raffi, L. M. y Sierra, L. (2015). A proposal of action to introduce modelling in secondary classroom. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20*, 47-60.

Ferrando, I., Pedro, M. L. y Puig, L. (2017). Enseñar matemáticas a partir de un fenómeno físico, un ejemplo práctico para introducir la representación de funciones de dos variables. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 556-564). Madrid: FESPM.

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño de un curso de formación en línea para introducir la modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 568-576). Madrid: FESPM.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York, EE. UU.: Springer.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Vigo, Vigo.

Fonseca, C., Gascón, J. y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *RELIME, 17*(3), 289-318.

Fortuny, J. M. y Gómez, J. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *UNO, 31*, 7-23.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 143-162.

Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Politècnica de València, Valencia.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *NÚMEROS, 88*, 93-103.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2018). Análisis del rol del profesor en la gestión de una actividad de modelización mediante un estudio de caso único. *Ensayos, 33*(2), 47-62.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi Problems. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 265-275). Cham, Suiza: Springer.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén, Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM, 38*(3), 226-246.

García, F. J., Maaß, K. y Wake, G. (2010). Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Boston, EE. UU.: Springer.

García, F. J., Romero, R., Abril, A. M. y Quesada, A. (2018). Proyecto europeo "Matemáticas y Ciencias para la Vida". *Alambique, 92*, 77-79.

García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2011) Modifying teachers' practices: The case of a european training course on modelling and applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 569-578). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 9-50.

Gómez, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.

Grigoraş, R., García, F. J. y Halverscheid, S. (2011). Examining mathematising activities in modelling tasks with a hidden mathematical character. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 85–95). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Hernández, E. (1995). Métodos y contenidos de la enseñanza de la matemática en la universidad. *Tarbiya, 10*, 55-64.

Infante, J. F. (2016). *La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias Administrativas y Económicas en Colombia* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de València, Valencia.

Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). Boston, EE. UU.: Springer.

Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes. Philosophical Papers Vol. 1.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 157-189.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). Gijón: SEIEM.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2016). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. *UNO, 72*, 67-74.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos, 24,* 26-29.

Monzó, O. y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, *26,* 4-6.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115–124). Atenas, Grecia: The Hellenic Mathematical Society.

Ortega, M. (2018). *Un modelo de enseñanza de la modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de València, Valencia.

Ortega, M. y Puig, L. (2015). Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota. *Modelling in Science Education and Learning, 8*(2), 67-78.

Ortega, M. y Puig, L. (2017). Using modelling and tablets in the classroom to learn quadratic functions. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 565-575). Cham, Suiza: Springer.

Ortega, M., Puig, L. y Albarracín, L. (2019). The influence of technology on the mathematical modelling of physical phenomena. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs* (pp.161-178). Cham, Suiza: Springer.

Pla-Castells, M. y Ferrando, I. (en prensa). Downscaling and upscaling Fermi problems. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.

Pla-Castells, M., Ferrando, I. y Robledo, M. F. (2019). A grandes problemas, grandes soluciones. *Aula de innovación educativa, 282,* 44-48.

Pla-Castells, M. y García-Fernández, I. (en prensa). MAD Tracker. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática.* Artículo aceptado para su publicación

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2-3), 393-404.

Pollak, H. O. (1977). The interaction between mathematics and other school subjects (Including integrated courses). En H. Athen y H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (pp. 255–264). Karlsruhe, Alemania: ICME.

Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. En H. Freundenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Segunda edición.* México D. F., México: CINVESTAV.

Puig, L. (2013). Modelización con datos reales. En FESPM (Eds.), *Actas de las XVI JAEM, Palma 2013.* Recuperado de: https://www.uv.es/puigl/2013jaem.pdf

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México, D. F., México: Trillas.

Puig Adam, P. (1979). *Cálculo integral.* Madrid: Gráficas Lormo.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (Ed.) (2009). *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas.* Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación.

Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4.º de ESO. En M. M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 239-265). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, … y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización matemática en la Escuela Primaria: la reconquista escolar de dominios de realidad. En R. Pérez-Gómez (Ed.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87-119). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *RELIME, 14*(1), 41-70.

Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6, 2*(1), 95-118.

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer.

Sánchez-Pérez, E. A, García-Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez, J. V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 119-129.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education* (pp. 311-343). Hillsdale, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Ramon Llull, Barcelona.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *AIEM, 9*, 21-41.

Solar, H., Deulofeu, J. y Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 191-210.

Stohlman, M. S. y Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International, 2016*, Article ID 5240683, 9 páginas.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Didactics of Mathematics in the Netherlands. En W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti., R. Sträßer y M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics. ICME-13 Monographs* (pp. 57-94). Cham, Suiza: Springer.

Vicente, S., van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación, 20*(4), 391-406.

---

[i] A esta idea se refiere también Lakatos (1978) al analizar la naturaleza de las matemáticas.

[ii] Acrónimo de Promoting Inquiry in Mathematics and Sciences

[iii] Acrónimo de Mathematics and Science for Life

[iv] https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

TEACHING AND LEARNING MATHEMATICAL MODELLING: A BROAD AND DIVERSIFIED BUT SPECIFIC RESEARCH FIELD

Enseñar y aprender modelización matemática: un campo de investigación amplio y diversificado pero específico

Carreira, S.

Universidade do Algarve y UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Abstract

As a field of research, the teaching and learning of mathematical modelling and applications has been rapidly growing over the last decades, thanks to a significant involvement of researchers, presenting papers in specialized and broad-spectrum conferences in mathematics education. The number of theoretical perspectives has increased as well as the number of theoretical concepts developed. In fact, diversity and plurality are seen as distinctive features of this young field of research. This conference focuses on reviewing this theoretical expansion and, more particularly, on the work produced at the CERME conferences promoted by the European Society for Research in Mathematics Education. Then I will suggest the possibility of devising a common conceptual ground in the existing research that may play a key role in further conceptual advances and possible combinations of theoretical concepts: the development of the modeller thinking.

Keywords: *modelling and applications, theoretical perspectives, theoretical concepts, modeller thinking development.*

Resumen

Como campo de investigación, la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática y las aplicaciones ha crecido rápidamente en las últimas décadas, gracias a la significativa participación de los investigadores, presentando artículos en conferencias especializadas y de amplio espectro en educación matemática. El número de perspectivas teóricas ha aumentado y también el número de conceptos teóricos desarrollados. De hecho, la diversidad y la pluralidad se consideran características distintivas de este joven campo de investigación. En esta conferencia me centraré en revisar esta expansión teórica y me focalizaré, en particular, en el trabajo producido en las conferencias CERME promovidas por la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática. A continuación, como conclusión de este trabajo, propondré la posibilidad de trabajar en una base común derivada de la investigación existente que pueda contribuir a una teorización más general y combinar distintas conceptualizaciones teóricas: el desarrollo del pensamiento modelador.

Palabras clave: *modelización matemática y aplicaciones, perspectivas teóricas, conceptos teóricos, desarrollo del pensamiento modelador.*

INTRODUCTION

The integration of *mathematical modelling and applications* in the teaching and learning of mathematics has been advocated for several decades and it is currently an international curricular trend leading curricular reforms (e.g. Common Core State Standards for Mathematics, in the USA), as it entails some of the essential skills to be developed in students from primary school to higher education. Some impulse for its inclusion in school practices has also been given by the PISA

Carreira, S. (2019). Teaching and learning mathematical modelling: a broad and diversified but specific research field. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 65-87). Valladolid: SEIEM.

international tests and framework (OECD, 2013, 2019; Wake, Foster, & Swan, 2015). Nonetheless, despite a history of development and growth that is far from negligible, several researchers, including many of its most influential advocates, acknowledge that the spread of mathematical modelling in classes around the world is far from corresponding to what was expected and needed (Blum, 2011; Blum & Borromeo-Ferri, 2009). This does not mean that the situation is identical in all countries and that the presence of mathematical modelling in schools and higher education has the same consistency and the same permeation in curricula, assessment, textbooks and in the mathematics teaching practices.

The history of the international research dedicated to the teaching and learning of mathematical modelling is also rich. It would be an inglorious task to summarize this history in scanty pages and that is obviously not my intention in this article. There are, however, some nodes of the history that I would like to come up with in a concise way so as to reflect in some detail on the direction of progress, especially with regard to the evolution of theoretical perspectives in the research on teaching and learning mathematical modelling and applications. I will start by mentioning some elements that I believe are essential in the evolution of the research and development community which today constitutes an internationally active Affiliated Study Group of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA) and its series of bi-annual conferences. Then I will talk about some contributions from researchers who have been working to achieve a mapping of the trends, advances and perspectives that are most fertile in the current research. For this, I will refer to an article by Geiger and Frejd (2015), then to a review made by English, Ärlebäck, and Mousoulides (2016) and finally to the contributions of Stillman, Blum, and Kaiser (2017), and Stillman (2019), who jointly offer a fairly complete view of the state of the art of recent research.

The next step leads me to the Thematic Working Group dedicated to Applications and Modelling, which has been part of the biannual conferences organized by ERME. This is a context in which I have been highly involved over the last few years, particularly in the organization, coordination and empowerment of the group, either as a leader or as a co-leader. In this context, I will try to give my reading of the work of some of its most active and productive participants, in terms of their theoretical perspectives and elected concepts, and try to envisage a certain guideline that allows us to launch an expectation of a future course.

This future direction can continue in many different ways as the field is becoming well established and sustained; in my view, one way of advancing has to do with keeping track of the essence and specificity of the modelling process in the context of mathematics education while developing and synthesising promising theoretical concepts to guide our research and practice.

ICTMA CONFERENCES – MEETINGS OF RESEARCHERS AND PRACTITIONERS ON MATHEMATICAL MODELLING

My first participation in the ICTMA series of conferences took place in 1991, at ICTMA 5, which was held in the Netherlands under the auspices of the Freudenthal Institute. At that time, I was doing my master’s degree in mathematics education and teaching in secondary education. At the conference, in collaboration with colleagues from the University of Lisbon, I organized a workshop on modelling physical phenomena related to oscillations and waves, using the computer as a tool for the representation and mathematical exploration of such physical phenomena. Later I would conclude my master’s thesis on the teaching of trigonometry in a context of mathematical modelling and applications, based on a teaching approach with two classes of 10th grade students. In my study, I defined three research aims that I here present in an abridged way: i) to characterize students’ cognitive processes in real world problems involving mathematical models of trigonometry; ii) to understand the influence of extra-mathematical contexts in the learning of trigonometric models; and iii) to identify the role of the spreadsheet in mathematical modelling tasks. I will return to this point later to reflect on the possibilities that are currently open to various alternative ways of investigating issues similar to these. In the meantime, I would like to emphasize that my first impression of that conference, which has been reinforced in many other ICTMA conferences over the years, was that of a tuneful and fruitful interaction between mathematicians, applied mathematicians, and mathematics educators, including teachers from primary to tertiary, and researchers strongly committed to advocating the introduction of applications and modelling at all levels of education.

Kaiser, Blum, Borromeo-Ferri, and Stillman (2011) present a brief history of these conferences in one of the books that have been published after each of them, which currently constitute the book series offered by the Springer publishing house, under the name of *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. In this chapter, the authors speak of the special flavour of this conference, effectively created by attracting researchers from all over the world, both from mathematics and mathematics education. In the first case, the contributions of prominent applied mathematicians who are enthusiasts and proponents of the teaching of mathematical modelling stand out. Such contributions are invaluable in bringing the thinking of the mathematical modeller who acts in professional scenarios in doing mathematical modelling, that is, they constitute a vision from within the mathematical modelling activity brought by their protagonists. This vision of mathematical modelling continues to inspire the educational thinking and to be a strong reference for how it may be introduced in mathematics teaching and learning. Nevertheless, the various actors seem to agree that professional mathematical modelling cannot be traced back to the educational context, particularly because students do not experience the actual practice of professional settings and because their learning is situated in a school context (Jablonka, 2007; Schwarzkopf, 2007). In a way, the *modeller thinking* is one of the important influences of the ICTMA community on how to approach mathematical modelling in the context of mathematics education. It is this form of thinking that, although seen as specific, can cross multiple communities and boundaries, as Stillman et al. (2017, p. 2) put it:

> The teacher, researcher and mathematician are from distinct communities of practice and social worlds with different viewpoints, but all could be involved in the resolution of the same scientific problem, for example, when modelling how a modeller gets at the nub of a problem so the essence of a real-world situation becomes tractable mathematically.

The knowledge that has been generated in the ICTMA conferences reflects the view that the modeller thinking can be recognized, discussed, investigated and promoted in different communities of practice. And this connects to the fact that a relevant space is often dedicated to the analysis, discussion and sharing of mathematical modelling problems, rich situations for the construction and development of models, interesting tasks to explore and use with students, and modelling contexts involving several disciplines and subject domains. In short, at these conferences, opportunities are offered to explore and engage with materials, or to examine tasks and problems and ways of implementing them in the educational context. In my judgement, this openness to the generation and sharing of worked examples of mathematical modelling tasks is one of the undeniable benefits that this community has been able to bring about and to nurture. And this wealth of ideas is essential to illustrate and realize what I am naming as the modeller thinking.

Another fundamental idea is that in this series of conferences, as it has happened in several other international forums dedicated to the teaching and learning of mathematical modelling, the diversity of theoretical perspectives, concepts and research approaches has continuously and quickly increased. Kaiser et al. (2011) refer to this diversity as a striking feature of the scientific debate: a proliferation of foci, aims, methods and also theoretical orientations.

In one of the books in the ICTMA series, Geiger and Frejd (2015) presented an analysis of the evolution of the contributions contained in these conferences over a period of 10 years (2002-2011), also including in that collection the important 14th ICMI Study. The authors aimed to identify the diversity of theories and the way in which they arise in this research field. For their analysis they made a distinction between local theories and general theories. This distinction echoes other authors' ideas, such as Bikner-Ahsbahs and Prediger (2010), who refer to the theory of didactical situations as an example of a general comprehensive theory and to the modelling cycle as a local conceptual tool.

For the group of local theories, the classification of theoretical perspectives, proposed by Kaiser and Sriraman (2006), led to the following list:

- Modelling cycle
- Modelling competency
- Emergent modelling
- Models and modelling perspective
- Approaches for authenticity and defining modelling tasks

For the group of general theories, some of the approaches deemed to be well-established theoretical approaches in the wider field of mathematics education research were considered:

- Radical constructivism
- Social constructivism
- Embodied cognition
- Discursive and semiotic approaches
- Sociological approaches
- Neuroscience approaches
- Other approaches (such as critical mathematics education, feminist approaches)

One of the conclusions drawn by Geiger and Frejd was that the so-called local theories showed a much broader presence than the so-called general theories. In addition, a tendency has been noted, over the years, for a greater theoretical foundation of the research work, both as a way of justifying the research aims and as a means of putting the findings against previous results in the research literature. The authors interpret this result as an evidence of a greater maturity of the research field. They also considered that the preponderance of local theories over general theories suggests that theoretical positions coming from within the field of study (home-grown theories) can already be established. But they also add that these local theories are strongly condensed around two approaches: the modelling cycle and modelling competencies, which arise more often than all the general theories endorsed. This result therefore seems to suggest a dominance of a perspective that can be synthesised as the modelling cycle and modelling competencies.

In this regard, we may find in Frejd's doctoral thesis (2014) a similar analysis but there he also mentions that several studies adopting general theories do not explicitly use the modelling cycle, with the exception of the research drawing on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and on Critical Mathematics Education. Thus, it seems that the concepts of modelling cycle and modelling competency tend to gradually give rise to an autonomous perspective.

In their chapter, Geiger and Frejd (2015) show yet another trend, that of a decrease in the number of papers more related to the concerns and contributions of practitioners. They presume that this trend may be the result of a greater pressure from the academy, driven by the growing need for publication of research-oriented papers throughout the academic world. At the same time, they observe a scarcity of purely theoretical articles and conclude that the generation of new theory seems to be hampered, although they identify white spots that offer potential for further theoretical developments.

In drawing a lesson from these results, it seems possible to say that the large diversity of approaches and perspectives is becoming less obvious and that this is the result of two pressing causes: some local theories tend to weaken and coalesce around one or two theoretical conceptualizations and the contributions of practitioners (whether mathematicians, scholars or school teachers) are being overlooked in favour of the focus on applied research. In other words, the inclination towards research and development is no longer as strong as it was in the genesis of ICTMA, given the decrease in contributions seeking to inform and support practitioners, that is, the kind of “empirical, descriptive or polemic/discussion chapters that aim to inform teaching and learning practice at any level of education” (Geiger & Frejd, 2015, p. 165).

PME AND ICME – MATHEMATICAL MODELLING IN THE MIDST OF OTHER RESEARCH TOPICS AND RESEARCH GROUPS

The annual conference promoted by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) attracts researchers from all over the world, being one of the most prestigious meetings in mathematics education research. PME is a broad-spectrum conference, so it is normal that research related to the teaching and learning mathematical modelling represent only a small part of the total. Recently, English et al. (2016) conducted an extensive review of the PME Proceedings covering 10 years of PME conferences (2005 to 2015). They selected a total of 37 papers for their review and analysis. The categories defined to organize this review were: perspectives on models and modelling; curricular and instructional approaches in fostering modelling competence; the inclusion of generic processes; and approaches to models and modelling in teacher education.

One of their first remarks is that they found a great diversity of perspectives on the notions of model and modelling over the 10-year period considered. Before starting their analysis of the collected works, the authors refer the three theoretical perspectives that they recognize as most popular in the literature: modelling cycles; modelling competency or modelling competencies; and the perspective labelled as models and modelling, which has in its genesis the idea of model-eliciting activities (MEAs).

Overall, they conclude that there is a substantial presence of articles that have adopted the models and modelling perspective (MMP) proposed and advanced by Lesh and colleagues for several years (Lesh & Doerr, 2003; Lesh & English, 2005). These articles addressed different topics and research questions but all of them have shown the use of MEAs in the studies they reported. The second perspective they discern is related to the modelling cycle, which according to the authors is a conceptualization of the modelling process that has shown to be highly productive. They found that although there are several different schematizations of the modelling cycle available, some have emerged as more commonly used: those proposed in Blum and Leiß (2007) and in Galbraith and Stillman (2006).

The concept of modelling competency as an analytical framework is also observed in the papers reviewed and makes a third theoretical trend. Others have also been acknowledged, including: Realistic Mathematics Education (RME), Mathematical and Cognitive Perspectives, and Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Here, unlike the classification used by Geiger and Frejd (2015), the authors do not make a distinction between local theories and general theories, but rather try to signal the popularity and dissemination of some theoretical perspectives, observing that two perspectives seem to lead the field: on the one hand, the framework of the modelling cycle and modelling competencies and, on the other hand, the models and modelling perspective based on the notion of model-eliciting activities.

Also within the work comprised in PME, an overview of the state of the art on modelling and applications can be found in a Research Forum carried out in PME 38. It was dedicated to the identification of perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling in terms of: mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education aspects (Cai et al., 2014). The introductory piece of this forum touches on the idea of a "conceptual fuzziness" (Lesh & Fennewald, 2013) due to the lack of a decisive specification of what counts as mathematical modelling and what cannot be included under that label. This is accentuated by the fact that the researchers working in the field apparently do not agree on a conceptualization of the mathematical modelling process. According to the authors, there is, nevertheless, a common understanding on the premise that mathematical modelling involves the formulation of a question and/or a problem originated in a real-world situation. However, much seems yet to be known about the cognitive processes, that is, the type of thinking and reasoning that students produce when they are solving modelling problems. And this was one of the themes addressed in the forum, within the cognitive perspective presented and characterized by Borromeo-Ferri and English (in Cai et al., 2014).

A special emphasis was placed on the mathematical perspective of modelling. It is interesting to know what mathematicians think about the way to help students becoming competent mathematical modellers. Regarding this last point, Pelesko (in Cai et al., 2014) begins by giving his definition of mathematical modelling, which means a practitioner's view: "mathematical modeling is the art or process of constructing a mathematical representation of reality that captures, simulates, or represents selected features or behaviors of that aspect of reality being modeled" (p. 150). He then offers a number of clues about what is relevant to the modeller, which are grouped together in the designation of thought tools for modelling. These cognitive tools consist of mathematical thought tools, observational thought tools, and translational thought tools. A mathematical thought tool is any mathematical tool that allows the modeller (or student) to think mathematically or do something in the field of mathematics. The observational thought tools derive from the experience of working with diverse problems, namely allowing the modeller (or student) to find patterns, to establish causal relationships, etc., and therefore are related to thinking about the real world. Finally, the translational thought tools include knowing various ways of mathematically translating phenomena, which has to do with the ability of the modeller (or student) to translate assumptions about reality into mathematics and also mathematical results into assertions about the real world. According to Pelesko, one of the limitations that may be noticed in the modelling cycle (in this case, the cycle that is mentioned in the *Common Core State Standards for Mathematics* -CCSSM- in the USA) is that it conceals or buries much of the work that is carried out with the use of observational thought tools and translational thought tools, while it very explicitly considers the need for mathematical tools. This leads to his recommendation that the thinking tools of the mathematical modeller should be explicitly considered and valued in the teaching and learning of modelling: "Identifying, unpacking, and learning how to equip our students with these sets of tools is an essential step in learning how to teach mathematical modeling" (p. 151).

In accordance with this view, Borromeo-Ferri and English (in Cai et al., 2014) emphasize the analysis of students' cognitive processes in the course of solving modelling problems. Analysing their forms of reasoning, their interpretations or conceptualizations of the real situation, the blockages they face in different steps of the modelling process, and their individual modelling routes allows to better understand the cognitive processes of the student modeller and to find ways of helping him/her in handling the modeller's tools. For example, in her study, Borromeo-Ferri (2010) found that mathematical thinking styles have a strong influence on the modelling behaviour of students and teachers since this implies a greater tendency to focus on the real world side or on the mathematical side of the modelling process.

Thus, one conclusion that can be withdrawn from these two contributions is that the *development of the modeller thinking* seems to be an idea to be pursued in the discussion about the learning of mathematical modelling, in particular, within a cognitive approach.

Another forum shared by multiple research groups in mathematics education is the International Congress on Mathematical Education (ICME). Over time, several Working Groups that make a relevant part of the congress program have proposed some of their outcomes for publication in the form of books. Very recently, a policy of publishing the work emanating from the ICME Working Groups has resulted in the ICME Monographs that are published by Springer.

The recent volume entitled *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (Stillman & Brown, 2019) includes a state of the art of mathematical modelling in education along with the lines of inquiry that are being followed. In that chapter, Stillman (2019) starts by making a distinction between mathematical modelling and mathematical application, and initiates a discussion of the modelling process in which she puts considerable emphasis on the modeller. The author reviews the most recent papers published in the ICTMA book series and in major mathematics education journals. On the plane of the most consistent theoretical perspectives, Stillman initially identifies three local theories and one general theory. The first three are described as: prescriptive modelling, modelling frameworks/cycles, and modelling competencies. The general theory is presented as anticipatory metacognition.

The notion of prescriptive modelling is connected to the awareness that the modelling cycle better captures the process of constructing descriptive and explanatory models than other kinds of models that entail action and decision-making, and may contribute to make changes in the world. As for frameworks based on the modelling cycle, the main idea emanating from her analysis is that empirical studies continue to confirm its logic of progression. Still, some forms of reformulation and fine tuning of the modelling cycle are also coming about, such as the Dual Modelling Cycle Framework introduced by Saeki and Matsuzaki (2013), which combines two representations of the cycle suggested by Blum and Leiß (2007). In any case, other alternative or discordant ways of conceiving the process of mathematical modelling are not outlined. For example, the author states that the use of technology in mathematical modelling activity should not modify the essentials of the modelling process and therefore not change the traditional modelling cycle, since the idea of using technology is probably driven by the logic of the modelling process. Finally, the third local theory considers not only modelling competency, in a holistic way, but also a set of sub-competencies based on the successive phases of the modelling cycle. In regard to a general theory, Stillman points to metacognition and, in particular, anticipatory metacognition, which is strongly associated with verification and validation processes of the modelling results and, consequently, of the mathematical model. It should also be noted that the perspective of modelling competencies as well as the theory of anticipatory metacognition are seen by the author as theories that are under empirical test and confirmation phase.

As for the inquiry lines distinguished in this revision work, three paths are pointed out: the study of the student modeller, the study of the teacher when teaching modelling, and the research on the design of modelling tasks.

In short, Stillman (2019) mentions several aspects that characterize the theoretical and empirical approaches of the latest research in the field. In these approaches, the primacy of the modelling cycle framework seems to reappear, to which a number of other notions were added, such as modelling competencies and to some extent the design of modelling tasks. It therefore reveals a certain consensus around the core nature of the modelling cycle as a theoretical and analytical framework in several research approaches, be it with the focus on the student as a modeller, or the focus on the teacher as mediator of the learning of the student modeller, or the focus on the tasks that will be used to promote the learning of the student modeller.

Only the perspective of prescriptive modelling, which, from my point of view, can be aligned with a socio-critical perspective on the role and purposes of mathematical modelling in mathematics teaching and learning, is in doubt as to its fit with the framework of the modelling cycle.

Lastly, in a somewhat surprising way, the models and modelling perspective, based on model-eliciting activities, also seen as a contextual modelling approach, does not appear in the state of the art presented in this ICME Monograph.

CERME – A RESEARCH GROUP ON APPLICATIONS AND MODELLING WITH STRONG EUROPEAN ROOTS

The *European Society for Research in Mathematics Education* (ERME) was founded in 1988. The ERME conferences (CERME) are held every two years and aim to promote communication, cooperation and collaboration in mathematics education research in Europe and all over the world. One of its distinguishing characteristics is the creation of thematic working groups (TWG) whose participants work and discuss together in a given area of research.

Since CERME4, held in 2005, in Spain, a thematic group on applications and modelling in mathematics teaching and learning has been active. For some years this has been the TWG6 - Applications and Modelling. Over time, the group has been increasing in productivity, namely in the number of contributions submitted by the participants and number of papers presented. The total number of papers and posters submitted in the sessions of this TWG amounts to about 160, from CERME4 to CERME11, the last of which took place in the Netherlands, in 2019 (Carreira, Barquero, Kaiser, & Cooper, 2019).

An important aspect of the work presented is the usual plurality of themes, theoretical and empirical perspectives, research aims, and also the different views on mathematical modelling and applications that coexist within the group. Such diversity was captured early on by some of its leaders and co-leaders, who started a systematic discussion about trends and perspectives in the midst of the diversity of the group and across the field of mathematical modelling in mathematics education. Those efforts have culminated with the publication of the essential article by Kaiser and Sriraman (2006) in the ZDM International Journal of Mathematics Education.

In each of the CERMEs the group has been presenting syntheses of the developments, advances and issues under analysis, as well as open questions for future research. These syntheses are usually shared in a final session of the work of CERME and have been published, in the respective Proceedings, as articles that describe the work produced. For a brief glance at this group's activity in the last CERMEs, from 2009 to 2019, I visit each of those introductory articles, written by the leading team in each conference.

In CERME6, Blomhøj (2010) stated that the group was aiming to identify and discuss the various theoretical perspectives in the research on teaching and learning mathematical modelling and applications. In the work plan of the group, the plenary presentation made by Morten Blomhøj and Gabriele Kaiser was intended to create the scenario for the subsequent work: "A survey of theoretical perspectives in research on teaching and learning of mathematical modelling" (p. 2042). In this conference, the various papers and posters revealed a set of more salient themes and theoretical perspectives. Among the theoretical perspectives that stood out, some became quite persevering and consistent throughout the successive CERMEs, namely ATD and MMP. Thus the papers presented were distributed by the following 5 themes: (1) Teachers' professional development for teaching and assessing mathematical modelling, (2) The role of ICT in teaching and learning mathematical modelling, (3) Researching the teaching and learning of mathematical modelling within the Anthropological Theory of Didactics, (4) Researching the teaching and learning of mathematical modelling within the framework of Realistic Mathematics Education, and

(5) Researching the teaching and learning of mathematical modelling under the Models and Modelling Perspective.

Turning to CERME7, held in 2011, Kaiser, Carreira, Lingefjärd and Wake (2011) made a summary of the central themes addressed in the various papers and sessions of the group. Three focuses of discussion were approached around the conceptualization of mathematical modelling in education: (1) The difference between mathematical modelling and applications; (2) The difference between problem solving and mathematical modelling; and (3) The role and influence of technology on the modelling process. During the conference there were several theoretical perspectives embraced and topics addressed. The MMP perspective had a relevant presence and introduced the notion of model development sequence, an extension of the concept of model-eliciting activities by adding other type of activities that seek to explore and apply previously developed models. The perspective of the modelling cycle and modelling competency was also very relevant in several studies, both related to the professional development of the mathematics teacher and to assessment. There was also the presentation of research that brought the extended cycle of modelling regarding technology, which includes a third world – the world of technology. The Anthropological Theory of the Didactic was also very much dealt with, mainly based on the idea of praxeology and the idea of study and research paths. Some studies have shown to be more oriented according to a cognitive perspective although others involved epistemological and curricular discussions.

Moving on to CERME8, although the report by Lingefjärd, Carreira, Kaiser and Wake (2013) did not show great changes compared to the previous CERME, it was noted that a good amount of papers did not explicitly include a theoretical perspective and also that empirical research seemed to be lacking more breath and consistency. The question of the use of technology has returned to the debate and the number of studies that focused on teacher beliefs and teacher education has increased. The MMP and ATD perspectives and the modelling cycle perspective were represented with relative balance in the works produced.

In the Proceedings of CERME9, Carreira, Barquero, Kaiser, Lingefjärd and Wake (2015) mention the fact that the group is gaining maturity and cohesion, one of its distinguishing features being its openness to the diversity of theoretical, methodological and philosophical perspectives taken by its researchers. Thus, diversity is placed as a touchstone of the group. One of the themes that emerged from the work was the perspectives and conceptualizations for mathematical modelling. In that CERME some objection was raised to the idea of promoting a firm distinction between mathematical modelling and applications, under the claim that “modelling means not only to create models, but also integrate and coordinate models somehow contradicting the idea that applications are simply a limited portion of the modelling cycle” (p. 790). Another emphasis found in the proposed papers refers to the relations of mathematical modelling with other neighbouring areas, such as ethnomathematics, project-based learning and inquiry-based learning, for example. In all these instructional modes there seems to be the common idea that there is an active learner seeking for a solution to a real-world problem in a realistic situation. Thus, a broad question started to appear: whether it makes sense to propose and develop a comprehensive theory of teaching and learning mathematical modelling and whether such a comprehensive theory is desirable and useful to the community of researchers and mathematics educators. The topic of the design of mathematical modelling tasks has also shown a clear rise in the group, namely in bringing to the discussion the concept of authenticity of modelling problems in education.

While the authors highlight the plurality of perspectives, they also point out some prevailing tendencies, which seem to suggest a certain reliability of some of the approaches. In that regard, they state: “the modelling cycle and the modelling phases represent the most common conceptual tools in informing the research. There are also shared concerns related to the contexts of mathematical modelling problems and the authenticity of the tasks” (p. 792). In short, in this congress the TWG6 faced its diversity and its wealth of theoretical perspectives, valuing an inclusive and open facet but, at the same time, frontally expressing some doubts. In particular, the group wondered about the possibility that this diversity could be detrimental to the growth of the research if it gives rise to a conceptual fuzziness as other authors have already pointed out (Cai et al., 2014; English et al., 2016).

Regarding CERME10, the summary of the main contributions begins again with acknowledging the great diversity of themes, theoretical perspectives and research purposes. Barquero, Carreira and Kaiser (2017) affirm: “The contributions discussed at the congress are characterized by a strong and fruitful diversity in the research questions considered, the school levels addressed and the theoretical approaches taken” (p. 877). Therefore, unanimity or uniformity seems to be relatively far off in this field. Several theoretical perspectives and several lines of empirical research continue to exist. In this case, the following themes were analysed through the various contributions presented in 20 papers and 4 posters: (1) Interdisciplinary modelling activities (including in engineering teaching); (2) Connection between problem solving and mathematical modelling; (3) Developing modelling strategies and competencies; (4) Tools and methodologies used to analyse modelling processes; (5) Teachers’ beliefs in relation to the teaching of mathematical modelling; (6) Teachers’ interventions in mathematical modelling classes; (7) Experimental materials and technology in modelling; and (8) The assessment of modelling activities.

Finally, at CERME11, which took place in February 2019, the team leaders, Barquero, Carreira, Ärlebäck, Jessen, Vorhölter, and Wake produced a report of the main contributions, advances and open questions resulting from the work presented, which will be part of the forthcoming Proceedings. In the report it was reiterated the great diversity and plurality of themes and perspectives. Still, it was possible to identify 5 overarching themes: (1) Analysis of modelling processes when solving modelling problems; (2) Mathematical modelling and simulations in connection to other disciplines; (3) Strategies to support design and implementation of modelling; (4) Use of resources to support teaching and learning of modelling; and (5) Teacher education for modelling and its implementation. A review was also made of the different theoretical perspectives and it led to the conclusion that the modelling cycle (and its several variations) was prominent in the group but other ways to conceptualise modelling were also contemplated. Some theoretical concepts acquired more visibility, namely, Model Activity Diagrams, Mathematical Working Space, and the Study and Research Path proposed by the ATD. In the concluding remarks, the authors allude to the fact that there was an opportunity to discuss possible complementarities between different approaches, which indicates an attempt to a concerted action or a combination of different approaches, especially in terms of theoretical constructs and more relevant theoretical perspectives.

It seems possible to say that the evolution of CERMEs over the period 2009-2019 in relation to the trends and perspectives of the Applications and Modelling research group converges, in many respects, with what has been seen in other research forums. There is a clear concomitance of theoretical perspectives that are affirming themselves and solidifying. In addition, qualitative empirical studies prevail, including grounded theory, case study designs or other forms of applied research, based on pedagogical experiences or with a design-based research orientation; a few studies using a mixed methodology that analyse data emanating from wider research projects are also seen. One of the conclusions that can be drawn from this analysis is that there are some more represented theoretical perspectives, which are the perspective of the modelling cycle and modelling competencies, the MMP perspective, and the ATD. With less representativeness there is still the perspective of Realistic Mathematics Education and, in a certain way, the problem-solving perspective.

The group integrates in its activity all the lines of inquiry that are suggested by Cai et al. (2014): mathematics, cognitive, curricular, instructional and teacher education. However, it should be noted that the mathematical perspective is very poorly included or almost absent. The academic nature and the standards that are imposed on the accepted research work lead to the impossibility of discussing articles based on exploration of modelling problems *per se*. In spite of this, theoretical articles are welcome and allow us to create interesting points of discussion around the conceptualization of mathematical modelling. The community has evolved substantially in the quality standards of the accepted research and in the greater conceptual and theoretical wealth of the articles proposed. However, more recently, the proliferation of concepts and perspectives that coexist in the group and in the mathematical modelling research community has started to be under attention.

It seems indeed intriguing that the researchers who constitute the community do not share a consensual view of the bulk of their scientific activity: the notion of mathematical model and modelling. In this respect, the classification of different perspectives on teaching modelling and applications proposed by Kaiser and Sriraman (2006) has often been used as a way of mapping the field. The mapping shows, among other things, that addressing mathematical modelling in mathematics education is dependent on the perspective adopted. This is a unique element that actually brings into the research substantial richness, diversity, plurality and openness. But it may also be seen as an element of division, confusion, and disintegration. Apparently, as reported in the last CERMEs, there has been some space for reflection on that matter and even a subtle speculation about possible links and articulation among theoretical perspectives.

Tracing the path of active researcher at CERMEs

I will now seek to look in more detail at the progress that took place in the context of the CERMEs, in the period 2009-2019, by analysing the successive contributions of some of its most active participants. To do this, I listed the amount of papers that each researcher, as a single author or as co-author, presented in the CERMEs, between the 6th edition and the 11th edition. Then I elected those who had a greater number of papers, also considering their commitment, participation and involvement in the debate, in the promotion of dialogue and in the exchange of ideas and arguments. I will now present a very abbreviated summary of the work of five European researchers in the most recent CERMEs, where I will also include my own activity developed there: Jonas Ärlebäck, from Sweden, Berta Barquero, from Spain, Gilbert Greefrath, from Germany, Rita Borromeo-Ferri, from Germany, and Susana Carreira, from Portugal. The two first researchers have participated in the aforementioned period with 8 and 7 papers respectively; the later three researchers have participated with 5 papers each.

I must make a point of order regarding my intention to look at the paths of these researchers. It is clear that the papers presented at the CERMEs are not expected to give a complete picture of all the work developed by the researchers in this field. I am not assuming in any way that those papers can be a representative sample of each researcher's scientific production. Obviously, many of their other publications, interventions and academic products are missing from this picture. So this is only a very simplified but also very accessible way of arriving at a reading of how the research has been taking place, just by looking at the more assiduous and regular contributions in the working group on Applications and Modelling.

From all the articles of the aforementioned authors I have collected the aim of the study as well as the theoretical perspectives and/or the theoretical concepts that were embraced. The information was summarized in simple and short terms for the sake of space and briefness. What interests me is, first of all, to obtain a certain temporal perception of their work frame within the various perspectives endorsed in the literature. Intentionally, I have dismissed the idea of considering also the methods and methodological approaches since I will restrict myself to create a view of the theoretical perspectives that researchers have used and developed. In the following tables (Tables 1 to 5) this information is summarized for each of the researchers, according to the above order.

Table 1. A snapshot of the range of contributions of active researcher 1

Active researcher 1 (8 papers)			
Author(s)	*Title*	*Aim of the research*	*Theoretical perspective / theoretical concepts*
Ärlebäck, J. CERME 6	(1) Towards understanding teachers' beliefs and affects about mathematical modelling	To capture and conceptualize teacher's beliefs about mathematical models and modelling	Beliefs and belief systems; Modelling process as described in the modelling cycle
Ärlebäck, J. CERME 7	(2) Exploring the solving process of groups solving a realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics	Finding the questions that the students formulate and the mathematics they use in solving a Fermi problem	Modelling process and sub-processes as described in the modelling cycle; Problem Solving; Modelling Activity Diagram Framework (MAD); Praxeologies – Anthropological Theory of the Didactic
Ärlebäck, J. Doerr, H. O'Neil, A. CERME 8	(3) Students' emerging models of average rates of change in context	To study and support the continued development of pre-university students' emerging models of average rate of change	Contextual modelling perspective; Model development sequence
Doerr, H. Ärlebäck, J. O'Neil, A. CERME 8	(4) Teaching practices and modelling changing phenomena	Examining the characteristics of teaching in a Model Development Sequence on modelling changing phenomena	Contextual modelling perspective; Model development sequence
Ärlebäck, J. Doerr, H. CERME 9	(5) At the core of modelling: Connecting, coordinating and integrating models	Towards a common conceptualization of modelling that bridges the research field	Applications and Modelling; Models and Modelling Perspective (MMP) Model Development Sequence
Doerr, H. Ärlebäck, J. CERME 9	(6) Fostering students' independence in modelling activities	Elaborating on teaching practices that foster student independence in modelling activities	Models and modelling perspective; Model Development Sequence
Ärlebäck, J. Albarracín, L. CERME 10	(7) Developing a classification scheme of definitions of Fermi problems in education from a modelling perspective	To define and characterize Fermi problems; To describe the connection between Fermi problems and modelling, according to different perspectives	Fermi problems; Modelling Perspectives

Ärlebäck, J. Albarracín, L. CERME 11	(8) An extension of the MAD framework and its possible implication for research	Investigating the potential in extending the Model Activity Diagrams as an analytical tool for studying students' activity in modelling problems	Individual Modelling Routes; Model Activity Diagrams

Table 2. A snapshot of the range of contributions of active researcher 2

Active researcher 2 (7 papers)			
Authors	*Title*	*Aim of the research*	*Theoretical perspective / theoretical concepts*
Barquero, B. Bosch, M. Gascón, J. CERME 6	(1) The 'ecology' of mathematical modelling: Constraints to its teaching at university level	To study the institutional constraints that hinder the implementation of modelling activities in education	Barriers, obstacles and dilemmas in teaching mathematical modelling 'Ecology' of didactic organisations Anthropological Theory of the Didactic
Barquero, B. Serrano, L. Serrano, V. CERME 8	(2) Creating the necessary conditions for mathematical modelling at university level	Exploring some of the essential characteristics or principles of Study and Research Course as a didactic device for the integration of mathematical modelling	'Ecology' of mathematical modelling practices; Praxeology Anthropological Theory of the Didactic
Barquero, B. Bosch, M. Romo, A. CERME 9	(3) A study and research path on mathematical modelling for teacher education	To illustrate the phases of the SRP-TE design and some preliminary results of the implementation	Study and research paths for teacher education (SRP-TE)
Sala, G. Barquero, B. Font, V. Giménez, J. CERME 9	(4) A multi-disciplinary approach to model some aspects of historical events	Report on the design, implementation and analysis of a sequence of tasks based upon a historical context	Inquiry-based learning; Study and research paths (SRP)
Barquero, B. Monreal, N. Ruíz-Munzón, N. CERME 10	(5) Levels of analysis of a mathematical modelling activity: Beyond the questions-answers dialectic	Report on the design, implementation and analysis of Study and Research Path	Study and Research Paths (SRP) as a teaching proposal for mathematical modelling
Sala, G. Font, V. Barquero, B. Giménez, J. CERME 10	(6) Mathematical modelling in an archaeological context: Their complementarity as essential tool for inquiry	Report on the design, implementation and analysis of a teaching sequence to promote inquiry and modelling competences	Study and Research Paths (SRP); Relationship between modelling and inquiry learning; Modelling competences
Barquero, B. Bosch, M. Wozniak, F. CERME 11	(7) Modelling praxeologies in teacher education: The cake box	Addressing teachers' lack of discursive tools to teach modelling processes	Praxeologies Anthropological Theory of the Didactic

Table 3. A snapshot of the range of contributions of active researcher 3

Active researcher 3 (5 papers)			
Authors	*Title*	*Aim of the research*	*Theoretical perspective / theoretical concepts*
Siller, H-S. Greefrath, G. CERME 6	Mathematical modelling in class regarding to technology	Discussing the specifics of modelling with computers and handheld technology in mathematics classes	Extended Modelling Cycle regarding technology when modelling; Phases of the modelling cycle
Greefrath, G. CERME 7	Modelling problems and digital tools in German centralised examinations	Discussing the simultaneous use of realistic tasks and digital tools in examinations	Modelling cycle; Extended Modelling Cycle concerning technology
Greefrath, G. Riess, M. CERME 8	Solution aids for modelling problems	Knowing more about the students' processes while working on a modelling task with a solution plan	Modelling competencies; Solution plan; Problem solving
Greefrath, G. Siller, H-S. Ludwig, M. CERME 10	Modelling problems in German grammar school leaving examinations (Abitur) – Theory and practice	Examining the relevance, the authenticity of the context, the openness of the task and the partial competencies in examination problems	Partial competences of modelling; Authenticity; Openness
Wess, R. Greefrath, G. CERME 11	Professional competencies for teaching mathematical modelling – Supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory	To study the development of modelling-specific task competencies in teacher education.	Modelling competency and sub-competencies; Design of modelling tasks

Table 4. A snapshot of the range of contributions of active researcher 4

Active researcher 4 (5 papers)			
Authors	*Title*	*Aim of the research*	*Theoretical perspective / theoretical concepts*
Borromeo-Ferri, R. Blum, W. CERME 6	(1) Mathematical modelling in teacher education – Experiences from a modelling seminar	Design and implementation of a university course on teaching modelling at school; Observing the students' progress on learning and understanding mathematical modelling	Modelling competencies; Modelling process as described in the modelling cycle

Borromeo-Ferri, R. Blum, W. CERME 7	(2) Are integrated thinkers better able to intervene adaptively? – A case study in a mathematical modelling environment	Identifying connections between teachers' mathematical thinking styles and types of teacher interventions in mathematical modelling environments	Thinking styles; Teacher interventions; Phases of the modelling cycle
Borromeo-Ferri, R. Blum, W. CERME 8	(3) Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons	Investigating central barriers and also motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons	Techer's beliefs about modelling in school mathematics
Borromeo-Ferri, R. Mousoulides, N. CERME 10	(4) Mathematical modelling as a prototype for interdisciplinary Mathematics education? – Theoretical reflections	Discussing core similarities and differences between mathematical modelling and interdisciplinary mathematics education	Integrated teaching of science and mathematics; Modelling process as described in the modelling cycle; Students' modelling routes Models and modelling perspective
Borromeo-Ferri, R. CERME 11	(5) Assessing teaching competencies for mathematical modelling	Developing test items to assess prospective teachers mathematical modelling competencies	Modelling competencies; Competencies for teaching mathematical modelling

Table 5. A snapshot of the range of contributions of active researcher 5

Active researcher 5 (5 papers)			
Authors	*Title*	*Aim of the research*	*Theoretical perspective / theoretical concepts*
Carreira, S. Amado, N. Canário, F. CERME 8	(1) Students' modelling of linear functions: How Geogebra stimulates a geometrical approach	To examine students' approaches to application and modelling situations in the "technology world" of the modelling activity	Conceptual modelling; Contextual Modelling; Co-action between tool and user
Carreira, S. Baioa, A. M. CERME 9	(2) Assessing the best staircase: Students' modelling based on experimentation with real objects	Looking at students' conceptualization of slope in the activity of examining and assessing real-world staircases	Models and Modelling Perspective; Realistic Mathematics Education; Experimental activities
Carreira, S. Baioa, A. M. CERME 10	(3) Creating a colour palette: The model, the concept, and the mathematics	Reflecting on criteria of authenticity for school modelling tasks	Authenticity; Experiential Learning

Baioa, A. M. Carreira, S. CERME 11	(4) Simulations and prototypes in mathematical modelling tasks	Exploring the use of simulations and prototype construction in a STEM context	STEM education; Engineering Model-Eliciting Activities; Simulation
Almeida, L. Carreira, S. CERME 11	(5) The configuration of mathematical modelling activities: A reflection on perspective alignment	Discussion on the configuration of modelling activities as dependent on the modelling perspective adopted	Modelling perspectives; Design of modelling tasks

One conclusion that can be drawn from the analysis of the set of tables is that these researchers seem to fit with relative firmness in some of the so-called theoretical perspectives that are most popular or most widespread in the research community: the modelling cycle and modelling competences, the models and modelling perspective (MMP), and the anthropological theory of the didactic (ATD).

The work of Ärlebäck shows a certain tendency to explore the crossing of boundaries, namely when crossing problem solving and the ATD to undertake the analysis of modelling processes. One of the theoretical concepts that he offers for this analysis is the Model Activity Diagram, which can be considered a powerful analysis tool to study, describe, and understand the student modeller thinking. This researcher is fundamentally involved in MMP and from this perspective he develops an important concept related to promoting the modeller thinking: the idea of Model Development Sequence, which breaks with the division between modelling and application and conveys a more integrated idea of modelling activity. Another important element of his contributions lies in the implementation of the so-called Fermi problems, where he explores some of its features as being pertinent and typical of problems that appeal to a modeller thinking. In this sense, he also follows the line of inquiry of the design of modelling tasks for teaching.

Barquero's research is clearly situated in the theoretical perspective of the general theory named as ATD. The author gives great visibility to the concept of Study and Research Path as an analytical tool to describe and understand the modeller thinking of students and teachers; she also proposes that it may represent a didactic approach, that is, a way to promote the learning and the practice of a modeller thinking (SRP for learning and SRP for teacher education). In several of her studies, she proposes modelling problems that highlight authenticity and realism and contribute to the integration of knowledge from other disciplinary areas. In this sense, interdisciplinarity and the notion of inquiry-based learning seem to appear in her work as privileged approaches for the promotion and implementation of the modeller thinking.

Greefrath seems to place most of his studies in a perspective centred on the theoretical concept of the modelling cycle and the associated competencies and sub-competencies. The author also gives attention to the use of digital resources in the modelling process and proposes an interesting theoretical concept, the Extended Modelling Cycle, in which the modelling cycle includes a third world called the technological world. This brings to the forefront one of the often forgotten aspects that refer to the instruments and tools that are part of the modeller's work, that is, it shows that the modeller's thinking is mediated by tools that transform and influence his/her actions in solving a real world problem.

In the case of Borromeo-Ferri's papers, we perceive a clear alignment with the perspective of the modelling cycle and modelling competencies. Her contributions include considerable work on teacher education, namely on promoting and assessing the development of modelling competencies of future teachers. One of her interventions brings to light the very important connection between mathematical modelling and interdisciplinarity. Thus, the author opens the theoretical field in discussing mathematical modelling as a mathematical practice for promoting not only modelling competencies but also interdisciplinary mathematics education. This work combines the concept of

Individual Modelling Routes with design principles of modelling tasks according to the MMP. The theme of modelling task design is further developed in the work of Borromeo Ferri, in terms of studying the task competency for the teaching of mathematical modelling.

Finally, Carreira follows a direction generally close to the models and modelling perspective in her work. One of her themes of interest is the analysis of mathematical modelling environments that rely on practical experiences involving concrete objects of everyday life. The notion of experiential learning is part of her theoretical framework and the concept of engineering model-eliciting activity has also been a key element in some of her studies. She brings some concepts related to authenticity, based on modelling problems that involve simulation and the construction of prototypes. The integration of STEM also appears in her work as a way of putting interdisciplinarity in connection with mathematical modelling. Carreira focuses, in particular, on the thinking of the student modeller in experimental activities that involve simulation of real-world situations.

In brief, I believe that there are innovative and promising concepts that show theoretical advances, not so much in terms of new theoretical perspectives, but of ideas, notions, and constructs that broaden, develop, deepen, or extend the frontiers of other previous concepts. Here are some of them:

- Model Development Sequence
- Modelling Activity Diagram
- Study and Research Path for learning modelling
- Study and Research Path for teaching modelling
- Extended Modelling Cycle with Technology
- Interdisciplinary Mathematical Modelling
- Experimental Mathematical Modelling

These are all theoretical and conceptual developments that I find worthy of being continued.

DISCUSSION AND CONCLUSIONS

We must have representations, models, concepts, principles, abstractions, and discourses for the development of theories and surely representations only depict certain aspects of ideas or concepts that form the fabric of theories. Thus, for example, we can point out the claims from Doerr, Ärlebäck, and Misfeldt (2017) who discuss the conceptual insufficiency of each of the numerous representations of the modelling cycle in the literature. Specifically, they indicate that the cycle typically does not give due notice or pay due attention to the following aspects: “the non-linearity of modelling, the role of multiple models and pre-existing models within modelling activity, the social and critical aspects of modelling and the role of computational media in modelling” (p. 74). At the same time, the divergences remain on the advantage of drawing a line between mathematical modelling and applications and of making that partition based on the direction in which the modelling cycle is being followed. Several people continue to maintain the blended A&M (Blum & Niss, 1991; Blum, 1995) as a comprehensive and productive way of thinking about an activity that has several nuances when implemented in the school context. Another issue that is the subject of divergences concerns the influence produced by the introduction of technological devices in the process of mathematical modelling, including, for instance, the possibility of working with simulators or using computational tools that automate the obtaining of approximate models.

Despite the disagreements that different perspectives can bring out on some theoretical concepts, my main interest is to ask whether we are able to trace a possible conceptual common ground with generative power to nourish not only the development of concepts, representations, perspectives, and lines of inquiry, but also to induce combining, coordinating and even synthesising or integrating within the field (Prediger, Bikner-Ahsbahs & Arzarello, 2008; Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010). I tentatively say yes and my conviction is that we need to keep alive the contributions of the different communities of practice that intersect in the field of teaching and learning mathematical modelling.

Ideas like those of Pollak (2007, 2015), Pelesko (in Cai et al., 2014), Galbraith (2015), or Blum (2011), just to mention a few, seem very useful in revealing a certain thread: irrespective of the perspective adopted, we are fundamentally and essentially working on the development of the modeller thinking. This is similar to what other topics in mathematics education have been advocating, namely the learning of algebra through the development of algebraic thinking or the learning of geometry through the development of geometric thinking. It seems indisputable that students learn modelling and applications through the development of a modeller thinking and that teachers need to engage with that thinking, for instance, in designing tasks or supporting students in modelling activities.

One may then ask whether there is any possibility at the present state of combining, coordinating or synthesizing, in a more or less coherent and productive way, the various theoretical concepts and perspectives. My answer to this question is that of an optimistic yes. And I believe that such endeavour could be achieved by a diligent work around the construction, deepening and refinement of theoretical concepts that offer relevant contributions to further reconceptualise the development of the modeller thinking in its multiple facets: cognitive, cultural, critical, pedagogical, etc.

One of the quite robust concepts today is definitely that of the mathematical modelling cycle (with its various schematic representations). Another one, which is closely related, is that of modelling competencies. They are concepts of enormous relevance and have captured the energy and efforts of many researchers. Also very promising is that of Study and Research Path, maybe reconstructed as Study and Research Path for Modelling (learning and teaching). Maybe less developed theoretical concepts are, for example, those of interdisciplinary modelling and of experimental modelling. Besides these, there are other concepts that are important and valuable such as prescriptive modelling and critical modelling, to mention only a few.

In Figure 1, I suggest a rather free representation (surely deficient in many senses) of what I see as the generative role of the modeller thinking development in fostering new advances and possible combination and synthesis. As mentioned before, we have actually the example of the combination between the modelling cycle and modelling competencies. Other possibilities of coalescence will probably require boundary-crossing and further conceptual strengthening.

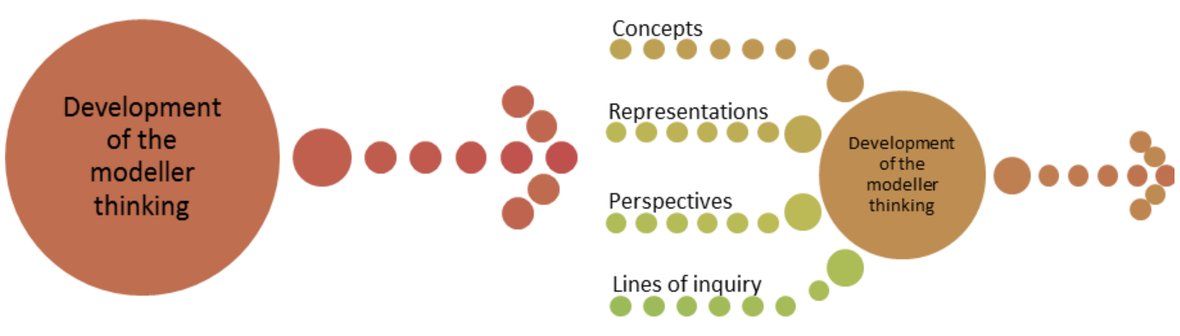


Figure 1. The development of the modeller thinking in fostering the combination of theoretical concepts and perspectives

This suggestion arises from my perception, based on various proposals for the organization, classification, systematization and mapping of the field over a period of at least fifteen years, that we are seeing cross-boundary movements and the search for interactions between different theoretical perspectives (Stillman et al., 2017). Simultaneously, the predominance of some theoretical perspectives in the debate seems to be clearer, and it is also evident that there is a widening/deepening of some theoretical concepts that are being worked out by several active and committed researchers, based on empirical studies across several lines of inquiry.

I conclude my discussion with a simple illustration whose purpose is mainly to be thought provoking. In my master's thesis (Carreira, 1993), I studied the processes of 10th grade students when solving application and modelling problems involving trigonometry, with the use of the spreadsheet. At that time, I used as a theoretical lens the notion of translating between different systems of mathematical representations and the idea of conceptual amplifier to interpret the role of the spreadsheet in the problems proposed. The empirical work involved a sequence of application and modelling activities; for the purposes of the study, I considered that students were modelling physical phenomena or situations when they used their mathematical tools (like sine functions, parameters, etc.) to come up with mathematical models. Moreover, I adopted the modelling cycle as a structuring concept of the pedagogical approach, with special importance given to some processes such as interpreting, representing and mathematizing.

Looking back, I believe that I was proposing something like a Model Development Sequence (it was not a theoretical concept of my research then). One of the activities could be seen as a Model Exploration Activity (MXA), according to Ärlebäck, Doerr, and O'Neil (2013). The students were asked to describe mathematically the physical phenomenon of beats that can be generated by using two tuning forks of slightly different frequencies vibrating simultaneously. The students already had a previous model about the propagation of sound waves and new the meaning of the parameters for amplitude and frequency of the sound. What they did then was to explore, with the help of the spreadsheet, the mathematics of constructive and destructive interference and to mathematically translate the sound that occurs by overlapping sound waves with very similar frequencies, that is, a succession of lower and higher sounds, the sound wave beats, as represented in Figure 2.

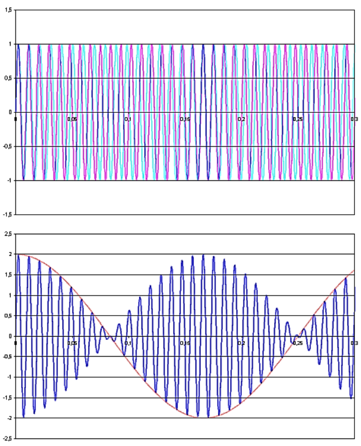


Figure 2. The sum of two sine waves (Retrieved from https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/91/Beat.png (copyrighted free))

At the same time, students worked on graphical and tabular representations of sound waves and examined the effects of interference, both graphically and numerically. For example, they looked for ways to find the maxima and minima of the wave resulting from the sum of two waves and verified that they occurred periodically. They conjectured a possible relation between the frequency of the beats and the frequencies of the two generating waves and were able to interpret this idea in terms of the oscillatory movement of each of the superimposed waves. Thus, this application and modelling task could be an example of interdisciplinary modelling (relating mathematical models and concepts of physics) and illustrates a certain kind of modeller thinking, in which the knowledge and tools of other disciplines are integrated into the exploration of mathematical models.

Students have also worked intensively in the technological world, and in many respects this world of the spreadsheet representational tools has become a conceptual amplifier. The fact that the spreadsheet allows to work on functions and relationships between variables in numerical form, that is, using increments of the independent variable, makes it helpful for understanding mathematical results and concepts and for creating accessible representations of the real phenomenon. Both graphically and numerically, beats emerged expressed in mathematical terms. In this sense, the students were developing their thinking with technology. The extended modelling cycle regarding technology (which of course was not a formal concept at that time) makes perfect sense as a theoretical concept to support this way of thinking and working with mathematical models.

Finally, the students have produced many questions and answers and also some results from an initial generating question (mathematically explaining the beat that is produced by two very close sound frequencies). This could well have been investigated and described using the conceptual tool of Study and Research Path, namely in finding and interpreting interesting differences in the solutions of the various groups in the class.

I used the example of my early 1992 study (completed shortly after ICTMA 5 where I offered a workshop on oscillations and waves) because it was done at a time when theorizing in the field of teaching and learning mathematical modelling was still taking its first steps. Now, it suits me for underlining the point that theoretical concepts are extremely important in stirring the advancement of the field. And I also notice that from that time on, throughout the various lines of inquiry, a major aim of the research continues to be the development of the student modeller and of the teacher modeller thinking. Therefore, it seems admissible that the development of the modeller thinking is a key for some possible conceptual integration.

References

Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(4), 314–336.

Barquero, B., Carreira, S., & Kaiser, G. (2017). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 877-883). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of Theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 483-506). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Blomhøj, M. (2010). Introduction - Applications and modelling. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2042-2045). Lyon, France: ERME.

Blum, W. (1995). Applications and modelling in mathematics education: Some important aspects of practice and research. In C. Sloyer, W. Blum, & I. D. Huntley (Eds.), *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 1–20). Yorklyn, USA: Water Street Mathematics.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (pp. 15-30). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Blum, W. & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester, United Kingdom: Ellis Horwood.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 99-118.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo-Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., …, & Kwon, O. N. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 145–172). Vancouver, Canada: IGPME.

Carreira, S. (1993). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Master Thesis). Lisbon, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., & Cooper, J. (2019). Introducing CERME's Thematic Working Group 6 – Applications and Modelling. *Newsletter of the European Mathematical Society, Mathematics Education, ERME Column, 111*, 48-49.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G, Lingefjärd, T., & Wake, G. (2015). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 790-793). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague and ERME.

Doerr, H. M., Ärlebäck, J. B., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 71-81). Cham, Switzerland: Springer.

English, L. D., Ärlebäck, J. B., & Mousoulides, N. (2016). Reflections on Progress in Mathematical Modelling Research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 383-413). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Frejd, P. (2014). *Modes of Mathematical Modelling: An analysis of how modelling is used and interpreted in and out of school settings* (Unpublished doctoral thesis). Linköping University, Linköping, Sweden.

Galbraith, P. (2015). Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 339-349). Cham, Switzerland: Springer.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 143–162.

Geiger, V., & Frejd, P. (2015). A reflection on mathematical modelling and applications as a field of research: Theoretical orientation and diversity. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 161-171). Cham, Switzerland: Springer.

Jablonka, E. (2007). The relevance of modelling and applications: Relevant to whom and for what purpose? In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study* (pp. 193-200). Boston, USA: Springer.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R., & Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – Preface. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (pp. 1-5). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Kaiser, G., Carreira, S., Lingefjärd, T., & Wake, G. (2011). Introduction to the papers of WG 6: Applications and modelling. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 925-926). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310.

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the evolution of models and modelling perspectives on mathematical learning and problem solving. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 1* (pp. 192-196). Melbourne, Australia: PME.

Lesh, R., & Fennewald, T. (2013). Introduction to Part I. Modeling: What is it? Why do it? In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies (ICTMA 13)* (pp. 5–10). New York, USA: Springer.

Lingefjärd, T., Carreira, S., Kaiser, G., & Wake, G. (2013). Introduction to the papers and posters of WG6: Applications and Modelling. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 926-929). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris, France: OECD Publishing.

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. Paris, France: OECD Publishing.

Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling – A conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study* (pp. 109-120). Boston, USA: Springer.

Pollak, H. O. (2015). The place of mathematical modelling in the system of mathematics education: Perspective and prospect. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 265-276). Cham, Switzerland: Springer.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40*(2), 165-178.

Saeki, A., & Matsuzaki, A. (2013). Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 89–99). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementary modelling in mathematics lessons: The interplay between “real-world” knowledge and “mathematical structures”. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study* (pp. 209-216). Boston, USA: Springer.

Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education – Lines of Inquiry. In G. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education (ICME-13 Monographs)* (pp. 1-20). Cham, Switzerland: Springer.

Stillman, G. A., Blum, W., & Kaiser, G. (2017). Crossing boundaries in mathematical modelling and applications educational research and practice. In G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 1-22). Cham, Switzerland: Springer.

Stillman, G., & Brown, J. P. (Eds). (2019). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education (ICME-13 Monographs)*. Cham, Switzerland: Springer.

Wake, G., Foster, C., & Swan, M. (2015). Understanding issues in teaching mathematical modelling: Lessons from lesson study. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 937-943). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague and ERME.

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Research Seminar II. History of Mathematics and Mathematics Education

Coordinador:

Alexander Maz-Machado (Universidad de Córdoba)

Un breve balance de la investigación en historia de las matemáticas y la educación matemática en España

Ponentes:

Carmen López-Esteban (Universidad de Salamanca)

La institucionalización del Análisis Matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales

Luis Puig (Universitat de València)

Observaciones acerca de la Historia de las Matemáticas en la Matemática Educativa

Gert Schubring (Universität Bielefeld, Alemania / Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil)

"Mathematics is not a stalactite hanging over a stalagmite" (W. Kuyk) – The productive Role of Teaching

UN BREVE BALANCE DE LA INVESTIGACIÓN EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA

A brief balance of the research in History of Mathematics and Mathematics Education in Spain

Maz-Machado, A.

Universidad de Córdoba

Resumen

Se presenta un corto balance de la investigación que se realiza en Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática en España (HMEM). Hace más de quince años que se creó en el seno de la SEIEM el grupo HMEM y la producción y presencia de los investigadores de este grupo y sus estudios han aumentado. Se establece una agrupación del tipo de investigaciones realizadas en siete categorías no excluyentes.

Palabras clave: *Investigación, historia de la educación matemática, historia de las matemáticas, España.*

Abstract

A short balance of the research carried out in History of Mathematics and Mathematics Education in Spain (HMEM) is presented. The HMEM group and the production and presence of researchers in this group have been created within the SEIEM for more than fifteen years and their studies have increased. A grouping of the type of research carried out in seven non-exclusive categories is established.

Keywords: *Research, history of mathematical education, history of mathematics, Spain.*

INTRODUCCIÓN

A nivel internacional, desde la segunda mitad del siglo XIX se ha venido defendiendo la integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemática (Clark, Kjeldsen, Schorcht y Tzanakis, 2018). A su vez las investigaciones sobre la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática (HMEM) han tenido presencia a nivel internacional desde hace décadas. Si bien en el año 1976 se crea el *International Study Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) afiliado al ICMI, uno de los puntos de inflexión en cuanto a interés y aumento lo supuso la publicación del libro *History in mathematics education: The ICMI study* (Fauvel y Van Maanen, 2006). A partir de entonces se produjo una actitud más favorable hacia esta línea y surgen trabajos que abordan el tema desde variados posicionamientos, bien como recurso para el aula o como fuente para conocer el desarrollo de la educación matemática. Como afirma Schubring (2006), la enseñanza de la historia de las matemáticas constituye una de las dimensiones del conocimiento del profesor de matemáticas. Por su parte Grattan-Guinness (2004) promueve hacer una diferencia entre lo que es *history* y *heritage.*

LA INVESTIGACIÓN EN HMEM EN ESPAÑA

En España, durante el VII Simposio de la SEIEM celebrado en Granada en el año 2003, se realizó el primer seminario dedicado a HMEM dentro de los simposios de la SEIEM. El coordinador fue Bernardo Gómez y los ponentes fueron Luis Puig, Fulvia Furinghetti, María Teresa González y

Maz-Machado, A. (2019). Un breve balance de la investigación en historia de las matemáticas y la educación matemática en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 91-94). Valladolid: SEIEM.

Modesto Sierra. Como consecuencia de este seminario se acordó constituir en ese simposio el Grupo de Investigación HMEM. Pese a que formalmente es en 2003 cuando se crea este grupo de investigación, los investigadores que se adscribieron a participar en él contaban, en su mayoría, con una larga trayectoria investigadora en este campo. Durante los primeros 10 años fui el encargado de coordinar las actividades de dicho grupo y el relevo lo asumió Luis Puig.

La investigación española sobre HMEM se ha realizado por grupos o investigadores individuales focalizados principalmente en las universidades de Salamanca, Valencia, Granada, Córdoba y Zaragoza.

La HMEM ha estado presente en las revistas españolas de forma notable. En un estudio realizado sobre los artículos de 8 revistas españolas indexadas en la base de datos MathEduc, se halló que aquellos etiquetados como *A30: biografías. Historia de las matemáticas* eran los de mayor número, representando el 6% del total de artículos (Bracho, Torralbo, Maz-Machado y Adamuz-Povedano, 2014).

Hace un lustro, González (2013a) realizaba un balance de la investigación en HMEM en España y afirmaba que las investigaciones eran escasas y que prácticamente se focalizan en análisis de libros de texto. Una revisión más actual y exhaustiva revela que sí hay un buen número de investigaciones sobre otros aspectos y que incluso puede establecerse una clasificación de ellas (Maz-Machado, Madrid, León-Mantero y Jiménez-Fanjul, 2017):

- *Matemáticos y autores de libros:* Concentran los estudios en los matemáticos (mayoritariamente españoles) y en autores de libros de texto que han tenido influencia y trascendencia en la formación matemática en España a lo largo de los siglos, tratando de dar a conocer a estos personajes a la sociedad, porque en su mayoría son prácticamente desconocidos para el gran público (por ejemplo, León-Mantero, Maz-Machado y Madrid, 2019; Puig y Fernández, 2013; Sanz y Gómez, 2018).
- *Legislación y currículo:* Son investigaciones en las que se busca indagar sobre los aspectos legales del pasado en relación con la enseñanza de las matemáticas y cómo han afectado tanto al aprendizaje como las metodologías empleadas (por ejemplo, Carrillo y Sánchez, 2010; Vea, 1986).
- *Libros de texto:* Buscan conocer la forma en que se presentan los contenidos, las estrategias didácticas presentes, el tipo de problemas y de qué manera se incorporan o se ven reflejadas las normativas educativas en un determinado periodo de tiempo (por ejemplo, Gutiérrez-Rubio y Madrid, 2018; Madrid, Maz-Machado, León-Mantero y López-Esteban, 2017; Sánchez y González, 2017).
- *Contextos históricos, científicos y sociales:* Tratan de identificar, conocer y analizar el entorno social, histórico y de la propia ciencia en el que se sucedieron diversos hechos relacionados con las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje a lo largo de la historia (por ejemplo, Oller-Marcén y Meavilla-Seguí, 2018; Rico y Maz, 2005).
- *Instituciones:* Centran su atención en determinadas instituciones que han tenido un lugar destacado en la formación matemática de grupos específicos (militares, ingenieros, etc.) o por el fomento de las matemáticas, tratando de identificar y conocer los aspectos que permitieron tal hecho y cómo se llevaron a cabo estos procesos (por ejemplo, Comas, 2015; Navarro, 2013).
- *Conceptos:* Son investigaciones focalizadas en el desarrollo de determinados conceptos matemáticos en España (por ejemplo, Maz y Rico, 2009; Picado, Rico y Gómez, 2015; Sierra, González y López, 1999).

- *Narrativas o historias de vida:* Estudian la vida y el trabajo de los docentes en su contexto histórico, ayudando a desarrollar nuevas perspectivas para la construcción social de la enseñanza y a su vez contribuyen a la producción de una variedad más amplia de conocimientos profesionales enfocados hacia el ámbito docente (por ejemplo, González, 2013b; Sotos y López, 2015).

En los Simposios de la SEIEM la Historia es un tema recurrente a lo largo de los años (Blanco, 2011). Esta presencia de la investigación en HMEM en España se hace visible con el otorgamiento de proyectos de investigación en el campo en las diferentes convocatorias dentro del Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica y de Innovación para el desarrollo de las actividades de I+D+I así como en otras de carácter autonómico. Así mismo, la participación de investigadores españoles con temáticas de HMEM en congresos internacionales ayudan a la internacionalización de este tipo de investigaciones que se realizan en el ámbito español.

Las recientes tesis doctorales realizadas en España en esta rama de la Educación Matemática indican que se están formando nuevos investigadores en HMEM. Esto es positivo para el campo porque empiezan a hallarse nuevas técnicas de investigación que van más allá de las valoraciones cualitativas y a veces subjetivas.

Sin embargo, es necesario señalar que el interés de esta investigación es prácticamente local, es decir, se investiga el desarrollo histórico de las matemáticas y la educación matemática en España y son pocas las que abordan la historia de fuera de España.

Todos estos antecedentes han llevado a la SEIEM a promover la realización de este seminario de investigación dedicado a la HMEM. Para ello contamos con tres ponencias de investigadores con experiencia y que presentan perspectivas distintas sobre las inquietudes, propósitos o técnicas en la investigación en HMEM tanto a nivel nacional como internacional.

Referencias

Blanco, L. J. (2011). La investigación en educación matemática. *Educatio Siglo XXI, 29*(1), 109-128.

Bracho, R., Torralbo, M., Maz-Machado, A. y Adamuz-Povedano, N. (2014). Tendencias temáticas de la investigación en educación matemática en España. *Bolema, 28*(50), 1077-1094.

Carrillo, M. D. y Sánchez, E. (2010). La introducción de la geometría en la escuela primaria (1838-1868). En E. Collelldemont, N. Padrós e I. Carrillo (Eds.), *Memoria, ciudadanía y museos de educación* (pp. 158-170). Barcelona: Universitat de Vic.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. En K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.): *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonius Partnership (ICME-13 monographs)* (pp. 1-23). Cham, Suiza: Springer.

Comas, J. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Fauvel, J. y van Maanen, J. A. (2006). *History in Mathematics Education: The ICMI study*. Nueva York, EE. UU.: Springer Science & Business Media.

González, M. T. (2013a). La investigación en historia de la educación matemática en España. *REMATEC, 8*(12), 101-119.

González, M. T. (2013b). Las Historias de vida como metodología para la investigación en historia de la Educación Matemática. El caso del profesor Cuesta Dutari (1907-1989). *SIGMA, 11*(1), 1-9.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica, 31*(2), 163-185.

Gutiérrez-Rubio, D. y Madrid, M. J. (2018). Geometría Selecta Theorica, y práctica del matemático cordobés Gonzalo Antonio Serrano. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *1*(1), 32-39.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Madrid, M. J. (2019). Juan Cortázar (1809-1873): profesor, autor y matemático. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *22*(1), 159-169.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del Siglo XVI. *Bolema*, *31*(59), 1082–1100.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 537-554

Maz-Machado, A., Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Jiménez-Fanjul, N. (2017). Research trends in the history of mathematics education: the Spanish case. En K. Patterson (Ed.), *Focus on Mathematics Education Research* (pp. 150-182). Londres, Reino Unido: Nova.

Navarro, J. (2013). *Don Pedro Giannini o las matemáticas de los artilleros del siglo XVIII*. Segovia: Biblioteca de Ciencia y Artillería.

Oller-Marcén, A. M. y Meavilla-Seguí, V. (2018). Arithmetic in the Spanish army at the end of the 19th century: the textbooks by Salinas and Benítez. En F. Furinghetti y A. Karp (Eds.), *Researching the History of Mathematics Education. An international overview* (págs. 167-187). Cham, Suiza: Springer.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 175-196.

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143–150). Granada: Comares.

Rico, L. y Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con la enseñanza en España. En M. Torralbo (Ed.), *El libro español de Matemáticas* (pp. 11-35). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX : estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de Las Ciencias*, *35*(3), 89–106.

Sanz, M. T. y Gómez, B. (2018). Missing curious fraction problems. The unknown inheritance and the unknown number of heirs. En K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.): *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonius Partnership (ICME-13 monographs)* (pp. 193-208). Cham, Suiza: Springer.

Schubring, G. (2006). Researching into the history of teaching and learning mathematics: the state of the art. *Paedagogica Historica, 42*(4-5), 665-677.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 463–476.

Sotos, M. y López, M. C. (2015). El proceso de construcción del saber pedagógico en Educación Matemática: el caso de María Antònia Canals. *Épsilon, 90*, 59-69.

Vea, F. (1986). *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL SIGLO XVIII A TRAVÉS DE LIBROS HISTÓRICOS Y SU REFLEJO EN LA ENSEÑANZA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE MANUALES[v]

The institutionalization of Mathematical Analysis in the 18th century through historical books and his image in teaching for Secondary Education in Spain through the analysis of textbooks

López-Esteban, C.

Universidad de Salamanca

Resumen

La historia de las Matemáticas y la educación matemática contribuye a conocer el tratamiento matemático que distintos contenidos han recibido a lo largo de los años. En este trabajo vamos a relacionar el proceso histórico del Análisis Matemático y su enseñanza en Educación Secundaria en España, lo que mostrará que las dificultades históricas en la construcción de distintos conceptos de esta rama de conocimiento resultan esenciales para conocer cuáles han sido las etapas que han dirigido la docencia hasta donde está hoy en día. Se ha realizado un análisis de tipo histórico utilizando como herramienta el análisis de contenido de libros de Matemáticas antiguos y manuales de enseñanza, técnica ampliamente utilizada en investigaciones en este campo. Los resultados muestran cómo se ha consolidado una rama potente de las Matemáticas, que hoy día invade todos los dominios de las ciencias e incluso de las humanidades: el Análisis Matemático, y cómo se adaptan los manuales usados en la enseñanza en Educación Secundaria en España a los currículo oficial en cada época, así como algunos de estos manuales pueden ser considerados puntos de transición.

Palabras clave: *Análisis Matemático, historia de las Matemáticas y la educación matemática, manuales, Educación Secundaria.*

Abstract

History of mathematics and mathematics education helps to understand the mathematical treatment that different contents have received throughout the years. In this work, we will relate the historical process of mathematical analysis and its teaching in Secondary Education in Spain, which will show the historical difficulties in the construction of different concepts of this branch of knowledge are essential to know what have been the stages that have directed the teaching to where it is today. An analysis of historical kind has been carried out using as a tool the content analysis of old mathematics books and textbooks, a technique that is widely used in research in this field. The results show how a powerful branch of mathematics has been consolidated, which nowadays invades all the domains of the sciences and even of the humanities: the Mathematical Analysis, and how they adapt the manuals used in the teaching in Secondary Education in Spain to the official curriculum in each age, as well as some of these manuals can be considered transition points.

Keywords: *Mathematical Analysis, history of mathematics and mathematics education, manuals, Secondary Education.*

López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). Valladolid: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación pretende mostrar la evolución de una disciplina escolar, el Análisis Matemático, y su enseñanza en Educación Secundaria en España. Los orígenes de los sistemas educativos modernos, vinculados al desarrollo del capitalismo, son los fundamentos de las disciplinas escolares. Estudios sobre la historia del currículum y las disciplinas escolares (Foucault, 1992; Goodson, 1991, 1995) constatan que todo conocimiento es realizado y construido en un contexto social. Goodson (1991) indica que "el currículum puede entenderse como una "tradición selectiva" compuesta tanto por lo que se dice como por lo que se omite" (p. 33), mientras que Foucault (1992) afirma que "las disciplinas escolares nacidas dentro del contexto institucional de los sistemas educativos son saberes-poderes" (p. 425).

Estas investigaciones concluyen que los campos de conocimiento no están constituidos por el discurso teórico o científico, sino por la práctica cotidiana y reglamentada. Estas consideraciones sociológicas e históricas de las materias de enseñanza nos llevan a la afirmación de que las disciplinas escolares posen una autonomía constitutiva con respecto a las ciencias de referencia, surgidas en contextos sociales diferentes. Los contenidos de la enseñanza se conciben como entidades en sí, no como meras adaptaciones o imitaciones de los conocimientos científicos (Chervel, 1991). Esta misma idea está recogida en los trabajos de Popkewitz, sintetizada en la siguiente cita de Popkewitz (1994): "Las diferencias sustanciales entre los saberes científicos y las asignaturas del currículum son el resultado de una especie de "alquimia" producida en el espacio social de la escuela" (p. 127).

Los programas son los textos visibles que contienen la formulación de las fronteras de la disciplina. No son una creación natural, son el resultado de tradiciones y usos educativos, nos informan de intenciones, pero no sobre las prácticas escolares, aunque indirectamente puedan sugerirlas. Constituyen ese arbitrario cultural que se gesta históricamente y son "fármacos de la memoria" (Lledó, 1994). Los cuestionarios explicitan los contenidos, pero los libros de texto son los que poseen un uso social en el aula, son artefactos culturales que intervienen en los procesos pedagógicos como mediadores entre profesores y alumnos.

En este sentido se puede afirmar que las disciplinas escolares, y así también Análisis Matemático en Educación Secundaria, forman parte de un tipo especial de conocimiento que sólo es posible estudiar dentro de su contexto institucional. Es lo que se viene llamando *código disciplinar* (Cuesta-Fernández, 1997), constituido por el conjunto de ideas, valores, suposiciones, reglamentaciones y rutinas prácticas que a menudo se traducen en discursos legitimadores y en lenguajes públicos sobre el valor educativo de la disciplina, y que orientan la práctica profesional de los docentes. El código disciplinar no es una realidad estática, es una creación social que tiene un proceso de construcción y no de creación.

Como han señalado algunos investigadores (Radford, 1997, o Artigue, 1998), la cultura es un factor de gran influencia en la Educación Matemática. Es decir, el desarrollo del conocimiento no tiene lugar únicamente dentro de la estructura de la evolución natural del sujeto, sino, también, dentro de las estructuras socioculturales del desarrollo, teniendo en cuenta los factores socioculturales. Es decir, como el conocimiento es también una producción cultural ineludiblemente relacionada con el medio, los factores culturales influyen. Como señala Radford, "Las Matemáticas son, básicamente, manifestaciones semióticas de ciertos elementos culturales que sus miembros desarrollan a través de experiencias compartidas y desde donde se forman el significado de los productos".

Los manuales escolares

Es oportuno iniciar mencionando que existe cierta ambigüedad en torno a la denominación de nuestro objeto de estudio, los materiales impresos enfocados a la enseñanza escolar.

> En el área iberoamericana, en idioma español (o castellano) se usan principalmente tres sustantivos para indicar el nivel más general y abarcativo: libros, textos y manuales, seguidos o no, del adjetivo "escolar". Tendríamos así, en principio: libros escolares, libros de texto, textos escolares, manuales, o manuales escolares. (Ossenbach y Somoza, 2001, pp. 15-16).

En ese reporte, estos autores mencionan que el español no es el único idioma en el que se presenta esta pluralidad de términos (en inglés, *textbooks* o *schoolbooks*; en portugués, *livros didáticos*, *textos didáticos*, *manuais escolares* o *livros para crianças*) pero hay cierta tendencia a nombrarlos como manuales escolares, debido entre otras razones a la influencia francesa (*manuels scolaires*) como también por hacer referencia a libros manejables –a la escala de la mano-, destinados a la enseñanza –escolares-.

En nuestro caso, concordamos con la distinción hecha por Gómez:

> En un sentido amplio, un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido. […] A partir de la implantación del sistema público de enseñanza surge el género más conocido de los libros de texto: los manuales escolares. Un manual es un libro de texto que es utilizado en la escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. (Gómez, 2009, p. 22).

Nuestro análisis lo haremos a partir de los manuales escolares utilizados para la enseñanza del Análisis Matemático en Educación Secundaria en España. Sin embargo, cabe aclarar que algunos autores hacen uso indistinto de los términos libro de texto o manual escolar.

METODOLOGÍA

Se trata de un trabajo de tipo descriptivo y ex post facto, enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico (Fox, 1980). En la investigación histórica en Educación Matemática existen tres niveles, cada uno de los cuales profundiza el anterior. En primer lugar, están las leyes, decretos y órdenes ministeriales que señalan las ideas del partido gobernante y que se traducen en desarrollos curriculares (en el caso español los decretos de mínimos del gobierno central y su desarrollo por las comunidades autónomas. Un segundo nivel es el análisis de libros de texto y materiales curriculares que tratan de desarrollar el currículo oficial. Finalmente, el tercer nivel ligado a la acción del profesor en el aula. Schubring (1987) señala esta acción del profesor en el aula como clave para entender los procesos de enseñanza-aprendizaje a lo largo de la historia, pero, desafortunadamente, no tenemos documentos para estudiarla. Un buen instrumento podría ser la investigación sobre los exámenes de matemáticas de una institución escolar a lo largo de su historia, pues el examen refleja lo que el profesor quiere que sus alumnos hayan aprendido, pero en España no existe ni tradición ni obligación legal de conservar los exámenes.

Hasta los años 80 el libro de texto era considerado como un material menor, simple divulgador del saber científico. Como señala Escolano (1997), el interés por investigar los manuales escolares se pone de manifiesto en los historiadores de la educación al intentar cubrir uno de los vacíos historiográficos existentes en la historia del currículum. En palabras del profesor Agustín Escolano, los textos se convierten en "fuentes imprescindibles para desvelar algunos de los silencios de la intrahistoria de la escuela, es decir, las claves internas que pueden elucidar la gramática que ordena la vida de la institución educativa" (p. 15). Así, los textos se convierten en espacio de memoria, soporte curricular, espejo de la sociedad, modos de apropiación de la cultura academizada en el que se reflejan los métodos y estrategias utilizados por los maestros. En definitiva, como la materialización del currículum en todas sus dimensiones, en sus estructuras, en sus valores y en sus formas de desarrollo.

En el marco de la investigación histórica en Educación Matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. Además, "los libros de texto determinan la práctica de la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos" (Schubring, 1987, p. 41). Por otra parte, diversos autores destacan el papel que los manuales escolares pueden tener dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje:

> Hasta hace poco tiempo los libros eran el único instrumento de transmisión del conocimiento matemático en el contexto educativo. Por ello, el estudio de los libros antiguos de matemáticas ofrece una inmejorable ventana para conocer no solo el tratamiento de los conceptos matemáticos en su época. También lo es para estar al tanto de la actividad intelectual de una sociedad, así como las modas y tendencias pedagógicas imperantes en ciertas regiones o países. (Maz-Machado, López y Sierra, 2013, p. 78).

Según Schubring (2014), a comienzo del siglo XX, en concreto en el año 1901, se publicó el libro de Grosse sobre los libros de texto de aritmética desde el siglo XVI, libro que inauguró la subárea de la historia de la educación matemática dedicada al análisis de libros escolares. Pero desde hace unos veinte años, a nivel internacional, se ha forjado una línea de investigación en este campo. El año 2000 representa un punto de inflexión en el aumento de las investigaciones y publicaciones sobre historia de la educación matemática, por la publicación del libro *History in mathematics education: the ICMI study* (Fauvel y Van Maanen, 2000). En él se presentan una variedad de metodologías y estrategias específicas para este tipo de estudios que han servido de orientación a investigaciones en este campo.

En España, dentro de la comunidad de investigadores en Educación Matemática los libros de texto son objeto de estudio desde muy diversas perspectivas. Destacamos que los primeros trabajos que fueron el estudio de Sanz (1995) sobre los tipos y la función de las configuraciones gráficas de datos en los libros de texto de primaria y el trabajo de Rico, Gómez y Sierra (1997) sobre los libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. Trabajos posteriores son la tesis de Alexander Maz-Machado (2005), acerca de la forma de presentar los números negativos en los textos de matemáticas de los siglos XVIII y XIX; los trabajos de Sierra, González y López (1999, 2003), sobre la evolución de los conceptos de límite y continuidad en los libros de texto de Matemáticas de España; en Gómez (2011) podemos ver el marco de cómo el análisis de manuales se convierte en un problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas; los trabajos de Monterrubio y Ortega (2011), sobre diferentes modelos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas; de Azcárate y Serradó (2006), sobre tendencias didácticas en libros de texto de matemáticas; Martínez, Muñoz y Oller (2014), sobre el tratamiento dado a la proporcionalidad compuesta en libros de texto o el de García y Guillén (2010), sobre la aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en libros de texto. Dentro de las investigaciones históricas en Educación Matemática en España se incluyen las específicas sobre libros de texto destacados, por ejemplo, el análisis del Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación (Maz-Machado y Rico, 2013). También destacan aquellas que estudian el desarrollo histórico de conceptos matemáticos basándose en el análisis de libros para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, la evolución de los conceptos de análisis matemático en los libros de texto españoles de Enseñanza Secundaria del siglo XX (González y Sierra, 2002), el estudio de la aritmética y el álgebra en los libros de formación de maestros entre 1839 y 1971 (Sierra y López, 2013), la incorporación de las nuevas unidades métricas a los libros de texto en España en la segunda mitad del siglo XIX (Picado, Rico y Gómez, 2015) o el signo radical en textos para la enseñanza (Gómez, 2010). Así mismo, se ha estudiado la introducción del cálculo infinitesimal en España (Ausejo y Medrano, 2010; 2012). También los trabajos analizando autores y libros antiguos de los siglos XVI al XIX, como Maz-Machado y Rico (2015), Puig (2018), Madrid, Maz-Machado, León-Mantero y López-Esteban (2017) o Meavilla y Oller (2014).

Los investigadores en la línea de la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática encuentran en los libros de texto una fuente que les permite acercarse a otros periodos y comprender mejor la enseñanza de esta disciplina. Los libros de texto, en este caso de matemáticas, muestran los contenidos que se impartían en cada época permitiendo entender la evolución de estos conocimientos a lo largo del tiempo, pero junto a estos distintos contenidos matemáticos muestran otros aspectos didácticos que permiten comprender cómo se han enseñado estos a lo largo de los distintos periodos históricos.

Esto se debe a que los libros muestran los hábitos y las costumbres de cada período, la actividad intelectual, la organización de las ideas, las relaciones públicas de apropiación y exclusión del saber e incluso las modas o las tendencias que imperaban en cada época. Más específicamente, los libros para la enseñanza permiten observar la forma de transmitir el saber y de utilizarlo en los asuntos sociales (Maz-Machado y Rico, 2015).

En definitiva, el libro de texto permite conocer la evolución de un concepto o una idea matemática, las diferentes formas a través de las cuales los matemáticos del pasado se acercaron a él, las dificultades y el proceso gradual de simbolización, formalización y así sucesivamente (Bruckheimer y Arcavi, 2000). Además, los textos de matemáticas no son documentos únicamente formales, no se reducen a una secuenciación de conceptos y procedimientos, sino que son materiales docentes con propósitos educativos. Por eso incorporan otras informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático, enriqueciéndolo, y se proponen transmitir una serie de significados que faciliten la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001).

En definitiva, el análisis de textos antiguos facilita la reconstrucción de los conceptos, ayuda a contextualizarlos y a conocer los diversos acercamientos a lo largo de la historia, permite interrogar sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas y buscar los fundamentos de las formas actuales. A su vez, los textos antiguos aportan información sobre aspectos pedagógicos, por ejemplo, sobre las formas de organizar y presentar los contenidos, sus representaciones o las situaciones, problemas y ejercicios que se utilizaban para explicar los conceptos y métodos matemáticos (Gómez, 2001). Coincidimos con Dorce (2017) que afirma que la Historia de las matemáticas consigue dar otro punto de vista a los currículos y aportar una motivación extra al alumnado, que puede ser un hilo conductor de una clase más interesante y amena.

En esta ponencia me detendré brevemente en tres momentos del desarrollo del Análisis Matemático, a través de libros de texto históricos. Después estudiaré la incorporación y posterior desarrollo del Análisis Matemático en los Bachilleratos en España, siempre refiriéndome a los libros de texto, aunque contextualizándolos dentro de cada uno de los planes de estudio vigentes.

Pero antes de proseguir, hay que señalar que la organización didáctica "normalizada" del Análisis Matemático sigue un camino inverso del de su desarrollo histórico, mostrado en la Figura 1.

Figura 1. Desarrollo histórico del Análisis matemático

Este es el desarrollo histórico, mientras que el desarrollo didáctico sigue justamente el camino inverso. A mi juicio, esto ha provocado una descontextualización en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis en la enseñanza secundaria, que puede explicar algunas de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje. Como es bien conocido, la enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato presenta dificultades importantes. Si se observa lo que sucede, por ejemplo, con el aprendizaje de la Aritmética y Geometría, vemos que en los primeros años de la educación obligatoria se hace de forma experimental, en una fase posterior se pasa al razonamiento deductivo. No ocurre así con el Análisis Matemático. Hasta los 16 años los alumnos casi no han oído hablar del infinito, límite, convergencia, etc. Incluso en lo que se refiere a la tangente, la asocian con la recta tangente a una circunferencia en un punto; en consecuencia, no se ordena un conjunto previo rico en experiencias. Hay dificultades que persisten después de una primera enseñanza del Análisis. Bernard Cornu parte, en su tesis doctoral (Cornu, 1983), de una lista de obstáculos epistemológicos para la enseñanza del límite (fundamentados en el desarrollo histórico del concepto) y de las concepciones de los alumnos sobre el concepto de límite para construir una secuencia didáctica. Esta secuencia está basada en la realización de ciertas tareas que plantean situaciones abiertas y que favorecen las producciones orales (grabadas en magnetofón) y escritas de los alumnos. Así, diseña y desarrolla tres actividades de aproximación (geométrica, analítica y numérica) que pretenden plantear la necesidad de abordar el concepto de límite, y otra más que, basada en las anteriores, lo introduce en sus aspectos geométrico y numérico.

Anna Sierpinska, en su primer artículo relativo al tema (Sierpinska, 1985), propone una lista de obstáculos basándose en las dificultades que aparecen en la génesis histórica del concepto y en un estudio de casos -realizado con cuatro alumnos- donde pretende contrastar dichas dificultades. En un artículo posterior (Sierpinska, 1987), presenta una serie de sesiones con estudiantes de humanidades en las que pretende desarrollar el concepto mediante situaciones didácticas que favorezcan la superación de los obstáculos por parte de los alumnos. Los obstáculos que propone en este artículo son los mismos que en el anterior, pero reorganizados en función de una dualidad existente entre los mismos. La misma autora se plantea en un artículo relativamente reciente (Sierpinska, 1990) el significado del concepto de comprensión (para ella la comprensión es un acto, inmerso en un proceso de interpretación, y trae consigo un nuevo método de conocimiento) y da una lista de actos de comprensión que permiten hacer un estudio epistemológico de conceptos matemáticos. En segundo lugar, aplica el método anterior para hacer una clasificación de los actos de conocimiento y los correspondientes obstáculos que se deben superar para comprender el concepto de límite de una sucesión. Así, conjuga un nuevo método de análisis epistemológico con el concepto de obstáculo epistemológico.

En la línea de los obstáculos epistemológicos, pero enfocados no a la detección de estos sino a la ingeniería didáctica, se halla un trabajo de Robinet (1983) en el que, después de estudiar la génesis histórica del concepto y su lugar en los manuales franceses, propone una didáctica basada en un estudio gráfico de funciones elementales que son familiares a los alumnos -la parábola e hipérbola, entre otras- para ir, poco a poco, generalizando el concepto.

Así, si el primer aprendizaje del Análisis se hace de modo mecánico, no tardan en aparecer las dificultades y errores, pero, a veces, es ya tarde para atajarlos. Un concepto matemático no tiene una forma dada de una vez para siempre y un contenido que no varía; no es cierto que la última evolución del concepto reemplace a las precedentes y las destruya; sino que no existe sin las anteriores versiones, sin fundamentar en ellas su sentido. El análisis de libros de texto históricos puede ayudar a comprender esto y a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

RESULTADOS

Inicio, consolidación e institucionalización del Análisis Matemático, a través de libros históricos

1.- Inicios del Análisis Matemático

Los orígenes del cálculo integral se remontan al mundo griego, concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes realizó en el siglo III a. C.

A Arquímedes se le deben innumerables cálculos de áreas y volúmenes; algunos tan importantes y difíciles como el área de la superficie esférica o la longitud de una vuelta de espiral mediante el método de *exhaución de Eudoxo* -para lo cual debía conocer de antemano la solución-. Sus escritos se perdieron hasta el siglo XVII.

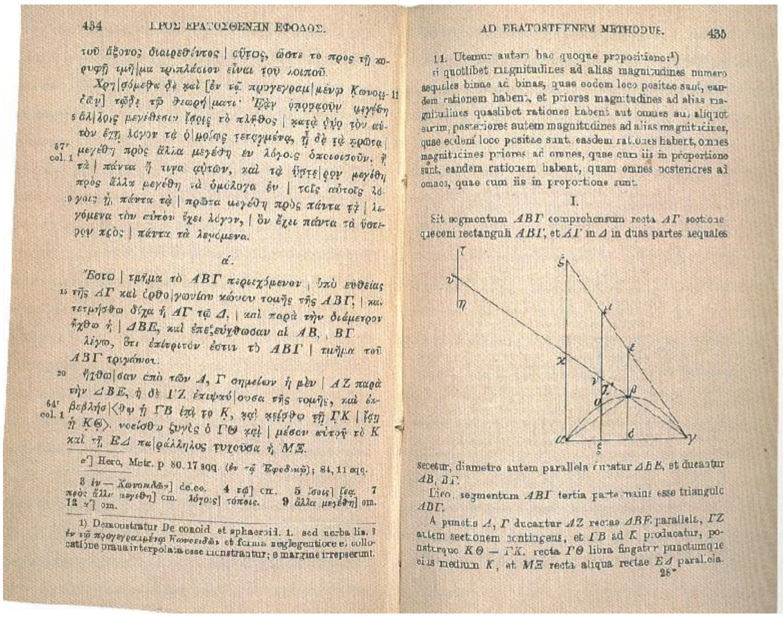


Figura 2. *Archimedis Opera omnia*, de Heiberg (1911)

http://euler.us.es/~libros/images/archimedes230.jpg

Esta imagen está recogida en la exposición virtual: *El legado de las Matemáticas*. *De Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros* (en la web http://euler.us.es/~libros/index.html), que con motivo del año mundial de las Matemáticas se organizó en Sevilla en diciembre del año 2000. Se trata de la edición de 1911 debida a Johan Ludvig Heiberg, que en 1906 encontró un palimpsesto de 174 páginas de pergamino de piel de cabra conservado en Estambul de los siglos XII-XIV, un documento con texto que ha sido sobreescrito encima de una obra anterior. Así, debajo de varios textos litúrgicos, aparecieron varias obras de Arquímedes, incluida una obra denominada *El Método*. La imagen de la Figura 2 presenta la página donde Arquímedes describe el método de sus infinitos segmentos para cuadrar la parábola usando una palanca y moviendo convenientemente los correspondientes segmentos hasta que ambas figuras, triángulo y parábola quedasen equilibradas.

Según Durán (2000a), en el siglo XVII la necesidad de entender obras griegas difíciles como las de Arquímedes fue la que produjo el nacimiento del cálculo.

En el *Acta Eroditorum*, la primera revista científica mensual alemana publicada entre 1682 y 1782, fundada en Leipzig por Otto Mencke por iniciativa de Gottfried Leibniz y con el apoyo del duque de Sajonia, aparece en el año 1684 un trabajo de Leibniz (1646-1716), que se ha considerado como el artículo fundador del cálculo infinitesimal: *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationalis quantities moratur et singulare pro illis calculus genus*, que incluía la solución al problema de Beaune: hallar una curva cuya subtangente que sea constante.

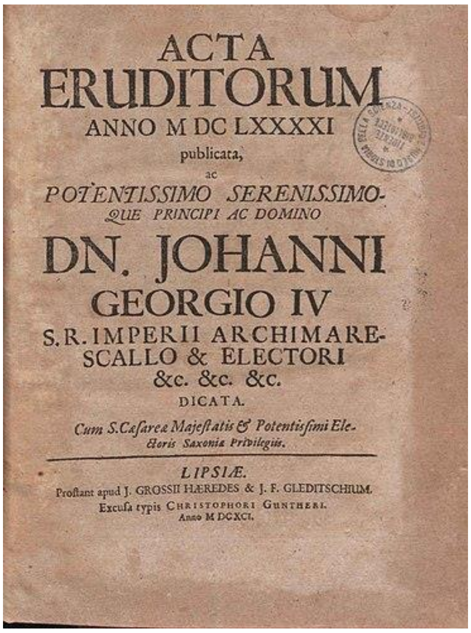


Figura 3. Acta Eruditorum, Januarii 1691

https://gutenberg.beic.it/view/action/nmets.do?DOCCHOICE=13350590.xml&dvs=1563741411255~285&locale=es_ES&search_terms=&show_metadata=true&adjacency=&VIEWER_URL=/view/action/nmets.do?&DELIVERY_RULE_ID=7&divType=&usePid1=true&usePid2=true

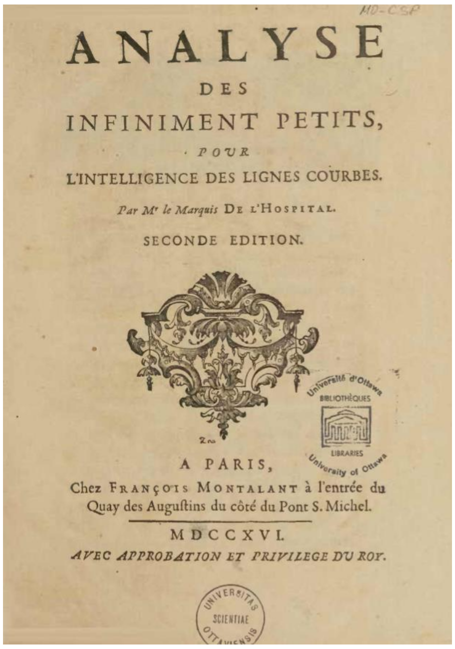
Según señala Cuesta Dutari (1985), el artículo debería titularse "Ecuaciones diferenciales, un nuevo método de investigación geométrica"; lo verdaderamente interesante del artículo de Leibniz es que plantea, en una ecuación diferencial, el problema de las curvas de subtangente constante y resuelve este problema.

En el discurso inaugural del curso 1913-14 que Rey Pastor (1913) dictó en la Universidad de Oviedo señala que el método infinitesimal estaba ya tan adelantado antes de Newton y de Leibniz, que el problema consistía principalmente en descubrir una notación adecuada para que fueran posibles progresos esenciales. Esta notación fue encontrada por Leibniz en 1675, aunque Newton parece haber estado desde 1676 en posesión de las ideas de fluente y fluxión, pero en sus famosos *Philosophiae naturalis principia mathematica* no los utiliza, y las primeras noticias indirectas de sus ideas datan de 1693 por la obra de Wallis. La exposición completa no fue hecha hasta 1736, después de la muerte de Newton. No pretendemos tomar posiciones en la famosa polémica sobre la prioridad del Cálculo infinitesimal que tanto apasionó a los contemporáneos y aun a algunos autores actuales.

Pero quienes realmente perfeccionaron el Cálculo, en su aspecto instrumental, fueron los hermanos Jacobo (1654-1705) y Juan Bernouilli (1667-1748), profesores de la Universidad de Basilea. Hay dos volúmenes de la *Opera Omnia* de Jacobo, impresos en 1744 y cuatro de Juan Bernouilli, impresos en 1742. Este fue el primero que propuso el *problema de la braquistócrona*, es decir, el problema de encontrar la curva por la que bajando un grave desde A hasta B, lo hace en el mínimo tiempo.

Juan Bernoulli dio lecciones al Marqués de L'Hôpital (o de L'Hôspital) (1661-1704) y fruto de esas lecciones fue el primer libro de texto del Análisis infinitesimal titulado *Analyse des infinements petits pour l´intelligence des lignes courves*, escrito por el Marqués y publicado en 1696, aunque los descubrimientos que aparecen en él son obra de Bernouilli. Ya en vida de L'Hôpital, Juan Bernoulli reclamó para sí la autoría de los descubrimientos del libro y posteriormente este reclamo fue hecho por sus discípulos; el asunto se aclaró cuanto en 1955 se publicó el contrato por el cual Bernouilli se comprometía a ceder sus descubrimientos a L'Hôpital por una suma de dinero; esto nos muestra la actividad matemática como una actividad humana sometida a sus grandezas y a sus miserias.

El libro de L'Hôpital pretendía ser, en efecto, un libro de texto y por eso está escrito en lengua romance.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du
Quay des Auguſtins du côté du Pont S. Michel.
MDCCXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figura 4. *Analyse des infinements petits pour l´íntelligence des lignes courves*, L'Hôpital (1716-2ª edición)

https://ia902709.us.archive.org/27/items/infinimentpetits1716lhos00uoft/infinimentpetits1716lhos00uoft.pdf

L'Hôpital se basa en dos postulados:

- Postulado I: Dos cantidades cuya diferencia sea una cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse la una por la otra.
- Postulado II: Una línea curva puede considerarse como el agregado de un número infinito de líneas infinitamente pequeñas.

El contenido el libro es el siguiente:

- Sección Primera: Donde se dan las reglas del cálculo de diferencias.
- Sección 2: Uso del cálculo de diferencias para encontrar las tangentes de todas las clases de líneas curvas.
- Sección 3: Uso del cálculo de diferencias para encontrar las más grandes, y las menores aplicadas. A lo que se reducen las cuestiones de máximos y mínimos.
- Sección 4: Puntos de inflexión y retroceso
- Sección 5: Evolutas
- Sección 6: Caústicas por reflexión
- Sección 7: Caústicas por refracción
- Sección 8: Encontrar los puntos de la curva que toca a una infinidad de líneas dadas en posición
- Sección 9: Solución de problemas que dependen de los métodos precedentes

- Sección 10: Utilidad en las curvas geométricas y de lo cual se deducen los métodos de Descartes y Hudde.

El lenguaje que utiliza L'Hôpital es esencialmente geométrico, los problemas están planteados sobre curvas concretas, como el *folium de Descartes* o la *parábola semicúbica de Neil* que hoy han desaparecido prácticamente de los programas del Bachillerato y de la Universidad, aunque muchas de ellas son utilizadas en arquitectura.

Juan Bernouilli continuó esta labor de divulgación del Análisis Matemático en una obra que aparece en el tomo 3º de su *Opera Omnia* y consta de 59 lecciones; en definitiva, los Bernouilli perfeccionaron el Cálculo en su aspecto instrumental, quedando la fundamentación en un segundo plano.

2.- Consolidación de los métodos del Análisis

Un segundo momento en el desarrollo de Análisis lo tenemos con Euler (1707-1783), que según señala Durán (2000b) fue el catalizador que transformó a lo largo del siglo XVIII el Cálculo en Análisis. Su trilogía *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1770) son libros de texto que marcan la cumbre del Análisis Matemático en ese siglo. De *Introductio* ha dicho André Weil (1906-1998), premio Wolf de Matemáticas en 1979: "Nuestros estudiantes de matemáticas sacarían más beneficio del estudio de *Introductio in Analysin Infinitorum*, que de los modernos libros de texto" (Weil, 1979, p. 124).

De *Introductio in analysin infinitorum* tenemos un magnífico facsímil editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales* con notas magistrales de Antonio Durán; en esta obra no hay cálculo diferencial.

En *Institutiones calculi diferentialis*, editado por vez primera en 1755, es donde Euler trata el cálculo diferencial. El libro se divide en dos partes: la *partis prioris* y la *partis posterioris*. En la primera se ponen los fundamentos del Cálculo diferencial y en la segunda se trata, entre otros asuntos, la teoría de series, aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales, máximos y mínimos, la interpolación de series y el uso del Cálculo diferencial a la resolución de fracciones. Euler se inclina por la notación del Leibniz dy/dx frente a la notación fluxional de Newton.

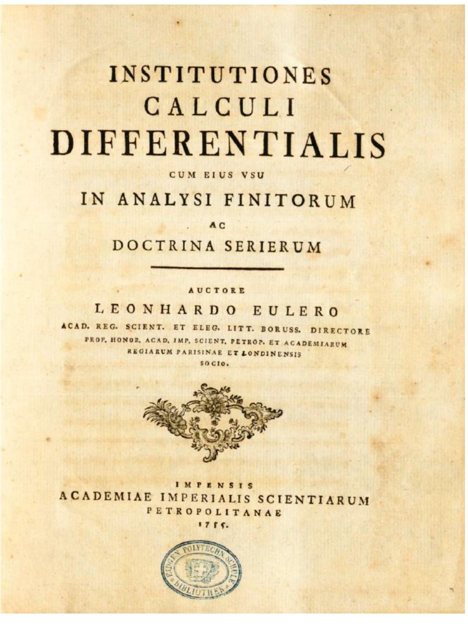


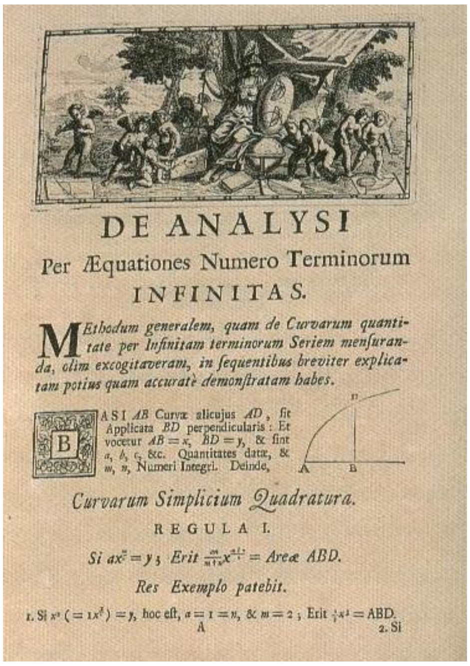
Figura 5. *Institutiones calculi diferentialis*, Euler (1755)

https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3788

El lenguaje es esencialmente algebraico, rompiendo con el pensamiento geométrico predominante en autores anteriores. Las aplicaciones que se consideran a lo largo del libro son exclusivamente algebraicas, haciéndose más énfasis en la expresión simbólica de la función que se está estudiando que en cualquier otro tipo de representaciones. Se pasa de la consideración de objetos geométricos a la consideración de objetos algebraicos que se constituyen en sí mismos en verdaderos objetos matemáticos, esto supone una auténtica revolución en el campo de las Matemáticas como disciplina y en los objetos que son estudio de la misma.

En sus trabajos, Euler se apoyaba en un oscuro paso al límite sin formulación explícita; perfeccionó las notaciones, e introdujo ya de modo definitivo los signos *e* para el número trascendente base de los logaritmos neperianos; *i* para la unidad compleja; y las funciones trigonométricas, donde fija el signo π para expresar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

En la misma época, Newton escribió otra obra sobre el cálculo *De analyse per aequationes numero terminorum infinitas* en 1669, aunque la publicó en 1711. Presentamos una imagen de la portada de su primera edición, donde aparece el gráfico del cálculo del área bajo la parábola $x^{m/n}$ usando el teorema fundamental del cálculo mediante primitivas.



DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum

INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

2. Si

Figura 6. *De analyse per aequationes numero terminorum infinitas*, Newton 1669-1711

http://www.newtonproject.ox.ac.uk/

http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

El siglo XVIII contempla un desarrollo espectacular del Análisis Matemático en su aspecto algorítmico, no en su aspecto conceptual ni riguroso. Surgen discrepancias con el nuevo método, la más conocida es la del obispo irlandés Berkeley (1685-1753); su obra de tan solo 104 páginas se tituló *The Analyst* (Berkeley, 1734).

Algunos matemáticos intentaron despojar al Análisis de su metafísica. Así, D’Alembert (1717-1783) publica, en la *Enciclopedia* francesa, artículos en los que ya se definen de una manera más rigurosa conceptos como los de límite y continuidad.

3.- Institucionalización

Corresponderá a Augustin Louis Cauchy (1789-1857) el mérito de iniciar la vuelta al rigor expresivo del Análisis. Su posición como profesor de la Escuela Politécnica de París, centro comunal de la matemática del mundo en esos momentos, le aseguró una fuerte influencia. Según Schubring (1987), hay que considerar la obra de Cauchy como la obra de una institución colectiva. Cauchy organiza el Análisis Matemático tal y como lo conocemos en nuestros días, hay en su obra una vuelta al rigor de los griegos.

En su *Analyse Algébrique*, libro de texto para los alumnos de la Escuela Real Politécnica, publicado en 1821, asegurará*:*

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoi-

He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del Álgebra.

Figura 7. Cauchy, 1821, introducción ii.

Observando que el Análisis se sustenta en el concepto de función, Cauchy da una definición muy parecida a la de hoy, y que, a mi juicio, es la que se debería enseñar en Bachillerato.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.

Cuando cantidades variables están de tal modo ligadas entre ellas que, al dar un valor a una de ellas, se puede obtener el valor de todas las otras, se concibe de ordinario estas diversas cantidades expresadas unas mediante las otra, que toman entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se llaman funciones de esta variable.

Figura 8. Cauchy, 1821, p. 19.

Cauchy tendrá también el mérito de poner en claro el paso al límite que se encontraba subyacente en toda la obra matemática anterior. Tomándola como operación originaria, obtiene los conceptos de función uniforme y de derivada de una función. En cuanto al Cálculo integral, Cauchy da un radical cambio al enfoque existente. Vuelve al estilo geométrico y retoma el *método de exhaución* de Eudoxo, en lugar de los indivisibles. Además, Cauchy señala la importancia del concepto de serie convergente.

Posteriormente, la aparición de funciones patológicas dará lugar a un nuevo enfoque conocido con el nombre de *Aritmetización del Análisis,* cuyo planteamiento excede los objetivos de este trabajo.


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Figura 9. *Analyse Algébrique Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* de Cauchy (1821)

https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n6

Conclusiones del análisis de libros históricos

En los ciento veinticinco años, el siglo XVIII extendido, que transcurren entre la publicación del libro de L'Hôpital y el de Cauchy, se consolida una rama potente de las Matemática, que hoy día invade todos los dominios de las ciencias e incluso de las humanidades: el Análisis Matemático. A lo largo de estos años se producen cambios importantes:

- Se evoluciona desde una concepción geométrica-dinámica a una concepción estática.
- Se hace desaparecer progresivamente la "metafísica del Análisis", definiendo los conceptos con mayor nitidez y refinando los procedimientos utilizados.
- Se pasa de una estructura de los libros de texto al estilo de los griegos a una estructura más didáctica, lo que es claramente palpable en las obras de Euler y Cauchy.
- Se pasa del estudio de curvas concretas al estudio de funciones generales, que se convierten en objetos matemáticos.
- Se maneja desde el principio un oscuro paso al límite, que se va refinando progresivamente hasta llegar a una definición precisa del mismo.

La enseñanza del Análisis matemático en los planes de estudio y libros de texto de Bachillerato

En los últimos años, primero en la Universidad de Salamanca y después en la Universidad de Córdoba, hemos llevado a cabo investigaciones sobre la evolución histórica de distintos conceptos del Análisis en los libros de texto, algunos de cuyos resultados se han publicado en revistas especializadas (por ejemplo, Sierra et al., 1999, 2003; González y Sierra, 2002, Madrid et al., 2017, López, Almaraz y Maz-Machado, 2017 y Maz-Machado et al., 2013). No voy a presentar aquí los resultados de estas investigaciones, sino una visión general de lo que ha sido la enseñanza del Análisis matemático en España a través de los libros de texto.

El Análisis matemático en España se introduce oficialmente en el plan de estudios de Bachillerato de 1934. Los libros de texto para este nivel contienen, a partir de este momento, lecciones dedicadas al Análisis. La producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, además existiendo en el caso español disposiciones oficiales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón, hemos agrupado los libros en periodos que, en líneas generales, corresponden a los sucesivos planes de estudio. En Rico y Sierra (1994) puede verse detalladamente el desarrollo histórico de estos periodos.

- Inicios y primeros desarrollos (1934-1967): Este periodo abarca desde la introducción del Análisis en el Bachillerato (1934) hasta 1967, en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el Bachillerato.
- Introducción de la matemática moderna (1967-1975): Se extiende desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) en 1975, derivado de la Ley General de Educación de 1970. Se han analizado los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media.
- Implantación y desarrollo del BUP (1975-1995): Este periodo comprende desde la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.
- Implantación y primeros desarrollos de los Bachilleratos LOGSE (1995-2001): Comprende los primeros años de la implantación de los nuevos Bachilleratos derivados de la LOGSE; las ideas constructivistas sobre el aprendizaje, y la enseñanza comprensiva en el marco de un currículo abierto, son ejes fundamentales en esta nueva Ley.
- Momento actual en la enseñanza del Análisis.

Dentro de cada periodo hemos realizado un análisis de los libros de texto en tres dimensiones (Sierra et al., 1999, 2003):

Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales del libro de texto que determinan la presentación del concepto.

Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir, como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto a los conceptos en cuestión, en nuestro caso el de límite funcional y la continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

El siguiente cuadro resume lo dicho anteriormente:

Tabla 1. Dimensiones de análisis de libros

Análisis conceptual	*Análisis didáctico-cognitivo*	*Análisis fenomenológico*
Secuenciación de contenidos. Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto. Ejemplos y ejercicios. Representaciones gráficas y simbólicas. Aspectos materiales.	Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo). Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes. Capacidades que se quieren desarrollar.	En torno a las propias matemáticas. En torno a otras ciencias. Fenómenos de la vida diaria

En cada uno de los periodos hemos encontrado libros que continúan anclados en el periodo anterior, libros que desarrollan las ideas contenidas en el currículo oficial y libros que anticipan las ideas que triunfarán en el periodo siguiente.

1.- Los inicios y primeros desarrollos de la enseñanza del Análisis Matemático (1934-1967)

Como ya se ha dicho, en el Plan de Estudios de 1934 se introduce por primera vez el Análisis matemático en el Bachillerato, fijándose un currículo que prácticamente llega hasta nuestros días (Gaceta de Madrid de 21 de Octubre de 1934). En este programa son notables las aplicaciones a la Física y a la Geometría, algo que se irá perdiendo progresivamente.

En los libros de esta época, como por ejemplo el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s. f., anterior a 1955), los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental, ya que, por ejemplo, en el estudio de los máximos y mínimos, lo que se pretende es: "Determinar los puntos en los cuales hay máximos o mínimos. Vamos a dar el procedimiento para llegar a determinarlos en las funciones más sencillas". (p. 479).

El libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez es una especie de enciclopedia de matemáticas, el esquema del libro sugiere que el tratamiento de los conceptos es cíclico a lo largo de todo el Bachillerato, ya que las diferentes partes del libro: aritmética, álgebra, geometría métrica, trigonometría, cálculo diferencial, geometría analítica y cálculo integral, están divididos en lecciones secuenciadas con indicación el curso al que corresponden. En cuanto a su concepción de las matemáticas, la idea que subyace es la de una matemática ya hecha, que el alumno debe memorizar y practicar, resolviendo ejercicios, de tal modo que los ejemplos son propios de la matemática, aunque aparecen situaciones de otras disciplinas como por ejemplo: la curva de la solubilidad en agua del Anhídrido sulfuroso (p. 433) o la importancia concedida a la función exponencial aplicada a las ciencias experimentales, enumerando cinco ejemplos. Los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental. En cuanto a las representaciones, tratan de ejemplificar lo explicado en el texto. El libro tiene escasos problemas remitiendo a otro libro de ejercicios y problemas escrito por los autores. Hay un aumento en la cantidad de ejemplos que suceden a las definiciones; con cada definición, propiedad o regla se da uno o varios ejemplos para ilustrarlos.

2.- Introducción de la matemática moderna (1967-1975)

Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación el Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) en el año 1975. Como es bien conocido, a comienzos de los años sesenta triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas "matemáticas modernas"; en el caso español, se introdujo progresivamente en los programas de Bachillerato. Las razones que se alegaron para dicha introducción están recogidas en Rico y Sierra (1994).

En 1962 se constituyó la *Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media*, presidida por el profesor Abellanas. La Comisión editó, en los años 1967 y 1969, *Textos piloto para el 5º y 6º curso de Bachillerato* (Abellanas, García, J., Rodríguez, Casulleras y Marcos, 1967, 1969), respectivamente, que se convirtieron de hecho en el nuevo programa de Matemáticas. Este programa progresivamente se fue implantando en el Bachillerato y sus cimientos son la Teoría de Conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas.

El *Texto piloto de sexto curso* de Bachillerato se estructura en lecciones, correspondiendo cuatro de ellas al Análisis matemático. Estas lecciones son funciones de variable real, derivada de una función, aplicaciones de la derivada, y cálculo integral.

En cuanto a la presentación del Análisis matemático, de acuerdo con la ideología bourbakista, hay un predominio de las definiciones de carácter topológico. Incluso en el caso de la discontinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que se utiliza para reafirmar el uso de los entornos. Además a lo largo de texto hay muy pocos ejercicios para que resuelvan los alumnos.

No se presenta ningún fenómeno fuera de la propia Matemática. Se puede considerar un libro eminentemente teórico, de perfil expositivo, en el que la formalización es el eje del discurso, con unos enunciados sumamente rigurosos, utilizando para ello una simbolización de gran nivel de abstracción. Las capacidades que se pretenden desarrollar en los alumnos son la adquisición del nuevo lenguaje de la matemática moderna con sus procedimientos, el aprendizaje de definiciones mediante actividades dirigidas y la aplicación de las definiciones a la resolución de ejercicios.

Es interesante resaltar que, aunque los promotores de la reforma, Papy y Dieudonné, entre otros, señalaron que las matemáticas están por todas partes y que son un instrumento para comprender la realidad, en escasas ocasiones, en sus obras dedicadas a la enseñanza, aparecen las matemáticas para interpretar fenómenos de otras ciencias. Igual sucederá en el caso español en los libros de texto de este periodo, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos, que trasmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

3.- Implantación y desarrollo del BUP (1975-1995)

A comienzos de la década de los setenta se emprende una reestructuración del sistema educativo español, que culmina con la aprobación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de agosto de 1970. Se estableció el Bachillerato Unificado y Polivalente, BUP, y el Curso de Orientación Universitaria, COU, necesario para acceder a estudios universitarios. La duración del Bachillerato se estableció en tres cursos (14-17 años). El plan de estudios se estructuraba en materias comunes, materias optativas y enseñanzas y actividades técnico-profesionales.

Las Matemáticas aparecieron como una asignatura dentro del área “Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza”. Sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el currículo para el nuevo Bachillerato (Decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el B.O.E. del 18 de Abril del mismo año). Las Matemáticas tenían un carácter de asignatura obligatoria en cada uno de los tres cursos del Bachillerato, aunque posteriormente las del tercer curso pasaron a ser opcionales.

Lo primero que hay que señalar es que durante esta época se produce una gran expansión editorial, consolidándose el paso de los *libros de autor* a los *libros de editorial*. Aparecen o se consolidan editoriales como Magisterio, Teide, Anaya y Santillana, entre otras.

Al analizar los libros de texto, y en especial lo referente al Análisis matemático, se observa que durante estos veinte años hay más de un currículo de Matemáticas vigente; sin embargo, no se modifican los programas oficiales durante estos años. El predominio de la matemática moderna no llega a cubrir la década de los setenta; de hecho, estuvieron sometidas a contestación permanente desde su implantación, aunque los programas correspondientes se mantuvieron vigentes. Por ello, estas dos décadas ponen de manifiesto que identificar programas con currículo, más que una simplificación, es una falacia (Rico y Sierra, 1994). Aunque la permanencia de los programas parece dotar a la enseñanza de las Matemáticas durante estos años de gran estabilidad, nada más lejos de la realidad.

En definitiva se puede asegurar que al finalizar el periodo, y aún vigente el plan de estudios de 1975, aparece una nueva generación de libros de texto que participan en las ideas pedagógicas derivadas de la LOGSE y en los que se nota la influencia de ciertas corrientes de la Didáctica de las Matemáticas, como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas. Entre las voces que se alzaron contra la matemática moderna, destacan las de los Grupos Cero de Valencia y Barcelona (por ejemplo, Grupo Cero, 1982) que, siguiendo la fenomenología de Freudenthal (1983), introduce y desarrolla los conceptos mediante una serie de actividades dirigidas.

4.- Implantación y primeros desarrollos de los Bachilleratos LOGSE (1995-2001)

Este periodo comienza con la implantación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) en la Educación Secundaria de forma generalizada a partir del año 1995, hasta la fecha. Aunque la Ley se promulgó en el año 1990 (3/10/1990), durante estos cinco años se fue implantando de forma progresiva en la Enseñanza Primaria, y de modo experimental se impartieron anticipadamente los Bachilleratos previstos en esta Ley.

Los contenidos incluidos en los libros son prácticamente los mismos y acordes con el programa a desarrollar: funciones, límites y continuidad, funciones derivables, aplicaciones de las derivadas, representación de funciones, cálculo de primitivas, e integral definida y sus aplicaciones. Uno de los libros más usado en esta época es el de la editorial SM (Vizmanos y Anzola, 1998). En este libro, en el prólogo indica cuál es su propuesta didáctica, que se basa en partir, siempre que sea posible, de situaciones próximas a la realidad de los alumnos y llegar a una generalización con un aparato matemático ajustado a la capacidad de abstracción del alumnado. Se incluyen reseñas históricas sobre el Cálculo y una gran cantidad de gráficas y dibujos geométricos, que sirven de apoyo intuitivo a la comprensión de los conceptos. Se hacen referencias al contexto cultural e histórico en el que se han surgido y desarrollado los principales descubrimientos del Análisis. Al final de cada capítulo, se incluyen ejercicios, problemas y cuestiones. Se hace alguna referencia al uso de las nuevas tecnologías, poniendo ejemplos e indicando la forma de utilización de otros medios, como calculadoras gráficas. Junto al uso de términos formales, también se incluyen algunos más intuitivos, fundamentalmente en la introducción de las definiciones, y hay una gran cantidad de ejercicios de aplicación para practicar tanto las reglas como los conceptos descritos

El límite es el concepto organizador de la enseñanza del Análisis matemático.

5.- Momento actual en la enseñanza del Análisis matemático

En los últimos tiempos asistimos a una introducción de calculadoras gráficas y distintos programas informáticos en la enseñanza del análisis. En las reformas curriculares llevada a cabo en algunos países, las calculadoras y los programas de cálculo simbólico juegan un papel importante. En los Estados Unidos se desarrolla desde 1986 el Proyecto *C^2PC (Calculator and Computer Pre-Calculus Project*), cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de Matemáticas para la enseñanza secundaria. Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, gráfica, numérica y algebraica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para lo cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

En España, la reforma del currículo de Bachillerato comenzó en 2001, y a mi juicio, se trata de un paso atrás, pues aunque se constata que los libros tienen ligeras variaciones sobre los libros del último periodo, en algunos libros desaparece del bloque transversal de Resolución de Problemas, aunque se presentan, tímidamente, modificaciones dirigidas al uso de calculadoras gráficas y programas informáticos.

Conclusiones del análisis de planes de estudio y libros de texto de Bachillerato

Los planes de estudio, aunque no se han presentado detalladamente, tienen las siguientes características:

- El desarrollo de los planes de estudio no ha sido uniforme, en cada una de las épocas. El análisis de libros de texto ha demostrado las diferencias notables existentes entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales. Esto prueba que, en efecto, la enseñanza está determinada más por los manuales que se utilizan en el aula que por los Decretos y Órdenes ministeriales.
- Se puede asegurar que hasta la última reforma derivada de la LOGSE, el currículo oficial se caracteriza por ser cerrado, con indicaciones precisas acerca del contenido, dispersas sobre la metodología y prácticamente nulas sobre la evaluación. La LOGSE preconiza un currículo abierto, pero en la práctica son las editoriales las que han marcado el desarrollo curricular.
- Existen "puntos de transición" en el desarrollo curricular oficial: la introducción de la matemática moderna o el aprendizaje constructivista preconizado en la LOGSE son claros ejemplo de ello. Además hay una clara influencia de las corrientes o "modas" internacionales en el currículo español.

En los libros de texto analizados en los diferentes periodos, se pueden observar las siguientes características:

- Paso progresivo de los *libros de autor* como los de Rodríguez San Juan, a los *libros de editoriales* como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana.
- Son producto de cada época con su lenguaje y sus justificaciones; términos como *intuición*, *matematización*, *rigor* o *matemática aplicada* tienen distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados, incluso en cada periodo de unos libros a otros.
- En cada época los libros se pueden clasificar en tres tipos: los que permanecen anclados en los planteamientos anteriores, los que desarrollan el currículo oficial y los que anticipan las nuevas ideas del siguiente periodo. Estos últimos están relacionados con los puntos de transición de los programas oficiales, como los textos piloto o el libro del Grupo Cero.
- El énfasis en los libros de texto está puesto o bien en la exposición de los conceptos de una forma rigurosa, o bien en la adquisición de ciertas destrezas y habilidades algorítmicas. A pesar de las ligeras variaciones en cada uno de los libros, lo que prácticamente no ha variado es el tipo de actividad que se espera del alumno, destacando la aplicación rutinaria de las reglas a ejercicios-tipo o ejercicios escolares. Una de las excepciones más notables es el libro del Grupo Cero.
- Hasta la reforma derivada de la LOGSE, el Análisis matemático era presentado de modo estático con pocas referencias a fenómenos y prácticamente sin contextualización histórica. A partir del año 1990, con la entrada en vigor de la LOGSE, la presentación de fenómenos que se organizan con los conceptos del Análisis matemático es cada vez más frecuente, así como la presentación de notas históricas.
- El uso de calculadoras gráficas y programas de cálculo simbólico, de modo inteligente, puede ayudar a que el Análisis recupere su sentido dinámico, pero esto supone un nuevo

enfoque del currículo, la desaparición de la reticencia en la Administración y Profesorado a aplicar estos nuevos recursos y la dotación adecuada de los Centros.

Referencias

Abellanas, P., García, J., Rodríguez, A., Casulleras, J. y Marcos, F. (1967). *Matemática moderna. Quinto curso*. Madrid: MEC.

Abellanas, P., García, J., Rodríguez, A., Casulleras, J. y Marcos, F. (1969). *Matemática moderna. Sexto curso*. Madrid: MEC.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(2), 231-261.

Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2010). Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787). *LLULL*, *33*(71), 25-56.

Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2012). La fundamentación del *Calculus* en España: el cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar (1760-1829). *LLULL*, *35*(76), 305-316.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Berkeley, G. (1734) *The Analyst*. Recuperado de: https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/

Bruckheimer, M. y Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history: An educational partnership. En V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 135-146). Washington, EE. UU.: MAA.

Cauchy, A. L. (1821). *Analyse Algébrique Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Recuperado de: https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n6

Chervel, A. (1991). Historia de las disciplinas escolares: reflexiones sobre un campo de investigación. *Revista de Educación*, *295*, 59-111.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles* (Tesis doctoral no publicada). Université I de Grenoble, Grenoble, Francia.

Cuesta Dutari (1985). *Historia de la invención del cálculo infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Cuesta-Fernández, R. (1997). *Sociogénesis de una disciplina escolar: la historia*. Barcelona: Pomares-Corredor.

Dorce, C. (2017). Juegos numéricos en el aula: números perfectos, amigos y sociables. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas, Vol. 3* (pp. 309-316). Madrid: FESPM.

Durán, A. J. (2000a). *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros.* Sevilla: Consejería de Cultura.

Durán, A. J. (2000b). Euler y los infinitos. En *Introducción al Análisis de los infinitos* (traducción al castellano de la edición facsímil de Euler *Introductio in Analysis Infinitorum*). Sevilla: SAEM Thales y RSME.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna, Suiza: Peter Lang.

Escolano, A. (1997). Introducción. En A. Escolano (Coord.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 13-17). Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi diferentialis*, San Petersburgo, Rusia: Academiae Imperialis scientiarum. Recuperado de: https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3788

Fauvel, J. y Van Maanen, J. A. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI study*. Nueva York, EE. UU.: Kluwer Academic Publishers.

Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J. L. (s. f., anterior a 1955) *Matemáticas. Tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo. Preparación del examen de estado*. Cádiz: Escalicer.

Foucault, M. (1992). Memoria redactada para la candidatura al Collège de France. En D. Eribon (Ed.), *Michel Foucault* (pp. 423-428). Barcelona: Anagrama.

Fox, D. (1980). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: EUNSA.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.

García, M. A. y Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 327-340). Lleida: SEIEM.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-275). Granada: Universidad de Granada.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-35). Santander: SEIEM.

Gómez, B. (2010). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Épsilon*, *77*, 9–22.

González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia De La Educación*, *21*, 177-198.

Goodson, I. F. (1991). La construcción social del currículum. Posibilidades y ámbitos de investigación de la historia del currículum. *Revista de Educación*, *295*, 7-37.

Goodson, I. F. (1995). *Historia del currículum. La construcción social de las disciplinas escolares.* Barcelona: Pomares-Corredor.

Grupo Cero (1982). *Matemáticas de Bachillerato volumen 2*. Barcelona: Teide.

Heiberg, J. L. (1911). *Archimedis Opera omnia, cum commentariis Eutocius.* Codice florentino recensuit. Recuperado de //catalog.hathitrust.org/Record/000168155

L'Hôpital (1716). *Analyse des infinements petits pour l´íntelligence des lignes courves* (2ª edición). París, Francia: François Montalant. Recuperado de: https://ia902709.us.archive.org/27/items/infinimentpetits1716lhos00uoft/infinimentpetits1716lhos00uoft.pdf

Leibniz, G. (1684). Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fracta nec irrationalis quantities moratur et singulare pro illis calculus genus. En *Acta Eroditorum Anno MDCLXXXIIII* (pp. 467-473). Leipzig, Alemania: Christopher Günther.

Lledó, E. (1994). *El surco del tiempo. Meditaciones sobre el mito platónico de la escritura y la memoria*. Barcelona: Círculo de Lectores.

López, C., Almaraz, F. y Maz-Machado, A. (2017). Formación de maestros en España en el periodo de entre siglos XIX y XX: la aritmética y el álgebra de José Dalmáu Carles. *History of Education & Children's Literature,* 12(1), 377-398.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del Siglo XVI. *Bolema, 31*(59), 1082–1100.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: SEIEM.

Maz-Machado, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la *Arithmetica Practica* de Juan de Yciar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada: Comares.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2013)."Tratado elemental de matemáticas", de José Mariano Vallejo, en el bicentenario de su publicación. *SUMA*, *74*, 55-63.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME*, *18*(1), 49–76.

Meavilla, V. y Oller, A. M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*, *87*, 59-68.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011) Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, *5*(3), 105-127.

Newton, I. (1711) *De Analyse per aequationes numero terminorum infinitas*. Recuperado de: http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

Ossenbach, G. y Somoza, J. M. (2001). *Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en América Latina*. Madrid: UNED.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 175-196.

Popkewitz, T. S. (1994). Política, conocimiento y poder: algunas cuestiones para el estudio de las reformas educativas. *Revista de Educación*, *305*, 103-137.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori y Universidad de Barcelona.

Puig, L. (2018). Dos errores famosos en la Arithmetica Algebratica de Marco Aurel reconsiderados. En M. D. Ruiz-Berdún (Ed.), *Ciencia y Técnica en la Universidad, Vol. II* (pp. 215-228). Alcalá de Henares, Madrid: SEHCYT y Universidad de Alcalá.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Rey Pastor, J. (1913). *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914: [Historia de la Matemática en España]*. Oviedo: Establecimiento tipográfico.

Rico, L., Gómez, B. y Sierra, M. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Coord.), *Historia Ilustrada del Libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 373-398). Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del Siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación Matemática e Investigación* (pp. 99-207). Madrid: Síntesis.

Robinet, J. (1983). Un expérience d´ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(3), 223-292.

Sanz, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos* (Tesis doctoral no publicada). Universidad del País Vasco, Bilbao.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.

Schubring, G. (2014). On historiography of teaching and learning mathematics. En A. Karp y G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 3-8). Nueva York, EE. UU.: Springer.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-36.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 463–476.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, *15*(1), 21-49.

Sierra, M. y López, C. (2013). Análisis de contenidos en aritmética y álgebra en manuales de formación de maestros (1839-1971). En L. Rico y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 375-402). Granada: Comares.

Vizmanos, V. y Anzola, M. (1998). *Matemáticas 2 (Ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología)*. Madrid: SM.

Weil, A. (1979). *Oeuvres Scientifiques / Collected Papers: Volume 1 (1926-1951). Volume 2 (1951-1964). Volume 3 (1964-1978)*. Berlín, Alemania: Springer.

[v] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto EDU2016-78764-P del Ministerio español de Economía, Industria y Competitividad y de los Fondos FEDER: “La enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. Descripción y análisis comparado de libros de texto”

OBSERVACIONES ACERCA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA[vi]

Remarks on the history of mathematics in educational mathematics

Puig, L.

Universitat de València Estudi General

Resumen

En este texto reflexionamos sobre formas de estudiar y usar la historia de las matemáticas que a nuestro entender puede decirse que son propias de la matemática educativa. En particular, reflexionamos sobre el planteamiento de preguntas a la historia de las matemáticas desde la problemática de la matemática educativa, sobre la consideración de los textos históricos como cogniciones petrificadas o como monumentos, sobre la introducción de un "principio de incorporación" para entender la complejidad de las relaciones entre ontogénesis y filogénesis, y sobre el efecto de desubicación o extrañamiento.

Palabras clave: *Historia de las matemáticas, matemática educativa, principio de incorporación, efecto de desubicación.*

Abstract

In this text we reflect on ways of studying and using the history of mathematics that we believe can be said to be specific to educational mathematics. In particular, we reflect on the questioning of the history of mathematics from the problematics of educational mathematics, on the consideration of historical texts as petrified cognitions or as monuments, on the introduction of an "embedment principle" to understand the complexity of the relationships between ontogenesis and phylogenesis, and on the dépaysement or defamiliarisation effect.

Keywords: *History of mathematics, educational mathematics, embedment principle, defamiliarisation effect.*

INTRODUCCIÓN

No pretendo plantear ninguna novedad al decir que las relaciones entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa son múltiples y de estilos distintos, basta con señalar que esa multiplicidad de relaciones está presente en el mismo nombre que hemos adoptado para el grupo de la SEIEM, cuyas siglas son HMEM: "Historia de las matemáticas y Educación matemática".

La decisión de unir Historia de las matemáticas y Educación matemática simplemente con la cópula "y" la tomamos precisamente para dar cabida en nuestro grupo tanto a trabajos que se plantean la indagación en el uso de la Historia de las matemáticas *en* la Educación matemática, como a trabajos que lo que estudian es la Historia *de* la Educación matemática.

Esa separación entre dos campos de investigación está presente también en el ámbito institucional. Así, por ejemplo, en el *International Congress on Mathematical Education* hace ya varias ediciones que existen en él dos *Topic Study Groups* distintos, uno con el nombre "The role of the history of mathematics in mathematics education" y otro con el nombre "The history of the teaching and learning of Mathematics".

Puig, L. (2019). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 117-130). Valladolid: SEIEM.

Pero esa distinción presente institucionalmente, por un lado, aunque pueda hacerse no deja de ser problemática en cuanto separa la historia de la educación matemática de la historia de las matemáticas, como si en el desarrollo de las matemáticas en la historia no hubieran tenido función alguna las prácticas de enseñanza de las matemáticas o la elaboración de textos matemáticos para la enseñanza o presentes en prácticas de enseñanza, y, por otro, no agota las posibilidades de establecimiento de distinciones entre sus relaciones. Por ejemplo, también podría tomarse como otro campo de investigación el uso de la historia de la educación matemática en la enseñanza de las matemáticas, o la inclusión de la historia de las matemáticas como materia de enseñanza –si en vez de un principio de parsimonia a la manera de Occam, se prefiriera una ley contra la tacañería, como decía Karl Menger.

Sobre este asunto hay una abundante bibliografía desarrollada alrededor del *International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), fundado hace más de cuarenta años[vii], que no voy a examinar ni resumir aquí porque tenemos disponibles excelentes recensiones.

Así, Fauvel y van Maanen (2000) reúnen el resultado final del trabajo desarrollado en el ICMI Study *History in mathematics education*, coordinado y editado por John Fauvel y Jan van Maanen, que establece el estado de la cuestión del trabajo del grupo hasta esa fecha. Más recientemente, el panorama descrito en Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis y Wang (2016) completa y actualiza el presentado en Fauvel y van Maanen (2000), y nuevas actualizaciones aparecen en los textos editados por Clark, Kjeldsen, Schorcht y Tzanakis (2018a) y por Furinghetti y Karp (2018), producidos por los dos grupos de trabajo de historia del *International Congress on Mathematics Education* celebrado en 2016 en Hamburgo, sobre todo en el capítulo introductorio del primero de ellos (Clark, Kjeldsen, Schorcht y Tzanakis, 2018b).

De todo lo recogido en esos panoramas, me limitaré a señalar un texto titulado “Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment?” (Barbin, 1997), porque tuvo carácter programático y en él su autora planteó tres funciones para la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas que se han convertido en una referencia clásica que se reitera en los panoramas recientes (por ejemplo, en Clark et al., 2016, pp. 144-145). Esas tres funciones son una primera que traduzco como “de substitución” (en francés, *vicariante*), otra que traduzco como “de desubicación” (en francés, *dépaysante*), de la que trataré más adelante, y una tercera cultural.

Ahora bien, Barbin (1997) no se limita a distinguir funciones que la historia de las matemáticas puede tener en la enseñanza de las matemáticas, sino que además afirma que, para que la historia de las matemáticas pueda tener esas funciones en la enseñanza de las matemáticas, hay que plantear también qué historia de las matemáticas hay que desarrollar y usar, y qué matemáticas se trata de enseñar. Subrayo el hecho de que la determinación de la función que la historia de las matemáticas desempeñe en la enseñanza de las matemáticas no es independiente del tipo de historia que se use y del tipo de matemáticas que se pretenda enseñar.

Añado a Barbin (1997), que plantea esta necesidad de pensar qué historia y qué enseñanza de las matemáticas para poder hablar de su relación, la serie de textos que Michael Fried ha dedicado a problematizar la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa desde el que publicó en 2001 con el título provocativo de “Can mathematics education and history of mathematics coexist?”, en los que ha planteado cómo lo que interesa desde la educación matemática y lo que interesa desde la investigación histórica es difícilmente compatible, o al menos siempre va a estar en conflicto (Fried, 2001, 2007, 2011, 2018).

Las observaciones que presento en este texto apuntan básicamente a aportar elementos para discutir qué historia de las matemáticas conduce a una relación fructífera con la matemática educativa y cómo superar las dificultades de compatibilizar los intereses de una y otra.

PRIMERA OBSERVACIÓN

A principios de la década de los ochenta del siglo pasado, Eugenio Filloy inició un programa de investigación que enunció programáticamente en su texto de 1984 *La aparición del lenguaje aritmético algebraico*, programa de investigación en el que yo comencé a trabajar unos años después. Lo que se plantea ahí me da pie para mi primera observación.

Filloy parte de un tipo de historia, la historia de las ideas, en la que historia y epistemología están entrelazadas, de forma similar a como lo está la epistemología histórica de Gaston Bachelard (Lecourt, 1970) o también el tipo de historia que propone Barbin (1997). Lo que es singular de su planteamiento lo expresa de la siguiente manera en el apartado que titula "La lectura de textos".

> El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el método histórico-crítico, y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una nueva visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos. (Filloy y Rojano, 1984, p. 2)

Filloy plantea pues un vaivén entre los textos históricos y los sistemas educativos actuales en el que la historia de las matemáticas no es simplemente un instrumento que se usa en la matemática educativa, la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa no se limita a una relación de aplicación de la primera en la segunda, sino que, en primer lugar, lo que se busca en la historia es "realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", y, en segundo lugar, esos análisis históricos se ponen a prueba en los sistemas educativos y se reconsideran a la luz de los resultados de las observaciones de las actuaciones de los alumnos.

Este planteamiento programático, que enunciado de esta manera resulta demasiado general, ambicioso y difícil de realizar salvo a largo plazo, se puede reformular a partir de lo que para mí es su idea central: es la problemática de la matemática educativa la que determina lo que se indaga en la historia. La problemática de la matemática educativa guía qué textos examinar en la historia y qué preguntas guían el examen de los textos (Puig, 2008, 2011).

Así, como en nuestra investigación en la enseñanza y aprendizaje del álgebra observamos que al resolver problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal los alumnos utilizan sistemas de signos estratificados con estratos provenientes de los sistemas de signos del lenguaje natural y la aritmética, así como de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza, nos interesamos en el examen de los sistemas de signos anteriores al establecimiento (con Vieta, Bombelli, Descartes) del sistema de signos de carácter simbólico que se usa actualmente en el álgebra que se enseña en la secundaria. Nos interesamos también en inquirir a los textos históricos sobre cómo las características de los sistemas de signos previos afectan a la manera de resolver los problemas aritmético-algebraicos. Además, como uno de los modelos concretos usados en las secuencias de enseñanza modelaban las ecuaciones representándolas con segmentos y rectángulos con los que se opera, indagamos sobre el uso de representaciones con figuras geométricas y métodos de cortar y pegar en textos históricos.

En la relación entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa ése es un primer movimiento que va de la matemática educativa hacia la historia de las matemáticas, que ya es en sí un campo de indagación histórica, digamos que inspirada por la matemática educativa y, por tanto, específica de la investigación en matemática educativa o didáctica de las matemáticas. Trabajos que se quedan ahí son valiosos como un fondo de conocimientos disponibles para su uso, aunque éste no sea inmediato.

El segundo movimiento es un movimiento de vuelta en el que los resultados obtenidos se incorporan a los diseños de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En los términos de nuestro marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL)

(Filloy, Rojano y Puig, 2008), esto puede hacerse tanto para elaborar secuencias de enseñanza que usen lo determinado en el estudio de los textos históricos (lo que puede implicar o no que se usen los propios textos históricos), es decir, en el componente de enseñanza del MTL que se elabora para una investigación empírica concreta, como para incorporar elementos al componente de competencia que otros análisis (por ejemplo, de pura fenomenología o de fenomenología didáctica) no determinan, o para tener nuevas maneras de dar sentido a las actuaciones de los alumnos por analogías con las cogniciones petrificadas determinadas en los textos históricos.

Así, por ejemplo, el análisis histórico que presenté en el seminario de la SEIEM de 2003 (Puig, 2003)[viii] me permitió formular una versión del método cartesiano como descripción, o esqueleto para la organización de la descripción, de los elementos que constituyen la competencia en la resolución algebraica de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, que posteriormente usamos y seguimos usando en trabajos de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de esa clase de problemas en los sistemas educativos. El estudio realizado sobre las características del sistema matemático de signos presente en el libro *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore (Puig, 1994), que subrayaba sus grandes diferencias con el sistema de signos de carácter simbólico que se enseña actualmente en los niveles no universitarios a pesar de su uso de letras del alfabeto, me permitió en un trabajo posterior (Puig, 1996) disponer de una referencia para analizar la producción por parte de unos alumnos de un sistema de signos análogo al presente en ese libro de Jordanus de Nemore, sabiendo, por lo caracterizado en el estudio de la historia, que esta invención de los alumnos no podía considerarse como una dotación de sentido afortunada para la tarea que tenían planteada, aunque funcionara bien de forma idiosincrásica en la comunicación entre ellos.

El vaivén entre la historia de las matemáticas y los sistemas educativos, que está señalado con estos dos movimientos, se concibe en el programa de investigación a largo plazo, no como un movimiento oscilante de ida y vuelta, sino como un movimiento en forma de hélice, que en cada vuelta avanza: cuando se vuelve de nuevo a indagar en los textos históricos tras un vaivén, esto se hace con lo encontrado en el sistema educativo, y así sucesivamente.

SEGUNDA OBSERVACIÓN

No cabe duda de que en la relación que acabo de describir entre la historia de las matemáticas y la matemática educativa, la historia de las matemáticas está subordinada a la matemática educativa. Fried (2018) ha analizado cómo distintos actores que han estado haciendo investigación en historia de las matemáticas han tenido puntos de vista distintos para relacionarse con las matemáticas del pasado, y los clasifica como “matemáticos”, que han buscado matemáticas en la historia de las matemáticas, han tratado a los matemáticos de otras épocas como colegas y se han sentido a sí mismos haciendo matemáticas al estudiar la historia; “matemáticos historiadores”, que “ven una continuidad entre las matemáticas del pasado y su propio trabajo matemático (Fried, 2018, p. 7) e “historiadores de las matemáticas”, cuyo oficio es la historia de las matemáticas y su formación es de historiador y, eventualmente, en matemáticas, de modo que esas categorías las coloca Fried (2018) en un continuo de mayor a menor presencia de la perspectiva histórica. Fried (2018) indica que a estos actores se han incorporado recientemente los “educadores matemáticos historiadores[ix]”, cuya manera de mirar las matemáticas del pasado también es distinta, y dentro de los cuales hay también grados de presencia de la perspectiva histórica.

En cualquier caso, lo que me interesa resaltar de la reflexión de Fried (2018) es que siempre se hace historia desde un determinado punto de vista. En el caso de los que él llama “educadores matemáticos historiadores”, el punto de vista es el de su uso en la educación matemática, que puede adoptar además formas variadas, siendo una de esas formas la que he descrito someramente en la observación anterior.

Fried ha señalado además el peligro de hacer un tipo de historia que ha sido calificado de “whig” (Fried, 2011). Fried toma el calificativo “whig” de Butterfield (1931/1951), en cuyo título, *The*

Whig Interpretation of History, ya aparece explícitamente, y cuyo significado explica en la introducción, diciendo que la historia “whig” es aquella que se dedica a “alabar las revoluciones a condición de que hayan tenido éxito, subrayar ciertos principios de progreso en el pasado y producir un relato que es la ratificación del presente, si no su glorificación” (Butterfield, 1931/1951, p. 5).

El peligro fundamental reside entonces en que en la historia “whig” desaparece del relato histórico lo que es extraño a la forma actual de ver las cosas, sólo permanece lo que puede relacionarse con los intereses del presente.

Dice Fried (2011) que la relación entre la historia de las matemáticas y la educación matemática siempre va a tener esa tensión hacia lo “whig” porque, así como los historiadores pueden poner el presente entre paréntesis al estudiar el pasado (para eludir lo “whig”), los educadores matemáticos que hacen investigación histórica tenemos la obligación de tener presente el presente, no podemos ponerlo entre paréntesis.

Ahora bien, desde mi punto de vista, es posible, haciendo historia de las matemáticas al servicio de la matemática educativa, conjurar el peligro de hacer historia “whig”. Basta con que tengamos en cuenta que entre los intereses del presente de la matemática educativa está también lo que es extraño a la forma actual de ver las cosas. No es pues preciso poner el presente entre paréntesis para estudiar el pasado, ya que desde el punto de vista de la matemática educativa es útil para el presente no sólo lo que conduce al presente, sino también lo que no conduce al presente. El uso del resultado del estudio del sistema de signos del *De Numeris Datis* para la caracterización de las actuaciones de alumnos, que he mencionado en la observación anterior, es un ejemplo de algo que no conduce al presente, pero es útil en el presente, responde a lo que le interesa a la matemática educativa para abordar su problemática actual. Ahora bien, para ello es necesario que en la indagación histórica que emprendamos examinemos lo que sucedió en la historia de las matemáticas en su contexto socio-cultural concreto y en su momento histórico, sin pasarlo por la criba de conceptos, procesos y sistemas de signos del presente.

Señalaré, para acabar esta observación, que hay otra manera de conjurar el hacer historia “whig”, que también viene dada por un interés que viene del presente de la matemática educativa: su uso con la función de desubicación indicada por Barbin (1997), a la que dedicaré la última de estas observaciones.

TERCERA OBSERVACIÓN

Las dos primeras observaciones apuntan elementos que contribuyen a la reflexión sobre qué historia de las matemáticas desarrollar para que ésta sea fecunda para la matemática educativa, cuestión que, como ya hemos indicado, es crucial para Barbin (1997). Añadiré ahora una tercera observación en el mismo sentido.

La historia de las ideas, trufada de epistemología, en la que no importa quién hizo qué, sino el proceso de invención y las prácticas matemáticas desarrolladas en momentos históricos y en contextos socio-culturales determinados, es el tipo de historia que está en la base de la propuesta de Filloy y Rojano (1984) o Barbin (1997).

Ahora bien, todo relato histórico, incluso el que tiene voluntad de no ser “whig”, de no fijarse sólo en lo que conduce al presente y lo glorifica, sino de tomar el texto histórico en su totalidad, produce una lectura de los textos históricos disponibles, transmitidos hasta el momento histórico y el contexto socio-cultural en que se leen, que ineludiblemente ha de pasar por el intertexto de esos textos, intertextualidad que Julia Kristeva calificó de “índice de la manera en que un texto lee la historia y se inserta en ella” (Kristeva, 1968, p. 312).

Pero además ha de contar con que ese intertexto no es estático, fijado en el momento y el contexto en que se produce el texto, sino que cambia en la historia, como consecuencia, entre otras cosas, de las sucesivas lecturas que se producen de él. Así, por ejemplo, desde el momento en que Qustā Ibn Lūqā traduce en el siglo IX las *Aritméticas* de Diofanto con el título *El arte del álgebra*, el intertexto de ese libro incluye textos del álgebra árabe medieval, lo que estará presente en lecturas subsiguientes.

A mi entender, conviene en consecuencia tomar en consideración, a la hora de abordar la lectura de textos históricos, la metáfora que introdujo Michel Foucault de tomar los documentos como monumentos (Foucault, 1969). Foucault señalaba con esta metáfora que no se trata de considerar los documentos (los textos matemáticos históricos, en nuestro caso) como una totalidad cerrada, que tiene un significado intencional que su autor puso en él. Si fuera así, la tarea del historiador consistiría en descifrar el (verdadero) significado del texto, encontrando lo que en él quiso decir su autor. Lo que propone Foucault es bien distinto, la metáfora nos lleva a no ver los textos como documentos, totalidades cerradas, sino verlos a semejanza de como nos llegan los monumentos años después de haber sido erigidos, que más bien se presentan ante nosotros fragmentados, modificados, integrados en entornos distintos de aquellos en los que fueron instalados, e integrados en prácticas sociales distintas de las usuales cuando fue concebidos.

Tomar los textos matemáticos como monumentos, en vez de como documentos, en el sentido foucaultiano, conduce pues a examinarlos en su relación con otros textos y con las prácticas que los produjeron y en las que se han insertado a lo largo de la historia.

En particular, cuando la investigación histórica se hace desde el punto de vista de la matemática educativa cobra especial importancia el tener presente que el desarrollo de las matemáticas en la historia no sólo ha estado conducido por las prácticas matemáticas orientadas a la investigación, a la creación de nuevos conceptos y procesos matemáticos, sino que también producen nuevas matemáticas otro tipo de prácticas como la propia de los textos que Netz (1998) llama "textos deuteronómicos". Son textos deuteronómicos, por ejemplo, libros escritos en la época helenística como la *Synagōgē* de Pappus, donde éste expone el arte del análisis, o el *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides*, donde Proclo establece las partes de la demostración de un teorema. En ellos, no sólo se resuelven problemas o se demuestran teoremas, como es lo habitual en los libros de la época clásica griega, sino que, a la vez que se resuelven problemas o se demuestran teoremas, se reflexiona sobre la forma en que se resuelven y se demuestran, o se establecen las reglas de la práctica de escritura de textos matemáticos, de modo que esos libros no son meros comentarios o recopilaciones sino que generan también matemáticas nuevas con nuevas prácticas. De forma similar, la organización de contenidos matemáticos para su enseñanza es una práctica matemática que también genera nuevas matemáticas. Como dice Belhoste (1998) "la puesta en común del saber matemático […] constituye un aspecto esencial de la actividad matemática, parte integral de la actividad de invención" (p. 289).

CUARTA OBSERVACIÓN

Mi cuarta observación versa sobre un asunto del que hay una bibliografía abundante de la que destacaré Furinghetti y Radford (2002, 2008), Schubring (2006, 2011) y Fried y Jahnke (2015), textos que todos ellos están escritos por "educadores matemáticos historiadores", siendo preciso señalar que hay también bibliografía abundante escrita por matemáticos interesados en la educación, de la que señalaré en particular, Branford (1908), que contiene un "diagrama del desarrollo de la experiencia matemática en la raza y en el individuo" reiteradamente citado, y Klein (1927) y Toeplitz (2015), publicados originalmente en alemán en 1908 y 1927, respectivamente. El asunto al que me refiero es la teoría de la recapitulación, que se suele resumir con la fórmula "la ontogénesis repite la filogénesis" y que ha sido fuente de distintos enfoques de elaboración de secuencias de enseñanza que toman en cuenta ese principio y, por tanto, el desarrollo histórico de las matemáticas.

Esa amplia bibliografía también es muy variada: por un lado, hay versiones más o menos radicales de la teoría de la recapitulación y de su uso para la enseñanza. Pero además, se suele incluir en el mismo campo la teoría psicogenética elaborada por Jean Piaget y Rolando García (Piaget y García, 1982) y el método genético de enseñanza. Ahora bien, en Piaget y García (1982) no se afirma en absoluto que haya una recapitulación de la filogénesis en la ontogénesis:

> [el] objetivo no es, en modo alguno, poner en correspondencia las sucesiones de naturaleza histórica con aquellas que revelan los análisis psicogenéticos, destacando los contenidos. Se trata, por el contrario, de un objetivo enteramente diferente: mostrar que los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente son análogos a los del pasaje de un estadio psicogenético al estadio siguiente. (Piaget y García, 1982, p. 33)[x]

Piaget y García pues no sólo no buscaron correspondencias elemento a elemento entre el desarrollo de cada individuo y lo sucedido en la historia, sino analogías entre mecanismos de paso de un estadio de desarrollo a otro; más aún, lo que hicieron es analizar lo sucedido en la historia para buscar en ella lo que habían determinado en el desarrollo de los individuos, podríamos decir que en su teoría es la ontogénesis la que se recapitula en la filogénesis.

Con respecto al método genético de enseñanza, sin entrar a discutir sus variantes, que han sido analizadas por Schubring en varias ocasiones (cf., por ejemplo, Schubring, 2011), en la versión que Toeplitz llamó "método genético indirecto" la historia se usa como guía para la enseñanza, pero no se repite en ella: "La elucidación de dificultades didácticas […] sobre la base de análisis históricos, en la que esos análisis históricos sólo sirven para dirigir la atención en la dirección adecuada" (Toeplitz, 2015, p. 308).

Del mismo estilo es la idea de Hans Freudenthal de "reinvención guiada", que puede verse como una derivación de este método genético indirecto, en donde lo que se lleva a la enseñanza son en todo caso los procesos que han conducido en la historia a la invención de los conceptos más que los hechos concretos que los produjeron.

> Instar a que las ideas se enseñen genéticamente no significa que deberían presentarse en el orden en que surgieron, ni siquiera con todos los callejones sin salida cerrados y todos los desvíos eliminados. Lo que los ciegos inventaron y descubrieron, posteriormente los que ven pueden decir cómo se habría descubierto si hubiera habido entonces maestros que supieran lo que sabemos ahora. (Freudenthal, 1973, p. 101)

Introduciré mi observación a la teoría de la recapitulación con una cita de Wittgenstein tomada del libro publicado en 1957 póstumamente en el que sus editores, G. H. Von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe, recopilaron una parte de sus escritos sobre matemáticas y que titularon *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*:

> Quiero decir: Es esencial a la matemática que sus signos se usen también en lo *civil*.
>
> Es el uso fuera de la matemática, es decir, el significado de los signos, lo que convierte en matemática el juego de signos. (Wittgenstein, 1987, p. 215[xi])

Aunque Wittgenstein hiciera esta observación para introducir a su manera la raíz socio-cultural del significado, yo la voy a utilizar para apuntar cómo ese uso civil de los signos de las matemáticas los incorpora al mundo de las experiencias de los sujetos. Si además tenemos en cuenta, siguiendo a Wittgenstein, que el significado de los signos radica en su uso –un uso sometido a reglas, a un juego de lenguaje–, los signos de las matemáticas usados en lo civil conllevan ese juego de lenguaje, de modo que un individuo de ese contexto socio-cultural y ese momento histórico puede tener en su acervo de experiencias no sólo los fenómenos que fueron en su día organizados por el concepto, el signo en cuestión, en el momento histórico y el contexto socio-cultural en que esto sucediera, digamos que desnudos, sin esa organización para la que se creó el concepto, el signo, matemático, sino que los tiene acompañados de esos medios de organización, ya incorporados social y culturalmente incluso al acervo del lenguaje.

El mundo de experiencias de un individuo de ese momento histórico y entorno socio-cultural, diferente del mundo de experiencias posible de aquellos individuos que vivían cuando el concepto fue inventado y donde lo fue, es más rico al tenerlos incorporados –lo que hace innecesario, en esos casos, repetir la historia. Y lo hace innecesario por un motivo más profundo que el que Freudenthal (1973) señala en el texto que acabamos de citar: en esos casos, ni siquiera es necesario que haya un profesor que enseñe lo que ahora se sabe y antes no se sabía. El conocimiento creado en la historia se ha incorporado a las prácticas sociales, a los juegos de lenguaje, de modo que ya está presente en el mundo de experiencias de los aprendices: la guía del profesor al alumno en el método de reinvención guiada freudenthaliano no tiene que suplir pues todo lo producido en la historia, puede partir de la presencia de lo ya incorporado.

Un ejemplo sencillo de este hecho es la presencia de números negativos en los pulsadores de los ascensores. Otro, más complejo, los simuladores en entornos informáticos.

En la historia de la enseñanza de las matemáticas también tenemos un ejemplo claro en el hecho de que, en aritméticas escolares españolas históricas, expresiones como “cinco menos tres” se traten como algo ajeno al lenguaje natural, que necesita por tanto ser traducido, explicado, en el propio lenguaje natural, ya que van contra las reglas de la gramática, cuando actualmente no se ven así. Así, Vallejo, por ejemplo, escribe “la espresion 5—3=2, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee cinco menos tres igual ó es igual á dos” (sic) (Vallejo, 1841, p. 26). La necesidad que tiene Vallejo de explicar cómo se lee la expresión aritmética “5 – 3 = 2” y sobre todo el hecho de que eso no le baste para dar cuenta de su significado, sino que tenga que explicar qué significa “cinco menos tres igual a dos”, porque esta frase no se reconoce como una frase bien construida en español, es impensable hoy en día. Hoy en día está incorporada a la gramática del español.

Hechos de este estilo son los que en Radford y Puig (2007) conducen a enunciar un “principio de incorporación”, que establece un límite de calado a la teoría de la recapitulación:

> La característica principal del desarrollo de la vida de un individuo (ontogénesis) es el hecho de que está enmarcado por un mundo de artefactos culturales y formas más avanzadas de cognición que ofrecen al individuo una serie de líneas de desarrollo conceptual.
>
> […] El Principio de Incorporación siguiente arroja luz mejor sobre la relación entre la filogénesis y la ontogénesis: nuestros mecanismos cognitivos (por ejemplo, percibir, abstraer, simbolizar) están relacionados, de manera crucial, con una dimensión conceptual histórica ineludiblemente incorporada en nuestras prácticas sociales y en los signos y artefactos que los median (Radford y Puig, 2007, p. 148).

QUINTA OBSERVACIÓN

Mi última observación versa sobre la función de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas que Barbin (1997) llamó “de dépaysement”, y yo traduzco por “función de desubicación”.

Esta función de desubicación persigue en la enseñanza un objetivo similar al que perseguía lo que Bertold Brecht llamó “Verfremdungseffekt”, “efecto de extrañamiento o distanciamiento”, que constituyó el elemento clave de su teoría de la actividad teatral. El establecimiento de una distancia entre el espectador y la representación teatral, el hacer que lo habitual se convierta en sorprendente, obliga a pensar. Bertold Brecht pretendía con el distanciamiento del espectador ante la representación teatral romper con la identificación emocional, con la catarsis que fundamenta el teatro clásico, en la que no hay reflexión sobre lo que ocurre en la escena sino identificación con los personajes. Con el efecto de distanciamiento

> se procura […] que lo sobreentendido resulte "no entendido", pero con el único fin de hacerlo más comprensible. Para que lo conocido lo sea realmente, para que sea conocido a conciencia, debe dejar de pasar inadvertido; se deberá romper con la costumbre de que el objeto en cuestión no requiere aclaración (Brecht, 1970, p. 182).

La desubicación del lector, del estudiante, ante el texto histórico le saca también de su zona de confort, ese lugar en que, identificado con lo que uno tiene delante, se actúa de forma mecánica, reiterando acciones ya hechas que se disparan ante el estímulo de lo familiar. Ahora bien, la historia de las matemáticas puede tener esa función de desubicación a condición de que no sea una historia "whig", a condición de que no se busque en los textos históricos sólo lo que conduce al presente, eliminando todo lo que resulta extraño a la manera en que están elaborados los conceptos matemáticos en el presente o a la manera en que se realizan procesos como los de resolución de problemas en el presente, o eliminando los sistemas matemáticos de signos de otras épocas substituyéndolos por los actuales, substitución que no conduce sólo a traducir el texto histórico, sino que también lo modifica conceptualmente, si no obviamos el hecho de que los conceptos matemáticos no existen independientemente de su expresión en un sistema de signos, sino que se constituyen en los sistemas de signos y por ellos.

La función de desubicación de la historia de las matemáticas rompe además con la imagen de las matemáticas como un conjunto de resultados, de verdades eternas, que se han ido descubriendo a lo largo de la historia, y la idea de la propia historia de las matemáticas como la historia del avance de la ignorancia y el error hacia la verdad, en vez de una historia de creación de medios de organización de fenómenos de nuestra experiencia, cada vez más perfilados conceptualmente, y organizados a su vez en niveles cada vez más abstractos. En consecuencia, no sólo se trata de que el tipo de historia de las matemáticas ha de ser de ese estilo para producir la función de desubicación, sino que ese tipo de historia también produce una modificación en el tipo de matemáticas que se enseña, siempre que la enseñanza tome en consideración y se entrelace con ella. La función de desubicación de la historia de las matemáticas conlleva también la función que Barbin (1997) llamó "de substitución": las matemáticas que se enseñan son otras.

Examinaré con un ejemplo cómo puede un texto histórico servir para esa función de desubicación y algunas condiciones que conviene que se den o que se organicen para que la presentación del texto histórico pueda servir para ello.

El ejemplo usa el texto del enunciado de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal y su solución que se conservan en una tablilla babilónica, que he tomado de Høyrup (2002). El texto del enunciado es el siguiente:

> 2 gur 2 pi 5 bán de aceite he comprado
>
> De la compra de 1 shekel de plata, 4 silà, de cada (shekel), de aceite he separado.
>
> 2/3 mina de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido? (Høyrup, 2002, pp. 206-207).

La traducción española la he hecho a partir de la versión inglesa de Jens Høyrup, que él hizo del texto en acadio de la tablilla babilónica, y he mantenido en mi versión española el tipo de traducción que Høyrup defiende que hay que hacer de los textos históricos, que él llama "traducción conforme[xii]". En la traducción conforme, se procura que los términos técnicos se traduzcan manteniendo las distinciones de su uso en el texto histórico (así, por ejemplo, Høyrup usa varias palabras inglesas distintas para "sumar" porque en el texto babilónico en acadio se usan de forma consistente palabras distintas para acciones de sumar diferentes, tales como juntar dos conjuntos homogéneos, acumular un objeto a otro de manera que se incorpora a ese otro, etcétera); además, se procura mantener la estructura sintáctica de las frases aún a costa de violentar la sintaxis del idioma al que se traduce. Con ello se pretende que lo que el lector tenga ante él tenga rasgos fundamentales de la conceptualización de los objetos y procesos matemáticos que están en juego en el texto original y en las prácticas de la época.

Esta traducción conforme, a la manera de Høyrup, es un buen vehículo para que el texto pueda tener la función de desubicación. Ahora bien, para su uso en la enseñanza, la idea de Høyrup conviene modularla: para que la función de desubicación se desencadene hace falta que el alumno encuentre en el texto, o en la tarea en la que el texto está inserto, algo extraño, algo que le saque de su zona de confort; pero es preciso también que reconozca la tarea como parte de una familia de tareas que conoce, dentro de la cual ese texto particular desconcierta. Dicho de otra manera, el texto no puede ser un enigma, algo a lo que no se es capaz de dar sentido alguno. En el extremo, si se presentara el texto tal cual está en la tablilla babilónica o en la transcripción que usan los arqueólogos, sería un enigma. La traducción conforme de Høyrup puede seguir siendo un enigma para según qué alumnos, por lo que la tarea del profesor ha de ser elegir la distancia que se quiere crear entre el texto y los alumnos de modo que éstos puedan a la vez darle algún sentido y extrañarse: así podrá tener la función de desubicación que se persigue.

Así, del problema anterior puede eliminarse la dificultad que plantea la metrología babilónica, cuyo desconocimiento bloquea la posibilidad de desencadenar las acciones aunque se haya reconocido el problema como parte de una familia de problemas conocida, y cuya presencia sólo desubica en el terreno del desconocimiento de un hecho:

> 12`50 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

También puede eliminarse la representación de los números en el sistema de numeración sexagesimal, que ya no sólo desubica en el terreno del desconocimiento de un hecho, sino también en la forma en que se realizan las operaciones aritméticas:

> 770 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

Finalmente, puede abandonarse la traducción conforme a la manera de Høyrup y redactar un enunciado como traducción del texto babilónico que sólo es conforme con respecto a la estructura de relaciones y cantidades, y la historia de transacciones en las que se compra para vender más caro.

> Un comerciante compra 770 litros de aceite.
>
> Los vende dando 4 litros menos de los que ha recibido en la compra, por cada gramo de plata.
>
> Obtiene un beneficio de 40 gramos de plata.
>
> Averiguar a cuántos litros por gramo de plata compró el aceite y a cuántos litros por gramo de plata lo vendió.

Podría pensarse que esta última versión del texto babilónico ya no es capaz de tener función de desubicación alguna, porque el enunciado es familiar para los alumnos y pueden desencadenar de forma automática las acciones del método cartesiano, por ejemplo, y resolverlo. Ahora bien, este problema es particularmente interesante para discutir que la función de desubicación puede presentarse en niveles distintos, por la riqueza de elementos desubicadores que contiene.

En efecto, cuando se efectúa la lectura analítica del problema, la estructura de cantidades y de relaciones a la que conduce la lectura analítica más usual también desubica, porque no es la habitual en los problemas de esa familia con los que los alumnos de nuestra época se han encontrado y que han resuelto. Las relaciones de proporcionalidad que aparecen son relaciones de proporcionalidad inversa, en vez de relaciones de proporcionalidad directa, que es lo que constituye el centro de la estructura de las relaciones entre cantidades en esta familia de problemas.

Esto es así porque entre las cantidades del problema, que son “cantidad comprada y vendida” (litros), “importe de la compra” (gramos de plata), “importe de la venta” (gr), “tasa de compra” (l/gr), “tasa de venta” (l/gr), “beneficio total expresado en plata” (gr) y “beneficio unitario expresado en aceite por unidad de plata” (l/gr), tres de ellas responden a una conceptualización del fenómeno distinta de la habitual en el presente. En efecto, el precio unitario no está concebido como lo que se paga por unidad de mercancía, sino como la mercancía que se da o se recibe por unidad de dinero, y lo mismo sucede con el beneficio unitario. Como consecuencia de esa inversión en la concepción del precio de compra y venta (que yo he indicado llamándolo “tasa” en vez de “precio”), entre las cantidades en cuestión hay relaciones de proporcionalidad inversa y no de proporcionalidad directa.

La riqueza de la tablilla babilónica en la que aparece este problema desde el punto de vista de la función de desubicación no se agota ahí. La tablilla contiene también la solución del problema expresada como una lista de operaciones que hay que realizar para resolverlo, que presento en una traducción conforme de la que sólo he eliminado la metrología babilónica:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves.
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves
>
> 2 cuadra, 4, ves
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.
>
> Del segundo quítalo, 7, ves.
>
> 11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.
>
> ¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?
>
> 1`10 coloco 1`10 gramos de plata.
>
> ¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?
>
> 40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite (Høyrup, 2002, p. 207).

Esa solución puede usarse en la enseñanza planteando a los alumnos la tarea de explicarla indicando cuál es el sentido que tiene cada una de las operaciones que la componen y su secuencia. Ahora bien, examinando la solución, podemos ver que, de nuevo, el lector moderno se ve desubicado.

En efecto, en las tres primeras líneas el beneficio unitario expresado en aceite por unidad de plata (l/gr) se divide por el beneficio total expresado en plata (gr), y, en la cuarta, el resultado de esa división se multiplica por cantidad comprada y vendida (l), y el resultado de esa multiplicación resulta ser el producto de la tasa de compra (l/gr) por la tasa de venta (l/gr), lo que carece de sentido en la historia que narra el problema. Hay que buscarle sentido en otro lugar, en una representación de las cantidades mediante rectángulos que se manipulan cortando, desplazando y pegando y se relacionan entre ellos, que está estrechamente ligada a la naturaleza de la protoálgebra babilónica[xiii].

El desconocimiento de la metrología (un hecho), las consecuencias del sistema de numeración en la ejecución de las operaciones aritméticas, la diferencia en la estructura de cantidades y relaciones con respecto a los problemas de esa familia y la carencia de sentido del algoritmo de solución con respecto al significado de las cantidades en la historia del problema enunciado verbalmente producen desubicación en niveles distintos, que conducen a tener que abrir el campo semántico de los conceptos y procesos implicados más allá del que proporciona una matemática como conjunto de resultados establecidos, hacia matemáticas elaboradas a lo largo de la historia en contextos socio-culturales diversos: la historia de las matemáticas cambia las matemáticas que se enseñan.

Referencias

Barbin, É. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *37*(1), 20–25.

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques, 4*(2), 289–304.

Branford, B. (1908). *A study of Mathematical Education, including the teaching of arithmetic.* Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Brecht, B. (1970). *Escritos sobre el teatro.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Butterfield, H. (1931/1951). *The Whig Interpretation of History*. Nueva York, EE. UU.: Charles Scribner's Sons.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (Eds.). (2018a). *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership.* Cham, Suiza: Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018b). Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. En K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership* (pp. 1-23). Cham, Suiza: Springer.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C. y Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. En L. Radford, F. Furinghetti y T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135-179). Montpellier, Francia: IREM de Montpellier.

Fauvel, J. y van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study. New ICMI Study Series (Vol. 6).* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'Educazione Matematica, 5*(3), 1-16.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* Nueva York, EE. UU.: Springer.

Foucault, M. (1969). *L'archéologie du savoir.* París, Francia: Gallimard.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223.

Fried, M. N. (2011). History of mathematics in mathematics education: problems and prospects. En É. Barbin, M. Kronfellner y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 13–26). Viena, Austria: Holzhausen Verlag.

Fried, M. N. (2018). Ways of relating to the mathematics of the past. *Journal of Humanistic Mathematics, 8*(1), 3-23.

Fried, M. N. y Jahnke, H. N. (2015). Otto Toeplitz's 1927 Paper on the Genetic Method in the Teaching of Mathematics. *Science in Context, 28*(2), 285-295.

Furinghetti, F. (en prensa). History and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi: 10.1080/0020739X.2019.1565454.

Furinghetti, F. y Karp, A. (Eds.). (2018). *Researching the History of Mathematics Education: An International Overview*. Cham, Suiza: Springer.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654). Nueva Jersey, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 626-655). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces a portrait of Old Babylonian algebra and its kin.* Nueva York, EE. UU.: Springer.

Klein, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol. 1 (Aritmética. Álgebra. Análisis).* Madrid: Biblioteca Matemática.

Kristeva, J. (1968). Problèmes de la structuration du texte. En Tel Quel, *Théorie d'ensemble* (pp. 298-317). París, Francia: Seuil.

Lecourt, D. (1970). *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard.* París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Netz, R. (1998). Deuteronomic texts: late antiquity and the history of mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques, 4*(2), 261–288.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México D. F., México: Siglo XXI Editores.

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis, 10*(1), 47-92

Puig, L. (1996). Pupils' prompted production of a medieval mathematical sign system. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 77-84). Valencia: PME.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: SEIEM y Universidad de Granada.

Puig, L. (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. En M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education (CD-version).* Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde University.

Puig, L. (2009). Protoálgebra en Babilonia (1ª entrega). *Suma, 61*, 93-98.

Puig, L. (2011). Researching the history of algebraic ideas from an educational point of view. En V. Katz y C. Tzanakis (Eds.*), Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, EE. UU.: The Mathematical Association of America.

Puig, L. y Navarro, M. T. (2010). Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega): Métodos de solución. *Suma, 64*, 97-104.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 187-223). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Radford, L. y Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145-164.

Schubring, G. (2006). Ontogeny and phylogeny. Categories for cognitive development. En F. Furinghetti, S. Kaisjer y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4* (pp. 329-339). Iraklion, Grecia: University of Crete.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning—epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 79-104.

Toeplitz, O. (2015). The problem of university courses on infinitesimal calculus and their demarcation from infinitesimal calculus in high schools [Translated into English and annotated by M. N. Fried and H. N. Jahnke]. *Science in Context, 28*(2), 297-310.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado elemental de Matemáticas. Cuarta edición, Tomo I. Parte Primera, que contiene la Aritmética y Álgebra.* Madrid: Imprenta Garrasayaza.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* [Traducción española de Isidoro Reguera]. Madrid: Alianza.

[vi] Este trabajo ha contado con el apoyo del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE).

[vii] En Furinghetti (en prensa) se presenta un esbozo reciente de la historia del *International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) y de la comunidad de investigadores y profesores que han contribuido a las actividades del grupo.

[viii] Véase también Puig y Rojano (2004).

[ix] Fried (2018) dice “Educational Historians of Mathematics”, expresión para la que he preferido la versión española “educadores matemáticos historiadores” a “educadores historiadores de las matemáticas”, más literal, con el fin de referirme más directamente a quienes, dentro de nuestra comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas, educación matemática o matemática educativa, nos dedicamos a la historia de las matemáticas, en cualquiera de sus variantes relacionadas con la matemática educativa.

[x] Cito de la versión española que, de hecho, se publicó un año antes de la versión francesa y puede considerarse en cierto sentido como la versión original. Jean Piaget trabajó con Rolando García en este libro hasta el final de su vida, pero se publicó póstumamente. Rolando García estuvo al cargo de la edición póstuma y también fue él quien tradujo del francés al español las partes escritas por Piaget.

[xi] Al componer este libro a partir de los escritos de Wittgenstein, los editores G. H. Von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe numeraron los apartados. Esto ha hecho que sea habitual citar este texto de Wittgenstein usando como referencia el número del apartado establecido por los editores en la tercera edición revisada, en vez del número de página, como exigen las normas APA. La ventaja de que la referencia indique el número del apartado es que éste es el mismo en la versión inglesa que compusieron los editores, en la versión en alemán o en la española que estoy citando. En el caso de lo que cito, se trata del apartado V, 2.

[xii] Høyrup la llama “conformal translation”, y utiliza la palabra inglesa “conformal” que no se usa en el lenguaje cotidiano, sino que es un término técnico científico para indicar “con la misma forma”. He decidido traducirla por “conforme”, que en español tiene ese significado técnico, aunque también tenga otros en el lenguaje cotidiano. Høyrup, al usar “conformal”, quiere subrayar que el tipo de traducción que propugna deja invariantes una serie de características del texto que se traduce, “conserva la estructura” (Høyrup, 2002, p. 41).

[xiii] Un análisis más detallado de este problema y su solución puede verse en Puig (2009) y Puig y Navarro (2010), sin que en esos textos se hable de la función de desubicación de la historia de las matemáticas.

“MATHEMATICS IS NOT A STALACTITE HANGING OVER A STALAGMITE” (W. KUYK) – THE PRODUCTIVE ROLE OF TEACHING

“Las matemáticas no son una estalactita colgando sobre una estalagmita” (W. Kuyk) – El rol productivo de la enseñanza

Schubring, G.

Universität Bielefeld, Germany / Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil

Abstract

Willem Kuyk had denounced with this image the widely shared view that mathematics education grows only by receiving some drops from above, figuring there the supreme instance for teaching. Bruno Belhoste, in his paper of 1998, had argued against this view and pleaded for re-assessing the role of teaching mathematics in the development of mathematics. Yet, he conceptualised its role in a polarised manner: while speaking of contributions of mathematical research as “invention”, as “production”, he juxtaposed teaching as “reproduction”, as “socialisation”. I am arguing, instead, that the teaching of mathematics can transgress this type of reproduction in a much more decisive manner – and effectively did so throughout the historical development of mathematics.

I should like to discuss this productive role of teaching and in particular the methodological challenges for realising such analyses. Actually, historians of mathematics do not use to be very attached to methodological reflections, and, if ever dealing with them, use to reproduce the old dichotomy between internalism and externalism – quite contrary to historians of science who since quite a time overcame that dichotomy and use to study interactions between internal developments of ideas and broader cultural, social and political contexts. A key pattern for studying such interactions are institutions – i.e., institutions in which mathematicians are working. And, in general, the official major task there is teaching, forming new generations. Not only are such institutions at the crossroads of conceptual developments within the discipline and of contextual influences on the functioning of the institution, there also occurs the direct and concrete interaction between teaching and research. Not too rarely, it is the function of teaching which induces to innovations in mathematical concepts.

The most paradigmatic patterns for this functioning were higher education institutions from the French Revolution: due to the establishment of systems of public education, the higher degrees of teaching intensity entailed incentives for systematic revisions of mathematical concepts and their foundations. But there are also revealing cases of innovations in the discipline induced by institutions in earlier periods. Particularly telling studies have been made by Christine Proust on the functioning of the scribal schools (edubba) in Old Babylonian times where the masters, forming the scribal apprentices, transgressed the routine tasks of teaching by validating procedures, by solving new classes of problems.

Besides presenting and discussing pertinent cases for such interactions, the lecture will discuss another pertinent issue for interfaces between mathematical development and teaching: it is the notion of ‘element’ and of elementarisation of science. In fact, the notion of element connects the development of mathematics and the modes of teaching mathematics in a fundamental way. Since Euclid’s geometry textbook, the term ‘elements’ expresses the intention to give a systematic presentation of a mathematical theory, constructed from its basic components. While thus fixing the

Schubring, G. (2019). “Mathematics is not a stalactite hanging over a stalagmite” (W. Kuyk) – The productive role of teaching. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 131-140). Valladolid: SEIEM.

state of knowledge of mathematics or of one of its branches for a certain time and period, Felix Klein's notion of elementarisation dynamises the notion, emphasising the various stages where the meanwhile accumulated new results and branches led to a restructuration of the bases, defining a renewed structure of elements – the new architecture achieved by Bourbaki constituting a well-known case for textbooks. It is incited by teaching and serving for teaching that textbooks are contributing to the progress of mathematics.

Keywords: *Teaching of mathematics, mathematics history, Teacher Training.*

Resumen

Willem Huyk había denunciado con esta imagen la visión ampliamente compartida de que la educación matemática crece únicamente recibiendo algunas gotas de arriba, figurando allí la instancia suprema para la enseñanza. Bruno Belhoste, en su artículo de 1998, había argumentado en contra de este punto de vista e instado a reexaminar el rol que tiene la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo mismo de las matemáticas. Sin embargo, conceptualizó ese rol de una manera polarizada: mientras hablaba de las contribuciones de la investigación en matemáticas como "invenciones" o "producciones", yuxtaponía la enseñanza como "reproducción", como "socialización". Por el contrario, yo argumento que la enseñanza de las matemáticas puede trasgredir esa reproducción de un modo mucho más decisivo, y que efectivamente así lo ha hecho a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas.

Me gustaría discutir este rol productivo de la enseñanza y, en particular, los desafíos metodológicos para dar cuenta de tal análisis. En realidad, los historiadores de las matemáticas no suelen estar muy ligados con reflexiones metodológicas y, si tienen que tratar con alguna, suelen reproducir la vieja dicotomía entre internalismo y externalismo – muy diferente del proceder de los historiadores de la ciencia quienes hace ya bastante tiempo que superaron esta dicotomía y suelen estudiar las interacciones entre el desarrollo interno de las ideas y un contexto cultural, social y político más amplio. Un modelo clave para estudiar esas interacciones son las instituciones, por ejemplo, las instituciones en las que los matemáticos están trabajando. Y, en general, la gran tarea oficial en ellas es la enseñanza, formar nuevas generaciones. No solo están estas instituciones en la intersección entre el desarrollo conceptual dentro de la disciplina y las influencias contextuales sobre el funcionamiento de la institución, también ocurren interacciones directas y concretas entre la docencia y la investigación. No es muy extraño que sea la función propia de la enseñanza la que induzca a innovaciones en los conceptos matemáticos.

Los modelos más paradigmáticos para este funcionamiento fueron las instituciones de educación superior provenientes de la Revolución Francesa: debido al establecimiento de sistemas de educación pública, la enseñanza en estos niveles implicó de forma intensa incentivos para realizar revisiones sistemáticas de los conceptos matemáticos y su fundamentación. Pero también hay otros casos reveladores de innovaciones en la disciplina inducidos por otras instituciones en periodos anteriores. En particular, estudios reveladores han sido desarrollados por Christine Proust en relación con el funcionamiento de las escuelas de escribas (edubba) en tiempos de la Antigua Babilonia donde los maestros, formando a los escribas aprendices, trasgredían las tareas rutinarias de la enseñanza por medio de la validación de procedimientos o la resolución de nuevas clases de problemas.

Además de la presentación y discusión de casos pertinentes sobre esas interacciones, discutiré otro asunto pertinente para la interrelación entre el desarrollo matemático y la enseñanza: la noción de "elemento" o de elementarización de la ciencia. De hecho, la noción de elemento conecta el desarrollo de la matemática y los modos de enseñarla de un modo fundamental. Desde el libro de Geometría de Euclides, el término "elementos" expresa la intención de proporcionar una presentación sistemática de la teoría matemática, construida desde sus componentes básicos. Mientras se fija el estado del conocimiento de las matemáticas o de una de sus ramas en un cierto *tiempo o periodo, la noción de elementarización de Felix Klein dinamizó la propia noción, haciendo hincapié en las diversas etapas o fases en las que la acumulación de nuevos resultados y ramas realizada hasta el momento condujeron a una reestructuración de las bases, definiendo una estructura renovada de elementos. La nueva arquitectura desarrollada por Bourbaki constituye un caso bien conocido para manuales y libros de texto. Incitados por la docencia y por el propósito de servir para ella, los manuales están contribuyendo al progreso de las matemáticas.*

Palabras clave: *Enseñanza de las matemáticas, historia de las matemáticas, formación de profesores.*

INTRODUCTION

Willem Kuyk had denounced with this image – stalactite *versus* stalagmite - the widely shared view that mathematics education grows only by receiving some drops from above, figuring there the supreme instance for teaching. Bruno Belhoste had published a paper in 1998, arguing intensely against this view and pleading for re-assessing the role of teaching mathematics in the development of mathematics:

> Contre ce préjugé, je voudrais défendre le point de vue selon lequel la mise en commun du savoir mathématique, c’est-à-dire sa socialisation au sein de communautés de spécialistes et de communautés d’utilisateurs, qu’elles soient savantes ou de métier, voire même dans l’ensemble du corps social, constitue un aspect essentiel de l’activité mathématique, partie intégrante de l’activité d’invention (Belhoste, 1998, p. 289).

Yet, he conceptualised the role of teaching in a polarised manner: while speaking of contributions of mathematical research as “invention”, as “production”, he juxtaposed teaching as “reproduction”, as “socialisation”. In fact, he understood teaching as dissemination, as socialisation:

> L’enseignement constitue lui-même une modalité particulière de la socialisation du savoir dans laquelle le récepteur est en situation d’apprentissage, ce qui implique une mise en forme didactique et l’invention d’activités spécifiques (Belhoste, 1998, p. 290).

The problem seems to be that he restricted the meaning of “enseignement” to the side of the learner, not conceiving of the other pole, the teacher, realising the teaching.

And while he denounced the lack of attention for teaching, he associated it with “reproduction”: “Sous cette indifférence se cache en fait l’idée fausse que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l’historien des conditions de sa reproduction” (Belhoste, 1998, p. 289).

I am arguing, instead, that the teaching of mathematics can transgress this type of reproduction in a much more decisive manner – and effectively did so throughout the historical development of mathematics.

I should like to discuss this productive role of teaching and in particular the methodological challenges for realising such analyses. Actually, historians of mathematics do not use to be very attached to methodological reflections, and, if ever dealing with them, use to reproduce the old dichotomy between internalism and externalism – quite contrary to historians of science who since quite a time overcame that dichotomy and use to study interactions between internal developments of ideas and broader cultural, social and political contexts.

Characteristic is the volume *Writing the History of Mathematics* (Dauben & Scriba, 2002). Although composed by eminent historians of mathematics, the volume documents that mathematics historiography is still strongly marked by the opposition between “internal” and “external” approaches, while a new German *Handbuch Wissenschaftsgeschichte* of 2017 declares this dispute as overcome and is open to much broader conceptual approaches, understanding science as just one form of knowledge—history of science being hence a part of *Wissensgeschichte*, the history of knowledge (Sommer, Müller-Wille, & Reinhardt, 2017, p. 3). In fact, this handbook realised an ambitious endeavour to reflect the methodology of history of science research. It presents, in particular, systematic chapters on recent research approaches. Pertinent for my issue here of interfaces is the chapter on cultural sciences and science history (Brandt, 2017).

IMPACT BY INSTITUTIONAL ANALYSES

A key pattern for studying such interactions are institutions – i.e., institutions in which mathematicians are working. And, in general, the official major task there is teaching, forming new generations. Not only are such institutions at the crossroads of conceptual developments within the discipline and of contextual influences on the functioning of the institution, there also occurs the direct and concrete interaction between teaching and research. Not too rarely, it is the function of teaching which induces innovations in mathematical concepts.

The most paradigmatic patterns for this functioning were higher education institutions from the French Revolution: due to the establishment of systems of public education, the higher degrees of teaching intensity entailed incentives for systematic revisions of mathematical concepts and their foundations.

An Old Babylonian institution: the *edubba*

But there are also revealing cases of innovations in the discipline induced by institutions in earlier periods. Particularly telling studies have been made by Christine Proust on the functioning of the scribal schools (*edubba*) in Old Babylonian times where the masters, forming the scribal apprentices, transgressed the routine tasks of teaching by validating procedures, by solving new classes of problems. While teaching the apprentices, the masters perfected and developed the practices of arithmetic and geometry already established.

Christine Proust reflected about the relation between teaching and research in a book chapter with the revealing title: “Does a master always write for his students? Some evidence from Old Babylonian scribal schools”. In this chapter, she analyses carefully the different types of cuneiform mathematical texts hitherto detected and accessible. The focus of the analysis is the period called Old Babylonian, i.e. from about 2000 to 1700 BC. The particular importance of her analysis is the re-assessment of traditional classifications of these collections. The more than 2000 clay tablets containing mathematical texts used to be classified as “table-texts” and as “problem-texts” – she characterises the two types as school texts, being “exercises written by young scribes during the elementary education” – and as “erudite texts”, “as opposed to the texts written by young pupils”; since all these texts were produced as activities of scribal schools, they all can doubtless be attributed to a teaching context (Proust, 2014, p. 70). Proust confirms that the mathematical texts were written by masters in the scribal schools, referring to a result of Jens Høyrup:

> The mathematical texts are school texts. […] Their authors […] were teachers of computation, at times teachers of pure, inapplicable computation, and plausibly specialists of this branch of scribal education; but they remained teachers, teachers of scribal school students who were later to end up applying mathematics to engineering, managerial, accounting, or notarial tasks. (Høyrup, 2002, p. 8)

Proust questions the traditional conviction that all these texts were produced for teaching purposes – and in particular that the erudite texts were all directed by masters to their students in the schools. For this re-analysis, she classifies the clay tablets from this period into three groups and analyses their function.

- The first type are school tablets containing stereotypical texts, which are similar to all scribal schools in Mesopotamia and which enable to reconstruct the school curriculum. The curriculum could thus be identified to be structured in an elementary and in an intermediate level. For a characteristic clay tablet, she resumes: “[…] is a school text in the sense that it was written by an apprentice scribe as he learned mathematics. In addition, its content has a clearly didactic function: the text is designed to teach precise mathematical knowledge” (Proust, 2014, p. 77).

- Proust emphasises that the school texts are not necessarily “puerile” texts. Among the “elementary” tablets there is the group of metrological tables and of multiplication tables. These tables were not necessarily created for teaching purposes. They might not have been produced originally for teaching, but for use in practical activities, and were later introduced in teaching, too – like in Modern Times the logarithmic tables and the trigonometric tables.
- The traditional group of “erudite” texts is divided by her in two different types. One (thus the second type) is called procedure texts, hence “lists of problem statements followed by their resolution and catalogues: lists of problem statements with no indication of their resolution” (Proust, 2014, p. 72). They look, at first, like texts composed by masters for their students. But they might have served also other purposes. Proust qualifies them as of “advanced teaching” since they work in a more sophisticated manner with the knowledge established in the elementary texts. A second group within this second type are the so-called catalogues: collections of problems, giving only their solution without the procedure for the resolution. Proust interprets them as used by the masters for classifying, ordering and arranging the knowledge: “These compilations could have been developed by masters to streamline the organization of the mathematical training curriculum, and maybe to classify and archive educational texts, thus constituting the first libraries” (Proust, 2014, p. 87).
- The third group, presented as “texts written by masters for their peers”, show that the scribal school masters were also able “to develop projects not directly related to their teaching activities” (Proust, 2014). These are the “mathematical series” texts, i.e. written on several numbered tables, contain very long lists of problem statements – more than 1500 in total. Their writing techniques evidence a virtuosity in their writing techniques. Different from the problem statements in the catalogues which are widely encountered in the various locations of cuneiform findings, the problem statements put in the series texts are rather unique in the known mathematical collections: “One can even wonder if some of them were ever intended to be solved” (Proust, 2014, p. 91).
- Proust’s intriguing conclusion refers to the existence of a community of masters, thus masters producing texts for their peers – and this due to the institutionalization of the scribal training:

  > The activities of masters included teaching and other objectives, such as communication between peers. These components are strongly interconnected, and yet they do not completely overlap. Developments in mathematics are the result of both the activity of teaching and interaction within a community of scholars.
  >
  > In the Old Babylonian period, education went hand in hand with creative activity, supported by a very active milieu. […] A network of long- distance links between the scribes seems to have existed, as shown by the similarities of the content of school tablets found through the Ancient Near East.
  >
  > […] Old Babylonian scribal schools were the places where the learning of cuneiform writing and arithmetic took place, but some of them were also intellectual centers. Some texts, written by the students themselves clearly reflect elementary teaching activities, others, written by the masters, bear witness to the activity of teaching, while others still show communication between scholars (Proust, 2014, p. 92)

IMPACT OF ESTABLISHING PUBLIC EDUCATION

As already emphasised, the impact of teaching on the production of knowledge can be studied and revealed more profoundly in particular after the French Revolution, with its enormous effect of establishing public education systems – and thus stimulating systematisation of knowledge and reflection upon its foundations.

A particular revealing aspect is the re-assessment of the role of textbook authors. Usually, textbook writing is understood as work for divulgation and disseminating of science, thus not contributing to the progress of science. It was in particular Thomas Kuhn's otherwise famous book on Scientific Revolutions, of 1962, which negated emphatically a productive role of textbooks (Kuhn, 1962). Yet, the period after the French Revolution is rich in providing contrary cases.

Then, the role of the textbook author also became investigated and even credited. While the share of textbook composition in establishing the elements of science was valued, the textbook author was also assessed in his productive contribution to science. A first such crediting was published in 1796, in a review of the second edition of J. A. J. Cousin's calculus textbook: *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* (1796). The review was published in *La Décade*, the journal of the *idéologues*. Its anonymous author assumed the novel stance of attributing to a textbook author the rank of "inventor"—a notion in the discourse on science that designated an innovative scientist since Clairaut and d'Alembert:

> The author of an elementary book attains the rank of an inventor if he can present the elements, first, in the best order, in the most simple and the most clear manner: if he removes from the science all its technical wrapping and if he illustrates after each step the space traversed in such a manner that the student always knows well where he is (quoted from Schubring, 1987, p. 43).

And Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), the prolific and successful textbook author since the first periods of the French Revolution, was distinguished even by the *Institut*—the new form of the Academy of Sciences since the Revolution—in being attributed a rank equal to an inventor. The distinction had been given in the *Institut's* report on the project presented by Lacroix to publish a treatise on the differential and integral calculus. In fact, he published this treatise as a three volumes textbook from 1797 to 1799. The report explained:

> To present difficult theories with clarity, to connect them with other known theories, to dismantle some of the systematic or erroneous parts which might have obscured them at the time of their emergence, to spread an equal degree of enlightenment and precision over the whole; or, put shortly: to produce a book which is at the same time elementary and up to the mark in science. This is the objective which Citizen Lacroix has taken to himself and which he could not have attained without engaging himself in profound research and by progressing often at the same level as the inventors (quoted from: ibid.).

TEACHER TRAINING AT HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS

Since the times of Old Babylonia and its *edubba*, mathematics has been taught in all cultures known. Yet, the forms of teaching were not necessarily institutionalised ones: over large periods and epochs, teaching might have occurred in private forms, as apprenticeship instructed by a master – or even in autodidact forms. And institutionalised forms did not need to be continuous ones – due to the invasion by a warrior people, the *edubba* did not continue after the abrupt end of the Old Babylonian period. And the School of Computation, founded in 656 in China for training the state functionaries suffered many closings and ended functioning definitely by 1120.

For Greek and Roman times, one has no evidence of an institutionalised teaching of mathematics, it occurred rather in private forms. For the classical period of Islamic civilisation, there existed one institution, the *madrasa* where – while forming muftis and khadis, for religious and law practices – mathematics could be taught as auxiliary science. In the (West-) European Middle Ages, this form was transmitted and developed: teaching the *quadrivium* as a minor subject and by generalists, without a proper qualification in mathematics. In Pre-Modern times occurred the split in Western Europe between Protestant and Catholic educational systems. In Catholic states, dominated by the Jesuits, higher education mathematics teaching was abolished – except France, where courses in mathematics were given at the *Collège Royal*, but without any degrees and diplomas. Later in the eighteenth century, mathematics was introduced for engineering studies, as a “service subject”. In Protestant states, the mathematics professorships introduced as major innovation during the Renaissance, were maintained and somewhat expanded, but serving either as a service subject, too, or as a propaedeutic for studies at the higher, i.e. professional faculties.

In Modern Times, it was at first in only one state, in Prussia, that mathematics became established at its universities as a proper study course, leading to a professional qualification: to be a teacher of mathematics at its secondary schools: the *Gymnasien*. Thanks to prepare thus, the first time, for a professional career in mathematics, the mathematics professors at the Prussian universities – being, before these reforms from 1810 on, rather generalists teaching encyclopaedic courses – themselves specialised in mathematics, turning from being teachers to the combined role of teacher and researcher. Hence, mathematics achieved autonomy at these Prussian universities, and this thanks to their task of teacher education.

Yet, this profound change was due to contexts specific for Prussia, and thus not directly generalizable:

- After the defeat in the 1806 war with Napoleonic France, the reforms occurred in a specific cultural and social context, characterised in particular by neo-humanism, a cultural conception, valorising knowledge as an organic unity, comprising mathematics and the sciences as essential components;
- Consequently, mathematics became one of the three main disciplines in the Gymnasium curriculum, with a comfortable number of weekly hours, and as a further consequence, the stipulation to have at least two mathematics teachers at each Gymnasium;
- The mathematics teachers being formed at the level of scientists, they enjoyed high social status, thanks to the neo-humanist spirit present in the Prussian culture;
- Since the Prussian territory was large, there were at the beginning ca. 90 *Gymnasien* – a number steadily increasing -, entailing a permanent demand for teachers educated at the universities (see Schubring, 1991).

Nevertheless, social changes in the other German states, mainly after the revolutionary period of 1848/49, induced structural reforms in their secondary school systems, too, and thus reforming their universities and leading to an autonomy of mathematics and emergence of pure mathematics research. Teacher education remained to constitute the essentially unique professional career provided by mathematical studies at German universities until the 1940s at least. A second career pattern, for mathematicians in industry and for research careers, the mathematics diploma, emerged only in 1942.

Therefore, teacher education proved to be not due only to the Prussian case, as structural basis for enabling institutionalised research contexts. This can be confirmed even by a rather extremely different case: the emergence of research structures for mathematics in Brazil.

In fact, Brazil provides an extreme case. In this country, universities were founded only from the 1930s on. How had higher education functioned earlier on? It was basically institutionalised according to the French model of *écoles spéciales*: separate faculties for law and medicine, and a military academy, later complemented by polytechnic schools, for training engineers. Mathematics was taught, yes, at higher education level, but only in these institutions for engineers – thus, providing service courses, without proper study courses. And how could one become a mathematics teacher at a secondary school (a *colégio*)? For a vacant position, interested people would have to pass a *concours*, being prepared either autodidactically, or as a “collateral” effect of engineering studies.

Universities were founded in Brazil only from the 1930s on, due to changed social and cultural conditions. And then, in the first two universities—the *Universidade de São Paulo* (USP) and *Universidade do Distrito Federal* (UDF), resp. the *Universidade do Brasil* (in Rio de Janeiro) —it was the study course for the *magistério,* the teaching profession, within the equivalent of a Philosophy Faculty, which enabled a “take-off” of practicing mathematical research.

The first university to be founded was the USP, in 1934. Its distinctive new feature was a Faculty, which basically resembled the German Faculties of Philosophy: the FFCL—*Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras*—which constituted in fact the kernel of disciplinary development. The founding decree of the USP, of 25 January 1934, in art. 5, § 1, stipulated the introduction of the teaching licence for those trained to become teachers at secondary schools as the “*licença para o magistério secundário”*. The degree afforded studies of a scientific discipline at the FFCL and accompanying pedagogical studies at the Institute of Education, attached to the Faculty. It is even more revealing, that the statutes projected doctoral studies; for such studies, only students having the *licenciado* diploma were mentioned to be admitted for an additional two years of studies (§ 12 of the decree).[xiv] Hence, a direct continuation was established: studying for a teaching license, and possible continuation for a doctorate.

At the UDF, founded in 1935 - it became later the likewise important *Universidade Federal do Rio de Janeiro* -, there was also a new Faculty besides the integration of various former professional schools, like the polytechnic schools, which was at first called *Escola de Ciências*. It had as its principal function the formation of teachers for secondary schools. The § 25 of the founding statutes, of 5 April 1935, attributed the function of providing study courses for the “candidato ao professorado secundário das ciências” in four different courses: for teachers of mathematics, physics, chemistry, and natural sciences. Doctoral studies were not yet instituted.

A research question which I am studying in this context is: what was the role of mathematics teacher education in France, in the 19th century, for the development of research? Usually, one credits France to have realised high levels of mathematical research, since about the period of Descartes and the creation of the Academy of Sciences in Paris, in 1666. After the French Revolution, this situation changed structurally, and it was quite different from Prussia and Germany: there existed now four types of institutions with teaching mathematics at higher education level:

- The *École polytechnique*, founded in 1794. It provided high level mathematical teaching, but not for forming in mathematics, but as preparatory studies for various engineering professions.
- The *facultés des sciences*, founded in 1808/1810, serving basically at the beginning as propaedeutic for the medicine faculties, and with a minor function for educating teachers, but with courses not beyond the college level.
- The *École normale supérieure* (ENS), founded in 1810. This institution should prepare, yes, teachers for the secondary schools, but was in its first decades also not of a high level and not dedicated to research.
- And there was the *Collège Royal*, founded in 1525, the only continuously functioning institution. But it offered free lectures, without a professional compromise or deferring of degrees – and an institution exclusively for teaching.

There was, in a parallel manner and in an independent structure, not connected to teaching, the *Institut*, the transformed former Academy, charged with research. But it suffered increasingly during the 19th century the often-discussed decline of science in France, which one can attribute, in the case of mathematics, to the dominance of the *École polytechnique*, with its focus on applications and engineering, and to the weak structures of the science faculties. This tendency became reverted by the last third of the 19th century, due to the expansion of the education system: the *facultés des sciences* succeeded in achieving a more independent status, and its professors were increasingly good mathematicians. But it was in particular the ENS which transformed, from the 1880s, into an institution forming highly qualified mathematics teachers, contributing decisively to now strengthened research in mathematics, initiated by the doctoral theses of its graduates (see Gispert, 1989).

ELEMENTS AND ELEMENTARISATION

In this last part, I will discuss another pertinent issue for interfaces between mathematical development and teaching: it is the notion of 'element' and of elementarisation of science. 'Elementarisation' here not means, as in common-day-language, trivialising knowledge, but to reveal the basic essence of knowledge and to structure knowledge from its basic constituents. In fact, the notion of element connects the development of mathematics and the modes of teaching mathematics in a fundamental way. Since Euclid's geometry textbook, the term 'elements' expresses the intention to give a systematic presentation of a mathematical theory, constructed from its basic components. This notion of elements and of elementarisation has been introduced and reflected in a paradigmatic manner during the Enlightenment, by d'Alembert (d'Alembert, 1755). It became the basis of the great project of the French Revolution to elaborate *livres élémentaires*, to realise this demand of the Enlightenment, to make scientific knowledge accessible for all, as the basis for a rational mode in the society.

While thus fixing the state of knowledge of mathematics or of one of its branches for a certain time and period, Felix Klein's notion of elementarisation dynamises the notion, emphasising the various stages where the meanwhile accumulated new results and branches led to a restructuration of the bases, defining a renewed structure of elements – the new architecture achieved by Bourbaki constituting a well-known case for textbooks (Bourbaki, 1948). It is incited by teaching and serving for teaching that textbooks are contributing to the progress of mathematics.

References

d'Alembert, J. (1755). Éléments des sciences. In *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences des Arts et des Métiers, volume V* (pp. 491-497). Paris, France: Briasson.

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques, 4*, 289-304.

Bourbaki, N. (1948). L'architecture de mathématique. In F. le Lionnais (Ed.), *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique* (pp. 35-47). Paris, France: Blanchard.

Brandt, C. (2017). Kulturwissenschaften und Wissenschaftsgeschichte. In M. Sommer, S. Müller-Wille, & C. Reinhardt (Eds.), *Handbuch Wissenschaftsgeschichte* (pp. 92-106). Stuttgart, Germany: Springer-Verlag.

Dauben, J. W. & Scriba, C. J. (Eds.) (2002). *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development.* Berlin, Germany: Birkhäuser Verlag.

Gispert, H. (1989). L'enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900: les mathématiques. *Histoire de l'éducation, 41*, 47-78.

Høyrup, J. (2002). *Length, Widths, Surfaces. A portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin.* New York, USA: Springer.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago, USA: University of Chicago Press.

Proust, C. (2014). Does a master always write for his students? Some evidence from Old Babylonian scribal schools. In A. Bernard & C. Proust (Eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History: Problems and Perspectives* (pp. 69-94). New York, USA: Springer.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51. ("Errata", ibid., 1988, 8(2), 51).

Schubring, G. (1991). *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810-1870). Zweite, korrigierte und ergänzte Auflage.* Weinheim, Germany: Deutscher Studien Verlag.

Sommer, M., Müller-Wille, S., & Reinhardt, C. (Eds.). (2017). *Handbuch Wissenschaftsgeschichte.* Stuttgart, Germany:Springer-Verlag.

[xiv] Source: https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto/1934/decreto-6283-25.01.1934.html. I am grateful to Prof. Rogério Monteiro de Siqueira (USP, Sao Paulo) for communicating me these sources.

COMUNICACIONES

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Didactic analysis of activities about the study of geometric places

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R.

Universidad Pública de Navarra - Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Resumen

El siguiente estudio describe una experimentación llevada a cabo con estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad en matemáticas. Se han diseñado unos modelos dinámicos de exploración e ilustración en GeoGebra para el estudio de métodos que permiten aproximar el área de un segmento parabólico. La tarea de los futuros docentes ha sido valorar la idoneidad del material para su implementación en un aula de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se detallan las actividades realizadas, las respuestas dadas y los hechos y fenómenos didácticos observados.

Palabras clave: *análisis didáctico, idoneidad, GeoGebra, exploración, ilustración.*

Abstract

This study describes an experimentation carried through with students of Master's degree in Secondary Education Teaching, speciality in mathematics. Explorative and illustrative dynamic models in GeoGebra were designed to study different methods for approximate the area of a parabolic segment. Master's students have valuated the suitability of this tool before using it in a class of Secondary second course. The study describes the activities that Master's students have made, their answers and the observed didactic phenomenon.

Keywords: *didactic analysis, suitability, GeoGebra, exploration, illustration.*

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza-aprendizaje no se puede concebir sin unos medios materiales (libros de texto, material físico manipulativo y herramientas tecnológicas) que permiten al alumno adquirir conocimientos. El docente es el encargado de escoger el material adecuado en cada situación de estudio, decisión que se apoya en el currículo y su desarrollo en la programación anual y en el contrato didáctico que se establece.

En el currículo básico de cada etapa educativa destacan los objetivos a alcanzar y las competencias que deben adquirir los alumnos en la etapa, así como los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje que regulan la adquisición de los contenidos fijados (MECD, 2015). De este modo, el currículo se puede definir como un conjunto de pautas que permite al profesor tener un criterio de decisión de los medios materiales que empleará en el aula. En otras palabras, el material empleado en el proceso de enseñanza debe ser escogido con el fin de asegurar un aprendizaje funcional que cumpla lo decretado en el currículo.

Entre los diferentes medios materiales, el libro de texto todavía ocupa un lugar central dentro de los recursos docentes (Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2016). Los libros de texto contienen definiciones de objetos matemáticos, exposiciones de propiedades, algoritmos para la resolución de problemas y múltiples actividades para poner en práctica dichos algoritmos. Así, son material de referencia pertinente, ya que permiten una institucionalización homogénea del saber. Sin embargo,

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R (2019). Análisis didáctico de actividades para el estudio de lugares geométricos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 143-152). Valladolid: SEIEM.

su uso exclusivo puede provocar que los conocimientos se adquieran de manera memorística o por repetición de algoritmos.

La falta de razonamiento en la actividad matemática provoca la pérdida de la *razón de ser* en la adquisición de algunos conocimientos (Rojas y Sierra, 2018). En consecuencia, son cada vez más los profesores que proponen actividades adicionales que permiten el desarrollo de una competencia operativa y discursiva (Godino, Batanero y Font, 2007). Dichas actividades adicionales se pueden realizar con distintos recursos, tales como materiales físicos diseñados con un fin didáctico u objetos del entorno o herramientas tecnológicas. En particular, los softwares dinámicos han irrumpido con fuerza en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

De esta manera, se establece una red de conexión entre el currículo, los medios materiales y el proceso de enseñanza (Figura 1). Los medios materiales son los recursos que se emplean en la enseñanza para que los alumnos alcancen los objetivos y las competencias establecidas en el currículo. Aun así, la labor del profesor no finaliza con facilitar dichos medios y proponer actividades a los alumnos; el docente es el encargado de comprobar si los alumnos han logrado el nivel académico pertinente.

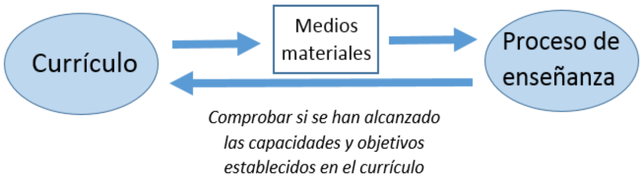


Figura 1. Red de conexión entre el currículo, los medios materiales y el proceso de enseñanza

Muchas investigaciones destacan la influencia del software en la práctica matemática. Por un lado, influye en el razonamiento llevado a cabo por el alumnado a la hora de elaborar demostraciones (Paulek y Días, 2013); por otro lado, ayuda a superar problemas encontrados en situaciones didácticas (Pastre y Bedretchuck, 2013); y, para terminar, es una herramienta adecuada para la realización de representaciones ostensivas de los objetos matemáticos (Lasa, Belloso y Abaurrea, 2016).

Teniendo en cuenta lo mencionado hasta el momento, se han diseñado actividades para que los alumnos de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) aproximen el área de un segmento parabólico mediante la construcción de figuras planas que cubran dicha superficie. Estas actividades requieren, por un lado, manipulación del software de geometría dinámica GeoGebra y, por otro lado, responder a un cuestionario propuesto en papel.

El currículo decreta como contenido en los primeros años de la ESO el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas, así como el cálculo de áreas por descomposición en figuras simples (MECD, 2015). En los libros de texto de la ESO es habitual que, entre los contenidos que se trasmiten respecto a las longitudes y áreas, destaque el cálculo de la longitud y del área de figuras planas mediante la implementación de fórmulas propiamente definidas para ello. De esta manera, la enseñanza de dichos conocimientos se lleva a cabo, primero, con la presentación de las fórmulas al alumnado y, a continuación, con la implementación y repetición de éstas en una colección de actividades. Esta práctica conlleva el fenómeno definido por Rojas y Sierra (2018), la pérdida de la razón de ser de algunos conocimientos matemáticos y, en consecuencia, a que los alumnos no adquieran, en este caso, el significado de longitud y área.

En contraposición a esa práctica, las actividades diseñadas en GeoGebra pretenden que los alumnos exploren y desarrollen razonamientos que les permitan llevar a cabo un aprendizaje significativo de lo que supone el cálculo de áreas. De esta manera, se quiere evitar que el aprendizaje de estas nociones se asocie solamente al estudio de fórmulas propiamente definidas para el cálculo de la medida mencionada.

Antes de llevar a cabo las actividades en el aula de la ESO, se ha realizado un estudio previo con los estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad de matemáticas. Este estudio tiene como objetivo que los alumnos del Máster analicen y valoren los recursos materiales de las situaciones que se pretenden poner en marcha en la ESO, y para ello se les ha planteado una serie de actividades que sirven para efectuar dicho análisis didáctico. Así, la investigación que se recoge en las siguientes líneas pretende mostrar, y a su vez examinar, las valoraciones de los alumnos del Máster, así como exponer las acciones que llevan a cabo en la resolución de las tareas.

Primero se presenta el marco teórico de referencia y el método, después el material con el que se ha llevado a cabo la investigación y los resultados proporcionados por los alumnos del Máster. El documento finaliza con las conclusiones y cuestiones abiertas.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Como referente de esta investigación se considera el *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) (Godino et al., 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Entre los aspectos que desarrolla el EOS, la *Teoría de la Idoneidad Didáctica* es la que permite orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2013). De esta manera, esta teoría describe las características que debe tener una didáctica orientada hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes seis componentes (Godino et al., 2007):

- *Idoneidad epistémica.* Evalúa el grado de representatividad de los significados implementados/pretendidos respecto al significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva.* Evalúa el grado de cercanía de los significados implementados/pretendidos a la zona de desarrollo potencial de los alumnos y la proximidad entre los significados personales logrados respecto a los implementados/pretendidos.
- *Idoneidad interaccional.* Evalúa el grado de efectividad de las configuraciones y trayectorias didácticas respecto a la identificación de conflictos semióticos y respecto a la resolución de conflictos que surgen en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional.* Evalúa la adecuación y la disponibilidad de los recursos materiales y temporales que se necesitan para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva.* Evalúa el grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica.* Evalúa la adecuación del proceso de estudio al entorno en el que se desarrolla (sociedad, escuela, proyecto educativo, condiciones del entorno, etc.).

En esta investigación se describe el análisis llevado a cabo por los alumnos del Máster sobre un material diseñado en dos soportes (GeoGebra y “lápiz y papel”) para la aproximación del área de un segmento parabólico. Esta propuesta de interactuar con dos soportes materiales viene motivada, en parte, para evitar el fenómeno didáctico de *ilusión de la transparencia* (Abaurrea, Lasa y Wilhelmi, en prensa; Lasa y Wihelmi, 2013a). Este fenómeno se puede dar de dos formas: 1) Cuando el docente sólo se emplea la pizarra, y 2) Cuando sólo se emplea el software de geometría dinámica. Por un lado, los docentes que sólo emplean la pizarra (o el “lápiz y papel”), debido al reducido tiempo en cada sesión, buscan ejemplos prototípicos para describir nociones o presentar/demostrar propiedades. La idea de realizar un detenido análisis de un “ejemplo perfecto” puede llevar al docente a creer que los alumnos entienden la propiedad y que son capaces de particularizarla a cualquier caso. Por otro lado, la mera concatenación de ejemplos ilustrativos en GeoGebra para presentar/demostrar propiedades, puede hacer creer a los docentes que los alumnos asimilan la propiedad y que son capaces de construir un concepto o una propiedad única (*proceso de unitarización*).

De este modo, la combinación de ambos soportes y su "uso correcto" permite evitar la ilusión del "ejemplo prototípico" o la ilusión de los "ejemplos exhaustivos", permitiendo que los estudiantes adquieran tanto medios deductivos (de lo general a lo particular) como inductivos (de lo particular a lo general) (Abaurrea et al., en prensa).

En cuanto al uso de GeoGebra en los procesos de estudio, Lasa y Wihelmi (2013b) describen tres momentos dentro de la actividad matemática: momento de *exploración*, de *ilustración* y de *demostración*. Los modelos dinámicos destinados a la *exploración* (diseñados previamente por el profesor) permiten a los alumnos manipular la construcción en GeoGebra y deducir propiedades. En cambio, los modelos construidos para el momento de *ilustración* presentan directamente la veracidad de una propiedad dada mediante ejemplos concretos. En estos modelos dinámicos los alumnos no deben llevar a cabo ninguna construcción, sino un razonamiento inductivo para concluir una propiedad. Por último, GeoGebra dispone de herramientas para *demostrar* deductivamente algunas propiedades, reemplazando de esta manera las tradicionales demostraciones llevadas a cabo paso por paso en la pizarra.

Tomar los recursos materiales, tanto físicos como tecnológicos, como objeto de estudio de esta investigación hace que la descripción de los resultados requiera de la identificación de los componentes e indicadores de la idoneidad mediacional. Tal y como resalta Godino (2013), la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático a día de hoy. Permite desarrollar la compresión de los estudiantes, aumentar el interés y acrecentar la competencia matemática; todo ello si se hace un uso estratégico del recurso. Godino (2013) describe algunos indicadores de idoneidad en el uso de recursos materiales.

- Los materiales manipulativos e informáticos deben permitir introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.
- Las definiciones y propiedades que exponen deben estar contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visuales.

Estos indicadores tienen que estar muy presenten en el diseño de actividades, ya que la idoneidad de los recursos materiales tiene influencia directa en los aprendizajes. Es por ello por lo que, en cada discurso o actividad, el profesor debe emplear el material físico o tecnológico que más se ajuste a los objetivos que quiere lograr. Además, para que el proceso de estudio se desarrolle correctamente, es necesario que el profesor domine los recursos que emplea. En particular, el nivel de maestría de los recursos tecnológicos influencia la calidad de la enseñanza.

El diseño de actividades en GeoGebra que permiten llevar a cabo momentos de exploración e ilustración requiere un control de la herramienta avanzado. La construcción de modelos dinámicos que posteriormente manejan los alumnos de ESO para concluir propiedades debe ser programada previamente por el docente, al igual que los modelos ilustrativos. De esta manera, es imprescindible que el docente esté capacitado para construir modelos en GeoGebra (*instrumentalización de la herramienta*).

También se consideran determinantes en la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de clase, el ratio profesor/alumno y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2013). Estos aspectos no van a ser analizados en este estudio piloto con estudiantes del Máster, en un contexto distinto al de la Educación Secundaria. Por esta diferencia de contexto, el análisis se centra exclusivamente en la idoneidad mediacional, que tendría que ser completada con el resto de las dimensiones y su articulación para la valoración global de la idoneidad didáctica en contextos escolares.

El método de análisis de los resultados es cualitativo por estudio de casos. La triangulación se sigue del análisis relacional de los instrumentos utilizados (software y “lápiz y papel”), así como con la concatenación de observaciones y la valoración de su coherencia. El estudio es pues de validación interna, no buscando la generalización sino la determinación de pautas que orienten protocolos de actuación tanto en la formación de profesores como en la intervención en aula con estudiantes de ESO.

EXPERIMENTACIÓN

Muestra

La muestra es intencional y se compone por ocho alumnos del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad en matemáticas, provenientes de distintas titulaciones universitarias científico-técnicas (solo dos de ellos son graduados en matemáticas). Todos ellos han tenido una formación previa de Geometría plana en una asignatura del Máster y una formación elemental de GeoGebra. En cuanto a cuestiones didácticas, tienen información específica respecto a la idoneidad y a la pertinencia de los recursos materiales que se deben emplean en situaciones didácticas debido a que a lo largo del Máster han llevado a cabo distintas actividades para la valoración de medios materiales.

Proceso de estudio

Tal y como se menciona en secciones anteriores, el experimento pretende que los alumnos del Máster valoren una serie de actividades que se han diseñado para el cálculo del área de un segmento parabólico. Dichas actividades requieren la resolución de tareas con GeoGebra y la realización de cuestiones en papel. De esta manera, para el diseño de applets y tareas en soporte papel-lápiz que se pretenden aplicar en 2º de la ESO, se han tenido en cuenta aspectos curriculares y científicos. Por un lado, se toma en consideración la adecuación de las actividades a las capacidades de estudiantes de 2º ESO. Así, se propone el cálculo del área de un espacio comprendido entre dos funciones en un dominio que no se puede calcular con polígonos elementales (ver Figura 2), siendo los métodos de aproximación al área los únicos posibles para los conocimientos de los estudiantes de la etapa. Por otro lado, se atiende a aspectos científicos relativos a los momentos de utilización de los sistemas dinámicos para el diseño de los medios materiales (Lasa y Wilhelmi, 2013b). Así, se han diseñado los applets de exploración e ilustración que permiten a los alumnos construir paulatinamente el conocimiento.

La investigación se ha llevado a cabo en una sesión de dos horas en el aula de informática y las actividades que han realizado los futuros docentes se dividen en tres entregas separadas. Las primeras dos actividades corresponden a la primera entrega; las actividades tres y cuatro a la segunda entrega y las últimas cuatro actividades pertenecen a la tercera entrega. Las actividades son lineales en el tiempo, es decir, no se dispone del enunciado de actividades posteriores hasta que no se finalicen las previas, para así evitar el uso de conocimientos que puedan aparecer en entregas posteriores.

En todas las entregas se requiere el uso de dos soportes: GeoGebra y “lápiz y papel”. Por un lado, los alumnos del Máster tienen que realizar ellos mismos construcciones en GeoGebra y deben analizar varios applets GeoGebra diseñados para la actividad que se pretende llevar a cabo en un aula de segundo de la ESO. Por otro lado, además de realizar la resolución de algunos problemas, se les pide reflexionar acerca de la idoneidad de los modelos dinámicos en un cuestionario en papel.

Las actividades de la primera entrega buscan que los alumnos del Máster construyan un modelo que presentarían a estudiantes de ESO como una posible forma de cubrir la superficie de un segmento parabólico para así poder aproximar su área. Mientras que la primera actividad pretende que lo hagan a mano alzada en papel (ver Figura 2), en la segunda actividad se les pide que lo construyan en GeoGebra.

1. ¿De qué manera se puede cubrir esta superficie de manera que nos facilite el cálculo de su área? Construye a mano alzada una posible solución.

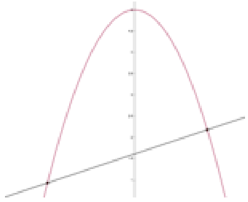


Figura 2. Actividad 1

En cuanto a las actividades de la segunda entrega, se les presenta una construcción (ver Figura 3) de ilustración en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/nyudzpxq) que se podría enseñar en el aula de ESO como una posible solución de la actividad 1. La labor de los alumnos del Máster es comparar dicho modelo con el propuesto por ellos (actividad 3), así como discutir su idoneidad y razonar por qué creen que se ha optado por construirlo de esa manera (actividad 4).

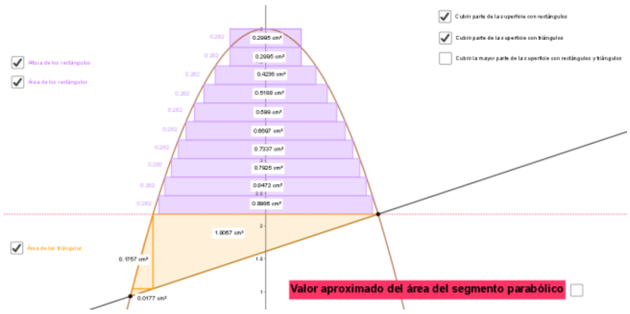


Figura 3. Propuesta que se les presentará a los alumnos de la ESO

Para terminar con las posibles formas de cubrir el segmento parabólico, se presenta una actividad que pretende que los alumnos, mediante la exploración de un applet GeoGebra, descubran el modelo propuesto por Arquímedes para la aproximación del área del segmento parabólico (https://www.geogebra.org/m/jtzysrsv). En las actividades de la tercera entrega se informó a los alumnos del Máster que debían discutir la pertinencia de este applet en base al currículo de la ESO, es decir, teniendo en cuenta las capacidades del alumnado de 2º de la ESO (Figura 4).

5. ¿Qué opinas sobre el uso de este applet en la Educación Secundaria? ¿Serían los alumnos capaces de completarlo? ¿Qué responderían?
6. Compara el método de Arquímedes por el propuesto por vosotros e indica cuál crees que es más adecuado para la enseñanza en la ESO.

Figura 4. Actividades de la tercera entrega

El modelo de Arquímedes cubre la superficie mediante triángulos. Primero construye el triángulo de mayor área posible que queda dentro del segmento parabólico y repite esta práctica en los espacios “vacíos”. De esta manera, mediante la construcción paulatina de los mayores triángulos posibles, cubre toda la superficie. A pesar de que los alumnos de ESO puedan encontrar estos triángulos mediante ensayo-error, al final de la tercera entrega se propone a los alumnos del Máster identificar dichos triángulos con métodos algebraicos. Maximizar la función distancia entre un punto de la parábola y la recta permite hallar el tercer vértice del triángulo.

RESULTADOS

En este apartado se describen las acciones llevadas a cabo por los alumnos del Máster a lo largo de las actividades de las tres entregas.

Los modelos construidos en la primera entrega reflejan que cuatro de los ocho estudiantes indican que el uso combinado de triángulos y rectángulos es la mejor opción. Aun así, como se aprecia en la Tabla 1, sus propuestas difieren en la colocación y orientación de los polígonos. Otra construcción distinta es la que sugieren los estudiantes 7 y 8. Estos estudiantes cubren el segmento parabólico con una colección de rectas verticales (paralelas entre sí), construyen cuadriláteros desde la base del segmento parabólico hasta la parábola. En tercer lugar, un alumno cubre el segmento parabólico con triángulos (Tabla 2) y, por último, un estudiante cubre el segmento parabólico con un círculo que ocupa la mayor parte de la superficie y por triángulos que pretenden cubrir los espacios vacíos (Tabla 2).

Tabla 1. Propuestas de los alumnos del Máster que emplean triángulos y rectángulos

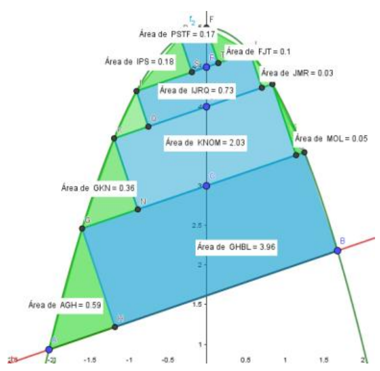
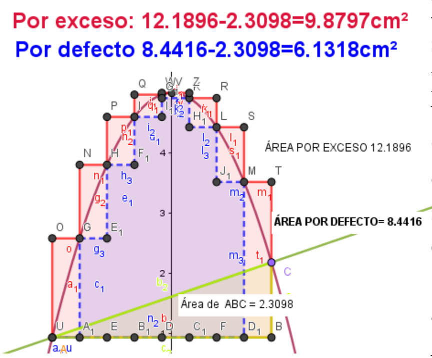
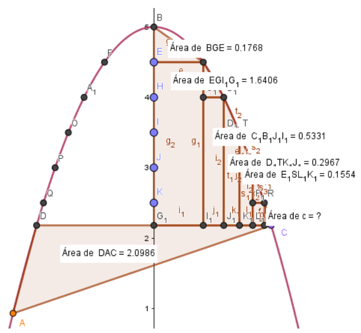
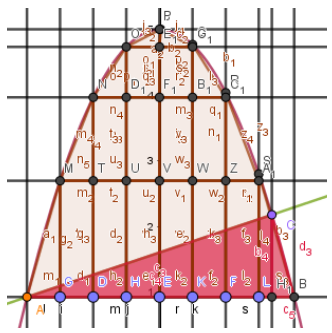
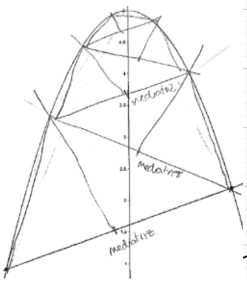
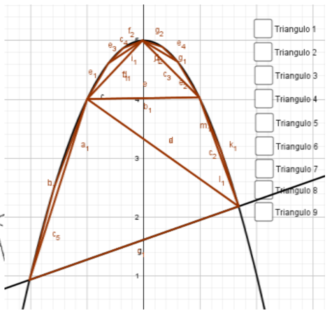
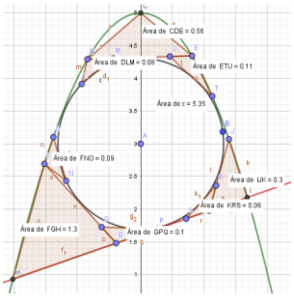
	**Estudiante 1.** Toma la base del segmento parabólico para construir el rectángulo de mayor altura posible que queda dentro de la superficie y cubre el espacio vacío que queda a la izquierda de este primer rectángulo con un triángulo. A continuación, repite el método tomando como base uno de los lados del primer rectángulo. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo. *Nota*. A pesar de que visualmente este modelo ilustrativo parezca correcto, uno de los vértices del primer rectángulo no está anclado, por lo que al moverlo, toda la construcción se modifica. Este es un claro signo de falta de dominio de GeoGebra (*problema de instrumentalización*).
	**Estudiante 2.** Deja a un lado la base del segmento parabólico y toma un segmento horizontal como base de los rectángulos. Mediante rectas perpendiculares y paralelas construye varios rectángulos en posición vertical. A continuación, haciendo uso de las posibilidades que da GeoGebra y tomando como referencia los vértices de los rectángulos, construye dos polígonos que acotan superior e inferiormente la superficie. Por último, a estos polígonos les resta el área del triángulo que queda fuera del segmento parabólico (triángulo inferior que se genera al tomar la base horizontal). De esta manera, obtiene la aproximación del área por exceso y por defecto. *Nota*. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.
	**Estudiante 3.** Todos los polígonos que construye quedan dentro del segmento parabólico, pero empieza construyendo un triángulo que le permite tomar una base horizontal en la construcción de los rectángulos. Además, se vale de la simetría para la aproximación del área. Tal y como se puede apreciar, no ve necesario completar la parte de la construcción que queda en blanco, ya que es simétrica a la parte derecha, por lo que su área será la misma. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo. *Nota*. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.
	**Estudiante 4.** Al igual que el estudiante 2, toma un segmento horizontal que le permite construir rectángulos de base horizontal. Mediante rectas paralelas y perpendiculares construye rectángulos, pero a diferencia del estudiante 2, todos los rectángulos que construye quedan dentro del segmento parabólico, por lo que hace uso de triángulos en los laterales. Una vez obtiene el área de los triángulos y rectángulos, emplea la misma técnica que su compañero: resta al área total el área del triángulo inferior (triangulo rojo) ya que queda fuera del segmento parabólico. *Nota*. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.

Tabla 2. Propuestas de los alumnos del Máster que difieren de las demás construcciones

Estudiante 5. Primero representa la mediatriz de la base del segmento parabólico, y la intersección de esta mediatriz con la parábola proporciona el tercer vértice del triángulo. La reiteración de esta técnica le permite cubrir la mayor parte de la superficie. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo.

Este alumno presenta un gran dominio de GeoGebra ya que además de representar una construcción invariable, introduce casillas de control. Haciendo clic encima de la casilla de cada triángulo el modelo dinámico proporciona su área.

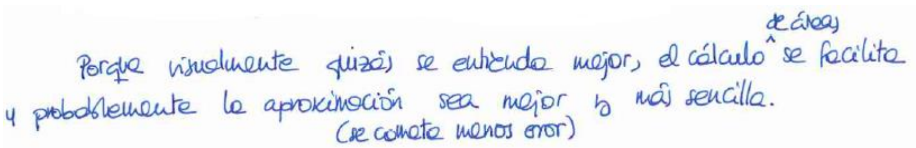


Estudiante 6. Tanto el círculo como los triángulos están construidos a mano alzada y sin ningún otro criterio más que no superar la superficie del segmento parabólico.

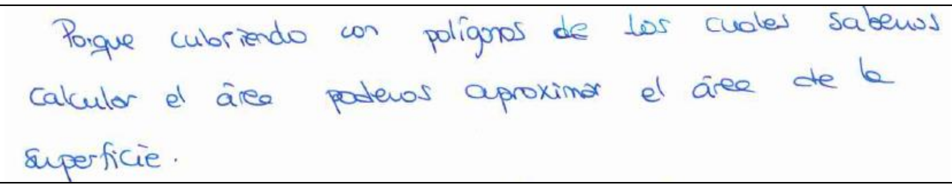
Ningún punto está anclado, por lo que la construcción se descuadra fácilmente provocando que no se ajuste a la superficie inicial. Por lo tanto, se puede concluir que este estudiante no tiene un gran dominio de la herramienta *(problema de instrumentalización)*.

En cuanto a las actividades de la segunda entrega, los estudiantes debían comparar sus construcciones con el modelo ilustrativo que aparece en la Figura 3 y valorar la construcción dada. A pesar de que nadie había diseñado exactamente el mismo *applet*, todos los estudiantes (incluidos los que no han empleado triángulos y rectángulos en su construcción) describen la técnica del modelo ilustrativo dado como visual y sencilla, debido a que emplea polígonos cuyas áreas saben calcular los alumnos (Tabla 3). Así, estiman que el contenido se ajusta a las capacidades del alumnado de la ESO. Por tanto, se cumplen los indicadores para la idoneidad mediacional, por lo que el applet de la Figura 3 se considera un medio adecuado para trabajar la aproximación del área del segmento parabólico.

Tabla 3. Propuestas de los alumnos del Máster al análisis del modelo dinámico de la Figura 3



Estudiante 1



Estudiante 7

Además, los estudiantes 1, 3, 4 y 5 consideran oportuno el uso de casillas de control. Dichas casillas permiten representar paulatinamente los triángulos, los rectángulos y sus correspondientes alturas y áreas. En palabras de los estudiantes, visualizar y esconder los polígonos permite comprender mejor el problema y permite que los alumnos puedan descubrir poco a poco la resolución del problema, sin ver el resultado completo directamente (ver Tabla 4).

A pesar de valorar positivamente el modelo dinámico de la Figura 3, hay que destacar que el estudiante 5 considera que los polígonos "salgan" del segmento parabólico puede ser origen de un conflicto cognitivo para el alumnado de ESO.

Tabla 4. Comentarios sobre las casillas de control

Las casillas de control incorporadas considero que ayudan en la comprensión del problema.	**Estudiante 1**
El hecho de poseer casillas de control plantea un reto al alumno que no tiene porque ver el resultado sino lo desea.	**Estudiante 4**

En la tercera entrega los estudiantes discuten acerca del uso del método de Arquímedes en segundo de la ESO. Las respuestas revelan que, en su opinión, los applets que emplean rectángulos y triángulos son más intuitivos para los alumnos de la ESO. Aun así, a pesar de que el método sea más complejo, consideran que la exploración con el applet GeoGebra y la cumplimentación del cuestionario que se pretenden proponer a los alumnos de la ESO, permitirán que estos alumnos identifiquen que el método (Tabla 5).

Tabla 5. Comentarios sobre el método de Arquímedes

La verdad es que parece más intuitivo verlo con rectángulos, porque los triángulos parece que tienen más complicaciones (encontrar el triángulo máximo no me parece tan sencillo)	**Estudiante 2**
Si, creo que los alumnos son capaces de completarlo. Creo que este applet es correcto para la ESO.	**Estudiante 7**

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La investigación pretende, por un lado, mostrar la evaluación realizada por futuros docentes sobre la idoneidad de los recursos materiales que se van a emplear con alumnos de segundo de la ESO para el cálculo del área de un segmento parabólico y, por otro, exponer las propuestas de los alumnos del Máster para cubrir la superficie mencionada.

Los alumnos del Máster de profesorado, entrenados para ser futuros docentes, durante su formación académica han evaluado varias situaciones de enseñanza que se podrían plantear en la ESO. Por eso, ellos han sido los encargados de realizar la evaluación de los recursos materiales y entre sus aportaciones destacan las siguientes ideas.

Primero, tal y como se detalla en el texto y en la Tabla 2, la mitad de la clase no ha realizado una composición con triángulos y rectángulos para aproximar el área del segmento parabólico; pero, aun así, tras manipular el applet que aparece en la Figura 3 (modelo ilustrativo), todos consideran que ese método es adecuado para realizarlo en la ESO.

Los futuros docentes observan que la composición del segmento parabólico con triángulos y rectángulos permite cubrir con gran precisión la superficie. Así, la idoneidad cognitiva, epistemológica y ecológica de la tarea es alta para su implementación en 2º de la ESO dado que los polígonos que se emplean son figuras conocidas para los alumnos de esta etapa y, además, están familiarizados con su área (Tabla 3).

Para finalizar, en relación a trabajar la técnica de Arquímedes en el aula de la ESO, los estudiantes del Máster consideran que se trata de una técnica más compleja en comparación con el uso de triángulos y rectángulos. Aun así, los modelos dinámicos de exploración servirán como herramienta para la comprensión de la técnica ya que se ajustan a las capacidades del alumnado de la ESO. En conclusión, el modelo de exploración es una herramienta idónea que permite llevar a cabo razonamientos adaptados al contenido pretendido.

Entre los diseños que han propuesto los estudiantes de Máster, destaca la construcción del estudiante 2, que realiza la aproximación mediante acotación superior e inferior. Esta técnica no encaja con los usos escolares, que privilegian las aproximaciones “por defecto”. Así, por ejemplo, en general se dice que “8 dividido entre 3 es 2 y sobran 2” y rara vez que “8 dividido entre 3 es 3 y falta 1”. También, cuando se aproxima el número π, se utiliza 3,1415 (truncamiento) en lugar de 3,1416 (redondeo). En ambos ejemplos, la aproximación “por exceso” es mejor que la usualmente utilizada “por defecto”. De esta forma, la técnica empleada por el estudiante es “experta” y exige en la formación del profesorado un análisis de su pertinencia y de las limitaciones escolares para su desarrollo, si no se quiere incurrir en un fenómeno de *ilusión de la transparencia*.

Este estudio deja pues una cuestión abierta en relación con el método de aproximación por exceso y por defecto. ¿Cómo influye la aproximación por defecto y exceso en la práctica matemática? ¿Qué tipo de actividades se pueden proponer que contribuyan a una construcción paulatina de técnicas de aproximación que anticipen los procesos analíticos de acotación? Aquí hay un reto fundamental, el paso del progreso algebraico “por equivalencias sucesivas” al progreso analítico “por pérdida paulatina de información”; progreso que está relacionado con el concepto básico de igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007).

Referencias

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (en prensa). Momentos de exploración e ilustración en la determinación de circunferencias en futuros docentes de educación secundaria. *Yupana*.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Lasa, A., Belloso, N. y Abaurrea, J. (2016). Long live to triangles! Dynamic models for trigonometry. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *5*(2), 30-55.

Lasa, A y Wilhelmi, M. R. (2013a). GeoGebra en la formación de profesorado en ESO y Bachillerato. *Cónica*, *3*, 30-32.

Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2013b). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *2*(1), 52–64.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). Málaga: SEIEM.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado 3, del 3 de enero de 2015* (pp. 169-546). Madrid: Autor.

Pastre, G. y Bedretchuck, P. (2013). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): A utilização do software GeoGebra em um processo de ensino-aprendizagem de lugares geométricos. *UNIÓN*, *33*, 125-136.

Paulek, C. M. y Días, M. R. (2013). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Um estudo sobre a influência do software GeoGebra na elaboração das demonstrações geométricas. *UNIÓN*, *35*, 145-160.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *27*(1), 77-120.

LA REPRESENTACIÓN DE PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN CON ALUMNOS DE 4 AÑOS

Pattern representations in Early Childhood Education: a first approach with four-year-old children

Acosta, Y. y Alsina, Á.

Universitat de Girona

Resumen

El objetivo de este estudio es realizar una primera aproximación a la representación de patrones en las primeras edades, partiendo de la base de que una representación matemática es una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático. Se han analizado las representaciones de patrones de 23 alumnos de 4-5 años en contextos de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos. Los primeros resultados indican que: 1) globalmente, más de la mitad de los participantes representaron correctamente los patrones; 2) utilizan básicamente dos sistemas de representación, gráfica y simbólica, pero con un claro predomino del primer tipo (más del 70%). Se concluye que la exposición a una variedad de patrones en diferentes contextos, junto con el papel del docente como guía que anima a los alumnos a justificar, transferir y representar los patrones, son componentes cruciales en la acción de representar, generalizar e iniciar el pensamiento algebraico.

Palabras clave: *Educación matemática infantil, pensamiento algebraico, patrones, representación matemática, tipos de representación.*

Summary

The objective of this study is to make a first approximation to the pattern representations in the first ages, starting from the base that a mathematical representation is an external signal that shows and makes present a mathematical concept. Through a design-based research, the pattern representations of 23 children of 4-5 years old have been analyzed in contexts of daily life, manipulatives and games. First results indicate that: 1) globally, more than half of the participants have correctly represented the patterns; 2) basically they use two systems of representations, graphic and symbolic, but with a clear predominance of the first type (more than 70%). It is concluded that exposure to a variety of patterns in different contexts, together with the role of the teacher as a guide that encourages students to justify, transfer and represent the patterns, are crucial components in the action of representing, generalizing and initiating algebraic thinking.

Keywords: *Early childhood mathematics education, algebraic thinking, patterns, mathematical representation, types of representation.*

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios constatan que los patrones proporcionan una base que es esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico y que contribuyen en el desarrollo general de la representación matemática y de la abstracción (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003; Papic, 2007; Papic y Mulligan, 2005). Desde este prisma, resulta evidente que los patrones van más allá de un mero contenido, ya que se configuran como un proceso, una capacidad y habilidad para buscar regularidades y estructuras matemáticas (Clements y Sarama, 2015).

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2019). La representación de patrones en Educación Infantil: una primera aproximación con alumnos de 4 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 153-162). Valladolid: SEIEM.

A pesar de la importancia de este conocimiento matemático, por lo general son pocos los estudios que hasta el momento han analizado las producciones acerca de los patrones de los alumnos de Educación Infantil (Perry y Dockett, 2008). Los que se han centrado en estas edades principalmente han focalizado sus análisis en determinar qué tipos de patrones identifican los niños de las primeras edades, como es el caso de la trayectoria de aprendizaje sobre patrones de Clements y Sarama (2015) o bien el estudio más reciente de Rittle-Johnson, Zippert y Boice (2019), en los que se concluye que primero aprenden a trabajar con patrones simples del tipo AB y luego aprenden a identificar patrones con tres y cuatro unidades (patrones ABB y AABB).

En Acosta y Alsina (2018), además de verificar estos datos, se ha aportado también un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones en las primeras edades. Se asume que la palabra "itinerario" se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres fases: 1) Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas de los niños, como por ejemplo su entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia; 2) Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como, por ejemplo, algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*Applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático; 3) Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos, como por ejemplo el lápiz y el papel, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales (Alsina, 2019).

Con base a ello, el propósito de este nuevo trabajo es realizar una primera aproximación sobre la representación de patrones, al tratarse de un conocimiento que permite asignar significados y comprender las estructuras matemáticas (Radford, 1998). En este sentido, se ha llevado a cabo un estudio con 23 alumnos de 4-5 años cuyo objetivo ha consistido en analizar si son capaces o no de representar patrones en contextos informales de enseñanza (situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos) y, en caso afirmativo, determinar qué tipo de representaciones utilizan.

La representación como proceso matemático

Martí y Pozo (2000) señalan que uno de los retos más significativos de nuestra cultura es la comprensión y uso de los diferentes sistemas externos de representación, puesto que de ello depende que las personas sepan leer y escribir o realizar operaciones aritméticas, por ejemplo. En este sentido, Martí (2003) establece que la construcción de los sistemas de representación se extiende, en las culturas occidentales, desde los 2-3 años hasta los 9-10 años aproximadamente, y distingue las notaciones como objetos gráficos y como objetos semióticos. Este autor señala que, desde el punto de vista gráfico, en primer lugar, es imprescindible diferenciar los sistemas figurativos (dibujos, imágenes) de los sistemas arbitrarios (especialmente escritura y numerales escritos). Pérez-Echeverría, Martí y Pozo (2010) señalan que la consideración de objetos semióticos supone explicitar parte de las relaciones entre una notación y otros componentes del sistema, es decir, la sintaxis de cada sistema representacional, y por ello implicaría una mayor complejidad funcional, por lo que debería ser posterior en el aprendizaje y el desarrollo.

La representación matemática, en su sentido amplio, se entiende como "todas aquellas herramientas, ya sean signos o gráficos, que muestran la presencia de conceptos y procedimientos matemáticos con las cuales se abordan y se plasman conocimientos matemáticos" (Rico, 2009, p. 3). Desde esta perspectiva, se considera un proceso que permite ordenar, registrar, comunicar ideas y que, además, ayuda a reconocer la naturaleza matemática común de situaciones distintas (NCTM, 2003). Por esta razón, Alsina (2016) señala que la representación de las ideas y procedimientos matemáticos es un proceso indispensable para poder aprender, de manera que si no hay representación no hay comprensión, y sin comprensión no puede haber aprendizaje de las matemáticas.

Para Freudenthal (1991), el desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto, de manera que puede tener formas diversas, por ejemplo, a través de objetos físicos, el lenguaje natural, dibujos y símbolos convencionales. En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sean concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos. Aunque el desarrollo de la representación vaya de lo concreto a lo abstracto, en términos generales el proceso de enseñanza-aprendizaje no es unidireccional sino bidireccional, es decir, de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto otra vez a lo concreto, aunque la finalidad sea siempre la misma: aprender (y sobre todo comprender) el símbolo que representa un objeto, una situación o una idea matemática. Tal y como afirma Pecharromán (2013, p. 124),

> La primera representación se crea desde el contexto en el que se descubre el objeto como medio de expresión de la funcionalidad que representa y sus propiedades. La creación de la representación está dirigida, fundamentalmente, por la función organizativa que se quiere expresar, y depende de la naturaleza del contexto en el que se descubre el objeto y del conocimiento que existe de ese contexto.

A través de las interacciones con las diferentes representaciones, con el maestro y con el resto de alumnos, éstos desarrollan sus propias imágenes mentales sobre las ideas matemáticas, que son las que permiten avanzar en el aprendizaje. Además, la adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad (NCTM, 2003).

La gran mayoría de estudios que han abordado el análisis de las representaciones de las ideas matemáticas en las primeras edades se han centrado en la notación convencional de los números (para una revisión, consultar Alsina y Llach, 2012, y Llach y Alsina, 2012) o las formas geométricas (Berciano, Novo y Alsina, 2017). En estos estudios se ha puesto de manifiesto que las representaciones que usan los alumnos menores de 6 años pueden ser en forma de dibujos, diagramas, lenguaje oral o escrito, gestos, símbolos, o incluso con objetos físicos.

Desde este prisma, se asume la clasificación de Rico (2009), quien indica que dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes familias de sistemas: representaciones simbólicas y representaciones gráficas. Entre las primeras se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, y entre las segundas las de tipo figurativo.

Con base a estas consideraciones, el objetivo de este trabajo es analizar si los alumnos de 4-5 años son capaces o no de representar patrones en contextos informales de enseñanza (situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos) y, en caso afirmativo, determinar qué tipo de representaciones utilizan.

DISEÑO Y PROCEDIMIENTO

Nuestro estudio se enmarca dentro de una investigación basada en el diseño (*Design-based research* [DBR]) donde se conecta la investigación teórica con la práctica de aula para así poder ofrecer un proceso de enseñanza-aprendizaje coherente y significativo (Cotton, Lockyer y Brickell, 2009; Design-Based Research Collective, 2003). En esta conexión el investigador se convierte en un actor participante de la dinámica de un contexto real, para así desde la reflexión y la acción contribuir a un enriquecimiento de la praxis docente.

En la Figura 1 se presenta un diagrama de flujo donde se muestran las fases que se han tenido en cuenta durante el proceso metodológico de nuestro estudio.

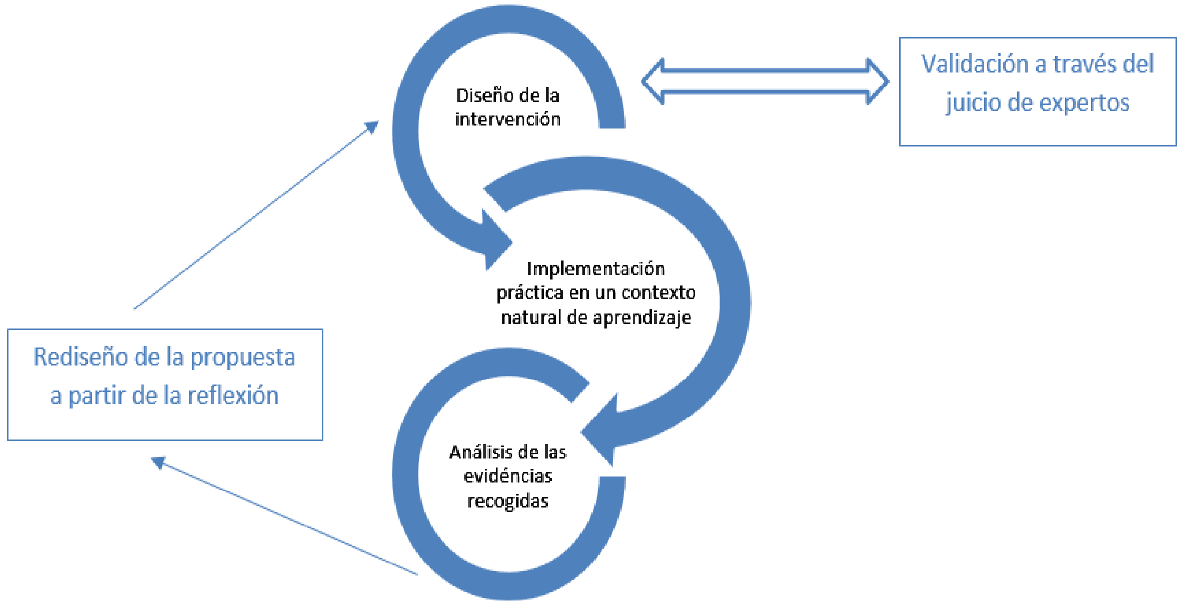


Figura 1. Diagrama de flujo sobre los aspectos metodológicos que orientan la investigación

El diseño de la intervención se ha llevado a cabo a partir de las orientaciones teóricas y didácticas que fundamentan nuestro estudio y de las valoraciones obtenidas a través del juicio de 8 expertos en relación a las actividades propuestas. La intervención se ha realizado en un aula de Educación Infantil de un centro público de Girona (España). El grupo consta de 23 alumnos, 11 niños y 12 niñas, siendo la edad media de 4 años y 8 meses. En general, los participantes presentan un nivel madurativo óptimo que se adecua a su edad evolutiva. Se ha seleccionado este grupo por las facilidades de acceso y por el tipo de metodología que se aplica en el aula, que se basa en el trabajo por proyectos (situaciones de vida cotidiana), el uso de materiales manipulativos y juegos, principalmente.

En la Tabla 1 se presentan las seis actividades en contextos informales de enseñanza que han sido validadas previamente por expertos, y cuya finalidad consiste en identificar, representar y leer patrones matemáticos presentes en los distintos contextos de enseñanza-aprendizaje informales: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos.

Tabla 1. Actividades en contextos informales de enseñanza

a) Situaciones de vida cotidiana	A través de *Google Maps* se visualizan diferentes calles de nuestra ciudad y se solicita a los alumnos que identifiquen seriaciones de elementos. A partir de buenas preguntas, se les invita a fijarse en las fachadas de casas, edificios y comercios. Una vez identificadas las seriaciones, de manera conjunta, se representan los respectivos patrones utilizando cartulinas de colores.	
	Se muestra una imagen de un enjardinado con una seriación de distintos arbustos que sigue un patrón (AB) y, a través del diálogo, se invita a los alumnos a describir cómo están colocados los arbustos, con la mirada puesta en analizar el patrón. Finalmente se les propone representar dicho patrón con plastilina.	
b) Recursos manipulativos	Se propone a los alumnos crear seriaciones con las piezas del *Pattern Blocks* (Geomosaico), siguiendo el patrón que se indica en unas tarjetas: (AB), (AAB) o (ABB).	
	Se ponen a disposición de los alumnos cartulinas plastificadas con seriaciones diversas. Se les invita a extender el patrón para completar cada seriación con la ayuda de pinzas de ropa de colores.	
c) Recursos lúdicos	Se plantean dos juegos motrices para promover la anticipación de hechos a partir de la interiorización de la secuencia presente en dos canciones. Se valora sobre todo la capacidad de los alumnos para anticipar acciones e identificar el patrón presente en las normas del juego.	

A través del registro audiovisual de las sesiones desarrolladas, del diario de campo y de las producciones elaboradas por los alumnos se analizan en diferido las evidencias obtenidas, con el propósito de determinar si los participantes en el estudio son capaces o no de representar patrones y, en caso afirmativo, determinar qué sistemas de representación usan, de acuerdo con los objetivos de nuestro estudio. Además, los datos obtenidos se van a utilizar posteriormente para rediseñar, si es necesario, estrategias didácticas y metodológicas que permitan una optimización y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones en general y de la representación en particular.

RESULTADOS

En las siguientes líneas se exponen, en primer lugar, los resultados globales acerca de las producciones realizadas por los participantes en el estudio y, en segundo lugar, los tipos de representaciones usadas.

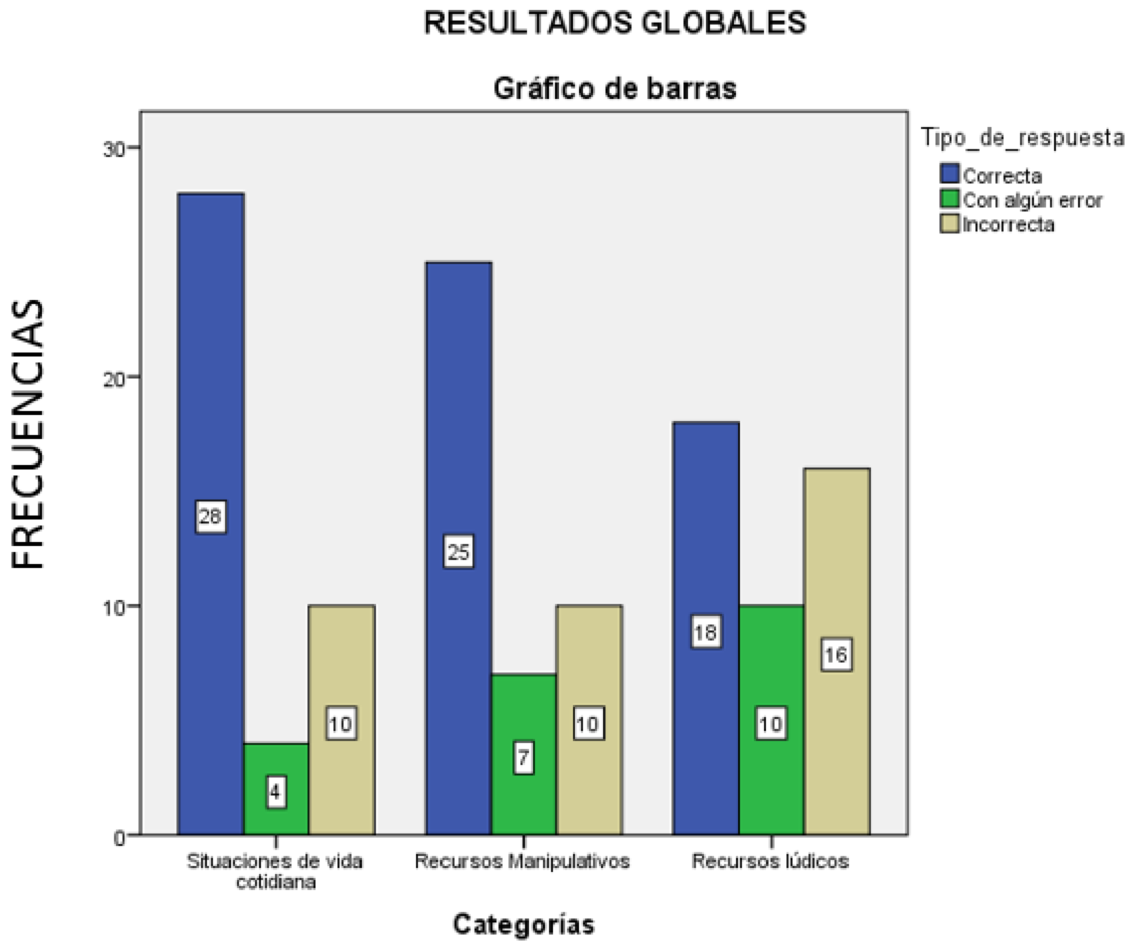


Figura 2. Resultados globales en los tres contextos de enseñanza informales.

En la Figura 2 se observa el número de producciones correctas, con algún error e incorrectas sobre una media de 42 producciones en cada contexto de enseñanza, correspondientes a las dos actividades que han realizado los participantes en cada contexto. En el contexto “situaciones de la vida cotidiana”, 28 producciones han sido correctas, lo que representa el 66,7% del total de representaciones realizadas por los alumnos en este contexto, frente al 9,5% con algún error y al 23,8% incorrectas. En relación con el contexto “recursos manipulativos”, el 51,2% de las producciones de los alumnos son correctas, el 12,2% presenta algún error y el 36,6% son incorrectas. Finalmente, se aprecia que en el contexto de “recursos lúdicos” el 40,9% de las evidencias obtenidas son correctas, un 22,7% presenta algún error y el 36,4% restante son representaciones incorrectas.

A partir de estos datos iniciales, a continuación, se ha analizado qué tipos de representaciones utilizan los alumnos de 4 años, siguiendo la clasificación de Rico (2009). Para realizar este segundo análisis, se han considerado exclusivamente las representaciones correctas.

Tabla 2. Tipos de representaciones usadas en las producciones correctas

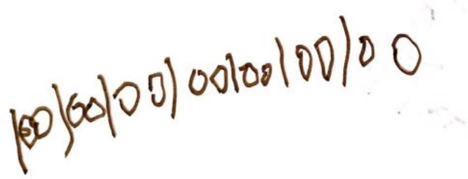
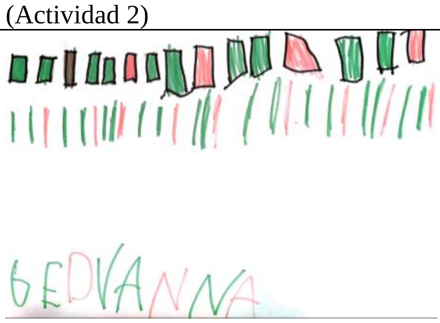
Contexto de enseñanza-aprendizaje	Representación gráfica (figurativas)	Representación simbólica (alfanuméricas)
Situación de vida cotidiana	20 (71,4%)	8 (28,6%)
Recursos manipulativos	18 (72%)	7 (28%)
Recursos lúdicos	13 (72,2%)	5 (27,8%)
Total	**51 (71,8%)**	**20 (28,2%)**

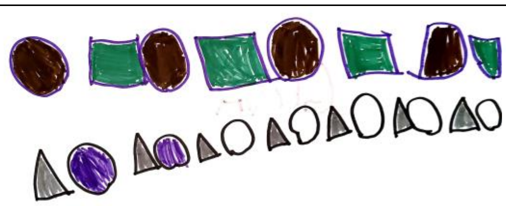
De acuerdo con la información que se muestra en la Tabla 2, se observa una presencia muy superior de representaciones gráficas que simbólicas, destacando un porcentaje relativo del 71,8% de tipos gráfico frente a un 28,2% de simbólicas.

A su vez, también se aprecia que el mayor porcentaje de representaciones simbólicas se realizan en el contexto “situación de vida cotidiana”.

Finalmente, en la Tabla 3 se muestran algunas evidencias sobre ambos tipos de representaciones en los distintos contextos de enseñanza informales: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos.

Tabla 3. Evidencias de algunos tipos de representaciones obtenidas en cada contexto

Contexto	Representaciones gráficas	Representaciones simbólicas
Situación de vida cotidiana	 Representación con dibujos del patrón “amarillo-rojo” (AB) identificado en un toldo (Actividad 1).	 Alumno 1: “Yo pongo la letra de Ona (O) y la mía (A) para escribir la seriación”. Representación con letras (OA) de una seriación de arbustos que sigue un patrón (AB) (Actividad 2)
Recursos manipulativos	 Alumno 2: “Mi tarjeta pone una pieza azul y dos verdes”. Docente: Entonces, ¿qué significa tu representación? Alumno 2: “Un palo una pieza azul, dos bolitas las verdes”. Representación con dibujos (palos y bolas) del patrón (ABB) de una seriación realizada con piezas del material *Pattern Blocks* (Actividad 3)	 Alumno 3: “Yo tengo dos pinzas verdes y una rosa, dos verdes y una rosa, dos verdes y una rosa…” Docente: ¿Cuantas veces has representado tu seriación? Alumno 3: Aquí con rectángulos, aquí con palos y aquí con las letras de mi nombre. Representación con dibujos y palos primero y, finalmente, con letras del patrón (AAB). (Actividad 4)

Recursos lúdicos	 Representación con dibujos (figuras geométricas) del patrón (AB) identificado en las acciones presentes en el juego: cantar-bailar. (Actividad 5)	 Representación con números (123) y dibujos de la secuencia del juego, con un patrón (ABC): 1 (hacer una rueda), 2 (cantar) y 3 (correr). (Actividad 6)

CONCLUSIONES

En esta primera aproximación sobre la representación de patrones en las primeras edades hemos constatado, en primer lugar, que los alumnos de 4-5 años empiezan a hacer representaciones matemáticas; y, en segundo lugar, que para representar patrones utilizan dos tipos de sistemas: representaciones gráficas y simbólicas, de acuerdo con la clasificación establecida por Rico (2009).

De forma más concreta, hemos puesto de manifiesto que el mayor porcentaje de producciones correctas se ha obtenido en el contexto de enseñanza a partir de situaciones de vida cotidiana, de lo que se desprende que cuanto más cercano, concreto y de conocimiento previo es el contexto de enseñanza, más específicas y sin errores han sido las representaciones producidas por los participantes. Sin embargo, el reducido número de la muestra no permite generalizar los resultados obtenidos; hecho que se configura como una de las principales limitaciones de nuestro estudio y a su vez traza una línea para futuras investigaciones.

Considerando que las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas cuando hacen uso de las representaciones (Radford, 1998), podemos afirmar que las actividades propuestas en contextos de vida cotidiana son las que han impulsado en mayor medida la comprensión, seguidas muy de cerca por las actividades con materiales manipulativos y, finalmente, los recursos lúdicos, puesto que en este caso los patrones no eran tan evidentes. Desde esta perspectiva, estamos de acuerdo con Bjorklund (1995) cuando afirma que los niños representan el mundo de manera condicionada a lo que perciben, a lo que recuerdan y a la manera como resuelven ciertos problemas.

De acuerdo con los datos iniciales obtenidos en esta investigación, consideramos que la representación de patrones en las primeras edades debería iniciarse de manera concreta (a partir de situaciones del entorno inmediato, materiales manipulativos y juegos) para poco a poco ir dando paso a la actividad mental, la abstracción y la generalización (Alsina, 2009). Estamos convencidos de que la exposición a una variedad de patrones en diferentes contextos y modalidades, conjuntamente con el papel del docente como guía que anima a los alumnos a justificar, transferir y representar dichos patrones, son componentes cruciales y determinantes en la acción de representar, generalizar e iniciar el camino del pensamiento algebraico. Tal y como afirma Rico (2009, p. 7), “las representaciones desempeñan un papel destacado para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático”.

Para seguir avanzando en esta dirección, en futuros estudios será necesario analizar las producciones de los alumnos acerca de la representación de patrones en contextos intermedios y formales de enseñanza, de acuerdo con el itinerario para la enseñanza de los patrones propuesto por Acosta y Alsina (2018). Con ello se podrá esclarecer, por un lado, cómo influyen en general los distintos contextos de enseñanza que se usan en Educación Infantil en la representación matemática y, por otro, determinar si los contextos de enseñanza más formales, es decir, las actividades que presentan un carácter más abstracto, condicionan el grado de éxito de la representación de patrones y la tipología de representación que se utiliza.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). Gijón: SEIEM.

Alsina, Á. (2009). Matemáticas en la educación infantil. En N. Planas y Á. Alsina (Eds.), *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior* (pp. 31-92). Barcelona: Graó.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, 92,* 7-29.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Barcelona: Graó.

Alsina, Á. y Llach, S. (2012). La enseñanza de los sistemas externos de representación matemáticos y lingüísticos en la Educación Infantil. *Revista de Investigación Educativa*, *30*(1), 131-144.

Berciano, A., Novo, Mª. L. y Alsina, Á. (2017). Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita en el aula de matemáticas de Educación Infantil. *UNIÓN, 49,* 200-216.

Bjorklund, D. F. (1995). *Children's thinking: Developmental function and individual differences* (2nd ed.). Belmont, EE. UU.: Thomson Brooks/Cole Publishing Co.

Clements, H. D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Reino Unido: Learning Tools LLC.

Cotton, W., Lockyer, L. y Brickell, G. J. (2009). A journey through a Design-Based Research project. En G. Siemens y C. Fulford (Eds.), *Proceedings of ED-MEDIA 2009 - World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (pp. 1364-1371). Chesapeake, EE. UU.: Association for the Advancement of Computing in Education.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Llach, S. y Alsina, Á. (2012). ¿Cómo enseñar la notación lingüística y matemática? Un triple enfoque: epistémico, interdisciplinar y sociocultural. *Revista Española de Pedagogía, 252,* 321-335.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente*. Madrid: Visor.

Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje, 23*(90), 11-30.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Traducción del original del año 2000.

Papic, M. M. (2007). Promoting repeating patterns with young children: More than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom, 12*(3), 8-13.

Papic, M. M. y Mulligan, J. T. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (Eds), *Building connections: Research, theory and practice*: *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, *Vol. 1* (pp. 609–616). Melbourne, Australia: MERGA.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 121-134.

Pérez-Echeverría, M. P., Martí, E. y Pozo, J. I. (2010). Los sistemas externos de representación como herramientas de la mente. *Cultura y Educación, 22*(2), 133-147.

Perry, B. y Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. *Second edition* (pp. 75–108). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, *PNA, 4*(1), 1-14.

Rittle-Johnson, B, Zippert, E. L. y Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46*(1st Quarter), 166-178.

RAZONAMIENTOS Y ESQUEMAS DE PRUEBA EVIDENCIADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO: RELACIONES CON EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Reasonings and proof schemes evidenced by prospective elementary teachers: relationships with mathematical knowledge

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los procesos de razonamiento y demostración tienen una gran relevancia en la matemática escolar. El diseño y explotación de oportunidades de aprendizaje ligados a estos procesos hacen necesario que el docente tenga un adecuado conocimiento matemático de los mismos. Se presentan aquí los resultados de un estudio en el que se busca detectar y caracterizar los razonamientos y esquemas de prueba manifestados por estudiantes para maestro al solicitarles que justifiquen la veracidad de un enunciado aritmético, y relacionar estos con su conocimiento matemático. Se evidencia una importante presencia de esquemas de prueba inductivos, así como una importante presencia y variedad de razonamientos abductivos, que muestran diversas fortalezas y debilidades en el conocimiento de los temas y en el de la práctica matemática. Esa presencia y variedad nos hace plantearnos la posible existencia de esquemas de pruebas abductivos.

Palabras clave: *razonamiento, esquemas de prueba, abducción, conocimiento matemático, estudiantes para maestro.*

Abstract

Reasoning and proof are very important processes in school mathematics. The design and the use of learning opportunities linked to these processes become necessary that the teacher has an adequate mathematical knowledge of them. Here, the results of a study which seek to detect and characterize the preservice primary school teachers' reasonings and proof schemes answering a task in which they were asked to discuss the veracity of an arithmetic statement are presented. It is shown a significant presence of inductive proof schemes, as well as a significant presence of a variety of abductive reasonings. These reasonings reveal various strengths and weaknesses in the knowledge of topics and the knowledge of practices in mathematics. The presence and variety of abductive reasonings raises the issue of the possible existence of abductive proof schemes.

Keywords: *reasoning, proof schemes, abduction, mathematical knowledge, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

Existe un amplio consenso en destacar la importancia que tienen los procesos de razonamiento y de demostración en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con presencia de grupos de trabajo sobre estos tópicos en congresos internacionales y la publicación de diversos monográficos en los que se organizan y revisan avances de investigación (Mariotti, Durand-Guerrier y Stylianides, 2018; Stylianides y Harel, 2018). Schoenfeld (1994) y Hanna y Barbeau (2010) justifican que la demostración ha de estar presente en cualquier currículo de matemáticas, al contribuir a la comprensión de los conceptos matemáticos y ser portadora de estrategias o métodos que también son necesarios en la resolución de problemas. La revisión de los monográficos antes comentados muestra una variedad de investigaciones ligadas a aspectos teóricos, epistemológicos y

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). Valladolid: SEIEM.

cognitivos sobre el aprendizaje de la demostración matemática, y una línea emergente y creciente de trabajos con foco en el docente de matemáticas. La relevancia de los procesos de razonamiento y demostración en el aprendizaje convierte en indispensable que un docente sea capaz de diseñar, promover y explotar oportunidades de aprendizaje que puedan permitir a los estudiantes reorganizar su conocimiento o concepciones sobre estos procesos en matemáticas.

Para promover y explotar esas oportunidades de aprendizaje, es condición necesaria, aunque no suficiente, que los docentes tengan un adecuado conocimiento matemático de los procesos y tipos de razonamiento y de demostración, y de la universalidad o no de los mismos para verificar la validez de un enunciado matemático. Así, se hace necesario avanzar tanto en la caracterización de qué conocimiento matemático debería tener un buen docente de matemáticas sobre estos aspectos, como en su detección y análisis en profesores en formación y en ejercicio. En la investigación que aquí se presenta, de tipo exploratorio, han participado estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM), y se centra en esta segunda vía. Se hará uso del constructo de *esquema de prueba* (o de demostración) de Harel y Sowder (1998, 2007), que es aquello que permite a una persona convencerse a sí mismo y persuadir a otros sobre la veracidad de un enunciado. Sus objetivos son:

- Detectar y caracterizar los tipos de razonamiento y los esquemas de prueba puestos de manifiesto por EPM en su respuesta a una tarea en la que han de discernir y justificar la veracidad de un enunciado aritmético.
- Relacionar esos razonamientos y esquemas de prueba plasmados con conocimientos matemáticos de diferente naturaleza evidenciados por los EPM participantes.

MARCO TEÓRICO

Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

Partiendo de la contribución de Shulman (1986), son varios los modelos propuestos sobre el conocimiento que ha de tener un docente de matemáticas, como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT, Ball, Thames y Phelps, 2008) o el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo et al., 2018, Contreras, Carrillo y Climent, 2018). Ambos modelos distinguen dos grandes dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Aquí usaremos el modelo MTSK, por la mayor claridad de los tres subdominios, basados en la propia disciplina matemática, que establece dentro del conocimiento matemático.

Uno de ellos es el *Conocimiento de los Temas* (KoT), que abarca el qué y de qué manera los docentes conocen los contenidos sobre los que han de impartir docencia. Incluye el conocimiento de definiciones, propiedades, fundamentos y de conexiones dentro de un mismo contenido matemático (intra-conceptuales), de procedimientos, de registros para representar dicho contenido, así como su fenomenología y aplicaciones.

El segundo es el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM), que abarca el conocimiento de conexiones de tipo inter-conceptual, entre diferentes contenidos matemáticos. Se incluyen conexiones de complejización o de simplificación, conexiones auxiliares y conexiones transversales. En el presente estudio, aunque este subdominio no aparece en las producciones de los alumnos, es importante tenerlo como referencia del marco MTSK completo.

El tercero es el *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que abarca el conocimiento sobre las formas y los procesos para hacer matemáticas y para producir conocimiento matemático. Dentro de este subdominio se incluyen conocimientos sobre qué es definir o el papel de los ejemplos y contraejemplos para producir conocimiento matemático. En particular, el modelo MTSK considera un descriptor específico sobre formas de validación y demostración, que implica conocer tipos de razonamiento y de justificación en matemáticas, qué tipos de justificación garantizan la validez universal de un enunciado, o cómo puede aplicarse una demostración y sus consecuencias.

Este modelo MTSK asevera que un docente de matemáticas ha de disponer, además de conocimientos de los temas, de un conocimiento específico sobre los procesos de razonamiento y demostración en matemáticas, que ayudan a producir y validar nuevo conocimiento matemático.

Tipos de razonamiento en matemáticas

Peirce (1960, citado en Pedemonte y Reid, 2011) establece la existencia de tres tipos de razonamiento en matemáticas: *abductivo*, *inductivo* y *deductivo*. A partir de los trabajos de Pedemonte y Reid (2011), Soler-Álvarez y Manrique (2014) y Molina, Font y Pino-Fan (2019), explicamos en qué consiste cada uno de estos tipos de razonamiento. Para ello, nos ayudaremos del modelo de Toulmin (2007) para analizar argumentaciones, que puede aplicarse a los razonamientos matemáticos. Aquí nos bastará con la versión básica del mismo, que tiene cuatro componentes: la *conclusión* o *afirmación*, que es el enunciado a justificar o sobre cuya veracidad se quiere convencer; los *datos*, que son los hechos o fundamentos en los que se basa el razonamiento; la *garantía*, que es el principio o proposición que enlaza los datos con la conclusión y el *respaldo*, que son los enunciados o la teoría que soportan la garantía. La Figura 1 ilustra el análisis con el modelo de los tres tipos de razonamiento matemático, que se explican a continuación de dicha figura.

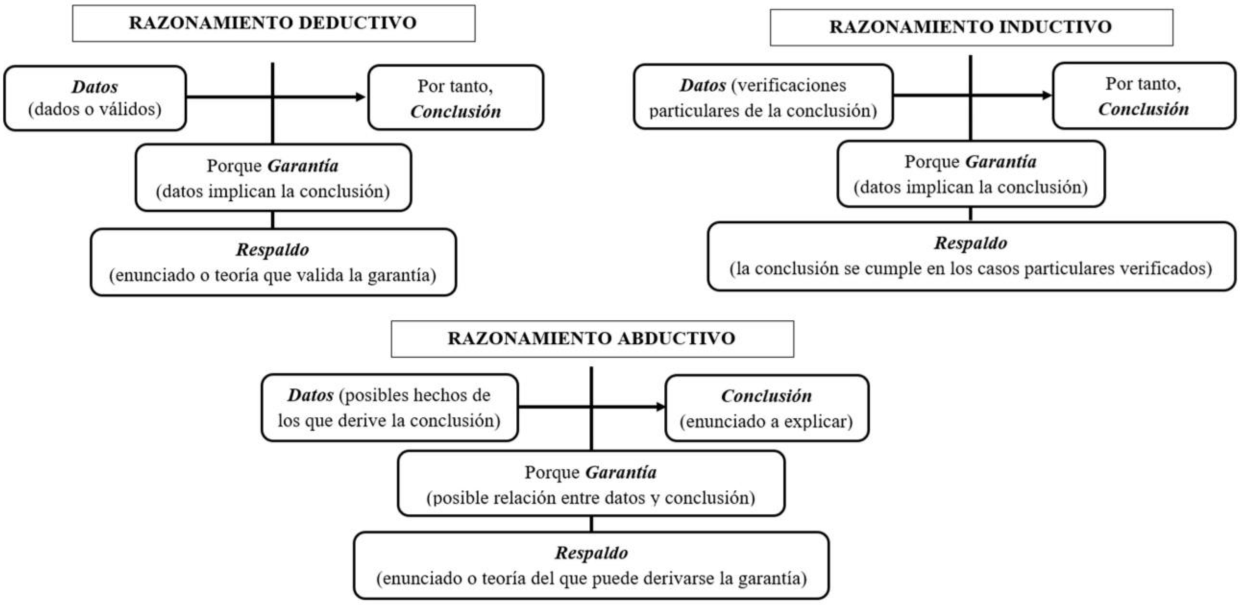


Figura 1. Representación de los tres tipos de razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

En un razonamiento deductivo se aplica una garantía, con un respaldo que hace que sea considerada como válida, a unos datos dados o conocidos para llegar a inferir una conclusión. La garantía con respaldo actúa como regla de inferencia. Este tipo de razonamiento permite validar conocimiento en matemáticas, que es irrefutable salvo cambios en el sistema axiomático de partida.

En un razonamiento inductivo, a partir de verificar la validez de un enunciado en uno o varios casos particulares (que actúan como datos) se infiere el enunciado general como conclusión (Molina et al., 2019). En este caso la garantía está respaldada por la verificación de esos casos particulares, aunque es un respaldo insuficiente para inferir la validez matemática del enunciado general.

En relación con el razonamiento abductivo, existen varias formas de caracterizarlo, como muestran Pedemonte y Reid (2011) y Soler-Álvarez y Manrique (2014). En este estudio, un razonamiento abductivo es aquel en el que, a partir de un hecho observado que ejerce el papel de conclusión, se da una posible explicación que justifique el mismo, a partir de unos posibles datos, y una garantía y un respaldo que unan datos y conclusión. Escogemos esta caracterización porque la tarea usada para recoger datos en este estudio partía de un enunciado sobre el que explicar su validez o no, por lo que ese enunciado dado ya puede ejercer el papel de conclusión o de hecho a explicar.

El razonamiento deductivo es el único que permite validar conocimiento matemático, pero el razonamiento abductivo y el inductivo juegan un papel relevante al producir demostraciones. Como indican Pedemonte y Reid (2011), el razonamiento abductivo ayuda a encontrar posibles hipótesis o datos para iniciar un razonamiento deductivo. El razonamiento inductivo ayuda a aumentar el convencimiento de la certeza de la conclusión o a refutarla si se encuentra un contraejemplo.

Esquemas de prueba

El *esquema de prueba* (de ahora en adelante, EP) de una persona es aquello que constituye certeza y persuasión para esa persona, es decir, aquello que le permite eliminar sus dudas y usarlo para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de un enunciado (Harel y Sowder, 1998). Se usará la clasificación de EP de Harel y Sowder (1998, 2007), refinada por Ibañes y Ortega (2001).

Un primer grupo son los esquemas de prueba de *convicción externa*, donde la certeza y persuasión se consigue mediante elementos ajenos al razonamiento. Estos pueden ser autoritarios, si se basan en que quien lo dice es una autoridad; rituales, si se basan en que lo dicho tiene la apariencia de una demostración; o simbólicos, si se basan en que se usa simbología o manipulaciones matemáticas.

Un segundo grupo son los esquemas de prueba *empíricos*, donde la certeza y persuasión se consigue por medio de percepciones o manipulaciones físicas directas (EP experimentales) o por medio de razonamientos inductivos, por medio de ejemplos o comprobaciones cuantitativas en casos concretos (EP inductivos). En los EP inductivos, Ibañes y Ortega (2001) distinguen varios tipos:

- EP inductivos de un caso: La certeza y persuasión se consigue por medio de un único ejemplo o comprobación (“como 3 × 5 = 15, el producto de dos impares es impar”).
- EP inductivos de varios casos: Como en el caso anterior, pero por medio de varios ejemplos distintos (“como 3 × 5 = 15 y 3 × 9 = 27, el producto de dos números impares es impar”).
- EP inductivos sistemáticos: Como en los casos anteriores, pero los ejemplos o comprobaciones se eligen siguiendo algún tipo de orden o tratando de cubrir casuísticas (“1 × 3 = 3, 3 × 5 = 15, 5 × 7 = 35 y 7 × 9 = 63. Por tanto, el producto de impares es impar”).

Un tercer grupo son los esquemas de prueba *analíticos*, en los que la certeza y persuasión se consigue por medio del razonamiento deductivo. Dentro de estos EP, pueden distinguirse dos tipos. En los EP transformacionales se hace uso de transformaciones de elementos o imágenes por medio de la deducción lógica. En los EP axiomáticos una persona entiende que la certeza y persuasión viene dada por una demostración donde se aplica el razonamiento deductivo a partir de axiomas y de otros resultados ya deducidos anteriormente. El carácter incipiente de los EP analíticos detectados en este estudio hará que no establezcamos distinción entre los dos tipos de este grupo.

Es importante que los docentes de matemáticas puedan identificar los esquemas de prueba de sus alumnos para crear oportunidades de aprendizaje que puedan promover su evolución (Harel y Sowder, 2007). Para ello, los docentes han de tener EP suficientemente avanzados, por lo que detectar y caracterizar estos últimos, en nuestro caso en EPM, es clave para poder llegar a diseñar estrategias y secuencias en los planes de formación, inicial o continua, que favorezcan su evolución.

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre la demostración con foco en el docente de matemáticas están creciendo, aunque aún son escasas. Hay investigaciones que muestran que algunos de los resultados obtenidos en investigaciones sobre la demostración en alumnos se encuentran también entre profesores en formación. Ejemplos claros son la importante presencia y persistencia de EP inductivos y la aceptación de los razonamientos inductivos como pruebas matemáticamente válidas. Estos resultados, ampliamente detectados en educación matemática (Dreyfus, 2017), también tienen una amplia presencia especialmente entre los EPM, como muestran Martin y Harel (1989), Harel y

Sowder (2007) y Arce, Conejo y Ortega (2014). La explicación más clara para este enraizamiento y persistencia de los EP inductivos, según indica Dreyfus (2017), es la dificultad de la noción de validez universal en matemáticas, que da lugar a un modo de razonar y generar conocimiento diferente al de otras disciplinas científicas y al habitualmente usado en la vida cotidiana. Así, son necesarias muchas y muy variadas experiencias formativas para desarrollar conciencia de qué razonamiento usar en cada disciplina, un mayor conocimiento de la práctica matemática y poder superar este EP en EPM (Martin y Harel, 1989). Entre los docentes de Educación Secundaria suele ser mayor el conocimiento de la práctica matemática, aunque se detectan algunas visiones limitadas sobre lo que es una demostración y una variedad muy reseñable de concepciones y creencias sobre la demostración matemática y su proceso de enseñanza y aprendizaje (Knuth, 2002).

CONTEXTO Y MÉTODO

En el estudio han participado 80 EPM de 1º del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid (campus de Segovia), que se identificarán aquí por una “A” seguida de un número: del A1 al A80. La muestra utilizada es una muestra por conveniencia, formada por aquellos EPM que respondieron a la tarea que sirvió como instrumento para la recogida de datos: “Explica si al multiplicar dos números impares el resultado es siempre otro número impar”. La tarea formó parte de la prueba escrita final individual de evaluación de la asignatura “Fundamentos numéricos y estrategias didácticas para su enseñanza”, en la convocatoria extraordinaria. Durante el curso, los docentes de cada grupo trataron los tipos de razonamiento en matemáticas aprovechando diferentes momentos y contenidos (especialmente en la parte de divisibilidad) para mostrar algunas demostraciones diversas de enunciados aritméticos y enfatizar la diferencia entre la validez universal del razonamiento deductivo frente al inductivo, así como el papel de los contraejemplos.

Somos conscientes de las limitaciones de las características de la muestra, pero el propósito no es estudiar la frecuencia de los EP o los razonamientos, sino la presencia y la diversidad detectada en las respuestas, en relación con los objetivos planteados. Así, entendemos que, al estar en una prueba de evaluación final, cada estudiante vía su respuesta trató de plasmar del mejor modo posible aquello que constituía certeza para él y persuasión para el docente sobre la veracidad (o no) de la afirmación, por lo que la respuesta evidenciará cuál es el EP que tiene cada EPM.

Las producciones escritas como respuestas a la tarea son los datos en esta investigación. Para analizarlos se ha usado la metodología de *análisis de contenido*, “un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos” (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563), para pasar de la descripción de los datos escritos a su interpretación y a la formulación de inferencias en base al contexto. En este caso, cada producción escrita es una unidad de registro para el análisis. En una primera fase, se establecieron categorías a partir de los tipos de razonamiento y de los esquemas de prueba y se analizaron conjuntamente algunas respuestas para ver su adecuación. Después, cada autor analizó las producciones en términos de los tipos de razonamiento presentes y el EP asignado al alumno, y las evidencias de conocimiento matemático detectadas. En la tercera fase, se pusieron en común los resultados del análisis de cada autor, discutiendo los casos en los que existían diferentes interpretaciones hasta alcanzar un consenso, lo cual contribuyó a clarificar la interpretación en este estudio de las categorías.

RESULTADOS

Los alumnos debían determinar si consideraban que el enunciado era válido o no. De los 80 EPM, 78 afirmaron que el resultado siempre era válido. Dos EPM respondieron que no siempre, indicando ciertos casos de excepción. Por limitaciones de espacio, nos centraremos aquí en las respuestas de los 78 EPM que afirman la universalidad del resultado. En estas respuestas se han analizado y clasificado los razonamientos y esquemas de prueba evidenciados, dando lugar a los datos presentados en la Tabla 1. Se ha detectado una amplia variedad de EP en las respuestas analizadas, pero además se han detectado una serie de respuestas que no encajan con ninguna de las categorías de la clasificación de EP considerada. Estas respuestas están asociadas a razonamientos abductivos, y han presentado una gran riqueza y diversidad.

Tabla 1. Clasificación de las respuestas de los EPM atendiendo a los razonamientos y EP evidenciados

	Razonamientos y esquemas de prueba						
	Sin EP	EP ritual	EP inductivos			EP analíticos incompletos	Razonamientos abductivos
			Un caso	Varios casos	Sistemático		
N.º EPM	6	3	3	15	8	10	33

A continuación, se explican e ilustran cada uno de los esquemas de prueba encontrados, así como los diferentes razonamientos abductivos.

Hay 6 EPM que afirman la validez del enunciado pero no presentan ningún tipo de razonamiento que les permita justificar su respuesta. Un ejemplo de ello es la respuesta de A20, que contesta “Sí, al multiplicar dos números impares el resultado es impar”.

Tres respuestas se han clasificado en el grupo de EP de convicción externa. En todas ellas los alumnos han reformulado la afirmación a probar utilizando la misma como dato, y una expresión que indica explícitamente la implicación. Como simplemente reformulan el enunciado no se movilizan ni evidencian conocimientos no presentes en dicha afirmación. Un ejemplo es la respuesta de A37: “Sí, ya que al multiplicar un número impar por otro impar el resultado siempre va a ser impar, sin embargo si multiplicamos un número impar por un número par el resultado va a ser par”. Los estudiantes construyen un razonamiento con apariencia de demostración, usando palabras que denotan la implicación (“Sí, ya que…” o “Sí, debido a…”), pero donde coinciden dato y conclusión. Por esa razón se ha asignado a estos 3 EPM un EP de convicción externa de tipo ritual.

En los EP inductivos, se han encontrado ejemplos de los tres tipos: inductivos de un caso, de varios casos y sistemáticos, con mayor presencia de estos dos últimos. En estos EP consiguen certeza y persuaden sobre la validez del enunciado por medio de razonamientos inductivos. Así, son similares en su estructura, diferenciándose tanto en el número de ejemplos (uno o varios) como en el modo en que se eligen los mismos (arbitraria o siguiendo algún orden). Mostramos un ejemplo de EP sistemático y su análisis aplicando el modelo de Toulmin con la respuesta de A59 (ver Figura 2).

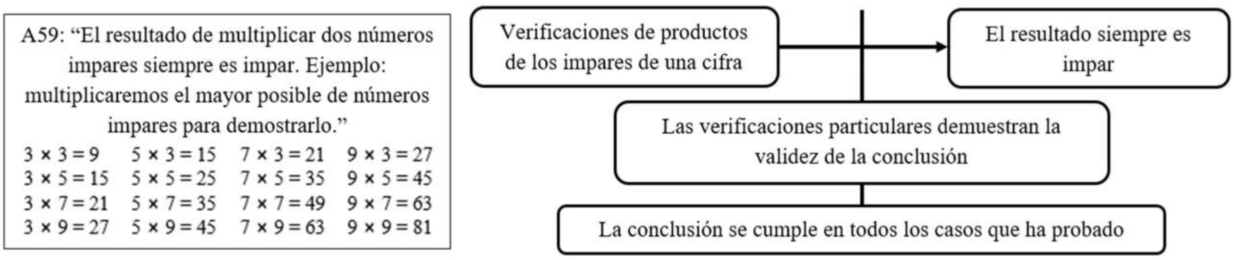


Figura 2. Respuesta de A59 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

La respuesta de A59 muestra un orden en la elección de ejemplos, multiplicando todos los números impares de una cifra distinta del uno. Previamente, indica que hará el mayor número de ejemplos posible para demostrar la validez del enunciado, lo que refuerza el EP inductivo. La respuesta evidencia un conocimiento de los temas (KoT, tablas de multiplicar), pero una debilidad en el conocimiento de la práctica matemática (KPM), ya que el respaldo de la garantía es insuficiente.

Otros alumnos clasificados dentro de los EP inductivos sistemáticos han usado otros criterios para elegir los ejemplos, como la consideración de productos de números de una o de varias cifras de forma separada, o la distinción entre productos de un número por sí mismo o de impares diferentes.

Hay 10 respuestas de alumnos que se han clasificado en un EP analítico, que muestran indicios de que los razonamientos inductivos no les son suficientes para justificar la respuesta, y movilizan conocimientos e implicaciones que podrían desarrollarse hasta un verdadero EP analítico. No obstante, ninguno llega a completarlo por lo que los denominamos EP analíticos incompletos. La Figura 3 muestra un ejemplo, con la respuesta de A56 y su análisis, donde el alumno expresa que basta con fijarse en el producto de las unidades y comprueba esos productos posibles, aunque la validez del dato sobre la reducción del problema a las unidades no está explícita.

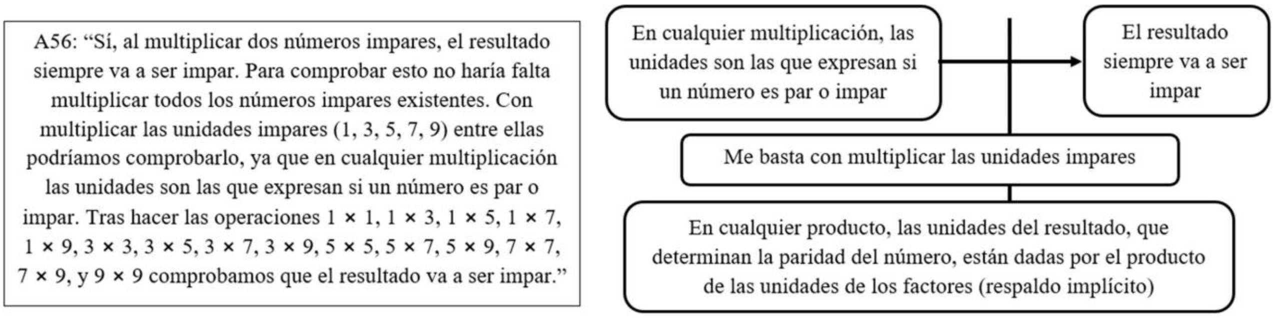


Figura 3. Respuesta de A56 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

Razonamientos abductivos

La tarea propuesta ya proporcionaba un enunciado sobre el que determinar y justificar la validez. Así, era necesario que los EPM buscaran hipótesis sobre posibles datos que pudieran explicar o de los que pudiera derivarse el enunciado-conclusión. Esto da lugar a razonamientos abductivos, que pueden servir, o no, como germen para construir un razonamiento deductivo. Los EPM situados en el EP analítico incompleto sí avanzaron en esa construcción de manera adecuada. Sin embargo, un número importante de EPM enunciaron posibles hipótesis y explicaciones para justificar la conclusión, pero en las que no se puede o no se busca deducir la conclusión. En esta búsqueda de hipótesis y creación de razonamientos son necesarios y útiles conocimientos matemáticos de al menos los subdominios KoT y KPM del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). Se exponen tres ejemplos que ilustran la variedad de razonamientos abductivos encontrada, tanto por las hipótesis o datos tomados como base para la justificación como por las diversas fortalezas y debilidades asociadas al conocimiento matemático mostradas, o de las que puede haber algún indicio. La Figura 4 muestra la respuesta de A58 y su análisis aplicando el modelo de Toulmin.

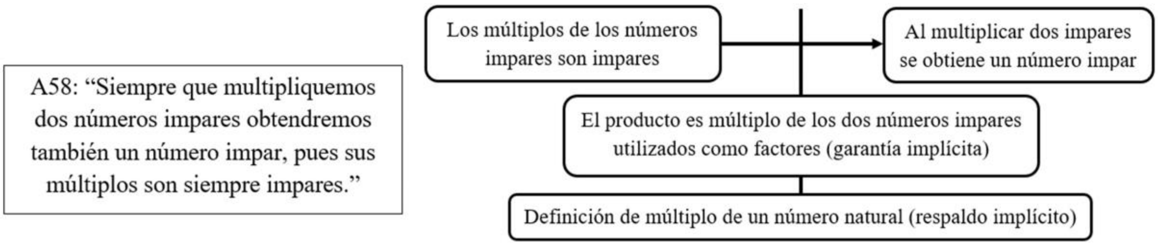


Figura 4. Respuesta de A58 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

A58 enuncia una posible hipótesis, que haría el papel de dato en el razonamiento: los múltiplos de los números impares son siempre impares. Si ese enunciado fuera cierto, de él se deduciría la conclusión (el producto es un múltiplo de ambos factores impares), pero ese razonamiento y su garantía no están explícitos en la producción escrita. Este hecho de que el dato sí que implique la conclusión puede mostrar un indicio de conocimiento asociado al conocimiento de la práctica matemática (KPM). Sin embargo, el dato no es matemáticamente válido, puesto que los múltiplos son tanto pares como impares. Asumir ese dato como válido puede evidenciar una debilidad en el conocimiento de los temas (KoT, conocimiento de la definición o propiedades de los múltiplos).

Otro ejemplo es la respuesta de A40, que se muestra y analiza en la Figura 5. Este estudiante parte de movilizar un conocimiento de los temas (KoT, conocimiento de una definición de multiplicación) para relacionar la multiplicación con una suma reiterada. Después enuncia una posible hipótesis, que hace el papel de dato: si sumamos un mismo número impar una cantidad impar de veces, el resultado es un número impar. En este ejemplo, el dato sí que es un conocimiento matemáticamente válido (KoT). Además, el dato implica la conclusión, y en la respuesta se explicita, al menos parcialmente, la garantía con respaldo válido que los relaciona. Esto evidencia una fortaleza ligada al conocimiento de la práctica matemática (KPM). Sin embargo, A40 no justifica la validez del enunciado-dato, que no es evidente ni estuvo entre los trabajados en la asignatura. Esto puede indicar una debilidad en el conocimiento en el subdominio KPM.

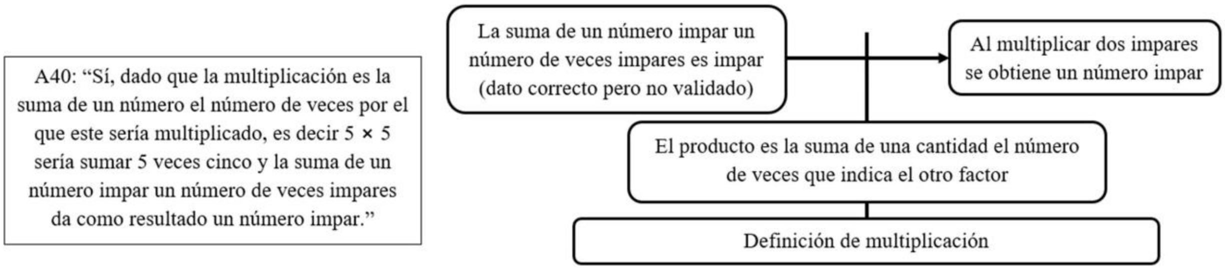


Figura 5. Respuesta de A40 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

Un tercer ejemplo de razonamiento abductivo es el de A21, que se muestra y analiza en la Figura 6.

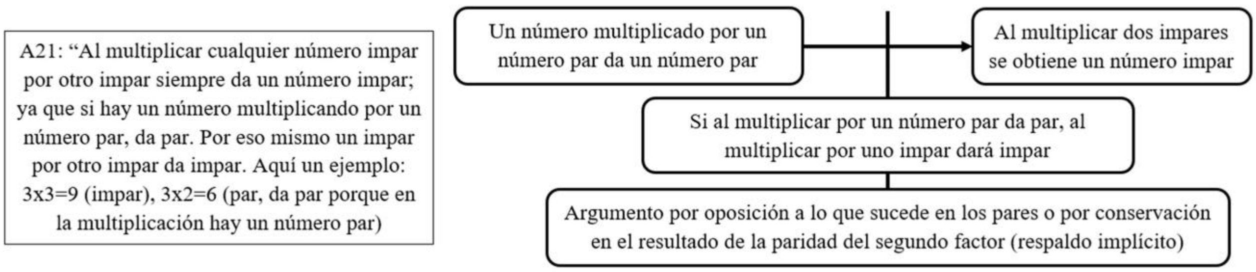


Figura 6. Respuesta de A21 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

A21 enuncia una hipótesis, que toma como dato, sobre que la multiplicación por un número par da como producto un número par. Esto puede mostrar un indicio de conocimiento de los temas (KoT, propiedades de paridad de un producto), pero no justifica la validez del enunciado tomado como dato (debilidad asociada al subdominio KPM). A partir de ahí, la alumna construye una garantía, respaldada quizá por un argumento por oposición con respecto a los pares, o por conservación de la paridad: "Si hay un número multiplicado por un número par, da par. Por eso mismo un impar por otro impar da impar". Sin embargo, este tipo de argumentos no son lógicamente válidos *per se* en matemáticas, su validez ha de contrastarse en cada caso (ambos argumentos no funcionan si el primer factor es par). Así, esta producción evidencia una debilidad ligada al conocimiento de la práctica matemática (KPM). A21 añade además dos ejemplos, pero más para ilustrar la conclusión del razonamiento anterior que para usar los mismos como parte del razonamiento. Por esa razón no hemos considerado que A21 evidencie un EP de tipo inductivo.

El análisis de las producciones clasificadas como razonamientos de tipo abductivo, y la dificultad para clasificar un número importante de ellas dentro de los esquemas de prueba (Harel y Sowder, 1998, 2007; Ibañes y Ortega, 2001) definidos en el marco teórico, nos hace preguntarnos si pudiera existir un vacío por completar en dicha clasificación. ¿Pudiera ser que para algunos estudiantes el desarrollo de un razonamiento abductivo constituya ya certeza y persuasión sobre la validez del enunciado que se quiere justificar? Dicho en otras palabras, ¿tendría sentido considerar un nuevo esquema de prueba, *esquema de prueba abductivo,* en la clasificación de esquemas de prueba?

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A pesar de que se han tomado como datos las producciones escritas de una única tarea y de las limitaciones de la muestra por conveniencia de EPM utilizada, el estudio confirma algunos de los resultados sobre tipos de razonamiento y esquemas de prueba en EPM, mientras que genera algunos interrogantes que abren investigaciones futuras que continúen la que aquí se presenta.

En relación al primer objetivo de la comunicación, las herramientas teóricas seleccionadas han permitido tanto analizar los razonamientos como determinar los esquemas de prueba evidenciados por un gran número de los EPM participantes. Se ha detectado una importante variedad y riqueza de razonamientos ante un enunciado aritmético propicio para ello, ya que el enunciado puede demostrarse de múltiples maneras. Destaca la presencia de una cantidad relevante de EPM que hacen uso exclusivamente de razonamientos de tipo inductivo y evidencian un EP inductivo donde la certeza y persuasión se consigue por medio de comprobaciones en ejemplos concretos. Este resultado concuerda con lo obtenido por Martin y Harel (1989) y Arce et al. (2014), y muestran la aceptación en una parte importante de los EPM de los razonamientos inductivos como medio para desarrollar certeza y persuasión. Además, otros EPM añadieron algunos ejemplos concretos en sus respuestas, aunque no hicieron uso de ellos para razonar sobre la veracidad del enunciado. Este uso de los ejemplos para complementar o reforzar otros razonamientos podría evidenciar las dificultades para rechazar la validez universal del razonamiento inductivo en matemáticas (Martin y Harel, 1989) o para comprender o dotar de sentido un razonamiento deductivo (Dreyfus, 2017).

Los resultados muestran también la presencia importante de razonamientos de tipo abductivo. La diversidad de demostraciones del enunciado que pueden hacerse (basadas en diferentes contenidos) y su planteamiento en una prueba final hacen que la situación resulte más complicada para obtener posibles hipótesis y construir con ellas una prueba deductiva. Esa mayor dificultad, detectada por Pedemonte y Reid (2011), puede ser la razón de esa importante presencia de estos razonamientos.

La dificultad para caracterizar el esquema de prueba que evidenciaban algunos de estos alumnos, que no hacen uso de ejemplos ni de razonamientos deductivos para conseguir certeza y persuasión de la validez del enunciado, nos hace hipotetizar la posible existencia de un vacío en la clasificación de los EP, que abre una nueva línea de investigación. ¿Podría una persona tener un EP abductivo? ¿Podría una persona desarrollar certeza y persuasión únicamente a través de la formulación o selección de posibles hipótesis que pudieran explicar el enunciado? Quizá sea algo posible, atendiendo a la dificultad para distinguir formas de razonar y generar conocimiento en diferentes disciplinas, y a la utilidad del razonamiento abductivo para generar conocimiento en otras ciencias (Dreyfus, 2017; Pedemonte y Reid, 2011). Aquí no podemos dar una respuesta concluyente a la pregunta, pero pensamos que es necesario seguir desarrollando investigaciones en esa línea.

En relación al segundo objetivo, el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) y, particularmente, los subdominios del KoT y KPM dentro del dominio del conocimiento matemático, se han mostrado útiles para complementar el análisis de los razonamientos, en términos de las fortalezas y debilidades asociadas al conocimiento en cada subdominio que parecen evidenciarse en ellos. Las fortalezas o debilidades en el conocimiento de los temas (KoT) pueden favorecer o dificultar la selección de hipótesis de las que pueda partir la construcción de un razonamiento deductivo. El conocimiento de la práctica matemática (KPM) puede favorecer o no la formulación de garantías con respaldo lógico que unan datos y conclusión. Progresar en esa relación entre razonamientos y los conocimientos matemáticos que precisan o evidencian ayudará a diseñar módulos formativos que permitan identificar y promover avances en los tipos de razonamiento y los EP de estos futuros maestros. Este aspecto es esencial para que, cuando ejerzan su práctica, puedan diseñar y explotar oportunidades de aprendizaje de calidad para sus alumnos sobre los procesos de razonamiento y demostración.

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Análisis de los procesos de justificación y generalización de la fórmula del área del rectángulo por alumnos del grado de Educación Primaria. *Profesorado: Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18*(2), 209-227.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-65). Gijón: SEIEM.

Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematical education? En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 57-62). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). Nueva York, EE.UU.: Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Charlotte, EE.UU.: Information Age.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO, 28*, 39-60.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75-89). Londres, Reino Unido: Routledge.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Molina, O. J., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116.

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219.

Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective.* Cham, Suiza: Springer.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

CRITERIOS UTILIZADOS POR UN FORMADOR DE FUTUROS PROFESORES AL REFLEXIONAR SOBRE SU PRÁCTICA[xv]

Criteria used by a trainer of future teachers when reflecting on their practice

Arceo-Luna, A. R.[a], Breda, A.[b], Font, V.[b] y Páez, D. A.[a]

[a]Universidad Autónoma de Aguascalientes, [b]Universitat de Barcelona

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo identificar cuáles son los criterios usados por un formador de profesores de primaria al reflexionar sobre su práctica. Se trata de un estudio de caso en el que se utiliza la herramienta idoneidad didáctica para el análisis cualitativo, tanto de las observaciones de aula como de los comentarios sobre ellas realizados por el profesor en una entrevista posterior. Entre los resultados destaca que el formador de profesores utiliza, de manera implícita, algunos de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad, con mayor énfasis los criterios interaccional, cognitivo, epistémico y mediacional y, en menor medida, el criterio ecológico. Se concluye que la reflexión le lleva a valorar cómo han sido aplicados los criterios que orientan su práctica, más no llega a poner en cuestión la concepción – creencias – del formador sobre su quehacer en el aula.

Palabras clave: *idoneidad didáctica, reflexión docente, formador de profesores.*

Abstract

In this work, the objective is to identify the criteria used by a primary teacher educator when reflecting on their practice. This is a case study in which the didactic suitability tool is used for qualitative analysis, both classroom observations and comments made by the teacher in a subsequent interview. Among the results, the teacher trainer implicitly uses some of the components and indicators of didactic suitability criteria, with greater emphasis on the interactional, cognitive, epistemic and mediational criteria and, to a less emphatically, the ecological criteria. In conclusion, the reflection leads him to evaluate how they have been applied to the criteria that guide his practice, but he does not even question the conception – beliefs – about the trainer about his work in the classroom.

Keywords: *didactic suitability, teacher reflection, teacher educator.*

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones señalan que los formadores de profesores son los sujetos menos investigados en el ámbito de la investigación sobre la formación inicial de docentes (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Cisternas, 2011; Ducoing y Fortuol, 2013; Font, Breda y Pino-Fan, 2017; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Pascual y Montes, 2017; Seckel y Font, 2020; Ulloa y Solar, 2017; Zapatera, Callejo y Badillo, 2017). Las investigaciones señalan que se sabe poco acerca de quiénes son los formadores de profesores en matemáticas, sus metodologías de enseñanza, conocimiento y competencias, por lo que "un problema general de investigación es, por tanto, el estudio de las prácticas de enseñanza de los formadores de profesores, en particular respecto de la articulación, por ejemplo, entre el discurso del formador y sus prácticas de formación" (Ulloa y Solar, 2017, p. 334).

Por otra parte, una amplia revisión de la literatura deja clara la importancia del papel de la reflexión y la necesidad de potenciarla en el ámbito profesional (Korthagen, 2010) como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza (Rojas y Deulofeu, 2013). En esta línea

Arceo-Luna, A. R., Breda, A., Font, V. y Páez, D. A. (2019). Criterios utilizados por un formador de futuros profesores al reflexionar sobre su práctica. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 173-182). Valladolid: SEIEM.

de potenciar la reflexión del profesor, han surgido diferentes propuestas, entre las cuales destacan la investigación-acción (Elliot, 1993), la práctica reflexiva (Schön, 1983), el estudio de lecciones (Hart, Alston y Murata, 2011) y la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013).

De acuerdo con la problemática señalada en los párrafos anteriores, la investigación que se reporta se planteó como objetivo: identificar los criterios que el formador de profesores de primaria utiliza para reflexionar sobre su práctica cuando enseña la didáctica de la adición.

MARCO TEÓRICO

Los *criterios de idoneidad didáctica* (en adelante, CI) propuestos en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) pretenden ser una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorarla? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. En el EOS se consideran los siguientes CI (Font, Planas y Godino, 2010): a) Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son *buenas matemáticas*; b) Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; c) Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; d) Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; e) Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y f) Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares y las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los CI exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar su grado de idoneidad. En Breda et al. (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. En la Tabla 1, por cuestiones de espacio, se presentan los componentes e indicadores únicamente de la idoneidad interaccional.

Tabla 1. Componentes e indicadores la idoneidad interaccional (Breda et al., 2017)

Componentes	Indicadores
Idoneidad Interaccional	
Interacción docente - discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

En diversas investigaciones realizadas en diferentes países (Brasil, Chile, Venezuela, Costa Rica) se ha observado que los CI propuestos por el EOS funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando estos reflexionan sobre su práctica para mejorarla, sin que se les haya enseñado previamente dicha herramienta (Hummes, Font y Breda, 2019; Morales y Font, 2017; Ramos, 2006; Seckel, 2016).

METODOLOGÍA

Se trata de un estudio de caso en el que se hace un análisis cualitativo del discurso del profesor sobre su práctica. El participante es un formador de profesores de Educación Primaria en México que imparte la asignatura *Aritmética. Números Naturales* con futuras docentes. Su capacitación inicial es como docente de Educación Básica, además cuenta con 12 años de experiencia en escuelas de formación para profesores en los que en nueve ocasiones ha impartido las asignaturas donde enseña la adición.

Para la obtención de los datos se utilizaron dos técnicas: la observación no participante (ocho horas de clase organizadas en cuatro sesiones) a fin de acercarse a la información en un ambiente *natural* (Cohen, Manion y Morrison, 2007) y la entrevista en profundidad. La primera de estas técnicas se realizó con apoyo de una cámara de video y una grabadora de audio en los tiempos que el formador tenía previstos en su programa de materia y planeación didáctica para enseñar la adición. Para la entrevista, se diseñó un protocolo con veinte preguntas sobre una selección de episodios de su clase, que permitieran al formador retomar y discutir los criterios empleados en su práctica con la finalidad de generar reflexión.

Los datos fueron analizados de forma descriptiva e interpretativa con base en el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, se buscó seleccionar consideraciones en las que el formador de profesores justifica su práctica como evidencias del uso implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CI.

ANÁLISIS DE LA REFLEXIÓN DE UN FORMADOR DE PROFESORES DE PRIMARIA

La primera pregunta que hace el entrevistador (E) al formador de docentes (FD) está relacionada con las finalidades que cree que tiene enseñar la asignatura (*Aritmética. Números Naturales*) que está impartiendo:

> FD: Yo creo que nuestra principal intención es que conozca las distintas estrategias que las lleven a enseñar el conocimiento matemático en escuela primaria. La idea es que no se trabaje la estrategia en aislado, sino que implícitamente se trabaje contenido. Entonces estás trabajando el contenido a la vez que desarrollas la estrategia de enseñanza, pero de aprendizaje también del niño, es decir, saber cómo aprende el niño y como se apropia de los diferentes conceptos matemáticos que se están desarrollando a lo largo de la Educación Primaria y que se trabajan en varios cursos en la normal [nombre con el que se conoce a la institución]. Creo que ahora es la intención, más el aspecto de aprendizaje y enseñanza de los contenidos matemáticos.

En su respuesta, FD considera que, si bien la finalidad es que los futuros docentes sepan enseñar los contenidos de aritmética, deben tener un conocimiento más allá de la enseñanza, en particular del contenido y su aprendizaje.

A continuación, el entrevistador le pregunta sobre el papel que él cree que tiene como formador y él argumenta que:

> FD: Mi papel como formador es lograr ser el mediador y ser el modelo. Un mediador y no un catedrático porque yo entiendo al catedrático como el que se pone enfrente expone de una manera muy soberbia, podemos decirlo así, o muy dominante en el contenido, pero prácticamente no genera una interacción más allá de lo que implica la parte del contenido. La idea es que la alumna también se vaya apropiando de un modelo de trabajo. No es llegar a

explicar totalmente el tema sino es también ponerlas a ellas en situación de alumnas de primaria, lógico con un nivel más acelerado porque tenemos más contenido que desarrollar.

En esta respuesta, FD opta por autoasignarse el modelo de profesor mediador en contraposición al modelo de profesor magistral-autoritario. Podemos inferir que, para él, un aspecto clave que diferencia un modelo de otro es el tipo de interacción que se genera en el aula. Por esta razón, consideramos que, en el comentario del FD, se hace implícito el uso del criterio interaccional, es decir, la importancia que tiene una adecuada gestión de la clase. En esta gestión de la interacción, FD considera que se debe dar espacio a la simulación de una clase de primaria (hay momentos en que los futuros profesores adoptan el rol de alumnos de primaria). Por otra parte, pretende que su modelo de gestión del aula sea un ejemplo a seguir para sus estudiantes.

El entrevistador cuestiona al FD por qué diseñó e implementó determinadas actividades que conllevaban el uso de ciertos recursos (fichas, dominó, menús de restaurante, etc.):

FD: […] Tratamos de utilizar actividades y recursos que son potentes en el sentido de que puedan generar en los alumnos el desarrollo de su pensamiento matemático. […] Este tipo de actividades permite que el niño ponga en juego su pensamiento, comunicarse, interactuar, un diálogo, no hay una postura pasiva en el niño, lleva de una manera constante a la reflexión en la interacción con los materiales y las actividades. Algunas son muy de juego, pero al final trae de fondo que pongan en desarrollo habilidades como el cálculo, estimación, comparación, entonces todo este tipo de actividades permite que el niño desarrolle el pensamiento, y desde luego, anterior al niño, la idea es desarrollárselas a las estudiantes desde la propia normal a través de este tipo de actividades y que ellas, cuando tengan la oportunidad de trabajar con los niños de primaria en su primera práctica en tercer semestre, desarrollen estas mismas relaciones que se gestan en torno al contenido, a la habilidad matemática y la interacción con los alumnos.

Al contestar la pregunta, FD presenta una reflexión sobre las tareas de primaria que ha simulado con sus estudiantes, donde se puede inferir qué criterios quiere que ellas tengan en cuenta cuando diseñen e implementen tareas con sus futuros alumnos. Podemos inferir, por una parte, el uso del componente *riqueza de procesos* del criterio de idoneidad epistémica ─la secuencia de tareas que se imparten en primaria debe contemplar la realización de procesos relevantes en la actividad matemática. Por otra parte, como la otra cara de la moneda de la riqueza de procesos, se infiere el componente *alta demanda cognitiva* del criterio de idoneidad cognitiva. Con relación al criterio interaccional, se infiere el componente *autonomía*, ya que el profesor selecciona tareas en las que el alumno no adopte una actitud pasiva y asuma una parte de la responsabilidad del proceso de estudio. Con relación al criterio mediacional, se infiere el uso del componente *recursos materiales*. Dicho de otra manera, los criterios que según FD deberían tenerse en cuenta al diseñar tareas para primaria es que éstas incorporen recursos adecuados, impliquen alta demanda cognitiva (y que, por tanto, lleven a los alumnos a realizar procesos relevantes desde el punto de vista matemático), y cuya gestión permita a los estudiantes tener un rol activo.

El entrevistador también hace preguntas relacionadas a la previsión de posibles ambigüedades y conflictos que pueden aparecer en la implementación de las tareas.

E: En las actividades que observamos, por ejemplo, las fichas [ver Figura 1], usted llevaba material preparado, esto demuestra que organizó la actividad con anticipación. Cuando usted organizaba estas actividades ¿qué previó que pudiera suceder en el desarrollo de la sesión?

FD: Preví que existiera confusión al hacer los cambios de unas fichas a otras en torno al valor que posee cada una de ellas. Si recuerdas cuando se les hace la pregunta "ustedes qué le pondrían" algunas dijeron "yo le hubiera dicho la cantidad". De hecho, son propuestas que también ya existen para poder trabajar estos materiales, inclusive los maestros japoneses usan cuadritos en vez de fichas. Quise dejar que ellas reflexionaran del cómo podrían mejorarla. Sí, desde luego

> hay cosas que van más allá de lo que uno prevé y que surgen, pero se va resolviendo en el momento.

En el comentario descrito anteriormente, FD hace una reflexión sobre el uso adecuado de los materiales en la actividad implementada y, más allá de eso, pretende que las futuras docentes reflexionen sobre cómo deber ser este material a fin de que permita un mejor aprendizaje de los alumnos. FD pretende que, en el futuro, sus alumnas tengan en cuenta el componente *recursos materiales* del criterio de idoneidad mediacional.

Con la intención de ver qué aspecto era el más importante para FD al observarse por primera ocasión en un fragmento del video de su clase, se la planteó la siguiente pregunta abierta:

> E: [El entrevistador le muestra episodio del video de su clase] Maestro, con estos fragmentos ¿tiene alguna impresión de su práctica, algo que le llame la atención a usted?
>
> FD: Sí, me llama la atención esta parte cuando tú te ves y dices "a ver retomando lo que uno hace", a lo mejor lo que uno puede mejorar en cuanto a mi desempeño: debo darle más espacio a la estudiante, sí participan, pero aprovechar un poco más su participación para la retroalimentación, pero sin dejar sueltos los conceptos que ellas expresan. Cuando digo suelto, me refiero a aceptarlo todo porque al final de cuentas no estamos en una expresión libre, sino estamos focalizados en cómo se enseñan los problemas aditivos en la Educación Primaria […].

De manera coherente con su respuesta a la segunda pregunta (en la que se consideraba un profesor mediador), su centro de atención al verse es, sobre todo, el aspecto interaccional. FD hace una valoración acerca de la interacción que ocurre en el aula con sus estudiantes y considera que se podría mejorar. Para él se debería dar más espacio a la participación del alumno, de manera que en esa interacción se reconozcan y resuelvan los conflictos de significado de los futuros profesores, indicador relacionado con el componente *interacción docente-discente* del criterio de idoneidad interaccional.

Dado que FD en su clase insistió en que para enseñar la suma se debía partir de los conocimientos previos de los alumnos, el entrevistador le hace la siguiente pregunta:

> E: Al inicio usted comenta que el signo más [+] es la representación gráfica de la suma, pero posteriormente nos dice que esta representación se enseña después de plantear distintas situaciones, ¿por qué el profesor de primaria tendría que hacerlo de esta manera?
>
> FD: El signo del más [+] y de menos [-] no entra desde un comienzo, es decir, cuando el niño juega a la oca, con el dominó o al caminito, donde a partir de agregar o quitar, está asociando el signo de más y de menos sin saberlo. En todas estas actividades aún no se introduce el signo porque no es recomendable desde la parte de la didáctica, hay que darle más oportunidad al niño de que desarrolle este tipo de situaciones. Posteriormente, sí hay que introducirlos porque la idea es llevarlos al algoritmo. No podemos hacer una introducción directa del signo.

El fragmento presentado sugiere que FD tiene en cuenta el proceso de aprendizaje de los niños. El profesor busca plantear el tema de la suma de acuerdo con la idea de la zona de desarrollo próximo, es decir, propone partir de situaciones conocidas por los alumnos, que ellos pueden resolver con sus conocimientos previos (oca, dominó, etc.), para llevarlos primero a la simbolización de la suma y, posteriormente, al algoritmo de la adición. Por tanto, de manera implícita tiene en cuenta el criterio de idoneidad cognitiva.

Dado que en su clase FD no llega a distinguir claramente entre símbolo, definición y algoritmo, el entrevistar le cuestiona sobre ello. Con relación al signo, FD afirma y justifica que el signo + constituye una abstracción que permite identificar el procedimiento a realizar. Este procedimiento lo define como *agregar* a una cantidad inicial que es el origen y se transforma. En este sentido, FD argumenta que el *agregar* puede emplearse siempre que se realizan situaciones aditivas.

En la entrevista interesaba profundizar en el significado de suma que tiene en cuenta FD y, en particular, cómo contemplaba el cardinal cuando se agregan conjuntos. Para ello, el entrevistador formuló la siguiente pregunta con una ambigüedad calculada:

E: Maestro si yo tengo, por ejemplo, una colección de manzanas y otra de naranjas y me piden que las sumen, lo que tengo que hacer es ¿agregarlas?

FD: Hacer un agregado en las cantidades y no en el significado. No estamos haciendo una comparación del atributo de lo que es manzanas y naranjas sino del atributo de su numeral, de lo que representan la cantidad de objetos para tener más cantidad de objetos y no bajo una combinación de las dos.

Básicamente, hay dos significados posibles para la suma, como cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos y, desde una perspectiva ordinal, como el resultado de seguir contando a partir de un número dado. Con relación al primer significado, Bermejo (2004) concibe dos percepciones: la primera unitaria, en la que se parte de un conjunto de base que es modificado añadiendo, obteniendo como resultado un tercer conjunto, y la segunda binaria que parte de la existencia de dos conjuntos disjuntos determinados, los cuales se unen para obtener un tercer conjunto. A lo largo de la entrevista, y también en la observación de su práctica, inferimos que FD tiene presente solo uno de los significados de la adición (agregar) ya que en ningún momento habla de la suma como el seguir contando. En ese sentido, FD no hace una reflexión completa de los diversos significados de la adición, es decir, no tiene en cuenta el componente *representatividad* del criterio de idoneidad epistémica.

Posteriormente, el entrevistador, dado que FD había sugerido a sus alumnas el uso combinado de la resta y de la suma, le pregunta si es necesario enseñar los signos combinados (suma y sustracción):

E: Otra de las sugerencias que usted comenta es hacer uso de los signos combinados, el de la suma y la resta, ¿por qué cree que sea necesaria esta combinación?

FD: […] en el niño va a existir entonces la posibilidad de considerar que los números tienen bastantes relaciones entre ellos, que el número no es estático […] en conjunto desarrolla el pensamiento matemático.

E: Considerando que el número no es estático y las combinaciones que se pueden hacer, entonces ¿usted considera que podríamos enseñar la suma y la multiplicación, por ejemplo, combinados?

FD: Si el niño puede interactuar con esos números y esas relaciones estaría excelente.

Esta evidencia nos indica que FD tiene en cuenta en su reflexión la importancia de establecer conexiones intramatemáticas, uno de los procesos contemplados en el componente *riqueza de procesos* de la idoneidad epistémica, que también aparece como componente del criterio de idoneidad ecológica. En particular, relacionar el contenido de la suma con la sustracción, o bien con la multiplicación.

Una de las regularidades que se observa en la gestión que hace FD de sus clases es la formulación de preguntas a sus alumnas. Por ello, en la entrevista se le cuestiona sobre la intención de estos planteamientos:

E: En la segunda sesión usted comienza planteándoles unos cuestionamientos a las estudiantes, ¿cuál es la intención?

FD: Cuando planteo al final es para generalizar y cuando es al inicio es para reflexionar y orientar el rumbo de la clase.

Hay que resaltar que FD considera importante fomentar la reflexión en las futuras docentes. Como resultado de las preguntas y reflexiones dadas el aula, uno de los criterios que FD sugiere a sus alumnas durante las clases es el uso del juego como un elemento motivador para los estudiantes de primaria, por lo que el entrevistador le cuestiona sobre ello:

E: ¿Qué pasaría si el maestro no iniciara con juegos la enseñanza de la adición?

FD: […] el niño puede aprender, pero puede no verlo tan atractivo y hacerlo porque se le dice que lo haga.

E: ¿Qué características tendría este juego?

FD: Se trata de formalizar eso que se está trabajando a partir de una actividad que es un juego, por eso es importante reflexionar después de cada actividad [… y entre sus características destaca que un juego te tiene que divertir, tiene que generar una reflexión, debe desarrollar habilidades acordes a tu intención didáctica, generar interacción y diálogo.

En este diálogo, FD reitera que se debe tener en cuenta el indicador *selección de tareas de interés para los alumnos* del componente intereses y necesidades del criterio emocional. Ahora bien, su reflexión sobre el juego nos hace inferir que además considera otros criterios de idoneidad simultáneamente: el criterio de medios (el juego es un recuso que se debe utilizar), el criterio epistémico (hay que reflexionar matemáticamente a partir del juego) y el criterio interaccional (generar interacción y diálogo).

Posteriormente, el entrevistador le muestra a FD un segundo fragmento de su clase en el que las estudiantes, organizadas en tres equipos, efectúan una suma utilizando un tablero y fichas de colores como material manipulativo, que permiten descomponer el número en unidades (Figura 1).

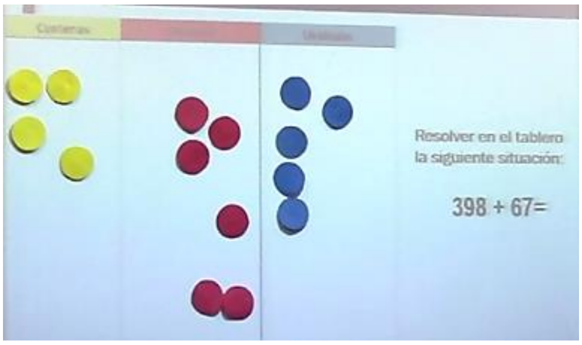


Figura 1. Elaboración propia, tablero utilizado por FD para enseñar la didáctica de la adición

Después de observar este fragmento de su clase, FD comenta:

FD: El primer equipo hace la suma porque ya la sabía, el segundo deja todo un procedimiento y el tercero logra abstraer todo y sintetiza de buena forma.

En cierta manera, FD considera el criterio de idoneidad cognitivo al valorar que el aprendizaje del tercer grupo es más completo que el de los otros dos (determina niveles de aprendizaje). Ahora bien, a pesar de esta diferencia en los niveles de aprendizaje que él mismo reconoce, la entrevistadora le hace observar que la retroalimentación a los tres grupos ha sido similar mediante un aplauso:

E: Cuando va pasando cada equipo, al final usted pide que se les dé un aplauso y esto pareciera que es una validación del procedimiento. ¿Cree que esto nos podría llevar a decir que los tres procedimientos son correctos?

FD: No, el aplauso no se hace para validar, se hace para animar. Es una idea de actitud, decir que tu participación es valiosa, contribuiste en algo.

La evidencia indica que FD valora más el proceso/procedimiento involucrado en la realización de la actividad que, propiamente, el resultado/producto final de la tarea. Además, enfatiza la importancia de motivar a los estudiantes, aludiendo al componente “emociones” del criterio de idoneidad emocional.

Con respecto a profundizar en los criterios que utiliza FD para rediseñar sus tareas, la entrevistadora le preguntó:

E: Cuando termina de utilizar el tablero, les pidió algunas sugerencias ¿usted tendría alguna sugerencia para implementarlo con las normalistas?

FD: Sobre las fichas, todas tiene un valor y a las azules podríamos ponerle el numeral 1, no necesariamente tiene que ser círculos, hay que darle continuidad a un significado gráfico en el sentido de que la verde mañana no puede ser 1 porque crearía confusión.

FD: Yo le daría más tiempo a cada una de las etapas cuidando el tiempo.

En este diálogo FD tiene en cuenta, por una parte, el componente *ambigüedades* del criterio de idoneidad epistémica, en el sentido de que una vez que el profesor es consciente que la tarea implementada ha creado una confusión de tipo matemático en sus alumnos, en un posterior rediseño convendría controlar dicha ambigüedad. Por otra parte, tiene en cuenta el componente de uso de materiales del criterio de idoneidad de medios, y también el componente *tiempo* de este último criterio.

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES

Como resultado de esta investigación hemos podido determinar unos criterios que orientan la práctica del profesor FD. Dichos criterios se pueden interpretar como creencias, si entendemos, de acuerdo con Peirce (1877), la creencia como una disposición para la acción. Este conjunto de creencias, también de acuerdo con Peirce, se puede entender como concepción del profesor, la cual el mismo FD caracteriza como *mediador*.

El término *concepción* aparece en la famosa máxima pragmática de Peirce: “Consideremos qué efectos, que puedan tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de esos efectos es el todo de nuestra concepción del objeto.” (citado en Faerna, 1996, p. 110). Esta máxima se relaciona, en cierta manera, con las investigaciones que consideran la concepción de un objeto como un sistema de creencias o como un substrato básico de las creencias. En efecto, si consideramos la concepción de un objeto como equivalente al sistema de prácticas en el que el objeto juega un papel determinante, y dado que el objeto y cada práctica quedan relacionados por una configuración cognitiva asociada a una creencia, resulta que, en cierta forma, una concepción se puede considerar como un sistema de creencias (Ramos, 2006).

La reflexión producida por la entrevista no lleva a FD a poner en cuestión dicha concepción (por ejemplo, no le lleva a considerar que en lugar de mediador debería ser un profesor que imparte clases magistrales), ni tampoco le lleva a cambiar alguna de las creencias que se han identificado, solo le lleva a reflexionar cómo han sido aplicados los criterios que orientan su práctica (por ejemplo, cuando valora la gestión de la interacción que ha realizado en el primer fragmento) sin cambiarlos.

Referencias

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CCS.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Cisternas, T. (2011). La investigación sobre formación docente en Chile. Territorios explorados e inexplorados. *Calidad en la Educación, 35,* 131-164.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* Nueva York, EE. UU.: Routledge

Ducoing, P. y Fortoul, B. (Coord.) (2013). *Procesos de Formación, 2002–2011. Vol. I. [Colección Estados del Conocimiento]*. México D. F., México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Faerna, Á. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento.* Madrid: Siglo XXI.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM*, 13, 63-83.

Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (Eds). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Combined use of the Lesson Study and the Didactic Suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Korthagen, F. A. J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68*(24), 83-101.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en Educación Matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Pascual, M. I. y Montes, M. (2017). Las preguntas de los maestros egresados como guía de su formación: una aproximación metacognitiva. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 387-395). Zaragoza: SEIEM.

Peirce, C. S. (1877). The Fixation of Belief. *Popular Science Monthly*, *12,* 1-15.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales*. *El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, Barcelona.

Rojas, F. y Deulofeu, J. (2013). Elementos de impacto de las prácticas instruccionales de los formadores en la formación inicial de profesores de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 475-482). Bilbao: SEIEM.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner. How Professionals Think in Action*. Nueva York, EE. UU.: Basic Books.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, Barcelona.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis*, *12*(25), 127-144.

Ulloa, R. y Solar, H. (2017). Observando el aula de formación inicial: desarrollando conocimiento matemático para la enseñanza en dos casos de formación de profesores de educación básica. *Estudios Pedagógicos*, *43*(2), 333-354.

Zapatera, A., Callejo, M. L. y Badillo, E. (2017). Evolución de la mirada profesional: cambios en el discurso de estudiantes para maestro. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 477-486). Zaragoza: SEIEM.

[xv] Este trabajo recibió apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), México, y de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE-UB)

JUSTIFICACIÓN Y EXPRESIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DE UNA RELACIÓN FUNCIONAL POR ESTUDIANTES DE CUARTO DE PRIMARIA[xvi]

Justification and expression of the generalization of a functional relationship by fourth grade students

Ayala-Altamirano, C.[a] y Molina, M.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

Analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9 a 10 años) al resolver una tarea que involucra la función f(x)=2x. Presentamos el análisis de las discusiones entre los estudiantes y el investigador-docente que tienen lugar durante dos sesiones de clases en el marco de un experimento de enseñanza. En los resultados se aprecia cómo la justificación ayudó a expresar de modos más sofisticados la generalización de las relaciones funcionales identificadas. Concretamente el intercambio de ideas ayudó a que la expresión de las generalizaciones fuera cada vez más precisa, involucrara diversos elementos matemáticos y se refiriera a cantidades indeterminadas para expresar la relación entre las variables.

Palabras clave: *Educación primaria, generalización, justificación.*

Abstract

We analyse the responses of a group of fourth-grade students (9 to 10 years old) when solving a task that involves the function f(x)=2x. We present the analysis of the discussions between the students and the researcher-teacher that took place during two sessions within the framework of a classroom teaching experiment. The results show how justifications helped to express the generalization of the identified functional relationships in more advanced ways. The exchange of ideas specifically helped to make the expression of generalizations more precise, to include various mathematical elements and to refer to undetermined quantities to express the relationship between the variables.

Keywords: *Elementary education, generalization, justification.*

INTRODUCCIÓN

Adoptando lo propuesto por Radford (2018), consideramos que el pensamiento algebraico se caracteriza por referir a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables y los parámetros) y razonar de manera analítica con estas, recurriendo a modos idiosincráticos o específicos evolucionados culturalmente para representar la indeterminación y sus operaciones. El manejo analítico de los objetos indeterminados implica que, aunque no se conozcan las cantidades, se utilizan como si fueran conocidas. El modo de designar a lo indeterminado puede ser variado, involucrando el simbolismo alfanumérico u otros símbolos: lenguaje natural, gestos, ritmos, entre otros. Por otro lado, distinguimos cuatro prácticas del pensamiento algebraico identificadas por Blanton y colaboradores (Blanton, 2017): (a) generalización (b) representación, (c) justificación y (d) razonamiento con generalizaciones.

En este marco, una línea de investigación abierta que mencionan estudios previos es indagar en los tipos de tareas que alientan a los estudiantes a analizar variedad de generalizaciones y

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). Valladolid: SEIEM.

justificaciones que utilizan otros estudiantes (Lannin, 2005) e identificar tipos de apoyo curricular e instructivo que ayuden a los maestros a crear un entorno de andamiaje para el desarrollo de justificaciones sofisticadas. Nuestro propósito en este trabajo es analizar una propuesta de enseñanza basada en prácticas de justificación llevadas a cabo al resolver tareas que involucran una relación funcional, así como describir cómo la discusión e intercambio de ideas entre los estudiantes ayuda a expresar de modo algebraico la relación entre cantidades que covarían. A su vez buscamos extender al contexto funcional, los hallazgos de otras investigaciones las cuales señalan que la justificación permite que la generalización tenga sentido, anima a los estudiantes a establecer conjeturas para establecer generalizaciones y ayuda a desarrollar una generalización más potente (Ellis, 2007a).

Otras investigaciones informan sobre las estrategias de estudiantes de primaria al resolver problemas de generalización de patrones o relaciones funcionales. Por ejemplo, Callejo, García-Reche y Fernández (2016) y Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) en sus estudios analizan las respuestas escritas de estudiantes al expresar la generalización. En esta comunicación, buscamos complementar dichos estudios al indagar sobre el proceso de generalización analizando las discusiones en las que los estudiantes justifican sus respuestas escritas y, a su vez, describir el efecto del intercambio de ideas en la expresión de la generalización.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La generalización se puede entender como un proceso (*generalizing*) o como un producto (*generalization*). El proceso implica: (a) Identificar los elementos comunes en todos los casos, (b) Extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y (c) Derivar resultados más amplios de casos particulares (Ellis, 2007b; Strachota, Knuth y Blanton, 2018). De modo similar, Radford (2010) describe el proceso de generalización de patrones, no obstante, al derivar los resultados más allá del campo perceptual menciona que la generalización debe proporcionar una expresión directa que permite obtener cualquier término de la secuencia. Además, él propone que la generalización está compuesta por capas, las cuales adquieren mayor grado de sofisticación en relación a los sistemas semióticos utilizados para razonar y expresar esa generalidad. La generalización como producto es el resultado de dicho proceso. Las prácticas de representación, justificación y razonamientos son algebraicas cuando se realizan al servicio de acciones con o sobre generalizaciones.

Según Chua (2017), la justificación es un medio para determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación. Sus roles son determinar la verdad para eliminar las propias dudas o persuadir a otros de que la conjetura es verdad. Los tipos de argumentos de los estudiantes dependen de sus habilidades y de la naturaleza de las tareas.

Diversas investigaciones se han centrado en el estudio de las justificaciones y argumentos de los estudiantes en contextos matemáticos. En primaria, en el marco de la aritmética generalizada, Schifter (2009) concluye que es necesario hacer comprender a los estudiantes de primaria que no se justifica con algunos casos particulares. Además, nota que cuando los estudiantes señalan en los casos particulares que eso sucede con "cualquier número" esta puede ser una forma de expresar la generalidad. Por otra parte, añade que en este nivel las leyes de la aritmética no pueden ser la base de la justificación, pues estas leyes aún están en cuestión para los estudiantes. La notación variable tampoco suele ser un medio para expresar la generalidad. Esta autora evidencia cómo los estudiantes usan representaciones visuales para justificar afirmaciones generales.

Otros trabajos establecen niveles de justificaciones al analizar las respuestas de estudiantes al evaluar argumentos matemáticos, crear los propios, demostrar y discutir la naturaleza de las justificaciones (Knuth, Choppin y Bieda, 2009; Lannin, 2005). Blanton (2017) señala que, en los estudios llevados a cabo con estudiantes de primaria en el contexto funcional, es frecuente que al justificar recurran a casos empíricos. De modo similar, Lannin (2005) concluye que los estudiantes de sexto grado, al realizar tareas de generalización de situaciones numéricas, tienden a usar justificaciones empíricas o ejemplos genéricos.

En el contexto español y centrándose en educación secundaria, Chico (2018) analiza el impacto de la interacción en grupos en la producción de discursos matemáticos. Analiza las discusiones de los estudiantes al resolver un problema de patrones algebraicos, considerando los elementos matemáticos involucrados y las acciones de los estudiantes (iniciar, compartir, solicitar y rechazar). Concluye que ciertas formas de interacción influyen en el desarrollo de la lengua del álgebra y el discurso matemático, evidenciando su efecto sobre el pensamiento algebraico en procesos de generalización.

OBJETIVOS

El objetivo de esta comunicación es evidenciar cómo una propuesta de enseñanza basada en la acción de justificar ideas ayudó a que estudiantes de cuarto de primaria expresaran de un modo más sofisticado la generalización en tareas que involucran una relación funcional.

MÉTODO

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio, que sigue la metodología de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), cuyo objetivo es indagar en las capacidades algebraicas de estudiantes de primaria al participar en situaciones que involucran relaciones funcionales. Es de tipo cualitativa, y tiene carácter exploratorio y descriptivo.

La muestra está compuesta por 25 estudiantes que cursan cuarto de primaria (9 a 10 años). El colegio es un centro privado-concertado del sur de España que atiende a una población con un nivel socioeconómico muy bajo. Antes de efectuar las sesiones de trabajo, los estudiantes no habían recibido instrucción sobre la generalización y expresión de ideas algebraicas. Para mantener el anonimato de los estudiantes se les asignó un código específico: E_i, con $i = 1… 25$. En el caso de las investigadoras, el código utilizado fue I.

Recogida de datos

Durante el experimento de enseñanza se diseñó e implementó un cuestionario individual inicial, dos entrevistas clínicas semiestructuradas (una inicial y otra final), y cuatro sesiones de clases de una duración aproximada de 60 minutos.

En la implementación de las sesiones de clases participó un grupo de investigadores los cuales tenían distintos roles: investigador-docente, investigador-observador y técnico de cámaras. Los estudiantes mantuvieron la distribución habitual, sentándose en grupos de tres o cuatro integrantes. Las sesiones se componían de distintos momentos: (a) Presentación de la situación general por parte del investigador-docente, (b) trabajo individual o en pequeños grupos, y (c) discusiones generales en las que los estudiantes podían presentar sus ideas, interpelar a otro estudiante para que diera alguna explicación o hacer una sugerencia para mejorar la respuesta o generalización propuesta.

Las fuentes de información en la recogida de datos son tres: (a) hojas de trabajo, (b) grabaciones de video con cámara fija ubicada al final de la sala de clases, y (c) grabaciones con una cámara móvil que captó el trabajo realizado por algunos estudiantes.

Las tareas trabajadas en las cuatro sesiones están diseñadas considerando el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Este modelo está compuesto por siete pasos que permiten obtener una relación general a partir del análisis de casos particulares, la detección de elementos comunes entre ellos, la formulación de una conjetura y su posterior comprobación.

En las primeras tres sesiones las cuestiones planteadas en las hojas de trabajo refieren, en primer lugar, a casos particulares no consecutivos, seguidamente a casos lejanos y, finalmente, a la generalización de la relación funcional. En las dos primeras sesiones las situaciones consideradas involucran las funciones $f(x)=2x+1$ y $f(x)=x+3$. En las sesiones 3 y 4, objeto de análisis en este trabajo, las tareas refieren a una misma situación (ver Figura 1) basada en la función $f(x) = 2x$.

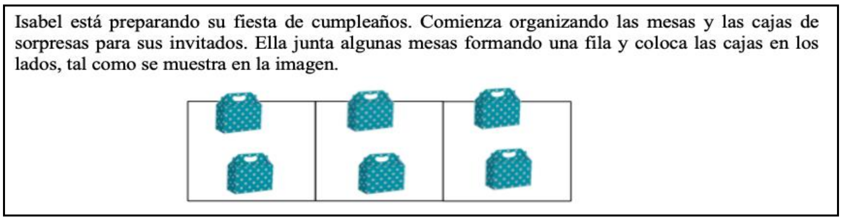


Figura 1. Situación-Contexto de las tareas de las sesiones 3 y 4

En la sesión 3, la investigadora-docente presentó la situación mostrando imágenes de las mesas y cajas de sorpresas, las que pegó una a una en la pizarra hasta obtener la misma representación que se muestra en la Figura 1. La primera fase del proceso de generalización (identificar elementos comunes entre los casos particulares presentados) se realizó de forma grupal con todo el grupo clase considerando cuatro casos particulares. Establecieron la relación entre la cantidad de mesas y cajas de sorpresas y registraron los casos en una tabla. Enseguida, en pequeños grupos, realizaron los dos procesos de generalización restantes: trabajar con casos lejanos y generalizar. Completaron la tabla que se muestra en la Figura 2 y explicaron de modo general qué debían hacer para conocer la cantidad de mesas y de cajas. La sesión finalizó con una discusión grupal en la que los estudiantes compartieron sus respuestas a estas tareas.

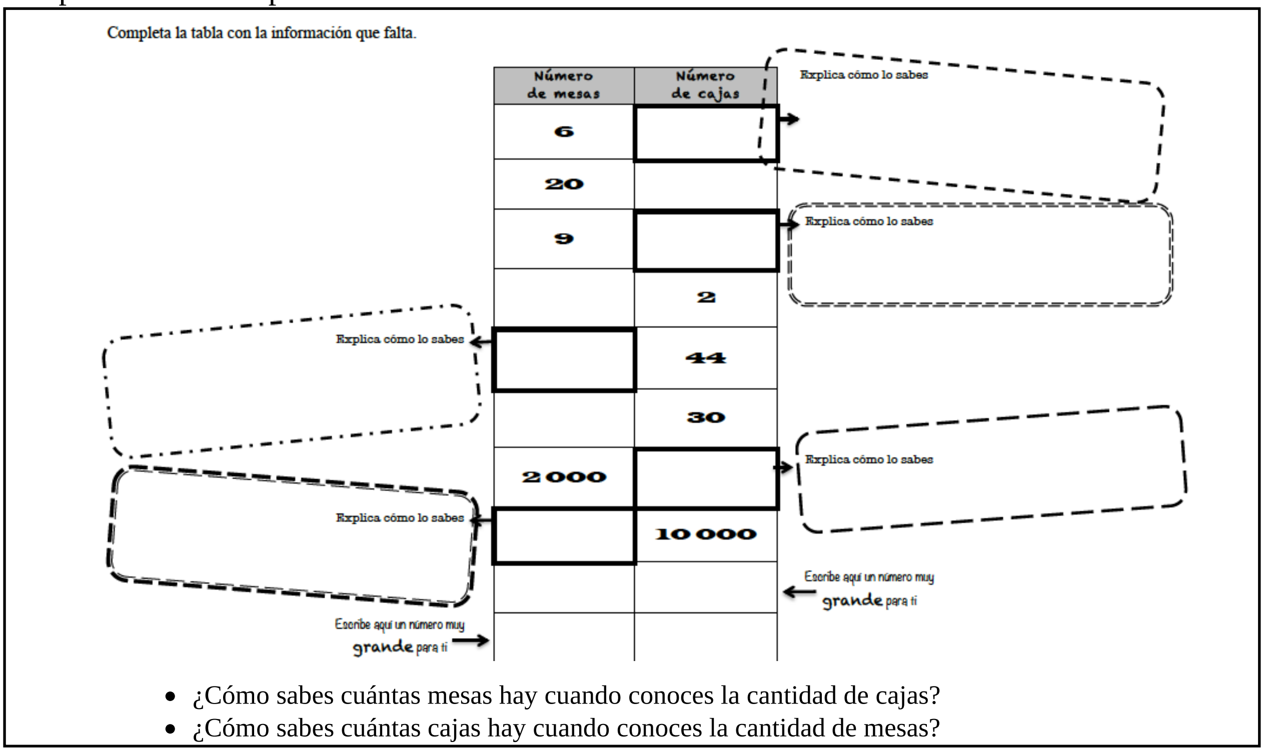
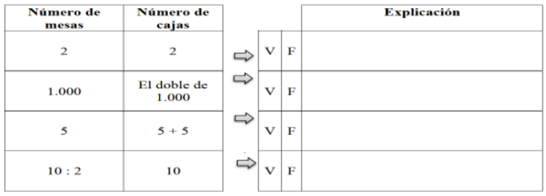


Figura 2. Tareas propuestas en el trabajo en pequeños grupos durante la sesión 3

En la sesión 4 se plantearon tres tareas dirigidas a que elaboraran argumentaciones de validación, es decir, que se expresaran a favor o en contra de las ideas propuestas. En la primera tarea analizaron casos sugeridos en una tabla y argumentaron si las relaciones eran verdaderas o falsas (ver Figura 3, parte izquierda). En la segunda tarea, cada estudiante escribió un mensaje explicando cómo conocer la cantidad de cajas en dos supuestos: cuando la cantidad de mesas era mil y cuando era una cantidad desconocida representada por la letra "Q". Esta actividad se llevó a cabo durante una discusión grupal, por turnos cada estudiante expresó su explicación y luego otro estudiante señaló si estaba de acuerdo o no con esta. En la tercera tarea volvieron a analizar sentencias y argumentar si eran verdaderas o falsas, en esta ocasión algunas de las sentencias involucraban el uso de letras (ver Figura 3, parte derecha).



Número de mesas	Número de cajas			Explicación
2	2	V	F	
1.000	El doble de 1.000	V	F	
5	5 + 5	V	F	
10 : 2	10	V	F	

1. La cantidad de mesas es el doble que la cantidad de cajas.
2. Cuando Isabel utiliza 11 mesas necesita 21 cajas.
3. Cuando Isabel utiliza 4 mesas necesita 2x4 cajas.
5. Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita 2xZ

Figura 3. Ejemplos de tareas de la sesión 4 (parte izquierda: tarea 1, parte derecha: tarea 3)

Análisis de datos

Se analizaron las videograbaciones y sus respectivas transcripciones. La unidad de análisis considerada son las discusiones grupales. Caracterizamos las respuestas de los estudiantes según su grado de sofisticación atendiendo a la relación entre los siguientes puntos: (a) si se refieren a lo indeterminado, (b) si lo nombran de manera explícita, y (c) si explican la relación matemática entre las variables. En este último punto, consideramos los elementos matemáticos que mencionan: el conteo, la adición, la multiplicación, entre otros. El modo de expresar la generalidad en su mayoría fue verbal, sin embargo, en los casos que tuvimos evidencias del uso de otros sistemas semióticos, por ejemplo, gestos o símbolos alfanuméricos, estos fueron señalados.

En la Tabla 1, mostramos tres ejemplos organizados desde mayor a menor grado de sofisticación. E_{08} y E_{17} aluden a la suma, no obstante, la respuesta de E_{08} es más sofisticada pues se refiere a las variables de forma explícita e indeterminada. E_{03} relaciona las variables por medio de la multiplicación, por lo que podría considerarse que es una respuesta más sofisticada que la de E_{08}, además ambos mencionan las variables explícitamente, sin embargo, E_{03} utiliza casos numéricos particulares y no se refiere a las variables de modo general o indeterminado, tal como lo hace E_{08}.

Tabla 1. Ejemplos de caracterización de respuestas

Respuesta	Variables mencionadas	Relación matemática	Expresión de la indeterminación
E_{08}: Yo he puesto seis, porque si las cajas tengo que llevarlo a las mesas que sea, pues es sumando de dos en dos.	Cajas Mesas	Sumando de dos en dos	Las mesas que sean
E_{03}: Que seis por dos, seis, por seis mesas, y dos por dos cajas, entonces seis por dos son doce.	Cajas Mesas	Seis por dos son doce.	Implícita
E_{17}: Sumando. 2000	Implícitas	Sumando	Implícita

RESULTADOS

Presentamos los resultados derivados del análisis de las discusiones grupales sobre las respuestas obtenidas en cada una de las tres fases del proceso de generalización.

Identificar los elementos comunes en todos los casos

En la discusión inicial de la sesión 3, la clase discute sobre cuántas mesas hay cuando se utilizan 16 cajas. Dos estudiantes señalan que hay diez mesas, otro siete y tres dicen que hay ocho mesas. No obstante, al preguntarles cómo podrían comprobar sus respuestas o no daban argumentos o eran muy generales. Por ejemplo, E_{02} explica por qué cree que son ocho como sigue: “Porque he sumado las cajas y las mesas”. La discusión sobre este caso termina cuando el estudiante E_{13} al explicar por qué hay ocho mesas basa su justificación en el conteo y usa gestos para representar con sus dedos las mesas. Él señala: “Aquí tenemos seis. Si empiezas desde el principio te sale ocho. [Cuenta de dos en dos y utiliza los dedos para llevar la cuenta] Dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce y dieciséis. Te sale ocho [muestra ocho dedos]" (Ver Figura 4).

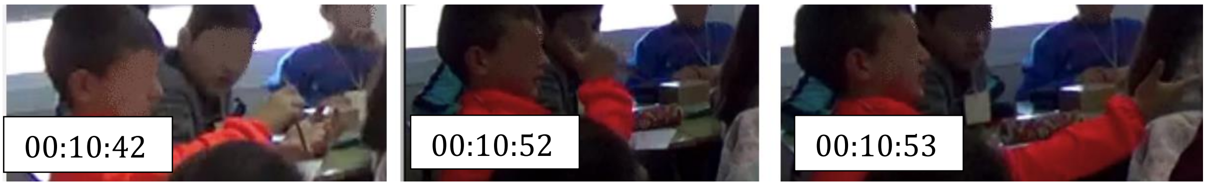


Figura 4. Estudiante E_{13} realizando el conteo sobre el que basa su justificación

Cuando la investigadora-docente pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta, señalan que sí y completan la tabla con el número ocho. El siguiente caso fue "tengo dos mesas, ¿cuántas cajas necesito?". El estudiante E_{18} siguiendo con el argumento dado anteriormente señala "cuatro, porque he contado dos, cuatro". Cuando se les pregunta por el número de mesas cuando hay doce cajas, el estudiante E_{08} generaliza la relación entre la cantidad de mesas y cajas, propone una justificación que se basa en las acciones antes realizadas, interpreta el conteo como la suma de dos en dos y refiere a la indeterminación como "las mesas que sean". Él dice: "Yo he puesto seis, porque si las cajas tengo que llevarlo a las mesas que sea, pues es sumando de dos en dos".

Luego de la intervención de E_{08}, los argumentos mencionan otros elementos matemáticos. El estudiante E_{23} dice que hay seis mesas porque doce es el doble de seis. El estudiante E_{17} señala que ha multiplicado las dos cajas por seis, el estudiante E_{21} dice: "es como la mitad. La mitad de doce es seis. Entonces seis más seis son doce" y el estudiante E_{03} señala: "Que seis por dos, seis, por seis mesas, y dos por dos cajas, entonces seis por dos son doce". Este último estudiante no solo explicita la relación matemática entre las variables, también explicita el nombre de cada una de ellas.

Extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó

La sesión continuó con el trabajo en pequeños grupos en la tarea mostrada en la Figura 2. Tras el trabajo escrito vuelven a compartir sus respuestas en una discusión grupal, donde se repitieron los argumentos señalados en la primera parte de la sesión. Algunos estudiantes responden y argumentan correctamente, otros responden correctamente, pero argumentan usando incorrectamente la relación matemática. Por ejemplo, al preguntar por el número de mesas para dos cajas:

E_{04}: Uno, porque el doble de dos me da uno.

I: ¿El doble de dos es uno?

E_{03}: No

I: ¿Por qué no E_{03}?

E_{03}: Ella ha dicho el doble de dos, que es cuatro.

I: ¿Y cómo sería entonces?

E_{03}: Sería la mitad. La mitad de dos.

La posibilidad de expresar sus argumentos y discutirlos con otros permite clarificar el uso de algunos conceptos matemáticos y que los propios estudiantes identifiquen los errores. Sucede algo similar en el diálogo entre E_{08} y E_{21} al explicar cuántas mesas utilizaron cuando tenían 44 cajas.

E_{08}: Que yo lo hice multiplicando cuarenta y cuatro y me dio veintidós.

I: ¿Y por cuánto multiplicó?

E_{08}: Por dos.

E_{21}: E_{08} lo que tú hiciste es la mitad. No multiplicando. Porque si lo hubieras multiplicado te hubiera salido ochenta y ocho.

Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Al final de la sesión 3 la discusión se centró en los casos con cantidades indeterminadas. A continuación, se muestra el dialogo entre la investigadora-docente y unos estudiantes.

I: Cuándo calculamos los quinientos millones o cualquier número de mesas, ¿qué tenemos que hacer para saber el número de cajas? ¿Alguien me puede explicar eso? Yo le puedo decir cualquiera de estos números, el que sea. ¿Qué teníamos que hacer para encontrar el número de cajas cuando me dan el número que sea de mesas?

E_{02}: El doble de quinientos mil [aunque se le pregunta por una cantidad indeterminada, basa su respuesta en un caso particular]

E_{14}: Que yo hice... como mira si cuarenta el número de cajas y veinte el número de mesas, pues yo he hecho, he pensado que veinte más veinte son cuarenta y lo he sumado.

Estos argumentos no logran capturar y expresar lo indeterminado. Los estudiantes explican la relación matemática, pero a partir de casos particulares. Al comparar estos argumentos, el estudiante E_{02} no nombra de manera explícita las variables involucradas en la situación, mientras que el estudiante E_{14} sí las nombra, al referirse al número de mesas, al número de cajas y la operación matemática que las relaciona. En este sentido, aunque ambos son argumentos basados en casos empíricos, el del estudiante E_{14} es más sofisticado al mencionar explícitamente las variables.

A continuación, se muestra el diálogo entre el estudiante E_{21} y la investigadora-docente, quien le realiza preguntas que buscan lograr mayor precisión en los argumentos del estudiante y generar oportunidades para que éste se exprese de modo general.

1. I: ¿Cómo saber el número de mesas si me dicen el número de cajas? El que sea, cualquiera.
2. E21: Que el número de cajas de, por ejemplo, hay quinientos millones de mesas, no pues siempre tiene que haber más cajas que mesas.
3. I: Pero si te dicen el número de cajas, ¿qué haces rápidamente para saber el número de mesas?
4. E21: Pues... la mitad. Pensando la mitad del número de cajas.
5. I: Cuando sabes el número de mesas, para saber el número de cajas, ¿qué haces?
6. E21: Multiplicando.
7. I: ¿Cuánto?
8. E21: Por dos
9. I: ¿Qué cosa?
10. E21: Quinientos millones por dos. Serían diez millones.
11. I: Entonces, cuando sabes el número de mesas, para saber el número de cajas, ¿qué haces?
12. E21: Pues multiplicar.
13. I: ¿Cuándo sabes el número de mesas para saber el número de cajas qué haces?
14. E21: Multiplico por 2 que son las cajas que hay en cada mesa.

Los argumentos dados por el estudiante E_{21} se refieren a las variables de modo indeterminado. Aunque en dos momentos (líneas 2 y 10) intenta dar una explicación refiriéndose a una cantidad en particular, no continúa dicha argumentación y expresa de dos modos distintos la relación entre las mesas y las cajas. Primero establece una relación cualitativa (línea 2) y luego menciona las operaciones que permiten calcular cualquier número de mesas o número de cajas (líneas 4 y 14).

En la sesión 4, en la segunda tarea los estudiantes debían escribir un mensaje explicando cómo determinar el número de cajas sabiendo la cantidad de mesas. En la Figura 5 se muestran las respuestas de los estudiantes E_{15} y E_{17} al primer caso considerado mil mesas.

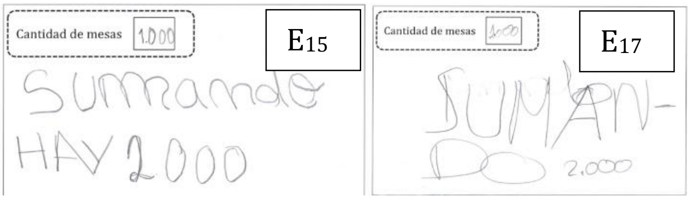


Figura 5. Respuestas estudiantes E_{15} y E_{17}, tarea 2, sesión 4

En el siguiente dialogo la estudiante E_{15} llega a plantear de modo general su estrategia a partir de la validación de la respuesta de E_{17} y el contraste de ideas.

E_{17}: Yo he sumado mil más mil y me ha dado dos mil.

I: ¿Y en tu cartel dice eso? Dice solo sumando.

E_{17}: Que sumé mil más mil.

I: E_{15} ¿qué opinas de ese mensaje?

E_{15}: Que yo lo he hecho igual que ella.

I: Muestra el tuyo. Dice sumando.

E_{15}: Porque si suma el mismo número con el mismo número te sale la cantidad de cajas.

En el diálogo las estudiantes discuten sobre la validez del mensaje que dice solo "sumando". E_{15} valida esta expresión y la complementa verbalizando el cálculo que debería realizarse. Al final E_{15} recurre a cantidades indeterminas y expresa de modo general el cálculo, se refiere al número de mesas con la frase "el mismo número" y se refiere explícitamente a la otra variable (cantidad de cajas).

En el siguiente caso la cantidad indeterminada se representa por la letra "Q". La investigadora-docente señala que "Q" representa un número que no conocen, que podría ser cualquiera. La primera reacción de los estudiantes fue preguntar qué significaba eso y relacionaron la letra con los números quince o cuarenta. La estudiante E_{01} acepta que la letra podría ser un número, establece la relación de manera indeterminada, no obstante, deja implícitas las variables. Luego valida su respuesta al utilizar un caso empírico, al asignar un valor a la letra Q.

E_{01}: Depende, porque si es de la letra no hay mesas, pero si es de número. Entonces es el doble del número.

I: ¿Si es de letra no hay mesas?

E_{01}: Si no es de letra, es de cuarenta y hay 80 cajas.

I: ¿Y cómo sabes que hay 80 cajas?

E_{01}: Porque hay el doble.

DISCUSIÓN

Los resultados nos permiten observar cómo los estudiantes fueron mejorando sus argumentos para expresar la relación entre las mesas y las cajas. El conteo de dos en dos fue la primera herramienta matemática que les permitió explicar y comprobar sus respuestas, luego se volvió más sofisticado al referirse a las relaciones de doble o mitad, llegando a mencionar de manera explícita en sus argumentos las variables involucradas en la relación funcional. Esto evidencia cómo la interacción social permite que los estudiantes expresen de modo más sofisticado la generalización. Al incluir en las tareas procesos de justificación y discusión de las respuestas, ampliamos al contexto funcional hallazgos relacionados con los beneficios de la interacción social (por ejemplo, Chico, 2018).

También mostramos que la transición a estrategias o formas de expresar la generalización más sofisticadas depende de cada estudiante. Ellos reconocen la equivalencia entre sumar dos veces el mismo número o calcular el doble, pero mencionan el que más se ajusta a sus habilidades de cálculo. Esto podría ser debido a que sus habilidades aritméticas están en desarrollo, tal como lo evidenció Schifter (2009) en el marco de la aritmética generalizada. Por ejemplo, las estudiantes E_{15} y E_{17} en el proceso de derivar los resultados a casos más amplios expresan la generalización a partir de la suma, a pesar de que antes ya se había verbalizado la multiplicación. Esto se podría explicar con lo que señaló E_{15} cuando la investigadora-docente pregunta: "¿Qué teníamos que hacer para encontrar el número de cajas, cuando me dan el número que sea de mesas?". E_{15} señala: "Depende de cómo lo quieras hacer. Haciendo el doble, multiplicando, restando, sumando, como tú quieras, pero siempre depende del que esté". Aparentemente E_{15} valida la posibilidad de resolver de múltiples formas la situación. Lo que coincide con E_{12} al justificar su respuesta en la actividad que se muestra en la parte izquierda de la Figura 3. Él dice que cuando hay 5 mesas es correcto decir que hay 5 + 5 cajas, "porque el número de mesas es cinco y, cinco más cinco son diez. Lo he comparado con el doble de cinco que es diez".

Por otro lado, se constata que los estudiantes de primaria recurren a justificaciones empíricas como también se observa en otras investigaciones (e.g. Blanton, 2017). Según Lannin (2005) el uso de justificaciones empíricas se debe a la falta de conexión con el contexto, por lo que las preguntas que pueda plantear el profesor son fundamentales para mejorar la justificación y expresión de la generalización, tal como sucedió en el dialogo entre E_{21} y la investigadora-docente, en la fase de derivar los resultados más amplios. Aquí la interacción entre el docente y el estudiante permitió que éste lograra ser más preciso al momento de justificar y expresar su generalización.

CONCLUSIONES

En esta comunicación mostramos una propuesta de enseñanza en la que las operaciones aritméticas se pueden interpretar como cambios. Observamos que las instancias de justificación permitieron que los estudiantes lograran generalizar la relación de correspondencia entre las variables y referirse a ella en términos de cantidades indeterminadas.

El reconocimiento de las ideas de otros ayudó a los estudiantes tanto a adoptar estrategias de resolución más sofisticadas como a verbalizar sus explicaciones de modo más preciso. El primer caso se ve reflejado, por ejemplo, en lo sucedido cuando los estudiantes buscaban elementos comunes al inicio de la sesión 3. Considerando la idea de contar propuesta por el estudiante E_{13} y las intervenciones de otros, el estudiante E_{08} logra plantear de forma general la relación entre las variables. Luego de su intervención el conteo se expresó como sumar de dos en dos, multiplicar, calcular el doble o la mitad. Un ejemplo para el segundo caso se observa cuando los estudiantes E_{04} y E_{08} plantean la respuesta correcta verbalizando las relaciones que se habían discutido hasta el momento (doble y multiplicar). Si bien esto era incorrecto, las intervenciones de los estudiantes E_{03} y E_{21} ayudaron a verbalizar la relación correcta.

Por otro lado, el proponer casos particulares no consecutivos propició que los estudiantes establecieran la relación de correspondencia. Esto contrasta con resultados previos (Carraher y Schliemann, 2007) que muestran que cuando los estudiantes resuelven situaciones en las que los casos son consecutivos, tienden a analizar los datos de manera recursiva, fijando su atención en cada una de las variables por separado y tienen mayor dificultad para identificar como estas covarían.

Concluimos que a medida que participaron de las actividades y justificaron sus respuestas, los estudiantes fueron mejorando tanto su capacidad de justificar como la de expresar la generalización de modo más sofisticado. Esto extiende y coincide con lo que plantean Knuth et al. (2009) quienes señalan que la participación en actividades que fomentan la justificación logra mejorar la capacidad de plantear la generalización. Al igual que Ellis (2007a), quien trabajó con estudiantes de secundaria, al incluir el proceso de justificación desde el inicio de la sesión de clases, en vez de solo al final, la generalización fue cada vez más sofisticada.

Referencias

Blanton, M. (2017). Algebraic reasoning in Grades 3-5. En M. Battista (Ed.), *Reasoning and Sense Making in Grades 3-5* (pp. 67-102). Reston, EE. UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *AIEM*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, EE. UU.: NCTM.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *AIEM*, *14*, 31-47.

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 115-122). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Ellis, A. B. (2007a). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Ellis, A. B. (2007b). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Knuth, E. J., Choppin, J. M. y Bieda, K. N. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417–426). Málaga: SEIEM.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Cham, Suiza: Springer.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Strachota, S., Knuth, E. y Blanton, M. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 351-378). Cham, Suiza: Springer.

[xvi] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Una de las autoras es beneficiaria de una Beca de Doctorado otorgada por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), folio 72180046.

PROFESORES DE EDUCACIÓN INFANTIL Y ENSEÑANZA FUNDAMENTAL NEGOCIANDO SIGNIFICADOS AL PLANEAR UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA SOBRE SISTEMA DE MEDIDAS[xvii]

Teachers of Early Childhood Education and Elementary School negotiating meanings when planning a teaching activity on measurement system

Barbosa-Bemme, L. S.[a], Aguiar-Isaia, S. M.[a], Llinares, S.[b], Valls, J.[b] y Scremin, G.[a]

[a]Universidad Franciscana, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar el proceso de negociación de significados generado cuando profesores de Comunidades de Prácticas diferentes se implican en planificar actividades de enseñanza de manera conjunta. Los participantes fueron 21 profesores en un curso de desarrollo profesional. Analizamos las interacciones de los profesores en los encuentros, el diario en el que los profesores reflexionaban sobre las actividades realizadas y en 21 entrevistas a partir de una adaptación del método histórico-genético de Vygotski. Los resultados indican que los procesos de negociación entre profesores de diferentes niveles posibilitaron que se valorasen sus conocimientos para planificar las actividades de enseñanza. Sin embargo, este proceso también estuvo vinculado a la necesidad de resolver tensiones vinculadas a las diferentes Comunidades de Prácticas de procedencia.

Palabras clave: *Planificación de la enseñanza; desarrollo profesional; aprendizaje docente; Comunidad de Práctica.*

Abstract

The purpose of this research is to characterize the negotiation process of meanings generated when teachers from different Communities of Practice are involved in planning teaching activities together. Participants were 21 teachers from a professional development course. We analyzed the interactions of the teachers in the meetings, the diary in which the teachers reflected on the activities carried out and in 21 interviews based on an adaptation of Vygotsky's historical-genetic method. The results indicate that the negotiation processes between professors of different levels enabled their knowledge to be assessed to plan the teaching activities. However, this process was also linked to the need to resolve tensions linked to the different Communities of Origin practices.

Keywords: *Planning of teaching; professional development; teacher learning; Community of Practice.*

INTRODUCCIÓN

La manera en la que los profesores piensan sobre la planificación de la enseñanza y el diseño de las actividades que usan en sus clases es un tema relevante en Educación Matemática (Mason y Johnston-Wilder, 2006; Watson y Ohtani, 2015). Además, cómo los profesores continúan desarrollando maneras de pensar sobre la enseñanza de las matemáticas es una cuestión clave en los contextos de desarrollo profesional (Goldsmith, Doerr y Lewis, 2014). El objetivo de esta investigación es identificar características del proceso de negociación de un grupo de profesores de Educación Infantil (0-6 años) y Enseñanza Fundamental (6-14 años) al planificar actividades de

Barbosa-Bemme, L. S., Aguiar-Isaia, S. M., Llinares, S., Valls, J. y Scremin, G. (2019). Profesores de educación infantil y enseñanza fundamental negociando significados al planear una actividad de enseñanza sobre sistema de medidas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 193-202). Valladolid: SEIEM.

manera conjunta. Al colocar juntos profesores de diferentes niveles educativos para pensar en la planificación de actividades, se crea la ocasión para estudiar su desarrollo profesional desde una perspectiva situada del aprendizaje. Un elemento teórico para analizar este proceso de aprendizaje es la idea de Comunidad de Práctica, cómo se genera y se mantiene en el tiempo (Wenger, 2001; Wenger, Dermott y Synder, 2002). En el ámbito de la Educación Matemática, la idea de Comunidad de Práctica ha sido usada como referente teórico para comprender el aprendizaje y desarrollo del profesor (Goos, 2014; Llinares y Krainer, 2006). La noción de Comunidad de Práctica permite estudiar el aprendizaje docente cuando se comparten necesidades y saberes. Las investigaciones previas han mostrado que la constitución de una Comunidad de Práctica, cuando estudiantes para profesor están intentando aprender sobre la enseñanza de las matemáticas, se da en la medida en que identifican objetivos comunes, generan espacios de intercambio y desarrollan sistemas de simbolización compartidos (Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez, 2015; Llinares, 2002). Además, cuando se colocan profesores desde diferentes Comunidades de Práctica (como en esta investigación con profesores desde diferentes niveles educativos), la noción de relación entre diferentes Comunidades de Práctica permite estudiar el aprendizaje de los profesores y comprender la compleja relación entre la teoría (en nuestro caso, la que proporciona el curso de desarrollo profesional) y la práctica (la enseñanza realizada en las aulas) (Solomon, Eriksen, Smestad, Rodal y Bjerke, 2017; Wenger, 1998).

MARCO TEÓRICO

Comunidad de práctica

Las Comunidades de Práctica, según Wenger et al. (2002), "son grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o una pasión por un tema y quieren profundizar sus conocimientos y experiencia en esta área, interactuando sobre una base continua" (p. 4). En una Comunidad de Práctica, un grupo de personas interactúan, aprenden juntas y construyen relaciones, lo que lleva a desarrollar la sensación de pertenencia y de compromiso mutuo con el grupo. Wenger (1998) subraya dos ideas: el aprendizaje como una participación creciente en prácticas situadas socialmente, y el aprendizaje como el desarrollo de una identidad en el contexto de una comunidad de práctica. Una idea que ha puesto de manifiesto usar la noción de Comunidad de Práctica para analizar el aprendizaje y desarrollo de los profesores de matemáticas son los movimientos de intersección y relación conflictiva entre diferentes Comunidades de Práctica (Solomon et al., 2017; Wenger, 1998).

En este estudio nos centramos en la relación entre tres Comunidades de Práctica: profesores que enseñan matemáticas en Educación Infantil (0-6 años) y profesores que enseñan matemáticas en los años iniciales (6-10 años) y en los finales de la educación básica (10-14 años) (RS, Brasil). En este contexto, estamos interesados por el significado de las actividades para la enseñanza y, consecuentemente, por el proceso de negociación de significados que se desdobla en el modo de participación y reificación. La negociación de un significado es un proceso productivo (Llinares, 2002). Wenger (2001) indica que esta negociación no requiere construir un significado de cero, ya que "El significado no es preexistente pero tampoco es simplemente inventado. El significado negociado es a la vez histórico y dinámico, contextual y único" (p.78). Este proceso de negociación de significado puede ser entendido por la dualidad establecida entre la participación y la reificación.

La participación se caracteriza por la posibilidad de reconocimiento mutuo entre los participantes, llegar a compartir modos de representación de la realidad y comprender el foco de atención que justifica la participación en la actividad (en esta investigación, el diseño de actividades para la enseñanza). La reificación puede ser entendida, en general, como el proceso de dar forma a la experiencia particular de cada sujeto al plasmar esa experiencia en "cosas". Este término hace referencia tanto al proceso y al producto de los mismos. Sin embargo, "los productos de la reificación no son simples objetos concretos, materiales, sino reflejos de esas prácticas" (Wenger, 2001, p. 87). El proceso de reificación en la formación docente puede ser entendido como el proceso de estudiar, planificar, discutir y desarrollar las actividades de enseñanza (como es el caso de la planificación de la enseñanza). La participación y la reificación forman una amalgama entre ellas siendo imposible comprender una sin comprender la otra. Esta base teórica se relaciona con la Teoría Histórico-Cultural (Vygotski, 1998, 2009), que señala la importancia de la interacción entre los sujetos como elementos que posibilitan la adquisición y el intercambio de nuevos saberes, lo que favorece el aprendizaje docente.

Vygotski (2005) puntualiza que la tarea del profesor es desarrollar capacidades particulares de pensar en campos diferentes y modos distintos de concentrar la atención sobre diferentes materias. Esta perspectiva teórica permite identificar cómo el profesor, en un proceso de negociación de significado al planear situaciones de enseñanza, se apropia de un modo general de ser profesor que enseña Matemáticas (identidad en el sentido de Wenger). Desde la perspectiva de la formación de profesores, las ideas de participación y reificación que constituyen los procesos de negociación de significados ayudan a organizar las acciones en el grupo (ciclo formativo) y a analizar las interacciones entre los profesores (investigación).

Desde estas referencias teóricas y en el contexto descrito nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características del proceso de negociación se generan durante la tarea planificar conjuntamente actividades para la enseñanza por parte de profesores de Educación Infantil y Enseñanza Fundamental - años iniciales y años finales -?

MÉTODO

Participantes y contexto

Participaron 21 profesores, que enseñan Matemáticas en Educación Infantil (0-6 años) y en la Enseñanza Fundamental (años iniciales, de 6 a 10 años; y años finales, de 10 a 14 años), de escuelas municipales, estatales y privadas de Santa María – RS (Brasil), matriculados en un curso de formación de profesores. Estos profesores tenían diferentes años de experiencia en la enseñanza (desde 2 años hasta 23 años) y diferente formación académica (Tabla 1).

Tabla 1. Formación académica de los profesores participantes

	Educación Infantil	Enseñanza Fundamental	
		Años iniciales	Años finales
Formación	Pedagogía	Pedagogía	Matemáticas
Número profesores	7	11	3

El curso de formación de profesores estaba compuesto por 14 sesiones en dos ciclos centrados en el sistema de medidas (7 sesiones) y geometría (7 sesiones). Cada uno de estos ciclos está compuesto de seis momentos: a) Estudio de la construcción lógica e histórica del concepto; b) Estudio del contenido matemático especifico; c) Planificación de actividades de enseñanza; d) Discusión colectiva de la planificación de actividades de enseñanza realizada; e) Implementación en el aula de la planificación de actividades de enseñanza consensuada; y f) Evaluación de la implementación realizada en el aula.

En este estudio nos centraremos en el ciclo con foco los sistemas de medida y, dentro de este ciclo, en el primer y tercer momento. En el primer momento de este ciclo, estudio teórico sobre la construcción lógica-histórica del concepto y de los conceptos ligados al Sistema de Medidas, los profesores participantes trabajaron en gran grupo. En el tercer momento del ciclo, la planificación de actividades de enseñanza, los profesores se organizaron en cuatro grupos. Cada grupo estaba formado con al menos un profesor de Educación Infantil, uno de los años iniciales de la enseñanza fundamental y uno de los años finales.

Instrumentos de recogida de datos

Los datos son las grabaciones de audio de las cuatro sesiones realizadas en el momento uno y tres (interacciones de los profesores en las diferentes sesiones), los diarios que escribían los participantes, y en el que incluían sus reflexiones sobre los encuentros y cómo estos impactaban en sus clases de Matemáticas, los productos generados en las diferentes sesiones y, por último, las 21 entrevistas realizadas con el objetivo de conocer la trayectoria formativa y profesional de los participantes. Las entrevistas se realizaron a lo largo del curso de formación de acuerdo con la disponibilidad de los profesores.

Análisis de los datos

Para analizar los datos, utilizamos una adaptación del método de Vygotski (2009), basado en cuatro pasos y con el objetivo de identificar un conjunto de evidencias (unidad de análisis) que pueden apoyar una idea explicativa del fenómeno estudiado (Figura 1).

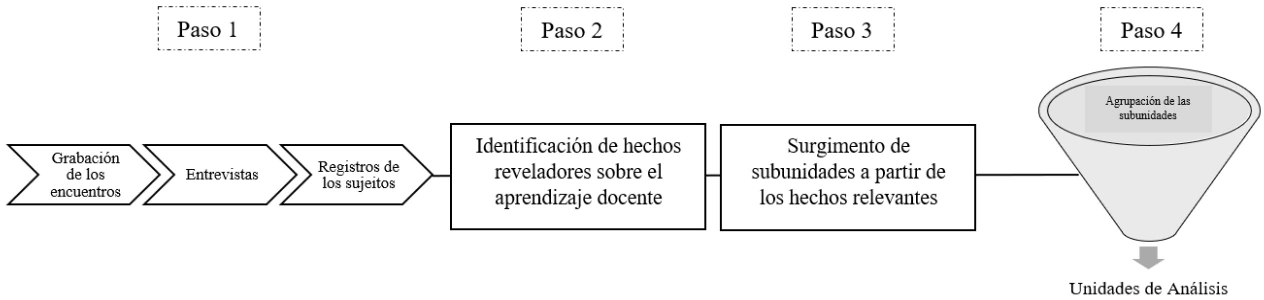


Figura 1. Pasos adoptados para la recogida y análisis de los datos

Una unidad de análisis es un conjunto de evidencias procedentes de las tres fuentes (Figura 1, paso 1), en el que los profesores se referían a un tema en particular que implicaba la necesidad de negociar significados. Una vez identificados los temas alrededor de los cuales los profesores negociaban los significados, centramos nuestra atención en cómo los profesores manifestaban implicación mutua y dónde utilizan sus saberes específicos (instrumentos conceptuales) para dar respuestas a una situación dada (Figura 1, paso 2). La identificación de estos temas permite agruparlos por recurrencia, y reconociendo intercambios específicos (foco de atención) (Figura 1, pasos 3). Finalmente, intentamos generar una inferencia explicativa de lo observado (Figura 1, paso 4).

RESULTADOS

El análisis nos permitió identificar dos aspectos que caracterizaron el proceso de negociación de significados: la percepción de cada profesor del conocimiento de matemáticas específico para la enseñanza; y cómo las Comunidades de Práctica de procedencia definían los procesos de negociación generados, el momento de consensuar la metodología de la clase, y la concreción de la actividad y su metodología para cada nivel de escolaridad (infantil, inicial o final).

Negociación sobre la planificación de actividades de enseñanza

En la negociación centrada en la planificación de una situación de enseñanza, se puso de manifiesto: la necesidad de profundizar en los conocimientos relativos a las Matemáticas, y la influencia del estudio de la construcción histórica del conocimiento matemático en la planificación de la actividad de enseñanza.

Percepción de sus conocimientos

Los profesores de Educación Infantil y de los años iniciales de Enseñanza Fundamental, que tenían una formación inicial en Pedagogía (que se identificarán en los diálogos con una P), manifestaron la necesidad de profundizar en los conocimientos matemáticos específicos cuando planificaron las actividades de enseñanza (momento tres), tal como se evidencia en siguiente diálogo:

1. Investigador: En nuestro próximo encuentro, ¿podemos empezar a planificar?
2. Jasmin (P): No, necesitamos estudiar.
3. Margarida (P): Yo también lo creo.
4. Rosa (P): Creo que tenemos que estudiar.
5. Jasmin (P): Tenemos que estudiar un poco.
6. Rosa (P): Sí, la parte de las transferencias allí (refiriéndose a las transformaciones de unidades).
7. Varios (P): Sí.

Sin embargo, los profesores formados en Matemáticas (que se identificarán en los diálogos con una M), enseñanza fundamental - años finales, no manifestaron tal deseo, de lo que se podría inferir que estos profesores entienden que ya conocen los contenidos matemáticos. Sin embargo, muchas veces a estos profesores no les preocupan los significados de los conceptos y procedimientos.

La necesidad de profundizar en los conocimientos se manifestó cuando se concluyó el estudio de la construcción histórica del conocimiento matemático (momento uno). En este momento, se evidenció que los profesores con formación inicial en Pedagogía tenían un conocimiento sobre la construcción de los conocimientos matemáticos basado en el sentido común, tal como se muestra en el diálogo del investigador con tres de estas profesoras. Estas profesoras se refieren a ejemplos de lo cotidiano al pensar en cómo surgió la Matemática (que pueden estar relacionados con las actividades identificadas por Bishop, 1991):

8. Investigador: ¿Alguien tiene alguna otra idea, de cómo surgieron las ideas matemáticas?
9. Violeta (P): Porque la Matemática está intrínseca en la vida de la gente, número siempre, es el pie, el número del calzado, la ropa, el nacimiento, el año de la fecha y así sucesivamente.
10. Tulipa (P): (...) medir, para contar y eso es Matemáticas.
11. Rosa (P): La cuestión del contar, para contar el rebaño, se hacía en cuerdas, cada nudo en la cuerda representaba un animal, eso es una forma de registro, no se tenía los números, pero era una forma de contar.

Por el contrario, los profesores cuya formación es matemática (M) se fijaron en el contenido formalizado de la Matemática. Por ejemplo, el profesor Cravo, ante el comentario de la profesora Rosa, hace una distinción entre las acciones constitutivas de la idea de número (Bishop, 1991) y la formalización matemática de dicha idea.

11. Rosa (P): La cuestión del contar, para contar el rebaño, se hacía en cuerdas, cada nudo en la cuerda representaba un animal eso es una forma de registro, no se tenía los números, pero era una forma de contar.
12. Cravo (M): ¿Pero eso es Matemática o una correspondencia? Cada tramo significa un animal, entonces puede ser una correspondencia uno a uno.

Este diálogo muestra cómo los profesores definen los tópicos de intercambio y se relacionan considerando sus conocimientos previos. Se establece de esta manera un proceso de implicación mutua, con foco en la tarea propuesta, caracterizado por los diferentes conocimientos de los participantes al proceder de diferentes Comunidades de Práctica (Educación Infantil y Enseñanza

Fundamental, años iniciales y finales) posibilitando que los profesores puedan alinear sus acciones e intenciones en relación al objeto que va a ser estudiado (Solomon et al, 2017).

Influencia de la construcción del conocimiento matemático en la planificación de la actividad de enseñanza

En la planificación de las actividades de enseñanza se puso de manifiesto la influencia que había tenido el estudio de la construcción del conocimiento matemático.

Los profesores identificaron que los conocimientos sobre la construcción de los conceptos matemáticos pueden ser una herramienta importante para la enseñanza, tal como evidencia el hecho de que dos de los cuatro grupos de trabajo utilizaron elementos de la historia de la Matemática para planificar su actividad de enseñanza (Figuras 2 y 3). Uno de estos dos grupos planificó una actividad de enseñanza donde abordaron la historia del tiempo a través de un teatro donde los propios alumnos fueron los actores (Figura 2, parte izquierda). El otro grupo también planificó la historia del tiempo, pero en este caso se les propuso a los alumnos que vieran una obra de teatro sobre el tiempo (Figura 2, parte derecha).

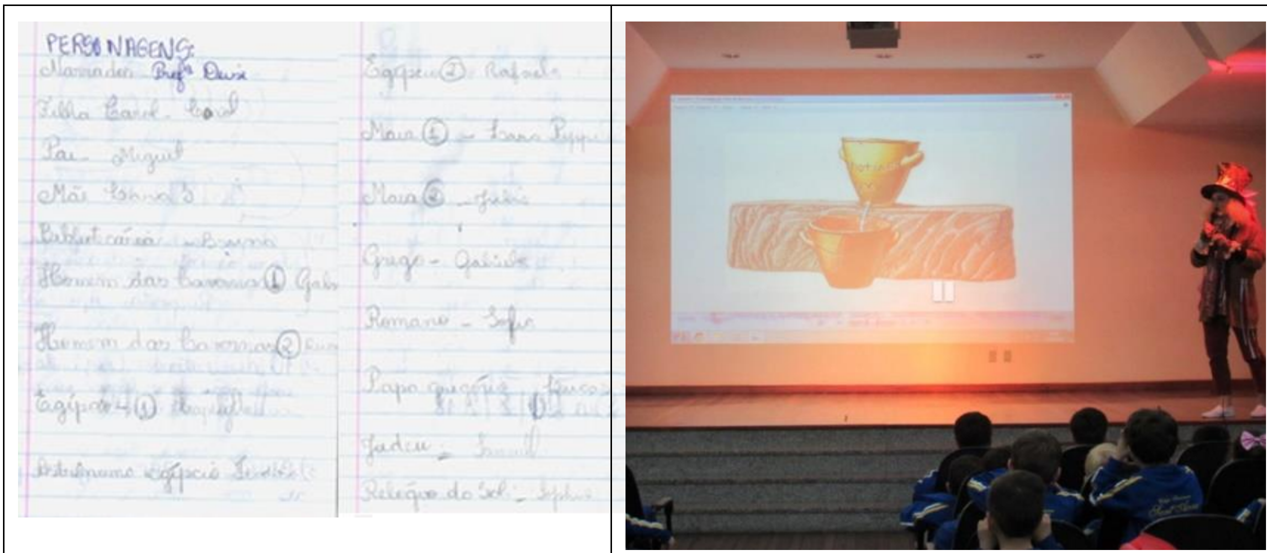


Figura 2. Registro sobre la planificación de la actividad enseñanza sobre la historia del tiempo

Esta idea de utilizar la historia de la Matemática surgió de los profesores de Educación Infantil. Estos manifestaron en sus diarios que el estudio sobre la construcción de los conceptos matemáticos les proporcionó una nueva percepción sobre la Matemática (Figura 3).

Aunque esta idea surgió de los profesores de Educación Infantil, los profesores de Enseñanza Fundamental, años finales, también reconocieron la importancia del conocimiento sobre la construcción de las nociones matemáticas para la elaboración de la actividad de enseñanza.

Acredito que eles instigaram a uma nova percepção da Matemática. Olhar a Matemática com cuidado aos fatos históricos e também com maior criticidade.	Sim, algumas coisas, entre elas a história verídica da história do tempo.
Traducción "*Creo que ellos* [estudios de la parte histórica de la Matemática] *favorecieron una nueva percepción de la Matemática. Mirar la Matemática con cuidado a los hechos históricos y también con mayor sentido crítico"*	*Sí, algunas cosas, entre ellas la historia verídica de la historia del tiempo*

Figura 3. Registro del diario de la profesora Violeta

Este elemento demarca que, al negociar significados en un contexto de una Comunidad de Práctica, los profesores tienen un proceso de participación y reifican esos conocimientos al diseñar una actividad de enseñanza que es coherente con su actividad docente. Además, estos significados se apoyan en un proceso que se deriva de la necesidad de compartir recursos y dominios de interés (Bonilla et al., 2015).

Momentos en los que las Comunidades de Práctica de procedencia definían los procesos de negociación

Necesidad de consensuar la metodología a usar

En la negociación de significados generados en el momento 3 centrado en la planificación de las actividades de enseñanza, se puso de manifiesto la necesidad de consensuar la parte metodológica. Inicialmente los profesores estaban centrados en sus ideas sin estar abiertos a las que proponían sus colegas. Por ejemplo, el siguiente intercambio en el que la profesora Azaléia (líneas 19 y 21) no tiene en cuenta la propuesta de la profesora Camélia (líneas 16 y 20), que plantea nuevos materiales:

13. Girassol (P): Como tenemos que trabajar las matemáticas en cada nivel pensé en hacer un calendario.
14. Azáleia (P): Cada uno teniendo el suyo, para que ellos entiendan, sepan que cada mes corresponde a un número.
15. Orquídea (P): ¿No habíamos pensado en introducirlo con una historia?
16. Camélia (P): Hay una historia que habla de los días de la semana, de los meses, de aquella colección de los bichitos.
17. Azaléia (P): Este calendario puede implicar los días de la semana, los meses, las estaciones.
18. Orquídea (P): Sí, pero mi pregunta es, ¿cómo vamos a introducirlo?
19. Azaléia (P): Siempre hay algo para introducirlo, un libro, una historia, sólo que no recuerdo nada.
20. Camélia (P): Hay un libro de los días de la semana, de las estaciones.
21. Azaléia (P): Voy a buscar en Google.

La metodología fue propuesta por los profesores de Educación Infantil y de los años iniciales. El profesor de los años finales de cada grupo solo participó en la planificación en lo relativo a los contenidos matemáticos. Es como si estos profesores no se sintieran legitimados para pensar en estrategias para introducir un determinado contenido.

En la identificación de la metodología se mostraron las características derivadas de las Comunidades de Práctica de origen al buscar relacionar teoría y práctica. Este dato evidencia que para el profesor de los años finales el conocimiento específico tiene un peso mayor que el conocimiento pedagógico, lo que parece indicar que al pensar sobre la enseñanza lo importante es el contenido y no la metodología.

Planificación de actividades de enseñanza para cada curso/año

Los profesores de Educación Infantil y de años iniciales y finales de Enseñanza Fundamental eligieron un motivo inicial para la actividad y luego cada uno de ellos la particularizaba para sus clases, tal como se evidencia en el diálogo adjunto.

22. Orquídea (P): Sólo que las estaciones entrarían más en mi tercer año, para ellos serían más la noción de día.

23. Camélia (P): ¿Pero no daría para presentar las estaciones del año para ellos?

En el proceso de negociar la particularización de las actividades en cada curso se constata que los profesores pueden no tener una visión global sobre el currículo, lo que los lleva a centrarse solamente en el año o clase en la que actúan. Es decir, parece constatarse una falta de visión de conjunto tanto del currículo escolar como de la construcción de los contenidos matemáticos. Esta falta de percepción es un elemento central para tener una enseñanza fragmentada.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Esta investigación busca identificar características del proceso de negociación de significados que se genera en un curso de formación donde los profesores proceden de diferentes Comunidades de Práctica (infantil, inicial y final del sistema educativo de RS - Brasil). Este contexto es importante pues la identidad del sujeto va configurándose en relación con las Comunidades de Práctica y del grado de participación que se tiene con las mismas (García, 2013). En particular, la planificación de las actividades tuvo como límite las normas y currículo desde cada nivel educativo y que corrobora lo que puntualiza Solomon et al. (2017) cuando se genera un espacio de interacción entre Comunidades de Prácticas diferentes, como se evidencia en las interacciones analizadas en la sección de resultados.

Nuestros resultados muestran dos ideas. En primer lugar, entendemos que la constitución de una Comunidad de Práctica en este curso de formación fue posible ya que todos tenían una preocupación común: mejorar la enseñanza de Matemáticas. Con ello, se definió un dominio delimitado que posibilitó la interacción sobre objetos específicos y, por tanto, la reificación de la planificación de la enseñanza como un instrumento en manos del profesor para apoyar el aprendizaje de sus alumnos.

En segundo lugar, el momento de estudio de construcción histórica del concepto permitió a los profesores compartir diferentes perspectivas sobre el conocimiento matemático, ya que muchos de ellos tenían un conocimiento con base en el sentido común (profesores de Educación Infantil) o en los conocimientos más formalizados, sin reconocer lo que originó estos conceptos (profesores de Enseñanza Fundamental, años finales). Estas constataciones son reflejos de la formación previa de estos profesores (Libâneo, 2004).

Al planificar situaciones de enseñanza de forma colectiva se evidenciaron aspectos importantes, como la necesidad de profundizar en sus conocimientos, de consensuar la metodología, además de traer a la superficie la necesidad de tener una visión más general sobre el currículo. Entendemos que ese espacio fue rico pues posibilitó que esos profesores reflexionasen sobre la complejidad de la docencia. Esto fue posible por su proceso de participación lo que les permitió reconocerse mutuamente como sujetos pertenecientes a la Comunidad y dotados de conocimientos distintos, lo que implicaba un intercambio de modos de actuar en el proceso de negociación. En este sentido, corroboramos las ideas de Lautenschlager (2012) al señalar la importancia de los espacios de formación de profesores para favorecer el intercambio de experiencias y discusiones del propio grupo.

En general, este estudio recoge tres aspectos sobre el aprendizaje de los profesores:

- El aprendizaje a partir de la interacción entre profesores de diferentes niveles, que impactó en la formación y en los conocimientos de todos los involucrados.
- La elaboración de las actividades de enseñanza que posibilitó dos aspectos distintos. El primero, se refiere al hecho de que el profesor puede identificar hasta qué punto sus conocimientos son suficientes para la elaboración de la actividad de enseñanza. El segundo, se refiere a cómo la interacción entre sujetos con formaciones distintas puede favorecer el compartir modos diferentes de pensar sobre la enseñanza y sobre cómo organizar esta.
- El proceso de negociación de significados que se apoyó en el proceso de participar y generó la posibilidad de reificar la idea de “planificación de las actividades”.

Referencias

Bishop, A. (1991). *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D. y Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesores de matemáticas. *AIEM, 7*, 73-93.

García, F. J. (2013). Construyendo una identidad: Trayectorias de investigación tras el grado de doctor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 91-108). Bilbao: SEIEM.

Goldsmith, L. T., Doerr, H. M. y Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers’ learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(1), 5-36.

Goos, M. (2014). Communities of Practice in mathematics teacher education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 82-84). Londres, Reino Unido: Springer.

Lautenschlager, E. (2012). *Discutindo diferentes significados de Equação num curso de formação continuada de professores* (Tesis de maestría no publicada). Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Libâneo, J. C. (2004). A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. *Revista Educar, 24*, 113-147.

Llinares, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: The role of knowledge and beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 195-209). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En Á. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. Londres, Reino Unido: The Open University.

Solomon, Y., Eriksen, E., Smestad, B., Rodal, C. y Bjerke, A. H. (2017). Prospective teachers navigating intersecting communities of practice: early school placement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(2), 141-158.

Vygotski, L. S. (1998). *A Formação Social da Mente.* São Paulo, Brasil: Martins Fontes.

Vygotski, L. S. (2005). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. En A. N. Leontiev et al. (Eds.), *Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento* (pp. 25-42). São Paulo, Brasil: Centauro.

Vygotski, L. S. (2009). *A construção do Pensamento e da Linguagem.* São Paulo, Brasil: Martins Fontes.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Tasks Design in Mathematics Education: An ICMI Study 22.* Londres, Reino Unido: Springer.

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning as a social system. *Systems Thinker, 9*(5), 1-10.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. M. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge.* Boston, EE. UU.: Harvard Business School Press.

[xvii] El presente trabajo se realizó con el apoyo de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamiento 001.

FORMACIÓN DE PROFESORADO DE SECUNDARIA. TRABAJANDO LA GENERALIZACIÓN A PARTIR DEL USO DE FUENTES HISTÓRICAS[xviii]

Secondary education teacher training. Working about generalization using historical sources

Barreras, Á.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad Internacional de La Rioja, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

El uso de fuentes históricas ha demostrado ser una herramienta muy útil en la formación del profesorado. En este trabajo, presentamos algunos resultados obtenidos tras el diseño e implementación de una actividad basada en un problema aritmético extraído de un libro de texto español del siglo XVI. La actividad se llevó a cabo con 48 profesores de educación secundaria matriculados en un máster on-line. Nos centramos en la parte de la actividad relacionada con la generalización. En particular, analizamos la relación entre el nivel de algebrización de la solución dada por los participantes al problema y su capacidad para dar un enunciado y una solución generales al problema planteado.

Palabras clave: *fuentes históricas, formación de profesorado, generalización, niveles de algebrización.*

Abstract

The use of historical problems has been proved a very useful tool in teacher training. In this paper, we present some results obtained after the design and implementation of an activity based upon an arithmetic problem from a Spanish 16th century textbook. The activity was conducted with 48 secondary education teachers enrolled on an on-line Masters' degree. We focus on the part of the activity related to generalization. In particular, we analyze the relationship between the algebraic reasoning level of the participants' own solutions to the problem and their ability to provide a general statement and solution of the proposed problem.

Keywords: *historical sources, teacher training, generalization, algebraic reasoning levels.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Uno de los posibles modos mediante los cuales la historia de las matemáticas puede integrarse en la educación matemática es a través del uso de problemas históricos y, en particular de problemas "con soluciones ingeniosas, alternativas o ejemplares" (Tzanakis et al., 2000, p. 224). En el ámbito concreto de la formación de profesorado, Mosvold, Jakobsen y Jankvist (2014) muestran cómo los distintos dominios del modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) pueden beneficiarse de un buen uso de la historia de las matemáticas.

En este trabajo, en el que utilizamos la historia de las matemáticas como herramienta (Jankvist, 2009), diseñamos e implementamos en un contexto de formación de profesorado una actividad basada en un problema aritmético extraído de un libro de texto español del siglo XVI. El objetivo principal de nuestra investigación consiste en estudiar si existe relación entre el modo en que los participantes resuelven el problema planteado y su capacidad para generalizar el enunciado y la solución del mismo. Más en concreto, pretendemos analizar la dependencia entre el nivel de algebrización de la solución del participante, el tipo de generalización dada y el registro semiótico

Barreras, Á. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Formación de profesorado de secundaria. Trabajando la generalización a partir del uso de fuentes históricas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 203-212). Valladolid: SEIEM.

(lenguaje natural o lenguaje algebraico) utilizado en la misma. Este objetivo se enmarca dentro de un problema de investigación más amplio que consiste en el estudio de la viabilidad del uso de fuentes históricas para el diseño de actividades de formación de profesorado que permitan trabajar diversos aspectos del MKT.

MARCO TEÓRICO

Entendemos el concepto de generalización como “el proceso por el que se aplica un argumento dado en un contexto más amplio” (Harel y Tall, 1991, p. 38). Ellis (2007) presenta una categorización, obtenida a partir de un estudio empírico, de las actuaciones llevadas a cabo por estudiantes al enfrentarse a tareas de generalización. Esta autora distingue inicialmente entre *acciones de generalización* (acciones llevadas a cabo por el estudiante en sus intentos de generalización) y *generalizaciones de reflexión* (que implican la habilidad del estudiante para identificar o usar las generalizaciones que ha creado). Dentro de las acciones de generalización, se distinguen tres tipos de acciones: relacionar, buscar y extender. Por último, en relación con la acción de extender, se distinguen cuatro fenómenos no excluyentes que describimos en la Tabla 1.

Tabla 1. Fenómenos asociados a la acción de extender (Ellis, 2007, p. 235)

Extensión del rango de aplicabilidad (ERA)	Aplicación de una propiedad a una variedad de casos mayor que aquella que la originó
Eliminación de casos particulares (ECP)	Eliminación de detalles concretos con vistas a generar nuevos casos
Operación (O)	Operar sobre un objeto para generar nuevos casos
Continuación (C)	Repetir un patrón existente para generar nuevos casos

Los procesos de generalización constituyen un aspecto nuclear del álgebra (Strachota, 2016) en cualquiera de sus distintas concepciones posibles (Usiskin, 1988).

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) proponen un modelo para caracterizar el razonamiento algebraico consistente en 7 niveles (ver Tabla 2) que se distinguen por el tipo de objetos algebraicos presentes, el tratamiento aplicado a dichos objetos y el tipo de lenguajes utilizados.

Tabla 2. Niveles de algebrización propuestos por Godino et al. (2015, p. 136)

Nivel 0	Aritmético
Nivel 1	Proto-algebraico incipiente
Nivel 2	Proto-algebraico intermedio
Nivel 3	Algebraico consolidado
Nivel 4	Uso de parámetros
Nivel 5	Manipulación de parámetros
Nivel 6	Tareas estructurales

En el nivel 0 (el más bajo) aparecen números particulares con los que únicamente se opera utilizando lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. En el nivel 6 (el más alto) se estudian las estructuras algebraicas. Los niveles 0 a 3 son propios de la Educación Primaria, mientras que los niveles 4 a 6 son específicos de la Educación Secundaria.

Este modelo tiene implicaciones en la formación del profesorado (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y, de hecho, ha resultado una herramienta útil tanto para el análisis de tareas escolares (Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017) como de las producciones de alumnos (Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2018; Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017).

MÉTODO Y MUESTRA

El problema elegido para la actividad proviene de la *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria* (Ortega, 1512). Sobre el autor, el dominico Juan de Ortega, solo se sabe que nació en Palencia y que enseñó matemáticas en España e Italia (Madrid, 2016). La obra se reeditó en múltiples ocasiones a lo largo del siglo XVI (Rey Pastor, 1926) y, de hecho, en 1515 se publicó en Lyon una traducción que supuso el primer texto de aritmética comercial escrito en francés (Carabias, 2012). El texto consta de 204 folios organizados en 36 capítulos en los que se tratan los contenidos habituales en una aritmética comercial del Renacimiento. Las ediciones de 1534, 1537 y 1542 incluyen un método para aproximar raíces cuadradas que mejoraba a los de su época (Barinaga, 1932). Por último, la edición de 1552 incluye una colección de 13 problemas resueltos utilizando técnicas algebraicas, problemas insertados por Gonzalo Busto. Notemos que 1552 fue el año en que se publicó el primer texto en español dedicado a introducir el álgebra de forma sistemática (Puig y Fernández, 2013).

En los capítulos 14 a 17, Ortega presenta una colección de 34 "reglas extraordinarias" (Métin, 2018), que el autor define como "reglas fuera del modo y manera que se acostumbra a sumar y restar […] y que van por otras maneras muy escondidas para avisar al que poco sabe" (Ortega, 1512, fol. 60r). Se trata, en realidad, de una colección de problemas aritméticos resueltos de forma descriptiva. De esta colección, nos fijamos en el undécimo ejemplo del capítulo 14, que transcribimos a continuación:

> Si quisieras saber, o te fuera demandado, que cuáles serán aquellos tres números que tanto valgan los dos quintos del primero, como los tres séptimos del segundo y como los cuatro novenos del tercero, lo harás así. Ponlos todos como aquí veis: 2/5 3/7 4/9. Después, multiplica los cinco que están debajo de los dos por los 3 que están encima de los siete, y serán 15. Los cuales 15 multiplica otra vez por los 4 que están sobre los 9 y serán 60, los cuales son el primer número. Después, multiplica los 7 que están debajo de los 3 por los 4 que están encima de los 9, y serán 28, los cuales 28 vuelve a multiplicar por los 2 que están encima de los 5 y serán 56. Los cuales 56 serán el segundo número. Después, vuelve a multiplicar con los 9, que están debajo de los 4, los 2 que están encima de los cinco y serán 18, los cuales vuelve a multiplicar por tres que están encima de los 7 y serán 54. Los cuales son el tercer número. Si quieres ver si es verdad mira cuánto son los dos quintos de sesenta y hallarás que son 24. Asimismo hallarás que los tres séptimos de 56 son 24 y que los 4 novenos de 54 son 24, como lo veis por ejemplo.

A partir del problema anterior, se diseñó una actividad consistente en la realización de las tareas siguientes:

- Tarea 1: Se proporcionaba a los estudiantes el enunciado del problema en forma simplificada utilizando lenguaje moderno y se les pedía que lo resolvieran por cualquier método.
- Tarea 2: Se proporcionaba a los estudiantes la solución original del problema utilizando lenguaje moderno y se les pedía su opinión sobre dicha solución, que compararan su solución con la original y que explicaran cuál de las dos soluciones consideraban mejor y en qué sentido.
- Tarea 3: Se pedía a los estudiantes que dieran una versión general del enunciado y una regla general para resolverlo basada en la solución original.

En términos del modelo MKT descrito por Ball, Thames y Phelps (2008), las tareas 1 y 3 están relacionadas principalmente con aspectos matemáticos y, por tanto, se enmarcan en el dominio SMK (*Subject Matter Knowledge*). Por su parte, la tarea 2 se enmarca en el dominio PCK (*Pedagogical Content Knowledge*).

La actividad se llevó a cabo durante el curso 2017-2018 con los 48 estudiantes del Máster on-line en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato de la Universidad Internacional de la Rioja, dentro de la asignatura "Didáctica de la aritmética y el álgebra" por lo que el estudio abordado es de tipo censal. La edad de los participantes variaba entre los 25 y los 56 años (media 37,7 y desviación típica 7,9) y la mayor parte de ellos (91,7%) tenía al menos 6 meses de experiencia enseñando matemáticas a nivel de secundaria. La Tabla 3 recoge información contextual sobre los participantes.

Tabla 3. Información sobre los participantes

Sexo		Nacionalidad				Formación		
Hombre	Mujer	España	Colombia	Ecuador	México	STEM	Educación	Otros
52%	48%	17%	44%	37%	2%	61%	35%	4%

El análisis realizado es de carácter exploratorio y descriptivo y se centra en el análisis de los resultados obtenidos en la realización de las tareas 1 y 3. En concreto, ponemos el foco en tres variables: el nivel de algebrización (NA) de la solución de los estudiantes en la Tarea 1, el tipo de generalización (TG) evidenciado en la respuesta a la Tarea 3 y el tipo de lenguaje (TL) utilizado en la respuesta de la Tarea 3. Para el estudio de la variable NA se han utilizado los niveles descritos en la Tabla 2, para el estudio de la variable TG se han utilizado las categorías presentadas en la Tabla 1 y, finalmente, para la variable TL distinguimos entre lenguaje natural o algebraico.

RESULTADOS

En primer lugar vamos a analizar el nivel de algebrización de las respuestas de los alumnos a la Tarea 1 (ver Tabla 2). En la Tabla 4 se muestran las frecuencias absolutas de cada uno de los valores de la variable NA. Se evidencia que la mayoría de las respuestas (aproximadamente el 71%) se reparten entre el Nivel 1 (proto-algebraico incipiente) y el Nivel 4 (uso de parámetros).

Tabla 4. Niveles de algebrización de las respuestas

NA	Número de respuestas
Nivel 0	3
Nivel 1	19
Nivel 2	5
Nivel 3	6
Nivel 4	15

La mayor parte de las respuestas clasificadas en el Nivel 1 involucran la definición y el uso de incógnitas en situaciones relacionadas con la proporcionalidad, pero sin llegar a resolver ningún tipo de ecuación. En la Figura 1 puede verse un ejemplo típico de respuesta con este nivel de algebrización. En ella se definen y emplean incógnitas pero se utilizan únicamente para representar simbólicamente datos desconocidos.

Sean x el primer número
y el segundo número
z el tercer número
Cumpliendo la siguiente condición
$\frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y = \frac{4}{9}z$
$m.c.m.de\ (2,3,4) = 12$
Por ende, a cada termino se debe convertir en proporcionalidad directa al multiplicar por $\left(\frac{1}{12}\right)$ para obtener fracciones unitarias

$$\left(\frac{1}{12}\right)\frac{2}{5}x = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{3}{7}y = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{4}{9}z$$
$$\frac{x}{30} = \frac{y}{28} = \frac{z}{27}$$

Como es una proporcionalidad directa se tiene que
$x = 30 \qquad y = 28 \qquad z = 27$

Figura 1. Ejemplo de respuesta con nivel 1 de algebrización

Por su parte, aquellas respuestas clasificadas en el Nivel 4 se corresponden con la utilización de parámetros. En la Figura 2 se muestra un ejemplo típico de este tipo de respuesta. En ella se introduce un parámetro que, sin embargo, no juega ningún papel significativo en el proceso de resolución del problema.

Tenemos 3 incógnitas por 2 restricciones, por lo que se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un grado de libertad. Asumimos $x=\lambda$ como grado de libertad y aislamos y y z en las ecuaciones:

$$y = \frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}\lambda = \frac{14}{15}\lambda$$

$$z = \frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}\lambda = \frac{18}{20}\lambda = \frac{9}{10}\lambda$$

Si sustituimos los valores obtendremos la solución:

$$(x,y,z) = (\lambda, \frac{14}{15}\lambda, \frac{9}{10}\lambda) = \lambda\cdot(1, \frac{14}{15}, \frac{9}{10})$$

Figura 2. Ejemplo de respuesta con nivel 4 de algebrización

Aunque aparecen de forma casi testimonial, es interesante señalar que existen respuestas clasificadas en el Nivel 0. Un ejemplo aparece en la Figura 3. Observamos que, dejando de lado el grado de corrección o adecuación de la respuesta, no aparece ningún tipo de lenguaje simbólico y las operaciones realizadas se efectúan con números particulares.

$\frac{2}{5} = \frac{3}{7}$	$\frac{3}{7} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} = \frac{2}{5}$
$(2)(7) = (3)(5)$	$(3)(9) = (7)(4)$	$(4)(5) = (2)(9)$
$(14)\frac{4}{9} = (15)\frac{4}{9}$	$(27)\frac{2}{5} = (28)\frac{2}{5}$	$(20)\frac{3}{7} = (18)\frac{3}{7}$
$\frac{56}{9} = \frac{60}{9}$	$\frac{54}{5} = \frac{56}{5}$	$\frac{60}{7} = \frac{54}{7}$
$(9)\frac{56}{9} = (9)\frac{60}{9}$	$(5)\frac{54}{5} = (5)\frac{56}{5}$	$(7)\frac{60}{7} = (7)\frac{54}{7}$
$56 = \mathbf{60}$	$54 = \mathbf{56}$	$60 = \mathbf{54}$

Los números son 60, 56 y 54 **Verificación**

$60(\frac{2}{5}) = \mathbf{24}$ $\quad 56(\frac{3}{7}) = \mathbf{24}$ $\quad 54(\frac{4}{9}) = \mathbf{24}$

Figura 3. Ejemplo de respuesta con nivel 0 de algebrización

Por último, en torno a un 23% de las respuestas se engloban en los niveles 2 y 3 de algebrización. La diferencia fundamental entre ambos niveles radica, tal y como se muestra en la Figura 4, en que en el Nivel 3 se trabaja de manera conjunta con un sistema de ecuaciones mientras que en el Nivel 2 las tres ecuaciones se tratan independientemente.

Números ¿?	Expresión general	Expresiones en función de "x"	Números
Primero x	$\frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y = \frac{4}{9}z$	$x = \frac{1}{1}x$	$x = 60$
Segundo y		$y = \frac{2}{5}x\cdot\frac{7}{3} = \frac{14}{15}x$	$y = \frac{14}{15}\cdot 60 \;\therefore\; y = 56$
Tercero z		$z = \frac{2}{5}x\cdot\frac{9}{4} = \frac{18}{20}x$	$z = \frac{18}{20}\cdot 60 \;\therefore\; z = 54$

1) $14x - 15y = 0$

2) $18x - 20z = 0$

3) $27y - 28z = 0$

Resolviendo por Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} 14 & -15 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{14} & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{135}{7} & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Figura 4. Respuesta con nivel 2 de algebrización (izda.) y fragmento de respuesta con nivel 3 (dcha.)

Nos centramos ahora en el análisis de los resultados obtenidos en la Tarea 3. En primer lugar, señalamos que, de los 48 estudiantes, 39 proporcionaron algún tipo de generalización. Además, de estos 39, 24 proporcionaron una generalización conjunta del enunciado y del procedimiento de resolución, mientras que los otros 15 solo fueron capaces de generalizar el proceso de resolución pero no el enunciado.

Siendo tres cantidades **X; Y; Z** proporcionales entre sí, de forma que:

$2/5\,\mathbf{X} = 3/7\,\mathbf{Y} = 4/9\,\mathbf{Z}$

Es posible encontrar dichas cantidades multiplicando el denominador de cada fracción con los numeradores de las otras dos fracciones.

Figura 5. Ejemplo de generalización del proceso de resolución pero no del enunciado

Un ejemplo interesante de este hecho lo vemos en la Figura 5. Podemos observar cómo, desde el punto de vista de la generalización, el enunciado es idéntico al propuesto, salvo por la introducción de símbolos para referirse a las cantidades desconocidas. Sin embargo, en la parte correspondiente a la solución sí se aprecia una cierta generalización al utilizar el alumno la expresión genérica “cada fracción”.

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias absolutas de cada uno de los valores de la variable TG (ver Tabla 1).

Tabla 5. Tipos de generalización de las respuestas

TG	Número de respuestas
ECP	24
ERA y ECP	12
ECP y C	2
ERA y C	1

En la práctica totalidad de las respuestas (todas menos una) se dan evidencias de la aparición del fenómeno ECP (eliminación de casos particulares) que, en esta situación concreta se corresponde con la sustitución de las tres fracciones del enunciado por tres fracciones cualesquiera. De hecho, en la mayoría de dichas respuestas este es el único tipo de generalización que puede apreciarse. En la Figura 6 se muestra un ejemplo.

Halla 3 números tales que al multiplicar cada uno de ellos por una fracción irreducible, se obtenga el mismo resultado.

Si las tres fracciones por las que multiplicamos los números x, y, z son, respectivamente, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, los tres números buscados se obtendrán de la siguiente forma:

$$x = b \cdot c \cdot e; \qquad y = a \cdot d \cdot e; \qquad z = a \cdot c \cdot f$$

Figura 6. Ejemplo del fenómeno ECP

En 12 casos nos encontramos una combinación de los fenómenos ERA y ECP. Es decir, no solo se consideran fracciones arbitrarias, sino que también se amplía el número de fracciones del enunciado; tal y como se ilustra en la Figura 7.

a.- Enunciado general.

Dadas las siguientes n fracciones $\frac{a_i}{b_i}$ $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

halla n números naturales x_i $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

tales que verifiquen $\frac{a_i}{b_i} x_i = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} x_{i+1}$ $\quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

b.- Resolución general. $x_i = b_i \cdot \prod_{\forall j \neq i} a_j \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Figura 7. Ejemplo de combinación de los fenómenos ERA y ECP

Por último, aunque con una frecuencia escasa (3 estudiantes) cabe señalar la aparición del fenómeno de Continuación. Se establece un patrón entre los numeradores y denominadores de las fracciones del enunciado y se repite dicho patrón para generar nuevos casos. En la Figura 8 se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.

> Considera las fracciones x/(x+3), (x+1)/(x+5), (x+2)/(x+7). Ahora, toma el x+3 de debajo del x y multiplícalo por el x+1 que hay sobre el x+5 y por el x+2 que hay sobre el x+7. El resultado es el primer número buscado, a. Después, multiplica el x+5 de debajo del x+1 por x+2 y por el x que hay sobre el x+3. Así obtienes el segundo número, b. Por último, vuelve a multiplicar el x+7 que hay bajo el x+2 por el x que hay sobre el x+3 y por el x+1 que hay sobre el x+5. Éste es el tercer número, c.

Figura 8. Ejemplo del fenómeno de Continuación

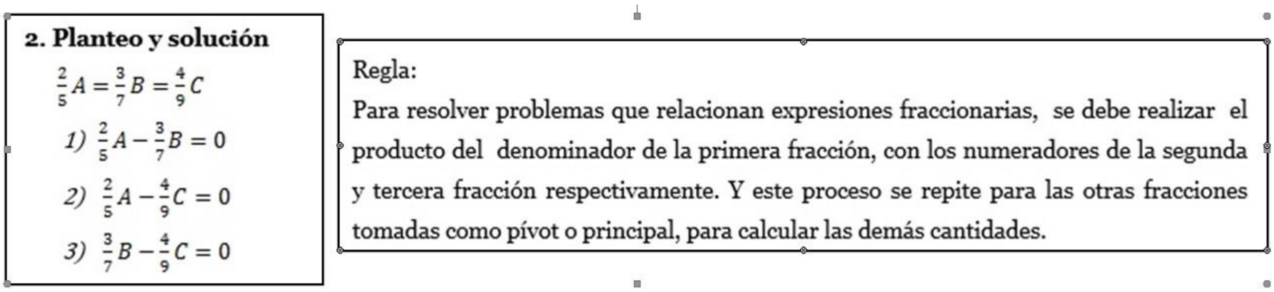
Para terminar el análisis vamos a estudiar la posible relación entre la variable NA y las variables TG y TL. Para ello, como es natural, nos centramos de nuevo únicamente en los 39 estudiantes que proporcionaron algún tipo de generalización. Como hemos visto, la mayor parte de las acciones relacionadas con la generalización que han sido detectadas (36 de las 39) tienen que ver solo con los fenómenos ERA y ECP. Para facilitar el análisis y mejorar la significatividad desde el punto de vista estadístico, hemos agrupado los valores de la variable NA en tres grupos: aritmético (correspondiente al nivel 0), proto-algebraico (correspondiente a los niveles 1 y 2) y algebraico consolidado (correspondiente a los niveles 3 y 4). En la Tabla 6 se muestran los datos correspondientes. Respecto al comportamiento de la variable TL, se observa un gran equilibrio entre el número de respuestas que usan solo lenguaje natural y el de las que incluyen lenguaje algebraico.

Tabla 6. Relación entre la variable NA y las variables TG y TL

		TG		TL	
		ERA y ECP	ECP	Natural	Algebraico
NA	Aritmético	1	2	1	2
	Proto-algebraico	9	7	11	5
	Algebraico consolidado	2	15	6	14

Para las variables NA y TG obtenemos un valor del estadístico V de Cramer de 0,452 con una significatividad mayor del 95%. Esto se corresponde con la existencia de una relación moderada entre ambas variables (Blaikie, 2003, p. 100). Así pues, observamos que entre los alumnos cuya solución al problema muestra un nivel de algebrización más alto se da una mayor tendencia a generalizar únicamente eliminando casos particulares.

En el caso de las variables NA y TL el valor del estadístico V de Cramer que se obtiene es de 0,425 con una significatividad prácticamente del 95%. Aunque es algo menor, sigue correspondiéndose con una relación moderada entre ambas variables. Se observa una relación directa entre el nivel de algebrización y el uso de lenguaje algebraico. Sin embargo, es destacable la existencia de 6 estudiantes cuyas soluciones se ubican en nivel algebraico consolidado y que pese a ello utilizan únicamente lenguaje natural en su generalización. En la Figura 9 se muestra uno de estos casos en el que se aprecia el alto nivel de algebrización en la solución dada frente al uso de lenguaje natural en la generalización.



2. Planteo y solución

$\frac{2}{5}A = \frac{3}{7}B = \frac{4}{9}C$

1) $\frac{2}{5}A - \frac{3}{7}B = 0$

2) $\frac{2}{5}A - \frac{4}{9}C = 0$

3) $\frac{3}{7}B - \frac{4}{9}C = 0$

Regla:

Para resolver problemas que relacionan expresiones fraccionarias, se debe realizar el producto del denominador de la primera fracción, con los numeradores de la segunda y tercera fracción respectivamente. Y este proceso se repite para las otras fracciones tomadas como pívot o principal, para calcular las demás cantidades.

Figura 9. Fragmento de la solución (izda.) y fragmento de la generalización (dcha.)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Godino et al. (2015) señalan que los niveles de algebrización 0 a 3 son propios de la Educación Primaria, siendo los que van del 4 en adelante propios de la Educación Secundaria. En nuestro trabajo hemos visto que, pese a que se trataba de estudiantes con experiencia en Educación Secundaria, únicamente el 31% de las soluciones dadas por los participantes en el estudio se ubicaban en el nivel 4 de algebrización. En un estudio similar llevado a cabo con futuros profesores de matemáticas de Secundaria, Burgos et al. (2017) tampoco encontraron respuestas de nivel estrictamente superior al 3. Este fenómeno quizás pueda deberse a que el enunciado del problema se dé en un ámbito puramente aritmético. También podría ser indicativo de la existencia de carencias en el dominio SMK (Ball et al., 2008). En este sentido podría resultar de interés analizar la posible influencia de la formación inicial (Tabla 3) de los participantes en sus respuestas.

Teniendo en cuenta el tipo de problema propuesto, que según la taxonomía de Ellis (2007) tiene principalmente que ver con la acción de extender, se han identificado la mayor parte de los fenómenos descritos por esta autora. Sin embargo, es destacable que la mitad de los alumnos no son capaces de proporcionar una generalización (sea del tipo de que sea) conjunta del enunciado y la solución. Más aún, 9 alumnos no son capaces de dar ningún tipo de generalización. A este respecto es interesante señalar que algunos estudiantes (ver Figura 5) identifican la generalización con la mera introducción de símbolos para denotar las cantidades desconocidas. Por otro lado, vemos que para prácticamente todos los alumnos la generalización pasa por la eliminación de casos particulares más que por la extensión del rango de aplicabilidad. Las creencias, concepciones y expectativas de los estudiantes en torno a la generalización (Strachota, 2016) pueden tener un papel importante en la explicación de este fenómeno.

Se ha descubierto una relación significativa, aunque moderada, entre el nivel de algebrización de las respuesta al problema y el lenguaje utilizado para expresar la generalización. De hecho se da una relación positiva entre ambas variables. Esto ilustra el hecho de que uno de los principales usos de las variables se da en la generalización (Usiskin, 1988). Además este hecho no es sorprendente si tenemos en cuenta que el tipo de lenguaje utilizado es uno de los rasgos definitorios de los niveles descritos por Godino et al. (2015). También resulta interesante señalar que en algunos casos (ver Figura 6, por ejemplo) el tipo de lenguaje utilizado en la generalización del enunciado es diferente al utilizado en la generalización del procedimiento de resolución.

Por otro lado también se ha constatado la existencia de una relación entre el nivel de algebrización de la respuesta y el tipo de generalización. Sin embargo, en este caso la relación se produce en sentido inverso. Es decir, un alto nivel de algebrización parece implicar una generalización menos completa en el sentido de que involucra solo la eliminación de casos particulares sin la ampliación del rango de aplicabilidad. De las 17 respuestas clasificadas en los niveles de algebrización 3 y 4, sólo 2 mostraron rasgos de ERA y ECP, mientras que entre las 16 englobadas en los niveles 1 y 2, este número se elevó hasta 9.

En este sentido, existen otros trabajos en los que se constata una cierta independencia entre la capacidad para usar el lenguaje algebraico y la generalización. Por ejemplo, Zazkis y Liljedahl (2002, p. 400) señalan que "existe un desajuste entre la capacidad de los alumnos de expresar la generalidad verbalmente y su habilidad para utilizar el lenguaje algebraico de forma cómoda". Sin embargo, debemos indicar que el trabajo citado se llevó a cabo con maestros de primaria en formación en un contexto de generalización de patrones, mientras que nosotros trabajamos con profesores de Secundaria en un ámbito aritmético. Además de esto, también hay que tener en cuenta que existen trabajos que apuntan conclusiones en el sentido contrario. Por ejemplo, Richardson, Berenson y Staley (2009) realizaron un estudio en el que la mayor parte de los futuros maestros participantes fueron capaces de expresar sus generalizaciones utilizando notación algebraica.

Finalmente, hemos visto que el problema planteado ha podido ser generalizado de forma relativamente satisfactoria por una amplia mayoría de los participantes (39 de 48). Pensamos que con este trabajo ilustramos la utilidad de trabajar la generalización mediante el uso de problemas extraídos de fuentes históricas. De hecho, los propios autores de textos antiguos parecían partir de la idea de que a partir de la realización de problemas concretos era factible obtener métodos generales. Así lo expresaba, por ejemplo, un maestro chino del siglo III (Cullen, 1996, p. 74):

> Un conocimiento profundo de las categorías se pone en evidencia cuando las palabras son sencillas pero su aplicación es amplia. Cuando te preguntas por una categoría y eres capaz de comprender una miríada de materias, eso es lo que yo llamo entender mi vía.

En cualquier caso, pensamos que el trabajo reflexivo sobre este tipo de problemas y el diseño de actividades basadas en ellos pueden producir importantes beneficios en la formación de profesorado (Furinghetti, 2007).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barinaga, J. (1932). Sobre los ejemplos de Fr. Juan de Ortega, *Revista Matemática Hispano-Americana*, *7*, 194-207.

Blaikie, N. (2003). *Analyzing quantitative data: From description to explanation*. Londres, Reino Unido: Sage.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). Gijón: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Carabias, A. M. (2012). *Salamanca y la medida del tiempo*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D. y Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT*, *6*(2), 164-191.

Cullen, C. (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou Bi Suan Jing*. New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Ellis A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 131-143.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM*, *8*, 117-142.

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Madrid, M. J. (2016). *Los Libros de Aritmética en España a lo Largo del Siglo XVI* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Métin, F. (2018). The arithmetic of Juan de Ortega: equations without algebra. En E. Barbin, J-P. Guichard, M. Moyon, P. Guyot, C. Morice-Singh, F. Métin, … y G. Hamon (Eds.), *Let History into the Mathematics Classroom* (pp. 59-73). Cham, Suiza: Springer.

Mosvold, R., Jakobsen, A. y Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, *23*(1), 47-60.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría*. León: Joannnes Trinxer.

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143-150). Granada: Comares.

Rey Pastor, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid: A. Medina.

Richardson, K., Berenson, S. y Staley, K. (2009). Prospective elementary teachers' use of representation to reason algebraically. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2-3), 188–199.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing generalization. *IMVI: Open Mathematical Education Notes*, *6*(1), 41-55.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C-K., Niss, M., ... y Siu, M-K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, EE.UU.: NCTM.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379–402.

[xviii] Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Grupo S36_17D).

IDENTIFICACIÓN Y USO DE LOS ATRIBUTOS DE LOS POLÍGONOS POR ESTUDIANTES DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: RELACIONES IMPLICATIVAS

Identification and use of polygons attributes by third grade students of primary school: implicative relations

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos. Participaron 59 estudiantes que respondieron a un cuestionario sobre polígonos diseñado ad hoc. *El cuestionario incluía tareas de reconocer atributos críticos de polígonos, identificar el atributo común de un conjunto de polígonos, clasificar polígonos y dibujar polígonos con condiciones. Se usó el software C.H.I.C. para el análisis de los datos. Los resultados muestran dos ideas. Primero, la existencia de un proceso progresivo en cómo los estudiantes construyen el concepto de polígono; y segundo, la dependencia jerárquica entre los registros semióticos, desde el registro no-discursivo -dibujar- al registro discursivo -explicar- en la comprensión de dicho concepto en el proceso de identificar y usar diferentes atributos de los polígonos.*

Palabras clave: *Pensamiento geométrico, aprehensiones, registro discursivo, registro no-discursivo.*

Abstract

The aim of this research is to characterize how third grade's students identify and use the attributes of polygons. 59 students participated who answered a test about polygons designed ad hoc. *The questionnaire included tasks about recognizing critical attributes of polygons, identifying the common attribute of a polygons' set, classifying polygons and drawing polygons with certain attributes. The software C.H.I.C. was employed to analyse the data. Results show two ideas. Firstly, the existence of a progressive process on how students construct the concept of polygon; and secondly, the hierarchical dependence between semiotic registers, from the non-discursive register -drawing- to the discursive register -explaining- in the understanding of this concept in the process of identifying and using different attributes of polygons.*

Keywords: *Geometrical thinking, apprehensions, discursive register, non-discursive register.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es apoyar la comprensión de los conceptos geométricos, y de los razonamientos apoyados en estos conceptos. Uno de los conceptos geométricos clave en la educación primaria es el de polígono, pues el reconocimiento de los atributos relevantes, que caracterizan su definición, es fundamental para avanzar en la comprensión de los tipos de polígonos. Diversos autores (Battista, 2007; Clements y Battista, 1992; Satlow y Newcombe, 1998) indican que los estudiantes inicialmente reconocen perceptualmente los polígonos por su similitud, continúan con el reconocimiento de sus atributos y finalmente, son capaces de usar su definición formal. En este desarrollo, reconocer los atributos de un polígono es un aspecto relevante para comprender el concepto de polígono (Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh y Tsamir, 2011; Yesil-Dagli y Halat,

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Identificación y uso de los atributos de los polígonos por estudiantes de tercero de Educación Primaria: relaciones implicativas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 213-222). Valladolid: SEIEM.

2016). Si bien la definición de polígono se entiende como una porción del plano limitado por líneas rectas, lo que incluiría tanto a los polígonos simples como a los complejos, en esta investigación trabajaremos con los polígonos simples, es decir, una porción de plano delimitada por líneas rectas que no se cruzan. Por lo que los atributos relevantes de esta definición son: figura cerrada, líneas rectas y no cruzadas. Sin embargo, la existencia de otros atributos no-relevantes, los cuales no caracterizan la definición de polígono, permiten tener en cuenta cómo los estudiantes los usan para razonar y decidir si un polígono pertenece o no a una determinada clase de polígonos (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2018). Algunos de estos atributos no-relevantes son la concavidad/convexidad, el número de lados, la existencia de ejes de simetría, el paralelismo de los lados en los cuadriláteros, o la medida de la longitud de los lados o de los ángulos en los triángulos.

Algunas investigaciones previas indican que la enseñanza de la geometría, en los primeros años, se basa en reconocer y nombrar figuras familiares sin llegar a establecer relaciones entre ellas (Petridou, Elia y Gagatsis, 2015; Sarama y Clements, 2009). Sin embargo, tenemos menos información sobre cómo los estudiantes usan los atributos reconocidos para razonar con ellos (por ejemplo, para establecer relaciones entre las figuras). Esta investigación intenta aportar información sobre este aspecto.

MARCO TEÓRICO

Duval (1998) caracteriza el aprendizaje de la geometría a través de la coordinación entre las aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa considerando los diferentes registros de representación. La *aprehensión perceptiva* se caracteriza por la identificación simple de una configuración, la *aprehensión discursiva* es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas); y la *aprehensión operativa* es la capacidad de modificar una configuración, por ejemplo, cambiando la posición u orientación de esta, para resolver un problema geométrico.

Además, en el proceso de reconocer atributos y usarlos para razonar, es necesario coordinar al menos dos sistemas semióticos de representación, los registros discursivos (oral o escrito) y los registros no-discursivos (icónicos: dibujos y bocetos a mano alzada; y los no-icónicos: figuras geométricas construidas con herramientas) (Duval, 2017). Para Duval (2006), la comprensión de las figuras geométricas se apoya en la coordinación de estos registros semióticos (discursivos y no-discursivos) mediante la transformación de dichos registros. Según Duval (2017), existen dos tipos de transformación de los registros semióticos: tratamiento y conversión. El tratamiento es la transformación de los registros semióticos dentro del mismo registro, por ejemplo, transformando una figura que no es un polígono en un polígono modificando los atributos necesarios. Mientras que la conversión es la transformación de un registro semiótico a otro, del discursivo al no-discursivo, sin cambiar los atributos que denotan, por ejemplo, cuando se aporta una descripción de una figura y los estudiantes tienen que dibujarla. O al contrario (del no-discursivo al discursivo), por ejemplo, ante el dibujo de un triángulo que tiene dos lados iguales (registro no-discursivo) asociarlo con la definición de triángulo isósceles (registro discursivo).

Para poder realizar estas transformaciones el estudiante necesita realizar una deconstrucción dimensional para reconocer las unidades figurativas de menor dimensión que constituyen la figura (Duval, 2017). La deconstrucción dimensional permite el reconocimiento perceptivo de una figura en una configuración de unidades figurativas de dimensiones más pequeñas, por ejemplo, identificar cómo son los lados (1D) de un triángulo (2D). La deconstrucción dimensional permite establecer relaciones entre los atributos de los polígonos para categorizarlos.

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

Los participantes de esta investigación fueron 59 estudiantes (37 chicos y 22 chicas) de tercer curso de educación primaria (9 años), pertenecientes a dos clases de un colegio público de la provincia de Alicante. Los estudiantes participaron en un módulo de enseñanza diseñado *ad hoc* centrado en los contenidos específicos del currículo de tercero de primaria (identificar y nombrar polígonos atendiendo al número de lados, identificar la concavidad/convexidad de los polígonos y reconocer regularidades y simetrías, entre otros), además de otros propios de cuarto de primaria (identificar tipos de triángulos según sus lados y/o ángulos, e identificar tipos de cuadriláteros según su paralelismo). Esto permitió generar contextos en los que los estudiantes pudieran razonar con los atributos de los polígonos.

Instrumento y procedimiento

El instrumento de investigación consistió en un cuestionario de seis tareas relacionadas con las figuras geométricas que favorecían la coordinación de las aprehensiones mediante las transformaciones de los registros semióticos y los procesos de deconstrucción dimensional de los estudiantes. El cuestionario fue resuelto por los participantes al finalizar la instrucción.

La instrucción pretendía favorecer la comprensión de los polígonos a través de la identificación de los atributos y el uso de estos para describirlos; así como, la relación entre estos para determinar la pertenencia a una clase de polígono, identificando los atributos que comparten, para clasificarlos usando definiciones inclusivas (por ejemplo, indicando que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, con lo que los triángulos equiláteros serían un caso particular de los triángulos isósceles).

El *cuestionario* estaba formado por 6 tareas con un total de 12 ítems agrupados en cuatro focos*:* reconocer atributos relevantes de polígonos, identificar el atributo común de un conjunto de polígonos, clasificar polígonos determinando la pertenencia de un polígono a una clase de polígono y dibujar polígonos con determinados atributos. En las tareas 2, 3, 4, 5 y 6 empleamos la metáfora de la *Máquina de Dibujar* (MD), desarrollada por Battista (2012), la cual dibujaba figuras geométricas con algunas condiciones (ejemplos) y no podía hacer figuras que no cumplieran estas condiciones (no-ejemplos).

- Reconocer atributos relevantes de polígonos, tarea 1 (ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e)

En el ítem 1a, los estudiantes deben reconocer de un conjunto de 15 figuras geométricas 2D (8 polígonos y 7 no-ejemplos de polígonos) las figuras que son polígonos (figuras planas cerradas con lados rectos y no cruzados). En los ítems 1b, 1c, 1d y 1e, los estudiantes tienen que identificar los atributos que deben cambiarse en un no-ejemplo de polígono para transformarlo en un polígono, aportar la explicación de esta transformación y dibujar el polígono. Los no-ejemplos de polígonos presentados fueron: una figura abierta con lados curvos y cruzados (1b); una figura abierta con un lado curvo (1c) (Figura 1); una figura cerrada con lados cruzados y un lado curvo (1d); y una figura abierta con lados cruzados (1e).

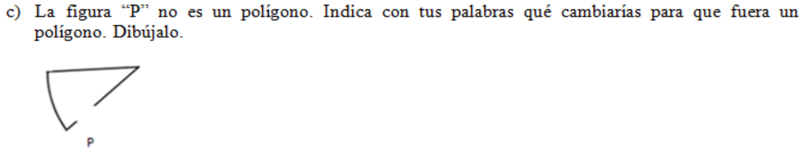


Figura 1. Ítem 1c

- Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos, tarea 2, 3 y 4 (ítems 2, 3 y 4a)

En las tareas 2, 3 y 4 se presentan dos conjuntos de polígonos, un grupo formado por polígonos que tienen un atributo común, y otro grupo de figuras que no cumplen dicho atributo, y los estudiantes deben reconocer cuál es el atributo común, nombrarlo y dibujar otro polígono que pueda estar en ese grupo (ejemplo) y otro que no pueda estar (no-ejemplo). En la tarea 2 se presenta un conjunto de polígonos cóncavos (polígonos con al menos un ángulo interno mayor de 180º) y un conjunto de polígonos convexos (polígonos con todos sus ángulos internos menores de 180º) (Figura 2); en la tarea 3 se presenta un grupo de polígonos con seis lados y otro grupo de polígonos con un número de lados diferente a seis; y en la tarea 4, en el ítem 4a, se presenta un grupo de polígonos con un eje de simetría y otro grupo con polígonos sin ejes de simetría.

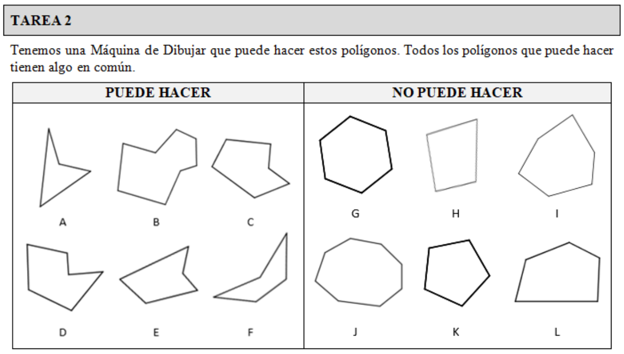


Figura 2. Tarea 2, sobre polígonos cóncavos y convexos

- Clasificar polígonos: determinando la pertenencia a una clase de polígono, tarea 4, 5 y 6 (ítems 4b, 5 y 6b)

Para clasificar polígonos, los estudiantes tienen que identificar el atributo común del conjunto de polígonos (en el registro no-discursivo) o de la descripción (en el registro discursivo), y determinar si un polígono pertenece o no a la clase. Consideramos que se clasifican los polígonos cuando realizan clasificaciones inclusivas. Por ejemplo, el ítem 4b, de la tarea 4, se basa en considerar el rombo –figura con dos ejes de simetría- como un ejemplo de polígono con un eje de simetría. La tarea 5 se basa en considerar un triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles (Figura 3); y el ítem 6b, de la tarea 6, en razonar si un paralelogramo –cuadrilátero con lados opuestos paralelos dos a dos- es un ejemplo de un trapecio -cuadrilátero con dos lados paralelos-.

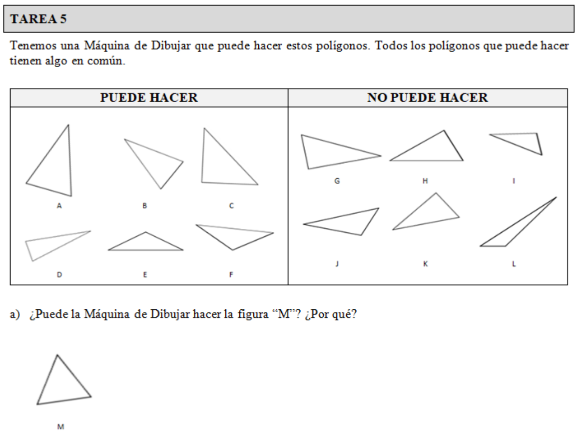


Figura 3. Tarea 5, considerando un triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles

- Dibujar polígonos con determinados atributos, tarea 6 (ítem 6a)

El ítem 6a, de la tarea 6, consiste en dibujar tres cuadriláteros con dos lados paralelos y tres cuadriláteros que no cumplan estas condiciones (Figura 4).

TAREA 6

Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer:

Cuadriláteros (polígonos de cuatro lados) **con dos lados paralelos**.

a) Dibuja tres cuadriláteros que sí pueda hacer y tres cuadriláteros que no pueda hacer.

PUEDE HACER (Cuadriláteros con dos lados paralelos)	**NO PUEDE HACER**
1.	1
2	2
3	3

Figura 4. Tarea 6, que requiere dibujar polígonos con determinadas condiciones

Análisis

Para analizar las respuestas del cuestionario generamos 40 variables para los 12 ítems. Asignamos las iniciales *Po* para indicar que pertenecen al cuestionario posterior al experimento de enseñanza, y añadimos una letra mayúscula para indicar el número de la tarea siguiendo el orden alfabético, por ejemplo, la tarea 1 es la A, la tarea 4 es la D.

En la tarea 1 (A) (23 variables), a cada figura geométrica del ítem 1a (Aa) se le asignó un número, por ejemplo, a la tercera figura se le asignó la variable Aa3. En los ítems 1b (Ab), 1c (Ac), 1d (Ad) y 1e (Ae) se le asignaron dos variables a cada ítem, uno para la explicación dada (el registro discursivo) (Ab1) y otro para la realización del dibujo (el registro no-discursivo) (Ab2).

En la tarea 2 (B), 3 (C) e ítem 4a (D), consideramos cuatro variables por tarea (12 variables): explicación del atributo común y no-común identificado, y el dibujo de un ejemplo que cumpla y otro ejemplo que no cumpla el atributo común. Asignamos la letra minúscula *a* para el atributo común que la MD puede hacer y la letra *b* para el atributo que no puede hacer. Además, añadimos el número *1* para indicar la explicación del atributo que puede y no puede hacer la MD, y el *2* para indicar el dibujo de la figura que la MD puede o no puede hacer generado por el estudiante. Por ejemplo, la variable PoBb1 indica la explicación del atributo que la MD no puede hacer, y PoBa2 indica el dibujo del polígono que cumple el atributo común del conjunto de polígonos que la MD puede hacer.

A las tareas de clasificar polígonos, les asignamos una variable por cada uno de los 3 ítems (3 variables). Los ítems fueron: considerar un rombo como un ejemplo de un polígono con al menos un eje de simetría (Dc); un triángulo con tres lados iguales como un ejemplo de triángulo con dos lados iguales (E); y un paralelogramo como un ejemplo de un trapecio (cuadrilátero con dos lados paralelos) (Fc).

En la tarea 6, el ítem 6a (2 variables), asignamos una variable para dibujar tres cuadriláteros con dos lados paralelos (Fa) y otra variable para dibujar tres cuadriláteros que no tuvieran dos lados paralelos (Fb).

A cada variable le asignamos un valor de 1 o 0 según si el estudiante había realizado el ítem correctamente (1) o incorrectamente (0). Para el análisis implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008) empleamos el software C.H.I.C. (*Classification Hiérarchique, Implicative et Cohesitive*), versión 6.0 (Couturier, 2008). Los gráficos implicativos generados muestran las relaciones implicativas entre las variables, que dan un significado estadístico a expresiones como Z → V: si un estudiante realiza una variable Z, puede realizar la variable V. En la sección de resultados describimos las relaciones implicativas identificadas al 99% de significación. Esto significa que los estudiantes que hayan contestado correctamente la variable Z presentan una probabilidad al menos del 99% de contestar correctamente la variable implicada V.

RESULTADOS

El gráfico implicativo al 99% (Figura 5) de las respuestas al cuestionario relaciona 26 de las 40 variables. Este gráfico implicativo tiene dos ramas principales con un aspecto común: se inician con el reconocimiento de un rombo –cuadrilátero con dos ejes de simetría- como un ejemplo de polígono con un eje de simetría (PoDc) (clasificar polígonos). Estas dos ramas muestran cómo los estudiantes comprenden el concepto de polígono mediante el reconocimiento de los atributos relevantes (rama de la derecha), y cómo identifican y razonan con los atributos no-relevantes (rama de la izquierda).

Fuera de estas ramas quedan tres variables que no generan implicaciones: a partir de la descripción verbal de *un cuadrilátero con dos lados paralelos* dibujar tres ejemplos de cuadriláteros que cumplan estos atributos (PoFa, de la descripción verbal al dibujo); reconocer la simetría de los polígonos como un atributo común en un conjunto de polígonos y dibujar un polígono con este atributo (PoDa2, de un conjunto de polígonos, reconocer el atributo no-relevante común y dibujar un ejemplo); y, finalmente, reconocer que los triángulos tienen dos lados iguales como un atributo común en un conjunto de triángulos y explicar que un triángulo equilátero también puede ser un ejemplo de este conjunto (PoE). Estas tres variables, que no generan ninguna relación implicativa, se centran en reconocer atributos no-relevantes en un conjunto de figuras (simetría, e igualdad de lados en triángulos) y dibujar un ejemplo o generar una explicación de por qué un triángulo equilátero es un triángulo con dos lados iguales, así como realizar una conversión del registro discursivo al registro no-discursivo icónico en relación con el paralelismo en los cuadriláteros.

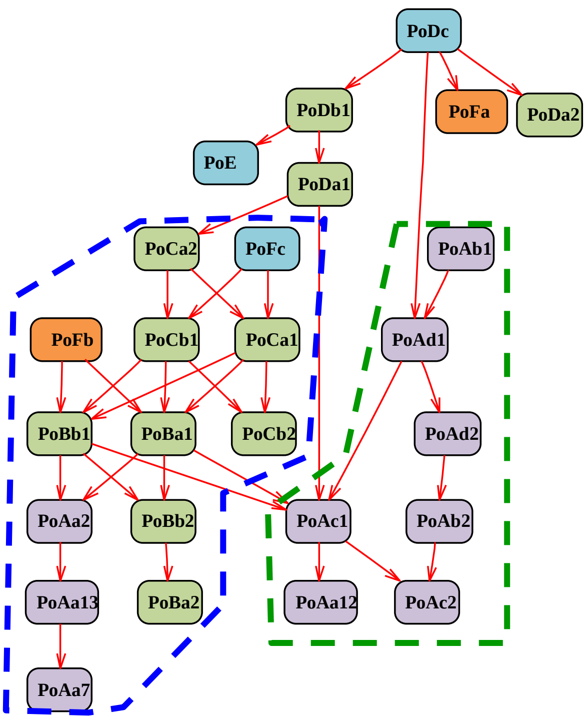


Figura 5. Gráfico implicativo al 99% de las variables del cuestionario tras el experimento de enseñanza

La comprensión del concepto de polígono

La rama implicativa de la derecha, rodeada con línea verde (Figura 5), muestra las relaciones que se establecen entre los atributos relevantes del concepto de polígono. Cuando un estudiante explica la transformación de una figura abierta con lados cruzados y curvados en un polígono (PoAb1), entonces puede explicar la transformación de una figura con lados cruzados y curvados en un polígono (PoAd1). Desde aquí, aparecen dos subramas, la primera muestra que cuando el estudiante es capaz de explicar la transformación de una figura similar a un triángulo, pero abierto y con un lado curvo, en un polígono (PoAc1), entonces puede reconocer que una figura de tres lados, pero con un lado curvo, no es un polígono (PoAa12). En la segunda subrama, se vinculan las implicaciones que indican que cuando un estudiante es capaz de explicar la transformación de un no-ejemplo de polígono en polígono (PoAb1, PoAd1, PoAc1), esto implica que es capaz de dibujar el polígono que se forma tras la transformación del no-ejemplo de polígono en polígono (PoAd2, PoAb2, PoAc2).

Una característica que define esta rama implicativa es que cuando los estudiantes explican cómo transforman una figura que no es un polígono en un polígono porque falta alguno o varios de los atributos relevantes, entonces pueden dibujar dicha transformación. Es decir, esta rama implicativa muestra cómo el registro discursivo está subordinado al desarrollo del registro no-discursivo-icónico.

Aumentando la complejidad en la comprensión de los polígonos: Identificar y razonar con atributos no-relevantes

La rama implicativa de la izquierda, rodeada con línea azul discontinua en la Figura 5, tiene tres inicios (PoFb, PoCa2 y PoFc). De estas tres variables, solo la referente a identificar que los polígonos tienen seis lados como el atributo común de un conjunto de polígonos y dibujar un ejemplo que cumpla este atributo (PoCa2) está vinculada a la parte superior del gráfico. Las otras dos variables son: dibujar tres cuadriláteros que no tengan dos lados paralelos (PoFb, de la descripción verbal al dibujo), y reconocer que un cuadrado, en posición no prototípica, cumple la descripción de cuadrilátero con dos lados paralelos (PoFc, coordinación de los registros discursivo y no-discursivo) para identificar el atributo común de la descripción (registro discursivo) y del ejemplo visual (registro no-discursivo), que permite al estudiante determinar la pertenencia del ejemplo dado a una clase de polígonos (cuadrilátero y paralelismo).

Así, esta rama se caracteriza por mostrar cómo los estudiantes empiezan a coordinar los registros discursivos (explicar) y no-discursivos (dibujar) al identificar diferentes atributos no-relevantes de los polígonos. Globalmente cuando los estudiantes explican el atributo no-relevante común de un conjunto de polígonos, implica que son capaces de dibujar un polígono que cumpla el atributo no-relevante identificado. Además, estas relaciones implicativas muestran una jerarquía entre los atributos no relevantes que son identificados y cómo se usan para razonar. La rama de la izquierda del gráfico implicativo muestra que el estudiante que identifica que un grupo de polígonos de seis lados tiene este atributo común (PoCa1) y/o explica que el otro grupo de polígonos no tiene este atributo común (PoCb1), implica que es capaz de dibujar ejemplos de polígonos que no tengan seis lados (PoCb2). Además, cuando se dan estas relaciones, implica que pueden explicar que la concavidad es un atributo común de un grupo de polígonos y la convexidad el atributo común del otro grupo de polígonos (PoBb1-convexos, PoBa1-cóncavos). Cuando los estudiantes son capaces de establecer estas relaciones, entonces pueden reconocer como ejemplos de polígonos diferentes polígonos con atributos no-relevantes pero que cumplan los tres atributos relevantes de los polígonos (figura cerrada, lados rectos y que no se crucen) (PoAa2-polígono cóncavo de ocho lados, PoAa13-polígono cóncavo de seis lados, PoAa7-polígono regular de siete lados). A su vez, quien explica que un grupo está constituido por polígonos cóncavos y/o explica que el otro grupo está compuesto por convexos, entonces es capaz de dibujar un ejemplo de polígono convexo (PoBb2) y cuando realiza esta acción, entonces es capaz de dibujar un ejemplo de polígono cóncavo (PoBa2).

En el gráfico implicativo (ver Figura 5) podemos observar que la identificación del atributo que comparte un conjunto de polígonos se inicia con la identificación del atributo común en grupos de polígonos cóncavos y convexos (PoBb1, PoBa1, PoBb2 y PoBa2). Además, la identificación del atributo tener o no 6 lados (PoCa2, PoCb1, PoCa1 y PoCb2), se relaciona con identificar si hay o no un eje de simetría (PoDb1, PoDa1). Es decir, el establecimiento de las diferentes implicaciones entre los atributos y la capacidad de explicar y dibujar depende del atributo.

Finalmente, el gráfico implicativo (ver Figura 5) muestra cómo el establecimiento de las relaciones inclusivas se apoya en el reconocimiento de los atributos relevantes de los polígonos (por ejemplo, PoAa12, PoAc2, PoAc1). El reconocimiento de las relaciones de inclusión se genera identificando el atributo común de un conjunto de polígonos (PoDa1 y PoDb1) y determinando la pertenencia a una clase de polígono (PoDc) o dibujando polígonos con determinados atributos (PoFa y PoFb). Así, identificar si un polígono pertenece o no a una determinada clase de polígono y dibujar ejemplos y no ejemplos de polígonos con determinados atributos se pueden considerar características en la comprensión de ciertas relaciones de inclusión entre los polígonos, que dependen de atributo considerado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos. Nuestros resultados muestran dos ideas relevantes para entender cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto de polígono. Primero, la existencia de un proceso de complejidad progresiva en la manera en la que los estudiantes comprenden el concepto de polígono. Esta comprensión se apoya en ser capaz de diferenciar los polígonos de las figuras que no lo son, reconociendo los atributos relevantes (figura plana delimitada por líneas rectas no cruzadas). Tras esto, se incorpora la capacidad de reconocer otros atributos no-relevantes, que es la base para poder categorizar diferentes grupos de polígonos y generar clasificaciones inclusivas (considerar un ejemplo de polígono como perteneciente a una clase determinada de polígonos) y que depende del atributo usado para clasificar (longitud de lados en los triángulos, ejes de simetría y lados paralelos en los cuadriláteros). La segunda idea es que, en cada uno de los dos momentos anteriores, tanto en la comprensión inicial de polígono y como en el aumento de la complejidad del concepto, los estudiantes presentan una dependencia jerárquica entre los registros semióticos, empezando por el registro no-discursivo –dibujar- y continuando con el registro discursivo – explicar.

En la comprensión inicial de polígono, el estudiante debe reconocer los atributos relevantes para determinar si es un ejemplo o no de polígono. Para ello, debe realizar una deconstrucción dimensional (Duval, 2017) de la figura geométrica identificando si sus lados son rectos, se unen en los vértices formando una figura cerrada y no se cruzan. La identificación de los atributos relevantes de un polígono se apoya en la coordinación de las aprehensiones a través de la transformación de los registros (conversión) (Duval, 2006), que se evidencia en los procesos de transformar ejemplos de no-polígonos en ejemplos de polígonos, ya que los estudiantes deben identificar el atributo de la figura que no cumple la condición para cambiarlo.

La segunda característica identificada es que la comprensión del concepto de polígono en los estudiantes de tercer curso de primaria se apoya en el registro no-discursivo, que se complementa con el discursivo. Por ejemplo, les resulta más fácil dibujar un polígono que cumpla el atributo común identificado que explicarlo. El enriquecimiento de la comprensión de polígono, que nuestros resultados muestran, se apoya en la capacidad de coordinar ambos registros para poder razonar sobre los atributos relevantes y no-relevantes.

Por otro lado, las implicaciones producidas en el gráfico implicativo al 99% de significación entre las variables pertenecientes a los cuatro focos, muestran que los estudiantes de tercer grado, a diferencia de los estudiantes de infantil (Clements et al., 1999), comienzan a realizar un análisis de los polígonos. Es decir, empiezan a reconocer los atributos relevantes y no-relevantes de los polígonos, los cuales condicionan sus acciones con los polígonos (Clements y Battista, 1992). Los atributos *ejes de simetría* y *paralelismo* han sido los atributos más complicados de reconocer y usar en las diversas tareas del cuestionario.

Estos resultados tienen implicaciones para la enseñanza en el sentido de definir como objetivos la relación entre los registros discursivos y no-discursivos, y considerar de manera explícita las relaciones implicativas identificadas en la planificación de la enseñanza y el diseño de las tareas considerando la variabilidad de los atributos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana (España) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (FPU2017-014).

Referencias

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, EE.UU.: Information Age.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Geometric Shapes: Building on Students' Reasoning.* Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York, EE.UU.: Macmillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212.

Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical Implicative Analysis: Theory and Applications* (pp. 41-53). Berlín, Alemania: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Londres, Reino Unido: Springer.

Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, *11*(2), 43-61.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative Analysis: Theory and Applications.* Berlín, Alemania: Springer.

Levenson, E., Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry: Theory, Research and Practical Perspectives.* Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Petridou, A., Elia, I. y Gagatsis, A. (2015). Preschool geometrical teaching practices and geometric thinking development: A case study. En G. Makrides (Pres.), *Proceedings of the European Association for Practitioner Research on Improving Learning* (pp. 223-238). Nicosia, Chipre: EAPRIL.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Satlow, E. y Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, *13*(4), 547-559.

Yesil-Dagli, U. y Halat, E. (2016). Young children's conceptual understanding of triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(2), 189-202.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS DE ALUMNOS DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE PORCENTAJES[xix]

Primary school students' semiotic conflicts in solving a percentage task

Burgos, M. y Godino, J. D.

Universidad de Granada

Resumen

Se presentan y analizan los resultados de una investigación de diseño, realizada en un contexto real de enseñanza con un grupo de 21 alumnos de sexto curso de primaria sobre los porcentajes. En una primera fase los alumnos estudian el tema con el profesor-tutor siguiendo un modelo didáctico tradicional, basado en el uso del libro de texto y orientado hacia un aprendizaje algorítmico. La segunda fase fue diseñada y puesta en práctica para identificar los conflictos cognitivos generados y su relación con los conflictos epistémicos sobre los significados de la proporcionalidad y los porcentajes implementados en la primera fase. La tercera fase se centra en el diálogo y justificación colectiva de las soluciones de una tarea de evaluación y la superación de los conflictos cognitivos. Como conclusión se observa que los alumnos no reconocen la relación de proporcionalidad establecida por medio de porcentajes y se señala la necesidad de potenciar las situaciones en las que aparecen involucrados porcentajes y relaciones de proporcionalidad.

Palabras clave: *proporcionalidad, porcentajes, Educación Primaria, conflictos epistémicos y cognitivos.*

Abstract

We present the results of a design research on learning percentages carried out in a real teaching context with 21 sixth grade students. In a first phase, the students with the teacher study the subject following a traditional didactic model based on the use of the textbook and oriented towards algorithmic learning. The second phase was designed to identify the students' cognitive conflicts and their relationships with the epistemic conflicts on the meanings of proportionality and percentages that were identified in the first phase. The third phase focuses on the collective discussion and justification of solutions of an assessment task and on overcoming the cognitive conflicts. We conclude that students do not recognize the proportionality relationship established by means of percentages and point out the need to promote situations involving percentages and proportionality relationships in order to provide meaning to the procedures and symbols used.

Keywords: *proportionality, percentages, Primary Education, epistemic and cognitive conflicts.*

INTRODUCCIÓN

El porcentaje es uno de los tópicos matemáticos más ampliamente usados en la vida diaria (Steen, 2001). Su diversidad de usos conlleva una extensa variedad de interpretaciones del significado de los porcentajes (Parker y Leinhardt, 1995). Además, constituye una noción relevante en el currículo de matemáticas en el ámbito educativo español, tanto en los niveles de educación primaria como posteriormente en educación secundaria obligatoria. Sin embargo, son frecuentes los errores de interpretación y uso del porcentaje; los estudiantes resuelven los problemas y ejercicios que involucran este concepto aplicando los algoritmos aprendidos, pero con un conocimiento conceptual deficiente, sin tener en cuenta sus diferentes representaciones y significados (Maz-Machado y Gutiérrez, 2008). Entre las razones que pueden justificar esta dificultad, cabe señalar que la enseñanza efectivamente implementada en la práctica esté sesgada hacia el aprendizaje

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM.

memorístico de algoritmos, como puede ser la multiplicación cruzada o regla de tres en situaciones de proporcionalidad, sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual de la proporcionalidad y los porcentajes (Lamon, 2007; Riley, 2010; Singh, 2000).

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación, iniciado en Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino (2018), cuyo objetivo es describir y relacionar entre sí los conflictos epistémicos y cognitivos detectados en el estudio de la proporcionalidad y porcentajes en educación primaria, así como investigar maneras de mejorar los aprendizajes. Informamos del diseño, implementación y resultados de una experiencia de enseñanza sobre porcentajes llevada a cabo con alumnos de sexto curso de educación primaria con la finalidad de:

- Describir sus conocimientos sobre el tema y detectar posibles conflictos semióticos en el proceso de aprendizaje, analizando con detalle los procedimientos, representaciones, argumentos y grado de generalización en las respuestas dadas a un problema sobre porcentajes.
- Sugerir posibles cambios en el diseño e implementación para mejorar el aprendizaje.

La investigación ha tenido lugar en un contexto real de clase que ha permitido revelar algunos fenómenos cognitivos y didácticos de interés.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo aplicamos algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) para plantear el problema e interpretar los datos recogidos sobre la experiencia implementada. Dos nociones claves del EOS son las de significado (entendido como sistema de prácticas) y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos. Ambas permiten describir la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional (o epistémica) como personal (o cognitiva).

El significado institucional (respectivamente, personal) de un objeto matemático se identifica con el sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza una institución (respectivamente, personal) para resolver los tipos de problemas de los que emerge el objeto en un momento dado. En las prácticas matemáticas intervienen diversos tipos de objetos; además de los conceptos y procedimientos en el EOS se consideran objetos matemáticos los diversos tipos de lenguajes, las propias situaciones–problemas que motivan la actividad matemática, las proposiciones (enunciados que requieren justificación) y los argumentos (que validan tanto las proposiciones como los procedimientos).

La noción de conflicto semiótico se entiende como "una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa" (Godino, 2002, p. 258). Con esta noción se pretende aportar una explicación de índole semiótica a las dificultades y limitaciones de los aprendizajes de los estudiantes y a los conflictos de significados en el proceso de selección y adaptación de los contenidos de enseñanza. Cuando la disparidad o desajuste se produce entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto o por un profesor) se dice que se trata de un conflicto (semiótico) epistémico, mientras que si la disparidad tiene lugar entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se dice que se trata de un conflicto (semiótico) cognitivo.

METODOLOGÍA

El proyecto de investigación del que forma parte este trabajo se inscribe dentro de las investigaciones de diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008), aplicando como teoría base el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). El objetivo general es el diseño, experimentación y evaluación de procesos instruccionales sobre tópicos matemáticos específicos realizados en contextos reales de clase. La experiencia que describimos en este trabajo se llevó a cabo en un centro público de enseñanza durante el curso 2017-2018 con un grupo de 21 alumnos de sexto curso de Educación Primaria (11-12 años de edad).

En el transcurso de la experiencia se distinguen tres fases. La primera fase de instrucción fue llevada a cabo por el profesor-tutor del curso que siguió un modelo didáctico tradicional del estudio de porcentajes y proporcionalidad, basado en el uso preferente del libro de texto y orientado hacia un aprendizaje algorítmico. En la segunda fase se hace una evaluación de los aprendizajes logrados por los alumnos como resultado de la primera fase, destinada a identificar los conflictos cognitivos generados y su relación con los conflictos epistémicos inherentes a los significados de la proporcionalidad y porcentajes implementados. La tercera fase se centra en el diálogo y justificación colectiva de las soluciones de las tareas de evaluación con el objetivo de avanzar en la superación de los conflictos cognitivos.

Estudio previo. Significado de referencia del porcentaje

La proporcionalidad y porcentajes se contempla en diferentes bloques temáticos dentro del currículo de educación primaria (MECD, 2014). Entre los contenidos destacables se incluyen: expresión de partes utilizando porcentajes; correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales. Como estándares de aprendizaje evaluables, se espera que los alumnos resuelvan problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

A pesar de esta importancia, diversas investigaciones en educación matemática revelan una comprensión conceptual limitada sobre porcentajes, lo cual motiva que muchos estudiantes tengan dificultades para comunicar ideas en relación a porcentajes de forma apropiada (Kouba, Brown, Carpenter, Lindquist, Silver y Swafford, 1988; Lamon, 2007; Parker y Leinhardt, 1995).

Parker y Leinhardt (1995) sugieren que el significado real del porcentaje se ha perdido entre las reglas de cambio de decimales a fracciones, fracciones a decimales, fracciones impropias a números mixtos y números mixtos a fracciones impropias. El conocimiento sobre porcentajes supone mucho más que el cálculo exitoso con ellos. Más que conversiones, cálculos y aplicaciones, conocer los porcentajes, tanto en la escuela como fuera de ella, significa entender sus múltiples e imbricados significados y su carácter relacional (Parker y Leinhardt, 1995, p. 47).

Diversos textos, autores e investigaciones a lo largo de los años, señalan diferentes significados y contextos de uso del porcentaje, coincidiendo en su conexión con los conceptos de fracción, razón y número racional. Cuando el porcentaje es entendido como un número, el “porciento” es una traducción del símbolo “%”. Así, los porcentajes pueden ser transformados en números reales que cumplen sus axiomas, pueden ser ordenados y sumados directamente si representan diferentes partes de un mismo todo (Brown y Kinney, 1973).

El porcentaje puede entenderse como relación parte-todo (fracción). En este contexto, el tamaño de un subconjunto es comparado al tamaño del conjunto del cual es parte. El significado parte-todo es el prioritario en los textos escolares, especialmente en la parte de introducción al tema de porcentajes. En este contexto no tienen cabida los porcentajes mayores que 100. También puede usarse para representar una relación parte-parte (razón) cuando describe una comparación entre diferentes conjuntos, diferentes atributos del mismo conjunto, o para describir el cambio de un conjunto a lo largo del tiempo. Finalmente, el porcentaje se usa como un operador que establece una relación funcional entre la cantidad inicial y la cantidad final. Establece una tasa que permite determinar cantidades como la cantidad final del impuesto, descuentos, intereses, etc. Autores como Davis (1988) señalan el uso funcional del porcentaje como su significado más importante.

Aunque como vemos los significados del objeto porcentaje son diversos, la esencia del porcentaje es la relación de proporcionalidad. Así, Parker y Leinhardt (1995) consideran que "el porcentaje es fundamentalmente un lenguaje privilegiado de proporciones que simplifica y condensa las descripciones de comparación multiplicativa" (p. 472). El tanto por ciento relaciona dos cantidades de magnitudes directamente proporcionales, es decir, si A y B son dos magnitudes directamente proporcionales, el porcentaje que la magnitud A representa respecto de la magnitud B es la cantidad de A que se corresponde con cien unidades de B. Si se acepta que el porcentaje es una proporción, la enseñanza del porcentaje debería focalizarse en desarrollar la comprensión de los estudiantes del porcentaje como una proporción. Se necesita encontrar la forma de dar una aproximación holística al porcentaje de forma que los estudiantes interioricen la naturaleza proporcional de éste (Dole, 2000).

ANÁLISIS DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN IMPLEMENTADO EN LA FASE 1. CONFLICTOS EPISTÉMICOS

Los alumnos estudiaron el tema "Porcentajes y proporcionalidad" en las dos últimas semanas del segundo trimestre. La instrucción recibida por los alumnos en la primera fase se ha basado esencialmente en el libro de texto de matemáticas de Ferrero, Martín, Alonso y Bernal (2015).

En el libro de texto, dos magnitudes se definen como directamente proporcionales cuando "al multiplicar, o dividir, una de ellas por un número la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número" (Ferrero et al., 2015, p. 112). Se presentan dos procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad: la reducción a la unidad, en el que, "primero, se halla la cantidad que corresponde a una unidad y, después, se multiplica por el número de unidades" (p. 113) y la regla de tres que consiste en "calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres" (p.114). El uso de la regla de tres se vincula a la construcción de una tabla de proporcionalidad y a la expresión de los valores recogidos como un "par de fracciones equivalentes". La última sección del tema "Porcentajes y proporcionalidad" se dedica a la definición y cálculo de porcentajes. El porcentaje se define como "fracción de denominador 100" (p. 116) y el cálculo de porcentajes se obtiene usando la fracción como operador. Para el cálculo del tanto por ciento de una cantidad se divide entre 100 y se multiplica por el número que va la izquierda.

Las tareas planteadas a los alumnos, siguiendo el libro de texto, fueron en su mayoría de ejercitación, destinadas fundamentalmente a cambiar de representación del registro gráfico al registro simbólico y entre los lenguajes natural y simbólico (porcentajes y fracción decimal), hallar complementos hasta 100, y calcular el tanto por ciento de una cantidad, usando el porcentaje como número decimal.

Las tareas de aplicación (resolución de problemas) son minoritarias y se resuelven por medio del cálculo del complemento hasta 100 y el cálculo de la parte en situaciones de descuento o aumento porcentual.

Observamos que el tratamiento que se hace de los porcentajes es exclusivamente procedimental y que aparece desconectado de la proporcionalidad. No hay argumentos que justifiquen la validez de los procedimientos o proposiciones y no todos los significados del porcentaje aparecen recogidos en la unidad analizada. En particular, se explica el cálculo del tanto por ciento de una cantidad a través del significado de porcentaje como relación parte-todo, pero en algunas tareas se espera que los alumnos usen el significado del mismo como función (operador) sin que previamente se haya aclarado la relación entre ambos usos. Este puede ser un potencial conflicto cognitivo. Las actividades propuestas son en su mayoría de ejercitación, dedicándole un peso excesivo al cálculo de la parte a partir del todo y el porcentaje y el complemento a 100.

EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES EN LA FASE 2. CONFLICTOS COGNITIVOS

Los alumnos realizaron en esta segunda fase del proceso instructivo, 5 tareas sobre proporcionalidad (situaciones de valor faltante, comparación y razones) y porcentajes (cálculo de porcentajes y descuentos porcentuales), algunas inspiradas en libros de texto del mismo nivel educativo, otras de investigaciones previas y otras de creación propia. En esta sección describimos una de las tareas propuestas (Figura 1) y los resultados obtenidos. El objetivo de esta fase es evaluar los aprendizajes logrados tras la fase 1 implementada por el profesor-tutor del curso.

Los alumnos trabajaron siguiendo la distribución habitual en clase. Al acabar la tarea entregaron individualmente a la investigadora la hoja de trabajo. Las respuestas dadas a los problemas permiten analizar los conocimientos construidos, identificar conflictos cognitivos y su incidencia en el grupo.

Observa los tarros de mermelada y responde razonadamente.

a) ¿Qué tarro de mermelada contiene más gramos de azúcar? ¿Y menos?

b) ¿Qué tarro de mermelada tiene mayor porcentaje de azúcar?

c) ¿Cuántos gramos de azúcar tiene un tarro de 1 kg de mermelada que tiene el mismo porcentaje de azúcar que el tarro rojo?

Figura 1. Consignas de la tarea de evaluación propuesta a los alumnos

Esta tarea nos permite detectar el significado que otorgan los alumnos a los porcentajes y qué procedimientos emplean cuando deben comparar porcentajes o cantidades obtenidas a partir de éstos, además de analizar los argumentos que emplean para justificar sus estrategias. Para responder al ítem a) los alumnos pueden determinar los gramos de azúcar que tienen los tarros verde y morado. Para ello determinan el tanto por ciento expresado en las etiquetas sobre el peso de cada tarro. Así, el primero contiene 12,5 gramos de azúcar y el segundo tiene 60 gramos de azúcar. Por tanto, el tarro de mermelada que contiene mayor cantidad de azúcar es el rojo y el que menos contiene es el verde. En el apartado b) dado que es conocido el porcentaje de azúcar en los tarros verde y morado, el estudiante puede determinar el porcentaje de azúcar del tarro rojo y después comparar con los otros. En este caso, se obtiene que este tarro contiene un 20% de azúcar y es, por tanto, el mayor de los tres. Finalmente, en el tercer ítem, los alumnos deben aplicar el porcentaje obtenido en el apartado previo para determinar la cantidad de azúcar que tendría un tarro de 1 kg de mermelada igual a la del tarro rojo, es decir, deben obtener el 20% de 1000 gramos, con lo que tendría 200 gramos de azúcar.

Grado de corrección. Procedimientos y lenguaje

Como puede verse en la Tabla 1, la mayoría de los alumnos resolvieron la tarea, si bien el último apartado tuvo un mayor porcentaje de respuestas en blanco. Salvo un par de alumnos que intentaron explicar su respuesta en base a las operaciones realizadas, los alumnos no ofrecieron ningún tipo de argumento que justificase su solución a los distintos apartados, a pesar de que en la consigna de la tarea se les pedía que lo hicieran de forma razonada.

Tabla 1. Frecuencias (porcentajes) en el grado de corrección de la solución a la tarea (n = 21)

Grado de corrección	Ítem a)	Ítem b)	Ítem c)
Incorrecta	4 (19,05)	5 (23,81)	1 (4,76)
Correcta	13 (61,90)	10 (47,62)	11 (52,38)
No responde	4 (19,05)	6 (28,57)	9 (42,86)
Total	21 (100)	21 (100)	21 (100)

La tarea que presenta un mayor número de respuestas correctas es la primera. El significado del porcentaje que se pone en juego en este apartado es el funcional. Para responder al ítem b) es preciso obtener el porcentaje de azúcar que tiene el tarro rojo, siendo el significado del porcentaje en este ítem el de relación parte-todo. Finalmente, para responder de forma adecuada al ítem c) se puede aplicar el porcentaje de azúcar que tiene el tarro rojo, obtenido anteriormente. Observamos que además de los 6 alumnos que no respondieron al ítem b), hubo otros 3 que no lo hicieron a este ítem, quizás por la mayor complejidad semántica del enunciado.

Los alumnos desarrollaron distintos tipos de procedimientos para resolver la tarea propuesta, que podían repetirse en los distintos apartados.

En el ítem a) los alumnos deben calcular la cantidad de azúcar a partir del porcentaje en cada tarro de mermelada. Se encuentran los siguientes procedimientos:

P1.1. Expresa el porcentaje como número decimal y lo multiplica por la base (peso del tarro de mermelada).

P1.2. Considera el porcentaje como fracción de denominador 100; multiplica por el numerador y divide por el denominador (100).

P1.3. Considera el porcentaje como fracción de denominador 100; divide por 100 y multiplica por el numerador.

En el ítem b), deben primero determinar el porcentaje de azúcar del tarro rojo y después compararlo con los porcentajes de los tarros verde y morado. En la obtención de dicho porcentaje se han detectado los siguientes procedimientos:

P2. Método unitario. Se considera un porcentaje concreto de la cantidad total (1% o 10% en las respuestas de los alumnos) como unidad en sí misma y a partir de ella se obtienen otros porcentajes.

P3. Proporción (regla de tres). Igualdad de dos fracciones siendo una de ellas la expresión fraccionaria del porcentaje y la otra, la de denominador el peso de mermelada y el numerador, el valor faltante (cantidad de azúcar por determinar).

Finalmente, en el ítem c) los alumnos deben obtener la cantidad de azúcar en 1 kg de mermelada que tiene un 20% de azúcar (igual al tarro rojo). En este caso, los procedimientos empleados son:

P0. Aritmético. Dado que 1 kg son 10×100 gramos, tendrá 10×20=200 gramos de azúcar.

P1.3. Divide 1 kg (o 1000 gramos) por 100 y multiplica por 20 para obtener la cantidad en kilogramos (o gramos) de azúcar.

P2. Método unitario. Se considera un porcentaje concreto (10%) de la cantidad como unidad en sí misma y a partir de ella se obtiene el porcentaje pedido (20%). En este caso, el alumno obtiene el 20% de 1kg como 2 veces el 10 % de 1000 gramos $2 \times \frac{10\times1000}{100} = 200$ gramos.

P3. Proporción (regla de tres) entre la cantidad de mermelada y la cantidad de azúcar, según la relación $\frac{144}{720} = \frac{x}{1000}$.

En la Tabla 2 recogemos las frecuencias de los tipos de procedimientos empleados por los alumnos.

Tabla 2. Frecuencia absoluta y porcentaje de procedimientos en los distintos apartados.

Ítem	a			b		c			
Procedimiento	P1.1	P1.2	P1.3	P2	P3	P0	P1.3	P2	P3
Frecuencias (porcentaje)	5 (29,41)	1 (5,88)	11 (64,71)	9 (60)	6 (40)	2 (16,67)	4 (33,33)	2 (16,67)	3 (25)
Total	17			15		12			

Uno de los estudiantes respondió que el tarro de mermelada de 1 kg tendría 20 gramos de azúcar. La respuesta de este alumno no está considerada como ninguna de las estrategias recogidas en la tabla anterior.

Como vemos en la Tabla 2, la estrategia más usada en los apartados a) y c) en los que debe obtenerse la parte a partir del total y el porcentaje, fue la establecida en el libro de texto de los alumnos para obtener el tanto por ciento de una cantidad: “se divide la cantidad entre 100 y se multiplica el resultado por el tanto por ciento deseado” (estrategia P1.3).

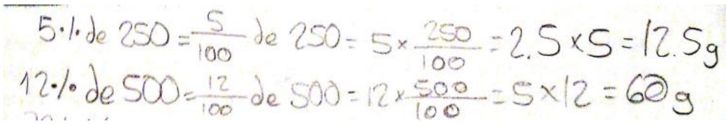


Figura 2. Solución dada por un alumno en el ítem a) por medio de la estrategia P1.3

En el apartado 2, un 60% de los alumnos determinaron la cantidad correspondiente al 10% de los 720 gramos de mermelada, de manera que si el 10% de 720 es 72, entonces 144 que es el doble de 72, representa el 20% de azúcar en el tarro de mermelada rojo (Figura 3, parte izquierda). El resto de los alumnos utilizaron proporciones, con frecuencia empleando el lenguaje tabular o diagramático (regla de tres) para obtener el porcentaje de azúcar (Figura 3, parte derecha).

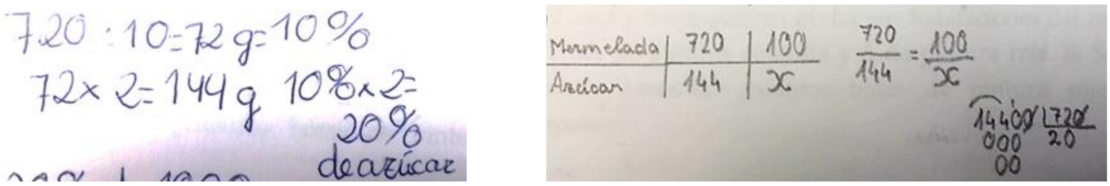


Figura 3. Ejemplos de uso de la estrategia P2 (parte izquierda) y de la estrategia P3 (parte derecha)

Evaluación de aprendizajes. Conflictos cognitivos

Teniendo en cuenta los tipos de objetos matemáticos implicados en las respuestas de los alumnos los conflictos cognitivos los agrupamos de la siguiente manera:

- *Representacionales* (uso inapropiado del lenguaje en sus diversos registros): omite el signo igual en la proporción; encadena identidades aritméticas o algebraicas; usa el signo igual para expresar incorrectamente conexión entre dos magnitudes; usa líneas como operador (multiplicación o división).

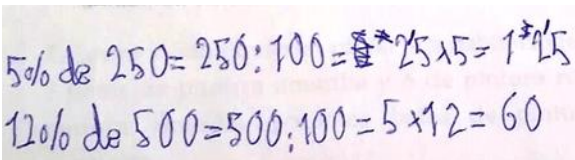


Figura 4. Conflicto representacional

- *Conceptuales* (aplicación inapropiada de conceptos): significado incorrecto del porcentaje como relación parte-todo o como operador; no percibe correctamente la relación de proporcionalidad.

- *Procedimentales* (desarrollo erróneo de procedimientos): en el cálculo del tanto por ciento de la cantidad, se opera de forma incorrecta con la expresión decimal de la fracción o con el producto o división con decimales.

Como vemos en la Tabla 3 los conflictos más frecuentes son los de tipo representacional. En su mayoría, los alumnos encadenan identidades aritméticas o usan el signo igual para expresar relación entre magnitudes identificando porcentajes con cantidades totales (frecuentemente, 72g=10%; 144g=20%). Ejemplos de este tipo de conflictos pueden verse en las Figuras 3 y 4.

Tabla 3. Tipos de conflictos y frecuencias sobre el total de respuestas a cada ítem

	Ítem		
Tipo de conflicto	a	b	c
Representacional	8 (47,06)	7 (46,67)	6 (50)
Conceptual	2 (11,76)	4 (26,67)	1 (8,33)
Procedimental	1 (5,88)	1 (6,67)	0 (0)
Total de respuestas	17	15	12

Los conflictos conceptuales más frecuentes se producen cuando los alumnos tratan porcentaje como parte (comparando los porcentajes de azúcar de los tarros verde y morado para responder al ítem a) o comparan porcentajes de azúcar de los tarros verde y morado con gramos de azúcar del tarro rojo. Otros interpretan que el contenido de azúcar del tarro verde es 5 gramos de azúcar, y que el tarro morado tiene 12. En menor medida, (dos alumnos) olvidan el tarro rojo cuando se les pregunta por porcentajes, suponemos que debido a que no identifican dicha información de forma directa en la etiqueta. En el último apartado, el error cometido es consecuencia de asumir porcentaje en lugar de cantidad de azúcar y responder que la cantidad de gramos de azúcar es 20.

Los errores de tipo procedimental, menos frecuentes aparecen cuando los alumnos trabajan con la expresión decimal del porcentaje y olvidan después multiplicarlo por la cantidad total de mermelada.

RESULTADOS DE LA PUESTA EN COMÚN EN LA FASE 3

En esta sección incluimos la descripción de la puesta en común en gran grupo de las soluciones dadas por los estudiantes, en la que se perseguía estimularles a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de los problemas, y motivar que las explicaciones dadas incluyeran argumentos matemáticos. Los diálogos mantenidos permiten clarificar la forma en que los alumnos afrontan los conflictos cognitivos.

El fragmento que reproducimos se produce después de que distintos alumnos hubieran estado resolviendo en la pizarra problemas de proporcionalidad que no necesariamente involucraban porcentajes. La investigadora (en los diálogos representada como Inv.) pregunta quién quiere salir a resolver y comentar el siguiente problema (la tarea que analizamos en este trabajo). Aquí los alumnos se muestran más reticentes porque tuvieron más dificultades y no se sienten seguros.

Inv.: No importa que no esté resuelto, lo hacemos juntos.

El estudiante E11 se ofrece para resolver el problema en la pizarra. E11 había resuelto de forma incorrecta los apartados a) y b) pero en el momento en que salió a la pizarra lo desconocía. Había calculado correctamente la cantidad de azúcar de los tarros verde y morado pero, en cambio, comparó los porcentajes de azúcar para responder a los apartados a) y b). Cometió diversos errores de tipo representacional y no había acompañado con ningún argumento su solución. Sin embargo, cuando la investigadora le pide que comente con sus compañeros el proceso seguido y justifique por qué lo resuelve cómo lo hace, este es el resultado:

E11: Para calcular los gramos de azúcar que tiene cada tarro, para el primero hemos hecho la operación 5 por ciento de 250 gramos, que son 2,5 por 5 y sale 12,5 gramos.

E11: El segundo es 12 por ciento de 500 que sale 60.

E11: Luego, con eso ya podemos contestar a la pregunta a, que es ¿qué tarro de mermelada contiene más gramos de azúcar? Como el tercero ya nos viene hecho que son 144 gramos y los demás son menores, entonces el tercero es el que más tiene y el que menos tiene es el primero.

Inv.: Carlos ha justificado la solución. Muy bien. Segundo apartado: ¿Qué tarro de mermelada tiene mayor porcentaje de azúcar?

E11: Aquí como su peso es 720 gramos, si dividimos 720 entre 10 nos da 72. Entonces es 20 por ciento.

La investigadora interrumpe al alumno E11.

Inv.: Perdona. ¿Todos entendéis lo que ha hecho?, ¿todos lo habéis resuelto de igual forma?

Algunos alumnos preguntan por qué procede así, a lo que E11 responde.

E11: Si dividimos 720 entre 10 nos da 72, eso sería el 10%. Como 72 es el 10% entonces el 20% sería 144 y con eso podemos contestar ya a la pregunta, el tarro rojo tiene el 20% de azúcar y la respuesta b sería que el segundo es el de mayor porcentaje.

E19: Yo he hecho 14400 entre 720 pero he quitado ceros antes.

Un estudiante afirma, “yo también he hecho regla de tres ahí”. […]

Inv.: Muy bien. ¿Cuáles son aquí las magnitudes directamente proporcionales?

Los alumnos no consiguen responder. Entonces la investigadora aclara,

Inv.: Las magnitudes proporcionales son la cantidad de mermelada del tarro y la cantidad de azúcar que contiene. Suponemos que esa cantidad de azúcar se mantiene.

Finalmente, E11 prosigue con la resolución del último apartado.

CONCLUSIONES

El tratamiento que se da al porcentaje en la lección del libro de texto usado por el profesor-tutor de esta experiencia es meramente algorítmico y está desprovisto de sentido y conexión con la proporcionalidad. No se han contemplado los diversos significados del porcentaje, y no hay tareas propuestas en las que deba determinarse el todo o el porcentaje, ni se consideran porcentajes superiores al 100% que requieran conectar unos significados del porcentaje con otros. Así la idoneidad del proceso de instrucción, desde el punto de vista epistémico, ha sido baja.

Los diálogos mantenidos, durante la puesta en común en clase, en la última fase de este diseño, ayudaron en la clarificación de la naturaleza de los conflictos cognitivos. En general los alumnos tienen dificultades para reconocer la relación de proporcionalidad en un problema de porcentajes y para justificar los procedimientos empleados en la resolución o reconocer la pertinencia de otros procedimientos. De hecho, les sorprendió la pregunta ¿cuáles son las magnitudes proporcionales en este problema?

Los alumnos no habían justificado las respuestas dadas a los distintos apartados, a pesar de que se les pedía explícitamente que lo hicieran y fue solo durante la sesión de corrección en gran grupo, cuando argumentaron o pusieron en duda las estrategias empleadas. En particular, los alumnos habían usado en gran medida el método unitario pero no eran capaces de argumentar por qué lo utilizaban para obtener el porcentaje de azúcar en el tarro rojo. Creemos que esto puede estar motivado por una instrucción centrada casi de forma exclusiva en los procedimientos, que no ofreció a los alumnos la posibilidad de interpretar o explicar el significado de los datos o el proceso seguido y justificar las soluciones obtenidas.

Comunicar y argumentar sobre situaciones en las que aparecen porcentajes y su conexión con la relación de proporcionalidad permitirá dotar de significado a los procedimientos y símbolos que emplean los alumnos cuando plantean una proporción, evitando alguno de los errores de tipo conceptual, procedimental y representacional reconocidos en las respuestas de los alumnos. A pesar de la limitación inherente a la consideración de esta única tarea en este trabajo (en términos tanto de instrucción como de detección de conflictos cognitivos), como hemos podido observar con nuestra experiencia, argumentar y discutir los procedimientos en la puesta en común en la pizarra, permite a los alumnos superar algunos conflictos cognitivos que habían aparecido en la segunda fase, tanto de representación como de una incorrecta comprensión del porcentaje, mostrada al comparar parte con todo o tratar porcentajes como parte.

Referencias

Brown, G. W. y Kinney, L. B. (1973). Let's teach them about ratio. *Mathematics Teacher*, *66*(4), 352-355.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). Gijón: SEIEM.

Davis, R. B. (1988). Is "percent" a number? *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 299-302.

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics, 100*(7), 380-389.

Ferrero, L., Martín, P., Alonso, G. y Bernal, E. I. (2015). *Matemáticas 6*. Madrid: Anaya.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2-3), 167-200.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A. y Swafford, J. O. (1988). Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number, operations, and word problems. *Arithmetic Teacher*, *35*(8), 14-19.

Lamon, S. J. (2007). Rational number and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). New York, EE. UU.: Information Age Publishing.

Maz-Machado, A. y Gutiérrez, M. P. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación, 17*(1), 59-69.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.

Riley, K. R. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1055-1061). Columbus, EE. UU.: The Ohio State University.

Steen, L. A. (Ed.). (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. Washington, EE. UU.: National Council on Education and the Disciplines.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

[xix] Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) en el seno del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

APROXIMACIÓN A LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS QUE ESTABLECEN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA EN TAREAS DE MEDIDA Y COMPARACIÓN DE ÁREAS[xx]

Approximation to the mathematical connections established by pre-service teachers in measure and comparison area tasks

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este trabajo pretende realizar un primer acercamiento a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria entre cuatro manifestaciones del área. Para ello se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados en tres tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas, propuestas en un cuestionario no estructurado. Los resultados indican una tendencia generalizada de los estudiantes para maestro a utilizar fórmulas para encontrar el área de diferentes superficies, evidenciando dificultades en la resolución de tareas en contextos geométricos donde no existe un valor numérico asociado.

Palabras clave: *conexiones matemáticas, manifestaciones del área, concepto de área, futuros maestros de primaria.*

Abstract

This research intends to make a first approach to the mathematical connections established by pre-service primary teachers among four manifestations of area. For this, the written justifications and the procedures used in three tasks of measurement and comparison of areas of flat surfaces, proposed in an unstructured questionnaire, are analysed. The results indicate a generalized tendency of pre-service teachers to use formulas to find the area of different surfaces and show difficulties of future teachers when they are faced with tasks in geometric contexts where there is no associated numerical value.

Keywords: *mathematical connections, manifestations of area, concept of area, pre-service primary teachers.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas la línea de investigación referente al conocimiento profesional de los profesores de matemáticas ha sido foco de diversas investigaciones que buscan analizar el conocimiento vinculado a la enseñanza y las relaciones que se establecen entre los diferentes tipos de conocimiento necesarios para la enseñanza de las matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Ponte y Chapman, 2006; entre otros). En este sentido, consideramos que la acción de establecer e identificar conexiones matemáticas es un aspecto clave en el trabajo de los profesores de matemáticas, pues permite relacionar los distintos contenidos de la disciplina de las matemáticas y, al mismo tiempo, otorgar sentido al trabajo matemático de los estudiantes (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015). En consecuencia, el establecimiento de conexiones en el aula depende, al menos en parte, de los conocimientos del contenido y de su didáctica por parte de los profesores de matemáticas. Sin embargo, los propios profesores tienen dificultades para articular lo que conocen y cómo lo conocen, por lo que la acción de establecer relaciones entre los tipos de conocimiento y entre conceptos específicos de las

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

matemáticas serían uno de los principales desafíos de la formación inicial. Los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio deben aprender a usar, gestionar, conectar y transformar su conocimiento en un sistema coherente de acciones en el aula que les permita promover un aprendizaje conectado e interpretar lo que saben sus estudiantes. Así, el objetivo de este estudio es identificar las conexiones matemáticas que establece un grupo de estudiantes para maestro al resolver tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas. Para esto, observamos y analizamos los cambios de registro en las diferentes estrategias de resolución utilizadas en cada tarea, determinando tres niveles en la elaboración en las conexiones matemáticas establecidas. Para determinar conexiones asociadas al concepto de área, nos basamos en las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) y, posteriormente, para la caracterización de las conexiones encontradas, tomamos como referencia el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014). Aclaramos que cuando hablamos de estudiantes nos referimos a alumnos de primaria, y para futuros maestros de primaria usamos la sigla EPM.

MARCO TEÓRICO

Conexiones matemáticas

La acción de establecer conexiones matemáticas es un proceso que ocurre en la mente de quienes aprenden y, por tanto, es una construcción mental (Businkas, 2008). Dicho proceso podría explicar, en parte, cómo los alumnos organizan los distintos conceptos matemáticos y establecen relaciones entre ellos de un modo coherente. Si bien es cierto que las relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos existen por sí solas, es tarea de los profesores asegurarse que los alumnos logren establecer las conexiones apropiadas entre éstos. De esta manera, la capacidad de los profesores para promover el establecimiento de conexiones matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje contribuiría a la construcción de un conocimiento sólido y duradero en los alumnos, a la vez que permitiría gestionar posibles errores y dificultades (De Gamboa et al., 2015). Para que esto ocurra, es necesario, entre otros conocimientos y competencias, que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la resolución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza.

De Gamboa y Figueiras (2014) proponen una clasificación de las conexiones matemáticas que se dan en el aula con base en la naturaleza de las conexiones y en el contexto en el que se producen. Así, aquellas conexiones que establecen relaciones entre aspectos externos de la matemática (contenidos matemáticos asociados a la vida diaria, a otras disciplinas curriculares y a modelos construidos a partir de referentes reales) se denominan *conexiones extra matemáticas* y, aquellas que vinculan aspectos internos de la disciplina (conceptos, definiciones, representaciones, etc.) se denominan *conexiones intra matemáticas*. Las conexiones intra matemáticas pueden ser relacionadas con procesos transversales o con conceptos específicos. Las conexiones relacionadas con procesos transversales establecen relaciones entre un concepto matemático y un proceso transversal asociado, como pueden ser las heurísticas relacionadas con la resolución de problemas. Por su parte, las conexiones de tipo conceptual relacionan representaciones, procedimientos o técnicas asociadas a un concepto o a conceptos diferentes y pueden ser con conversión o tratamiento. En este sentido, para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático, Duval (2006) diferencia entre dos tipos de representación en la actividad matemática: las conversiones y los tratamientos. Mientras que las conversiones se dan entre registros diferentes, los tratamientos se producen dentro de un mismo registro. En esta investigación, nos enfocamos en las conexiones intra matemáticas de tipo conceptual con conversión, entendiendo las conversiones como los cambios de registros involucrados en cada tarea, es decir, los registros geométricos y numéricos que utilizan los EPM para resolver cada tarea.

Medida del área

Diversos estudios centrados en la comprensión del concepto de área en estudiantes de primaria (Corberán, 1996; D'Amore y Fandiño, 2007; Huang y Witz, 2013; Outhred y Mitchelmore, 2000; entre otros) han mostrado que una gran cantidad de alumnos presentan dificultades y errores al resolver problemas asociados a la medida del área, que pueden estar relacionados con una pobre comprensión, tanto del significado de las fórmulas como del concepto. Por ejemplo, D'Amore y Fandiño (2007) muestran evidencias de cómo al variar la forma de una superficie, alumnos de primaria no logran aceptar la conservación del área de la superficie, siendo incapaces de identificar que el área es independiente de la forma de la superficie.

Las dificultades que presentan los estudiantes también se han evidenciado en futuros maestros de primaria. Simon y Blume (1994) informan que muchos EPM utilizan unidades lineales en lugar de unidades cuadradas para medir áreas y asocian cambios de longitud a cambios de área. Además, advierten que una gran cantidad de EPM no logra disociar el área del número que la mide y al medir dos superficies iguales, con distintas unidades de medida, afirman que una es mayor que otra basándose en los datos numéricos. Baturo y Nason (1996) se refieren al tipo de conocimiento que es utilizado por los EPM cuando resuelven tareas de medición de áreas y señalan que el conocimiento de los conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos es limitado, pues los EPM priorizan el conocimiento procedimental asociado a la memorización de fórmulas, lo que ocasiona dificultades para conectar representaciones concretas y representaciones abstractas (fórmulas) de la medida del área. Del mismo modo, los EPM no evidencian un uso comprensivo de las fórmulas para medir áreas (por ejemplo, no comprenden la relación entre la fórmula para los triángulos y la fórmula para los rectángulos), debido a que la relación entre los procedimientos numéricos y las experiencias concretas no se ha establecido con antelación.

Corberán (1996), basándose en estudios previos (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Freudenthal, 1983), se refiere a que la enseñanza del área debería contemplar un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos e intuitivos, y un tratamiento de tipo cuantitativo ligado al uso de procedimientos numéricos. Así, establece cuatro diferentes manifestaciones del área que deberían estar implicadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la medida del área, a saber:

1. *El área como cantidad de plano ocupado por la superficie:* Se trabaja por medio de tareas de comparación de áreas de superficies con el uso, únicamente, de procedimientos de naturaleza geométrica, donde el número está ausente de cualquier razonamiento. Es la primera manifestación con la que los alumnos deben estar relacionados.
2. *El área como magnitud autónoma:* Se entiende como el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide. Se trabaja por medio de procedimientos de naturaleza geométrica y de naturaleza numérica, en tareas de comparación de áreas de superficies que permiten observar que superficies con forma diferente pueden tener igual área. Se considera que la disociación del área del número que la mide es clave en la comprensión del papel que juega la unidad de medida, y en consecuencia en la comprensión del proceso de medida. Es la segunda manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.
3. *El área como número de unidades de recubren la superficie:* Involucra la comprensión del papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas. Estudiar esta manifestación del área permite enfrentarse al estudio del área como resultante del producto entre magnitudes lineales. Se trabaja realizando tareas de medición basadas en la comparación del área de la superficie cuya área se desea medir con la considerada como unidad. La medida del área se corresponde con el número procedente de un recuento o conteo del número de unidades (o fracción de ésta) que recubren exactamente la superficie. Es la tercera manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.

4. *El área como producto de dos dimensiones lineales:* Se trabaja realizando tareas de cálculo de áreas de superficies poligonales que puedan ser descompuestas en rectángulos y/o triángulos, utilizando para ello la fórmula para el cálculo del área de estos polígonos. Es la última manifestación con la que deben relacionarse los alumnos.

Las cuatro manifestaciones del área contemplan la utilización de procedimientos diversos y de distinta naturaleza. Consideramos que el establecimiento de conexiones entre estos procedimientos de naturaleza geométrica y numérica puede contribuir a desarrollar una comprensión más conectada de la medida del área, pues la utilización de dichos procedimientos permite recurrir a cambios de registros (conversiones) al resolver tareas de medida y/o comparación de áreas. La Figura 1 esquematiza lo mencionado.

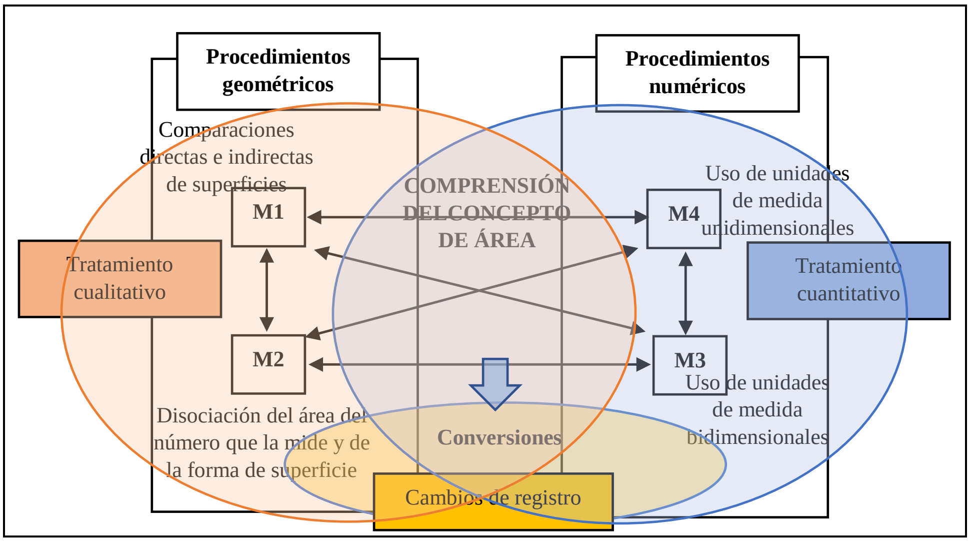


Figura 1. Esquema de la comprensión conectada del concepto de área basándose en manifestaciones del área

Aclaramos que al hablar de superficie nos referimos al espacio bidimensional entre límites específicos, y al hablar de área nos referimos a la medida de la superficie.

MÉTODO

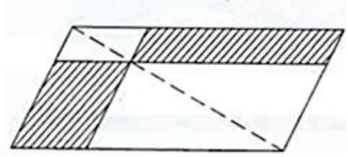
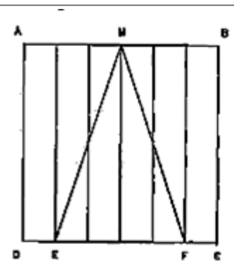
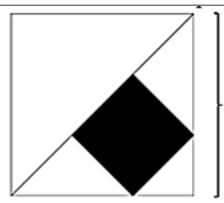
Participantes y contexto

En esta investigación participaron 64 EPM que cursaban su segundo año del grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona. Los EPM habían estudiado en su primer año temas de geometría, incluyendo la medida del área.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario no estructurado que constaba de tres tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas (Tabla 1). Las tareas 1 y 2 fueron adaptadas de Corberán (1996) y solicitaban el uso de dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo. La tercera tarea la diseñan los investigadores, a partir de una obra de Theo van Doesburg (García-Honrado, Clemente, Vanegas, Badillo y Fortuny, 2018; Pimm, 2001) y solicitaba el uso de tres procedimientos diferentes y a elección de los estudiantes. Cada una de las tareas solicitaba justificar los resultados con base en los procedimientos utilizados. Los EPM se reunieron en parejas para resolver el cuestionario y se les hizo entrega de instrumentos de medición (reglas y escuadras) a fin de que los utilizaran de la forma que estimaran conveniente.

Tabla 1. Tareas propuestas a los estudiantes para maestro

Enunciado de cada tarea propuesta a los EPM	***Gráfica de las tareas***
Por un punto de la diagonal del paralelogramo se trazan las paralelas a los lados de esta figura. ¿Qué relación puedes establecer entre las áreas de las superficies sombreadas que resultan de trazar las paralelas? Utiliza dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, para justificar la relación establecida. Recuerda justificar tus respuestas considerando los procedimientos utilizados.	
El cuadrado ABDC se ha dividido en seis bandas rectangulares iguales. Utiliza dos procedimientos diferentes para justificar que las áreas de las figuras AMED, MEF y MBCF son equivalentes. Justifica tus respuestas considerando los procedimientos utilizados.	
Calcula el área del cuadrado negro utilizando tres procedimientos diferentes de tu elección. Justifica tus respuestas teniendo como referencia los tres procedimientos utilizados.	

Análisis

Como un primer paso para el análisis y con el fin de poder identificar qué manifestaciones del área estaban siendo utilizadas por cada pareja, revisamos cada uno de los procedimientos y justificaciones proporcionadas por los EPM. Una vez identificadas las manifestaciones del área involucradas en cada resolución, se establecieron 3 niveles para indicar el grado de conexión entre las manifestaciones del área: (1) Conexiones primitivas: los procedimientos para medir y comparar áreas son únicamente numéricos con uso de fórmulas; (2) Conexiones emergentes: los procedimientos para medir áreas son de tipo numérico con uso de fórmulas, sin embargo, para establecer relaciones entre áreas se utilizan procedimientos geométricos; y (3) Conexiones más elaboradas: los procedimientos para medir y comparar áreas son de tipo geométrico y numérico. Un segundo paso fue identificar el número de conversiones. Debido a que las manifestaciones del área se conectan por medio de los procedimientos utilizados (geométricos y numéricos), las conversiones se dan en aquellos casos donde se evidencia la presencia de más de una manifestación del área. Se consideraron las resoluciones de 29 de las 32 parejas, debido a que 3 de las parejas no resolvieron las tres tareas según lo solicitado, pues sólo hicieron uso de un procedimiento para cada tarea y no proporcionaron justificaciones de los procedimientos utilizados.

Nivel 1: Conexiones primitivas entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM se inclinan exclusivamente por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas (ver Figura 2). Se evidencia una tendencia generalizada de los EPM a aplicar la fórmula del área cuando se tienen las medidas de longitud de las figuras. En caso de no tener las medidas de longitud, una mayoría se inclina por obtenerlas al medir con la regla. En este nivel los EPM no hacen uso de procedimientos de naturaleza geométrica o naturaleza numérica con uso de unidad de medida bidimensional que impliquen, por ejemplo, el recubrimiento de superficies y la relación entre la unidad de medida y la superficie a medir. En este caso, las conexiones se dan sólo entre los procedimientos numéricos asociados al área como producto de dos dimensiones lineales, sin involucrar las otras manifestaciones del área. Las conexiones entre los procedimientos numéricos se apoyan en las descomposiciones ya hechas de las figuras.

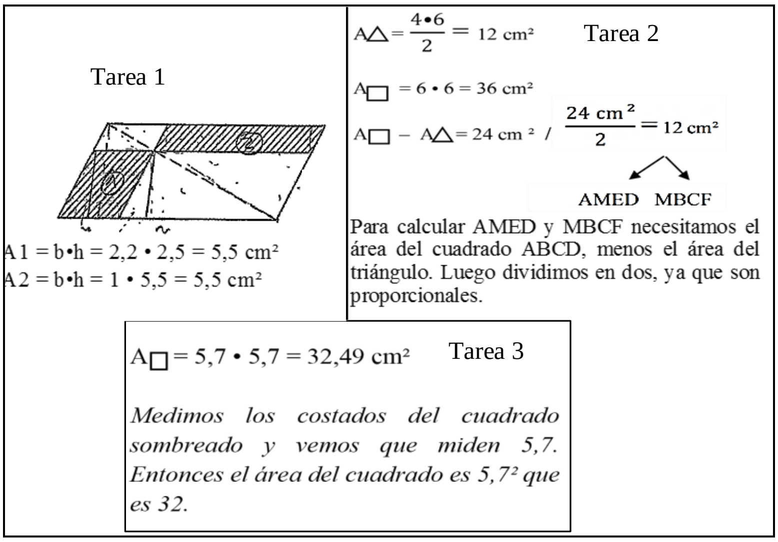


Figura 2. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 1

Nivel 2: Conexiones emergentes entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM se inclinan por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas, no obstante, recurren a procedimientos de naturaleza geométrica para establecer relaciones entre las áreas de las superficies que se quieren comparar (ver Figura 3). Los EPM son capaces de identificar relaciones de equivalencia entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), pero al momento de medir las áreas necesitan recurrir al uso de fórmulas. Además, identifican la propiedad de conservación del área, disociando el área de la forma de la superficie y del número que la mide. Los EPM que se encuentran en este nivel logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida con la superficie a medir. Así, relacionan las manifestaciones 3 y 4 del área y en algunos casos (como en la Tarea 3 de la Figura 3) incluyen la manifestación 2 del área al realizar descomposiciones convenientes de superficies para facilitar la medida del área.

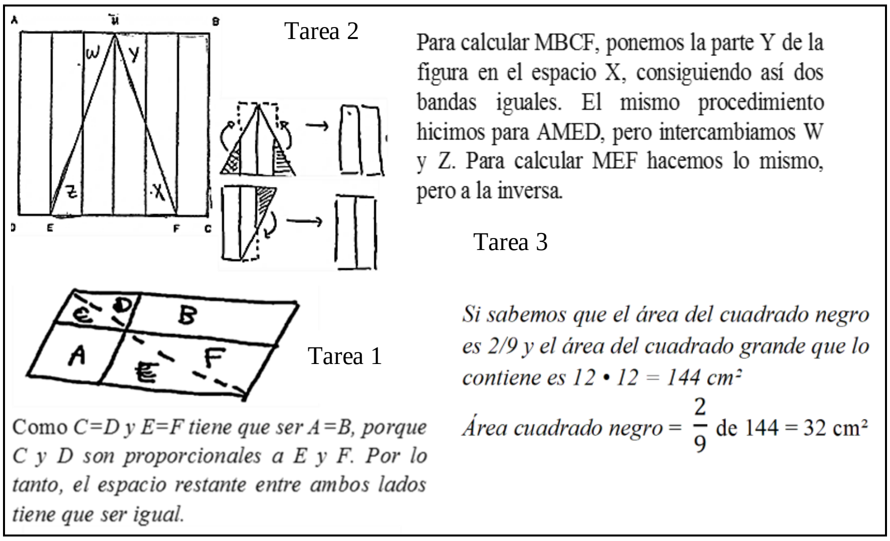


Figura 3. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 2

Nivel 3: Conexiones más elaboradas entre manifestaciones del área: En este nivel las parejas de EPM pueden utilizar cálculos rutinarios para medir áreas, y además recurrir (sin problemas) a procedimientos de tipo geométrico estableciendo relaciones de equivalencias entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), comparando y midiendo áreas sin llegar a calcularlas (ver Figura 4). Además, en las justificaciones se consideran los elementos matemáticos de los que puede depender el área de una superficie como longitud de los lados, número de unidades cuadradas que recubren una superficie, entre otros. Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de establecer relaciones entre los procesos que se ven implicados en la medición del área. Logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida y a superficie a medir. Además, son capaces de disociar el área de la forma de la superficie y del número que la mide e identificar que superficies diferentes en forma pueden tener igual área. Este nivel implica el uso de las 4 manifestaciones del área.

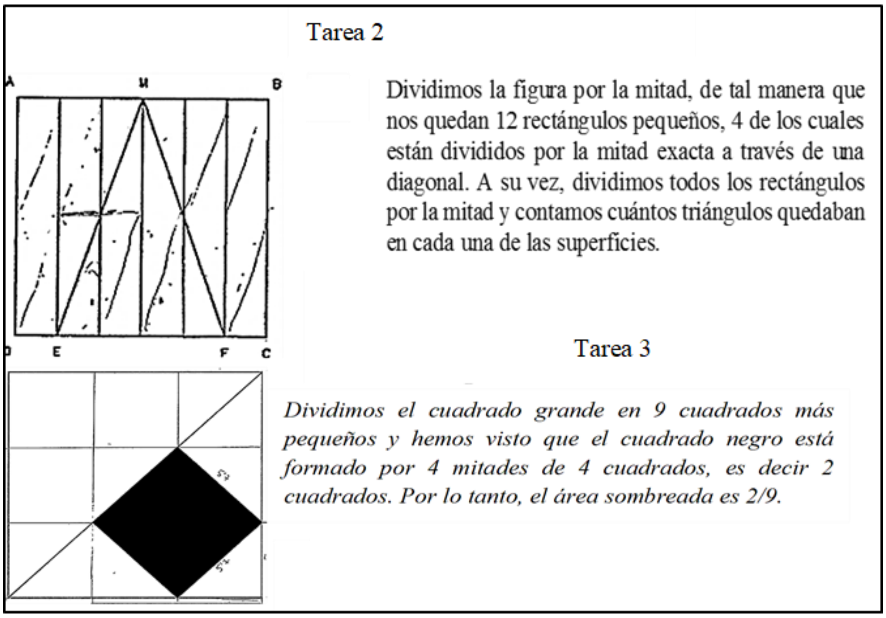


Figura 4. Ejemplos de resoluciones para el Nivel 3

RESULTADOS

Las estrategias observadas en las tres tareas muestran similitudes, tanto en los procedimientos como en las justificaciones. La estrategia más utilizada en las tres tareas es *la medición de longitudes y uso de fórmulas*, donde las parejas de EPM miden con la regla los costados de las figuras para obtener la medida de sus longitudes y posteriormente hacer uso de la fórmula que permite obtener la medida del área. Le sigue la estrategia de *estimación visual basada en la relación entre los triángulos* y la estrategia de *reconfiguración por complementariedad de trozos*. Mientras la primera implica la equivalencia de triángulos a partir de la "observación", es decir, los EPM justifican la igualdad de triángulos "al ojo", en la segunda se requiere establecer relaciones de equivalencia por medio de la unión de partes, en superficies que ya presentan una descomposición previa. También se identificaron la estrategia de *comparación indirecta*, que implica recortar una superficie y recomponer sus partes en una nueva forma sin superponerlas, la estrategia de *comparación directa* que implica superponer una superficie sobre otra para encontrar relaciones de equivalencia, y la estrategia de *descomposición de superficies* que consiste en descomponer una superficie en unidades congruentes y luego contarlas. La Tabla 2 muestra el número de EPM que utilizan cada estrategia.

Por otro lado, debido a que el cuestionario solicitaba de forma obligada el uso de dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, la gran mayoría de las parejas se encuentran en los niveles 1 y 2 de conexiones entre manifestaciones del área. Los procedimientos geométricos utilizados apoyan a los procedimientos numéricos que les preceden. De esta manera, los EPM los utilizan para confirmar los cálculos realizados. Una minoría de parejas se encuentran en el nivel 3 de conexiones entre manifestaciones del área, lo cual indica que existen dificultades para medir y/o comparar áreas cuando no hay un valor numérico asociado. Considerando las estrategias y los niveles establecidos, identificamos las conexiones intra matemáticas, concordando con el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014), encontrando conversiones para los niveles 2 y 3, pues en estos niveles se identifica la presencia de más de una manifestación del área al utilizar procedimientos de distinta naturaleza. La Tabla 3 muestra el número de parejas de EPM por nivel y el número de parejas de EPM que evidencia conversiones en sus resoluciones.

Los cambios de registro observados en las resoluciones de cada tarea muestran similitudes en cuanto a los procedimientos utilizados por cada pareja. A pesar de que el cuestionario demandaba el uso de procedimientos geométricos y numéricos, sólo 21 de 29 parejas evidencian conversiones en todas sus resoluciones y/o justificaciones, pues utilizan para cada una de las tareas procedimientos de naturaleza geométrica (mayormente apoyándose en las descomposiciones ya hechas) y numérica.

Tabla 2. Número de parejas que utilizan cada estrategia en las 3 tareas

	Estrategias utilizadas por los EPM en la resolución de cada tarea	*Parejas que la utilizan de forma correcta*	*Parejas que la utilizan de forma incorrecta*
Tarea 1	1.1. Comparación indirecta por recorte y pegado	1	0
	1.2. Comparación directa por superposición	6	2
	1.3. Estimación visual basada en la relación entre los triángulos	24	1
	1.4 Medición de longitudes y uso de fórmulas	26	1
Tarea 2	2.1. Reconfiguración por complementariedad de trozos	29	0
	2.2. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	1	0
	2.3 Medición de longitudes y uso de fórmulas	28	0
Tarea 3	3.1. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	5	0
	3.2 Medición de longitudes y uso de fórmulas	29	0

Tabla 3. Parejas de EPM que se ubican en cada nivel por tarea y número de parejas que evidencian conversiones en sus resoluciones

	Número de parejas de EPM en cada nivel		
	Tarea 1	*Tarea 2*	*Tarea 3*
Nivel 1: Conexiones primitivas entre manifestaciones del área	26	28	29
Nivel 2: Conexiones emergentes entre manifestaciones del área	21	28	21
Nivel 3: Conexiones más elaboradas entre manifestaciones del área	3	5	5
Conversiones	26	29	21

DISCUSIÓN

Al analizar los procedimientos y/o justificaciones realizadas por cada pareja de EPM, es posible evidenciar que existe una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de fórmulas, aun cuando esta estrategia implica una mayor cantidad de tiempo para resolver cada tarea. No obstante, es posible evidenciar que a pesar de que los estudiantes conocen la fórmula de memoria (largo por ancho) y pueden aplicarla fácilmente y con éxito cuando dos longitudes les son dadas, este proceso les presenta un mayor grado de dificultad cuando no conocen una o ambas de sus longitudes (en este caso, se inclinan a obtenerlas utilizando una regla graduada). Un ejemplo de esto se evidencia en la Tarea 3, donde sólo 5 parejas de EPM, además de utilizar procedimientos numéricos, logran utilizar procedimientos de carácter geométrico (descomposición de la superficie en partes, o fracción de partes, congruentes) para estimar el área de la superficie del cuadrado negro, y establecer relaciones entre el área de la superficie del cuadrado negro, el área de triángulos y el área del cuadrado grande, facilitando así el proceso de medida del área. De forma similar, en la Tarea 2 sólo una pareja puede utilizar procedimientos geométricos, vinculados a la descomposición de superficies en partes congruentes, en conjunto con un procedimiento numérico que implique el uso de fórmulas para calcular áreas. De esta manera, se advierte que la comparación de áreas en un contexto numérico resulta más sencilla para los EPM, que hacerlo en un contexto geométrico, pues sólo comparan valores numéricos sin considerar las características de las superficies que se están comparando

Considerando que la gran mayoría de EPM se ubica en un Nivel 1 y 2 de conexiones entre manifestaciones del área, se evidencian dificultades en cuanto al conocimiento de los elementos matemáticos (descomposición de superficies en partes congruentes, conservación del área, congruencia aditiva, papel de la unidad de medida, entre otros) involucrados en la medida del área. Dichas dificultades ocasionan que los EPM se inclinen mayoritariamente por el uso de cálculos para medir y/o comparar áreas estableciendo pocas conexiones matemáticas, pues los procedimientos utilizados son de una misma naturaleza. Por esta razón consideramos que trabajar las 4 manifestaciones del área vendría a promover el establecimiento de conexiones matemáticas, pues su consideración conlleva de forma implícita el uso de diferentes registros, asociados a procedimientos de naturaleza geométrica y numérica, que se ven relacionados en la resolución de una tarea matemática que implica medir y comparar áreas, y que se evidencia en los niveles descritos en el análisis. En este sentido, a fin de promover un aprendizaje conectado sobre el concepto del área, creemos necesario trabajar con diferentes estrategias que permitan el uso de procedimientos geométricos y numéricos, considerando las posibles relaciones que se pueden establecer entre éstos.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta investigación refuerzan los de Simon y Blume (1994) y Baturo y Nason (1996) al observar que una gran cantidad de EPM muestran un conocimiento poco comprensivo del concepto de área, asociándolo mayoritariamente al uso de fórmulas para su cálculo y presentando dificultades para medir áreas cuando no existe un valor numérico asociado. Además, cuando no se dispone de forma explícita de una medida lineal para el cálculo del área, los EPM tienen tendencia a utilizar instrumentos de medida de forma directa en detrimento de procedimientos de carácter deductivo. En este sentido, aunque las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) ayudan a explicar la comprensión del concepto de área a partir de acciones sobre objetos concretos hasta la utilización de fórmulas, se produce la paradoja de que al alcanzar el nivel más abstracto del conocimiento del área, esta tiende a despojarse de su esencia geométrica.

Los tres niveles que determinamos para clasificar las conexiones matemáticas sugieren la necesidad de incorporar en la formación de maestros tareas que permitan a los EPM trabajar diferentes estrategias para medir y comparar áreas, a fin de que puedan construir un conocimiento más conectado en relación al concepto de área, y puedan establecer conexiones matemáticas por medio de cambios de registros asociados a los distintos tipos de procedimientos que se ven involucrados. En particular, se hace necesario que los EPM puedan revisar sus concepciones del área utilizando registros geométricos, numéricos y algebraicos, que le permitan proponer y gestionar en su actividad profesional actividades que promuevan en los alumnos la concepción profunda del concepto de área y el uso estratégico de las fórmulas. Además, una comprensión profunda del concepto de área puede ser la base sobre la que los EPM construyan un conocimiento conectado del volumen de cuerpos geométricos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235-268.

Businkas, A. M. (2008). *Conversation about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Simon Fraser, Burnaby, Canadá.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Corberán, R. M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia.

D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME*, *10*(1), 39-68.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387-424.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

Huang, H-M. E. y Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(1), 10-26.

Outhred, L. N. y Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144-167.

Pimm, D. (2001). Some notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his *Arithmetic Composition 1*. *For the learning of Mathematics*, *21*(2), 31-36.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En Á. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education*: *Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishing.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494.

[xx] Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR.

¿AYUDAN LOS MATERIALES MANIPULATIVOS A RESOLVER TAREAS MATEMÁTICAS? SÍ, PERO...

Do manipulatives help solving mathematical tasks? Yes, but...

De Castro, C.[a] y Palop, B.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]Universidad de Valladolid

Resumen

Los metaanálisis sobre el uso de manipulativos, tanto físicos como virtuales, muestran que estos constituyen una ayuda eficaz en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo estudiamos el uso y eficacia de manipulativos dependiendo de variables como el tipo de tarea o la edad del niño. Se han seleccionado, en un entorno online, 1344 respuestas de estudiantes de Educación Primaria (de 6 a 8 años) a tareas aritméticas y problemas aritméticos verbales, contextualizados en la vida cotidiana o en el propio uso del ábaco, con números hasta el 10. Los estudiantes disponían en todas las tareas de un ábaco virtual. Los estudiantes han utilizado 1.96 veces más el ábaco en problemas sobre ábaco que en los de vida cotidiana, y 1.85 veces más en cálculos que en problemas de vida cotidiana. Salvo en los problemas de la vida cotidiana, la probabilidad de que los alumnos que usan el ábaco acierten la respuesta es más del doble que la de los que no lo usan.

Palabras clave*: aritmética, resolución de problemas, Educación Primaria, materiales manipulativos, tecnología.*

Abstract

Meta-analyzes on the use of manipulatives, both physical and virtual, show that these are an effective aid in the learning of mathematics. In this paper, we examine the use and effectiveness of manipulatives depending on variables such as the type of task or the age of the child. We have selected, in an online environment, 1344 responses from primary school students (6 to 8 years old) to arithmetic tasks and verbal arithmetic problems with numbers up to 10, contextualized in everyday life or in the abacus itself. Students had a virtual abacus at hand in all the tasks. The students have used 1.96 times more the abacus in problems about the abacus than in daily life problems, and 1.85 times more in calculations than in daily life problems. Except in daily life problems, students who use the abacus have more than twice as many chances to give a correct answer than those who do not use it.

Keywords: *arithmetic, problem solving, Primary Education, manipulatives, online learning.*

EL USO DE MATERIALES MANIPULATIVOS EN MATEMÁTICAS

La idea de que el uso de materiales manipulativos puede mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas no es nueva. Apoyada en teorías del aprendizaje de autores clásicos como Montessori, Piaget o Bruner, se ha convertido en una creencia muy extendida (McNeil y Jarvin, 2007). Paralelamente al entusiasmo generado por los manipulativos, se han venido escuchando voces críticas que, si bien reconocen la aportación de los manipulativos, tratan de matizar y atenuar las altas expectativas puestas en los mismos. Así, Ball (1992) decía, con ironía, que la "comprensión no viaja a través de la punta de los dedos subiendo por el brazo" y que "las ideas matemáticas no residen en […] materiales de plástico" (p. 47); Baroody (1989) proponía que las cajas de materiales deberían venderse con una etiqueta advirtiendo que éstos no garantizan el aprendizaje, y Marshall y Swan (2008) sostienen que, aunque se suele asumir la efectividad del uso

De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 243-252). Valladolid: SEIEM.

de manipulativos, no disponemos de evidencias suficientes de investigación que apoyen esta efectividad ni, en su caso, qué condiciones la favorecen.

Los metaanálisis realizados hasta la fecha sobre la eficacia de los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas, aunque han encontrado efectos positivos de su uso, no son del todo concluyentes, y suelen expresar que el uso de manipulativos debe estudiarse conjuntamente con otras variables. En uno de los primeros metaanálisis, Sowell (1989) concluye que las intervenciones con manipulativos de al menos un curso de duración en educación primaria, comparadas con enseñanza "simbólica", producen efectos significativos de tamaño medio y alto. No obstante, su síntesis de 60 estudios no permite responder la cuestión de para qué situaciones es apropiado el uso de manipulativos, ni cuál sería el manipulativo más adecuado para una situación particular (p. 504).

Hodgen, Foster, Marks y Brown (2018) revisan 5 metaanálisis sobre el uso de manipulativos en matemáticas, encontrando una evidencia alta en favor de su uso y señalando, como condiciones necesarias para que este sea efectivo: (1) que los profesores se aseguren de que los alumnos conectan adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas matemáticas que estos representan; (2) que el uso sea suficientemente extenso, pero no excesivamente prolongado en el tiempo; y (3) que los profesores ayuden a los alumnos, partiendo de los manipulativos, a desarrollar representaciones más abstractas.

Baroody (2017) traslada el foco de los materiales manipulativos a las experiencias concretas. Estas pueden implicar manipulativos, pero también analogías verbales o imágenes virtuales. El uso de manipulativos no garantiza que se produzca una experiencia educativa, que será valiosa en la medida en que consiga extender el conocimiento matemático informal para mejorar la comprensión de conocimientos formales. También en esta línea, López y Alsina (2015), en un estudio cuasi-experimental en Educación Infantil, encontraron que el método de trabajo por rincones favoreció más la adquisición de conocimientos matemáticos que el uso de materiales manipulativos o de cuadernos de actividades. Los autores atribuyen los "malos resultados" del método manipulativo a "una gestión inadecuada de los materiales en el aula […] o a […] un mal acompañamiento por parte del maestro ofreciendo unos andamios inadecuados ante el alumno y la situación en particular" (p. 9). Maz-Machado y Adrián (2014), en un estudio cuasiexperimental en primer curso de primaria, no encontraron diferencias significativas en el índice de competencia matemática (ICM) entre los alumnos que habían utilizado materiales manipulativos durante el curso y los que no.

Otro factor a considerar es la formación y la actitud de los maestros sobre el uso de manipulativos. Moyer (2001), en su observación de maestros utilizando materiales manipulativos, indica que los maestros experimentan dificultades para representar con ellos conceptos matemáticos y que piensan que usar manipulativos es divertido, pero no necesario, para el aprendizaje de las matemáticas.

Carbonneau, Marley y Selig (2013) encuentran en su metaanálisis sobre materiales manipulativos que su uso, al compararse con la enseñanza con símbolos escritos, produce un efecto en el aprendizaje de tamaño pequeño a medio. Además, el tamaño del efecto depende de variables de enseñanza como la riqueza perceptiva de los materiales o el nivel de guía ofrecido a los alumnos en el uso de manipulativos. Los manipulativos, además, tienen un efecto alto en retención, pero bajo en transferencia, solución de problemas y justificación. Moyer-Packenham y Westenskow (2013), en otro metaanálisis sobre materiales manipulativos virtuales (con 66 estudios), indican que el uso de estos materiales produce efectos moderados en el rendimiento de los alumnos al compararlo con otros enfoques de enseñanza (p. 47).

Teniendo todo esto en cuenta, en este estudio nos basamos en que la retención de hechos numéricos parece favorecida por los manipulativos, a diferencia de la resolución de problemas (Carbonneau et al, 2013). Esto nos lleva a plantearnos que, tanto el uso de manipulativos, como la efectividad del mismo, pueden depender del tipo de tarea. Además, si el uso del material no debe ser muy prolongado, y debe dejar paso a representaciones simbólicas (Hodgen et al., 2018), o conectar el conocimiento informal con el formal (Baroody, 2017), los métodos de enseñanza deben favorecer, en general, un descenso en el uso de manipulativos para cada tarea con la edad. Así, consideramos también la edad como una variable de interés al estudiar el uso y efectividad de los manipulativos.

Las tareas concretas incluidas en el diseño del presente estudio están inspiradas en el trabajo de Hughes (1986, p. 50) que compara el rendimiento de alumnos de 3 a 5 años en tres tipos de tareas: de caja cerrada, de tienda hipotética y de código formalizado. Estas tareas han sido sustituidas en el presente estudio, respectivamente, por problemas verbales contextualizados en el uso del ábaco, problemas verbales de la "vida cotidiana" y operaciones aritméticas (ver detalle de las tareas en la sección del método). El ábaco utilizado es un *rekenrek*, desarrollado por Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal de Holanda, como modelo visual para el aprendizaje del cálculo (De Castro, 2015).

Este estudio se ha realizado con datos tomados de una plataforma online para la enseñanza de las matemáticas (*Smartick*). Las secuencias de actividades que realizan los alumnos de esta plataforma están diseñadas a partir de trayectorias de aprendizaje, creando un camino de enseñanza individualizado para cada alumno que se va actualizando en función de los resultados de cada sesión de trabajo. Las trayectorias de aprendizaje están orientadas a un objetivo, o un ámbito del conocimiento matemático, y tienen en cuenta los hitos que van marcando el desarrollo del pensamiento matemático (camino de aprendizaje) y la instrucción (camino de enseñanza) que puede favorecer la evolución de los alumnos (Sarama y Clements, 2009). Los participantes de este estudio tienen familiaridad con el ábaco, pues previamente han realizado con este manipulativo actividades del sistema que configuran el camino de enseñanza para la subitización (De Castro, 2015). Al incluir problemas aritméticos verbales, el estudio se ha realizado con alumnos a partir de 6 años que tienen en sus datos personales registrada la condición de saber leer.

Objetivos de la investigación

Los objetivos que nos planteamos en esta investigación son:

Determinar la influencia que las variables tipo de tarea, operación a realizar y edad tienen en el uso del ábaco por parte de los niños.

Determinar la influencia que las variables de uso del ábaco, operación a realizar y edad del niño tienen sobre su efectividad en cada uno de los tres tipos de tareas estudiados.

MÉTODO

Presentamos un estudio cuantitativo, mediante modelos de regresión logística, en el que estudiamos la influencia entre el uso del ábaco, la resolución correcta o incorrecta de una tarea, el tipo de tarea, la operación aritmética correspondiente a dicha tarea (suma o resta), y la edad del alumno en el momento de la resolución. Dado que, tanto el uso del ábaco como la resolución correcta o no de una tarea son variables categóricas binarias, utilizamos modelos logísticos binomiales para estudiar los factores de los que ambas dependen (Hosmer y Lemeshow, 2000).

Las tareas

Hemos planteado 3 tipos de tareas: Ejercicios *simbólicos* (tipo S) con una operación aritmética descontextualizada de suma o resta; problemas aritméticos verbales de cambio creciente o decreciente con incógnita en la cantidad final, contextualizados en el *ábaco* (tipo A) o en la *vida cotidiana* (tipo V) (ver Tabla 1). En todas las tareas aparece un ábaco de una fila, e intervienen números hasta 10 en los datos o el resultado. En la Figura 1, vemos una captura de pantalla de una tarea de tipo A. En las demás tareas (S y V), solo cambia en la pantalla la parte del enunciado.

La elección de estas tareas para el estudio se basa en el trabajo de Hughes (1986). También, al considerar los problemas aritméticos verbales, hemos dado mayor variedad a los enunciados que en

Hughes (1986, p. 50), que sólo utiliza un problema de “tienda hipotética” (“Si en una tienda hubiese un niño y entrasen allí otros dos, ¿cuántos niños habría ahora en la tienda?”). Así, hemos tenido en cuenta que los problemas verbales requieren “crear un modelo de la situación del problema, aplicando para ello el conocimiento del mundo real que posea el alumno” (Vicente y Orrantia, 2007, p. 66).

Tabla 1. Tareas empleadas en el estudio

	Tipo de tarea		
Operación/ Categoría semántica	Operación simbólica (S)	Problema de ábaco (A)	Problema de vida cotidiana (V)
Suma/ Cambio creciente	2+6	Si marcas el 2 en el rekenrek y después añades 6 cuentas, ¿qué número marcará?	En el patio había 2 palomas. Nos pusimos a echarles pan y llegaron otras 6. Escribe cuántas palomas había al final en el patio.
Resta/ Cambio decreciente	8-6	Si marcas el 8 en el rekenrek y después quitas 6 cuentas, ¿qué número marcará?	En un árbol hay 8 pájaros posados. De pronto, se oye un ruido y salen volando 6. ¿Cuántos pájaros quedan en el árbol?

Figura 1. Entorno online en que se han realizado las tareas (ejemplo de tarea de tipo A)

RESULTADOS

Recogida de datos

Smartick guarda un registro por cada ejercicio incluyendo: *variables de sujeto*, como la edad, el curso, o si se han detectado necesidades educativas especiales; *variables de tarea*, como el tipo de problema, la operación o el tamaño de los números; y *variables de proceso*, como la respuesta del alumno, si es o no correcta, el tiempo de respuesta, o si ha interactuado o no con el ábaco.

De todos los registros, se han tomado al azar 4301 resoluciones de ejercicios de tipo S, A o V, realizados por niños de 6 a 8 años durante un plazo de 2 años. De cada niño se ha seleccionado un único ejercicio para garantizar la independencia de los datos. De esos 4301 registros, se han seleccionado los que pertenecen a alumnos sin NEE detectadas, que se resuelven con una suma o una resta, con números hasta 10, con presencia de un ábaco virtual de una fila. Este filtrado ha producido la muestra final de 1344 resoluciones de ejercicios.

Variables

Las variables que hemos tenido en cuenta son: (1) el “tipo de tarea”; (2) La “operación/categoría semántica”, (3) la resolución correcta o incorrecta; y (4) el uso del ábaco (ver apartado de tareas en la sección del Método). Con respecto a la variable “uso del ábaco”, el uso del manipulativo ha sido opcional y solo se ha tenido en cuenta si el niño ha interactuado con el material, no realizándose ningún tipo de evaluación sobre esta interacción.

Variables controladas

El ábaco utilizado es de una única fila. Los números que aparecen en los cálculos y en los problemas no superan el 10, ni en los datos, ni en el resultado. Las categorías semánticas de los problemas aritméticos verbales (en las tareas tipo A y V) son cambio creciente y decreciente, ambas con la incógnita en la cantidad final. Se han tenido en cuenta resultados de investigación sobre estas dos variables. Con respecto al tamaño de los números, cuanto menor es, más fáciles son las operaciones aritméticas y los cálculos necesarios para resolver un problema verbal con dichos números (Zbrodoff y Logan, 2005). En cuanto a las categorías semánticas de los enunciados, según las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales, los problemas de cambio creciente y decreciente con incógnita en la cantidad final, y los problemas de combinación con incógnita el total, son los más sencillos de resolver y se pueden abordar en torno a los 4-5 años (Sarama y Clements, 2009).

La Tabla 2 muestra la frecuencia del uso del ábaco y de resolución correcta de los ejercicios. En una primera inspección general, puede observarse que los porcentajes más altos corresponden a la resolución correcta de las tareas con el uso del ábaco. En las operaciones simbólicas es donde se produce una mejora mayor en el porcentaje de resolución al pasar de no usar el ábaco a usarlo.

Tabla 2. Frecuencia de uso del ábaco y resolución de ejercicios

		Problema de Ábaco		Problema de la Vida		Operación Simbólica		
Operación/Categoría semántica	Ábaco	NC	C	NC	C	NC	C	Total
Suma/cambio creciente	No Usa	5%	16%	5%	32%	7%	29%	235
	Usa	8%	70%	6%	56%	6%	58%	423
Resta/cambio decreciente	No Usa	5%	22%	7%	33%	8%	29%	259
	Usa	5%	68%	9%	52%	5%	57%	427
Número total		14	106	107	680	58	379	1344

C: Respuesta correcta; NC: Respuesta no correcta

Técnica estadística

Para la selección de los modelos de regresión logística binaria, se ha partido del modelo saturado con la totalidad de variables consideradas y de las interacciones entre ellas, para someterlo a un proceso iterativo de reducción de variables hacia atrás basado en el criterio de información de Akaike (AIC) de los modelos (Heinze, Wallisch y Dunkler, 2018). “No existe un único criterio que sea la panacea de los problemas de selección de modelos” (Bozdogan, 1987), por lo que se ha realizado un análisis parsimonioso de los 4 modelos que se presentan. Dado el reducido número de variables en juego, se ha revisado el proceso iterativo y matizado la inclusión o no de algunas de las variables teniendo en cuenta su significatividad (p-valor) en el modelo finalmente seleccionado. Todos los modelos se han construido utilizando la aplicación informática R (R Core Team, 2016) versión 3.02, bajo RStudio 1.0.136 con la función glm con parámetro family=binomial.

El uso del ábaco

Partimos del modelo saturado (AIC=1775.5) y realizamos un análisis hacia atrás mediante un algoritmo paso a paso con el test chi cuadrado. El algoritmo converge descartando la variable de operación y manteniendo la edad, el tipo de problema y la interacción de ambas (p-valor: 0.010; AIC=1764.7). Sin embargo, ni la variable edad ni tampoco la interacción alcanzan la significatividad en este modelo. Por ello, planteamos el modelo más parsimonioso que mantiene únicamente la variable del tipo de tarea, cuyos resultados resumimos en la Tabla 3.

Tabla 3. Modelo logístico del uso del ábaco

	β	*SE* β	*p*	*odds ratio*
(Constante)	1.14	0.21	<0.001 ***	3.13
Contexto de vida diaria	-0.68	0.23	0.003 ***	0.51
Simbólico	-0.61	0.24	0.009 ***	0.54

AIC=1764. Likelihood ratio test p-value=0.007

Dado que hemos fijado el ábaco como categoría de referencia, este análisis nos indica que los niños usan casi 2 veces más el ábaco (1/0.51=1.96) cuando el problema está contextualizado en el ábaco frente a los ejercicios contextualizados en la vida diaria. De igual manera sucede (1/0.54=1.85) cuando el problema es de tipo simbólico. Por otra parte, no se aprecian apenas diferencias en el uso del ábaco entre los ejercicios de tipo contextualizados en la vida frente a los simbólicos (de la tabla anterior podemos derivar el coeficiente entre estos dos valores β = -0.68 + 0.61= -0.06).

La efectividad en la resolución

En el apartado anterior hemos observado que el tipo de tarea es determinante para que los alumnos decidan utilizar o no el ábaco. Dado que, a continuación, nuestra intención es investigar si este uso tiene algún efecto en la resolución correcta de la tarea, estudiaremos cada uno de los tipos de tareas propuestos de manera independiente. De este análisis podremos derivar cuáles son los factores determinantes en la efectividad del niño de entre las variables seleccionadas de edad, operación de suma o resta y de uso del ábaco dependiendo del tipo de tarea a la que se enfrenta.

Problemas contextualizados en la vida

Partimos del modelo saturado (AIC=636.57) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables operación y uso del ábaco (AIC=627.25, p-valor=0.104). Dado que ninguna de las variables consideradas es significativa, y a la vista del p-valor del modelo, descartamos el procedimiento automático en este caso. Mostramos en la Tabla 4 el modelo con las tres variables consideradas (sin las interacciones entre ellas) donde podemos apreciar que ninguno de los p-valores alcanza el nivel de significatividad. Tras realizar el estudio pormenorizado de todas las variables, así como las combinaciones de parejas de variables (omitido por brevedad), concluimos que ninguno de los factores considerados en el estudio son determinantes del acierto o no del alumno. En particular, concluimos que no se detecta una relación clara de influencia entre el uso del ábaco y la correcta resolución de este tipo de problemas por parte de los niños.

Tabla 4. Modelo logístico de la efectividad para problemas de la vida

	β	*SE* β	*p*	*odds ratio*
(Constante)	1.34	0.97	0.165	3.83
Usa el ábaco (ref. no)	0.29	0.21	0.163	1.34
Resta (ref. suma)	-0.31	0.21	0.131	0.73
Edad (ref. 6)	0.07	0.14	0.602	1.08

AIC=628.97. Likelihood ratio test p-value=0.188

Problemas contextualizados en el ábaco

Partimos de nuevo del modelo saturado (AIC=94.59) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables de uso del ábaco y edad (AIC=86.71, p-valor=0.056) y que mostramos en la Tabla 5.

Tabla 5. Modelo logístico de la efectividad para problemas de ábaco

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	5.81	2.69	0.031 *	335.29
Usa el ábaco (ref. no)	0.90	0.60	0.132	2.46
Edad (ref. 6)	-0.63	0.37	0.087 .	0.53

AIC=86.71. Likelihood ratio test p-value=0.056

Concluimos de los datos anteriores que los ejercicios contextualizados en el ábaco, independientemente de si son de suma o de resta, resultan muy sencillos a los niños (tienen 335.29 veces más chance de acertar que de fallar, con p=0.031). Si tomamos el intervalo de confianza al 95% del *odds ratio* para el uso del ábaco, obtenemos que este valor se mueve entre 0.73 y 7.95. En el peor caso (*odds*=0.73), esto significa que la resolución de ejercicios contextualizados en el ábaco es algo menos efectiva cuando se usa el ábaco. En el mejor caso (*odds*=7.95), con el uso sería casi 8 veces más probable que un niño respondiese correctamente la pregunta. Con respecto a la variable de la edad, vemos que tiene un efecto negativo en la efectividad significativo al 90% (p-valor=0.087). Si consideramos el intervalo de confianza al 95% del *odds ratio* para esta variable, obtenemos que oscila entre el 0.25 y el 1.08, indicando que los niños mayores tienen menor probabilidad de contestar correctamente a este tipo de tareas.

Problemas de tipo simbólico

Partimos del modelo saturado (AIC=339.58) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables de uso del ábaco, la operación realizada y la edad, además de la interacción de estas dos últimas cuyos datos mostramos en la Tabla 6.

Tabla 6. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (I)

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	-9.04	6.34	0.134	0.0001
Usa el ábaco (ref. no)	1.04	0.28	<0.001 ***	2.81
Edad (ref. 6)	1.79	1.04	0.103	5.50
Resta (ref. suma)	10.62	6.86	0.122	4113.95
Edad: Resta	-1.75	1.12	0.121	0.173

AIC=335.1. Likelihood ratio test p-value=0.002.

En el modelo anterior, llama la atención la variable que indica si tipo de operación es una suma o una resta. Los valores tan elevados de error y de p-valor, llevan a que el *odds ratio* en el intervalo del 95% resulte entre 0.041 y 2*10^12, de donde concluimos que esta variable debe ser eliminada del modelo. Obtenemos al descartar este factor un modelo más parsimonioso que incluye únicamente el uso del ábaco y la edad en la Tabla 7.

Tabla 7. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (II)

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	-0.93	6.34	0.134	0.40
Usa el ábaco (ref. no)	1.04	0.28	<0.001 ***	2.83
Edad (ref. 6)	0.36	0.38	0.343	1.44

AIC=334.4. Likelihood ratio test p-value=0.001.

Es interesante notar en la comparación entre los dos modelos que el efecto introducido por el factor del uso o no de ábaco se mantiene, haciendo que la probabilidad de que un niño resuelva correctamente esta tarea es casi tres veces mayor cuando utiliza el ábaco que cuando no lo utiliza. La edad aparece como un factor que podría favorecer la resolución, pero la baja significatividad del resultado y el elevado error del coeficiente nos lleva a probar el ajuste con un tercer (y último) modelo, manteniendo únicamente el uso o no del ábaco cuyos resultados vemos en la Tabla 8.

Tabla 8. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (y III)

	β	*SE* β	*p*	*odds ratio*
(Constante)	1.33	0.19	<0.001 ***	3.76
Usa el ábaco (ref. no)	1.02	0.29	<0.001 ***	2.78

AIC=333.4. Likelihood ratio test p-value<0.001.

Mood (2010) indica que "en la regresión logística las variables omitidas afectan a los coeficientes" (p. 67), remarcando que no se pueden incluir todas las variables que afectan a un resultado. En este caso concreto, observamos dicho cambio en las tablas 6, 7 y 8.

Confirmamos, por lo tanto, que los problemas de tipo simbólico resultan sencillos para los niños siendo casi 4 veces más probable que produzcan resultados correctos que incorrectos, dado que los odds de la constante son 3.76. Cuando el niño, además, usa el ábaco se multiplica casi por 3 (2.78 veces) su probabilidad de dar con la respuesta correcta a la pregunta.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sintetizando los resultados de este estudio, los alumnos de *Smartick* han utilizado más (casi el doble de veces) el ábaco en los problemas de ábaco y en las operaciones simbólicas descontextualizadas que en los problemas aritméticos verbales de la "vida diaria". Y es en las tareas de operación simbólica (sumas y restas) donde usar el ábaco multiplica casi por tres la probabilidad de dar la respuesta correcta. Este es el resultado principal del estudio y confirma la idea que guía su diseño: los materiales manipulativos pueden mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero no por igual en todas las tareas.

Por otra parte, los alumnos han utilizado más el ábaco en los problemas de ábaco que en los problemas aritméticos verbales. Esto es lógico, pues en los problemas de ábaco se hace una pregunta sobre el propio ábaco ("Si marcas el 2 en el rekenrek y después añades 6 cuentas, ¿qué número marcará?"), lo que supone un claro estímulo para el uso del mismo, mientras que los problemas aritméticos verbales describen situaciones totalmente ajenas al ábaco. Lo llamativo es que el mayor uso del ábaco en los problemas de ábaco no conduce a una mayor eficacia en la resolución de los mismos. Los alumnos parecen albergar la idea de que el ábaco les va a ayudar en problemas que se refieren al ábaco, pero, en realidad, el uso del ábaco no mejora la resolución de estos problemas frente a los tipos simbólico y de la vida diaria.

Con respecto a la variable edad, esta no ha dado resultados de interés en ninguno de los modelos. O bien era excluida como variable del modelo, o bien no arrojaba resultados significativos. Este resultado no era esperado, pues en todas las teorías que sustentan el uso de manipulativos en matemáticas se espera que los alumnos vayan prescindiendo de los manipulativos con la edad. La explicación que encontramos está en la forma de seleccionar los ejercicios que hemos adoptado. Para garantizar la hipótesis de independencia, hemos tomado un único ejercicio de cada alumno. La plataforma Smartick plantea a los alumnos tareas según su nivel de competencia matemática, por lo que es lógico que los niños a los que aún se les plantean sumas hasta 10 a los 8 años tengan un nivel inferior en matemáticas que los niños que superan estas tareas a los 6 o 7 años. En este punto, se obtuvo el resultado de que los alumnos mayores (8 años) tenían menor probabilidad de responder correctamente a los problemas de ábaco. Este efecto constituye una limitación en el presente estudio y debería corregirse en futuros trabajos. Una forma de hacerlo sería hacer que cada alumno pase por todos los tipos de tarea para evitar que, en las edades superiores, las tareas más sencillas se propongan a los alumnos que, probablemente, tengan mayores dificultades con las matemáticas.

Con respecto a los problemas aritméticos verbales, su inclusión en el diseño ha resultado de gran interés, pues es claramente el tipo de problema en que los niños menos usan el ábaco. Aparte de este resultado, con respecto a la efectividad del uso del ábaco, no han aportado mucha información. Esto puede deberse a que se han utilizado las dos categorías semánticas que la investigación ha determinado como más sencillas. Estos tipos de problemas se pueden plantear desde los 4-5 años (Sarama y Clements, 2009) y quizá en las edades de este estudio (6 a 8 años), no son los más representativos de la resolución de problemas aritméticos verbales. Por otra parte, desde el punto de vista del aprendizaje por analogía y de la transferencia, los problemas verbales, aunque tengan la misma estructura profunda (misma categoría semántica), difieren mucho en aspectos superficiales. Por el contrario, tanto las operaciones aritméticas como los problemas de ábaco son todos iguales entre sí y sólo difieren en los números que aparecen en los mismos.

De cara a futuros estudios, queda pendiente abordar de forma diferente la influencia de la variable edad, una limitación de este trabajo, y tratar de replicar y ampliar los resultados de este estudio utilizando tareas con otros materiales manipulativos, como los bloques de base 10, o con otros tipos de tarea.

Referencias

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of Math Education. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, *16*(2), 14-18, 46-47.

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher*, *37*(2), 4-5.

Baroody, A. J. (2017). The use of concrete experiences in Early Childhood Mathematics instruction. *Advances in Child Development and Behavior*, *53*, 43-94.

Bozdogan, H. (1987). Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, *52*(3), 345-370.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380-400.

De Castro, C. (2015). Aprendiendo a subitizar cantidades con el rekenrek en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas. *Épsilon, 90*, 49-57.

Heinze, G., Wallisch, C. y Dunkler, D. (2018). Variable selection: A review and recommendations for the practicing statistician. *Biometrical Journal*, *60*(3), 431-449.

Hodgen, J., Foster, C., Marks, R. y Brown, M. (2018). *Evidence for review of mathematics teaching: Improving mathematics in key stages two and three.* Londres, Reino Unido: Education Endowment Foundation.

Hosmer, D. W. y Lemeshow, S. (2000). *Applied Logistic Regression* (2nd ed.). Nueva York, EE. UU.: John Wiley & Sons.

Hughes, M. (1986). *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Planeta.

López, M. y Alsina, Á. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6*, *4*(1), 1-10.

Marshall, L. y Swan, P. (2008). Exploring the use of mathematics manipulative materials: Is it what we think it is? En *Proceedings of the EDU-COM 2008 International Conference. Sustainability in Higher Education: Directions for Change*. Perth, Australia: Edith Cowan University. Recuperado de: https://ro.ecu.edu.au/ceducom/33/

Maz-Machado, A. y Adrián, C. (2014). Uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* - 2014 (pp. 109-114). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

McNeil, N. y Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice*, *46*(4), 309-316.

Mood, C. (2010). Logistic Regression: Why we cannot do what we think we can do, and what we can do about it. *European Sociological Review*, *26*(1), 67-82.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197.

Moyer-Packenham, P. S. y Westenskow, A. (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, *4*(3), 35-50.

R Core Team (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Viena, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Recuperado de: http://www.R-project.org/

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 498-505.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación, 19*(1), 61-85.

Zbrodoff, N. J. y Logan, G. D. (2005). What everyone finds: The problem-size effect. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 331-345). New York, EE. UU.: Psychology Press.

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN Y SUS ROLES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Mathematics teacher's knowledge about proof and its roles on mathematics teaching

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

La demostración es reconocida como una actividad que juega un rol central en las matemáticas y en su enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos, aunque a distinta profundidad. No obstante, llevar a cabo actividades relacionadas con la demostración en el aula aún resulta desafiante y requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la demostración. En este documento, se muestran los resultados de un estudio de casos instrumental sobre el conocimiento de la demostración y sus diferentes roles en un profesor de matemáticas de secundaria y otro universitario. Este conocimiento es analizado como un conocimiento especializado del profesor de matemáticas y los resultados obtenidos permiten ampliar nuestra comprensión de los diferentes roles que se le asocian a la demostración durante la enseñanza de las matemáticas.

Palabras claves: *demostración, conocimiento del profesor de matemáticas, rol de la demostración, enseñanza de las matemáticas.*

Abstract

Proof is acknowledged as an activity that play a main role in mathematics and mathematics teaching and learning in all the educational levels, although at different deep level. However, developing activities related to proof in class is still a challenge and require that teachers have a deep understanding of the nature and role of proof. In this document, the results of an instrumental case study about the knowledge of proof and its different roles in a mathematics secondary teacher and a mathematics lecturer are presented. This knowledge is analyzed as a mathematics teacher´s specialized knowledge and the obtained results allow us to broaden in our understanding about the different roles associated to proof in mathematics teaching.

Keywords: *proof, mathematics' teacher knowledge, role of proof, mathematics teaching.*

INTRODUCCIÓN

Una de las características que distingue a las matemáticas de otras disciplinas científicas es una forma particular de conocer por qué una afirmación es cierta (Dawkins y Weber, 2017). En este sentido, la demostración es reconocida como una herramienta de prueba en matemáticas que juega un rol central en la creación, el establecimiento y la comunicación de conocimiento matemático. Siguiendo esta idea, la demostración también se considera importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Por ejemplo, Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012) señalan que las demostraciones conllevan un amplio entendimiento de los conceptos matemáticos y tienen el potencial de contribuir a que los estudiantes desarrollen estrategias, métodos y herramientas para la resolución de problemas. Sin embargo, investigaciones desarrolladas con profesores en servicio y futuros profesores de

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 253-262). Valladolid: SEIEM.

secundaria muestran que llevar a cabo actividades relacionadas con la demostración en el aula resulta desafiante (e.g., Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina, 2013). En cuanto al aprendizaje de la demostración, los estudios reportan que tanto estudiantes de secundaria como universitarios tienen dificultades para construir sus propias demostraciones y comprender las demostraciones realizadas por otros (e.g., Knuth, Choppin y Bieda, 2009; Selden y Selden, 2003). En consonancia con lo anterior, Stylianides, Stylianides y Weber (2017) señalan que la demostración sigue siendo difícil de aprender y difícil de enseñar, por lo cual es necesario continuar desarrollando investigaciones sobre el tema.

Por otra parte, Shulman (1986) resalta que el profesor debe conocer las formas en que se establece la validez en la disciplina que enseña. En este sentido, Ball y Bass (2009) señalan la demostración como una práctica matemática clave en el conocimiento del profesor, lo cual coincide con la propuesta de Carrillo et al. (2018), quienes consideran el conocimiento del profesor que subyace a distintas prácticas matemáticas, como la demostración, como parte de su conocimiento especializado. Adicionalmente, Knuth (2002) afirma que la enseñanza de la demostración requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la misma. Lesseig (2016) agrega que en el conocimiento del profesor para enseñar la demostración se entrelaza su conocimiento de métodos para representar, explicar y conectar las ideas de la demostración y su conocimiento de uso de ejemplos y contraejemplos para poner en evidencia justificaciones.

Considerando lo anterior, esta investigación busca avanzar en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y los roles que se le atribuyen durante la enseñanza. En este sentido, nos proponemos describir el conocimiento sobre la demostración, desde el punto de vista matemático y didáctico, que manifiesta un profesor de matemáticas de secundaria cuando enseña la inyectividad y un profesor de matemáticas universitario cuando enseña los números reales.

FUNDAMENTOS TÉORICOS

De acuerdo al propósito de este reporte, resulta necesario contar con una herramienta de análisis para el conocimiento del profesor que permita estudiar en profundidad los aspectos matemáticos de la demostración, así como aspectos que vinculan la demostración con la enseñanza de las matemáticas, posibilitando identificar tipos de conocimientos y relaciones entre ellos. De las diferentes conceptualizaciones para el conocimiento del profesor de matemáticas que se reportan en la literatura de investigación y que consideran el conocimiento sobre la demostración, sus distintos métodos y roles como elemento importante del mismo, este trabajo opta por el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK (por su sigla del inglés *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), desarrollado por Carrillo et al. (2018).

El MTSK se presenta como un modelo analítico para estudiar el conocimiento que usa, posee o manifiesta el profesor de matemáticas, otorgando un lugar fundamental a la matemática sin disociarla de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Este modelo distingue dos dominios de conocimiento: uno matemático y otro didáctico del contenido. A su vez estos dominios están divididos en subdominios y categorías cuya integración conforma un conocimiento que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas (Espinoza-Vásquez, Verdugo-Hernández, Zakaryan, Carrillo y Montoya-Delgadillo, 2016). Además, se incluye como parte del modelo un dominio sobre las creencias del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

El dominio del conocimiento matemático en el MTSK tiene una organización interna de la matemática: temas, conexiones entre ellos y formas de hacer o crear conocimiento matemático. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, este es un tipo específico de conocimiento donde el contenido matemático determina cómo se lleva a cabo la enseñanza y el aprendizaje, por tanto, en este dominio se considera el conocimiento del profesor de los fenómenos que se producen cuando un estudiante aprehende un contenido matemático, así como su conocimiento de los fenómenos que surgen durante la enseñanza de un contenido matemático. Adicionalmente, el conocimiento didáctico del contenido incluye aquello que está estipulado que aprendan los estudiantes en un curso o nivel educativo dado.

Debido al enfoque de este estudio, a continuación exponemos con más detalle dos subdominios del modelo MTSK: el conocimiento de la práctica matemática, que es parte del conocimiento matemático, y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que es parte del conocimiento didáctico del contenido; esto sin desconocer que, en la práctica, el conocimiento del profesor de matemáticas no se presenta de manera aislada o por dominios, sino de manera integrada como una red compleja.

En el conocimiento de la práctica matemática (KPM), se agrupa el conocimiento del profesor sobre cómo se construyen las matemáticas y cuáles son los distintos tipos de razonamientos y estrategias de las que se sirve la disciplina para generar nuevos saberes (Oliveros, Pascual, Codes y Martín, 2018). Se considera importante que el profesor no sólo conozca los resultados matemáticos establecidos como definiciones, teoremas o proposiciones, sino las formas de proceder en matemáticas para llegar a dichos resultados. El conocimiento de qué constituye una demostración, cómo se utilizan los principales métodos de demostración y cuáles son los distintos roles de la demostración hace parte del KPM (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2018). Cuando nos referimos a la demostración en este trabajo, incluimos todas las actividades involucradas en la construcción y comunicación de una demostración, así como la comprensión de las demostraciones realizadas por otros. Adicionalmente, la demostración tiene un conjunto de roles dentro la matemática que están presentes de forma similar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De Villiers (1990) describe el rol de *verificación*, relacionado con la idea de proveer un argumento de que una afirmación es cierta o de convencer a otros de que una afirmación es cierta; el de *explicación*, profundizando en por qué una afirmación es cierta; *sistematización* u organización de resultados dentro de un sistema axiomático; *descubrimiento* o creación de nuevos resultados; y *comunicación* de resultados matemáticos. Otros conocimientos incluidos en el subdominio KPM son el conocimiento del profesor de estrategias heurísticas de resolución de problemas, su conocimiento del papel de los símbolos en la comunicación de ideas matemáticas y su conocimiento de cómo se construye una definición. El KPM se describe en base a sus indicadores ya que su categorización es, hasta ahora, un objeto de estudio dentro del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

Por su parte, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) incluye el conocimiento de la enseñanza que está condicionado por la matemática, es decir, no se trata de conocimiento de la enseñanza por una parte y conocimiento de la matemática por otro, sino de la enseñanza específica de la matemática. Este subdominio incluye tres categorías: el conocimiento sobre *teorías personales* que un profesor puede construir en base a la reflexión sobre su práctica de aula o *teorías institucionales* de enseñanza derivadas de la investigación en educación matemática; el conocimiento sobre los *recursos materiales o virtuales* para la enseñanza y sus características, beneficios o limitaciones; y el conocimiento de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* como elementos pertenecientes a la intencionalidad de enseñanza, lo cual incluye el conocimiento de metáforas, analogías y ejemplos que los profesores consideran útiles para explicar un contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre las potencialidades que presenta la analogía entre una función y una máquina en la enseñanza del concepto de función (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018) se incluye en el KMT.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desde un paradigma interpretativo y una metodología cualitativa hemos llevado a cabo un estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1995). Los casos son dos profesores de matemáticas, que llamaremos Arturo y Diego, los cuales fueron seleccionados considerando las características de profesores expertos sintetizadas por Rojas, Carrillo y Flores (2012). Arturo enseña en secundaria, posee 12 años de experiencia docente en este nivel y tiene los grados de licenciado en educación y magíster en matemáticas. Además, realiza docencia a nivel universitario en los primeros cursos de matemáticas. Por su parte, Diego es doctor en matemáticas y combina la docencia universitaria con actividades de investigación. Diego ha enseñado en el nivel universitario por más de 20 años, mostrando interés por analizar su práctica de enseñanza y comprender las dificultades de los estudiantes.

Los datos de esta investigación están ligados a dos tesis doctorales en curso basadas en el modelo MTSK y que abordan el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria y el conocimiento del profesor de matemáticas universitario. Para el presente reporte, nos enfocamos en las sesiones de clases que Arturo destinó a la enseñanza de la inyectividad de una función en el curso de primer año medio (14-15 años) y las que Diego dedicó a la enseñanza de los números reales y sus propiedades como parte de un curso de análisis real en la universidad. Estas sesiones de clases fueron observadas, grabadas en vídeo y posteriormente transcritas incluyendo algunas imágenes de lo escrito por los profesores en la pizarra.

Para el tratamiento de la información se desarrolló un análisis de contenido en el que cada sesión de clase (de una duración promedio de 90 minutos) fue organizada en *episodios* de acuerdo con los objetivos de los profesores que se identificaron durante la sesión. Por ejemplo, establecemos como un episodio el momento de la clase desde que el profesor inicia la presentación de una definición, ejemplo o ejercicio hasta que finaliza esta actividad. En cada episodio, hemos escogido como *unidades de análisis* las intervenciones de los profesores y las interacciones entre el profesor y sus estudiantes que daban cuenta de un conocimiento matemático perteneciente al KPM o un conocimiento didáctico como parte del KMT, de acuerdo con los indicadores y las categorías de estos subdominios propuestas en el modelo MTSK. En particular, consideramos para este reporte aquellos episodios ricos en intervenciones donde los profesores manifestaban su conocimiento sobre la construcción de demostraciones y los roles de la demostración (KPM), así como su conocimiento de la enseñanza en relación con la demostración (KMT).

Para el análisis de las intervenciones hemos utilizado las categorías que el modelo MTSK propone para el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y los indicadores que actualmente posee el subdominio del conocimiento de la práctica matemática, que no posee un sistema de categorías.

A modo de ejemplo, presentamos un extracto de clase donde las expresiones del profesor (en este caso Diego) que se destacan con negrita son aquellas que interpretamos como su conocimiento del rol de verificación de la demostración.

Diego: Por ahora conocemos un número irracional, ¿cuál es?

Estud.: Raíz de dos.

Diego: **Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos**, **es un número real, existe y no es racional.** Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, ¿raíz de dos dividido *m* va a seguir siendo irracional o no? Lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?

La presencia de algunas ideas clave como probar la existencia de cierto tipo de número y la organización de las ideas en el discurso del profesor respecto a la selección de un ejemplo potente para la enseñanza permiten identificar esta intervención como información asociada al conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Por otra parte, las unidades de análisis seleccionadas fueron identificadas como indicios o evidencias de conocimiento siendo una evidencia una intervención en la cual es posible afirmar la presencia del conocimiento del profesor, mientras que un indicio es la sospecha de la presencia de algún conocimiento, pero es necesario obtener información adicional para su confirmación (Moriel-

Junior y Carrillo, 2014). Aunque en los resultados solo se presentan evidencias de conocimiento – tanto las inicialmente identificadas como aquellas confirmadas tras de indagar en mayor detalle en los indicios – el establecimiento de diferencias entre estos dos tipos de unidades de análisis se desarrolló con el propósito de refinar nuestras interpretaciones sobre el conocimiento de los profesores.

En línea con lo anterior, se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada profesor, las cuales fueron grabadas y luego transcritas reproduciendo con detalle el discurso de los profesores. Las preguntas de la entrevista se diseñaron con el objetivo de que los profesores reflexionaran sobre algunas de sus expresiones o actuaciones en clase, razón por la cual estaban basadas en las evidencias e indicios de conocimiento antes identificados. Cada respuesta a una pregunta fue considerada como un episodio de forma que las entrevistas fueron analizadas de la misma manera que las sesiones de clase y nos permitieron profundizar en el conocimiento de los profesores. Todos los datos de la investigación fueron analizados por tres expertos en el modelo MTSK, logrando coincidencias en los hallazgos para los fragmentos aquí expuestos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan evidencias del conocimiento de los profesores sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En el caso de Arturo, exponemos un episodio de clases donde el profesor discute con sus estudiantes sobre la inyectividad de una función, acompañado de fragmentos de la entrevista donde Arturo reflexiona sobre las características de la demostración. En el caso de Diego, exponemos episodios de una sesión de clases donde el profesor discute con sus estudiantes la demostración de algunas propiedades de los números reales, lo anterior complementado con fragmentos de la entrevista en los cuales Diego manifiesta su conocimiento de distintos roles de la demostración.

El caso de Arturo

Durante la enseñanza de la función, Arturo presenta a sus estudiantes la inyectividad de la función mediante la siguiente definición:

Arturo: Una función f se llama inyectiva si y solo si cumple con las condiciones que yo voy a nombrar ahora [La Figura 1 muestra la producción escrita por Arturo en la pizarra durante el episodio].

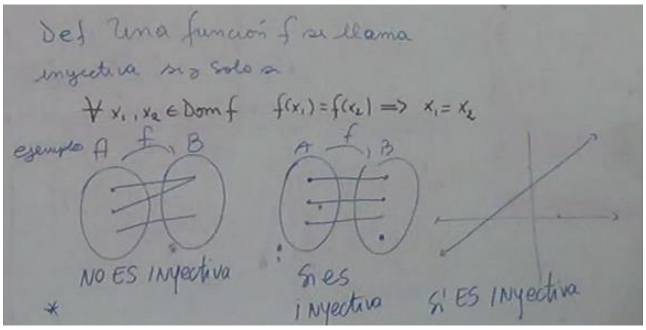


Figura 1. Producción escrita por Arturo en la pizarra a lo largo del episodio

Estamos diciendo que una función se llama inyectiva si y solo si. ¿Por qué se dice si y solo si? Porque esto que está aquí [señala la definición] dice: "f es inyectiva, entonces tendrá que pasar esto", si pasa eso, puedo decir también que es inyectiva. Si y solo si significa que lo que yo estoy diciendo puede ocurrir en ambas direcciones.

En esta intervención se puede observar el conocimiento de Arturo de la propiedad de inyectividad de la función, así como su conocimiento acerca del *papel de los símbolos* en la comunicación de ideas matemáticas (KPM). Particularmente, se observa su conocimiento sobre la equivalencia como una relación bidireccional. Por otra parte, la forma en que el profesor escribe la propiedad y se refiere a ella da cuenta de la identificación de una estructura lógica de la misma, que guía la demostración de cuándo una función es o no inyectiva.

Arturo: ¿Qué pasa si pongo una función que no les dé su gráfico o su diagrama? Sino que dé la función en su forma algebraica. ¿Cómo sé, algebraicamente, que la función es inyectiva? ¿Cómo lo voy a probar? La base va a estar en esto que está aquí [apunta a la definición]. Esto que voy a hacer tiene los siguientes fundamentos. Aquí, detrás de esto [apunta a la definición] está la lógica matemática. Aquí significa que tengo una proposición que implica a otra y una implicación, les voy a contar... puede ser verdadera o puede ser falsa. Lo que nos interesa es que eso sea verdadero, porque queremos ver cuándo esto es realmente una función inyectiva. ¿Cuándo esto va a ser verdadero?, esto de aquí [f(x)=f(y)] podría ser verdadero o falso. Para poder demostrarlo, y hacerlo un poco más simple, nosotros nos vamos a quedar con la idea de que si asumimos esto [f(x)=f(y)] como verdadero, entonces tendríamos que llegar a probar que esto [x=y] también se cumple o fuese verdadero. Esa es la idea, como resumen, de lo que vamos a hacer, si no tendría que estar explicando los valores de verdad del "p implica q". Esto es una proposición y esta es otra, por eso una proposición implica a la otra, por eso dije p implica q.

En este extracto se confirma que Arturo conoce la estructura lógica de la inyectividad y qué caso es el que debe probar. Además, Arturo presenta esta forma de mostrar la inyectividad como un método general para probar la inyectividad de las funciones representadas algebraicamente. Todo esto da cuenta de su KPM respecto a la *construcción de demostraciones* y al *rol de verificación de la demostración* (de Villiers, 1990).

Por otro lado, el conocimiento de la estructura lógica y el caso que destaca para demostrar –asumir f(x)=f(y) como verdadero– le permiten a Arturo diseñar su *estrategia de enseñanza* para la inyectividad de la función al destacar ciertos componentes de la propiedad y *seleccionar los ejemplos* iniciales que sean pertinentes para sus estudiantes (KMT). Las demostraciones de inyectividad para funciones representadas mediante diagramas sagitales se añaden a esta estrategia de enseñanza y revelan la progresión en estas demostraciones que Arturo espera logren sus estudiantes. En este sentido se observa el carácter de enseñanza que Arturo atribuye a la demostración en su *rol de comunicación* de ideas matemáticas (de Villiers, 1990).

Por otro lado, se observa que Arturo reconoce los cuantificadores involucrados en la inyectividad y su importancia para comunicación de esta propiedad, además de incidir en la forma en que la demostración se estructura. En la entrevista se le pregunta a Arturo por este reconocimiento, a lo que responde:

Arturo: Matemáticamente, en esa proposición hay un cuantificador y una implicación. Como es un par (x, y) cualquiera, si yo uso otro par, va a pasar exactamente lo mismo, porque con cualquier par de elementos que yo me tome del dominio, por las características de la función, vamos a tener las mismas consecuencias.

El cuantificador universal es comprendido por Arturo como el componente de la inyectividad que permite la elección arbitraria de pre imágenes distintas que producen imágenes distintas en una función inyectiva. En este sentido, cuando se le cuestiona al profesor qué sucede si se toma un par fijo, por ejemplo (1,2), Arturo expresa lo siguiente:

Arturo: Lo que va a pasar es que puede ser que sea verdadera f(1) igual a f(2) o que sea falsa. Ahí entra a jugar la implicación. Si es falsa [f(1) igual a f(2)], la implicación siempre va a ser verdadera, entonces ya está listo, está probado. Si es verdadera, hay que probar que 1=2. Ahí ya estás tomando un caso particular. Estarías ejemplificando y no demostrando. No puedes demostrar, a menos que utilices un contraejemplo, ahí utilizas algo numérico, pero si quieres demostrarlo, no te sirven los números.

De acuerdo con los fragmentos de la entrevista expuestos, Arturo conoce el rol del cuantificador y de la implicación en la expresión de la inyectividad, de este modo, se identifica su conocimiento del *significado y uso de los símbolos* en la comunicación de ideas matemáticas como parte de su KPM. Además, Arturo conoce los valores de verdad de las proposiciones involucradas en la propiedad, así como el carácter general que debe tener una demostración, comparándola con la ejemplificación y la contraejemplificación como técnicas –incorrectas o correctas, respectivamente– para construir una demostración. Lo anterior permite observar su conocimiento sobre cómo se debe proceder para desarrollar demostraciones, parte de su KPM.

El caso de Diego

En sesiones de clases anteriores a la analizada en este reporte, también dedicadas a los números reales, Diego había expuesto contenidos como el axioma de completitud, la caracterización del supremo y la propiedad arquimediana de los números reales. El profesor desarrolló demostraciones para la irracionalidad de raíz de dos y la no numerabilidad de los números reales. En la siguiente intervención, Diego está discutiendo con los estudiantes sobre la irracionalidad de un número y su pertenencia al intervalo [0,1] sobre el cuál están desarrollando una demostración:

Diego: Por ahora conocemos un número irracional, ¿cuál es?

Estud: Raíz de dos.

Diego: Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, ¿raíz de dos dividido *m* va a seguir siendo irracional o no? Lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?

De acuerdo con el extracto anterior, Diego utiliza el número raíz de dos para construir el número raíz de dos dividido *m*, dando cuenta de su conocimiento de cómo construir un elemento para desarrollar un argumento en una demostración, este conocimiento del profesor sobre *la construcción de demostraciones* hace parte de su KPM. A su vez, Diego considera que haber desarrollado en una clase anterior la demostración de que raíz de dos es un número irracional da la certeza a los estudiantes de que esta afirmación es cierta. En este sentido, el profesor da cuenta de su conocimiento del *rol de verificación de la demostración* (De Villiers, 1990), en particular con un significado de convicción. Este conocimiento, parte del KPM del profesor, también se observa en el siguiente extracto cuando al finalizar la demostración de que los números racionales e irracionales son densos en los números reales, el profesor hace el siguiente comentario:

Diego: Ahora le pueden decir a sus alumnos con propiedad que entre dos números racionales siempre hay un número irracional.

En relación con lo anterior, a pesar de reconocer a la demostración como un medio para convencer a los estudiantes, en la entrevista, Diego reflexiona si las demostraciones desarrolladas en sus clases efectivamente cumplen con este rol:

Diego: Por ejemplo, los estudiantes no ven, aunque tú lo demuestres, que los reales no son numerables..., ellos pueden seguir la demostración, darse cuenta de que hay una contradicción, pero a pesar de eso, siguen pensando que los reales se pueden poner en correspondencia con los racionales, ahí hay una situación extraña.

Esta “situación extraña” expuesta por Diego muestra que un argumento deductivo no es suficiente para convencer a los estudiantes de la verdad de una generalización sobre un conjunto infinito. Así, aunque la verificación es uno de los roles que mayormente atribuyen los profesores a la demostración (Knuth, 2002), hay cierto consenso entre los investigadores en educación matemática que en la enseñanza se deben considerar otros roles de la demostración (Hanna, 2018). Diego muestra comprender esta importancia de presentar demostraciones con un propósito distinto a la verificación cuando en la entrevista profundiza las declaraciones anteriores señalando que:

Diego: Especialmente en este curso, tengo cuidado de mostrar a los estudiantes que hay un montón de cosas que sus profesores les enseñaron y ellos las aprendieron como loritos: entre dos racionales hay un irracional, π es irracional, *e* es irracional, pero ¿por qué? ¿Cuál es la demostración de que π es irracional? Claro porque ellos tienen un montón de conocimientos que se muestran como verdades establecidas, entonces en algún minuto hay que ver que detrás hay un argumento.

En el fragmento antes expuesto, cuando el profesor afirma "pero ¿por qué? ¿Cuál es la demostración de que π es irracional?" manifiesta que la demostración también puede ser utilizada para exponer las razones por las cuales una proposición es cierta. Así, como parte de su KPM, Diego conoce el *rol de explicación* de la demostración (de Villiers, 1990), pero además le asocia un carácter didáctico pues el profesor considera que al desarrollar la demostración de algunas proposiciones sobre números reales se amplía la comprensión superficial que los estudiantes habían adquirido de las mismas al aprenderlas "como loritos". Se observa entonces que Diego se apoya en el rol de explicación de la demostración para estructurar su *estrategia de enseñanza* de las propiedades de los números reales, como parte de su KMT.

La estrategia de enseñanza antes expuesta también se extiende al abordaje de otros contenidos del curso de análisis real, como lo expresa Diego en el siguiente fragmento de la entrevista:

Diego: El curso de análisis es un curso donde se quiere que se entiendan los conceptos, cómo funcionan, cuáles son los teoremas y los resultados principales en ese campo. Entonces los teoremas importantes los hago con detalle y no importa lo que gaste en tiempo poniendo las hipótesis, mostrando los argumentos, la dificultad [en la construcción] de algunos argumentos y la novedad de otros.

De acuerdo con lo anterior, cuando Diego pone énfasis en las hipótesis y los argumentos de las demostraciones de los teoremas que él ha seleccionado como importantes en el curso, da cuenta de la importancia que el profesor le atribuye al desarrollo de demostraciones en clase y a profundizar el porqué de la certeza de una proposición. En esta línea, Hanna (2018) señala que el rol de explicación de la demostración está relacionado con el objetivo de enseñar demostraciones para fomentar una mayor comprensión de los conceptos o proposiciones y del contexto matemático más amplio en que estos elementos estén incluidos. La idea anterior está reflejada en la estrategia de enseñanza de Diego, como parte de su KMT.

CONCLUSIONES

Aunque existen diferencias entre la educación secundaria y la educación superior, tanto en los contenidos que se abordan como en la forma en que estos son enseñados, los resultados obtenidos en esta investigación dan cuenta, por una parte, de la adecuación del modelo MTSK para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes niveles educativos y, por otra parte, de elementos comunes en las dos prácticas de enseñanza analizadas. En particular, respecto a lo primero, la conceptualización del conocimiento matemático que presenta el modelo incluyendo el subdominio KPM permitió que en este trabajo profundizáramos en el conocimiento de los profesores sobre la demostración, la lógica proposicional y el significado y uso de los símbolos en la comunicación de ideas matemáticas, elementos que en ocasiones no se explicitan cuando se estudia el conocimiento del profesor de matemáticas. En línea con lo anterior, la construcción de demostraciones, su rol de verificación y su rol de explicación son presentados como nuevos indicadores para el KPM, que contribuyen a la delimitación de este subdominio.

Por otra parte, aunque el propósito del estudio no fue comparar el conocimiento de los profesores, sino ampliar nuestra comprensión respecto al conocimiento de ellos sobre la demostración como conocimiento matemático y de la enseñanza de las matemáticas, resultó interesante observar que en ambos casos estudiados existen coincidencias y diferencias respecto al rol asignado a la demostración en la enseñanza de conceptos matemáticos. Por un lado, como elemento común, el conocimiento de ambos profesores sobre la demostración les permite adaptar su discurso argumentativo al contexto escolar en el que se desempeñan. Mientras Diego proyecta estas demostraciones a la enseñanza de la densidad de los números racionales en los números reales y establece como fundamentos para demostrar los conocimientos ya adquirido por sus estudiantes, Arturo restringe la entrega de información sobre los valores de verdad de las proposiciones involucradas en la demostración pues sus estudiantes no cuentan con los conocimientos necesarios sobre lógica proposicional. Estas adaptaciones son consideradas como parte del KMT de los profesores y como factores que destacan el carácter especializado de su conocimiento.

Adicionalmente, hay coincidencias en el uso de la demostración como mecanismo para justificar o validar afirmaciones, lo cual concuerda con lo reportado en otras investigaciones (e.g., Knuth, 2002). Consideramos que la formación de posgrado en matemática que cada uno de los profesores ha recibido puede condicionar la forma en que aparece la demostración en sus clases. En este punto, vale la pena resaltar que también se identificó el conocimiento de los profesores de los roles de explicación y comunicación de resultados matemáticos. En ambos casos, los profesores utilizan la demostración en su rol de explicación para los conceptos que están enseñando: la inyectividad de una función o la irracionalidad de un número. Sin embargo, la restricción de la demostración a su rol de comunicación es más evidente en el caso del profesor de secundaria. Estas diferencias se acompañan de un uso de la demostración para soportar una estrategia de enseñanza y para presentar ejemplos respectivamente. En este sentido, se observa que la demostración se aborda con una profundidad distinta en cada nivel.

De acuerdo con lo que se ha expuesto, los resultados del estudio permiten avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que orbita en torno a la demostración, ya sea como conocimiento matemático o como conocimiento sobre la enseñanza de un tema particular. Asimismo, permiten identificar los roles que distintos profesores, en diferentes niveles educativos asignan a la demostración como parte de sus estrategias de enseñanza de las matemáticas. De aquí es que el estudio se propone como un aporte directo a las prácticas docentes que contemplan la inclusión de demostraciones en las clases de matemáticas de modo que los profesores reflexionen sobre cómo realizar dicha inclusión y cuál es el sentido que se le asigna a la demostración.

Para finalizar, consideramos que esta investigación se puede proyectar hacia el estudio de otras relaciones entre los conocimientos identificados en el KPM respecto a la demostración con otros componentes del modelo MTSK, por ejemplo, con las características del aprendizaje de la demostración o con las conexiones que se realizan con otros conceptos matemáticos durante la práctica de demostrar, todo esto, en búsqueda de comprender y reflexionar sobre el quehacer del profesor. A su vez, debido a que el conocimiento del profesor se ve influenciado por sus creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, se podría explorar cuáles son estas creencias y de qué manera se relacionan estas con el desarrollo de demostraciones durante la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

Trabajo financiado por CONICYT, Beca de Doctorado Nacional Folios No. 21170442 y 21150897.

Referencias

Ball, D. y Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing Mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Trabajo presentado en The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference, Universidad de California UCLA, EE.UU.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Dawkins, P. C. y Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123–142.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2018). Knowledge of the practice in mathematics in university teachers. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2018)* (pp. 393-402). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Zakaryan, D., Carrillo, J. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a través del concepto de función. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 197-206). Málaga: SEIEM.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *RELIME, 21*(3), 301-324.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An international perspective* (pp. 3-18). Cham, Suiza: Springer

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 61-88.

Knuth, E. J., Choppin, J. y Bieda, K. N. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. En D. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). New York, EEUU: Routledge.

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(2), 253-270.

Moriel-Junior, J. G. y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M. y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar- González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón: SEIEM.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). Baeza, Jaén: SEIEM.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Londres, Reino Unido: Sage.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463-1490.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. y Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

EXTRAPOLACIÓN DE VALORES EN UN GRÁFICO. UN ESTUDIO CON ESCOLARES CHILENOS

Extrapolating values in a graph. A study with Chilean school children

Díaz-Levicoy, D.[a], Batanero, C.[b] y Arteaga, P.[b]

[a]Universidad Católica del Maule; [b]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo del trabajo fue evaluar la capacidad de los estudiantes chilenos de 6º curso de Educación Primaria para extrapolar un valor no representado en un gráfico de barras. Se analizan las respuestas a una tarea abierta, identificando también el nivel de lectura alcanzado. Dicha tarea fue planteada a una muestra de 380 estudiantes. Los resultados evidencian la dificultad de los estudiantes para realizar una extrapolación correcta de esta representación, donde un tercio responde correctamente y pocos alcanzan el nivel de lectura máxima contemplado. Entre las dificultades se observa que los estudiantes no utilizan todos los datos de la resolución de la tarea, no perciben la tendencia de los datos, así como errores de cálculo o limitar su respuesta a una lectura literal de la información.

Palabras clave: *gráficos de barras, extrapolación, niveles de lectura, Educación Primaria.*

Abstract

The aim of this work was assessing 6th grade Chilean primary education students' capacity to extrapolate a value not represented in a bar graph. The answers to an open task are analysed, and the reading level reached is identified. This task was given to a sample of 380 students. The results show the students' difficulty to carry out a correct extrapolation in this representation, where one third responds correctly and few reach the maximum reading level. The main difficulties were that students do not use all the data in solving the task, they do not perceive the data tendency, and make computation errors or to limit their response to a literal reading of the information.

Keywords: *bar graphs, extrapolation, reading levels, Primary education.*

INTRODUCCIÓN

Los gráficos estadísticos son fundamentales para presentar y analizar información sobre numerosos temas y tienen una fuerte presencia en los medios de comunicación y en la vida profesional. Su correcta comprensión y lectura son parte de la cultura estadística (Watson, 2013) y es una necesidad de la amplia disponibilidad de gráficos sobre datos de interés social, debido a la revolución tecnológica (Engel, 2019; Ridgway, 2016). Su importancia se refleja en las modificaciones de las directrices curriculares de diferentes países, y así, en las últimas décadas, tanto en España (MECD, 2014) como en Chile (MINEDUC, 2012), la enseñanza de los gráficos estadísticos se incluye desde los primeros cursos. Por otro lado, al observar su tratamiento en los libros de texto de Educación Primaria en Chile, se proponen actividades sobre todos los gráficos citados en las directrices chilenas desde el primer año (Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2015).

Las investigaciones sobre la comprensión de los gráficos estadísticos por niños en el contexto chileno son escasas, lo que nos ha motivado a completar nuestros estudios previos sobre la lectura de pictogramas (Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2017) y construcción de gráficos de barras (Díaz-Levicoy, Batanero y Arteaga, 2018) por estos alumnos con otro sobre la capacidad de extrapolar un dato no incluido en un gráfico.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. y Arteaga, P. (2019). Extrapolación de valores en un gráfico. Un estudio con escolares chilenos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 263-272). Valladolid: SEIEM.

En lo que sigue, se describen los fundamentos utilizados en esta investigación, los antecedentes, la metodología, los principales resultados y finalizamos con las conclusiones derivadas del estudio.

FUNDAMENTOS

Nos basamos en los niveles de lectura de gráficos estadísticos propuestos por diferentes autores. Por ejemplo, Bertin (1967) indica que la lectura de un gráfico implica una serie de procesos semióticos pues se deben interpretar, en primer lugar, cada uno de sus elementos en forma aislada y, además, con frecuencia es necesario establecer relaciones entre elementos del gráfico, para finalmente interpretar el gráfico como un todo. Ello implica tres tipos de procesos:

- Identificación externa, para establecer una correspondencia entre lo representado en el gráfico y la realidad, identificando las variables involucradas, el origen de los datos, el propósito del gráfico, tamaño del conjunto de datos, etc.
- Identificación interna de las dimensiones de variabilidad (escalas utilizadas o rango de variación de las variables).
- Establecer la relación de cada elemento del gráfico con la realidad representada para sacar conclusiones sobre las variables, su distribución y lo que indican sobre lo mostrado.

La necesidad de realizar estos procesos implica que la lectura de los gráficos estadísticos es una actividad compleja. Algunos autores han definido niveles de lectura para describir la dificultad que implica responder varios tipos de pregunta sobre los gráficos. En nuestro trabajo, utilizaremos los descritos por Curcio (1989), Friel, Curcio y Bright (2001) y Shaughnessy, Garfield y Green (1996):

- *Leer los datos (N1)*. Se refiere a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico. Un ejemplo de ello sería identificar la variable representada en el eje X.
- *Leer dentro de los datos (N2)*. Se refiere a la lectura de algo que no está explícitamente en el gráfico, implicando la aplicación de procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.). Un ejemplo de este nivel sería encontrar el rango de los datos, pues requiere calcular la diferencia entre el valor máximo y mínimo.
- *Leer más allá de los datos (N3)*. Se refiere a obtener una información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones. Un ejemplo para este nivel es predecir un dato o alguna tendencia.
- *Leer detrás de los datos (N4).* Se refiere a la valoración crítica de las conclusiones, la recogida y de organización de datos. Este nivel supone un amplio conocimiento matemático y del contexto.

ANTECEDENTES

Entre las investigaciones relacionadas con la lectura de gráficos por niños encontramos la de Cruz (2013) con 21 niños de 3º curso de Educación Primaria en Lisboa (8-9 años). La investigación consideró un proceso de instrucción, al final del cual se aplicó un cuestionario para analizar el nivel de lectura de Curcio (1989) en varios tipos de tablas y gráficos. El 82% de los niños completó correctamente las actividades de lectura de nivel N1, un 72% llegaron al nivel N2 y un 26% al nivel N3.

Guimarães (2002) estudia la interpretación de los gráficos de barras por 107 estudiantes de 3º de Educación Primaria en Brasil, planteando tres actividades (dos con datos nominales y uno con datos ordinales). En su estudio el 72% de los niños logran la lectura puntual, que correspondería al nivel N1 (localizar frecuencias o categorías) y 54,2% de los estudiantes responden a una extrapolación a un dato no representado en el gráfico, aunque en su pregunta no se requiere previamente la identificación de la tendencia de los datos, pues todos los datos son muy similares, con ligeros cambios y se admite como correcto cualquier valor similar. Sin embargo, se observan fallos de comprensión variacional, cuando se pide localizar la parte del gráfico en que la variable estudiada tiene mayor aumento o disminución, tarea que sólo logran realizar el 26,3% de los niños y que será requerida en la tarea que planteamos en nuestro trabajo. Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008) estudian la lectura de tablas y gráficos estadísticos de 399 estudiantes (159 de 5º y 80 de 8º grado de Educación Primaria y 160 de 2º de Educación Secundaria) en Brasil. Dos de sus ítems están relacionados con gráficos de barras. Sus resultados muestran un logro del 67,3%; obteniendo mejores resultados en las actividades que demandan un nivel N1 (84% de respuestas correctas) frente al 43% en las actividades en las que se exige un nivel N2 de lectura.

Fernandes y Morais (2011) analizan las respuestas de 108 estudiantes de 9º grado a tres actividades relacionadas con la lectura de gráficos (diagrama de barras simples, gráfico circular y gráfico lineal). Obtienen un 68% de respuestas correctas a las preguntas de nivel N1, 33% a las de nivel N2 y 24% a las de N3. En el diagrama de barras, el 90% alcanza el N1 y 23% el N2. En el gráfico circular, el 96% logran un N1, 31% el N2 y 23% el N3. En el gráfico de líneas, el 19% logra el N1, 14% el N2 y 43% el N3. Fernandes, dos Santos y Pereira (2017) describen una secuencia de enseñanza centrada en el trabajo con tablas y gráficos estadísticos con 35 estudiantes de 5º curso de Educación Primaria en Brasil. Analizan el aprendizaje comparando los resultados de un pre-test y un post-test. El 63,3% de los niños contestaron correctamente la pregunta sobre un pictograma en el pre-test y un 100% en el post-test. El 86,7% responde correctamente a un gráfico de barras en el pre-test y un 100% en el post-test en una pregunta de nivel N1 y 77,1% en el pre-test al 97,2% en el post-test a una pregunta de nivel N2.

Evangelista (2013) evalúa la comprensión de gráficos de barras y líneas simples y dobles con 60 estudiantes de 5º curso de Educación Primaria en Brasil (10-11 años). Los estudiantes responden correctamente el 59% de las actividades sobre gráficos de barras y el 43% de los gráficos de líneas. Las preguntas de N1 tienen un logro de 60%, y las de N2 entre el 51% y el 41%.

Las anteriores investigaciones se han desarrollado en el contexto brasileño y portugués, y sólo una considera la interpolación. Además, la edad de los niños no siempre es la misma que la considerada en nuestro trabajo, y nuestra tarea es diferente por lo que consideramos que podemos proporcionar nueva información.

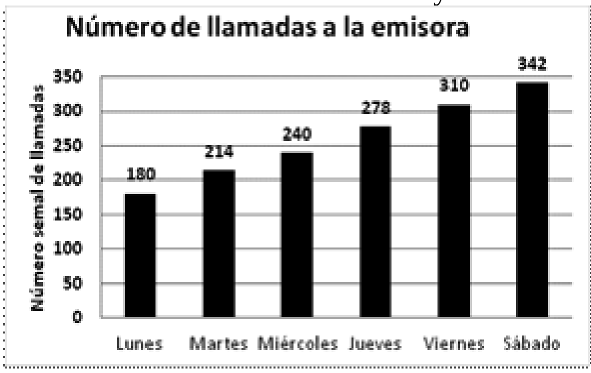
METODOLOGÍA

Para este trabajo consideramos una muestra intencional, formada por 380 estudiantes de 6º de Educación Primaria en Chile (11-13 años), de 7 ciudades diferentes y 13 centros educativos; accediendo a ellos por medio de la negociación con directores y profesores. Estos estudiantes ya habían trabajado con los gráficos de barras en los años anteriores.

En la Figura 1 mostramos la actividad planteada a los estudiantes, que consiste en extrapolar la información mostrada en un gráfico de barras que representa una lista pequeña de datos. El contexto se refiere a las llamadas realizadas por los oyentes de una emisora durante seis días de una semana. Este tipo de actividades se incluyen dentro del N3 (*leer más allá de los datos*) de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001).

La serie de datos presenta una tendencia aproximadamente lineal, con un incremento total igual a 162 (342-180), que dividido entre los cinco intervalos (división entre días) corresponde a un incremento diario medio de aproximadamente 32 llamadas cada día. Se espera que los estudiantes realicen este razonamiento e indiquen que el número esperado de llamadas el día siguiente será de 342+32, es decir, 364 llamadas o bien indiquen que se esperan 32 llamadas más. También se aceptarán como correctas aquellas en que se sugiera un valor aproximado (por ejemplo, un aumento de 30), ya que se trata de un fenómeno aleatorio. Para realizar estos razonamientos se requiere un N3 de lectura de los datos, ya que, por un lado, es necesario leer los datos de cada día (N1); además se deben comparar los datos entre sí y realizar cálculos para determinar el crecimiento medio (N2) y finalmente deducir el valor solicitado (N3). Los estudiantes deben implícitamente utilizar los conceptos de variable, valor y variación, tendencia, media y escala.

Todos los días una emisora de radio anota las llamadas de los oyentes.



Los datos de los primeros seis días se representan en el gráfico. ¿Cuál será el número de llamadas en el siguiente día (domingo)? Explica por qué has dado este número.

Figura 1. Ítems usados para evaluar la extrapolación de valores en un gráfico

Recogidas las respuestas escritas de los niños, se realizó un análisis de contenido, propio de algunos estudios de tipo cualitativos, refinando las categorías obtenidas de una forma cíclica e inductiva. A continuación, se presentan la clasificación de los tipos de respuesta y los niveles de lectura identificados en las mismas, para finalizar con una síntesis cuantitativa de los resultados.

RESULTADOS

A continuación, presentamos los resultados con la clasificación descrita, mostrando ejemplos donde para identificar la respuesta de los estudiantes se ha codificado cada uno de ellos como E*x*, donde $1 \leq x \leq 380$.

Tipos de respuestas

En esta actividad los estudiantes debían indicar un posible valor para el número de llamadas que se podrían recibir en la emisora el domingo. Las respuestas de los estudiantes han permitido obtener las siguientes categorías:

Respuesta correcta. Cuando los estudiantes producen una extrapolación adecuada. Para ello, calculan las diferencias de valores entre un día y otro, obteniendo la siguiente serie de incrementos: 34, 26, 38, 32, 32. A continuación estiman la subida entre el sábado y domingo, mediante el promedio de las diferencias entre días (32,4) redondeando a una cifra, pues las llamadas son números enteros. Por ejemplo, estiman una subida de 32 o 33, cantidad que se suma al último valor representado. También, consideramos correcta la respuesta que indica una subida aproximada, redondeando algo más, por ejemplo, a la decena. Dentro de esta categoría también consideramos aquellas respuestas en que los estudiantes estiman la subida como el promedio de los dos primeros o últimos días. Algunos ejemplos de estas respuestas son la del estudiante E15, que ha seguido el proceso descrito, estimando una subida media de 32 llamadas, mientras E40 ha redondeado a la decena, estimando una subida de 30 llamadas.

> Sería: 374. Porque le sumé a 342, 32. Ya que es el número de la secuencia (E15).
>
> Aproximadamente 372. Principalmente porque el gráfico va en aumento, y porque el gráfico sigue una regla de 30 aproximadamente (E40).

Respuesta parcialmente correcta. Si el estudiante observa el incremento sistemático de los valores en el gráfico, pero su respuesta está limitada por aspectos visuales del mismo, es poco preciso con el procedimiento seguido o no menciona un valor fijo. Además, en algunos casos, cometen errores al realizar los cálculos, como E3, que descubre que a cada día ha de sumarse 32, pero suma el incremento al primer día de la serie y no al último. E102 observa el incremento de la cantidad, pero no llega a una estimación correcta de la subida; otro ejemplo es E48, cuya respuesta está dada por el valor máximo que se muestra en el eje *Y*. En general, estos estudiantes, han fallado en reconocer la media como un estimador de la cantidad desconocida; esta propiedad fue utilizada en la investigación de Cobo (2003) sobre las medidas de tendencia central con estudiantes de secundaria.

> 212 llamadas. Porque tiene que ir sumando 32 (E3).
>
> Tal vez el número de llamadas el siguiente día será más de 342. Porque vi que iba aumentando más y más, y el número 342 número que recibió el día sábado, y como va aumentado el día domingo debería ser más llamadas (E102).
>
> Yo creo que 350. Porque el gráfico termina en ese número (E48).

Respuesta incorrecta. Cuando el estudiante no es capaz de deducir con claridad la tendencia de incremento de los datos y/o su respuesta no es coherente a la información mostrada. Un ejemplo de este tipo de respuesta la dada E288, quien indica que la cantidad de llamadas será de 342, creyendo que la última barra corresponde al domingo, y no al sábado. Otro ejemplo es la respuesta de E538 da como respuesta la suma de los datos que se dan en el gráfico. Ninguno de estos estudiantes utilizó la media como estimador del incremento del número de llamadas, ni tampoco hizo alusión a este crecimiento.

> 342 llamadas. Porque en el gráfico sale que el sábado recibieron 342 llamadas (E288).
>
> 1564. Da ese número, porque si sumamos todas las llamadas da 1564 (E538).

En la Tabla 1 mostramos la distribución de las respuestas de los estudiantes a este ítem. En ella observamos que estos responden mayoritariamente de forma correcta o parcialmente correcta a la pregunta formulada (en total, un 68,4%), lo que confirma los resultados de otros trabajos donde los porcentajes de lecturas correctas en gráficos de barras fueron 52,4% (Guimarães, 2002) y 67,3% (Pagan et al., 2008), aunque en dichos trabajos no se exige el mismo nivel de lectura utilizado en el nuestro. Cerca de un tercio de los estudiantes no aborda la actividad y la deja en blanco, mientras que el número de respuestas incorrectas es pequeño (5%).

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes según tipo de respuesta

Tipo de respuesta	Porcentaje	Porcentaje acumulado
No responde	25,8	25,8
Incorrecta	5,0	30,8
Parcialmente correcta	33,9	64,7
Correcta	35,3	100

Nivel de lectura

Además del tipo de respuesta, nos interesaba evaluar el nivel de lectura alcanzado por el estudiante en la clasificación de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shauhgnessy et al., 1996), que en este ítem puede llegar hasta el N3 (interpolación o extrapolación de datos); en este caso extrapolar un valor que continúe la serie dada. Estas dos variables no coinciden entre sí. Por ejemplo, un estudiante puede responder la pregunta, pero no llegar al nivel N1 de lectura por realizar una lectura totalmente incorrecta, incluso a nivel literal.

Considerando las respuestas de los estudiantes al ítem, estas se han clasificado en los siguientes niveles de lectura:

N0. No lee el gráfico. Cuando el estudiante no responde a la actividad. También se consideran aquellas respuestas que carecen de sentido, al mencionar un número que se aleja de la estimación. En estos casos el estudiante no ha llegado a interpretar el gráfico y no tenemos constancia de que al menos haya llegado a una lectura literal, puesto que no informa de los valores representados. Un ejemplo de este tipo de respuestas lo encontramos en E110, que no concreta ningún valor del gráfico, sino que sólo se limita a mencionar que el dato pedido no está en la gráfica. Si bien este nivel no es propuesto por Curcio y colaboradores creemos necesario incluirlo para caracterizar las situaciones anteriormente descritas.

> No se sabe, porque no hay tabla que dé esos números (E110).

N1. Leer los datos. En este nivel se clasifican las respuestas que llegan a realizar una lectura directa o inversa de alguno de los valores del gráfico. A continuación, hacen referencia a algunos de estos valores, pero no realiza comparaciones de los mismos o ningún tipo de operación con ellos y por supuesto no llega a extrapolar los datos. Por ejemplo, E45 señala que el número de llamadas será la cantidad registrada en último día mostrada en el gráfico (342 llamadas) y por tanto ha leído un valor del gráfico, pero no hace ninguna operación o comparación con él. En otro ejemplo, el estudiante E21, hacen referencia al valor máximo indicado en el eje *Y* (350 llamadas) y por tanto ha sido capaz de leerlo, pero no sabe cómo responder a la tarea propuesta. Es claro que en estas dos situaciones los estudiantes al menos han leído literalmente los datos representados y por tanto alcanzan el N1, pero no el N2 al no operar con los datos o compararlos.

> 342 (E45).

> 350. Porque la tabla [el gráfico] no va más allá que 350 (E21).

N2. Leer dentro los datos. Cuando el estudiante, además de realizar una lectura literal de los datos del gráfico, compara sus valores y percibe que la tendencia de los datos es creciente, aunque no llega a extrapolar. Generalmente estima el valor que se pide de una forma que hemos considerado correcta o al menos parcialmente correcta mediante el desarrollo de cálculos sencillos con solo algunos valores de los mostrados en el gráfico, por ejemplo, los últimos dos o tres días, sin hacer un análisis global del gráfico. También se incluyen en este nivel aquellas respuestas en que se desarrollan cálculos con los datos del gráfico, pero el estudiante no es capaz de explicar el proceso realizado. Por ejemplo, el estudiante E12, solo ha observado la diferencia de los dos primeros valores; y el E15 con los dos últimos.

> 376. Porque la cantidad de números que hay, es decir hay una secuencia de 34 números (E12).

> Sería: 374. Porque le sumé a 342, 32. Ya que es el número de la secuencia (E15).

N3. Leer más allá de los datos. La respuesta del estudiante es clasificada en este nivel si, para resolver la actividad, considera todos los valores representados para extrapolar un valor no mostrado en el gráfico, ya sea calculando la media aritmética o estimando, aproximadamente, el incremento diario de llamadas. Ejemplos de estas respuestas se muestran a continuación:

> 374,4. En la tabla [el gráfico] el número de llamadas iba aumentando por lo que saqué un promedio el cual sumé con el número de las llamadas del día sábado y me dio ese resultado (E25).

> Aproximadamente 372. Principalmente porque el gráfico va en aumento, y porque el gráfico sigue una regla de 30 aproximadamente (E40).

En la Tabla 2 presentamos la distribución del nivel de lectura alcanzado por los estudiantes en este ítem. Se observa que el nivel más frecuentemente alcanzado es el N2 (*leer dentro de los datos*), ya que, en su mayoría, aportan respuestas en las que, además de una lectura literal de los datos, se realizan con ellos algunas comparaciones u operaciones sencillas. Pero no llegan a determinar correctamente la tendencia de los datos ni extrapolan correctamente el valor pedido.

En segundo lugar, tenemos el grupo de respuestas categorizadas en el nivel N0 (32,9%), que son respuestas en blanco o que carecen de sentido, al no haber sido capaz de mostrar una lectura, al menos literal, de los datos. Son muy pocos los estudiantes que alcanzan el nivel máximo N3 de lectura (8,4%), llegando a realizar una extrapolación correcta de los datos. Por lo que vemos que el nivel pedido es alto para los estudiantes de nuestra muestra.

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes que alcanza cada nivel de lectura

Nivel	Porcentaje	Porcentaje acumulado
N0	26,6	26,6
N1	17,1	43,7
N2	47,9	91,6
N3	8,4	100

Valoración cuantitativa de la respuesta

Para realizar una valoración global de la solución a la tarea propuesta, hemos calculado una puntuación por cada apartado, que tiene en cuenta tanto la corrección de las respuestas como el nivel de lectura alcanzado, en la forma siguiente:

a) En primer lugar, se ha valorado la corrección de la respuesta, concediendo hasta un máximo de 3 puntos en la misma, con el siguiente criterio: 0, si no completa la tarea; 1 si se da una respuesta incorrecta; 2, si la respuesta es parcialmente correcta; y 3, si la respuesta es correcta.

b) En el nivel de lectura se ha asignado de 0 a 3 puntos, dependiendo del nivel logrado.

Por tanto, en el ítem se puede alcanzar hasta un máximo de 6 puntos.

En la Figura 2 se presenta un diagrama de barras simple y otro de barras acumulado de la puntuación global en la tarea. En el primer gráfico observamos que una cuarta parte de estudiantes no llegan a una puntuación de 1 pues o no logran abordar la actividad o no han logrado ni siquiera el primer nivel de lectura. En el resto de la muestra la puntuación más frecuente es 5, que implica que implica una respuesta al menos parcialmente correcta y además un nivel 2 o 3 de lectura. En el gráfico acumulativo observamos que un 46,6% alcanza la puntuación 3 o inferior, pero más de la mitad lo supera, lo que indica una respuesta parcialmente correcta y al menos el N1 de lectura.

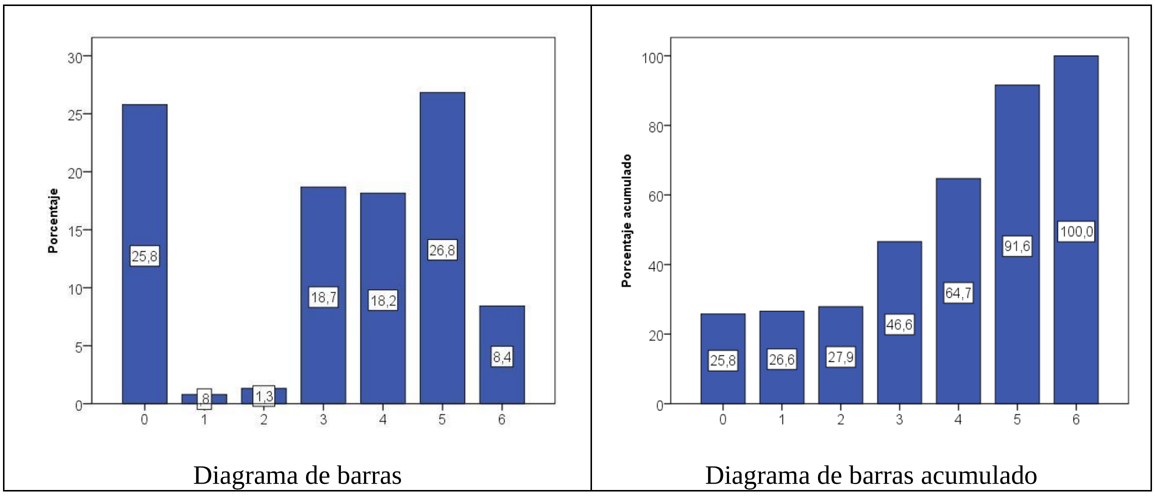


Diagrama de barras — Diagrama de barras acumulado

Figura 2. Distribución de la puntuación total en el ítem por curso

Relación de la respuesta con el nivel de lectura

Para completar el análisis se realizó una comparación del nivel de lectura alcanzado, según el grado de corrección de la respuesta en la tarea, utilizando únicamente los datos de los estudiantes que responden, es decir, descartando a los que dejaron la tarea en blanco. Observamos en la Figura 3 una relación directa, pues al crecer la corrección de la respuesta aumenta el nivel de lectura, de modo que no encontramos ninguna respuesta incorrecta con un nivel de lectura N3 y ningún alumno que sea capaz de dar una respuesta a menos parcialmente correcta y nivel N0. Las respuestas parcialmente correctas se caracterizan por los niveles N1 y N2 mientras que la correcta por los N2 y N3. Estos resultados se muestran en forma cuantitativa en la Tabla 3.

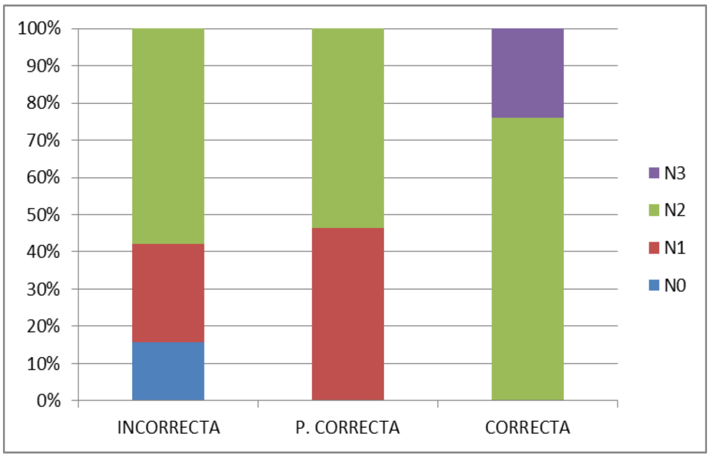


Figura 3. Nivel de lectura alcanzado según tipo de respuesta en alumnos que responden

Tabla 3. Clasificación cruzada de respuesta y nivel de lectura

		Nivel de lectura			
		N0	N1	N2	N3
Incorrecta	Frecuencia	3	5	11	0
	% por fila	15,8	26,3	57,9	0,0
Parcialmente correcta	Frecuencia	0	60	69	0
	% por fila	0,0	46,5	53,5	0,0
Correcta	Frecuencia	0	0	102	32
	% por fila	0,0	0,0	76,1	23,9

Para estudiar la significatividad de las diferencias de niveles por tipo de respuesta se ha aplicado el contraste Chi-cuadrado de independencia. En lugar de utilizar directamente los datos de la Tabla 3, se ha prescindido de las respuestas incorrectas, ya que su frecuencia es muy pequeña lo que hacía que en la Tabla 4 hubiese demasiadas celdas con frecuencia esperada menor que una y en consecuencia no era conveniente aplicar dicho contraste. Al descartar esta respuesta se obtiene la Tabla 4. En ella se observa claramente la diferencia de porcentajes de estudiantes en los niveles N1 a N3 dependiendo del tipo de respuesta. El resultado del contraste fue Chi=98,3, g.l.=2, p<,0001, por lo que se rechaza la hipótesis de independencia entre el nivel de lectura y la respuesta.

La conclusión directa es que la actividad de extrapolación de un gráfico requiere al menos un nivel de lectura N2 en la clasificación de Curcio y sus colaboradores y, de hecho, la mayoría de los niños que logran la respuesta correcta es a partir del N2. Sería entonces muy importante lograr en los niños al menos dicho nivel mediante unas actividades apropiadas.

Tabla 4. Clasificación cruzada de respuesta y nivel de lectura en los estudiantes con respuestas parcialmente correctas o correctas

		Nivel de lectura		
Respuesta		N1	N2	N3
Parcialmente correcta	Frecuencia	60	69	0
	% por fila	46,5	53,5	0,0
Correcta	Frecuencia	0	102	32
	% por fila	0,0	76,1	23,9

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

La interpolación de un nuevo valor en un gráfico en el que el conjunto de datos representados muestra claramente una tendencia de crecimiento lineal no resultó sencilla para los escolares chilenos de 6º curso de Educación Primaria. Este porcentaje es bastante menor que el alcanzado con un diagrama de barras en la investigación de Guimarães (2002), un 54,2% con niños de 3º curso, pero como hemos indicado, esta autora utiliza unos datos más simples en los que no se requiere analizar la tendencia de los mismos, sino simplemente dar un valor similar a los ya representados. El porcentaje es similar al obtenido por Cruz (2013) también con estudiantes de 3º curso (36%), aunque los datos de la autora se tomaron justamente al finalizar un proceso de instrucción y la tarea planteada tampoco requería identificar la tendencia en los datos.

Los niveles de lectura alcanzados en la tarea son semejantes a investigaciones previas, pues los porcentajes de estudiantes que alcanzan al menos el nivel de lectura N1 y N2 coinciden con las investigaciones de Cruz (2013) y Fernandes et al. (2017), y son mejores que los de Fernandes y Morais (2011). Estos resultados, al compararlos con otros de esta misma muestra, indican que son similares a cuando se trataba de leer afirmaciones sobre pictogramas e inferiores a cuando tenían que pasar la información de un pictograma a una tabla (Díaz-Levicoy et al., 2017). Comparando los resultados por curso, los estudiantes de 6º presentan mejores resultados que los de 7º curso, pues alcanzan con más frecuencia los niveles N1 y N2 y hay una mayor frecuencia de respuestas correctas, así como mejor puntuación global.

Estos resultados, pese a abordar una sola tarea sobre la extrapolación, entregan información de interés para los profesores en formación y en ejercicio, ya que estos presentan dificultades a trabajar con gráficos estadísticos representaciones (por ejemplo, Arteaga y Batanero, 2010; González, Espinel y Ainley, 2011; Molina-Portillo, Contreras, Ruz y Contreras, 2018; Rodríguez-Alveal, 2017), y porque son los responsables de capacitar a sus estudiantes para que dominen los contenidos que deben enseñar. En tal sentido, permite conocer las posibles dificultades que podrían presentar sus estudiantes al trabajar con este tipo de actividades y considerarlo en el planeamiento y organización del proceso de instrucción. También sugieren la necesidad de proponer a los estudiantes de estos niveles situaciones similares en las que deben identificar la tendencia de los datos y dar un valor no representado en los mismos en Educación Primaria. Dichas actividades se requieren en múltiples situaciones y forman parte de la cultura estadística requerida por los estudiantes y futuros ciudadanos.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM.

Bertin, J. (1967). *Sémiologie graphique*. París, Francia: Gauthier-Villars.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, EE.UU.: NCTM.

Cruz, A. (2013). *Erros e dificuldades de alunos de 1.º ciclo na representação de dados estatísticos* (Tesis de Máster no publicada). Universidad de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Lectura de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Primaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 217-226). Zaragoza: SEIEM.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. y Arteaga, P. (2018). Dificultades de los estudiantes chilenos de Educación Básica en la construcción de diagramas de barras. *Paradigma, 39*(2), 107-129.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society: What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Recuperado de: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Evangelista, M. B. (2013). Atividades de interpretação de gráficos de barras e linhas: o que sabem os alunos do 5º ano? En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 121-128). Granada: Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Fernandes, J. A. y Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 95-115.

Fernandes, R. J., dos Santos, G. y Pereira, R. (2017). Ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas nos anos iniciais de escolarização. *UNIÓN, 50,* 41-61.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

González, M. T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education* (pp. 187-197). New York, EE.UU.: Springer.

Guimarães, G. L. (2002). *Interpretando e construindo gráficos de barras* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

MINEDUC (2012). *Bases curriculares 2012: Educación básica matemática.* Santiago de Chile, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Ruz, F. y Contreras, J. (2018). Evaluación de la cultura estadística en futuros profesores de educación primaria: Interpretación y argumentación de gráficos estadísticos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 348-357). Gijón: SEIEM

Pagan, A., Leite, A. P., Magina, S. y Cazorla, I. (2008). A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no Ensino Fundamental e Médio. En V. Gitirana, F. Bellemain y V. Andrade (Eds.), *Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Recife, Brasil: Universidad Federal de Pernambuco. Recuperado de: http://www.lematec.net.br/CDS/SIPEMAT08/artigos/CO-76.pdf

Ridgway, J. (2016). Implications of the data revolution for statistics education. *International Statistical Review, 84*(3), 528-549.

Rodríguez-Alveal, F. E. (2017). Alfabetización estadística en profesores de distintos niveles formativos. *Educação & Realidade, 42*(4), 1459-1477.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers

Watson, J. M. (2013). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, EE.UU.: Lawrence Erlbaum.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN: ANÁLISIS DE LAS PREMISAS UTILIZADAS AL MODELIZAR

Difficulties in the mathematical learning of pre-service teachers: analysis of the premises used when modeling

Fernández-Ahumada, E.[a] y Montejo-Gámez, J.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación analiza el conocimiento que los estudiantes para maestros utilizan al modelizar situaciones abiertas, con el objetivo de detectar dificultades en su aprendizaje matemático. El foco del análisis se sitúa sobre las premisas, principal novedad con respecto a lo existente en la literatura, donde abunda el análisis centrado en el proceso de resolución, con el fin de ganar profundidad de análisis y exhaustividad para conocer la interacción del conocimiento del contexto con el conocimiento matemático. Las dificultades encontradas en este trabajo ponen de manifiesto la necesidad formativa de trabajar la modelización a partir de situaciones experimentables que vayan creciendo en lejanía al contexto del alumnado, así como utilizar situaciones con diferentes escalas de magnitud, que contribuyan a desarrollar la intuición al respecto.

Palabras clave: *resolución de problemas, premisas, dificultades en modelización matemática.*

Abstract

This paper analyzes the knowledge used when modelling to detect difficulties in mathematical learning of pre-service teachers. The focus of the analysis is set on the premises, the main novelty with respect to what exists in literature, where there is an abundance of analysis focused on the process of resolution, in order to gain depth of analysis and exhaustiveness to know the interaction of context knowledge with mathematical knowledge. The difficulties encountered in this work highlight the need for training on modelling, starting from situations that can be experienced and then using situations far from students' context, as well as posing situations with different scales of magnitude, which contribute to developing intuition in this regard.

Keywords: *solving problems, premises, difficulties in mathematical modelling*

INTRODUCCIÓN

En el contexto educativo actual, a nivel nacional e internacional, las instituciones educativas están apostando por modelos de enseñanza de las matemáticas ligados a desarrollo de competencias, que están principalmente enfocados al “saber hacer” con el conocimiento matemático adquirido. Existe un amplio debate entre educadores, investigadores e instituciones sobre cómo debe entenderse la competencia matemática en el ámbito escolar (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2013), aunque hay consenso en que esta debe contemplar destrezas transversales a los contenidos y tiene que estar orientada a la comprensión del contenido matemático en contextos reales (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Estas capacidades están fuertemente vinculadas a las destrezas de modelización matemática (Maaß y Gurlitt, 2011), por lo que la modelización se ha convertido en un foco de interés para la investigación en educación matemática. Existe una profusa literatura sobre modelización matemática en el ámbito escolar, que abarca diferentes perspectivas educativas (puede verse una revisión en Kaiser, 2014), diferentes fines didácticos y diferentes concepciones

Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J. (2019). Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 273-282). Valladolid: SEIEM.

sobre la noción de la modelización. Respecto a los fines, García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch (2006) señalaron el valor didáctico doble de la modelización: como destreza específica y como herramienta didáctica para el aprendizaje de otros contenidos. En cuanto a los focos de la modelización, se pueden establecer tres principales: modelización como proceso (Blum y Leiß, 2007), como destrezas que se desarrollan (Niss y Højgaard, 2011) o como creación de un modelo matemático (Lesh y Harel, 2003). En esta comunicación se entiende la modelización como una actividad escolar que se desarrolla mediante el proceso de diseño, aplicación y evaluación de modelos matemáticos, que permite construir conocimiento acerca de cierto sistema a partir de una cuestión de interés en el mismo y contribuye al desarrollo de ciertas destrezas matemáticas. Además, se asume que su finalidad didáctica es el desarrollo de destrezas específicas.

El desarrollo de estas destrezas de modelización es de interés en la formación del profesorado. Según Colwell y Enderson (2016), para que los alumnos se conviertan en solucionadores de problemas que utilicen diversas herramientas que les ayuden a razonar, modelar y comunicar, los maestros necesitan implementar dichas técnicas de instrucción en sus aulas, y la formación inicial es el lugar clave para promover estas técnicas y apoyar a los futuros maestros. En esta línea, Ortiz, Rico y Castro (2007) consideran esencial abordar la modelización matemática en la formación inicial de los docentes por tratarse de una herramienta dinámica que moviliza conceptos y procedimientos matemáticos en el abordaje de situaciones problemáticas. Por otro lado, English (2006) considera las tareas de modelización como experiencias desafiantes y estimulantes para los futuros maestros, que permiten explorar la naturaleza de las ideas matemáticas que se quieren trabajar y considerar estrategias de implementación apropiadas. A su vez, Doerr (2007) apunta que el profesorado en formación debe tener experiencias sobre modelización que le provean de contextos y herramientas para la enseñanza y que constituyen ejemplos prácticos que posteriormente ellos mismos puedan utilizar como docentes. Por su parte, Jackson, Dukerich y Hestenes (2008) aseguran que trabajar modelización provee al profesorado de una taxonomía de concepciones erróneas típicas de los estudiantes y permite corregir muchas debilidades del método tradicional de enseñanza-aprendizaje, incluyendo la fragmentación del conocimiento, la pasividad de los estudiantes y la persistencia de creencias ingenuas sobre el mundo real.

Todos estos autores coinciden en la oportunidad que supone la incorporación de la modelización en la formación de profesorado y en las aulas para reflexionar sobre la propia actividad docente y sobre el significado de enseñar matemáticas en la sociedad actual. Además, se ha de tener en cuenta que numerosos profesores de matemáticas en ejercicio no consideran la modelización como una componente esencial del aprendizaje de las matemáticas, dudan de sus propias competencias sobre la modelización matemática, y les resulta difícil llevar a cabo tareas de modelización en clase, en particular porque los estudiantes pueden encontrar soluciones diferentes y no es fácil identificar lo que está en juego en tales tareas. En definitiva, la modelización matemática supone un reto tanto para los propios estudiantes como para sus (futuros) profesores, por lo que resulta necesario apoyar la adquisición de competencias asociadas a la misma en formación de profesorado (Wess y Greefrath, en prensa).

A pesar de la importancia de la modelización para la formación del profesorado que se ha comentado, la investigación ha encontrado diferentes estudios que ponen de manifiesto las dificultades de los futuros maestros para abordar matemáticamente situaciones abiertas. Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano y León-Mantero (2017) analizaron las estrategias seguidas por los estudiantes ante problemas abiertos y profundizaron en las dificultades subyacentes a las carencias observadas. En el estudio llevado a cabo por Aydin y Özelgi (2017), se pusieron de manifiesto dificultades para establecer conexiones entre el contexto y el conocimiento matemático. Siguiendo la misma línea, Sáenz (2009) notó que los futuros maestros presentaban dificultades en el conocimiento contextual, y que estas limitaciones conducían a dificultades para trabajar con modelos matemáticos para la resolución de problemas reales. Por su parte, Olande (2014) exploró la complejidad en los niveles de competencia que los futuros maestros activaban al resolver ítems de PISA 2003, constatando que aquellas tareas que requerían reflexión y conexión entre contenidos y con el contexto generaron mayor dificultad.

Por todo lo anterior, parece evidente que analizar la raíz de las dificultades que emergen cuando futuros maestros se enfrentan a una tarea abierta contextualizada, resulte de interés para la investigación en educación matemática. Elegir el enfoque desde el que abordar dicha cuestión, de entre los existentes en torno a modelización matemática (proceso, destrezas y modelo), puede ser objeto de discusión. El enfoque de proceso no resulta sencillo ya que las rutas de modelización que los estudiantes se ven obligados a seguir cuando se involucran en una modelización son complejas y normalmente se desvían de la visión idealizada del ciclo de modelización (Blum y Leiß, 2007), además de que diversos estudios (Ärlebäck, 2009; Aymerich y Albarracín, 2016) ponen de manifiesto las dificultades para identificar de manera fiable las diferentes etapas del proceso de modelización del trabajo de los estudiantes. Por otro lado, el enfoque de las destrezas puede llevar a una atomización de la idea global de modelización, desvirtuando el sentido de evaluar la modelización como un proceso de conexiones. Se plantea, por tanto, la cuestión de observar las dificultades en el modelo. La utilidad y potencialidad del análisis del modelo centra las preguntas de investigación de este estudio.

De entre los trabajos que ofrecen una descripción de los elementos de un modelo matemático, en el ámbito de la educación matemática, Lesh y Harel (2003) proponen una noción basada en dos elementos: un sistema conceptual y los procedimientos que este lleva asociado, que se expresan a través de diferentes representaciones y cuyo objeto es resolver una situación problemática. Esta conceptualización da una visión cercana para nuestros propósitos, ya que introduce dos componentes que deben considerarse en la investigación educativa: la estructura matemática subyacente a una situación y las representaciones utilizadas para expresarla, ambas orientadas a la resolución de un problema. Por su parte, Hestenes (2010) define modelo como una representación de la estructura de un sistema dado. Así, basa su conceptualización del modelo en tres elementos: (i) el sistema o conjunto de objetos relacionados, que pueden ser reales o imaginarios, físicos o mentales, simples o compuestos, (ii) la estructura del sistema, que es un conjunto de relaciones entre sus objetos, y (iii) la representación, que es lo que a menudo identificamos con el modelo, una inscripción concreta de palabras, símbolos o figuras (como gráficos, diagramas o bocetos), sin olvidar que la inscripción se complementa con un sistema de reglas y convenciones (en su mayoría tácitas) para codificar la estructura del modelo. Cercana a esta conceptualización está la de Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa) que proporcionan una definición articulada en torno a tres componentes con diferentes niveles de abstracción: el sistema sobre el que se quiere obtener conocimiento y que está compuesto por objetos, sus propiedades y las relaciones entre objetos y propiedades, la matematización del sistema, es decir, la colección de conceptos y propiedades matemáticas que abstraen la información relevante de los elementos del sistema junto con la colección de relaciones que se aplican para extraer conocimiento matemático a partir de dichos elementos, y la representación matemática del sistema, es decir, el conjunto de descripciones explícitas de los elementos matemáticos que permiten trabajar matemáticamente con ellos y extraer conocimiento acerca del sistema. La característica principal de esta definición es su operatividad, ya que permite establecer categorías para el análisis de modelos matemáticos producidos en contextos educativos. En concreto, dentro de la matematización distingue dos subcategorías: (i) las premisas, que son afirmaciones cuya veracidad no queda justificada por el desarrollador y que se utilizan explícitamente o subyacen a lo que se describe en la representación, y (ii) las deducciones, que son aquellas afirmaciones cuya veracidad se justifica expresamente.

Bajo la concepción de modelo basada en la terna Sistema-Matematización-Representación, el análisis de las premisas permite explorar el conocimiento que el estudiante pone en juego de forma espontánea para desarrollar el modelo, dejando así de manifiesto aquello que conoce y (por omisión) lo que no a la hora de modelizar una situación presentada en contexto. Este marco, por tanto, es potencialmente útil para detectar dificultades en el proceso de modelización y permite, por tanto, abordar la pregunta de investigación del presente estudio: ¿qué dificultades tienen los estudiantes para maestros para plantear un modelo ante una situación presentada en contexto?

OBJETIVOS

El presente estudio busca explorar las dificultades al modelizar que evidencian los maestros en formación inicial, centrando el foco en las premisas del modelo, como unidad de análisis para identificar limitaciones en modelización matemática.

O1: Caracterizar las premisas que utilizan los maestros en formación inicial para plantear un modelo matemático en términos de los supuestos que se utilizan para desarrollarlo.

O2: Detectar dificultades en el desarrollo de modelos matemáticos a partir del uso de las premisas como unidad de análisis.

METODOLOGÍA

Este estudio parte de una perspectiva exploratoria y emplea una metodología cualitativa e interpretativa para el desarrollo de la investigación.

Participantes y recogida de información

La muestra estuvo compuesta por 37 estudiantes del grado de maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada (24 mujeres y 13 hombres). Los participantes trabajaron por equipos, de acuerdo a su agrupación habitual de trabajo: 1 grupo de dos personas, 5 de tres integrantes y 5 de cuatro componentes. Los 11 grupos trabajaron durante una hora y media, sin interacciones entre grupos, para resolver una situación abierta presentada en un contexto realista (Figura 1). Esta actividad fue diseñada con el objeto de plantear una situación donde una propiedad del sistema de referencia, que no es explícita en la tarea pero que todos los estudiantes conocen, fuera relevante para abordar con éxito la situación. Para ello, se acompañó el estímulo presentado en la Figura 1 con cuatro cuestiones de profundización para que los participantes hicieran explícitos sus modelos (apartado a) y sus hipótesis (apartado b), los generalizasen (apartado c) y validasen usando información en la red (apartado d).

El faro de Cabo Mayor está situado al Norte de Santander, muy cerca de la playa del Sardinero, en un lugar abierto al Mar Cantábrico. Este faro da luz a 91 m sobre el nivel del mar, que es de gran utilidad para avisar a los barcos de la cercanía de la costa.

Cuando un barco empieza a divisar la luz del faro sobre el horizonte ¿a qué distancia de la costa se encuentra?

Figura 1. Tarea de referencia (adaptada de Kaiser, 2014)

Tras treinta minutos de trabajo se facilitó una ayuda para resolver el problema, que proporcionaba una representación sin texto de la situación propuesta (Figura 2). Este apoyo gráfico se proporcionó con la intención de orientar a los grupos que presentaran dificultades. El resultado del procedimiento de recogida de información proporcionó 11 registros escritos. Dado que se buscó atender al desarrollo de los modelos, estos registros recogieron las soluciones definitivas propuestas por cada grupo y también todos los cálculos y descripciones informales del problema que desarrollaron durante el proceso.

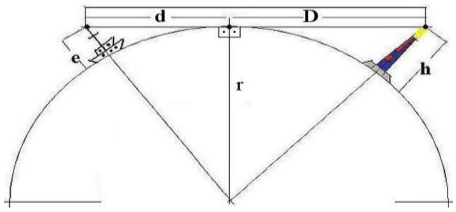


Figura 2. Ayuda que se le proporcionó tras treinta minutos de trabajo

Variables seleccionadas y procedimiento de análisis

La estrategia de análisis partió de la definición de modelo matemático propuesta por Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa). Dadas las características de la tarea, en las que la información sobre el sistema que se utiliza es de interés específico, se consideraron también las premisas sobre el sistema, es decir, aquellas afirmaciones sobre el sistema que se utilizaron sin justificar. Para discriminarlas, se consideró que cualquier afirmación expresada en simbolismo matemático o en lenguaje verbal pero con terminología matemática fue una premisa matemática, mientras que las demás fueron consideradas como premisas sobre el sistema. Además, se prestó atención a las premisas descritas explícitamente frente a aquellas que utilizaron de manera implícita. Asimismo, dado que se permitió el acceso a internet en todo momento, se vio necesario considerar por separado las premisas recogidas en la red de forma evidente, de aquellas premisas impuestas de forma espontánea por los desarrolladores del modelo. Por último, dada la finalidad de la investigación, se consideró la validez de la premisa como una característica a considerar.

De esta manera, la investigación amplió la noción de premisa dada por Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa) a afirmaciones sobre el sistema. Así, esta investigación consideró una premisa como cualquier afirmación (matemática o sobre el sistema) cuya veracidad no queda justificada por el desarrollador y que se utiliza explícitamente o subyace a la representación del modelo hecha por el desarrollador. Se empleó la premisa como unidad de análisis y se establecieron cuatro variables de estudio: i) ámbito, que puede ser el sistema real o su matematización; ii) explicitud, que da lugar a premisas explícitas (aquellas dadas en respuesta al apartado b) o afirmaciones evidentemente descritas como suposiciones) e implícitas; iii) Fuente, según la cual una premisa puede ser propia o externa (de internet o de la ayuda proporcionada); y iv) Validez, que indica si la premisa es asumible dentro de la situación de la tarea.

El análisis de la información recogida comenzó con un sondeo de las posibles soluciones que los participantes pudieron encontrar en la web, con el objeto de discriminar la información útil para detectar necesidades formativas. A continuación, se llevó a cabo el siguiente procedimiento: 1) se hizo un análisis de contenido de las representaciones dadas en los registros para recoger evidencias de las premisas empleadas por los estudiantes. 2) Dentro de la perspectiva adoptada para este estudio, se formularon las premisas del sistema como afirmaciones que daban cuenta de la información recogida en dichas evidencias. 3) Se extrajeron categorías emergentes de premisas en función a sus categorías. 4) Para cada premisa formulada, se valoró cada una de las variables tomadas en consideración. El criterio para valorar la variable “ámbito” se proporcionó anteriormente. Además, se valoraron como explícitas todas las premisas recogidas en las respuestas al apartado b), así como todas aquellas que iniciaban un razonamiento (Tabla 1, filas 2 y 4) o se expresaron verbalmente como suposiciones (Tabla 1, fila 6). Por otra parte, se consideraron como externas las premisas derivadas de la ayuda dada o de las fuentes encontradas en el sondeo previo de las posibles soluciones; el resto se consideraron premisas propias. La validez se decidió en función de si la afirmación utilizada era correcta matemáticamente y contribuía al modelo.

Para caracterizar las premisas empleadas en la modelización (O1), se elaboraron las distribuciones de frecuencias asociadas a las variables dentro de cada una de las categorías emergentes (véase la Tabla 1). Para detectar dificultades al desarrollar modelos matemáticos (objetivo O2), se tomaron las premisas que se valoraron como no asumibles, y se interpretaron las posibles causas que las generaron. Finalmente, la profundidad de los resultados obtenidos permitió valorar la pertinencia de las premisas como unidad de análisis para la detección de dificultades en modelización matemática.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Caracterización de las premisas empleadas

Se inicia la exposición de los resultados con un ejemplo de cómo se extrajeron las premisas partiendo de las evidencias. La Figura 3 contiene una representación pictórica del modelo planteado para abordar la tarea. De esta evidencia, se extrajeron las siguientes cuatro premisas:

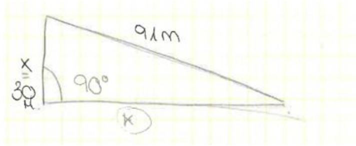


Figura 3. Ejemplo de evidencia

Premisa 1: "91 m es la distancia en línea recta del barco al foco del faro". En este caso, a la variable ámbito se le asignó el valor sistema, la variable explicitud, se consideró implícita y la variable fuente, se asumió como propia.

Premisa 2: "La altura del faro es 30 m". Este caso presentó los mismos valores que el anterior a excepción del valor en la variable fuente que se consideró externa (el faro se eleva sobre un acantilado 30 m sobre el nivel del mar, según Wikipedia).

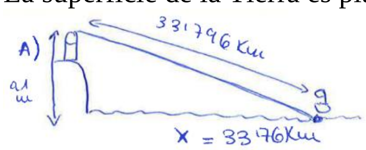
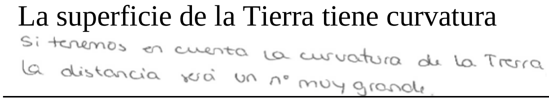
Premisa 3: "La superficie de la Tierra es plana". Este caso presentó los mismos valores que la primera premisa para todas las variables: sistema, implícita y propia, respectivamente.

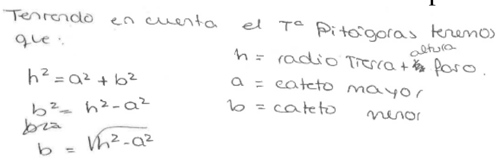
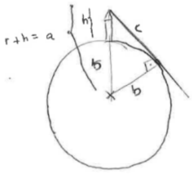
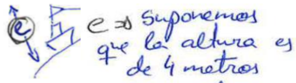
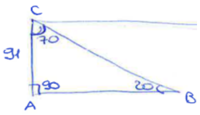
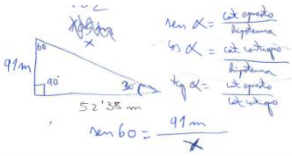
Premisa 4: "El faro es perpendicular a la superficie terrestre". En este caso, la variable ámbito, obtuvo el valor matematización, la variable explicitud, implícita, y la variable fuente, propia.

Descripción de categorías encontradas

Dado que cada modelo contiene varias premisas y que se recogieron todas las aproximaciones a los problemas de cada grupo a lo largo de todo el proceso de resolución, se identificaron un total de 67 premisas. La Tabla 1 muestra una síntesis de los resultados en términos de las variables consideradas.

Tabla 1. Categorías de premisas encontradas y distribución de frecuencias de las variables en cada categoría

Formulación de la premisa	Frecuencia	Sistema	Explícitas	Propias	Válidas
La superficie de la Tierra es plana 	5	5	0	5	0
La superficie de la Tierra tiene curvatura 	10	3	4	2	10
En el momento que el barco empieza a divisar el faro, la recta que une barco y faro es tangente a la superficie de la Tierra 	8	2	1	2	8

El Teorema de Pitágoras es aplicable a la situación planteada 	11	0	8	9	9
El radio de una circunferencia que pasa por un punto P de la misma es perpendicular a la recta tangente a la circunferencia que pasa por ese punto. 	5	0	2	4	5
La magnitud de cierta variable viene dada por un valor numérico 	16	16	9	6	12
La amplitud de cierto ángulo viene dada por un valor numérico 	4	0	2	3	2
Otras afirmaciones matemáticas de interés 	8	0	5	6	5

Nota: “Sistema” denota la cantidad de premisas referidas al sistema; Del mismo modo “Explícitas”, “Propias” y “Válidas” indican la frecuencia de esos valores de las variables

Se encontraron en total ocho categorías de premisas: dos referidas a la curvatura de la Tierra, tres relacionadas con cuestiones geométricas, dos que estaban en conexión con los valores numéricos de variables y una última de afirmaciones matemáticas no atribuibles a otras categorías. Las categorías relacionadas con la curvatura de la Tierra son las naturales: 5 grupos utilizaron (siempre de forma implícita) que la Tierra es plana, mientras que 10 trabajaron bajo la premisa de que su superficie se curva (en 4 ocasiones de forma explícita). Sin embargo, debe observarse que estas categorías no son excluyentes, debido a que algunos grupos cambiaron el modelo desarrollado tras recibir la ayuda.

Además, 8 de los 10 grupos que trabajaron bajo la premisa de que la Tierra se curva lo hicieron usando la representación provista o alguna de las páginas web encontradas, por lo que se observa que solo 2 de los 11 grupos tuvieron en cuenta de forma natural la curvatura del planeta.

Entre las premisas relacionadas con cuestiones geométricas, 8 de los grupos evidenciaron suponer que la línea que une barco y luz del faro, en el momento que el barco empieza a divisar el faro, es tangente a la superficie de la Tierra (Tabla 1, tercera fila). Siete de los grupos lo hicieron de forma implícita, pero uno de ellos lo hizo explícito. A su vez, el número de equipos que usó la propiedad de que el radio que pasa por un punto de cierta circunferencia y la recta tangente a la misma por dicho punto son perpendiculares (Tabla 1, quinta fila) fue tan solo de 5, dos de los cuales lo expresaron además de forma explícita utilizando el cuadrado punteado para representarlo. Por su parte, el Teorema de Pitágoras fue reconocido unánimemente como herramienta útil para resolver el problema, y solo en dos de los casos (en los que se asumió aplicabilidad para triángulos no rectángulos) no fue válida.

En cuanto a las premisas asumidas sobre los valores numéricos de magnitudes del sistema de partida, se encontraron cuatro subcategorías diferenciadas. En primer lugar, los datos tomados de forma externa, principalmente el radio de la Tierra, que se registraron en tres casos. En segundo lugar, las estimaciones sobre la altura del barco (Tabla 1, sexta fila), que en los dos casos que se encontraron fueron válidas dentro del planteamiento hecho. También se encontraron cuatro premisas derivadas de una interpretación confusa del enunciado, que se etiquetaron como no asumibles. En cuarto lugar, se observaron cuatro casos en los que se asumieron las amplitudes de los ángulos de un triángulo, dos de forma válida y en otros dos casos de forma no válida (la séptima fila de la Tabla 1 muestra un ejemplo no válido). Finalmente, se constataron otras afirmaciones matemáticas de interés, 5 de ellas válidas, como la aplicabilidad de conceptos trigonométricos a triángulos rectángulos o la necesidad de trabajar siempre con las mismas unidades. Las otras tres, por el contrario, fueron etiquetadas como no válidas.

Dificultades encontradas en el desarrollo de modelos

El análisis presentado en la sección anterior reveló algunas dificultades de los futuros maestros en relación a su aprendizaje de modelización matemática. En primer lugar, el hecho de que 2 de los 11 grupos asumiera el carácter plano de la superficie terrestre para desarrollar su modelo indica que, en una primera aproximación a la tarea, los participantes no se percataron de que el modelo más natural no conduce a solución alguna. Se constata, por tanto, la dificultad para modelizar una situación que no es directamente experimentable por los estudiantes. En clave del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), esta dificultad está relacionada con la fase de simplificación y estructuración. En cualquier caso, esta evidencia en sí misma no indica si la dificultad se debe a la lejanía de la situación respecto de la experiencia de los estudiantes (abstracción o desmotivación) o es debida a que la tarea trabaja con distancias no controlables por ellos (cuestión de escala).

Esta cuestión se clarifica en virtud de las premisas no válidas dentro de la categoría de asignación de magnitudes (sexta fila en la Tabla 1, puede verse un ejemplo de este tipo de premisas en la Figura 3, Premisas 1 y 2). En ellas, se observan confusiones como identificar la distancia barco-faro en línea recta y sobre la superficie del mar, o errores severos como identificar esta distancia con 6371 km (el radio de la Tierra). Este tipo de premisas empleadas indican dificultades con la interpretación de la situación, particularmente el significado de la información recibida. En términos del ciclo de Blum y Leiß (2007), se relacionan con la fase de comprensión de la situación, aunque también se pueden relacionar con dificultades con el sentido numérico, ya que dejan de manifiesto baja intuición sobre la magnitud de las cantidades (que se observa al suponer, por ejemplo, que el alcance del faro es de 91 m, como se observa en la Figura 1). Este hecho apunta a la escala como foco principal de la dificultad sobre la abstracción de la situación señalada antes.

En síntesis, el análisis de las premisas que se desarrolló en esta investigación apunta a dificultades de los estudiantes para trabajar sobre una situación que no es directamente experimentable por ellos en las primeras fases del proceso de modelización, por lo que no se trata de dificultades directamente relacionadas con desconocimiento del contenido. Este resultado está en la línea del trabajo de Montejo-Gámez et al (2017), que observaron un alto porcentaje de maestros en formación inicial que no supieron abordar una tarea abierta a pesar de que conocían el contenido matemático subyacente, y con los hallazgos de Aydin y Özelgi (2017), Olande (2014) y Sáenz (2009), que constataron la necesidad del desarrollo del conocimiento contextual.

En cuanto a las causas de las dificultades señaladas, se observaron dos focos principales: la posible abstracción de una situación que no es accesible directamente y el conflicto surgido al trabajar con órdenes de magnitud para los que no han desarrollado intuición. En este sentido, se contempla la necesidad formativa de trabajar la modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria a partir de situaciones experimentables que vayan creciendo en lejanía al contexto del alumnado. También se propone utilizar situaciones con diferentes escalas de magnitud, que contribuyan a desarrollar la intuición al respecto (problemas de Fermi, por ejemplo). En términos del ciclo de modelización, es necesario reforzar las primeras fases del proceso.

CONCLUSIONES

Esta comunicación presenta un estudio sobre las dificultades de los futuros maestros en modelización matemática a partir de las premisas utilizadas en una situación contextualizada. El análisis se hizo efectivo a partir de la conceptualización de modelo matemático y la interpretación del conocimiento que activaron los estudiantes de forma natural. La principal novedad del trabajo es el foco sobre las premisas, que permite ganar profundidad de análisis y exhaustividad para conocer la interacción del conocimiento del contexto con el conocimiento matemático.

Se propuso una tarea contextualizada que solo se podía resolver utilizando una información conocida por todos, pero que no es experimentable ni evidente en el planteamiento real de la misma. La mayoría de los grupos no reconoció inicialmente la necesidad de usar esta información, pero supo gestionar las matemáticas subyacentes a la misma una vez la conocieron. Este resultado indica dificultades en el inicio del proceso de modelización, lo que sugiere una conexión con las dificultades con el conocimiento contextual de los futuros maestros de Educación Primaria que señala la literatura y que, por otra parte, son esperables dadas las características del sistema educativo actual en el que no se fomenta este tipo de destrezas matemáticas. La necesidad de trabajar modelización matemática en todos los niveles educativos queda, por tanto, de manifiesto.

El presente estudio tiene algunas limitaciones que deben señalarse. En primer lugar, se observa la dependencia de los resultados respecto de la tarea. Como es habitual al investigar en modelización, la complejidad de las tareas y la apertura de los enunciados obliga a explorar con más detenimiento la validez externa de los resultados obtenidos. Valorar en qué medida dependen los resultados obtenidos del sistema planteado y de los fines educativos con los que se propuso la tarea supone una discusión de interés que debe abordarse en futuras investigaciones. En segundo lugar, el uso de internet a lo largo de la recogida de información, que se consideró en principio como positiva para fomentar la validación de los resultados, pero que condicionó algunos de los modelos observados. Se considera apropiado permitir el acceso a la red controlando los tiempos. Finalmente, debe precisarse la metodología basada en el análisis de las premisas, debiendo adentrarse en la interpretación de los resultados, que puede sesgar los resultados. El desarrollo de instrumentos que precisen el procedimiento de interpretación y la réplica de estudios como el presente para testar la validez de dichos instrumentos son desafíos que se deben abordar en el futuro.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics. En M. Pytlak, T. Rowland y W. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7)* (pp. 1010-1020). Rzeszów, Polonia: CERME.

Aydin, U. y Özgeldi, M (2017). The PISA tasks: Unveiling prospective elementary mathematics teachers' difficulties with contextual, conceptual, and procedural knowledge, *Scandinavian Journal of Educational Research*, *63*(1), 105-123.

Aymerich, À. y Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning*, *9*(1), 5-24.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.

Colwell, J. y Enderson, M. C. (2016). "When I hear literacy": Using pre-service teachers' perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teaching and Teacher Education 53*, 63-74.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). Nueva York, EE.UU.: Springer.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics 63*(3), 303–323.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM, 38*(3), 226-246.

Hestenes, D. (2010) Modeling theory for math and science education. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA-13* (pp. 13-41). Boston, EE.UU.: Springer.

Jackson, J., Dukerich, L. y Hestenes, D. (2008). Modeling instruction: An effective model for science education. *Science Educator*, *17*(1), 10-17.

Kaiser, G. (2014) Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-404). Amsterdam, Países Bajos: Springer.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 157-189.

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2011) LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, 1* (pp. 629-639). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Montejo-Gámez, J. y Fernández-Ahumada, E. (en prensa). The notion of mathematical model for educational research: Insights of a new proposal. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

Niss, M. A. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Dinamarca: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.

Olande, O. (2014). Graphical artefacts: taxonomy of students' response to test items. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 53-74.

Ortiz, J., Rico, L y Castro, E. (2007). Mathematical modelling: A teacher's training study. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 241-249). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.

Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 123-143.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Amsterdam, Países Bajos: Springer.

Wess R. y Greefrath G. (en prensa). Professional competencies for teaching mathematical modelling – supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.

AVANZANDO EN LA CARACTERIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE CONJETURAR Y PROBAR DE LOS MATEMÁTICOS PROFESIONALES [xxi]

Advancing the characterisation of the mathematical practices of conjecturing and proving of research mathematicians

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo, el aprendizaje es considerado un proceso sociocultural que se explica a través de la participación en comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). Por este motivo, este estudio tiene por objeto acercarnos a la comunidad de práctica de los matemáticos profesionales, para así encontrar nuevas herramientas que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, aquí abordamos el estudio, desde la educación matemática, de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. El marco teórico que adoptamos en esta investigación es la dualidad "usar-crear" propuesta por Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) para caracterizar lo que denominan actividad matemática en progreso. Nuestros resultados muestran el valor epistémico de los ejemplos en ambas prácticas.

Palabras clave: *Conjeturar, probar, usar, crear, matemáticos profesionales.*

Abstract

In this paper, learning is considered a sociocultural process that is explained through the participation in communities of practice (Lave y Wenger, 1991). For this reason, this study aims to approach the community of practice of research mathematicians and thus finding new tools that allow us to improve the teaching and learning of mathematics. Specifically, we tackle the study, from mathematics education, of the mathematical practices of conjecturing and proving of research mathematicians. The theoretical framework we adopt in this research is the duality "using-creating" proposed by Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) to characterise what they call advancing mathematical activity. Our results show the epistemic value of examples in both practices.

Keywords: *Conjecturing, proving, using, creating, research mathematicians.*

INTRODUCCIÓN

En educación matemática, el interés por las prácticas matemáticas se ha incrementado notablemente en los últimos años. Este incremento se debe, por un lado, a la consideración desde la filosofía de las matemáticas de que el conocimiento matemático no implica sólo conocer definiciones, teoremas, etc., sino también conocer los procesos seguidos para construir esas definiciones, teoremas, etc. (Lakatos, 1976; Tymoczko, 1998). Por otro lado, este creciente interés también está motivado por las recientes sugerencias de naturaleza curricular que hacen explícita la inclusión de estas prácticas como contenido matemático escolar (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010; etc.). En este estudio, vamos a utilizar la expresión *práctica matemática* para referirnos a las actividades que desarrolla un investigador en matemáticas cuando construye conocimiento matemático durante su investigación. Concretamente, y principalmente por su

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 283-292). Valladolid: SEIEM.

relevancia en el desarrollo del conocimiento matemático (Turrisi, 1997), aquí nos centramos en las prácticas matemáticas de conjeturar y probar.

En esta investigación, el aprendizaje de las prácticas matemáticas es considerado un proceso social y cultural que se explica a través de la participación periférica legítima de Lave y Wenger (1991). Desde esta perspectiva sociocultural, se entiende que una persona aprende cuando participa en una comunidad de práctica determinada o, dicho de otro modo, cuando se involucra en las actividades diarias propias de una profesión. En concreto, Lave y Wenger (1991) afirman que “la participación en la práctica cultural en la que cualquier conocimiento existe es un principio epistemológico del aprendizaje” (p. 98). En este sentido, y poniendo el foco en las prácticas matemáticas, consideramos que los estudiantes (aprendices) deberían tener como último objetivo poder participar en las prácticas clásicas de los matemáticos profesionales (investigadores en matemáticas) como estos últimos lo hacen. En apoyo a esta tesis sobre el aprendizaje de las prácticas matemáticas, Weber y Dawkins (2018) han afirmado recientemente que “existe relación entre lo que los matemáticos profesionales hacen y cómo se enseñan las matemáticas” (p. 70). De hecho, también sostienen que las prácticas matemáticas desarrolladas por los matemáticos profesionales nos pueden dar información sobre “lo que queremos que los estudiantes aprendan y cómo se debería diseñar la enseñanza” (p.70). En esta línea, Weiss y Moore-Russo (2012) ponen de manifiesto lo paradójico que resulta que los profesores de matemáticas, que trabajan con las matemáticas cualquier día de su vida profesional, conozcan tan poco sobre la clase de trabajo que hacen los matemáticos profesionales. Estos autores también defienden que debe ser un reto en educación matemática ofrecer oportunidades a los alumnos para que participen en el pensamiento flexible característico de la práctica de los matemáticos profesionales. Otros autores que han realizado aportaciones en esta línea son, por ejemplo, Burton (1998), Weber (2008), Weber, Inglis y Mejía-Ramos (2014), Ouvrier-Buffet (2015), Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2017) y Martín-Molina, González-Regaña y Gavilán-Izquierdo (2018).

Por todo lo anterior, abordamos a continuación el estudio de algunos aspectos concretos de la comunidad de práctica de los matemáticos profesionales, relacionando nuestros resultados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, el problema de investigación que abordamos es caracterizar desde la educación matemática cómo los matemáticos profesionales desarrollan las prácticas matemáticas de conjeturar y probar.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Prácticas matemáticas: conjeturar y probar

Con los términos *conjeturar* y *probar* hacemos referencia a las actividades que desarrollan los matemáticos profesionales (investigadores en matemáticas) cuando construyen conjeturas y demostraciones matemáticas. Para nosotros, una *conjetura* es una afirmación que puede ser verdadera o falsa, que parece razonable pero “no ha sido justificada de forma convincente y aún no se conocen ejemplos que la contradigan ni consecuencias de la misma que sean falsas” (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 58). La definición de *demostración matemática* que adoptamos es la de Weber y Mejía-Ramos (2011), que considera que una demostración matemática es “cualquier producto escrito socialmente aprobado que resulta de los intentos de los matemáticos por justificar que una conjetura es verdadera” (p. 331).

Desde la filosofía de las matemáticas y la propia educación matemática son muchos los motivos que se han dado para justificar la importancia y estrecha relación de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar. Por ejemplo, desde la filosofía de las matemáticas, Peirce (Turrisi, 1997) considera que estas dos prácticas son esenciales para describir la investigación científica y, en consecuencia, el desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido, Popper (1959) también sitúa la práctica de conjeturar al mismo nivel que otras prácticas matemáticas, como la de probar. De hecho, este autor diferencia dos momentos principales en el método científico: el primero, cuando se concibe una idea (conjeturar) y el segundo, cuando se estudia dicha idea desde el punto de vista lógico (deducción). Por otro lado, en su conocida obra *Pruebas y Refutaciones: la Lógica del Descubrimiento Matemático,* Lakatos (1976) propone una dialéctica sobre las demostraciones matemáticas de ciertas conjeturas y sus refutaciones con contraejemplos. Según Ernest (1998), la filosofía de las matemáticas de Lakatos diluye la separación entre los contextos de descubrimiento y justificación, dando la misma relevancia a la génesis que a la justificación del conocimiento y considerando que ambos contextos se desarrollan conjuntamente.

Desde la educación matemática, Polya (1954) también pone de manifiesto la íntima relación entre las prácticas matemáticas de conjeturar y probar cuando justifica que, para un matemático profesional, "las matemáticas pueden parecerse a un acertijo" (p. 158). Para este autor, el matemático profesional tiene que crear el enunciado de un teorema antes de probarlo y tiene que pensar en los aspectos generales de la demostración matemática antes de llevarla a cabo. Por otro lado, Alibert y Thomas (1991) afirman que "la formulación de conjeturas y el desarrollo de demostraciones son dos aspectos fundamentales del trabajo de un matemático profesional" (p. 215), destacando además que, en primer lugar, se establecen las hipótesis (fruto del proceso de conjeturar) y que después surge la demostración para convencerse a uno mismo y convencer a los demás. Para Boero y sus colaboradores (Boero, 2007; Boero, Garuti y Lemut, 2007), las prácticas de conjeturar y probar son dos prácticas matemáticas muy relacionadas y esenciales para la génesis del conocimiento matemático. Estos autores hacen referencia a una "posible continuidad cognitiva entre el proceso de producción del enunciado de una conjetura y el proceso de prueba" (Boero et al., 2007, p. 250), ya que ciertas actividades que se desarrollan para crear una conjetura pueden ayudar al proceso que se sigue después para elaborar la demostración de esa conjetura. Recientemente, Rasmussen, Wawro y Zandieh (2015) han definido el término "teoremizar" (*theoremizing* en el original) para considerar conjuntamente, en una única práctica, a las prácticas matemáticas de conjeturar y probar. En su estudio, estos autores caracterizan cómo algunos estudiantes universitarios progresan matemáticamente en esta práctica.

Todas las justificaciones anteriores nos han llevado a estudiar conjuntamente estas dos prácticas y a realizar la investigación que aquí presentamos.

Marco teórico

En nuestra investigación adoptamos el marco teórico propuesto por Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005). Este marco propone la expresión *actividad matemática en progreso* (*advancing mathematical activity*, en el original) como una alternativa a la clásica expresión *pensamiento matemático avanzado* (Tall, 1991). Con esa nueva expresión los autores pretenden poner el foco en las prácticas matemáticas (conjeturar, clasificar, definir, etc.) en lugar de en el contenido matemático específico (espacios vectoriales, polígonos, etc.). En concreto, se centran en las actividades matemáticas que promueven, de forma progresiva, razonamiento matemático sofisticado y en cómo estas actividades se desarrollan, lo que entienden determina el aprendizaje.

Para caracterizar la actividad matemática en progreso y así describir las prácticas matemáticas, Rasmussen et al. (2005) consideran dos constructos teóricos: *matematización horizontal y matematización vertical* (*horizontal mathematizing* y *vertical mathematizing*, en el original). En concreto, estos autores consideran para su estudio una ligera modificación de la definición que originalmente da Treffers (1987) a estos mismos constructos. Para Rasmussen et al. (2005), la matematización horizontal hace referencia a aquellas actividades que se desarrollan para formular una situación problemática de tal manera que pueda abordarse matemáticamente más adelante. Entre estas actividades se encontrarían experimentar, detectar patrones, clasificar u organizar. Observemos que las actividades horizontales son principalmente de naturaleza informal. La matematización vertical por el contrario hace referencia a aquellas actividades que se apoyan sobre las actividades horizontales con el objetivo de crear nuevas ideas o realidades matemáticas. Entre estas actividades se encontrarían razonar sobre estructuras abstractas, generalizar o formalizar. Estos autores defienden que la matematización horizontal y la vertical no ocurren de forma aislada, sino que pueden considerarse una dualidad que ayuda a describir la matematización, y a la que denominan *matematización progresiva*. Por otro lado, también sostienen que las actividades verticales suelen dar lugar a otras actividades de naturaleza horizontal, es decir, las actividades verticales pueden ser el contexto en el que surjan nuevas actividades horizontales, que a su vez dan lugar a otras actividades verticales, y así sucesivamente, lo que supone la creación de, como ellos lo denominan, una cadena de matematizaciones progresivas.

En su investigación, Rasmussen et al. (2005) utilizan la matematización horizontal y la vertical para describir cómo ciertos estudiantes universitarios definen, representan a través de símbolos (*symbolizing*, en el original) y construyen algoritmos (*algorithmatizing*, en el original), caracterizando así, como ellos lo denominan, su actividad matemática en progreso. Después de caracterizar estas tres prácticas matemáticas, estos autores advierten que cuando los estudiantes las desarrollan, ya sea con actividades horizontales o verticales, estos “usan” y “crean”, es decir, ambas acciones ocurren en el desarrollo de esas prácticas. En concreto, Rasmussen et al. (2005) observan una interacción entre “usar” y “crear” en las tres prácticas matemáticas, interacción en la que ambas acciones juegan un papel diferente en la dimensión horizontal (actividades horizontales) y la dimensión vertical (actividades verticales). Específicamente, ellos señalan que, en la dimensión horizontal, los estudiantes crean (definiciones, algoritmos, etc.) “para expresar, apoyar, y comunicar ideas que ya eran más o menos familiares, ideas que estaban relacionadas con las concepciones actuales e informales de los estudiantes” (Rasmussen et al., 2005, p. 70); y los productos de esta dimensión se usan dentro de su situación problemática de matemáticas. Por otro lado, en la dimensión vertical, los estudiantes crean nuevas realidades matemáticas y el uso de los productos promueve movimientos “de lo particular a lo más general y en algunos casos a lo más formal” (Rasmussen et al., 2005, pp. 70–71), haciendo que surjan nuevas realidades.

Utilizando este marco teórico de Rasmussen et al. (2005), se caracterizaron en un trabajo previo (Fernández-León et al., 2017) las diferentes actividades que un matemático profesional desarrollaba cuando construía conjeturas y demostraciones durante su investigación. En concreto, los eventos relevantes que se encontraron en los datos relativos al matemático profesional y que informaban sobre cómo este desarrollaba cada una de estas dos prácticas se organizaron en categorías atendiendo a la naturaleza de esos eventos. De este modo, cada categoría estaba relacionada con una práctica matemática concreta (conjeturar o probar) y además fue asociada a la dimensión (horizontal o vertical) de dicha práctica, según la naturaleza que tuviera esa categoría (para más información sobre esta clasificación de actividades, ver Fernández-León et al., 2017).

El trabajo que aquí presentamos tiene como objetivo seguir avanzado en la caracterización de las actividades que los matemáticos profesionales desarrollan cuando conjeturan y hacen demostraciones matemáticas durante su investigación. En concreto, vamos a utilizar las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017) para concretar la dualidad usar-crear propuesta por Rasmussen et al. (2005) en el caso de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar desarrolladas por matemáticos profesionales. De este modo, los objetivos específicos de este trabajo formulados como preguntas de investigación son: ¿cómo puede la dualidad usar-crear, descrita en Rasmussen et al. (2005) para caracterizar las actividades horizontales y verticales de una práctica matemática, ayudar a caracterizar las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales? ¿Qué implicaciones didácticas puede tener esta caracterización?

METODOLOGÍA

En trabajos previos (Fernández-León et al., 2017; Toscano-Barragán, Fernández-León y Gavilán Izquierdo, 2016), se identificaron, a través del estudio de un caso, diferentes categorías de actividades que desarrolla un matemático profesional cuando conjetura y prueba durante su investigación. Las categorías que surgieron del análisis se clasificaron atendiendo, en primer lugar, a la práctica matemática (conjeturar o probar) y en segundo lugar al tipo de matematización según Rasmussen et al. (2005) (horizontal o vertical). De este modo, pudimos caracterizar las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de ese matemático. El sujeto considerado en esos trabajos previos era un matemático profesional, que desarrollaba su investigación en el campo del análisis matemático, y al que entrevistamos en varias ocasiones. En concreto, los datos de esos trabajos provenían de distintas fuentes: entrevistas, documentos de trabajo y artículos de investigación.

En esta comunicación utilizamos como datos las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017) y los datos empíricos que ahí se usaron. En concreto, estas categorías de actividades son las siguientes:

Conjeturar: Dimensión horizontal

Detectar patrones, en esta categoría de actividades se incluyen experimentaciones con objetos matemáticos (cuadrado, número, espacio vectorial, etc.) realizadas en relación a una característica o propiedad observable. En concreto, se incluyen los razonamientos lógicos y actividades informales con objetos matemáticos que dan lugar a la detección de un patrón en un contexto matemático concreto. La expresión objeto matemático hace referencia aquí a cualquier entidad que, aun no pudiendo ser percibida por los sentidos, parece tener existencia independiente (Sfard, 2008).

Testar conjeturas, en esta categoría se incluye toda experimentación con objetos matemáticos concretos que se realiza para verificar o rechazar una determinada conjetura.

Modificar enunciados de proposiciones, en esta categoría se incluyen aquellas experimentaciones con las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional (probada o no, es decir, ya sea una proposición probada o una conjetura) que suponen la modificación de estas componentes.

Conjeturar: Dimensión vertical

Formalizar patrones, en esta categoría se incluyen las actividades de generalización y formalización de un patrón observado cuando se experimenta con objetos matemáticos en relación a una característica o propiedad observable. En concreto, un patrón previamente observado es generalizado para formular una conjetura.

Formalizar modificaciones de enunciados, esta categoría hace referencia a la formalización de las modificaciones de las hipótesis o de la conclusión de una proposición condicional (probada o no). Hay que señalar que esta formalización da lugar a una conjetura.

Probar: Dimensión horizontal

Detectar técnicas o herramientas dentro de demostraciones, en esta categoría se incluye el estudio riguroso de las características de otras demostraciones que están relacionadas con la demostración que se quiere construir. Este riguroso estudio tiene por objeto detectar técnicas o herramientas en esas demostraciones que puedan ajustarse bien a la nueva demostración.

Detectar patrones en ejemplos, en esta categoría se incluyen las actividades de experimentación, con objetos matemáticos concretos (número, triángulo, espacio vectorial, espacio funcional, etc.) que satisfacen las hipótesis de una conjetura, que tienen por objeto detectar patrones que puedan ser extendidos al contexto general en el que está formulada la conjetura a probar.

Probar: Dimensión vertical

Seleccionar y aplicar métodos de demostración, en esta categoría se incluyen las actividades de selección y aplicación de un método para desarrollar la demostración: por contraposición, por inducción, por contradicción, etc.

Usar técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones, esta categoría hace referencia a la aplicación y el uso de las técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones.

Aplicar resultados conocidos, esta categoría de actividades hace referencia a la aplicación de resultados conocidos (teoremas, proposiciones, corolarios, etc.) para construir cadenas de implicaciones lógicas que permitan desarrollar las demostraciones.

Formalizar experimentaciones con ejemplos, esta categoría incluye las actividades de extensión y formalización de los cálculos y experimentaciones con objetos matemáticos que satisfacen las hipótesis de una conjetura.

Desarrollo del análisis

Para desarrollar el análisis de los datos, se consideraron las categorías de actividades enumeradas anteriormente con el objetivo de identificar qué se usa y qué se crea en las mismas. Este análisis fue apoyado por los datos empíricos que aparecen en el trabajo de Fernández-León et al. (2017). A continuación mostramos, con un ejemplo, cómo se ha realizado el análisis de los datos de esta comunicación. En particular, vamos a describir cómo se han identificado los diferentes "usos" (qué se usa) que caracterizan la dimensión horizontal de la práctica de conjeturar. Para ello, se consideraron en primer lugar las diferentes categorías de actividades horizontales que se habían identificado para caracterizar esta práctica: *Detectar patrones*, *Testar conjeturas* y *Modificar enunciados de proposiciones*. Observando las descripciones de estas categorías y los ejemplos de las mismas que aparecían en ese estudio, pudimos concluir que las dos primeras categorías informan del "uso" de objetos matemáticos concretos para experimentar en distintos contextos y la tercera categoría del "uso" de las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional (probada o no) cuando el matemático profesional estima que, por razones de diferente naturaleza, esa proposición debe ser modificada.

RESULTADOS

Como hemos señalado anteriormente, en Rasmussen et al. (2005) se identificaron importantes coincidencias, relativas a la dualidad usar-crear, entre las prácticas matemáticas de definir, representar a través de símbolos y construir algoritmos. Estos autores argumentaron que ambas acciones ocurren cuando estas tres prácticas matemáticas se desarrollan, aunque con un papel diferente en cada dimensión (horizontal y vertical). A continuación mostramos el resultado de analizar las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017), que describen cómo un matemático profesional conjeturaba y probaba durante su investigación, en base a la dualidad usar-crear. Comenzamos mostrando los resultados de este estudio relativos a la práctica de conjeturar.

Conjeturar

Respecto a la práctica de conjeturar, y siendo fieles a la descripción de usar y crear dada por Rasmussen et al. (2005), la matematización horizontal resulta cuando se usan, para experimentar, objetos matemáticos concretos o las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional ya existente. En particular, se usan objetos matemáticos concretos para experimentar en distintos contextos: cuando se detectan patrones o cuando se trata de comprobar si una conjetura es cierta o no (testeo). Las componentes de una proposición condicional se usan o manejan cuando el matemático profesional duda de la idoneidad de las mismas, ya sea porque este piensa que cierta proposición matemática ya demostrada se puede "mejorar" (debilitar hipótesis, etc.) o porque cierta conjetura o problema abierto es demasiado ambicioso y se debe restringir su alcance. Consecuentemente, la matematización horizontal involucra la creación de ejemplos con objetos matemáticos concretos o la creación de nuevas hipótesis o conclusiones (componentes de una proposición) para una nueva proposición condicional, a partir de las componentes de una proposición condicional (probada o no) ya existente. En concreto, se crean ejemplos de objetos matemáticos que verifican una cierta propiedad observable (un patrón) o ejemplos de objetos matemáticos que verifican una conjetura o que, aun verificando las hipótesis de dicha conjetura, no verifican la propia conjetura, dando lugar estos últimos a la creación de contraejemplos.

A continuación mostramos un protocolo de una situación real de investigación en la que nos vamos a basar para ejemplificar la dualidad usar-crear que acabamos de describir. En concreto, este protocolo es del investigador en matemáticas cuyas prácticas de conjeturar y probar fueron caracterizadas en Fernández-León et al. (2017). En este caso, el investigador está desarrollando actividades horizontales de la práctica de conjeturar y, específicamente, el protocolo que mostramos aparece como ejemplo de la categoría de actividades *Detectar patrones* en Fernández-León et al. (2017).

> Ejemplo 2.1 - Anna: Nosotros consideramos la expresión analítica del módulo de convexidad de la esfera, un espacio geodésico que no es lineal: $\delta(r,\varepsilon) = 1 - (1/r)\ \text{arccos}\ ((\cos r) / \cos (\varepsilon/2))$, y tratamos de probar su monotonía con respecto a *r* a través de la primera derivada. Hicimos muchos cálculos pero no pudimos obtener ninguna conclusión. También hicimos muchos experimentos con el software Mathematica para ver si el módulo de convexidad de la esfera era monótono con respecto a la variable *r*. Sin embargo, no pudimos establecer ninguna conclusión a partir de los cálculos a mano, que realmente era lo que necesitábamos para poder publicarlo. (p. 2045)

Si observamos el Ejemplo 2.1 de la cita anterior, se puede deducir que, cuando realiza los experimentos con el software Mathematica, "usa" valores numéricos concretos (objetos matemáticos) entre 0 y 1 para la variable épsilon, por ejemplo $\varepsilon=1/2$, $\varepsilon=1/4$, etc., para representar, para cada ε y con el software, la función (módulo de convexidad de la esfera) con respecto a la otra variable *r*. El matemático profesional realiza estas representaciones porque quiere determinar la monotonía que tiene el módulo de convexidad en cada caso (valor de épsilon concreto). Con todo ello, durante esta actividad horizontal, se están "creando" diferentes ejemplos (representaciones gráficas del módulo de convexidad) de objetos matemáticos concretos (los diferentes valores de épsilon) que verifican la propiedad observable de hacer que $\delta(r,\varepsilon)$ sea decreciente, para cada ε fijo, es decir, cada una de esas representaciones es decreciente con respecto a la variable *r*.

Por otro lado, la componente vertical de esta práctica matemática se caracteriza por la creación de nuevas conjeturas. Además, en esta dimensión, se usan nuevas hipótesis o conclusiones consideradas para una proposición (probada o no) y ejemplos de objetos matemáticos que verifican una cierta propiedad observable (informando de un patrón). Vemos como el "uso" en esta dimensión se nutre directamente de la componente horizontal de esta práctica.

Probar

En la práctica de probar, la matematización horizontal resulta cuando se usan, para experimentar, objetos matemáticos. Concretamente, estos objetos matemáticos verifican las hipótesis de la afirmación matemática que se quiere probar y serán los que, en algunas ocasiones, permitan detectar un patrón o comportamiento particular en la experimentación que ayude a elaborar la demostración matemática de esa afirmación. En esta práctica, la matematización horizontal también resulta cuando se usan demostraciones matemáticas de resultados o propiedades ya conocidos que, de algún modo, están relacionados con la afirmación matemática que se quiere probar. El uso de estas demostraciones tiene lugar cuando el matemático profesional quiere detectar técnicas de demostración o herramientas dentro de esas demostraciones que puedan adaptarse al contexto matemático de su enunciado o guiar de algún modo la demostración matemática que se quiere construir. Por otro lado, la matematización horizontal involucra la creación de ejemplos con objetos matemáticos concretos que verifican la afirmación matemática cuya demostración se quiere construir. La dimensión vertical de esta práctica se caracteriza por la creación de la demostración matemática buscada. Por último, observamos que en esta dimensión se usan, por un lado, los ejemplos encontrados en la dimensión horizontal que sirven como apoyo (guía) a la hora construir la nueva demostración. Por otro lado, se usan resultados conocidos que permiten la creación de cadenas de implicaciones lógicas en la demostración. También se usan métodos de demostración conocidos (por contradicción, inducción, etc.) y técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones en la dimensión horizontal.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El trabajo previo de Fernández-León et al. (2017) caracterizó las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de un matemático profesional utilizando el marco teórico de Rasmussen et al. (2005). En ambas prácticas, se diferenciaron la dimensión horizontal y la vertical. En este estudio avanzamos en la caracterización de estas dos prácticas a partir de la dualidad usar-crear también propuesta por Rasmussen et al. (2005). De esta manera, esta comunicación complementa los trabajos de Rasmussen y colaboradores (Rasmussen et al., 2015; Rasmussen et al., 2005). En concreto, el trabajo de Rasmussen et al. (2005), en el que se caracterizaban las prácticas matemáticas de definir, representar a través de símbolos y crear algoritmos, se ve complementado en tanto que aquí consideramos el estudio de otras prácticas matemáticas (conjeturar y probar) respecto de su mismo marco teórico. El trabajo de Rasmussen et al. (2015), en el que se analiza la práctica matemática de teoremizar, se ve también complementado porque esta comunicación avanza, desde otra perspectiva, en la caracterización de esta práctica de teoremizar.

En nuestra investigación consideramos que la práctica de conjeturar es una práctica matemática que tiene la misma entidad que cualquier otra práctica matemática. De hecho, al igual que ocurre con prácticas matemáticas como definir o probar, esta práctica se ha caracterizado no sólo a través de actividades de naturaleza horizontal sino también con actividades de naturaleza vertical. Por este hecho, no apoyamos la propuesta de Rasmussen et al. (2005), que considera que esta práctica se puede caracterizar por actividades puramente horizontales.

Nuestro trabajo profundiza en la propuesta de Weber et al. (2014) sobre la necesidad de que la investigación en educación matemática ofrezca una buena comprensión sobre cómo los matemáticos profesionales desarrollan determinadas prácticas en su investigación, acercándose así al conocimiento de la comunidad de práctica (Lave y Wenger, 1991) de estos profesionales. El conocimiento sobre esta comunidad de práctica puede posibilitar una mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las prácticas matemáticas, cada vez más presentes en los currículos escolares a todos los niveles, incluyendo el grado y el postgrado (Martín-Molina et al., 2018). En concreto, la identificación que hemos presentado de la dualidad usar-crear en las prácticas de conjeturar y probar puede ayudar a los profesores de matemáticas a considerar qué actividades deben diseñar y cómo deben desarrollarlas en el aula para involucrar a los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones.

En Weber y Dawkins (2018), se introduce la expresión "*Mathematical Practice can inform Pedagogy (MPP) research" (p. 69)* para hacer referencia a la investigación cuyo foco es conocer cómo las prácticas matemáticas pueden dar información sobre la didáctica. Estos autores hacen explícita la necesidad de buscar unos estándares sobre este tipo de investigación que permitan evaluar los estudios y las recomendaciones didácticas para el aula que se den en esta línea. También hacen hincapié en que si los investigadores quieren hacer recomendaciones didácticas basándose en afirmaciones sobre las prácticas matemáticas, estas afirmaciones deberían reflejar de la forma más precisa posible cómo los matemáticos desarrollan estas prácticas cuando investigan. Por otro lado, ellos consideran que es crucial para este tipo de investigación hacer una reflexión sobre los objetivos didácticos que se establecen en este campo. En este sentido, esta comunicación pone de manifiesto un objetivo didáctico sobre las prácticas matemáticas de conjeturar y probar en relación a los ejemplos. En concreto, las caracterizaciones de estas prácticas dadas en Fernández-León et al. (2017) y en este trabajo destacan que los ejemplos pueden jugar papeles diferentes en estas prácticas, bien como elemento clave para la elaboración de conjeturas o como un elemento coadyuvante en la búsqueda de argumentos generales (deducir del ejemplo un razonamiento general) para la elaboración de demostraciones. Incluso puede resaltarse su papel, en el razonamiento inductivo (Turrisi, 1997), como un elemento que puede servir para justificar el grado de confianza en las conjeturas. En este sentido, y en términos de Weber y Dawkins (2018), el objetivo de alto nivel (meta-concepción de la práctica matemática) que se deduce de nuestro análisis es que los ejemplos juegan un papel relevante en estas dos prácticas, lo que debe de estar presente en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas a cualquier nivel escolar.

En un futuro, la investigación que estamos llevando a cabo puede complementarse estudiando a otros matemáticos profesionales. Matemáticos profesionales que trabajen en el mismo campo de investigación que el matemático profesional cuyas prácticas se han caracterizado en Fernández-León et al. (2017) (análisis funcional) permitirían confirmar y completar nuestros resultados e investigadores en matemáticas de otras áreas (álgebra, geometría, etc.) nos informarían del alcance de nuestra investigación, al tiempo que también permitirían completarla.

Referencias

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Boero, P. (Ed.). (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R. y Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249–264). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Burton, L. (1998). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 37*(2), 121–143.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). How mathematicians conjecture and prove: An approach from mathematics education. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 2041–2048). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Researching how professional mathematicians construct new mathematical definitions: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(7), 1069–1082.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Londres, Reino Unido: Addison Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington D. C., EE.UU.: Autor.

Ouvrier-Buffet, C. (2015). A model of mathematicians' approach to the defining processes. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2214–2220). Praga, República Checa: Charles University y ERME.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference*. Princeton, EE.UU.: Princeton University Press.

Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery*. Londres, Reino Unido: Hutchinson.

Rasmussen, C., Wawro, M. y Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 259–281.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Toscano-Barragán, R., Fernández-León, A. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2016). Articulando las actividades de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales desde la teoría de Peirce. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 647). Málaga: SEIEM.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education - The Wiskobas project*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Turrisi, P. A. (Ed.) (1997). *Pragmatism as a principle and method of right thinking: The 1903 Harvard lectures on pragmatism*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

Tymoczko, T. (Ed.). (1998). *New directions in the philosophy of mathematics: An anthology*. Princeton, EE.UU.: Princeton University Press.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431–459.

Weber, K. y Dawkins, P. C. (2018). Toward an evolving theory of mathematical practice informing pedagogy: What standards for this research paradigm should we adopt? En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 69–82). Cham, Suiza: Springer.

Weber, K., Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36–58.

Weber, K. y Mejía-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 329–344.

Weiss, M. K. y Moore-Russo, D. (2012). Thinking like a mathematician. *The Mathematics Teacher*, *106*(4), 269–273.

[xxi] Este estudio se ha realizado al amparo de la ayuda IV.4 del Plan Propio de Investigación y transferencia de la Universidad de Sevilla. Además, todos los autores son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía.

IDENTIFICACIÓN DE ERRORES ESCOLARES EN MATEMÁTICAS POR MAESTROS EN FORMACIÓN[xxii]

Identification of schoolchildren' mathematical errors by pre-service teachers

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Resumen

Los errores que muestran los estudiantes durante su aprendizaje escolar son contenidos didácticos relevantes para el profesor. Estos desempeñan un papel fundamental en los procesos de planificación, implementación y evaluación. La competencia profesional del profesorado integra las capacidades para diagnosticar errores escolares y remediarlos. Consideramos el conocimiento del profesor de matemáticas sobre el error como un contenido que fundamenta dicha competencia. Para detectar ese conocimiento estudiamos las formas de reconocer el error que futuros maestros utilizan cuando se les proponen respuestas alternativas dadas por escolares a una misma tarea. En este estudio trabajamos con la representación de una fracción; proponemos cuatro respuestas distintas a esa tarea y solicitamos a un grupo de maestros en formación que identifiquen el error. El análisis y discusión muestra algunos componentes del conocimiento del profesor sobre el error.

Palabras clave: *Conocimiento del profesor, competencia diagnóstica, detección de errores, relación parte-todo, representación de una fracción.*

Abstract

The errors that the students show during their school learning are relevant didactic contents for teachers. They play a fundamental role in the planning, implementation and evaluation processes. The professional competence of teachers integrates the abilities to diagnose students' errors and remedy them. We consider the mathematics teacher's knowledge about errors as a fundamental basis of such competence. To detect that knowledge, we study the ways of recognizing the error that future teachers use when they are proposed alternative answers given by schoolchildren to the same task. In this study we deal with the representation of a fraction; we propose four different responses to this task and ask a group of teachers in training to identify the error. The analysis and subsequent discussion show some components of the teacher's knowledge about the error.

Keywords: *Teacher's knowledge, diagnostic competence, detection of errors, part-whole relation, fractions representation.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se centra en la formación inicial de profesores de matemáticas. Krainer (2008) relaciona esta formación con una "intervención orientada por objetivos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, y que incluye todas las formas de preparación del profesor y de su desarrollo profesional" (pp. 1-2); desde inicios del siglo XXI esa formación del profesor se expresa en términos de competencias. Achtenhagen, Oser y Renold (2006) relacionan las competencias profesionales del profesor con aquellas situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que un profesor tiene que intervenir: "La relación entre el desarrollo de competencias por un lado, y el dominio de situaciones de enseñanza y aprendizaje por otro, constituye un viejo problema que aborda la cuestión central de la formación de profesores" (p. 297).

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). Valladolid: SEIEM.

Nuestro estudio se enmarca en una investigación más amplia que propone explorar, describir, explicar, predecir y enriquecer el desarrollo de la competencia profesional en profesores en ejercicio y en formación inicial. Es objeto de este estudio el desarrollo de la *competencia de diagnóstico sobre los errores matemáticos de los escolares* durante la formación de futuros maestros de Educación Primaria. Un antecedente de este trabajo lo constituye el análisis del conocimiento de un grupo de estudiantes del Grado de Educación Primaria que cursan su último año de formación, sobre la noción didáctica de "objetivo de aprendizaje en matemáticas" (Ruiz-Hidalgo et al., 2017).

Presentamos aquí un análisis complementario, con una metodología similar, basado en la noción de "error escolar en matemáticas", entendiendo que estos errores se presentan durante los procesos de aprendizaje de las matemáticas por los escolares que cursan la educación obligatoria (Rico, 1998).

Las investigaciones sobre errores y formación de profesores se han centrado fundamentalmente en si los futuros profesores pueden identificar errores de escolares y cómo lo hacen (Ivars, Fernández y Llinares, 2017). Sin embargo, en marcos recientes centrados en competencias profesionales del profesor, hay iniciativas que propugnan la relevancia de que en programas de formación de profesores se fomente el desarrollo de una competencia específica centrada en la consideración de errores. Wuttke y Seifried (2017) conceptualizan la competencia sobre el error, para formación inicial y en el marco del conocimiento pedagógico del contenido. Leuders, Philipp y Leuders (2018) establecen la competencia de diagnóstico del profesor, como un constructo amplio que aúna la interpretación de errores, la realización de tareas y juicios de diagnóstico, conocimiento y uso de procedimientos de evaluación, o la consideración de elementos motivacionales y afectivos.

Para estimular las manifestaciones de los profesores en formación y que emerjan sus conocimientos sobre el contenido didáctico *errores matemáticos de los escolares*, se les propone una tarea consistente en distintas representaciones de una misma fracción como respuestas de unos hipotéticos escolares (ver Figura 2). Las respuestas alternativas presentadas ejemplifican variantes usuales de errores escolares, que muestran interpretaciones inapropiadas o incompletas de la representación gráfica de la fracción a la que, se supone, corresponden. Los estudiantes para profesor son requeridos para que enjuicien cada respuesta como correcta o incorrecta y, a continuación, identifiquen el error si lo hay. En las respuestas encontramos que, cuando contestan, describen uno o varios de los elementos y componentes básicos del concepto parte-todo de fracción según consideren que afectan al error reconocido.

Las repuestas se organizan mediante un sistema de ocho variables, las cuales se interpretan según cuatro modos: descriptivo, orientativo, diagnóstico y causal. Este estudio contribuye a describir el desarrollo de la competencia de diagnóstico de los futuros profesores y a profundizar en el conocimiento sobre el contenido didáctico *error escolar en matemáticas*, contenido que han trabajado durante su formación inicial acerca del aprendizaje escolar.

Así, el objetivo del trabajo es describir cómo los futuros profesores detectan los errores cometidos por escolares al realizar una tarea de representación de fracciones y cómo los argumentan, registrando distintos modos de expresar los errores.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico del trabajo se basa en la competencia diagnóstica y la función del error en educación matemática.

Competencia diagnóstica

Klug, Bruder, Kelava, Spiel y Schmitz (2013) caracterizan la noción de competencia de diagnóstico del profesor bajo el paradigma de las competencias clave en el ámbito escolar que se propugna en el marco del proyecto DeSeCo (Rychen y Salganik, 2001; Weinert, 2001). Klug et al. (2013)

establecen que la competencia de diagnóstico adquiere el carácter de clave porque una de las tareas más importantes que realiza el profesor se refiere precisamente al diagnóstico del proceso de aprendizaje de los alumnos, de sus condicionantes y de sus logros. Estos autores interpretan el diagnóstico como un proceso que se lleva a cabo en diferentes fases.

Heinrichs y Kaiser (2018) parten de esa noción y concretan la competencia de diagnóstico del profesor para tratar los errores que pueden presentar los escolares en matemáticas. Consideran que los profesores deben ser capaces de diagnosticar y gestionar errores expresados por los estudiantes cuando están aprendiendo matemáticas y diferencian dos capacidades distintas: detectar las razones por las cuales se comete el error y desarrollar estrategias para gestionarlos.

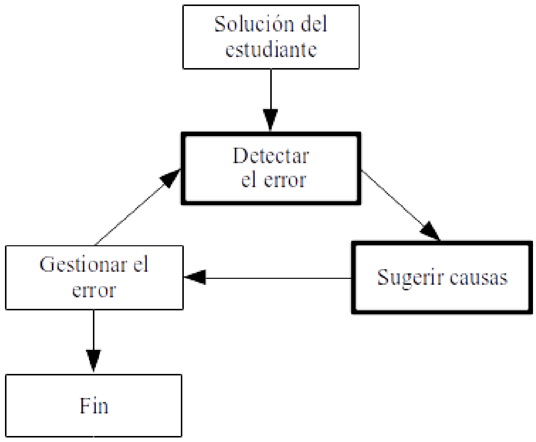


Figura 1. Modelo de proceso diagnóstico en situaciones de error (Heinrichs y Kaiser, 2018, p. 84)

La competencia diagnóstica en situaciones de error (*Diagnostic competence for dealing with students' errors*) es la "competencia necesaria para llegar a juicios basados en evaluación formativa en situaciones de enseñanza usando métodos formales o semi-formales" (traducido de Heinrichs y Kaiser, 2018, p. 81). El resultado del proceso de elaborar juicios será modificar el comportamiento del profesor adaptándolo a la observación de los errores en que incurren los estudiantes para elaborar estrategias que les ayuden a superar esos errores. El modelo propuesto por Heinrichs y Kaiser está basado en el modelo de procesos de diagnóstico en situaciones de error. El modelo propuesto puede verse en la Figura 1 (traducción de la original).

Error en matemáticas escolares

Los errores son un factor importante en el proceso de aprendizaje. Por ello, han sido de interés permanente en el área de educación matemática, caracterizándose desde aproximaciones e intereses diversos (Rico, 1998). Así, el error "es un dato empírico que muestra un desconocimiento o un conocimiento inadecuado sobre un contenido que tiene un alumno o un grupo de alumnos. Los errores matemáticos son resultado de una construcción inadecuada o de la comunicación deficiente de un determinado concepto o procedimiento" (Lupiáñez y Rico, 2015, p. 54).

En educación matemática se han considerado dos enfoques respecto del uso de errores (Borasi, 1996; Rico, 1998). En el primero de ellos, el error es considerado una oportunidad para promover el aprendizaje de los escolares. En el segundo, la meta es el análisis del error por parte del maestro. El docente identifica el error y diagnostica al estudiante para mejorar su rendimiento. El error proporciona información sobre el estudiante que es útil para implementar un tratamiento orientado a cambiar las nociones erróneas. Nuestro trabajo se sitúa en este último enfoque ya que, a pesar de que los investigadores han puesto su atención en este tema, los estudios llevados a cabo detectan en qué errores inciden los maestros (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Rodríguez, Sánchez y López, 2016) y no en identificar errores de los escolares (Magen-Nagar, 2016; Şahin, Gökkurt y Soylu, 2016). Específicamente, este estudio tiene como objetivo caracterizar el modo en que los futuros profesores describen errores en una tarea de fracciones.

METODOLOGÍA

Este estudio es de carácter cualitativo y descriptivo y usa el análisis de contenido para describir las respuestas que dan los estudiantes para maestro acerca de determinados errores estándar identificados en trabajos de escolares de primaria. Organizamos un listado con las respuestas de los sujetos e identificamos los elementos establecidos por un sistema de categorías definidas al efecto.

Cuestionario

El cuestionario parte de una situación escolar en la que una profesora plantea a sus escolares de 6º curso de Educación Primaria que representen 2/3 (Cluff, 2005), a esta situación se añaden respuestas erróneas de escolares. La selección de las fracciones como contenido matemático de referencia en las tareas tiene una marcada y dilatada presencia curricular internacional, junto con la consideración como tema relevante por la reciente investigación (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2014). Son numerosas las investigaciones que han considerado este concepto en trabajos centrados en el estudio de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas escolares (Kurt y Cakiroglu, 2009; Pearn y Stephens, 2007).

El interés conceptual radica en que el enunciado de la tarea está expresado de forma verbal, mientras que las representaciones en las respuestas utilizan un modelo de área con la misma unidad. Dos de estas respuestas corresponden a ejemplos de posibles errores escolares que tienen su fundamento en cada uno de los conceptos básicos que Behr, Lesh, Post y Silver (1983, p. 109) proponen para la comprensión del concepto (Figura 2): equipartición (respuesta de Ana), relación parte-parte (respuesta de Bruno), equivalencia (respuesta de Carmen) e irrelevancia de la posición de las porciones (respuesta de Daniel).

Con este reactivo, se requiere que los sujetos encuestados señalen las respuestas erróneas de los escolares e identifiquen los errores en que incurren. Por tanto se producen respuestas para cuatro cuestiones; identificar y dar significado al eventual error de Ana, Bruno, Carmen y Daniel. La cuestión pertenece a un cuestionario más amplio dedicado al conocimiento de diversos contenidos didácticos cognitivos: expectativas de aprendizaje, errores y oportunidades de aprendizaje.

Pregunta

La profesora de 6º A ha propuesto la tarea “Representa 2/3” a los estudiantes de su clase y cuatro de ellos han dado las siguientes respuestas. Señala si son correctas o incorrectas e identifica el error cuando lo haya.

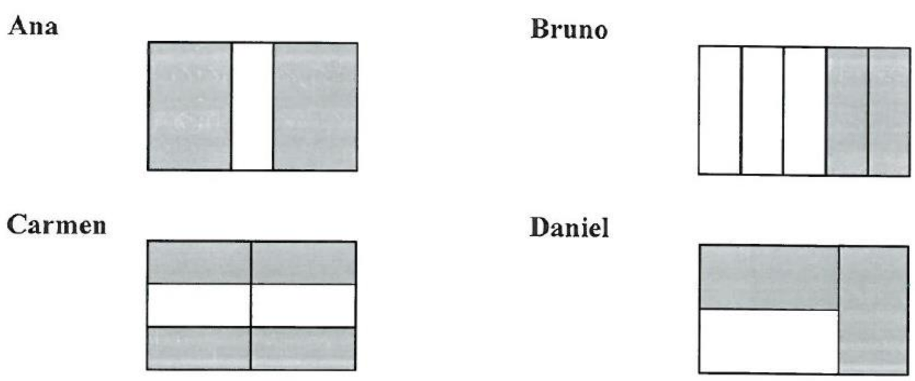


Figura 2. Reactivo y pregunta de investigación

Sujetos de estudio

Los 40 sujetos estudiados, que conforman una muestra intencional y por disponibilidad, están matriculados en 4º curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada y han cursado cuatro asignaturas de didáctica de las matemáticas. Las asignaturas están secuenciadas según las dimensiones del análisis didáctico (Rico, 2016); se organizan alrededor de los contenidos de la matemática escolar, el aprendizaje matemático y los contenidos de Educación Primaria.

Todas ellas parten de la idea de que el contenido didáctico tiene un papel de herramienta funcional, necesitando revisar investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido para tener en cuenta apreciaciones que repercutan en su aprendizaje, así como para determinar las dificultades de aprendizaje más habituales (Flores, 2018). En primer curso han trabajado el contenido matemático escolar para comprender el significado de los conceptos que lo conforman, profundizando en las estructuras conceptuales, los sentidos, situaciones, usos y problemas que ayudan a resolver, así como las formas en que se representan (sistemas de representación y modelos). Particularmente, se han trabajado los diversos significados de la fracción (relación parte-todo, parte-parte, razón y operador). En segundo curso, se examinan contenidos relativos al aprendizaje de dichos conceptos, entre ellos las expectativas y limitaciones de aprendizaje previsibles en los estudiantes de primaria, realizando su análisis cognitivo (Lupiáñez y Rico, 2015). En tercer curso trabajan elementos de enseñanza de las matemáticas con foco en la tarea matemática escolar, sus variables y funciones y la secuenciación de tareas. Por último, en cuarto curso han profundizado en la noción de competencia matemática y la elaboración de material para su desarrollo en el aula de primaria.

En la asignatura de segundo curso de los estudios del Grado de Maestros de Primaria se trabajan explícitamente las limitaciones de aprendizaje, concretamente la identificación y clasificación de los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas escolares, y su diagnóstico.

Variables de análisis

Los sujetos están identificados mediante los códigos R01 a R40. Además, se identifica su respuesta con la representación de la pregunta referida (Figura 2): R01A, R01B, R01C, o R01D, por ejemplo.

A continuación se describen las variables que organizan las respuestas. El sistema de variables, salvo la primera, surgió de manera inductiva, por triangulación de investigadores, y se presenta organizado atendiendo a los dos aspectos que considera: Detección e identificación del error.

Dimensión 1. Detección del error

- Variable 1. Se registra lo que marca cada sujeto: C (Correcto), I (Incorrecto), B (En blanco).

Dimensión 2. Identificación del error

- Variable 2a. Presencia o ausencia de términos valorativos y derivados tales como “mal”; “inadecuado”; “incorrecto”. Pueden aparecer para indicar error “Es incorrecta, debido a que las tres partes en las que se ha dividido no son iguales” (R03A), o para respaldar la ausencia del mismo: “Creo que la representación es correcta, al ser los 3 rectángulos iguales” (R06D).
- Variable 2b. Presencia o ausencia de expresiones que indican cualidades del objeto plasmado por el escolar en su respuesta. La argumentación no recoge expresiones verbales diferentes a las derivadas de “ser”, “haber”, “tener” o “poner”. Por ejemplo, R07A indica que “No tienen la misma dimensión y grosor” para identificar el error de Ana, señalando “dimensión” y “grosor” como cualidades del objeto.
- Variable 2c. Presencia o ausencia de expresiones que indican cualidades de una acción plasmada por el escolar en su respuesta. Es natural que la descripción de la acción conlleve necesariamente una referencia al objeto derivado de la misma. Por tanto, las variables 2b y 2c son excluyentes. Por ejemplo, en R29D “Porque ha representado tres porciones de las mismas dimensiones y ha cogido 2”, se describe la supuesta acción de Daniel.

- Variable 2d. Presencia o ausencia de expresiones que introducen una confrontación entre un aspecto de la respuesta del escolar y la esperada. En ningún caso esta variable aparece aislada, sino junto a 2a, 2b, o 2c. Por ejemplo, R09B "Ha representado 2/5 en lugar de 2/3".
- Variable 2e. Presencia o ausencia de expresiones que validan aspectos parciales de la respuesta del escolar, globalmente errónea. Por ejemplo R28C "La fracción como tal está mal, porque son 4/6, pero hay que decir, que es una fracción equivalente".
- Variable 2f. Presencia o ausencia de discrepancia entre el juicio del encuestado y el experto, es decir, si el encuestado indica la presencia de error donde no existe, o bien valida aspectos que son erróneos desde la perspectiva experta. Por ejemplo, R11C "La respuesta es incorrecta ya que ha representado 4/6 en vez de lo que se pide. La alumna ha confundido la representación dividiéndolo en dos grupos".
- Variable 2g. Presencia o ausencia de expresiones sobre la discriminación, interpretación y caracterización del error. Por ejemplo, R30A "Las proporciones no son iguales".
- Variable 2h. Presencia o ausencia de expresiones que indican la causa del aspecto erróneo en la respuesta del escolar. Por ejemplo, R26B "Al niño le falta conocimiento [del] concepto matemático de fracción".

Organización/Codificación de las respuestas

Todas las variables que se usan son dicotómicas (Ausencia/Presencia) y la codificación se realizó por 7 evaluadores de manera independiente. Para decidir el valor de cada variable se midió el grado de concordancia de las siete evaluaciones mediante un estadístico *kappa*, concretamente el *kappa de Fleiss* (Sim y Wright, 2005). Los valores obtenidos para las variables 2a y 2c son superiores a 0,61, lo que indica un acuerdo sustancial. Para 2b y 2h sus valores comprendidos entre 0,4 y 0,6 indican un acuerdo moderado y para 2d, 2e, 2f y 2g el grado de acuerdo es bajo. Tendremos en cuenta estas apreciaciones al discutir los resultados.

RESULTADOS

Presentamos los resultados organizados por las dimensiones de variables descritas.

Dimensión 1. Detección del error

La Tabla 1 resume los resultados. De las respuestas a la producción de Ana destacan cuatro futuros maestros, que han indicado que la representación es correcta, de los que dos no hacen aclaraciones. Los otros dos indican que consideran correcta la representación a pesar de que no hay equitatividad en la división del rectángulo. Por ejemplo, R35A indica que "Las proporciones no son iguales".

Tabla 1. Frecuencias de detección del error

Respuesta a	Correcto	Incorrecto
Ana	4	36
Bruno	0	40
Carmen	25	15
Daniel	38	2

Para la representación de Daniel hay dos sujetos que señalan que hay error a pesar de que la respuesta es correcta. R19D explica: "Porque las partes en las que lo ha dividido no son iguales, aunque la idea que él ha tenido es correcta", haciendo referencia a que las partes del rectángulo son congruentes, pero no es suficiente para ser correcto. Por su parte, R24D menciona explícitamente la equitatividad, lo cual es inapropiado: "No ha dividido en partes iguales".

En el caso de Carmen parece que no hay acuerdo entre los investigadores acerca de la existencia de error. Los que sí lo identifican, se basan en la diferenciación entre fracción y número racional o clase de fracciones equivalentes. Los investigadores que sostienen lo contrario, se apoyan en una lectura conveniente de la representación para indicar 2/3 del todo. Esto pone de manifiesto que el juicio del futuro profesor ha de ser consistente con alguna de estas dos interpretaciones.

Dimensión 2. Identificación del error

A pesar de que sólo se les solicitó identificar el error en caso de que este existiese, muchos estudiantes para profesor completan su detección con indicaciones. Recíprocamente, no todas las respuestas en blanco corresponden a detección de error. A continuación resumimos los argumentos que emplean para identificar el error o la corrección de la respuesta (Tabla 2).

Tabla 2. Frecuencias de elementos usados para identificar el error

Respuesta a	En Blanco	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h
Ana	4	11	13	23	0	1	18	4	1
Bruno	4	11	5	30	13	2	12	0	8
Carmen	14	11	3	21	4	2	11	2	1
Daniel	24	10	2	14	0	3	6	2	1

El uso de términos valorativos (variable 2a) está presente en más del 25% de las respuestas. Mientras que en las respuestas de Ana y Bruno todos son términos negativos, para Carmen hay términos positivos y negativos; y para Daniel todos los términos son valoraciones positivas.

El empleo de expresiones que indican cualidades del objeto plasmado por el escolar en su respuesta (variable 2b) es muy usado en las respuestas a Ana, pero no tanto en el resto. Para el caso de Ana, algunos futuros profesores señalan características de la figura, como R22A “Las partes (de los extremos) son más anchas y no se considera 2/3”; o el tamaño de las partes, tal como expresa R12A “Las partes deben ser iguales, y no cumple eso”.

La variable 2c recoge las respuestas que describen las acciones de los supuestos escolares Ana, Bruno, Carmen y Daniel. Es la forma más usual de identificar el error. Por ejemplo, R19D “Porque las partes en las que lo ha dividido no son iguales, aunque la idea que él ha tenido es correcta”.

La confrontación de las respuestas propuestas y las que el futuro profesor considera correctas (variable 2d) sólo aparece para Bruno y Carmen. En el caso de Ana, puede ser síntoma de que los estudiantes de magisterio aprecian que no hay ninguna fracción en su representación. En el caso de Daniel, los que han detectado error (2 personas) no proponen alternativas correctas. Para Bruno, casi todas las respuestas, como R09B “Ha representado 2/5 en lugar de 2/3”, indican que la representación de la figura es 2/5, subrayando el significado parte-todo de la fracción frente al parte-parte. Para la figura de Carmen, las respuestas con confrontación indican que lo correcto sería 4/6, y algunas puntualizan la equivalencia de fracciones, aunque sin acuerdo sobre si es o no correcta la respuesta. Por ejemplo, R07C “Sería 4/6, o podría ser correcto si se consideraran de 2 en 2” o R11C “La respuesta es incorrecta ya que ha representado 4/6 en vez de lo que se pide. La alumna ha confundido la representación dividiéndolo en dos grupos”.

Aparecen algunas respuestas que validan aspectos parciales aun considerando errónea la representación (variable 2e). Son respuestas aisladas, pero llaman la atención porque intentan discriminar partes de la respuesta que pueden ser adecuadas, como R39B “Ha representado 2/5. Pero este sí que lo ha dividido de forma equitativa”.

Únicamente encontramos respuestas aisladas en la variable 2g, referida a la discriminación, interpretación y caracterización del error incurrido por el escolar.

En bastantes ocasiones (entre un 33% y un 50% de las respuestas) los futuros profesores indican la presencia de error donde no existe, o bien validan aspectos que son erróneos desde la perspectiva experta (variable 2f). Generalmente se debe a que se expresan incorrectamente, aunque se pueda intuir la idea que pretenden comunicar, como en R29A “Porque las proporciones no son iguales” o en R37B “Hay más partes de las indicadas por la maestra. La elección de partes es correcta”.

La variable 2h se refiere a la discriminación, interpretación y caracterización de la causa del aspecto erróneo en la respuesta del alumno. Resulta poco frecuente, salvo para Bruno, donde manifiestan interés por descubrir las causas del error. Aparecen diversos grados de explicitación de causas, desde expresiones simples del tipo “no sabe”, hasta otras más elaboradas, como “no ha asimilado”. Por ejemplo, R19B “Incorrecto ya que no ha comprendido el significado de 2/3 porque dibuja más partes de las que son”; R27B “El alumno ha partido el total en 5 partes al sumar numerador y denominador de la fracción”. O al respaldar la ausencia de error, R05D “La representación de Daniel es correcta. Sabe que hay que dividir la unidad en tres partes iguales y colorear dos del total”.

DISCUSIÓN

Se aprecia que, en general, la detección del error en la tarea propuesta se realiza de forma adecuada (Tabla 1), lo que sugiere que los sujetos conocen los elementos básicos del concepto fracción. Para la identificación que los sujetos realizan del error, hemos utilizado ocho variables que hemos etiquetado 2a-2h. Para resumir recordamos las variables, que identifican cuatro modos de hacerlo.

- Modo descriptivo. El encuestado describe cualidades del objeto o acción que ha plasmado el escolar en la respuesta analizada. Se caracteriza mediante las variables 2a, 2b, 2c. La primera alude a los términos valorativos que usa, acompañada de una descripción, de la acción del escolar (variable 2c) o del objeto representado (variable 2b).
- Modo orientativo. El futuro profesor enfatiza la solución esperada mediante una confrontación. Se caracteriza por la variable 2d. La falta de acuerdo entre investigadores expresa la dificultad para identificarlo en los argumentos sobre Bruno y Carmen.
- Modo diagnóstico. El encuestado trata de caracterizar el error e incluso a realzar aspectos adecuados de la respuesta del escolar. Describe lo que a su juicio sabe el estudiante, de ahí el aspecto diagnóstico/formativo. Para precisar el tipo de diagnóstico, valoramos si el juicio expresado por el encuestado concuerda con o discrepa del juicio que el experto ha realizado de la respuesta del escolar. Las variables relacionadas son 2e, 2f, 2g. Análogamente, la falta de acuerdo entre investigadores expresa la dificultad para su valoración en los argumentos de los futuros profesores acerca de las respuestas de los escolares.
- Modo causal. Si bien el encuestado fue únicamente cuestionado acerca de la identificación del error, espontáneamente emerge un esfuerzo del mismo en indagar la causa o lógica del error diagnosticado, lo cual queda registrado mediante la variable 2h.

Los cuatro modos pueden ser acumulativos, como hemos comprobado al apreciar que el descriptivo es usado en todas las respuestas (independientemente de la representación a la que se responda). El modo orientativo no aparece en las respuestas a la representación de Ana, lo que requeriría utilizar una nueva representación gráfica, ni en las respuestas a la representación de Daniel (en la que casi todas indican la corrección). Para la representación de Carmen, cuatro sujetos señalan su respuesta como correcta, haciendo referencia a la equivalencia de fracciones, pero no es la forma usual de identificar el error. Sin embargo, para la representación de Bruno, casi el 40% de las respuestas están expresadas de este modo, identificando las partes que existen y las seleccionadas. Ninguno de los futuros profesores ha expresado un significado de la fracción como relación parte-parte.

El modo diagnóstico se utiliza, sobre todo, para describir los errores de Ana y Daniel. La forma más usual es indicar simplemente qué “está mal” y de este modo, el índice de acuerdo en la codificación de las respuestas entre expertos no es suficiente como para considerarlas concluyentes. Finalmente, el modo causal, adoptado espontáneamente por algunos participantes y no planteado intencionalmente por el reactivo, es por tanto el menos usado y el que podríamos identificar más claramente con la capacidad de encontrar causas de error de Heinrichs y Kaiser (2018). A pesar de no haber solicitado la causa del error, 11 futuros profesores expresan una posible causa, 8 de ellos a la representación de Bruno. La Tabla 3 resume los modos en los que se identifican los errores dependiendo del escolar y su respuesta, manifestándose que la detección del error y su identificación se realiza de diferentes modos y que estos modos dependen del error que se trate de detectar.

Tabla 3. Porcentajes en los modos de identificar el error

Respuesta a	Descriptivo	Orientativo	Diagnóstico	Causal
Ana	100%	0%	64%	3%
Bruno	97%	36%	36%	22%
Carmen	96%	15%	50%	4%
Daniel	100%	0%	63%	6%

Consideramos que los datos muestran un avance respecto al objetivo planteado de describir cómo los futuros profesores detectan los errores cometidos por escolares al realizar una tarea de representación de fracciones y cómo los argumentan, identificando distintos modos de expresar los errores. Ello contribuye a la descripción de la fase de detección de la competencia diagnóstica sobre errores y de su vínculo con la fase de sugerencia de causas (Figura 1).

Referencias

Achtenhagen, F., Oser F. y Renold, U. (2006). Epilogue. En F. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training* (pp. 297-304). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publisher.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. En E. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York, EE.UU.: Academic Press.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Norwood, EE. UU.: Ablex.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experience*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Cluff, J. J. (2005). *Fraction multiplication and division image change in pre-service elementary teachers* (Tesis doctoral no publicada). Brigham Young University, Provo, Estados Unidos.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.) *Investigación en Educación Matemática: Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). A Coruña: SEIEM.

Flores, P. (2018). ¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas. *UNIÓN, 53,* 9-29.

Heinrichs, H. y Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students’ errors: Fostering diagnostic competence in error situations. En T. Leuders, K. Phillipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (pp. 79-94). Cham, Suiza: Springer.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C. y Schmitz, B (2013). Diagnostic competence for teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education, 30,* 38-46.

Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: Participants and ways of participation in mathematics teacher education. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 1-10). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Kurt, G. y Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences, 19*(4), 404–410.

Leuders, T., Philipp, K. y Leuders, J. (Eds.) (2018). *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice*. Cham, Suiza: Springer.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Pirámide.

Magen-Nagar, N. (2016). Examining teaching based on errors in mathematics amongst pupils with learning disabilities. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 506-522.

Pearn, C. y Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 601-610). Adelaide, Australia: MERGA.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Pirámide.

Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 635). Málaga: SEIEM.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Lupiáñez, J. L., Castro-Rodríguez, E., Rico, L., Fernández-Plaza, J. A., Flores, P. y Segovia, I. (2017). Conocimiento didáctico de maestros en formación sobre objetivos de aprendizaje. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 437-446). Zaragoza: SEIEM.

Rychen, D. S. y Salganik, L. H. (Eds.) (2001). *Defining and Selecting key Competencies*. Seattle, EE. UU.: Hogrefe & Huber Publishers.

Şahin, Ö., Gökkurt, B. y Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(4), 531-551.

Sim, J. y Wright, C. C. (2005). The Kappa statistic in reliability studies: Use, interpretation, and sample size requirements. *Physical Therapy, 85*(3), 257-268.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Eds.), *Defining and Selecting key Competencies* (pp. 45-65). Seattle, EE. UU.: Hogrefe & Huber Publishers.

Wuttke, E. y Seifried, J. (Eds.) (2017). *Professional Error Competence of Preservice Teachers: Evaluation and Support*. Cham, Suiza: Springer.

[xxii] Trabajo realizado con el apoyo de los proyectos EDU2015-70565-P y PCG2018-095765-B-I00 del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

DISCURSO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO USAN EL MÉTODO ABN

Mathematical discourse in students of primary education when they use the ABN method

Gallego-Sánchez I.[a], Caro-Torró, I.[b] y Gavilán-Izquierdo, J. M.[a]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Maestra de Educación Primaria

Resumen

En este trabajo investigamos el aprendizaje del método ABN (Abierto Basado en Números) por parte de los estudiantes de Educación Primaria a través del análisis del discurso. Para el análisis del discurso adoptamos una perspectiva sociocultural, la teoría de la comognición (Sfard, 2008). Hemos identificado algunas de las propiedades del discurso, concretamente, los mediadores visuales y las rutinas. Los resultados nos permitieron extraer distintas rutinas y mediadores visuales que nos fueron de utilidad para caracterizar el método ABN y mostrar algunas diferencias entre este método y los algoritmos tradicionales para la suma. Además, las rutinas identificadas nos sirvieron para determinar dos indicadores de aprendizaje relativos a la flexibilidad y aplicabilidad en el uso de las rutinas.

Palabras clave: *algoritmos, discurso, teoría de la comognición, método ABN.*

Abstract

In this work we investigate the learning of the ABN (Abierto Basado en Números) method by the students of Primary Education through the analysis of their discourse. For the analysis we adopt a sociocultural perspective, the theory of commognition (Sfard, 2008). We have identified some of the properties of the discourse, specifically, visual mediators and routines. The results allowed us to extract the different routines and visual mediators that have been useful to us to characterize the ABN method and show the differences between this method and the traditional algorithms for addition. Moreover, the identified routines have helped us determine two learning indicators related to flexibility and applicability in the use of routines.

Keywords: *algorithms, discourse, commognitive theory, ABN method.*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de la investigación sobre los algoritmos escolares ha sido señalada por distintos investigadores. Así, Penalva, Rey y Llinares (2013) señalan que "uno de los ámbitos curriculares de la Educación Primaria que genera mayores dificultades es la enseñanza de los algoritmos de las operaciones con números naturales" (p. 7). Según Maier (1987) el objetivo de aprender los algoritmos tradicionales era solamente 'sobrevivir' en la escuela, pues no estaban conectados con las necesidades matemáticas reales. Cuando las investigaciones se refieren a los algoritmos tradicionales, estas indican que estos algoritmos favorecen meramente el aprendizaje procedimental y no el conceptual, con lo que los alumnos creen que para calcular deben memorizar una serie de pasos sin significado para ellos (Ashlock, 2010; Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano y Jiménez-Fanjul, 2014). Esta razón es la que justifica fundamentalmente la necesidad de buscar algoritmos alternativos a los tradicionales, según Plunkett (1979).

Las dificultades que presentan los alumnos para utilizar de manera eficiente y comprender los algoritmos tradicionales en la resolución de problemas matemáticos ha llevado a proponer distintas

Gallego-Sánchez, I., Caro-Torró, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Discurso matemático de estudiantes de Educación Primaria cuando usan el método ABN. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 303-312). Valladolid: SEIEM.

alternativas para que los alumnos de Primaria puedan realizar las operaciones aritméticas de manera significativa. En este sentido, Campbell, Rowan y Suarez (1998) indican que los métodos inventados por el alumno mejoran la confianza en sus propias capacidades y pueden ser compartidos y discutidos públicamente, con lo que los alumnos pueden valorarlos críticamente y escoger el que más les guste, además de aprender a tener conversaciones sobre matemáticas, lo que refuerza el aprendizaje significativo. Otra ventaja es que de este modo el alumno explicita su razonamiento, y por tanto el maestro puede tener más información acerca de los errores y guiar al alumno hacia la corrección y la comprensión (Suurtamm y Vézina, 2010).

Desde un punto de vista curricular, la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) recomienda que en los primeros cursos se trabajen tanto los métodos de cálculo inventados como los convencionales, pero centrándose en aquellos razonamientos y procedimientos que tengan sentido para los estudiantes. Entre las posibles alternativas a los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas, una de las más conocidas y utilizadas es el método Abierto Basado en Números, conocido por sus siglas ABN (Martínez-Montero, 2008). Bracho-López et al. (2014) indican que los estudiantes que siguen el método ABN desarrollan más competencia matemática que los estudiantes que han seguido la metodología basada en los algoritmos tradicionales (llevadas para la suma y tomar prestado para la resta).

Asumiendo la construcción de los algoritmos como un proceso, Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) caracterizan dicho proceso, que llaman *algoritmizar*, como una actividad matemática progresiva, que considera no sólo la adquisición de algoritmos, sino además su uso, comprensión y práctica. Esta manera de considerar la construcción del proceso resalta el carácter social de su aprendizaje que según Campbell et al. (1998) es compartido y público, y por tanto se manifiesta mediante conversaciones matemáticas. Planas (2010) indica que las perspectivas socioculturales son adecuadas para la investigación cuando se asume que el conocimiento matemático es una construcción social y que se pueden considerar conjuntamente aspectos socioculturales y cognitivos. Entre las perspectivas socioculturales hemos seleccionado como marco teórico la teoría de la comognición (Sfard, 2008) para investigar el aprendizaje del método ABN por parte de los estudiantes de Educación Primaria a través del análisis del discurso. Este marco teórico ha sido utilizado en distintas investigaciones para estudiar el discurso y su cambio (aprendizaje matemático) con diferentes contenidos matemáticos de distintos niveles educativos (Caspi y Sfard, 2012; Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2018; Sfard 2007; Sinclair y Moss, 2012).

El problema de investigación que nos ocupa es caracterizar el discurso y el aprendizaje a partir de cambios en el discurso cuando se desarrolla el método ABN, y a partir del análisis comparar el método con los algoritmos tradicionales.

MARCO TEÓRICO

En este apartado vamos a considerar por un lado la descripción del método ABN y por otro, la teoría de la comognición.

Método ABN

El método ABN fue ideado por el profesor Martínez-Montero (2008) con el objetivo de que los alumnos adquiriesen la competencia en el cálculo matemático de manera más atractiva y eficaz que con los algoritmos tradicionales. La A de abiertos en el nombre quiere decir que no hay una forma única de resolver las operaciones, sino que cada alumno puede escoger la que crea conveniente en cada paso, desarrollando así su flexibilidad de pensamiento y su razonamiento sobre cómo resolver la operación más eficientemente. Los algoritmos tradicionales son cerrados, cada paso está determinado unívocamente, lo que lleva a que el alumno tenga que memorizarlos a veces sin encontrarles ningún sentido. En cambio, el método ABN se procura desarrollar siempre en el contexto de un problema de la vida real, cercano al alumno, aumentando así su motivación. BN significa basados en números, porque se trabaja con números al contrario que en los algoritmos tradicionales, que se trabaja con las cifras del número. Este método respeta los distintos ritmos de aprendizaje ya que hay diversas maneras de resolver la misma operación aritmética y en él se realizan las operaciones utilizando como mediador visual la rejilla (aunque con distintos grados de detalle en su construcción).

Por último, el hecho de que la mayor parte de las actividades sean introducidas con un problema o situación real, permite al alumno asociar las distintas operaciones aritméticas con sus significados, por ejemplo, la suma con el significado de "acumulación" de sumandos, y de esta manera comprender que el resultado final tiene que ser mayor que las cantidades dadas.

Teoría de la comognición

Hemos seleccionado como marco teórico la teoría de la comognición de Sfard (2008). La palabra comognición deriva de las palabras 'cognición' y 'comunicación'. La teoría de la comognición de Sfard (2008) sostiene que el pensamiento no existe sin el discurso, y recíprocamente. Por ello los cambios en el discurso matemático producen cambios en el pensamiento matemático y asimismo, los cambios en el pensamiento acerca de matemáticas producen cambios en el discurso, es decir, en la manera en cómo los estudiantes se comunican matemáticamente. Según esta teoría, se produce aprendizaje matemático cuando se modifica y extiende el discurso enriqueciéndose académicamente, en definitiva, cuando cambia el discurso. Esta teoría ofrece una visión *holística* sobre el aprendizaje matemático ya que considera los tipos de cambio que resultan del aprendizaje, el proceso seguido por los participantes (estudiantes y profesores) para lograr el cambio y los resultados esperados del cambio (Sfard, 2007).

De acuerdo con la teoría de la comognición (Sfard, 2007, 2008), las matemáticas son un tipo de discurso, y el discurso es matemático cuando no se refiere a objetos materiales, tangibles (lo que Sfard llama objetos primarios) sino a objetos matemáticos, que son objetos discursivos abstractos, construidos en el discurso, con significantes considerados matemáticos (números, figuras, etc.). El discurso matemático está caracterizado por estas cuatro propiedades:

- Uso de palabras. Abarca el uso de términos específicamente matemáticos (por ejemplo, sumando) y el uso de palabras de la lengua común que pueden tener acepciones matemáticas (por ejemplo, sustracción). Sfard (2008) distingue entre varios tipos de uso de palabras según el propósito.
- Mediadores visuales. Son medios a través de los cuales los participantes en el discurso identifican los objetos a los que se refieren y coordinan su comunicación. Mientras que en el discurso coloquial los mediadores visuales son objetos materiales concretos (que pueden estar presentes o ser visualizados mentalmente), los discursos más especializados a menudo involucran artefactos simbólicos, creados para esta forma particular de comunicación. Los ejemplos más usados son fórmulas matemáticas, gráficos, dibujos y diagramas.
- Narrativas. Son afirmaciones hechas en el uso de la lengua que informan de características de los objetos matemáticos, sus propiedades o relaciones entre ellos, y están sujetas a aceptación o rechazo por parte de la comunidad. Si son consideradas verdaderas por haber sido probadas (*substantiated*) por la comunidad se denominan narrativas aceptadas (*endorsed narratives*). Un ejemplo en el discurso matemático es la afirmación "el número 25 es un cuadrado perfecto".
- Rutinas. Son patrones recurrentes delimitados e identificables en el uso de un determinado discurso. Pueden ser extraídas del discurso observando las palabras, mediadores visuales y analizando cómo se crean y asumen las narrativas utilizadas. Ejemplos de rutinas propias de la matemática son definir, conjeturar, probar, ejecutar un algoritmo, etc. Algunas rutinas

utilizadas por los interlocutores se apoyan en las propiedades de los objetos matemáticos involucrados.

Sfard (2008) clasifica las rutinas en tres tipos: exploraciones (*explorations*), acciones (*deeds*) y rituales (*rituals*). Las exploraciones son aquellas rutinas que al realizarse producen narrativas susceptibles de ser aceptadas, como por ejemplo resolución de ecuaciones, definiciones, pruebas, etc. Por otro lado, las acciones son hechos prácticos que resultan en un cambio de los objetos, como por ejemplo, la repartición de una tarta, en contraposición a la realización de una cuenta de división, que sería una rutina de exploración. Por último, los rituales son secuencias de acciones discursivas cuya primera meta no es la producción de narrativas susceptibles de ser aceptadas ni el cambio en los objetos, sino crear y mantener un vínculo con otros sujetos, conseguir atención y aprobación. Como ejemplos podríamos citar el uso repetitivo del pronombre nosotros para reafirmar la 'propiedad conjunta' de las narrativas aceptadas, o la comparación de resultados en operaciones.

Como hemos señalado anteriormente, en la teoría de la comognición aprender matemáticas es cambiar el discurso (es decir, sus propiedades). Se pueden distinguir dos tipos de aprendizaje matemático, por un lado, a nivel objeto (*object-level learning*) que se expresa en el enriquecimiento del discurso mediante ampliación de vocabulario, construcción de nuevas rutinas y producción de nuevas narrativas aceptadas y, por otro lado, a nivel meta (*metalevel learning*), que implica cambios en las metarreglas del discurso. Es decir, que algunas tareas usuales, como definir una palabra o identificar figuras geométricas, se hacen de una forma diferente a la usual y algunas palabras usadas hasta el momento pueden cambiar su significado.

El aprendizaje metanivel se produce principalmente cuando el estudiante se encuentra con un discurso nuevo. Si este discurso nuevo se rige por metarreglas distintas a las que conocía hasta el momento, surge en el estudiante lo que Sfard (2008) llama un conflicto comognitivo.

En este trabajo, de naturaleza exploratoria, nos centraremos en las propiedades discursivas mediadores visuales y rutinas, que juegan un papel relevante en la caracterización del discurso y de su cambio (Lavie, Steiner y Sfard, 2019). Los objetivos de investigación que abordamos en esta comunicación son:

- Identificar las rutinas y mediadores visuales usados por estudiantes al usar el método ABN.
- Identificar indicadores de aprendizaje matemático en el discurso.

METODOLOGÍA

En este apartado describiremos los participantes, el instrumento de investigación, la fuente de datos y el procedimiento de análisis seguido.

Participantes

Los participantes fueron 6 estudiantes, de primer ciclo de Educación Primaria, concretamente de 2º curso (edades entre 7 y 8 años) de un colegio de Educación Primaria de ámbito urbano. Los estudiantes fueron agrupados por parejas. Esta elección se justifica ya que como señalan Chico y Planas (2011) las interacciones en pareja producen avances en el aprendizaje matemático, mediante acciones como refutación, cuestionamiento, validación, paráfrasis y ampliación, además de ser un primer paso hacia la argumentación matemática. Algunos de los estudiantes participantes tenían necesidades específicas de apoyo educativo, específicamente, estudiantes con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH), que necesitaban un tiempo de descanso entre un problema y otro. Sin embargo, esta variable no ha sido considerada en el estudio que aquí presentamos. La investigadora, graduada en Educación Primaria, guía en todo momento a los estudiantes en el proceso de resolución de la tarea.

Instrumento de investigación

El instrumento de investigación fue un cuestionario que constaba de 5 problemas aritméticos escolares aditivos. Estos se entregaron por escrito a los alumnos y fueron respondidos sin un límite de tiempo para resolverlos, dada la diversidad de características que presentaba el grupo de estudiantes. Tuvieron que resolver estos problemas aplicando el método ABN. A continuación mostramos los problemas propuestos. Las localidades y la consola están cegadas, en los enunciados originales de los problemas se utilizaron datos reales.

1. Los alumnos del Colegio A son 673 y los alumnos del Colegio B son 594. Quieren ir al Teatro de San Pedro todos juntos. ¿Cuántos son en total?
2. La distancia de CIUDAD a Barcelona es de 996 kilómetros y la distancia de CIUDAD a Cáceres es de 321 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros hay más de CIUDAD a Barcelona que de CIUDAD a Cáceres?
3. Se nos ha roto el frigorífico y hemos tenido que comprar uno nuevo. Mi padre tenía ahorrados 734 euros. Si el frigorífico nuevo cuesta 372 euros. ¿Cuánto dinero nos queda?
4. En el bosque había 643 árboles y se talaron 268. ¿Cuántos árboles quedan en el bosque?
5. Mi prima María y yo estamos ahorrando para comprarnos la nueva CONSOLA, porque ha salido una oferta por 537 euros. María tiene 438 euros y yo tengo 277 euros. ¿Cuánto dinero tenemos en total? ¿Nos falta o nos sobra dinero? ¿Cuánto?

El primer problema propuesto es un problema que se resuelve con una suma. El segundo, tercer y cuarto problemas son de restar, aunque de acuerdo con la clasificación de Puig y Cerdán (1988) son tipos de problemas distintos según su componente semántica. El quinto problema propuesto se descompone en una primera pregunta que se responde con una suma, una segunda pregunta que se resuelve comparando dos cantidades y una tercera pregunta que se responde con una resta.

Fuentes de datos y datos

Para la recogida de información, utilizamos una grabadora de audio y una cámara de vídeo. Las grabaciones de audio fueron transcritas en su totalidad y de las grabaciones de vídeo se tomaron las imágenes que mostraban las acciones de los estudiantes (manipulan palillos, tabla de conteo o construyen la rejilla, y la rejilla). También se recogieron las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas. Con objeto de preservar la identidad de los alumnos, de las grabaciones de vídeo solo se eligieron aquellas imágenes en las que no es posible su identificación.

En las transcripciones los estudiantes están indicados por orden de aparición y son reconocidos como A1 hasta A6. La investigadora está representada con la letra I.

Procedimiento de análisis

Para el análisis de los datos, primero nos centramos en la identificación de las propiedades características del discurso matemático, codificado de la siguiente manera: mediadores visuales (negrita y subrayado) y rutinas (negrita). Hemos omitido el análisis de palabras matemáticas y las narrativas por razones de espacio. Cabe destacar que a pesar del título de la comunicación, hemos analizado también el discurso de la maestra que actúa como guía y apoyo de los estudiantes en el proceso de resolución. Otro punto a señalar es que hemos transcrito en todo el trabajo las palabras que indican cantidades utilizando sus correspondientes símbolos numéricos, que son a su vez mediadores visuales de tipo simbólico, pero debido a su abundancia en las transcripciones, no los hemos señalado como tales.

A continuación, presentamos un ejemplo del procedimiento de análisis con un protocolo en el que hemos identificado por un lado como mediadores visuales, la tabla de conteo (ver Figura 3) y la rejilla (análoga a la de la Figura 1) que van confeccionando para resolver el problema. En la rejilla, como podemos ver en la Figura 1, en la primera fila aparece la suma a realizar, debajo, en la columna de la izquierda, las cantidades que ya se han sumado, en la columna del centro los resultados parciales de las sumas, y en la columna de la derecha lo que queda por sumar. Por otro lado, en el protocolo identificamos dos rutinas: la primera para restar 40 a 434, que se hace quitando de 10 en 10, y la segunda para restar 70 de 434 que se hace recurriendo a la tabla de conteo (que puede hacerse de 10 en 10 o por unidades).

A1: Seño, no sé **quitarle** 40 a 434.

I: ¿Y por qué no lo **haces poco a poco de 10 en 10**?

A1: Ya. [Ha restado primero 30 y le queda 404. El problema lo tiene al restarle 10 que resta 100]

[…]

I: ¿Y si a **400 le queremos quitar 10**?

A1: 390. […]

A2: **Quito 70. 434 menos 70**. [A2 toma la tabla de conteo contando hacia atrás de 10 en 10].

A2: 24, 14, 4 [se refiere a 424, 414 y 404]. […]

A2: 300, 394.

A2: 84, 74, y 64 [se refiere a 384, 374 y 364]. 364

RESULTADOS

El proceso de análisis de los datos nos permitió identificar los mediadores visuales y las rutinas (de tipo exploración en todos los casos) presentes en el discurso de los estudiantes cuando resuelven los problemas aritméticos aditivos utilizando el método ABN y que caracterizan este discurso matemático.

Nos vamos a limitar en el resto del trabajo a analizar el discurso que se produce durante la resolución del primer problema, aditivo de sumar, por razones de espacio. En el siguiente protocolo, los mediadores visuales son la suma “673 + 594” que es de naturaleza simbólica y la rejilla que es de naturaleza gráfica (Figura 1). Para facilitar la lectura en los diálogos hemos incluido algunas aclaraciones entre corchetes, referidas a las acciones que se ven en el vídeo.

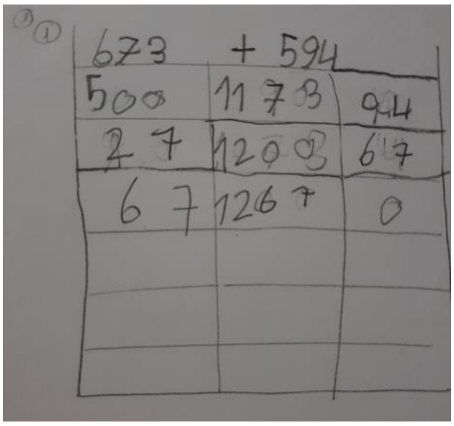


Figura 1. Rejilla del problema 1.

A1: Yo creo que es una suma. A ver, espérate.

A2: (Al mismo tiempo) **673 + 594**.

I: ¿Sabéis hacer la **rejilla**?

A1 y A2: No.

I: Te la hago, ¿vale? Me tenéis que ir diciendo los pasos que seguís, pues cojo esto lo paso aquí…

A1 y A2: Vamos a **ir añadiendo primero las centenas, luego las decenas y por último las unidades.**

A1: Voy a pasar primero las centenas. Bueno, da igual, voy a hacerlo de cabeza. Que yo sé hacerlo de cabeza.

I: Espera, ¿qué has hecho?

A2: Pues he **pasado aquí esto** [el estudiante descompone el número: 500 y 94].

[…]

I: Cuéntame por qué has descompuesto el número.

A2: **Sí, paso aquí** [se refiere a la primera columna de la Figura 1] **el 500** porque son 5 centenas.

En este protocolo hemos identificado una rutina, en negrita, que indica el procedimiento que los estudiantes tienen intención de seguir para realizar la suma de los dos números y los distintos pasos que van siguiendo para calcular la suma. En esta rutina se empieza descomponiendo el número y sumando de izquierda a derecha, 500 (ver rejilla de la Figura 1). Esta manera de proceder indica que se puede descomponer el número a añadir e ir añadiendo cada una de las partes (la descomposición del número se hace con las unidades del orden superior, centenas y el resto de unidades del número, 500 y 94). A continuación, su intención inicial era sumar 90, pero lo que hacen es completar la centena de 173 a 200, a sugerencia de la maestra. Podemos interpretar que el estudiante ha cambiado de rutina, pasando de la rutina que añade decenas, centenas, etc. completas a la rutina de completar decenas, centenas, etc.

Por tanto, desde el punto de vista del análisis realizado consideramos que los estudiantes han empleado dos rutinas diferentes durante el proceso de resolución de la tarea.

Además, observamos en este problema que cuando el estudiante tiene que hacer la suma, añade el número menor al mayor, y no al revés, aunque podría ser simplemente debido a que es el orden en que aparecen los datos en el problema, y no a la aplicación de esa estrategia concreta. Durante el proceso de resolución de la tarea, cuando los estudiantes tienen dificultad al sumar deciden usar un material manipulativo (Figura 2), como se observa en el siguiente protocolo:

A1: Voy a utilizar los **<u>palillos</u>.** Pero…¡No tengo centenas!

I: Si no tienes puedes formarlas.

A2: **Coge 10 decenas y fórmala** [hablando a A1].

Figura 2. Uso de palillos

En este protocolo hemos resaltado el mediador visual que podemos ver en la Figura 2: los palillos. Cada palillo representa una unidad. Hay grupos de diez palillos atados con un elástico que representan una decena. Podemos decir que el estudiante utiliza la rutina “composición de unidades de orden superior" en la que 10 unidades de un orden se agrupan para formar unidades de orden superior en el sistema decimal. Como hemos mencionado antes, se observa en la Figura 1 y en el siguiente protocolo que el alumno no llega a realizar la anterior rutina completa, sino que en el segundo paso cambia a otra rutina "de complementar" en la que completa potencias de 10, en este caso, las centenas.

I: Suma 73 más 90. ¿Cuánto será? ¿Por qué en vez de coger 90 no coges números más pequeños, de 20 en 20, o **cuánto le falta al 73 para ser cien**?

A2: No sé…

I: Vamos a coger un número más pequeño. ¿Cuánto le falta para el 100?

A2: 27 seño [Escribe 27 en la primera columna de la rejilla].

El alumno tiene unidades suficientes para completar el 100 (la centena) y las toma de la tercera columna, que representa lo que queda por sumar (Figura 1).

El otro alumno A1, sin embargo, tiene dificultades para completar el 100 y utiliza otro mediador visual, la tabla de conteo del 100 (figura 3).

I: Entonces si a 1173 le sumas 27. ¿Cuánto es?

A1: 1700… 1800… [Duda].

I: A ver tranquilo, 73 más 27, ¿cuánto es?

[El estudiante A1 utiliza la tabla de conteo del 100, y averigua que es 100]

I: Ahora a 1100 le sumamos 100 ¿Cuánto es?

Observamos en la Figura 3 que el alumno cuenta en sentido ascendente partiendo del mayor número, tantas unidades como indica el menor. Cabe señalar que en los problemas de restar también el alumno usa la tabla contando pero en sentido descendente.

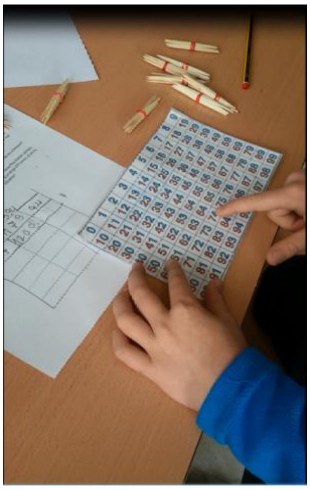


Figura 3. Uso de la tabla de conteo del 100

CONCLUSIONES

Si nos ajustamos a la definición de algoritmo dada por la Real Academia Española, el método ABN no es un algoritmo ya que no es un conjunto ordenado de reglas, cada paso no determina unívocamente el siguiente, sino que hay libertad de elección. Podemos considerar que es un método que se basa en los significados de las operaciones aritméticas que los problemas promueven y por tanto recomienda que siempre las operaciones deben vincularse a problemas concretos. Además, como Martínez-Montero y Sánchez-Cortés (2013) señalan, "el trabajo con problemas matemáticos escolares es algo muy frecuente y que puede coadyuvar a otro aprendizaje fundamental: las operaciones básicas" (p. 18).

Nuestro análisis nos ha permitido identificar los mediadores visuales que los estudiantes utilizan para representar los objetos, entre ellos, el más significativo es la rejilla en la que completan la operación. También hemos identificado las rutinas que se manifiestan en las acciones de los estudiantes cuando utilizan el método ABN, en este caso para la suma. Concretamente hemos identificado tres rutinas que se ponen de manifiesto en el discurso de los estudiantes:

- *Rutina de complementar:* Completar potencias de 10 (decenas, centenas…) en el mayor sumando o en el primero.
- *Rutina de tomar potencias de 10* (del menor sumando o del segundo) para añadirlas al otro sumando.
- *Rutina mixta*: Una combinación de las dos rutinas anteriores.

Esta identificación que caracteriza, en parte, el discurso de los estudiantes permite comparar el método ABN y el algoritmo tradicional de la suma (llevadas) buscando diferencias/similitudes. Una diferencia entre el algoritmo tradicional para la suma y el método ABN viene dada por el uso de la rejilla como mediador visual, que es muy diferente del mediador visual que se construye utilizando el algoritmo tradicional. Los otros mediadores visuales pueden también aparecer cuando se utiliza el algoritmo tradicional. Otra diferencia viene dada por el sentido en el que se van realizando los pasos para sumar, en el método ABN se empieza sumando de izquierda a derecha (o de derecha a izquierda), y no obligatoriamente de derecha a izquierda que es como se hace de forma obligada en el algoritmo tradicional. Otra diferencia que hemos podido identificar entre el algoritmo tradicional y el método ABN viene dada porque en los algoritmos tradicionales cada paso viene unívocamente determinado por el paso anterior, mientras que en el método ABN cada paso no está unívocamente determinado, como pone de manifiesto la identificación de tres rutinas diferentes para realizar la suma.

Otra rutina que hemos identificado en los datos viene dada por *"composición de unidades de orden superior",* en la que se utilizan unidades de orden inferior para formar unidades de orden superior en el sistema decimal. Queremos destacar que esta rutina también aparece en el algoritmo tradicional para la suma.

Además, los resultados obtenidos nos permiten hacer una primera aproximación a la identificación de indicadores de aprendizaje matemático. Una característica de las rutinas identificadas en el método ABN es la "aplicabilidad", es decir, el rango de situaciones en las que aplicar las rutinas es amplio, ya que algunas rutinas (rutinas de tomar potencias de 10, de complementar, mixta) se utilizan tanto para sumar como restar, aunque en la resta con matizaciones. Otra característica encontrada es la flexibilidad en el uso de diferentes rutinas para realizar una tarea matemática. Ambas características son para Lavie et al. (2019) un indicador de aprendizaje matemático.

Finalmente, algunas limitaciones de este trabajo vienen dadas porque solo se han analizado dos propiedades del discurso (mediadores visuales y rutinas) y se ha utilizado una única pareja de estudiantes. Estamos analizando el resto de parejas de estudiantes y las restantes propiedades discursivas, lo que permitirá abordar en profundidad la caracterización del discurso y los cambios en el mismo, es decir, el aprendizaje matemático.

Referencias

Ashlock, R. B. (2010). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student learn (10th ed.)*. Boston, EE. UU.: Allyn & Bacon.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M. C., Adamuz-Povedano, N. y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto escolar de la metodología basada en algoritmos ABN en niños y niñas de primer ciclo de Educación Primaria. *UNIÓN*, *39*, 97-109.

Campbell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. (1998). What criteria for student-invented algorithms? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 NCTM Yearbook* (pp. 49-55). Reston, EE. UU.: NCTM.

Caspi, S. y Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research, 51–52*, 45-65.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Maier, E. A. (1987). Basic mathematical skills or school survival skill? *The Arithmetic Teacher*, *35*(1), 2.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 355–362). Umeå, Suecia: PME.

Martínez-Montero, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez-Montero, J. y Sánchez-Cortés, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN.* Madrid: Wolters Kluwer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, EE. UU.: Autor.

Penalva, M. C., Rey, C. y Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto B-Learning. *Educación Matemática*, *25*(1), 7-34.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), 2-5.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rasmussen C., Zandieh, M., King K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, EE. UU.: Cambridge University Press.

Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 28-44.

Suurtamm, C. y Vézina, N. (2010). Transforming pedagogical practice in mathematics: moving from telling to listening. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 11*. Recuperado de http://www.cimt.org.uk/journal/suurtamm.pdf

LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y TAREAS NUMÉRICAS EN ALUMNADO DE SECUNDARIA Y FUTUROS PROFESORES

Reading statistical graphs and numerical tasks in secondary school students and prospective teachers

García-Alonso, I. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se analizan las respuestas de dos grupos de estudiantes (futuros profesores de Primaria y alumnos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, 14-15 años) a un cuestionario escrito, relativo a la lectura de gráficos estadísticos con tareas numéricas. El objetivo es categorizar en niveles las respuesta de los estudiantes acerca de la descripción, análisis e interpretación de datos estadísticos (Mooney, 2002) y evaluar dos componentes del sentido numérico. Los resultados indican diferencias de logro entre ambos grupos, en cuanto a los niveles estadísticos y la forma de abordar las tareas numéricas. También se observa la misma tipología de dificultades en las respuestas. Especialmente relevantes son las respuestas numéricas que se alejan de lo razonable reflejando escaso sentido numérico.

Palabras clave: *Gráficos estadísticos, sentido numérico, niveles de lectura de gráficos.*

Abstract

In this paper we analyze the answers of two groups of students (prospective elementary teachers and secondary students, 14-15 years old) to a written questionnaire, related to the reading of statistical graphs with numerical tasks. The main goal is to categorize in levels the students' answers about the description, analysis and interpretation of statistical data (Mooney, 2002) and also study two components of the number sense. The results indicate differences in achievement between both groups, in terms of statistical levels and how to approach numerical tasks. They also show the same typology of difficulties in the answers. Especially relevant are the numerical answers that are far from the reasonable showing a poor number sense.

Keywords: *Statistical graphics, number sense, graphic reading levels.*

INTRODUCCIÓN

Desarrollar el pensamiento crítico y el juicio fundamentado en los datos son habilidades esenciales para todo ciudadano informado. Continuamente estamos siendo abordados por una cantidad enorme de información basada en datos (gráficos y numéricos). Es labor de los docentes desarrollar en los estudiantes la habilidad para utilizarlos con inteligencia, valorar las informaciones y formular conclusiones fundamentadas. En nuestros días, "toda persona formada necesita comprender las ideas y conclusiones estadísticas, para enriquecer tanto su vida profesional como personal" (Wild, Utts y Horton, 2018, p. 16). Estos autores argumentan que: "los métodos estadísticos se utilizan en casi todas las áreas de conocimiento y de forma creciente por negocios, gobiernos, profesionales de la salud, otros profesionales e individuos para tomar mejores decisiones" (p. 16). Todo ello hace que la formación en Estadística comience desde edades tempranas y continúe en la Secundaria.

García-Alonso, I. y Bruno, A. (2019). Lectura de gráficos estadísticos y tareas numéricas en alumnado de secundaria y futuros profesores. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 313-322). Valladolid: SEIEM.

La enseñanza de la Estadística en la educación obligatoria ha tenido un impacto notable en los últimos años del siglo pasado (Zieffler, Garfield y Fry, 2018). Aunque estos autores apuntan "la falta de una guía acerca del contenido estadístico sobre el que los docentes deberían estar preparados para enseñar" (p. 59). Por su parte, Cobb (1992) recomienda llevar a cabo tres modificaciones iniciales para reformar la enseñanza de la introducción a la estadística: enfatizar el pensamiento estadístico, incluir más datos y conceptos (y menos teoría y recetas) y fomentar el aprendizaje activo. Una de las principales actividades cuando se trabaja la Estadística se relaciona con la interpretación de la información ofrecida mediante gráficos estadísticos. Cleveland (1987) indica que un gráfico es útil cuando la decodificación visual puede ser desarrollada de forma precisa y eficiente. En este sentido, algunas investigaciones nos sugieren que la interpretación de gráficos es una actividad compleja para los futuros profesores (Espinel, 2007; Espinel, Bruno y Plasencia, 2008) y que estos muestran una baja competencia en lectura de gráficos (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015).

Es evidente que el éxito en las tareas estadísticas está condicionado por el conocimiento numérico que se tenga. En los últimos años, desde diferentes investigaciones y documentos curriculares se indica la necesidad de desarrollar en los estudiantes un adecuado *sentido numérico*, definido como "una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible" (NCTM, 2000; Sowder, 1992). En Arteaga, Batanero, Ortiz y Contreras (2011) se señala cómo el *sentido numérico* ayuda a futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En esa misma línea, en este trabajo se analiza el manejo de gráficos estadísticos (descripción, análisis e interpretación de datos), y la obtención de resultados numéricos a partir de datos extraídos de dichos gráficos, observando ciertas componentes del *sentido numérico* (que se explicitan más adelante). Así, se estudia la competencia gráfica y el sentido numérico que manifiestan estudiantes de secundaria, tomando como referente el de futuros profesores de Primaria. Entendemos esta última población como personas adultas, cuya formación matemática concluía en el momento del estudio, y que *a priori* debería estar consolidada en los aspectos matemáticos que son objeto de la investigación.

MARCO CONCEPTUAL

En los últimos años se ha desarrollado un marco conceptual acerca de los modelos de desarrollo del razonamiento estadístico que han sido aceptados ampliamente por la comunidad científica (Jones, Langrall, Mooney y Thornton, 2004). Por su parte, Mooney (2002) adapta el marco de Jones et al. (2001), que caracteriza el pensamiento estadístico, a estudiantes de Secundaria. El marco está basado en cuatro constructos: describir los datos, organizar y resumir la información, representar los datos y, por último, analizar e interpretar los datos. Mediante diferentes descriptores, se analiza las respuestas de los estudiantes de forma que se pueda graduar, por un lado, la complejidad de las respuestas que estos dan ante tareas que requieran el uso de datos estadísticos, siguiendo la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982, 1991), y, por otro lado, atendiendo a los niveles de lectura de los datos que se ofrecen mediante gráficos estadísticos (Curcio, 1987; Friel, Curcio y Bright, 2001). El primer proceso de análisis de la descripción de los datos hace referencia a cuando estos se presentan mediante gráficos, pues según Mooney, "la lectura explícita de los datos presentados en tablas o representaciones gráficas […] se convierte en la base para que los estudiantes comiencen a hacer predicciones y descubrir tendencias" (Mooney, 2002, pp. 25-26).

En la Tabla 1 recogemos los descriptores del citado marco, que utilizaremos en el análisis de las respuestas de los estudiantes de Secundaria y futuros profesores a un cuestionario con gráficos estadísticos. En un trabajo anterior (García-Alonso y Bruno, 2019) ya se hizo uso de este marco en los aspectos relacionados con *Leer los datos, Leer entre los datos* y *Leer más allá de los datos.*

Por otra parte, para el estudio numérico se ha tenido en cuenta dos componentes de las que conforman el *sentido numérico*, siguiendo a McIntosh, Reys y Reys (1992):

1) Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria
2) Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable

El papel del contexto en un estudio estadístico es indiscutible, pues da sentido a las decisiones que se deben tomar. Aquí confluyen los dos aspectos analizados en este trabajo: la estadística y los números ayudan a la generación del juicio y la toma de decisiones en un contexto determinado.

Tabla 1. Descripción, análisis e interpretación de datos (Mooney, 2002)

	Nivel 1 (N1) Idiosincrático	**Nivel 2 (N2) Transicional**	**Nivel 3 (N3) Cuantitativo**	**Nivel 4 (N4) Analítico**
Descripción de los datos	Utiliza elementos irrelevantes para evaluar la representación gráfica. No identifica o malinterpreta la unidades de los valores de los datos	Utiliza elementos relevantes para evaluar la representación gráfica. Identifica de forma incompleta las unidades de los valores de los datos	Utiliza elementos relevantes y el contexto para evaluar la representación gráfica. Identifica las unidades de los valores de los datos	Utiliza elementos relevantes y el contexto para evaluar más de una representación gráfica. Identifica las unidades de los valores de los datos en general
Leer los datos	No reconoce o utiliza características o da razones irrelevantes. No identifica o malinterpreta las unidades de los datos.	Utiliza elementos o razones relevantes. Identifica de forma incompleta las unidades de los datos.	Utiliza elementos relevantes y el contexto de los datos. Identifica las unidades de los datos.	Utiliza elementos relevantes y el contexto. Utiliza relaciones numéricas. Identifica las unidades de los datos.
Leer entre los datos	Realiza comparaciones incorrectas en y entre los datos	Realiza una comparación simple o un conjunto de comparaciones parcialmente correctas en o entre los datos	Realiza una comparación global o local en y entre conjuntos de datos	Realiza una comparación local y global en y entre los conjuntos de datos
Leer más allá de los datos	Realiza inferencias que no se basan en los datos o inferencias basadas en aspectos irrelevantes	Realiza inferencias que son parcialmente basadas en los datos. Algunas inferencias son parcialmente razonables	Realiza inferencias primordialmente basadas en los datos. Algunas inferencias son parcialmente razonables	Realizan inferencias razonables basadas en los datos y el contexto

OBJETIVOS

En esta investigación se comparan dos poblaciones, estudiantes de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y futuros profesores de Educación Primaria, respecto a:

1. La competencia de lectura, análisis e interpretación de gráficos estadísticos.
2. El sentido numérico respecto a la comprensión de la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria, observando el uso de los datos extraídos de gráficos estadísticos.

Se ha elegido a los futuros profesores de Educación Primaria con el sentido de recoger información de una población que ha terminado su formación y de conocer cómo hace uso del lenguaje gráfico y numérico para resolver una situación problemática planteada, de forma que sirva de referente para situar el análisis de los estudiantes de Educación Secundaria.

METODOLOGÍA

La metodología seguida ha sido descriptiva, analizando los datos de forma cuantitativa y cualitativa, a partir de un cuestionario escrito en el que se combinan aspectos relativos a la lectura, interpretación de datos gráficos y tareas numéricas. Un análisis preliminar de las respuestas de estudiantes de ESO se publicó en García-Alonso y Bruno (2019).

Participantes

Los datos de este estudio se refieren a 110 estudiantes de 3º de ESO (14-15 años) de tres centros educativos públicos de Tenerife (Islas Canarias) que cursaban la materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Todos ellos habían cursado conceptos estadísticos previamente propios de su nivel, por información de sus tutores. Para los futuros profesores se recogieron datos de 90 estudiantes del tercer curso del grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna, que estaban en las últimas semanas de su formación en matemáticas (tanto en lo disciplinar como didáctica). La prueba en ambos grupos se implementó en una sesión habitual de clase.

Instrumento

El cuestionario constó de varias preguntas en torno al uso del móvil, de forma que el contexto fuera cercano y estuviera relacionado con su vida cotidiana. Estaba formado por dos preguntas, una de ellas con tres apartados, que denominaremos Pregunta 1, 2a, 2b y 2c. Estas versaban acerca del uso y hábitos con el teléfono móvil en estudiantes de edades comprendidas entre los 10 y los 15 años.

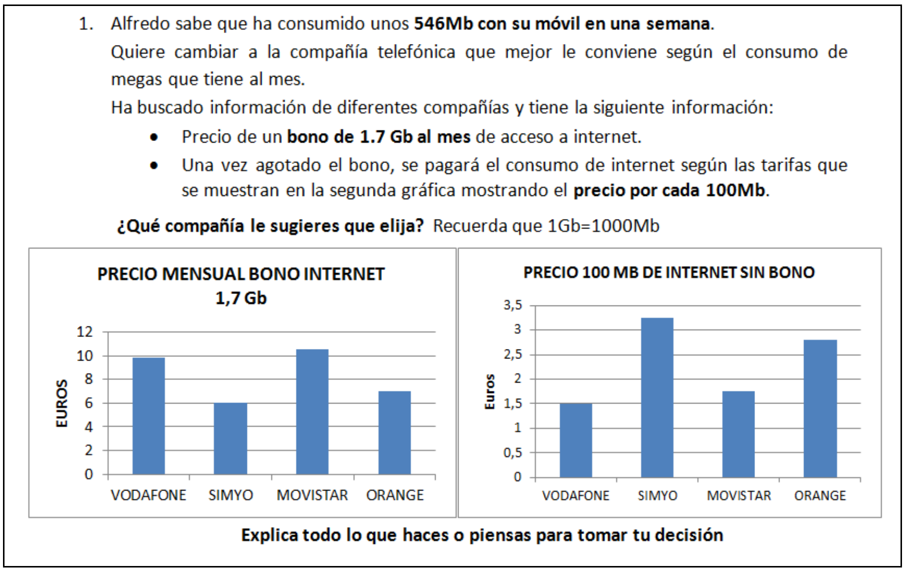
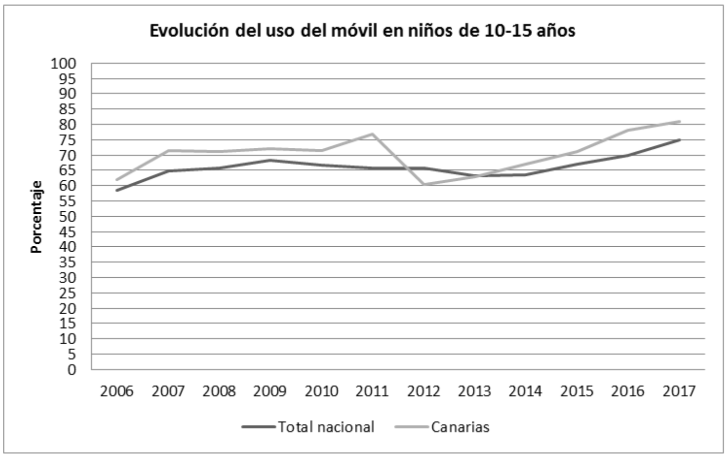


Figura 1. Pregunta 1 del cuestionario

En la pregunta 1 (Figura 1) los estudiantes deben tomar la decisión de elegir la compañía telefónica que mejor se adapta a las necesidades de un individuo, utilizando para ello la información numérica y gráfica que aparece en el enunciado. Los estudiantes deben justificar su respuesta extrayendo la información necesaria y combinándola de forma adecuada.

La segunda pregunta (Figura 2) muestra un gráfico sobre el uso de móvil por niños de 10 a 15 años, y se pide comparar la evolución de dos gráficas (Pregunta 2a), para luego extraer una información concreta de la gráfica y con ella completar un porcentaje que se pide en el siguiente apartado (Pregunta 2b). Con el cálculo se buscaba detectar la destreza que ofrecen en el cálculo pedido. En la Pregunta 2c se muestra el mismo gráfico de la pregunta 2a, y se le pide que realice una predicción continuando la gráfica hasta el año 2025, justificando la tendencia que consideran que seguirá. Con ello se pretende analizar la tendencia de la gráfica y el papel que tiene el contexto en su justificación.



2. En la siguiente gráfica se muestra el resultado de una encuesta realizada en España y Canarias sobre el uso del móvil por niños de 10-15 años.

a) **Comenta** la información que te muestra la gráfica. ¿Qué opinas y qué destacarías de lo que observas?

b) Se estima que en Canarias hay unos 130 713 niños entre 10 y 15 años en el año 2017. **Calcula** cuántos niños tienen teléfono móvil en Canarias. ¿Es exacto? ¿Por qué lo crees así? **Explica cómo lo haces**.

c) **Completa** la gráfica hasta el 2025

Figura 2. Pregunta 2 del cuestionario

Categorías de análisis de respuestas

Desde el punto de vista de la lectura, análisis e interpretación de gráficos estadísticos se tuvieron en cuanta los cuatro niveles progresivos descritos en el marco teórico de Mooney (2002): Idiosincrático, transicional, cuantitativo y analítico.

En el análisis numérico se distinguió si el alumno ponía en juego la componente *Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria*. Para ello se categorizaron las respuestas numéricas observando las estrategias seguidas de la siguiente forma:

- Planteamiento numérico correcto (codificado como E1): Implica tomar los datos adecuados y efectuar las operaciones correctamente.
- Planteamiento numérico incorrecto (codificado como E2): Se aborda el problema a través de operaciones que no son las adecuadas a la situación o se cometen errores en los cálculos.
- Sin planteamiento numérico (codificado como E3): No se hacen operaciones, sino que dan argumentos a partir de los números que se extraen de las gráficas o se infiere un resultado con un argumento basado en su conocimiento del contexto.
- Planteamiento numérico mixto (codificado como E4): Se realiza alguna operación aunque no todas las necesarias y se acompaña de justificaciones basadas en el contexto o en algún dato extraído de la gráfica.

Para analizar la componente *Reconocer cuándo el resultado obtenido es* razonable, se tenía en cuenta si el alumnado daba como válidas respuestas muy alejadas de lo razonable en el contexto del problema.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

En este apartado se analizan los resultados de las preguntas 1 y 2. Se divide el análisis, empezando por la categorización de las respuestas desde el punto de vista gráfico y, posteriormente, desde el punto de vista numérico. En los dos casos estudiaremos el comportamiento de los estudiantes de Secundaria y el de los futuros profesores.

Pregunta 1. Elección de compañía telefónica

Análisis de lectura del gráfico de la pregunta 1

Se inicia el análisis de esta pregunta, estudiando cómo utilizaron la información que se daba en ambos gráficos. La primera gran diferencia entre los estudiantes de Secundaria y los futuros profesores es que estos últimos realizan la mayor parte de las operaciones y extraen los datos numéricos requeridos para responder a la pregunta, mientras que los estudiantes de Secundaria en muchos casos les basta con indicar el proceso que se debe seguir para resolver el problema, o bien indican algunos resultados que obtienen sin explicitar cómo los calcularon.

Se puede observar en la Figura 3 que, mientras los estudiantes de Secundaria se reparten de forma equilibrada entre todos los niveles de respuestas casi en la misma proporción, los futuros docentes de Primaria ofrecen una respuesta en el nivel más complejo ante la descripción de los datos de esta actividad. Es destacable que para los estudiantes de Secundaria leer la información contenida en los dos gráficos ha resultado especialmente difícil, pues el 53% de ellos comete errores, o bien, no entiende lo que se muestra en los gráficos estadísticos. Esto tiene consecuencias en la respuesta a la pregunta. Además, de los 46 estudiantes de Secundaria que se encuentran en el nivel 3 o el 4 en la lectura del gráfico (41% del total de estudiantes), únicamente 12 llegan a dar una respuesta correcta al problema (11% del total de estudiantes) (García-Alonso y Bruno, 2019).

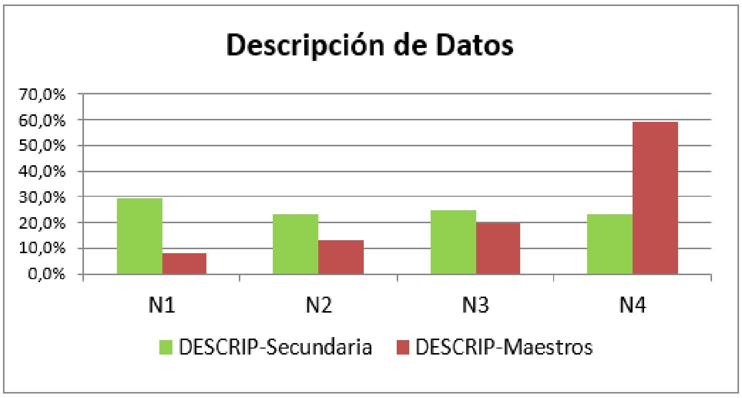


Figura 3. Niveles de respuesta a la Pregunta 1 (Mooney, 2002)

Ante esta actividad, los estudiantes han mostrado diferentes categorías de errores en la descripción y lectura de las gráficas, la mayor parte entre los estudiantes de Secundaria. En ambos casos hubo estudiantes que realizaron la suma de las gráficas como si tratasen de generar un solo valor para cada compañía; también hubo estudiantes que realizaron el estudio con cada una de las gráficas por separado sin llegar a entender cómo se interrelaciona la información dada en ambas gráficas; y, finalmente, también están los que realizaron el estudio exclusivamente con los datos de una de las compañías, sin realizar ningún tipo de comparación con las demás.

Análisis numérico de la pregunta 1

En este apartado se muestra las tipologías de resolución de la pregunta 1 desde un punto de vista de la corrección de los aspectos numéricos. En la Tabla 2 se muestran los porcentajes en que aparecieron las estrategias numéricas en los dos grupos de estudiantes.

Hay una diferencia muy clara en los dos grupos de estudiantes en cuanto a las estrategias numéricas. Mientras que un 54% de los futuros profesores responden correctamente con las operaciones necesarias para observar las diferencias de tarifas entre las cuatro compañías telefónicas (E1), solo responde de este modo un 12% de alumnado de la ESO. Se corresponden estos porcentajes con los estudiantes que han tenido éxito en la pregunta. Un 17% de futuros profesores y un 6% de estudiantes de ESO averiguan el precio de cada compañía planteando una operación no adecuada o cometiendo errores de cálculos, o por cambios de unidades incorrectas de megas a gigas (E2). En pocos casos se da una respuesta no razonable numéricamente (entre paréntesis en la tabla), por ejemplo, obtener que se debe pagar "870 euros al mes". Un 7% de futuros profesores frente a un 45% en la ESO elige una compañía, sin llegar a hacer operaciones (E3) (Figura 4, parte izquierda). La mayoría de estas respuestas son elecciones incorrectas, debido a que es complejo comparar sin hacer el cálculo. Por último, un 14% de futuros profesores y 24% de alumnado de la ESO hace planteamientos numéricos mixtos y por lo tanto, no completos (E4) (Figura 4, parte derecha).

Tabla 2. Porcentajes de estrategias de resolución numérica en la pregunta 1

Relación entre el contexto del problema y la operación necesaria	Futuros profesores	ESO
E1. Planteamiento numérico correcto	54	12
E2. Planteamiento numérico incorrecto	17 (3 no razonables)	6 (1 no razonable)
E3. Sin planteamiento numérico	7	45
E4. Planteamiento numérico mixto	14	24
Blanco	8	13

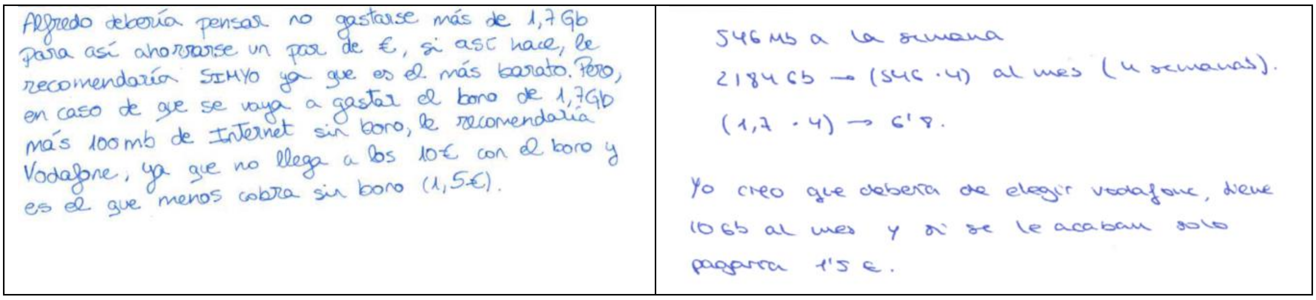


Figura 4. Respuesta sin un planteamiento numérico (E3, parte izquierda) y con un planteamiento numérico mixto (E4, parte derecha)

Pregunta 2. Uso del móvil en niños de 10 a 15 años

Análisis de comparación de los gráficos de la pregunta 2a

La segunda pregunta, en su apartado *2a*, se relaciona con el proceso de *Análisis e interpretación de datos*, concretamente con la comparación de gráficos estadísticos (Figura 5, parte izquierda). En este análisis encontramos que los estudiantes de Secundaria se encuentran en su mayoría en los niveles más bajos (N1 y N2). Pero entre los futuros profesores, encontramos que no es significativo que los resultados sean mejores, pues se mantiene el porcentaje de respuestas en el N2 y aumenta un 20% de respuestas en el N3.

Análisis de la tendencia del gráfico de la pregunta 2c

La pregunta *2c* se enmarca de nuevo en el *Análisis e Interpretación de datos*, aunque aquí atendiendo al estudio de la construcción de la tendencia (Figura 5, parte derecha). Es destacable que en este caso tampoco los futuros profesores tienen resultados que puedan considerarse notablemente mejores. Esto es indicativo de lo dificultosa que resulta esta pregunta para ambos colectivos y que tras el paso por todo el sistema educativo no ha mejorado de forma sustancial.

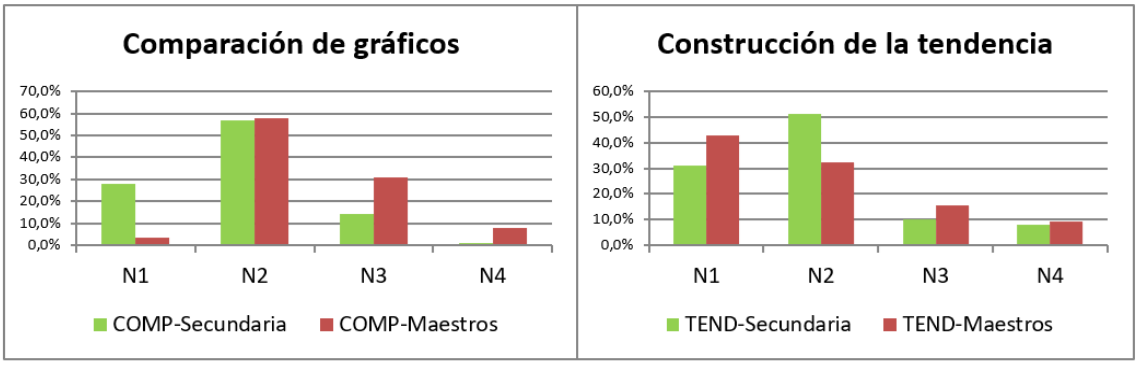


Figura 5. Niveles de respuesta a la pregunta 2a (parte izquierda) y a la pregunta 2c (parte derecha)

Análisis numérico de la pregunta 2b

En este apartado se muestra las tipologías de resolución de la pregunta 2 desde un punto de vista numérico, con las mismas categorías numéricas que en la pregunta 1. En la Tabla 3 se muestran los porcentajes con que aparecieron las estrategias descritas en los dos grupos de estudiantes.

Como ocurrió en la pregunta 1, hay una diferencia de éxito amplia entre ambos grupos de estudiantes. Un 70% de futuros profesores frente a un 40% en ESO responden con un planteamiento numérico correcto para obtener el porcentaje de niños que usan móvil en Canarias (E1), realizando un cálculo proporcional (en forma de regla de tres o con una igualdad de fracciones).

Tabla 3. Porcentajes de estrategias de resolución numérica en la pregunta 2b

Relación entre el contexto del problema y la operación necesaria	Futuros profesores	ESO
E1. Planteamiento numérico correcto	70	40
E2. Planteamiento numérico incorrecto	21 (14 no razonables)	16 (15 no razonables)
E3. Sin planteamiento numérico	3	9
Blanco	6	35

Los porcentajes de planteamientos numéricos incorrectos (E2) son semejantes en ambos grupos (21% y 16%), así como la tipología de errores cometidos, que se refieren a: plantear una regla de tres incorrecta, o bien, plantear la regla de tres correctamente pero cometiendo errores de cálculo. En general, la mayoría de los estudiantes que dan una repuesta de tipo E2 obtiene resultados que no son razonables numéricamente, lo cual se ha señalado entre paréntesis en la tabla. Por ejemplo, a pesar de reconocer que deben averiguar el 80% de 130713 niños obtienen como resultado: 10457 niños, o bien 16.33 niños o, incluso, un número de niños mayor que el total (186732 niños). En estos casos no se produce la corrección o reflexión sobre el resultado obtenido en ninguno de los grupos de estudiantes.

Son menos los estudiantes que dan un resultado sin planteamiento numérico (E3). Así, indican que “hay que hacer una regla de tres”, pero no la materializan. Otros estudiantes dan como resultado el total de niños en Canarias, como si fuera el 80% que deben obtener (esta respuesta indica que no se ha entendido el enunciado del problema). Por último, en esta cuestión es especialmente llamativo el alto porcentaje de alumnado de la ESO que dejó la pregunta en blanco, muchos de ellos escribiendo la frase de “No sé hacerlo”.

En resumen, aunque se obtienen resultados altos de éxito en futuros profesores de Primaria, no se puede obviar que hay un 30% de ellos que no aborda correctamente esta tarea. Esto puede considerarse un resultado preocupante analizándolo desde la alfabetización numérica de personas adultas que ya habían finalizado su formación matemática. En el alumnado de la ESO únicamente un 40% tiene éxito en el cálculo proporcional, en un momento en el que estos contenidos tampoco se abordarán explícitamente con posterioridad, pues corresponden a cursos anteriores.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado las respuestas que estudiantes de Educación Secundaria y futuros profesores de Primaria dan a un cuestionario en el que la información se ofrece mediante gráficos estadísticos y en los que se requiere la realización de cálculos numéricos, todo ello en un contexto *a priori* cercano para ellos.

La actividad de lectura e interpretación de gráficos estadísticos ha sido una actividad compleja para los estudiantes de secundaria y futuros profesores de Primaria, lo que concuerda con lo recogido en investigaciones anteriores (Arteaga et al., 2015; Espinel et al., 2008; González, Espinel y Ainley, 2011). Además se observa que los estudiantes tienen especial dificultad para resolver la tarea cuando la información gráfica se ofrece distribuida en dos gráficos, llegando a manifestar que no comprendían la tarea. Esto abre una interesante vía de investigación.

Desde el punto de vista numérico, el alumnado de la ESO, en la pregunta 1, mayoritariamente no vio la necesidad de hacer los cálculos exactos, les bastaba una estimación superficial de la situación a partir de los gráficos. Puede ocurrir que hayan pensado que para lo que pedía era suficiente con una aproximación no muy exacta. Se observa, por tanto, una dificultad asociada a la componente de *sentido numérico* descrita como *Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria*. No dieron importancia al cálculo del dinero que habría que pagar con cada compañía. Quizás esto aún no forma parte de sus responsabilidades, sino que son sus padres quienes toman esas decisiones. Mientras que el alumnado universitario lleva un mayor ajuste y consciencia de los gastos económicos en su vida cotidiana. Por su parte, en la pregunta 2 se llega a mejores resultados en los futuros docentes, sin olvidar que la sencillez de la pregunta debería haber supuesto un mayor éxito. Llama la atención el bajo éxito en secundaria (muchas de respuestas en blanco). En esta pregunta es significativo también cómo hay estudiantes que no activaron la componente de *sentido numérico* descrita como *Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable* en lo numérico o en lo contextual.

El contexto da *sentido numérico* y *sentido estadístico* (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Sin embargo, en el cuestionario analizado, el contexto no tuvo un papel relevante para muchos estudiantes, pues no lo usaron para crear nueva información a partir de la información cualitativa y cuantitativa, en el sentido que indican Aoyama y Stephens (2003, p. 208). Es más, la componente aleatoria del contexto en la actividad 1 no fue tenida en cuenta y la estimación de consumo significó para todos un valor constante a lo largo de toda la tarea. Consideramos que se hace necesario trabajar más los aspectos relacionados con la lectura e interpretación gráfica relacionándola con el *sentido numérico*, estudiando en profundidad el papel que el contexto tiene ante las tareas de toma de decisiones o la validez de un resultado numérico.

Agradecimiento

Trabajo financiado por el Proyecto de Investigación “Resolución de problemas y competencia matemática en la educación Primaria y Secundaria y en la formación de profesores”. EDU2017-84276-R.

Referencias

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(3), 207-225.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. R. (2015). Statistical graphs complexity and reading levels: a study with prospective teachers. *Statistique et Enseignement*, *6*(1), 3-23.

Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, *41*, 33–49.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7–18.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluation the quality of learning: the SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome)*. Londres, Reino Unido: Academic Press.

Biggs, J. y Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. En H. Rowe (Ed.), *Intelligence, Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). New Jersey, EE.UU.: Laurence Erlbaum.

Cleveland, W. S. (1987). Research in statistical graphics. *Journal of the American Statistical Association*, *82*(398), 419–423.

Cobb, G. (1992). Teaching statistics. En L. A. Steen (Ed.), *Heeding the Call for Change: Suggestions for Curricular Action* (pp. 3–43). EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 382–393.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación En Educación Matemática XI* (pp. 99–119). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Espinel, M. C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, R. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, México: ICMI & IASE. Recuperado de: http://iase-web.org/documents/papers/rt2008/T2P11_Espinel.pdf

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

García-Alonso, I. y Bruno, A. (2019). Razonabilidad numérica en respuestas estadísticas. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Granada, España: Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Recuperado de: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

González, M. T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education* (pp. 187-197). New York, EE.UU.: Springer.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S. y Thornton, C. A. (2004). Models of development in statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 97–117). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mooney, E. S., Wares, A., Jones, M. R., … y Nisbet, S. (2001). Using students' statistical thinking to inform instruction. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 109–144.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8.

Mooney, E. S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(1), 23–63.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Nueva York, EE.UU.: MacMillan.

Wild, C. J., Utts, J. M. y Horton, N. J. (2018). What is statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36). Cham, Suiza: Springer.

Zieffler, A., Garfield, J. y Fry, E. (2018). What Is statistics education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). Cham, Suiza: Springer.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN EL AULA DE PRIMARIA Y SECUNDARIA. UN ESTUDIO CON PROFESORES[xxiii]

Non-routine problem solving in Primary and Secondary Education. A study with teachers

García-Alonso, I., García-Díaz, A. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se analizan los resultados obtenidos al aplicar un cuestionario antes del inicio de un curso para profesores dirigido a tres tipos de docentes. Se trata de que expresen su opinión sobre el uso de la resolución de problemas en el aula de Matemáticas. Este análisis reveló similitudes y diferencias entre las opiniones que tienen estos profesores sobre cómo afrontan la resolución de problemas, cuáles son los aspectos pedagógicos que involucran su desarrollo en el aula y la forma de construir las matemáticas cuando la usan.

Palabras clave: *matemáticas, resolución de problemas, formación docente, heurísticos.*

Abstract

In this paper we analyse the results from a questionnaire taken by three groups of teachers before a formative program for teachers. Through the questionnaire, teachers state their opinion about the use of problem solving in Mathematics. This analysis will show similarities and differences which these teachers have in relation to how they face the problem solving, which are the features that involve teachers' development in the classroom and how Mathematics are built when teachers use it.

Keywords: *Mathematics, problem solving, teachers' learning, heuristics*.

INTRODUCCIÓN

En los currículos de Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, su primer estándar de aprendizaje evaluable es: "Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada" (MECD, 2014, 2015). Este estándar, junto con los que describen la resolución de problemas como un proceso estructurado y justificado, forma parte de los criterios de evaluación que aparecen a lo largo de todo el currículo de ambas etapas educativas.

Estos hechos justifican la importancia de que el profesor de matemáticas tenga conocimientos tanto de la propia matemática, como de la resolución de problemas. Dentro de los problemas matemáticos, juegan un importante papel aquellos en los que el resolutor no conoce a priori cómo llegar a la solución. Estos problemas se denominan problemas matemáticos no rutinarios (en adelante, PMNR).

La formación inicial y continua de los profesores busca la mejora de la práctica docente y ésta pasa por dar respuesta a algunas de las cuestiones anteriores. Según Giné de Lera y Deulofeu (2014), se hace necesario cuidar la formación continua para evitar que la experiencia docente genere "una tendencia al instrumentalismo de la actividad matemática" (p. 207).

García-Alonso, I., García-Díaz, A. y Camacho-Machín, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el aula de Primaria y Secundaria. Un estudio con profesores. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 323-332). Valladolid: SEIEM.

En NCTM (2014) se presentan algunas prácticas para la enseñanza de las Matemáticas, entre las que destacan la planificación e implementación de una enseñanza significativa de las matemáticas, o la evaluación de materiales y recursos curriculares que determinarán su conexión con el currículo y los estándares de aprendizaje.

En este trabajo buscamos conocer y profundizar en el conocimiento que los profesores tienen acerca de los problemas matemáticos, y, en particular de los PMNR, es decir, si los integran, y cómo lo hacen, en su trabajo diario. ¿Qué metodología consideran éstos que debe seguirse para hacer de sus alumnos buenos resolutores de PMNR? ¿Consideran que puede construirse la Matemática a partir de la resolución de PMNR? ¿Realizan una buena planificación para trabajar los PMNR? ¿Coinciden las respuestas cuando responden profesores en activo, futuros docentes o profesores formadores?

Para ello nos planteamos en este estudio los siguientes objetivos: (1) Determinar qué enfoque tienen los profesores (en activo, en formación y formadores) la resolución de problemas matemáticos no rutinarios (RPMNR) con respecto a la enseñanza de las matemáticas; (2) Conocer qué importancia dan los profesores a las fases de un proceso estructurado de resolución, y (3) Estudiar qué pautas de planificación siguen para integrar la RPMNR en el aula.

Para alcanzar estos objetivos, se diseñó un cuestionario en el que se preguntan diferentes aspectos relacionados con la RPMNR en el aula. El cuestionario, dirigido a profesores y futuros profesores de la asignatura de Matemáticas en determinados niveles de Educación Primaria (cursos 3º y 4º, 9-10 años) y Educación Secundaria Obligatoria (cursos 1º y 2º, 13-14 años), así como a los propios formadores del Proyecto, y forma parte de los instrumentos de evaluación inicial dentro del proyecto de investigación ProyectaMates[xxiv], proyecto cuyo objetivo es la formación en la enseñanza de la resolución de PMNR y la reflexión colaborativa acerca de su práctica en el aula siguiendo para esto último las fases del proceso de estudio de clase (o *Lesson Study*): Planificar, hacer y ver, reflexionar (Isoda, 2011, p. 66).

MARCO CONCEPTUAL

Existe mucha literatura sobre la resolución de problemas (en adelante, RP) matemáticos y su relación con su enseñanza y aprendizaje. Mientras que al principio el foco se situaba en los estudiantes, en las últimas décadas se ha centrado en los profesores, preguntándose acerca del conocimiento necesario para esta enseñanza. Así, Ball, Thames y Phelps (2008) caracterizan, a partir de las ideas de Shulman (1986), los tipos de conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para ejercer la práctica en el aula para garantizar mejores resultados de aprendizaje entre los estudiantes. Es lo que se conoce como el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que considera el conocimiento del profesor en dos dimensiones principales, conocimiento matemático y conocimiento pedagógico.

Entre los conocimientos del profesor de matemáticas, se deben considerar aspectos relacionados con la resolución de problemas, y más aún si se tiene en cuenta que ésta aparece destacada en los currículos de Educación Primaria y Secundaria. En particular, Chapman (2015) nos dice que “el conocimiento del profesor acerca de la enseñanza y para la enseñanza de la competencia en resolución de problemas debe ser más amplio que su capacidad general en RP, es decir, requiere más que saber cómo resolver problemas matemáticos” (p. 31). Y las componentes necesarias que indica este autor son: conocimiento del contenido de RP, conocimiento pedagógico de RP y factores afectivos y de creencias. Aunque, como este autor sigue diciendo, no se trata de poseer estos conocimientos de forma independiente, sino interrelacionados. También Stacey (2015) indica que “en el caso de la enseñanza de las matemáticas, el resolutor tiene que traer consigo experiencia matemática, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento de los estudiantes, y experiencia en pedagogía general y combinar estos dominios de conocimiento con la resolución de problemas” (p. 11).

Diversos autores (Mason, 2016; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985) se ocuparon de estudiar en profundidad los problemas matemáticos. Dentro del contexto matemático tomamos la definición de Santos-Trigo (2007), que afirma que un problema es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes: la existencia de un interés, la no existencia de una solución inmediata, la presencia de diversos caminos o métodos de solución y la atención por parte de una persona o grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. (p. 51). Remarcamos de esta definición la figura del resolutor, así como la necesidad de realizar un análisis y evaluación de estrategias durante su resolución.

Para resolver un problema, Polya (1945) estudia y establece un método de cuatro pasos o fases. Un elemento que este autor señala son las estrategias heurísticas, como aquellas que ayudan al resolutor a alcanzar la solución o soluciones de un problema. Schoenfeld (1985) también aborda el estudio del proceso de resolución de un problema, introduciendo la metacognición, que permite a un resolutor mantener un control de su progreso hasta dar con la solución. Según este autor, la metacognición es el elemento que distingue a resolutores noveles de expertos.

Otros autores han tratado de clasificar los problemas matemáticos a partir de diferentes criterios. López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) ofrece una amplia clasificación de problemas: según el conjunto de soluciones, el contexto, la forma de presentarse al resolutor,… Se hace necesario distinguir ejercicio de problema. En este sentido, Borasi (1986) denomina ejercicio a una tarea que permite comprobar la adquisición de cierto algoritmo o fórmula matemática. Sin embargo, en nuestro trabajo de investigación nos centraremos en los problemas matemáticos no rutinarios (PMNR) que, en palabras de Selden, Selden, Hauk y Masonet (1999), “son tareas cognitivamente no triviales”, en las que el resolutor comienza a resolverlos sin conocer la estrategia de resolución, lo que implica que no tiene valor si éste ya los ha resuelto antes. Por ello, en adelante nos referiremos con “resolución de problemas” a la “resolución de problemas matemáticos no rutinarios”.

Existe mucha literatura sobre las bondades de la resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas. Ya desde el año 2000, el NCTM recomienda que la RP no se considere como una parte aislada en los currículos (NCTM, 2000). Stacey (2015) indica que “es productivo ver la enseñanza de las matemáticas como otro ejemplo de RP con matemáticas” (p. 11). De hecho, la RP entrena en el estudiante el pensamiento matemático para afianzar mejor los conocimientos de esta disciplina (Mason, Burton y Stacey, 1982).

Hatfield (1978), Gaulin (2001) y Stacey (2005) consideran tres enfoques básicos de la enseñanza de las matemáticas respecto a la RP, que guiarán nuestro trabajo: la enseñanza de las matemáticas *para* la RP, *a través de* la RP y *sobre* la RP. Gaulin (2001) hace una interpretación de Hatfield (1978), y afirma que “en los dos primeros casos la resolución de problemas está considerada como un objetivo y, en el tercer caso, como vehículo para enseñar” (p. 58).

En la enseñanza *para* la RP, los estudiantes aplican el conocimiento aprendido en clase (definiciones, propiedades, teoremas) con el fin de enseñar a resolver problemas. En la enseñanza *a través de* la RP, los conceptos de matemáticas se introducen durante la resolución de un problema. Según Santos-Trigo (2016, p. 337), existe un “período de análisis y reflexión acerca de los problemas que pueden guiar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento profundo de las matemáticas”; además los problemas son valorados como medio principal de hacer matemáticas, permitendo su desarrollo teórico. Y en la enseñanza *sobre* la resolución de problemas implica conocer estrategias y procesos de RP al alumnado. El profesor mostrará un conjunto de fases de resolución (como las de Polya o basadas en éstas) y las estrategias que crearán en el estudiante un histórico que les permitirá abordar una tipología mayor de problemas. Para clarificar este enfoque, hemos considerado los planteamientos de Santos-Trigo (en prensa) que incorpora algunas ideas acerca de cómo a través de la RP se puede construir la matemática cuando se utilizan TIC. En particular, aquellos elementos matemáticos desconocidos por los estudiantes que emergen al construir y manipular diferentes situaciones problemáticas con GeoGebra. Terminada la resolución, los profesores pueden formalizar teóricamente estos elementos.

METODOLOGÍA

Se diseñó un cuestionario que fue suministrado a 35 profesores (en ejercicio y en formación) durante el primer semestre del curso 2018-19. Cumplimentaron el cuestionario 24 profesores en activo, de los cuales 13 son de 3º y 4º curso de Primaria (que se marcarán con las iniciales Pr) y 11 son de 1º y 2º de ESO (se marcarán con Se; 7 estudiantes del Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universidad de La Laguna (se marcarán con Es) y 4 profesores formadores (a los que nos referiremos como Fo). Los profesores formadores tienen una amplia experiencia formando a profesorado de Primaria y Secundaria en programas sobre RP utilizando una metodología innovadora. Las preguntas analizadas forman parte de un cuestionario más amplio, adaptado de otros autores (Barrantes, 2008; Cárdenas, 2014; Giaconi, Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati, 2018).

ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO

A continuación, presentamos el análisis de la parte correspondiente del cuestionario para conocer los aspectos relacionados con el enfoque de la enseñanza y la RP, las fases de RPMNR y la planificación de la clase de RPMNR, tal y como se recoge en la Tabla 1.

Para los ítems 20 a 65, se categorizaron las respuestas de escala Likert (0 a 4) en dos niveles en grado de acuerdo o frecuencia: Bajo (B: 0,1,2) y Alto (A: 3,4). Hemos indicado en las tablas la frecuencia del nivel de grado modal y el total de profesores que respondieron teniendo en cuenta el colectivo al que pertenecen. En los ítems 71 a 74, los profesores valoraron de 0 a 10 la RP según una descripción sobre un hipotético procedimiento de un estudiante. En las tablas aparecerá la puntuación con que el profesor haya penalizado a este estudiante (y no la puntuación directa), para establecer un orden de importancia en la fase donde el estudiante ha fallado.

Destacaremos aquellas preguntas en las que aparezca alguna incoherencia, entendida como tal cuando haya dos preguntas equivalentes en las que se observen respuestas diferentes, o bien cuando colectivos distintos respondan de forma diferente a la misma pregunta. Estos casos se indicarán con un sombreado.

Tabla 1. Relación de categorías con ítems del cuestionario

Categorías	Subcategorías	Ítems del cuestionario
Enfoque de la enseñanza de las matemáticas respecto a la RPM	Matemáticas para la RP	20, 21, 32, 33, 60, 63
	Matemáticas a través de la RP	22, 24, 61, 65
	Matemáticas sobre la RP	23, 62, 64
Fases de la RP	Comprender	51, 54
	Trazar un plan	52, 55, 71
	Ejecutar el plan	50, 53, 71, 74
	Responder	56, 72, 73
Desarrollo profesional docente	Planificación	40, 41, 42
	Actitud del docente frente a la RP	34, 43, 44

Enfoque de la enseñanza de las matemáticas respecto a la RP

Enseñanza de las matemáticas para la RP

Las matemáticas para la RP implican que los problemas son instrumentos de comprobación de la adquisición por parte del alumnado de una definición, procedimiento o fórmula, sea o no extraída de una situación real. Si un estudiante adquiere más conceptos podrá resolver más rápidamente los problemas propuestos, de forma que el papel del profesor es potenciar en sus estudiantes el contenido matemático y el cálculo.

Haciendo una lectura global de la Tabla 2, podemos afirmar que los profesores no enfocan la enseñanza de las matemáticas para la RP, aunque cuando se les pregunta por la función que tiene un problema dentro del aula se contradicen en la respuesta a los ítems 20 (con bajo grado de acuerdo) y 21 (con grado alto de acuerdo). Es en el ítem 21 donde aparece un matiz de aplicación “a situaciones reales” lo que creemos que causa este hecho. Esto nos hace pensar que hay aspectos de lo que se entiende por PMNR que no quedan claros, pues no saben hasta qué punto la aplicabilidad y la contextualización se relacionan en este tipo de problemas.

Tabla 2. Enseñanza de las matemáticas para la RP

Ít.	Para mí, un PMNR es…	Total	Pr	Se	Es	Fo
20	…un ejercicio que el profesor pone para saber si el estudiante ha aprendido una definición, fórmula o procedimiento.	B 27/35	B 9/13	B 9/11	B 5/7	B 4/4
21	…un ejercicio en el que el estudiante puede aplicar una definición, fórmula o procedimiento matemático a una situación real.	A 22/35	A 7/13	A 6/11	A 6/7	A 3/4
Ít.	Según usted, una característica de los PMNR es que…	Total	Pr	Se	Es	Fo
32	…si alguien sabe sobre el tema puede resolverlo en 10 minutos o menos.	B 28/35	B 9/13	B 9/11	B 6/7	B 4/4
33	…si alguien que sabe sobre el tema no los puede resolver en un corto tiempo es porque el problema no tiene solución.	B 33/35	B 11/13	B 11/11	B 7/7	B 4/4
Ít.	Para enseñar RP creo que debería centrar mi enseñanza en…	Total	Pr	Se	Es	Fo
60	…enseñar más contenido matemático.	B 32/35	B 10/13	B 11/11	B 7/7	B 4/4
63	…potenciar un cálculo más avanzado.	B 21/35	B 6/13	B 8/11	B 4/7	B 3/4

Enseñanza de las matemáticas a través de la RP

La enseñanza de las matemáticas a través de la RP se caracteriza por la contextualización de los problemas y utilizarlos como motivación para la introducción de nuevos contenidos matemáticos en el aula para poder resolver dicha situación. Este enfoque requiere buscar contextos realistas que faciliten la inmersión en los nuevos contenidos matemáticos.

Todos los profesores indican estar de acuerdo con esta visión de la enseñanza, como se aprecia en la Tabla 3. La contextualización es un elemento que consideran relevante cuando se trabaja la RP.

Tabla 3. Enseñanza de las matemáticas a través de la RP

Ít.	Para mí, un problema matemático no rutinario es…	Total	Pr	Se	Es	Fo
22	…una situación que propone el profesor para motivar al estudiante para que aprenda nuevas definiciones, fórmulas o procedimientos.	A 27/35	A 10/13	A 9/11	A 5/7	A 3/4
24	…una situación que puede proponer el profesor para que el estudiante descubra fórmulas o conceptos relacionados con algún tema.	A 30/35	A 10/13	A 10/11	A 6/7	A 4/4
Ít.	Para enseñar a resolver problemas creo que debería centrar mi enseñanza en…	Total	Pr	Se	Es	Fo
61	…utilizar matemáticas contextualizadas o aplicadas en el mundo real.	A 32/35	A 10/13	A 11/11	A 7/7	A 4/4
65	…extraer problemas a partir de situaciones reales.	A 35/35	A 13/13	A 11/11	A 7/7	A 4/4

Enseñanza de las Matemáticas sobre la RP

En la enseñanza de las matemáticas sobre la RP, los profesores enseñan a su alumnado técnicas para una correcta y organizada resolución, así como la terminología relacionada. Propondrán a sus estudiantes que aprendan varias estrategias heurísticas y formas de representación, además del establecimiento de una metodología organizada en fases del proceso de resolución.

Observamos en la Tabla 4 que los profesores contestan con alto grado de acuerdo los ítems correspondientes a este enfoque de la enseñanza de las matemáticas. Debemos destacar que el grupo de profesores de Educación Secundaria en el ítem sobre el aprendizaje de estrategias tienden a no considerarlo dentro de este enfoque de enseñanza.

Tabla 4. Enseñanza de las matemáticas sobre la RP

Ít.	Para mí, un problema matemático no rutinario es…	Total	Pr	Se	Es	Fo
23	…una situación que puede proponer el profesor para que el estudiante desarrolle nuevas habilidades.	A 33/35	A 13/13	A 11/11	A 5/7	A 4/4
Ít.	Para enseñar a resolver un problema creo que debería centrar mi enseñanza en…	Total	Pr	Se	Es	Fo
62	…que aprendan muchas estrategias.	A 24/35	A 11/13	B 6/11	A 4/7	A 4/4
64	…enseñar más formas de representación.	A 28/35	A 12/13	A 6/11	A 6/7	A 4/4

Fases de la RP

Comprender

En esta fase los estudiantes clasifican la información en datos, objetivo y relaciones. Los profesores que den importancia a esta fase tenderán a dedicar un tiempo a asegurarse de que los estudiantes comprendan y diferencien la información para que puedan pasar a la siguiente fase.

Todos los profesores están de acuerdo con esta fase de la RP y buscan estrategias para conocer que la han desarrollado completamente (Tabla 5).

Tabla 5. Fase de Comprender

Ít.	Cuando trabajo en el aula la RP, ¿qué grado de importancia le doy a que los estudiantes…?	Total	Pr	Se	Es	Fo
51	…expliquen lo que personalmente se entiende del problema?	A 31/35	A 11/13	A 11/11	A 5/7	A 4/4
54	…distingan y separen las partes de un problema hasta comprenderlo?	A 30/35	A 12/13	A 8/11	A 6/7	A 4/4

Trazar un plan

La selección de una estrategia que conduzca al estudiante a una solución puede venir inducida por la realización de un diagrama o la selección de materiales que permitan la manipulación. Conocer diferentes estrategias permitirá al estudiante abarcar una mayor tipología de problemas.

En general los profesores consideran importante el uso de diferentes estrategias y modos de resolución a la hora de resolver un problema. Hemos incluido en este apartado un ítem de evaluación, pues consideramos que a partir de su análisis podemos determinar qué errores son más penalizados, para inferir si dan importancia a esta fase del proceso los profesores en la RP. El valor que aparece es la penalización promedio aplicada al estudiante, de un total de 10 puntos (Tabla 6).

En particular, en el ítem 71 existen dos errores en la resolución del problema: no indicar el procedimiento (fase de trazar un plan) y no indicar los cálculos (fase de ejecución del plan).

Observamos una penalización promedio entre 3.8 (Pr) y 5.7 puntos (Es), lo cual hace un factor de importancia de la fase aquí analizada que es coherente con los resultados de los ítems 52 y 55.

Tabla 6. Fase de Trazar un plan

Ít.	Cuando trabajo en el aula la RP, ¿qué grado de importancia le doy a que los estudiantes…?	Total	Pr	Se	Es	Fo
52	…hagan un diagrama o gráfico que represente la situación, o incluso utilicen material manipulativo de representación?	A 32/35	A 12/13	A 10/11	A 6/7	A 4/4

55	…propongan más de una estrategia a seguir de acuerdo con las condiciones del problema?	A 27/35	A 11/13	A 7/11	A 5/7	A 4/4
Ít.	Usted está corrigiendo unos problemas. ¿Qué nota pondría a cada estudiante, entre 0 y 10? (Aparece penalización)	Total	Pr	Se	Es	Fo
71	El alumno 1 ha resuelto bien el problema y escribe directamente la solución correcta, pero no escribe ni el procedimiento que ha seguido ni los cálculos, que los hace mentalmente.	4.7	3.8	5.2	5.7	4.2

Ejecutar el plan

Los profesores y futuros profesores están de acuerdo en que hay que incidir en la fase de trazar el plan con los estudiantes. Todos los encuestados afirman la importancia de la fase de ejecución del plan, indicando una penalización promedio de entre 3.8 puntos (Pr) y 5.7 puntos (Es) para alcanzar los 10 puntos, en los ítems 71 y 74, lo que indica que es importante a la hora de corregir a un estudiante. Este resultado no es coherente con lo expresado en el ítem 50.

Tabla 7. Fase de Ejecutar el plan

Ít.	Cuando trabajo en el aula la RP, ¿qué grado de importancia le doy a que los estudiantes…?	Total	Pr	Se	Es	Fo
50	…lleguen al resultado o resultados exactos del problema?	B 24/35	B 8/13	B 10/11	B 5/7	A 3/4
53	…expliquen el proceso que han seguido durante la resolución?	A 33/35	A 12/13	A 11/11	A 6/7	A 4/4
Ít.	Usted está corrigiendo unos problemas. ¿Qué nota pondría a cada estudiante, entre 0 y 10? (Aparece penalización)	Total	Pr	Se	Es	Fo
71	El alumno 1 ha resuelto bien el problema y escribe directamente la solución correcta, pero no escribe ni el procedimiento que ha seguido ni los cálculos, que los hace mentalmente.	4.7	3.8	5.2	5.7	4.2
74	El alumno 4 ha dado el resultado correcto, pero no se entiende muy bien cómo lo ha conseguido, porque se ha equivocado en los cálculos un par de veces.	4.8	4.5	5	4.6	5

Verificar la solución

Entendemos que la verificación de la solución pasa por validar el resultado numérico y la corrección en las unidades utilizadas.

Tabla 8. Fase de Verificar la solución

Ít.	Cuando trabajo en el aula la RP, ¿qué grado de importancia le doy a que los estudiantes…?	Total	Pr	Se	Es	Fo
56	…validen los resultados obtenidos como posibles soluciones?	A 29/35	A 11/13	A 8/11	A 6/7	A 4/4
Ít.	Usted está corrigiendo unos problemas. ¿Qué nota pondría a cada estudiante, entre 0 y 10? (Aparece penalización)	Total	Pr	Se	Es	Fo
72	La alumna 2 ha copiado mal los datos y explica bien el procedimiento, aunque obtiene un resultado incorrecto, a pesar de haber efectuado correctamente los cálculos.	2.6	2.5	2.4	2.1	3.2
73	La alumna 3 explica correctamente su procedimiento, pero una vez acabados los cálculos ha escrito como resultado final 23 cm en lugar de 23 km.	2.2	1.9	1.7	3.1	2

Observando la Tabla 8, todos los profesores valoran con un alto grado de importancia que se verifique la solución con los estudiantes (ítem 56). En cambio, en algunos de los ítems de evaluación en los que el estudiante no comprueba su solución, destaca que los valores de penalización son más bajos que en las fases anteriores (entre 1.7 puntos (Se) y 3.2 puntos (Fo)), lo que parece indicar que los profesores son conscientes de la importancia de esta última fase, pero no la exigen a la hora de evaluarla.

Desarrollo profesional docente

Planificación de las clases de RPMNR

En este bloque analizamos cómo seleccionan los problemas que llevan al aula los profesores, es decir, si adaptan los enunciados a su grupo de estudiantes, si elaboran los problemas en equipo con otros profesores y si los suelen resolver antes de realizarlos en clase. No podemos incluir las respuestas de los futuros profesores ya que la mayoría expresa inexperiencia en esta labor.

En general, los profesores de Primaria y Secundaria nos indican que son partidarios de hacer una planificación de las clases de RP, adaptando los enunciados de problemas que seleccionan de otras fuentes acorde a su alumnado y haciendo un análisis de la solución antes de llevarlos al aula (Tabla 9). Pero este trabajo del profesorado es, en general, individual y no se trabaja de forma coordinada en el diseño de problemas. Salvo los formadores, que muestran acuerdo en diseñarlos en grupo.

Tabla 9. Planificación de la RPMNR

Ít.	Sobre los problemas que proporciono a mis alumnos en clase:	Total	Pr	Se	Fo
40	Selecciono problemas de una colección sin variar sus enunciados.	B 26/35	B 11/13	B 8/11	B 4/4
41	Los diseñamos en conjunto un grupo de docentes de matemáticas.	B 22/35	B 10/13	B 11/11	A 3/4
42	Los resuelvo antes de llevarlo al aula.	A 24/35	A 9/13	A 7/11	A 4/4

Actitud del profesor frente a la RPMNR

Por las mismas razones que en el apartado anterior, excluimos las respuestas de los futuros profesores. En general podemos considerar que los profesores en activo, a diferencia de los formadores, no necesitan conocer siempre la respuesta de un problema que vayan a llevar al aula.

Por otra parte, la Tabla 10 también muestra que los profesores de Primaria no llevarían al aula un problema que no sepan resolver, mientras que el resto de colectivos están en desacuerdo, pero todos los entrevistados están de acuerdo con pedirle ayuda a otros profesores cuando no saben la forma de resolver dicho problema. Esto podría indicar que los profesores de primaria cuidan más los aspectos de planificación, haciendo un mejor análisis de dificultades particularizado a sus estudiantes.

Tabla 10. Actitud del profesor frente a la RPMNR

Ít.	Según usted, una característica de los PMNR es que…	Total	Pr	Se	Fo
34	…la respuesta de un problema siempre la debe conocer el profesor.	B 21/35	B 9/13	B 8/11	A 3/4
Ít.	Sobre los problemas que proporciono a mis alumnos en clase:	Total	Pr	Se	Es
43	Si no sé resolver un problema, lo descarto y no lo llevo al aula.	B 16/35	A 6/13	B 7/11	B 2/4
44	Si no sé resolver un problema, pregunto a otros docentes de mi centro.	A 25/35	A 9/13	A 9/11	A 3/4

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado un cuestionario que respondieron profesores (en activo, en formación y formadores) que nos ha permitido indagar sobre el enfoque que poseen acerca de la enseñanza de las matemáticas respecto de la RP, conocer qué importancia dan estos profesores a las fases de resolución de un PMNR y estudiar qué pautas de planificación siguen para integrar la resolución de este tipo de problemas en el aula.

El análisis del cuestionario revela que todos los profesores abogan por un enfoque de la enseñanza de las matemáticas *a través* y *sobre* la RP, no considerando la enseñanza de las matemáticas exclusivamente *para* resolver problemas. Sin embargo, los profesores de secundaria descartan un aprendizaje profundo de estrategias, por lo que se hace necesario seguir investigando en esta línea e indagar sobre si, en la práctica, su metodología de enseñanza matemática sigue el enfoque *para* la RP, lo que corroboraría la instrumentalización de la enseñanza citada en Giné de Lera y Deulofeu (2014).

Al trabajar en el aula los RPMNR, el profesorado indica que es fundamental que se realice un proceso razonado y estructurado de resolución, aunque dando relativa importancia al uso correcto del cálculo. Pero luego observamos que penalizaban mucho al estudiante que, aunque da un resultado correcto, comete errores de cálculo. Cárdenas (2014) indica que los docentes que puntuaron de la misma forma justificaron hacerlo porque creían que había copiado. Sólo los profesores formadores mantienen coherencia en el nivel de importancia de la exactitud en el cálculo y la penalización. Otra incoherencia encontrada es la importancia asignada a la fase de respuesta, pero la penalización es más leve en la calificación. Sería conveniente seguir investigando cómo este colectivo de profesores evalúa a sus estudiantes las fases de la resolución de problemas.

Respecto a la planificación, los profesores en activo, en general, no analizan las respuestas de los problemas que llevan al aula. Sólo futuros profesores y formadores precisan conocer las soluciones con anterioridad. Podríamos pensar que los futuros profesores sienten la necesidad de tener seguridad en el aula, mientras que los formadores buscarían conocer la solución para explotar mejor la actividad. Se hace necesario profundizar en el estudio para poder contrastar estas conjeturas. Además, los formadores son los únicos que muestran disposición a planificar materiales curriculares en grupo.

Mediante el análisis de este cuestionario nos hemos acercado a la visión que tienen los profesores acerca de la resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas. Este trabajo inicial nos permite desarrollar nuevas líneas hacia las que dirigir la investigación relacionando los enfoques de la RP con la enseñanza y los diferentes tipos de profesores analizados. Somos conscientes de las limitaciones de este estudio debidas a dos motivos principales. Por un lado, el bajo número de profesores participantes, y por otro, la naturaleza cerrada de las preguntas del cuestionario. Por ello consideramos que en el futuro será necesario realizar un estudio cualitativo con entrevistas clínicas con las que confirmar los resultados obtenidos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barrantes, H. (2008). Encuesta: creencias en la Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 3*(4), 191-213.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141.

Cárdenas, J. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Extremadura, Badajoz.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Mathematics, Science and Technology Education*, *3*(1), 19-36.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19, 51-63.

Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Cerda, G. y Saadati, F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: diseño y validación de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 99-120.

Giné de Lera, C. y Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *Bolema*, *28*(48), 191-208.

Hatfield, L. L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 21-42). Athens, EE. UU.: University of Georgia.

Isoda, M. (2011). El estudio de clases: enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas en la experiencia japonesa (C. Jadue, trad.). En J. Campos-Martínez, C. Montecinos y Á. Gonzalez (Eds.), *Mejoramiento Escolar en Acción* (pp. 65-80). Valparaíso, Chile: Salesianos Impresores.

López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *AIEM*, 8, 73-94.

Mason, J. (2016). When is a Problem…? "When" is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick, *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 263-285). Cham, Suiza: Springer.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente.* Madrid: Labor.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, EE.UU.: Autor.

NCTM (2014). *Principles to Actions: Executive summary.* Reston, EE.UU.: Actor.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect mathematical method.* Nueva Jersey, EE.UU.: Princeton University.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* México, D.F, México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2016). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), 333-346.

Santos-Trigo, M. (en prensa). Problem-solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Suiza: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Nueva York, EE.UU.: Academic Press.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. y Mason, A. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems? *Department of Mathematics. Technical Report. Tennessee Technical University, 1999*(5), 1-20.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 341-350.

Stacey, K. (2015). Mathematical thinking for classroom decision making. En M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson y B. H. Yeap (Eds.), *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education* (pp. 11-25). Singapur: World Scientific Publishing.

[xxiii] Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación Primaria y Secundaria y en la formación de profesores". EDU2017-84276-R.

[xxiv] ProyectaMates se describe en http://proyectamates.webs.ull.es

CREENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO DE MAESTRO

Beliefs on teaching and learning Mathematics in preservice teachers

García-Moya, M., Gómezescobar, A. y Fernández-Cézar, R.

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

Este trabajo explora las creencias sobre las Matemáticas, y sobre la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en estudiantes de Grado de Maestro. El estudio es de naturaleza exploratoria. Se trabajó con una muestra de 143 estudiantes que cursaban el Grado de Maestro en Educación Infantil y Primaria en la Universidad de Castilla-La Mancha. Los instrumentos fueron dos cuestionarios: el de creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de Godino, Batanero y Font (2003), y el de creencias sobre las Matemáticas, de Baroody, Baroody y Coslick (1998). Los resultados indican que los estudiantes de Grado de Maestro creen mayoritariamente que el objetivo de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas es fomentar la comprensión de dicha asignatura, así como promover el pensamiento, fomentar los estudiantes activos y los profesores que faciliten el descubrimiento. Son principalmente de creencias euclidianas, seguidos de los de creencias mixtas.

Palabras clave: *enseñanza-aprendizaje, creencias, matemáticas, estudiantes del Grado de Maestro, Educación Infantil y Primaria.*

Abstract

This paper explores the beliefs about Mathematics, and the teaching-learning of Mathematics, of preservice teachers. The study is exploratory. The sample consisted of 143 students who were studying the Degree of Teacher in Infant and Primary Education at the University of Castilla-La Mancha. The instruments were two questionnaires: the one on beliefs about the teaching and learning of the Mathematics, by Godino, Batanero and Font (2003), and the other one on beliefs about mathematics, by Baroody, Baroody and Coslick (1998). The results indicated that preservice teachers believe that the objective of this subject matter is to promote understanding of mathematical topics, as well as to promote the thinking, to foster active students, and teachers who facilitate discovery. On the other hand, they exhibited Euclidean beliefs about mathematics, closely followed by a mixed belief one.

Keywords: *teaching-learning, beliefs, mathematics, teacher training students, Infant and Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

El dominio afectivo en educación matemática se considera compuesto por tres componentes (McLeod, 1992): creencias, actitudes y emociones (Goldin et al., 2016). Las creencias son una componente de carácter cognitivo que puede influir en el comportamiento (Gómez-Chacón, 2003). Por lo tanto, las creencias sobre las Matemáticas podrían influir en la práctica docente del maestro de Matemáticas, o de los que lo serán en el futuro, o en cómo se percibe que tiene que ser esa docencia. Por ello, estudiar la posible relación entre lo que los futuros maestros creen sobre las Matemáticas, y lo que creen que es su enseñanza y aprendizaje, nos parece relevante, y constituye el objetivo principal de este trabajo.

Se encuentran varios estudios centrados en las creencias sobre las Matemáticas. Por ejemplo, Bermejo (1996) distinguió dos grandes categorías: las creencias sobre las Matemáticas, las cuales

García-Moya, M., Gómezescobar, A. y Fernández-Cézar, R. (2019). Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en estudiantes de grado de maestro. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 333-342). Valladolid: SEIEM.

están influidas principalmente por el contexto escolar; y, las creencias de los estudiantes en relación con las Matemáticas, las cuales dependerían más del afecto, ya que estarían relacionadas con el autoconcepto y la confianza. Por otro lado, Gómez-Chacón (2000) destacó cuatro áreas de interés en el análisis de las creencias: identificar y describir las creencias sobre las Matemáticas como parte del sistema de creencias del individuo; determinar las influencias del sistema de creencias; conocer cómo se originan y se desarrollan los sistemas de creencias; y, buscar las condiciones para provocar un cambio de las mismas. En el ámbito anglosajón, McLeod (1992) diferenció cuatro ejes con respecto a las creencias: las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje; creencias acerca de uno mismo como estudiante de matemáticas; creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas; y, creencias que surgen del contexto social. Este trabajo se centra en el primer eje reseñado por McLeod: las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

En la bibliografía analizada, se encuentran muchos trabajos al respecto de creencias sobre las Matemáticas de futuros maestros (Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Gil, Guerrero y Blanco, 2006; Goldin, 1988a, 1988b; Goldin et al., 2016; Gómez-Chacón, 1997, 2000, 2003; McLeod, 1988, 1989a, 1989b, 1992, 1994). Pero no existen muchos trabajos sobre creencias sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, nosotros consideramos crucial estudiar lo que los futuros maestros entienden que entraña enseñar matemáticas para entender cómo ellos desarrollarían la enseñanza de esta materia.

Los estudios referidos a creencias sobre las Matemáticas se basan en dos líneas de investigación. Por un lado, su relación con la práctica docente, y, por otra, los cambios que pueden existir en las creencias iniciales (Fernández-Cézar, Hernández-Suárez, Prada-Núñez y Pastor-Ramírez, 2018). Sobre la relación entre creencias y actividad docente no hay evidencias claras, pues las relaciones encontradas son inconsistentes, pero en ellas se pueden ver factores que pueden influir en las creencias como son: el conocimiento, la experiencia, los objetivos o el contexto de los docentes. Debido a ello es necesario realizar estudios más exhaustivos. Por otro lado, respecto a los instrumentos, se emplean principalmente preguntas abiertas elaboradas adhoc (Gil et al., 2005; Gil et al., 2006; Goldin et al., 2016), y muy pocos que empleen cuestionarios validados psicométricamente, como el de Diego-Mantecón, Andrews y Op't Eynde (2007) que emplearon con estudiantes de secundaria en distintos contextos socioculturales.

En las investigaciones al respecto de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas encontramos algunos trabajos que analizan aspectos generales (Ross, McDougall, Hogaboam-Gray y LeSage, 2003), que no están particularmente relacionados con las Matemáticas; otros realizados con el objeto de elaborar un modelo sobre la práctica docente en Educación Matemática (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Contreras y Font, 2006). Por otro lado, se encuentran trabajos focalizados en resaltar las buenas prácticas docentes, con el fin de apoyar la labor del profesorado de Matemáticas de distintas etapas educativas (Planas y Alsina, 2009). Sin embargo, se encuentran pocos estudios que reporten evidencias sobre las prácticas de enseñanza de Matemáticas en Educación Infantil y Primaria. En esta línea está el trabajo de Vásquez (2010), que estudia la concepción de las maestras de preescolar sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en Matemáticas, y concluye que prevalece la enseñanza memorística por exposición, entendiendo los docentes que con ella consiguen aprendizaje al lograr que el niño repita. Sin embargo, esta enseñanza expositiva de la Matemática no es considerada efectiva por el autor, pues el aprendizaje que consigue es meramente memorístico. Además, señala que el docente no lo es solo porque transmite conocimiento, sino también porque realiza una adecuada gestión de la clase.

Otro elemento fundamental que los docentes tienen en cuenta en el diseño de las prácticas de aula son los documentos o currículos oficiales. Estos se han ido desarrollando durante el pasado siglo en distintos países, entre ellos España. Consultando en concreto los currículos de Matemáticas más recientes (MECD, 2014a, para Educación Primaria; MECD, 2014b, para ESO y Bachillerato), se observa que están orientados fundamentalmente a la adquisición de conocimientos. A pesar del cambio producido en las leyes europeas hacia las competencias entendidas como el "saber hacer", lo que recoge la última ley española, la LOMCE (MECD, 2014a, 2014b) son los estándares evaluables, formulados como indicadores de adquisición de contenidos. Sin embargo, en ambos reales decretos hay escasas referencias a la práctica docente recomendada en el ámbito de las Matemáticas, hablando explícitamente solo de la resolución de problemas. Por otro lado, en otros ámbitos geográficos como EEUU, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) sí recoge orientaciones claras para la adecuada enseñanza de las Matemáticas, focalizada en los procesos y no solo en los contenidos. En línea con la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente encontramos el trabajo de Coronata (2014) sobre docentes chilenos. Pero en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, también es importante la gestión del aula. Por ello, aparte de contenidos y procesos, también es fundamental considerar el papel del profesor, la propia enseñanza de las Matemáticas, el aprendizaje y la instrucción, como se recoge en el trabajo de Godino, Batanero y Font (2003). Estos aspectos son importantes debido a que es el profesor quien organiza las diferentes situaciones didácticas que pueden darse en el aula, siendo también él quien guía y aumenta los aprendizajes de los estudiantes por medio de la instrucción. Sin embargo, no se encuentran trabajos que estudien la posible relación entre las creencias sobre las Matemáticas y su enseñanza y aprendizaje en los que serán futuros maestros.

Por todo lo anteriormente expuesto, en este trabajo se pretende analizar las creencias que los futuros maestros tienen al respecto de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. De manera concreta, se analizan las posibles relaciones entre su visión del papel del profesor, la enseñanza de las Matemáticas, el aprendizaje y la instrucción. Para ello, se plantean las siguientes hipótesis de trabajo.

Hipótesis de trabajo:

Los estudiantes para maestro tienen una visión constructivista de las Matemáticas, que se materializa en sus creencias sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En concreto:

H1: Los participantes piensan que una implicación activa por parte del alumnado y del profesor facilita la adquisición de conocimientos matemáticos (Aprendizaje)

H2: Los participantes creen que el profesor tiene que partir de lo más simple para llegar progresivamente a lo más complejo, proporcionando retroalimentación de las intervenciones correctas o incorrectas de los estudiantes (Enseñanza)

H3: Los estudiantes de Grado de Maestro en Educación Infantil y Primaria presentan una visión constructivista respecto a las Matemáticas (Matemáticas)

MÉTODO

El trabajo es de naturaleza exploratoria, y se emplea una metodología cuantitativa y correlacional.

Participantes

La muestra es de conveniencia y está formada por 143 estudiantes (de ellos, 123 mujeres). Los participantes se encontraban en el 1º curso de Grado de Maestro en Educación Primaria en el año académico 2016/2017 y 2º curso de Grado de Maestro en Educación Infantil en el año académico 2015/2016. Los estudiantes de primaria cursaban la asignatura anual de "Didáctica de los números y la estocástica" y los de infantil la asignatura cuatrimestral de "Desarrollo del pensamiento lógico y numérico en la educación infantil". Todos ellos formaban parte del alumnado de Grado de Maestro de la Universidad de Castilla-La Mancha que se encuentra en Facultad de Educación de Cuenca.

Instrumentos

Para caracterizar las creencias de los futuros maestros sobre las Matemáticas y sobre su enseñanza-aprendizaje, se emplean dos cuestionarios conocidos: el cuestionario de creencias de Baroody,

Baroody y Coslick (1998), que ya ha sido utilizado en otros trabajos con maestros en servicio (Fernández-Cézar, Iglesias-Albarrán, Solano-Pinto, Rizzo, León-Mantero y Gómez, 2017; Fernández-Cézar, Prada-Núñez y Solano-Pinto, 2018). Este cuestionario recoge aspectos clave sobre las creencias Matemáticas que son fundamentales para saber cómo los futuros maestros van a realizar la labor docente para una enseñanza-aprendizaje eficaz de las Matemáticas, al estar las creencias y la práctica de enseñanza íntimamente relacionadas (Fernández-Cézar et al., 2018; Martín, 1998).

También se emplea el cuestionario de creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de Godino et al. (2003, pp. 53-54), que consta de dos bloques. En el bloque primero (Tabla 1) se plantean los ítems mediante diferencial semántico. Su consistencia interna se midió con alfa de Cronbach, obteniendo .622. En él podemos encontrar los ítems 1, 3, 5 y 6 que hacen alusión a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, mientras que los ítems 4 y 7 tratan sobre la instrucción.

Tabla 1. Cuestionario de Godino et al. (2003, pp. 53-54), bloque primero

1B. El fin principal de la educación matemática elemental es asegurar el domino de hechos básicos, reglas, fórmulas y procedimientos.	1	2	3	4	5	1A. El fin principal de la educación matemática es promover la comprensión y el pensamiento.
2B. El crecimiento del conocimiento implica acumulación de información para estar más informado.	1	2	3	4	5	2A. El crecimiento del conocimiento implica ganar nuevas comprensiones y reorganizar el propio pensamiento.
3B. El aprendizaje es esencialmente un proceso receptivo y pasivo de memorización de información.	1	2	3	4	5	3A. El aprendizaje es esencialmente un proceso activo de construir comprensiones y estrategias.
4B. La memorización precisa de hechos y procedimientos y requiere que los niños estén atareados: que escuchen con atención y practiquen con diligencia lo que se les ha enseñado.	1	2	3	4	5	4A. La construcción activa del conocimiento requiere hacer Matemáticas (esto es, descubrir patrones, hacer y comprobar conjeturas, y resolver problemas).
5B. La instrucción directa y la práctica son el modo más efectivo de transmitir información a los niños.	1	2	3	4	5	5A. La implicación activa de los alumnos en el aprendizaje por descubrimiento y la solución de problemas es el modo más efectivo de estimular la comprensión y el pensamiento.
6B. Enseñar es explicar- un profesor es principalmente un transmisor de información.	1	2	3	4	5	6A. Enseñar es guiar- un profesor sirve principalmente para facilitar el descubrimiento y el pensamiento.
7B. Puesto que los niños no tienen un interés natural en aprender Matemáticas, es esencial para los educadores encontrar modos de estimular el aprendizaje.	1	2	3	4	5	7A. Puesto que los niños tienen un interés natural en explorar y comprender las cosas, las Matemáticas pueden ser interesantes por sí mismas.

En el bloque segundo (Tabla 2) se señala el grado de acuerdo o desacuerdo por medio de una escala tipo Likert de 5 puntos, donde 1 es Totalmente en desacuerdo y 5 es Totalmente de acuerdo. La consistencia interna se midió mediante alfa de Cronbach, obteniendo .609. En este bloque los ítems 1C, 4C y 9C tratan sobre la enseñanza-aprendizaje, el 2C, 3C y 5C se centran en la instrucción y los ítems 6C, 7C y 8C son sobre el papel del profesor.

Tabla 2. Cuestionario de Godino et al. (2003, pp. 53-54), bloque segundo

1C. Los procedimientos no estándares se deberían descartar porque pueden interferir con el aprendizaje del procedimiento correcto.	1	2	3	4	5
2C. La instrucción matemática debería comenzar con las destrezas básicas y progresar hacia el estímulo del pensamiento de orden superior.	1	2	3	4	5
3C. Cuando se introduce un tema matemático, un profesor debería seguir el siguiente principio: “primero lo simple y directo” y sólo más tarde introducir problemas más complejos.	1	2	3	4	5
4C. Los niños pequeños son matemáticamente incapaces. Esto es, son incapaces de resolver incluso problemas matemáticos elementales porque les falta el prerrequisito de experiencia y conocimiento.	1	2	3	4	5
5C. Para comprender las matemáticas elementales, los niños deben ser conducidos mediante una secuencia sistemática de lecciones bien organizadas.	1	2	3	4	5
6C. Un profesor debe servir como el juez de lo que es correcto o no.	1	2	3	4	5
7C. Un profesor debería siempre proporcionar *feedback* (esto es, alabar las respuestas correctas de los estudiantes y corregir inmediatamente sus respuestas incorrectas).	1	2	3	4	5
8C. Un profesor debería actuar rápidamente para eliminar desacuerdos porque son perturbadores y pueden causar confusión innecesaria.	1	2	3	4	5
9C. Para estimular la independencia, los estudiantes deberían trabajar solos para realizar las tareas.	1	2	3	4	5

El cuestionario sobre creencias hacia las Matemáticas que se emplea es el de Baroody et al. (1998, p. 1-8). Está formado por 9 enunciados que se agrupan en ítems que reflejan: concepción Euclidiana (1, 2, 3), que asume que se componen de hechos incuestionables; Cuasi-empirista (4, 5, 6), que considera a las Matemáticas como herramienta para entender el mundo; y Constructivista (7, 8, 9), considerando que el saber matemático se construye sobre los conocimientos previos. Se toman estas categorías a partir de los grupos de teorías epistemológicas de Lakatos, publicadas en Gascón (2001). Se indica el grado de acuerdo o desacuerdo por medio de una escala tipo Likert de 5 puntos, donde 1 es Totalmente en desacuerdo. Se muestra en la Tabla 3 (alfa de Cronbach=.626).

Tabla 3. Cuestionario de Baroody et al. (1998, pp. 1-8)

1. Las Matemáticas son esencialmente un conjunto de conocimientos (hechos, reglas, fórmulas y procedimientos socialmente útiles).	1	2	3	4	5
2. Las Matemáticas son esencialmente una manera de pensar y resolver problemas.	1	2	3	4	5
3. Se supone que las Matemáticas no tienen que tener significado.	1	2	3	4	5
4. Las Matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.	1	2	3	4	5
5. La eficacia o dominio de las Matemáticas se caracteriza por la habilidad en conocer hechos aritméticos o de hacer cálculos rápidamente.	1	2	3	4	5
6. El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.	1	2	3	4	5
7. Las Matemáticas están siempre bien definidas; no están abiertas a cuestionamientos, argumentos o interpretaciones personales.	1	2	3	4	5
8. La habilidad matemática es esencialmente algo con lo que se nace o no se nace.	1	2	3	4	5
9. Los matemáticos trabajan típicamente aislados unos de otros.	1	2	3	4	5

Procedimiento

Los participantes fueron informados sobre la finalidad del estudio y su participación en el mismo fue voluntaria. Para participar en el estudio firmaron el consentimiento informado. Los dos instrumentos se pasaron a los estudiantes al inicio de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas correspondiente al grado en el que se encontraban en los cursos académicos 2015/2016 y 2016/2017.

Análisis estadístico

Para el tratamiento informático de los datos se ha utilizado el paquete estadístico SPSS V. 24. En el primer bloque del primer cuestionario se han tomado los valores 1 y 2 para determinar el acuerdo con la afirmación a la izquierda; los valores 4 y 5 para determinar el acuerdo con la afirmación de la derecha. En el segundo bloque, así como en el segundo cuestionario, se han tomado los valores 4 y 5 para obtener el acuerdo con la afirmación propuesta en cada ítem. La interpretación de las correlaciones se hace por conjunto de ítems, agrupándolos en aquellos cuya formulación versa sobre el papel del profesor, la enseñanza de las Matemáticas, el aprendizaje de las Matemáticas, y la instrucción.

RESULTADOS

Se analizan los porcentajes de acuerdo con los ítems del bloque primero del cuestionario sobre enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Se observa un alto porcentaje de acuerdo en: 1A (75.2%); 2A(74.3%); 3A(80.9%); 5A(64.5%); 6A(75.7%). Todas estas afirmaciones están situadas a la derecha del diferencial semántico.

Al respecto del aprendizaje de Matemáticas, en el trabajo de Caballero, Blanco y Guerrero (2007) se reportaron discrepancias al respecto de la percepción de los futuros maestros del aprendizaje matemático como más memorístico o mecánico, a diferencia del estudiantado de secundaria que lo considera fundamentalmente memorístico (Gil, 2003). Sin embargo, aquí se encuentra una mayoría de futuros maestros que consideran que este aprendizaje se construye y se basa en estrategias a desarrollar por el aprendiz (3A).

Por otro lado, se resalta que el 48.7% de los participantes estén de acuerdo con la afirmación 4A, aunque hay también un 15.1% que está de acuerdo con la afirmación 4B. El porcentaje de aquellos que están de acuerdo con un aprendizaje meramente memorístico es menor que el de aquellos que coinciden con la consideración de la construcción de saberes matemáticos de forma activa. Esto es consistente con la afirmación reportada en el párrafo anterior sobre que el aprendizaje debe ser construido con el aprendiz y en contra con la consideración memorística reseñada en trabajos previos (Caballero et al., 2007; Gil, 2003). Por otro lado, los participantes reparten su acuerdo de forma aún más equilibrada entre los extremos del ítem 7B, que expresa que los niños no tienen un interés natural en aprender Matemáticas, y que es esencial para los maestros estimular dicho aprendizaje (38.2%), y el ítem 7A, donde se dice que los niños tienen un interés natural en explorar y comprender cosas, siendo las Matemáticas interesantes en sí mismas (34.2%). Por lo tanto este resultado divergente no permite concluir una mayoritaria percepción sobre el interés de los alumnos en las Matemáticas.

En el análisis del segundo cuestionario, los resultados indican un bajo porcentaje de acuerdo, el 4.6%, con 1C, y también un 16.4% con 4C. Que el porcentaje de participantes de acuerdo con estos ítems sea bajo podría esperarse, y se considera positivo pues los futuros maestros estarían mostrando que no vinculan la corrección de los procedimientos con que estos sean los estandarizados, lo que abre su mente a la aceptación de propuestas de soluciones variadas. Tampoco relacionarían la corta edad de los niños con la limitación de sus capacidades Matemáticas. Los ítems en los que se recoge el papel del profesor son los 6, 7 y 8. Los participantes muestran porcentajes de acuerdo similares entre considerar al profesor un juez (6C, 26.3%), y que este actúe rápidamente deshaciendo desacuerdos (8C, 28.3%). Sin embargo, el porcentaje de acuerdo es mayor con la necesidad de que el profesor ofrezca *feedback* (7C, 44.1%). Las afirmaciones 2C y 3C se refieren a la instrucción matemática. Casi dos tercios de los participantes muestran acuerdo con que debería ir de los más simple a lo más complejo, siguiendo una secuencia sistematizada. En cuanto a que el trabajo individual fomente la independencia, ítem 9C, solo el 37.5% están de acuerdo con esta afirmación. Esto concuerda con lo que reportan Caballero et al. (2007) sobre que los futuros maestros rechazan mayoritariamente el trabajo individual para aprender matemáticas, prefiriendo el trabajo en grupo.

Para analizar posibles relaciones al respecto de la consideración de la instrucción, qué es enseñar, el papel del profesor y el del alumno, así como lo que se entiende por aprendizaje, se estudió la correlación de Spearman entre los ítems. Se encontró que el ítem 6A guarda relación significativa con 1A (R=.229, *p= .008*), y con el 2A (R=.201, *p=.020*), lo cual es esperable por considerar que el fin principal de la enseñanza matemática es promover la comprensión y el pensamiento, guiando en el camino hacia ganar nuevas comprensiones y reorganizando el propio pensamiento.

La afirmación 3A tiene relación con el ítem 5A (R=.222, *p=.010*), 6A (R=.316, *p<.000*), lo cual es consistente si se considera que el aprendizaje es un proceso activo de construir comprensiones y estrategias, y que esto implica la participación activa del estudiante para el aprendizaje por descubrimiento, estimulando la comprensión y el pensamiento por medio de la actuación del profesor como un guía de los conocimientos a adquirir.

Por otro lado, los ítems del segundo cuestionario presentan las siguientes relaciones:

Los ítems que tratan sobre el papel del profesor, 6C (R=.258, *p=.003*), 7C (R=.219, *p=.013*), 8C (R=.400, *p<.000*), presentan correlaciones débiles pero significativas. La visión que se manifiesta tiene que ver con que el profesor tiene que introducir un tema matemático partiendo de lo simple hasta llegar a lo complejo, actuando con rapidez para eliminar desacuerdos entre los nuevos conocimientos a adquirir y las vivencias, y proporcionando un *feedback* inmediato y cercano al estudiante.

Se encuentran también correlaciones entre los ítems 3C (R=.279, *p=.002*), 7C (R=.249, *p=.005*), 8C (R=.232, *p=.009*), que versan sobre la metodología que el profesor debe utilizar en el aula. Así, tienden a considerar que la enseñanza debe iniciarse con las destrezas básicas y corregir con gran inmediatez las respuestas incorrectas, evitando así dar lugar a confusión.

Por otro lado, el ítem 6C tiene relación con el 1C (R=.229, *p=.008*), 4C (R=.187, *p=.035*) que muestran que los niños pequeños son matemáticamente más incapaces. Bajo este supuesto, consideran que el profesor debe servir como un juez de los conocimientos que son válidos y los que no lo son, empleando para ello procedimientos estándares de aprendizaje, sobre todo con los niños más pequeños.

Se estudiaron las correlaciones entre los ítems del primer cuestionario y los del segundo. Se obtuvieron correlaciones débiles y negativas entre 4 A-1C (R= -.224, *p= .012*), 4 A con 5C (R= -.261, *p= 0.03*) y 6C (R= -.289, *p=.001*), 6C con 5 A(R= -.220, *p= .013*) y 4 A (R= -.289, *p= 0.01*). De esta correlaciones se derivaría que los participantes consideran que la construcción activa del conocimiento matemático requiere de procedimientos estándar, no necesitando una secuencia sistemática demasiado organizada ni que el profesor tenga el papel de juez, sino de guía del pensamiento a adquirir, estimulando la implicación activa de los alumnos en el aprendizaje por descubrimiento y la resolución efectiva de problemas.

Por otro lado, los resultados sobre las creencias se muestran en la Figura 1. Se calculó el porcentaje de estudiantes que presentan las diferentes creencias hacia las Matemáticas, destacando que el 41.5% tiene una creencia Euclidiana, seguido del 39.4% que tiene una creencia mixta. Por otro lado, se resalta que solo el 4.2% de los participantes presenta una creencia constructivista.

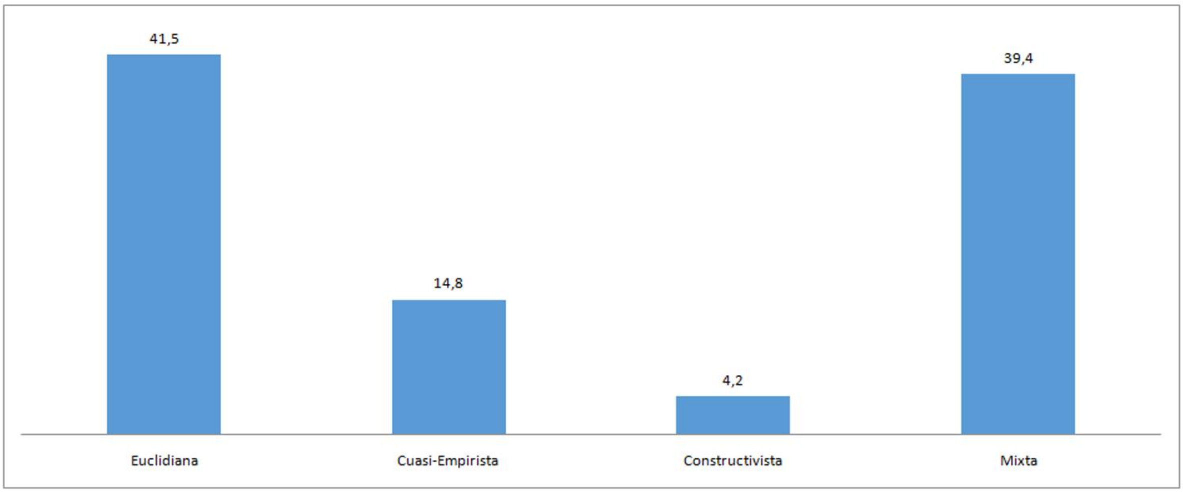


Figura 1. Creencias hacia las Matemáticas

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se pretendía analizar las creencias que los futuros maestros tienen al respecto de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. De manera concreta, las posibles relaciones entre su visión del papel del profesor, la enseñanza de las Matemáticas, el aprendizaje y la instrucción. Para ello, se plantearon unas hipótesis de trabajo cuya verificación, o no, se muestra en los párrafos que siguen.

Por un lado, se destaca que existen ciertas incongruencias en los resultados al respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, dado que si bien los participantes se muestran de acuerdo con que no se admitan solo métodos estandarizados, cuando se trata de la enseñanza con niños más pequeños apoyan que se utilicen los métodos didácticos estandarizados preferentemente. Es particularmente curioso dado que pareciera que entendieran que los niños pequeños no pudieran desarrollar sus propios métodos y estrategias matemáticas, y necesitaran una guía más estrecha, precisamente cuando son los que aún no conocen los métodos estandarizados por tener menos años de escolarización, y cuando necesitan desarrollar los suyos propios, como en cualquier otra etapa educativa.

Por otro lado, al respecto de las hipótesis planteadas, se concluye que, debido a los resultados obtenidos en los ítems sobre enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (1A, 3A, 5A, 6A, 1C, 4C y 9C) e instrucción (4A ,7A, 2C, 3C y 5C), los participantes tienen una concepción constructivista del aprendizaje matemático, pues se afirma que los participantes creen que la implicación activa de los estudiantes en el aprendizaje facilita la comprensión y el pensamiento matemático apoyado todo eso por una enseñanza guiada del profesor (H1).

Tal y como se muestra en el análisis de los ítems que hacen alusión al papel del profesor (6C, 7C y 8C), un porcentaje alto de participantes muestra acuerdo respecto a que el profesor debe partir de lo simple e ir aumentando la complejidad realizando intervenciones inmediatas para alabar las respuestas correctas y corregir las incorrectas. Por lo tanto, se verifica que la percepción sobre la instrucción debe ser constructivista, comprobándose el cumplimiento de la H2.

Consecuentemente, de la verificación de la H2 pareciera derivarse que un porcentaje mayoritario de participantes tuviera creencias constructivistas al respecto de las Matemáticas, contrariamente a lo que se encuentra en este trabajo. Por lo tanto, concluimos que a pesar de que los futuros maestros tienen una percepción de la implicación activa del alumno en el aprendizaje, y del papel del maestro como guía del mismo, que podría considerarse como una concepción constructivista de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, sin embargo su concepción de las mismas Matemáticas no es mayoritariamente constructivista. En línea con este resultado están los estudios previos realizados con maestros en servicio, como el de Fernández-Cézar et al. (2018), que encuentran que los maestros españoles son mayoritariamente de creencias euclidianas, mientras que los colombianos son mayoritariamente de creencia cuasi-empiristas.

Reseñamos que, aunque están en línea con otros estudios previos realizados en España, dado que se ha empleado una muestra de conveniencia los resultados no son generalizables. Por ello se destaca la necesidad de continuar con investigaciones de este tipo para ahondar en el conocimiento de las creencias sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, de futuros maestros.

Referencias

Baroody, A., Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction.* Mahwah, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la Instrucción I* (pp. 256-279). Madrid: Síntesis.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las matemáticas de los estudiantes para maestros de la facultad de educación de la universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la educación infantil y elemental* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Girona, Girona.

Diego-Mantecón, J. M., Andrews, P. y Op't Eynde, P. (2007). Mejora y evaluación de un cuestionario de creencias de matemáticas en función de nacionalidad, edad y sexo. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 325-333). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Fernández-Cézar, R., Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R. y Pastor-Ramírez, L. (2018). Dominio afectivo y prácticas pedagógicas de docentes de Matemáticas: Un estudio de revisión. *Revista Espacios, 39*(23), 25. Recuperado de: https://www.revistaespacios.com/a18v39n23/a18v39n23p25.pdf

Fernández-Cézar, R., Iglesias-Albarrán, L. M., Solano-Pinto, N., Rizzo, K.A., León-Mantero, C. y Gómez, H. (2017). *Creencias, ansiedad y presencia de los procesos en la enseñanza de las matemáticas: un estudio en maestros.* Conferencia presentada en el VIII CIBEM, Madrid, España.

Fernández-Cézar, R., Prada-Núñez, F. y Solano-Pinto, N. (2018). Beliefs towards Mathematics in Elementary Education Teachers: a comparative study. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, *1*(3), 329-345.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME*, *4*(2), 129-159.

Gil, N. (2003). *Creencias, actitudes y emociones en el aprendizaje matemático* (Memoria de investigación de doctorado no publicada). Universidad de Extremadura, Badajoz.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNIÓN*, *2*, 15-32.

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. J. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *4*(1), 47-72.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Goldin, G. A. (1988a). Affective representation and mathematical problem solving. En M. J. Behr, C. B. Lacampagne y M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of PME-NA* (pp. 1-7). DeKalb, EE. UU.: Northern Illinois University.

Goldin, G. A. (1988b). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation. En A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 358-365). Veszprem, Hungría: PME.

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., … y Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education: An overview of the field and future directions.* Cham, Suiza: Springer.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *UNO, 13*, 7-22.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas: afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 225-247.

Martín, M. E. (1998). *Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de La Laguna, La Laguna, Tenerife.

McLeod, D. B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 134-141.

McLeod, D. B. (1989a). The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds,). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective* (pp. 20-36). Nueva York, EE. UU.: Springer-Verlag.

McLeod, D. B. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds,). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective* (pp. 245-258). Nueva York, EE. UU.: Springer-Verlag.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Nueva York, EE. UU.: Macmillan.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 637-647.

MECD (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

MECD (2014b). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, EE. UU.: Autor.

Planas, N. y Alsina, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: Infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Barcelona: Graó.

Ross, J. A., McDougall, D., Hogaboam-Gray, A. y LeSage, A. (2003). A survey measuring elementary teachers' implementation of standards-based mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(4), 344-363.

Vásquez, O. G. (2010). Concepciones de las maestras de preescolar sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas. *Hexágono Pedagógico*, *1*(1), 3-16.

PLAN DE ACCIÓN PARA LA REDUCCIÓN DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA PARA LA MEJORA DE SU FORMACIÓN

Action plan for reducing mathematical anxiety on future primary teachers to improve their education

Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Esta comunicación muestra el diseño y algunos resultados de un plan para intentar reducir la ansiedad matemática en estudiantes de Magisterio de Educación Primaria. Así se procedió a la detección de su nivel de ansiedad y se tomaron dos medidas principalmente. Por un lado, organizar unos talleres basados en materiales manipulativos y técnicas de autoinstrucción y, por otro, establecer grupos de trabajo compartidos con otros estudiantes que poseen un alto nivel de competencia matemática. Los resultados son positivos, primero por el alto grado de participación en ambas acciones y, después, porque los estudiantes que las disfrutan están cambiando su autopercepción y mejorando su autoconfianza.

Palabras clave: *ansiedad matemática, material manipulativo, grupos de trabajo.*

Abstract

This communication shows the design and some of the results of a plan that tries to reduce the mathematical anxiety in Primary Teaching students. Thus, their anxiety levels were detected, and two more actions were taken. On the one hand, workshops based on manipulative materials and self-training techniques and, on the other hand, support groups shared with other students who possess a high level of mathematical competence. Results are positive, firstly because of the high level of participation in both actions and, then, because students who are taking part in them are changing their self-perception and improving their self-confidence.

Keywords: *mathematical anxiety, manipulative material, support groups*.

INTRODUCCIÓN

Dentro del Proyecto de Innovación Docente Universitaria “#PIMeFIM: Plan Integral de Mejora para la Formación Inicial de Maestras y Maestros” (ref. FPE_017.18_INN) desarrollado en la Facultad de Formación del Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid, uno de los objetivos es “Conseguir un alto grado de competencia matemática y gusto por la disciplina a través de un Centro de Pensamiento Matemático” y cuya meta sería propiciar un lugar en el que desarrollar el pensamiento matemático de una manera emocionalmente cuidada y viviendo la importancia de esta disciplina.

En lo referido a la preparación del profesorado en el ámbito de Matemáticas se detecta que los estudiantes de Magisterio tienen un bajo nivel de rendimiento en Matemáticas y un alto grado de ansiedad matemática. Con respecto al bajo rendimiento, el informe más relevante sería el Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas (TEDS-M) realizado por la IEA (INEE, 2012) aunque muchas otras investigaciones han puesto de manifiesto este bajo rendimiento en España (Aballe, 2000; Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014; Flores y

Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L. (2019). Plan de acción para la reducción de la ansiedad matemática de los futuros docentes de Primaria para la mejora de su formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 343-352). Valladolid: SEIEM.

Moreno, 2014; Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2016). Este bajo rendimiento hace que la formación de maestros y maestras no pueda ser eficiente en los aspectos más didácticos de las Matemáticas (Garrido, 2015; Rico, Gómez y Cañadas, 2014; Rowland y Ruthven, 2011; Walshaw, 2012). Con respecto a las implicaciones emocionales en el aprendizaje de las Matemáticas, también se han llevado a cabo bastantes estudios en facultades de formación de profesores y educación en España, que ponen de manifiesto ese alto grado de ansiedad matemática y la necesidad de combatirla para obtener mejor rendimiento (Caballero, 2013; Caballero, Cárdenas y Gordillo, 2016; Estrada, 2007; Jackson, 2008; Garrido, 2015; Garrido et al., 2019; Marbán, Maroto y Palacios, 2016; Nortes y Nortes, 2017; Sánchez, Segovia y Miñán, 2001).

METODOLOGÍA

El objetivo principal de nuestro trabajo es proponer acciones concretas para reducir el nivel de ansiedad matemática en los estudiantes del Grado de Maestro/a en Educación Primaria para poder conseguir un mejor rendimiento en la disciplina. Para ello, utilizamos la metodología de investigación-acción partiendo de un análisis de necesidades y proponiendo dos acciones concretas. Consideramos que es el método de investigación que más se ajusta a nuestra realidad ya que las propias investigadoras son aquellas que pondrían en marcha las acciones.

Detección de necesidades

Lo primero que se realizó fue un cuestionario para la detección de la ansiedad matemáticas en todos los estudiantes de primero que acompañaba a una prueba competencial de nivel de sexto de primaria de la Comunidad de Madrid. La elección de las preguntas sobre ansiedad fueron las que construyen el índice de ansiedad matemática utilizado en las pruebas PISA.

PD1: A menudo me preocupo pensando que tendré dificultades en las clases de matemáticas.

PD2: Me pongo muy tensa/o cuando tengo que hacer deberes de matemáticas.

PD3: Me pongo muy nerviosa/o al hacer problemas de matemáticas.

DP4: Me siento incapaz cuando hago un problema de matemáticas.

PD5: Me preocupo cuando pienso que sacaré malas notas en matemáticas.

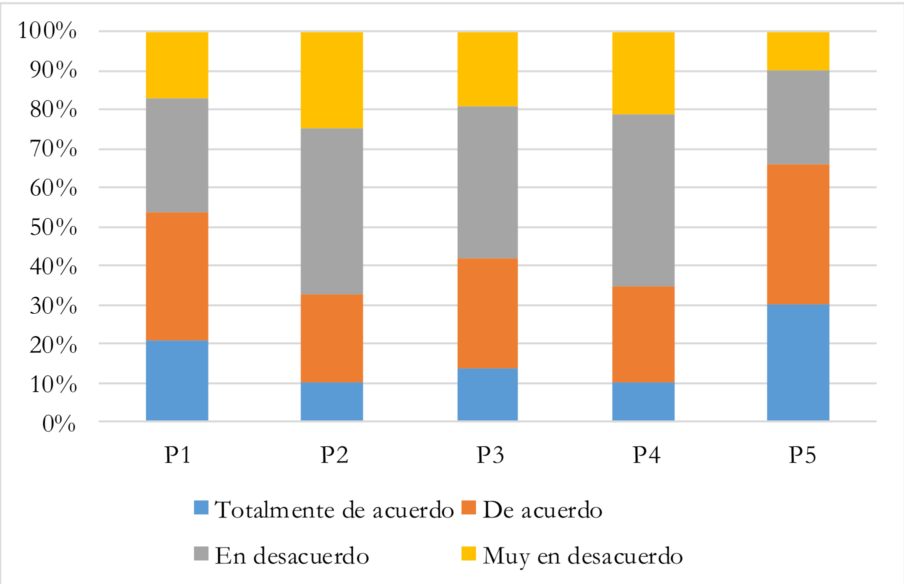


Figura 1. Resultados cuestionario sobre ansiedad matemática.

En la Figura 1 se pueden analizar los resultados obtenidos. Podemos observar que lo que más preocupa a los estudiantes de primero son las dificultades y las notas. Aunque es importante destacar que entre un 30% y 40% se ponen tensos o nerviosos y se sienten incapaces de realizar un problema de Matemáticas.

El cuestionario se pasó en clase con la colaboración de todos los profesores que impartían la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I. La muestra que se obtuvo fue de 254 estudiantes de un total de 5 grupos, más del 80% de la población. Similar a la proporción en todo el grado, obtenemos una representación del 72% de mujeres. Y aunque no abordaremos aquí esta temática sí se ha detectado una correlación entre el índice de ansiedad matemática y el rendimiento que obtuvieron en la prueba competencial (Garrido et al., 2019).

Propuestas

A través de los resultados del cuestionario detectamos la necesidad prevista de intentar reducir la ansiedad, ya que al menos un 20% de los estudiantes mostraban un alto grado de ansiedad matemática. Las propuestas se elaboraron partiendo de otros trabajos y la propia experiencia de las investigadoras participantes. Así las propuestas quedarían del siguiente modo:

- Elaboración e implantación de un plan de ayuda a estudiantes con ansiedad matemática que se está implementando con un grupo de quince sujetos.
- Creación de grupos de trabajo de apoyo con estudiantes de distintos niveles de rendimientos en Matemáticas lo que está propiciando cooperación y mejora en el rendimiento de todos. Se cuenta con dos grupos de doce estudiantes cada uno y tres estudiantes tutores.

Evaluación de las propuestas

Para la evaluación de las propuestas se hicieron entrevistas semiestructuradas a los estudiantes implicados en ellas, quince del plan de ansiedad y veinticuatro de los grupos de trabajo, y, también, a los estudiantes que participaron como personas de referencia, tanto las dos del plan de ansiedad como los tres del grupo de apoyo. Queríamos contar con un instrumento cualitativo para que los futuros docentes compartiesen los motivos que les llevan a asistir y participar en estos talleres de apoyo a la ansiedad matemática o grupos de trabajo, haciendo hincapié en qué motivos le han traído al taller en relación con la formación inicial universitaria, concretamente del área de las Matemáticas y su Didáctica, y de qué manera (o no) cubre la universidad esta necesidad tangible de los docentes en formación. Preguntándoles específicamente si los materiales manipulativos, el trabajo en pequeño grupo y la formación entre iguales les ayuda en su formación inicial y, a su vez, evaluar si estos métodos ayudan a que su nivel de ansiedad matemática disminuya. A su vez, en este cuestionario se han recogido preguntas que indagan en los ítems de ansiedad matemática, para cotejar si hay diferencias con la media recogida a todos.

PROPUESTAS: PLAN DE ANSIEDAD MATEMÁTICA Y GRUPOS DE TRABAJO

Plan de ansiedad matemática

Según el estudio realizado por Ruiz-Hidalgo, Lupiáñez, del Río y Fernández (2016), con estudiantes del Grado de Educación Primaria, se han obtenido los resultados que, tras tener un nivel medio de ansiedad matemática, la práctica con materiales manipulativos y el trabajo colaborativo, ha conllevado una actitud más positiva, tranquila y de mayor seguridad cuando se realizan actividades matemáticas, pudiendo influir esta práctica en una disminución de la ansiedad hacia las mismas.

Se han propuesto talleres orientados al apoyo a futuros docentes con ansiedad matemática, para así llevar a cabo la consecución de los objetivos referentes a la competencia matemática de los mismos. Se trata de talleres abiertos, en formato seminario quincenal de una hora y media de duración, en los que se lleva a cabo una propuesta de trabajo con materiales manipulativos, mayoritariamente de contenidos de aritmética, de forma secuencial: tareas concretas, auto-instrucciones y trabajo con material manipulativo. Se busca apoyar a reducir la ansiedad matemática, tratando de construir un espacio de seguridad en el que eliminar bloqueos y creencias negativas hacia las actividades de Matemáticas.

Es por esto por lo que el material elegido, siguiendo las pautas de Ruiz-Hidalgo et al. (2016), es un material fácil de usar. Se presenta, en un primer momento, para que resulte cotidiano a la hora de realizar ciertas actividades propuestas, de tal manera que no origine frustración y sea motivante, generando así una actitud positiva hacia la práctica matemática. Se busca propiciar un acercamiento relajado hacia las matemáticas, de forma que la respuesta emocional visceral no sea el rechazo.

Tal y como expresa Alsina (2004), la práctica con el material manipulativo es imprescindible para alcanzar las competencias matemáticas y, por consiguiente, esa comprensión facilitará la transmisión y el trabajo en el aula. Igualmente, M.ª Antonia Canals destaca que este contacto con el material manipulativo supone la adquisición de una base consistente sobre la cual se puede ir dando un aprendizaje significativo. Por lo que este entendimiento desde lo concreto será clave para pasar a la abstracción (Canals, 2001).

En cada taller se presentan distintos materiales manipulativos, planteando una propuesta de uso y recorrido por el material. Estas presentaciones se realizan de manera individual y el resto de los asistentes ven cómo se realiza la actividad. Posteriormente, se abre un momento de diálogo, invitando a expresar aquello que se ha observado y sentido con el material. Esta secuenciación se basa en algunos puntos del decálogo que desarrolla M.ª Antonia Canals, recogido en el libro de Biniés (2008). Así, durante los talleres puestos en práctica, se han trabajado contenidos de aritmética, indagando de forma manipulativa en el concepto de Sistema Decimal. En dichos talleres se han llevado propuestas de materiales con los que indagar en el concepto desde lo concreto y la manipulación. Concretamente, para cada uno de los talleres se han llevado tres o cuatro propuestas de trabajo con material manipulativo, dejando un espacio final de prácticas con el mismo tanto libres como guiadas.

Con esta propuesta, se parte del pensamiento lógico adulto ya constituido, para volver a construir distintas nociones y eliminar consideraciones negativas, todo ello, a partir de la experiencia con material manipulativo (Canals, 2005). Esta comprensión ayuda a concretar el pensamiento, interiorizar los conceptos, poder aplicarlo a la realidad y, en el caso de futuros docentes, adquirir el valor añadido de poder transmitirlo.

Grupos de trabajo de apoyo

Paralelamente se crean los grupos de apoyo como herramienta para reducir la ansiedad matemática. Más concretamente, se ha creado un único grupo de apoyo dirigido a estudiantes del Grado en Maestro de Educación Primaria que es tutorizado, a su vez, por otros estudiantes de la misma titulación, pero con alto nivel de competencia matemática. Se trata de un grupo cerrado, en formato clase semanal, en el que se trabaja la resolución de problemas matemáticos también con ayuda de materiales manipulativos. Con esto se pretende crear un clima de trabajo que ayude a reducir la ansiedad matemática de los futuros maestros y maestras, así como proporcionar recursos didácticos que contribuyan a la comprensión y resolución de los problemas.

La tutorización entre iguales es una práctica que ha existido desde la antigüedad hasta nuestros días. Las manifestaciones más antiguas de esta práctica tenían por objetivo la mera transmisión de conocimiento por parte de estudiantes que ejercían el rol de profesor. No obstante, las concepciones más recientes de esta idea implican que estudiantes bajo el rol de tutores ayudan a aprender a otros estudiantes que desempeñan el rol de alumnos al mismo tiempo que aprenden a través de la práctica docente. Asimismo, para que esto pueda ocurrir, es importante que exista una diferencia entre tutor y alumno en cuanto al nivel de conocimientos (Forman y Cazden, 1984; Topping, 1996).

Existen numerosos estudios a lo largo de la literatura que han demostrado la eficacia de estos grupos de apoyo para la mejora tanto de las relaciones personales como del clima de los centros.

Permiten desarrollar en los estudiantes actitudes colaborativas como el respeto, la empatía o la escucha activa entre otras, mejorando así la comunicación y la cohesión de grupo. Uno de los beneficios más inmediatos de estos grupos de apoyo es, por tanto, su utilidad a la hora de gestionar los problemas de violencia o *bullying* en los centros educativos. Asimismo, todos los miembros de la comunidad educativa valoran positivamente estas experiencias (Cowie y Fernández, 2006; Monge-Crespo, 2011; Jiménez-Toledo, 2017).

Por otro lado, se encuentran pocos estudios que hayan analizado la utilidad de estos grupos de apoyo para la mejora del rendimiento académico. El más destacado es el de Rodger y Tremblay (2003), que demostraron que la tutorización entre iguales influyó positivamente sobre el rendimiento académico de estudiantes de primer año que presentaban un alto grado de ansiedad ante el desempeño de tareas académicas, obteniendo resultados comparables a los obtenidos por aquellos estudiantes con un bajo grado de ansiedad. Una explicación a esta influencia a nivel cognitivo puede ser los consejos de estudio u otras habilidades compartidas por los estudiantes tutores hacia sus compañeros, ya que existen evidencias que apoyan la idea de que el procesamiento de información y las técnicas de estudio pueden mejorar a través de la enseñanza de técnicas, tanto a nivel cognitivo como conductual (Hembree, 1988; Rodger y Tremblay, 2003). No obstante, en este estudio no se logró demostrar si dicha mejora en el rendimiento estaba acompañada, a su vez, de una mejora a nivel conductual y emocional y, por lo tanto, de una disminución en los niveles de ansiedad (Rodger y Tremblay, 2003).

EVALUACIÓN DE PROPUESTAS

Queremos destacar el alto grado de participación de los estudiantes en las dos propuestas que son totalmente voluntarias y sin rédito académico inmediato. Al igual que en otras acciones del proyecto de innovación contamos con el apoyo de gran parte del alumnado que agradece éstas y otras acciones como seminarios y talleres. Contamos con la opinión de los estudiantes implicados, aunque faltaría analizar si los estudiantes que han disfrutado del taller de ansiedad o de los grupos de trabajo han mejorado en su rendimiento y no solo en su reducción de ansiedad matemática.

Resultados cuestionario abierto plan de ansiedad

El grupo que se formó para los talleres estaba integrado, en su mayoría, por chicas que habían contado con un pasado escolar malo con respecto a las matemáticas y eran conscientes de la importancia de que sus futuros alumnos y alumnas no pasaran por ello. También contamos con tres participantes que querían saber cómo era el taller, pero más por la parte didáctica que para su propia ansiedad matemática. Para la entrevista semiestructurada sobre la evaluación del plan de ansiedad quisimos indagar especialmente sobre materiales y conceptos concretos que provocaran bloqueo, además de las razones o las mejoras. Así, quedó una entrevista de cinco ítems:

PA1: ¿Qué es lo que te ha traído a este taller? ¿Cuáles son tus expectativas?

PA2: ¿Cómo te has sentido trabajando con los materiales?

PA3: ¿Para qué crees que te ha servido las sesiones respecto a tu relación con las matemáticas?

PA4: ¿Quieres hacer alguna propuesta de mejora de cara a las siguientes sesiones?

PA5: ¿Te gustaría trabajar algún aspecto concreto de las matemáticas con el que sientas especial bloqueo?

En las respuestas de los estudiantes se hace alusión a una forma distinta y segura de acercarse a las Matemáticas a través del material manipulativo, así como de visualizar los conceptos abstractos, por ejemplo, una respuesta a la PA2 fue “he podido visualizar los números y poder darles una realidad visual”. Se aprecia que hay un gran interés por el material manipulativo, como herramienta para comprender las Matemáticas y eliminar ciertos bloqueos que se pueden dar en este ámbito.

Asimismo, consideran que este material puede ayudar a superar la ansiedad y otras dificultades que sienten al enfrentarse a actividades matemáticas, por ejemplo, respuesta a PA3 “me ha dado otra visión de materiales que nunca había visto en mi vida”. Paralelamente, ante la pregunta de los motivos por los que tienen interés en participar en este taller, hay un patrón de respuesta común: trabajar las Matemáticas de otra forma con vistas a un futuro de docencia y a poder cubrir las necesidades de aprendizaje de los niños.

Se han incluido también los ítems que determinan la ansiedad matemática y hemos observado que sus puntuaciones son similares al grupo de referencia. Sin embargo, cuando analizamos en profundidad vemos que las respuestas son variadas, destacando ejemplos en los que se marca con un de acuerdo o muy de acuerdo el nivel de preocupación, nerviosismo o sentimiento de incapacidad ante actividades de Matemáticas. A su vez, hay estudiantes que han respondido en este caso mostrando un bajo grado de ansiedad matemática que, en las preguntas cualitativas, se ve reflejado de otra forma.

Sin embargo, en todos los casos expresan que el ambiente generado es de calma y trabajando con los materiales se sienten cómodos, tranquilos, satisfechos y motivados. Por ejemplo, “satisfacción cuando era capaz de conseguir poner imagen a la abstracción matemática y pasar la imagen que me proporcionaban los materiales a la abstracción” o “me he sentido tranquila, calmada”

Cabe destacar el hecho de que ante la pregunta acerca de cuáles son los aspectos concretos de Matemáticas con el que sientan especial bloqueo, las respuestas rondan en torno a la división, las fracciones, los números decimales, números negativos, resolución de problemas, medidas y probabilidad.

Resultados cuestionario abierto grupos de trabajo

Aunque se recibieron muchas solicitudes para participar en los grupos de trabajo solo se pudo conformar un horario en el que se pudiera compatibilizar los huecos de estudiantes con los tutores. Así, en el mismo horario, por quincenas se intercalaban entre diez y doce estudiantes y los tres tutores en el segundo semestre. Todos los estudiantes tenían suspensa la asignatura de Matemáticas y su Didáctica II de primer semestre. Para la entrevista semiestructurada sobre la evaluación de los grupos de trabajo quisimos indagar especialmente sobre rasgos generales su relación con la ansiedad matemática, si les gustan los materiales manipulativos y qué ventajas ven a la metodología (grupos de apoyo entre iguales) que utilizamos. Así, quedó una entrevista de seis ítems:

PG1: ¿Qué es lo que te ha traído al taller? ¿Qué expectativas tenías?

PG2: ¿Consideras que tienes ansiedad matemática?

PG3: ¿Te está ayudando a controlar la ansiedad matemática venir a los grupos de apoyo? ¿Te está ayudando a sentirte más seguro respecto a tus conocimientos matemáticos? ¿Por qué?

PG4: ¿Te está ayudando trabajar con materiales manipulativos? ¿Te gustan que sean grupos de apoyo entre alumnos?

PG5: ¿Recomendarías los grupos de apoyo? ¿Por qué?

PG6: ¿Hay algo que resaltarías de los grupos de apoyo? ¿Te gustaría cambiar algo? ¿Tienes dudas acerca de los grupos de apoyo? ¿Qué mejorarías?

Se obtuvieron 20 respuestas que consideramos bastante homogéneas. Con respecto a la PG1, en general el aspecto que más han resaltado es la necesidad de aprobar la asignatura repasando conocimientos vistos en las clases. Aunque muchos resaltan también la necesidad de aprender más conocimientos y de conectar con las Matemáticas de forma que las comprendan mejor.

Nos parece curioso que muchos han contestado directamente con un “no” rotundo a la pregunta sobre ansiedad, pero dentro de este grupo varios han comentado que su respuesta se debe a que entienden los ejercicios. Por otro lado, tenemos los estudiantes que sí sienten ansiedad y que aseguran que se bloquean siempre que se enfrentan a un ejercicio y no saben cómo trabajar con él.

Quizá las respuestas más interesantes se encuentran en la PG· ya que los estudiantes que han dicho que los grupos de apoyo les ayudan a sentirse más seguros porque, reciben más apoyo del que pueden tener en clase, se va más despacio y se trabaja en equipo lo que les ayuda a entender parte por parte el ejercicio y, por último, porque se ven ejemplos y experiencias de otros estudiantes. Los alumnos que no han contestado consideraban que al no tener ansiedad no hacía falta responder a esta pregunta.

Con respecto a la pregunta de los manipulativos, por una parte, en cuanto a los materiales, todos señalan que les ayudan a visualizar los ejercicios y esto, en consecuencia, les ayuda a comprenderlos mejor. Por otra, en cuanto a los grupos de apoyo entre alumnos, resaltan la confianza y cercanía que sienten además de la ayuda que sienten al trabajar todos juntos.

Aunque todos los estudiantes recomendarían los grupos, las razones son muy variadas: ayudan a tener más confianza, a entender mejor las Matemáticas, es más distendido, es divertido, es productivo y, por último, se pone en práctica lo aprendido en el curso.

Por último, en las respuestas de la última pregunta, en general les gusta que se pueda dar contenido en función de las dudas que tienen, sobre todo, dudas relacionadas con el examen y algunos señalan que les gustaría que estuviesen a lo largo de todo el curso como refuerzo de los contenidos. Casi todos apuntan que quieren que se siga trabajando entre alumnos y con materiales manipulativos. Y que se sienten muy apoyados con estos grupos.

Resultados de las entrevistas a los estudiantes-tutores

Para la entrevista semiestructurada a los tutores se quiso indagar especialmente en la aportación personal y de desarrollo profesional y en la compensación obtenida, quedando cinco cuestiones:

PT1: ¿Qué te ha aportado esta experiencia en lo personal y en tu formación como futura docente?

PT2: Comenta las dificultades en el diseño de las sesiones y su puesta en práctica

PT3: ¿Volverías a embarcarte en este proyecto y por qué?

PT4: ¿Ha compensado el tiempo gastado en la experiencia? ¿Crees que debería tener otra compensación?

PT5: ¿Recomendarías a tus compañeros que se unieran al grupo?

Los estudiantes involucrados en el proceso de creación e impartición de talleres son cinco que se encuentran cursando Educación Primaria, cuatro de tercero y uno de segundo con un nivel de rendimiento en Matemáticas superior a la media, aunque dos de ellas con procesos previos de ansiedad matemática. Ellos destacan que la oportunidad de pensar talleres les está ayudando en su propio desarrollo profesional docente y están consiguiendo una mayor competencia en la Didáctica de las Matemáticas. Consideran necesarios estos talleres ya que sienten que sus compañeros y compañeras del grado tienen una predisposición negativa a las Matemáticas y, por tanto, les preocupa la manera de relacionarse con ellas cuando sean docentes. Por ejemplo, una de las tutoras comentaba:

> T1: El compartir este espacio con personas que sienten esto hacia las matemáticas, y sentir que lo que proponíamos servía tanto como recurso, como a nivel emocional, ha sido muy gratificante. El planteamiento de los talleres en sí también siento que me ha aportado estructura a la hora de plantear actividades en un futuro. A nivel personal, creo que me está sirviendo como cierre para mi propio proceso con las matemáticas, ya que siento que yo estaba ahí y que a mí lo que me ayudó fue trabajar así, reencontrarme con las matemáticas.

También surgen aspectos de la cantidad de tiempo que les lleva la preparación y el acompañamiento, que les resta tiempo del resto de tareas y no les aporta ningún beneficio en su nota, por ejemplo.

> T3: Sí que siento que el tiempo que empleado en estos grupos de apoyo ha sido compensado con todo lo que me ha aportado y que ya he comentado anteriormente. No obstante, creo que, si estos grupos de trabajo se reconociesen oficialmente por la universidad y por lo tanto tuviesen un reconocimiento de créditos, se podría llegar a más personas, tanto a las que quisiera asistir como estudiantes como las que quisieran asistir en el papel de tutores. De esta manera, el conjunto del proyecto sería mucho más enriquecedor. Además, dicho reconocimiento de créditos se vería reflejado en una mayor implicación por parte de los estudiantes, ya que al ser algo opcional y que no está siendo reconocido de ninguna manera, hace que el interés y motivación pueda verse afectado.

Pero, en general, destacan que merece la pena, que se sienten satisfechas con su trabajo (aunque con prospectiva de mejora) y que la recompensa de sentir que están ayudando a sus compañeras y compañeros les hace darse cuenta de que la elección de su carrera profesional es la adecuada: el ser docentes.

> T5: No sólo lo recomendaría, sino que ya lo he recomendado. Tenemos la oportunidad de ayudar a nuestros iguales, personas que el día de mañana no sabemos si serán nuestros futuros compañeros de docencia, y cuanto más sepamos y mejor formados estemos todos, mucho más fácil será poder realizar nuestra labor. Además, se establecen relaciones con otras personas que piensan de la misma forma y que están dispuestas, al igual que tú, de ponerse manos a la obra y ayudar en todo lo que sea posible. Es una gran experiencia y totalmente recomendable

CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROSPECTIVAS

La detección del nivel de ansiedad matemática de los estudiantes nos permite verificar que era necesario plantear algunas soluciones para reducirlo. Es importante que los futuros maestros y maestras de primaria tengan una relación afectivamente positiva con respecto a las Matemáticas ya que redundará en sus futuros alumnos y alumnas.

A la luz de los resultados de las entrevistas estamos convencidas de que es un plan efectivo para reducir y, quien sabe si eliminar, la ansiedad matemática. Aunque es un resultado que podía preverse desde el inicio, contar con investigaciones que demuestren su valor creemos que es importante para poder conseguir una implicación institucional. Por ejemplo, uno de los puntos importantes de la experiencia es contar con grupos pequeños y, en este caso, para el curso que viene, 2019/2020, se va a contar en la Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la UAM con diez horas, en todos los grupos de Matemáticas y su Didáctica I, II y III, con el grupo dividido. Esto reducirá a cuarenta los estudiantes, aunque seguimos considerando que es un número muy alto para trabajar en esta línea.

Se ha contado con un alto grado de participación (casi 80 estudiantes involucrados) aunque la situación laboral personal de los estudiantes de grado de Maestro/a en Educación Primaria, con un nivel socioeconómico bajo-medio, lleva a que en muchos casos haya necesidad de compatibilizar la formación universitaria con trabajo externo y esto implica una limitación en el tiempo disponible para dedicar a talleres o seminarios que se pongan en práctica en la universidad. Así, como comentamos anteriormente ha habido más solicitudes para participar en los grupos de trabajo, pero no se han podido realizar.

Dado que se trata de un proyecto de innovación reciente, se pueden apreciar limitaciones como el hecho de que se trata de personas llevando a cabo talleres, y no de una responsabilidad institucional que constituiría un recurso disponible existente para los futuros docentes. A su vez, surgen cuestiones acerca de la sostenibilidad, de la posible relación con las becas de colaboración del cuarto curso de la formación universitaria, dado el esfuerzo de la preparación previa y la posterior puesta en práctica de los talleres y los grupos de trabajo. Así, para futuro, la idea es intentar implantar estos talleres y grupos de manera sostenible, con becas o con créditos para los estudiantes participantes. También nos parecería importante que los estudiantes que participen en esos talleres tengan algún reconocimiento en forma de créditos. En esta línea se va a solicitar un curso de corta duración de la UAM para poder contar con viabilidad económica del proyecto y, también, reconocimiento de créditos a los estudiantes involucrados. Creemos que son medidas que hacen una formación inicial de los maestros y maestras mejor y a que ellos sean más conscientes con los problemas que afrontaran en una futura clase de Matemáticas.

Referencias

Aballe, M. Á. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de primaria. *UNO, 25*, 89-107.

Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de las competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea.

Biniés, P. (2008) *Conversaciones matemáticas con María Antonia Canals. O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante*. Barcelona: Graó.

Caballero, A. (2013). *Diseño, aplicación y evaluación de un Programa de Intervención para Maestros en Formación Inicial*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Extremadura, Badajoz.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-91). Málaga: SEIEM.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Octaedro-Rosa Sensat.

Canals, M. A. (2005). *Visión general de las matemáticas en la escuela*. Jornadas del Grupo Perímetro, 16 de abril de 2005.

Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Cowie, H. y Fernández, F. J. (2006). Ayuda entre iguales en las escuelas: desarrollos y retos. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 4*(2), 291-310.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de Educación Primaria en formación y en ejercicio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Flores, P. y Moreno, A. (2014). Formar profesores de matemáticas de primaria para las nuevas competencias. *UNO, 66*, 19-27.

Forman, E. A. y Cazden, C. B. (1984). Perspectivas vygotskianas en la educación: el valor cognitivo de la interacción entre iguales. *Infancia y Aprendizaje, 7*(27-28), 139-157.

Garrido, R. (2015). *La competencia matemática en los países de mejor rendimiento en PISA: estudio comparado y prospectivas para España*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Garrido, R., Thoilliez, B., Alonso, T., Díaz-Romanillos, E., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand-Díaz, Z. C. y Verástegui, M. (2019). *#PIMeFIM: A Spanish Bottom-Up Experience to Improve Initial Teacher Education.* Parallel paper session aceptada y presentada en TEPE Conference 2019: Quality Teachers and Quality Teacher Education: Research, Policy and Practice, Cracovia, Polonia.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio. *Educación XX1, 19*(1), 135-158.

Hembree, R. (1988). Correlate, causes, effects, and treatment of test anxiety. *Review of Educational Research, 58*(1), 47-77.

INEE (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. IEA*. Madrid: Secretaría General Técnica.

Jackson, E. (2008). Mathematics anxiety in student teachers. *Practitioner Research in Higher Education, 2*(1), 36-42.

Jiménez-Toledo, A. (2017). *La creación, formación y desarrollo de grupos de apoyo mutuo entre estudiantes para la mejora escolar y social*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Sevilla, Sevilla.

Marbán, J. M., Maroto, A. y Palacios, A. (2016). Evolución de la ansiedad matemática en los maestros de Primaria en formación. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 615). Málaga: SEIEM.

Monge-Crespo, C. (2011). La ayuda entre iguales favorece el aprendizaje de los alumnos y la interacción contextual. *Enseñanza & Teaching, 29*(2), 147-164.

Nortes, R. y Nortes, A. (2017). Ansiedad, motivación y confianza hacia las Matemáticas en futuros maestros de Primaria. *NÚMEROS, 95*, 77-92.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación, 363*, 35-59.

Rodger, S. y Tremblay, P. F. (2003). The effects of a peer mentoring program on academic success among first year university students. *The Canadian Journal of Higher Education, 33*(3), 1-17.

Rowland, T. y Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. Londres, Reino Unido: Springer.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Lupiáñez, J. L., del Río, A. I. y Fernández, P. D. (2016). Cambios de ansiedad matemática en futuros maestros de Educación Primaria. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 23*, 149-170.

Sánchez, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de Educación Primaria. *Profesorado, 15*(3), 297-312.

Topping, K. J. (1996). The effectiveness of peer tutoring in further and higher education: A typology and review of the literature. *Higher Education, 32*(3), 321-345.

Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(3), 181-185.

LA IMPORTANCIA DE LA UTILIDAD Y EL INTERÉS PARA EXPERIMENTAR FLUJO CON TAREAS MATEMÁTICAS [xxv]

The relevance of the utility and interest of the mathematics tasks to experiences flow

Gil, E.[a], Castillo, F. J.[a] y Montoro, A. B.[b]

[a]Universidad de Almería, [b]Universidad de Granada

Resumen

Cuando los estudiantes se concentran y disfrutan realizando tareas escolares su rendimiento es mayor. El objetivo de esta investigación consiste en analizar la influencia de la utilidad, el interés, la retroalimentación, la claridad de metas y la complejidad o el nivel de desafío percibido por los estudiantes en la concentración y el disfrute con la actividad, así como de la relación entre estas variables. Para lograr dicha meta se analizan las respuestas de 230 estudiantes de maestro de primaria a un cuestionario cerrado sobre su experiencia al realizar en grupo nueve tareas de geometría y medida. Como resultado obtenemos una red bayesiana que muestra que todas las variables influyen de manera directa o indirecta en la concentración o el disfrute, siendo la utilidad y el interés los factores más influyentes en el flujo. Dichos resultados se contrastaron con el análisis de once grabaciones de aula de estudiantes realizando tres de estas tareas.

Palabras clave: *experiencias de flujo, redes bayesianas, formación de maestros, educación matemática, tareas.*

Abstract

Research shows that student performance is greater when students are focused and enjoy doing academic tasks. The aim of this research is to analyze the influence of the utility, interest, feedback, clarity of goals and the level of complexity or challenge of the task perceived by students in their concentration and enjoyment with the activity. Moreover, the relationship between these variables are explored. In order to achieve this goal, the responses of 230 preservice primary school teachers to a closed-questionnaire after performing nine geometry and measurement tasks are analyzed. A bayesian networks shows that all variables directly or indirectly influence concentration or enjoyment, being the utility and interest the most influential factors in the flow experience. Moreover, eleven videorecording of groups of students performing three of these tasks were analyzed as a way to contrast the information.

Keywords: *flow experiences, bayesian networks, teacher training, mathematical education, tasks.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre dominio afectivo en Educación Matemática ha cobrado especial importancia en los últimos años, incluyéndose como tema principal de conferencias plenarias de congresos internacionales como el *42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) y el XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Dichas investigaciones tratan aspectos tan relevantes como las actitudes hacia las matemáticas, las creencias sobre su naturaleza y cómo se enseñan y aprenden, el autoconcepto, la motivación o el grado de ansiedad (Marbán, 2016).

En el trabajo que presentamos a continuación nos centramos en el estudio de la motivación, entendida como la fuerza o impulso que lleva a la persona a realizar una actividad. La Teoría de la

Gil, E., Castillo, F. J. y Montoro, A. B. (2019). La importancia de la utilidad y el interés para experimentar flujo con tareas matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 353-362). Valladolid: SEIEM.

Autodeterminación clasifica los tipos de motivación según el grado de autodeterminación de la conducta: extrínseca, cuando un individuo realiza actividades o tareas para recibir una recompensa o evitar un castigo; intrínseca, cuando se realiza una tarea por placer o por curiosidad; y desmotivación, cuando no hay interés alguno hacia la tarea o actividad que se está llevando a cabo (Deci y Ryan, 2000).

La Teoría de Flujo, enmarcada dentro de la motivación intrínseca, se centra en describir las experiencias de individuos que realizan actividades durante horas sin esperar nada a cambio y explicar sus causas. En sus comienzos, Csikszentmihalyi (1997) llevó a cabo más de ocho mil entrevistas a personas de diverso origen (artistas, deportistas, científicos…) y llegó a la conclusión que, independientemente de la actividad que realizaran todos describían su experiencia de un modo muy similar: se enfrentaban a tareas desafiantes con un objetivo claro, estaban tan concentrados en la realización de la actividad que se aislaban de lo que sucedía a su alrededor y perdían la noción del tiempo, sentían control sobre la actividad y recibían información sobre lo cerca que estaban de alcanzar su meta en todo momento, lo que proporcionaba una sensación agradable (Csikszentmihalyi, 1997). A esta experiencia la denominó “flujo”.

En el entorno educativo, autores como Whalen (1997), Nakamura (1998) y Larson (1998) han llegado a la conclusión de que los estudiantes que experimentan flujo con tareas escolares aumentan su compromiso con ellas y, por tanto, la calidad de su resolución es más alta. Estos resultados hacen que consideremos esencial incorporar este tipo de experiencias a la educación matemática tanto de estudiantes de Primaria y Secundaria como de maestros en formación inicial (Montoro y Gil, 2015).

MARCO TEÓRICO

Como se dijo en la introducción, el análisis de las entrevistas realizadas por Csikszentmihalyi (2014) dio lugar al establecimiento de nueve características de la experiencia de flujo, que serían utilizadas en numerosos cuestionarios: equilibrio desafío-habilidad, metas claras, retroalimentación, concentración, aislamiento, sensación de control, pérdida de la noción del tiempo, actuación sin esfuerzo y disfrute.

Sin embargo, investigaciones posteriores sostienen que las experiencias de flujo se caracterizan principalmente por ser estados de profunda concentración y disfrute con una actividad (Ghani y Deshpande, 1994; Montoro, 2014; Rodríguez-Sánchez, Cifre, Salanova y Åborg, 2008), considerando el resto como requisitos para fluir. En concreto, existe cierta unanimidad en considerar que para que un individuo experimente flujo con una actividad es necesario que se le proporcionen metas claras, retroalimentación inmediata y equilibrio entre las habilidades que posee y el desafío propuesto por la tarea (Nakamura y Cskiszentmihalyi, 2002).

Para Cskiszentmihalyi (2014) el equilibrio desafío-habilidad es esencial. Cuando el sujeto percibe que sus habilidades son inferiores al desafío presentado por la actividad experimenta ansiedad y si las habilidades del individuo son superiores al desafío presentado por la tarea experimenta apatía y aburrimiento. Es en el momento en el que tanto habilidades como desafíos son altos cuando se produce flujo.

Por otro lado, el desafío debe establecer una meta clara, pues el sujeto ha de saber hacia dónde se dirige su conducta. Además, debe recibir información sobre lo cerca o lejos que está de superar el desafío. Para ello, es vital establecer metas a corto plazo o proponer metas intermedias, ya que, de otro modo, es complejo recibir retroalimentación a lo largo del proceso (Reeve, 1994). De acuerdo con Heine (1997), la retroalimentación (informativa e inmediata) debe estar presente para experimentar flujo, ya que en el momento en el que los sujetos reciben retroalimentación positiva sobre su desempeño, la actividad se convierte en algo gratificante para ellos.

No obstante, existen otros aspectos que influyen en las experiencias de flujo. Por ejemplo, Montoro y Gil (2012) encontraron que los aspectos considerados como facilitadores de flujo con mayor frecuencia en investigaciones sobre flujo y educación eran, además del equilibrio desafío-habilidad o complejidad, la retroalimentación inmediata y la claridad de metas, el interés y la utilidad.

Cuando una tarea capta la atención de un estudiante, le provoca curiosidad o interés no duda en esforzarse por resolverla, ya que esto le produce disfrute. En ocasiones, el interés de una actividad versa en su utilidad (Alonso, 2005).

En nuestra búsqueda bibliográfica, encontramos pocas investigaciones sobre experiencias de flujo en procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Heine (1997) comparó la forma de organizar el aula y los tipos de tareas propuestas en clases de matemáticas en que los estudiantes aumentaron su nivel de flujo con aquellas clases en que disminuyó, tras realizar un programa de enriquecimiento curricular para estudiantes con talento matemático. En este sentido, concluyó que el trabajo en grupo con tareas de complejidad intermedia eran un aspecto esencial para fluir, además de la necesidad de tener la meta clara y recibir retroalimentación. En contraste, Schweinle, Turner y Meyer (2008) mostraron que, en clases comunes de matemáticas con estudiantes de primaria, los niveles más altos de concentración y disfrute se consiguieron cuando los estudiantes tenían alta percepción de habilidad y la clase proponía retos intermedios o un poquito por debajo de sus habilidades. Por otro lado, comparando clases de matemáticas de primaria con distinto nivel de flujo, encontraron como principales diferencias la forma de dar apoyo o retroalimentación a los estudiantes, la forma de introducir las actividades, explicar su objetivo y la importancia de la actividad (Schweinle, Meyer y Turner, 2006). Dada la escasez de trabajos sobre flujo en el aprendizaje de las matemáticas, decidimos contrastar la influencia de los factores descritos anteriormente en la concentración y disfrute de estudiantes de maestro al realizar tareas en grupo (Montoro y Gil, 2019). En este trabajo presentamos un modelo que muestra las relaciones entre todas las variables anteriores: concentración, disfrute, complejidad, equilibrio desafío-habilidad, claridad de metas, retroalimentación, utilidad e interés.

METODOLOGÍA

Para alcanzar este objetivo se analizaron los datos procedentes de la administración de un cuestionario a 230 estudiantes de maestro de primaria de la Universidad de Almería, tras resolver en grupo nueve tareas sobre medida y geometría con material manipulativo que tradicionalmente se realizaban en la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida en Educación Primaria”. Por otro lado, se solicitaron tres grupos de cuatro o cinco estudiantes voluntarios para ser grabados resolviendo tres tareas sobre comparación y medida de capacidad, volumen y superficie, con objeto de triangular la información y contrastar los resultados obtenidos con los cuestionarios. En total contamos con tres grupos resolviendo una tarea de comparación de botellas según su capacidad, tres realizando una tarea de comparación del volumen de tres objetos, tres midiendo la capacidad de un puñado, un trago y sus pulmones (a través del volumen) y dos grupos obteniendo fórmulas para el cálculo de áreas con unidades no estándar. Cabe destacar que los grupos grabados realizando esta última tarea fueron también grabados en tareas de comparación: uno de ellos en la de comparación de capacidad y otros en la de comparación de volumen.

Instrumento

El cuestionario utilizado consta de ítems referidos a las variables que componen la experiencia de flujo, dos ítems para la concentración y cuatro ítems para el disfrute; y dos ítems para identificar la presencia o ausencia de los principales facilitadores del flujo propuestos en la literatura, esto es, nivel de desafío, complejidad, metas claras, retroalimentación, interés y utilidad. En sus respuestas, los sujetos deben señalar el nivel de acuerdo con las afirmaciones reflejadas en los ítems, en una escala de valoración de 1 que refleja que el estudiante está totalmente en desacuerdo a 5 que refleja que está totalmente de acuerdo.

Este instrumento fue diseñado y validado por Montoro (2014) con el objetivo de comparar la experiencia con distintas tareas, aplicándose al finalizar cada una de ellas. Por ello, en un intento por simplificar el número de ítems del cuestionario e identificar incoherencias en las respuestas de los participantes, se redactó un ítem en sentido positivo y otro en sentido negativo para cada una de las variables. Por ejemplo, para la concentración se utilizaron ítems como “mi atención estaba totalmente centrada en la actividad” y “mi concentración era interrumpida por cualquier cosa”.

Tratamiento y análisis de los datos

Tras recodificar las puntuaciones de los ítems negativos, se crearon variables dicotómicas que indicaban si los estudiantes se concentraron, habían disfrutado, recibieron retroalimentación, tenían claro cuál era la meta y les resultó desafiante, interesante o útil. Consideramos que esta variable había estado presente cuando la puntuación media en los ítems de cada una de estas variables sea superior o igual a 4, lo que era equivalente a estar de acuerdo en todas las afirmaciones. En el caso de la complejidad, se establecieron tres niveles: bajo, con puntuaciones menores a 2.5; intermedia, con puntuaciones entre 2.5 e 4; y alta; más de 4.

Con dichos datos se creó una red bayesiana que permitió discernir y representar dichas relaciones, utilizando el paquete bnlearn, disponible en el software R (Scutari y Denis, 2015). Una red bayesiana es un grafo acíclico dirigido en el que las variables, que consideramos como aleatorias, son representadas por los nodos y las relaciones de dependencia entre estas por las aristas del grafo. El hecho de que estas aristas sean dirigidas responde a la idea de causalidad que intuitivamente asociamos a estas variables. Es al nodo del que sale la arista al que llamamos nodo padre, siendo el nodo hijo el nodo al que llega la arista, representando estos nodos las variables causa y consecuencia respectivamente. Sin embargo, en la red solo se contemplan aquellas relaciones llamadas directas y no aquellas que estén mediadas por una tercera variable.

Para analizar qué grafo es el que mejor representa las relaciones de dependencia de estas variables con los datos proporcionados vamos a utilizar el algoritmo PC incluido en el software. Este algoritmo realiza los posibles test de independencia entre cada pareja de variables condicionando a los padres de cada una de las variables. Este método da como resultado un grafo no orientado, que reorientaremos recurriendo a bibliografía y al hecho de que no pueden existir ciclos en la red.

Por último, para evaluar en qué medida cada una de las variables es condición suficiente o necesaria para experimentar flujo vamos a analizar las distribuciones de probabilidad asociadas a cada variable y las distribuciones conjuntas y condicionadas de los posibles conjuntos de variables, con el método de máxima verosimilitud.

De manera paralela, se analizaron las grabaciones seleccionando fragmentos que reflejaran la presencia o ausencia de disfrute, concentración, retroalimentación, metas claras, interés y utilidad. Por otro lado, se analizó si se producían cambios en el nivel de concentración o disfrute con la tarea en los vídeos y si podían justificarse por la presencia o ausencia del resto de variables.

RESULTADOS

Como se observa en la Figura 1, el grafo que obtenemos utilizando el algoritmo PC es un grafo no dirigido puesto que solo estudia dependencia, la cual es bidireccional *per se*. Es necesario por tanto orientar todas estas aristas, para lo que se debería probar cuáles son los nodos convergentes allí donde se produce un ciclo y establecer el resto de los arcos acorde.

Como se dijo en la literatura, este trabajo pretende analizar la influencia de distintos aspectos en la concentración y el disfrute, en todas aquellas relaciones en las que aparezcan el disfrute o la concentración estas serán tomadas como nodos hijo. Es decir, la orientación de las flechas que conectan estas variables con cualquier otra finalizará en la concentración y el disfrute.

Como se puede ver en la Figura 1, las únicas variables que influyen tanto en la concentración como en el disfrute son el interés y la utilidad. Además, estas dos variables están relacionadas, ya que en numerosas ocasiones nos sentimos atraídos por actividades que consideramos útiles (Alonso, 2005). En este sentido, consideramos que la flecha que conecta dichas variables tiene como origen la utilidad.

Por otro lado, observamos que el interés está conectado con la retroalimentación y la claridad de metas. En general, es más lógico pensar que para interesarte por una actividad es necesario tener claro lo que pide, que sea el interés por una actividad lo que haga veas claro su objetivo. Algo similar ocurre con la retroalimentación: saber que estás cada vez más cerca de alcanzar la meta hace que se mantenga el interés y saber que te equivocas continuamente y no avanzas a la meta puede hacer que se pierda. Por ello, representaremos las aristas que van desde estas variables al interés. Además, es prácticamente imposible conocer lo cerca que estás de resolver una tarea si no tienes claro lo que pide, por lo que consideraremos que es la claridad de metas quien influye en la retroalimentación.

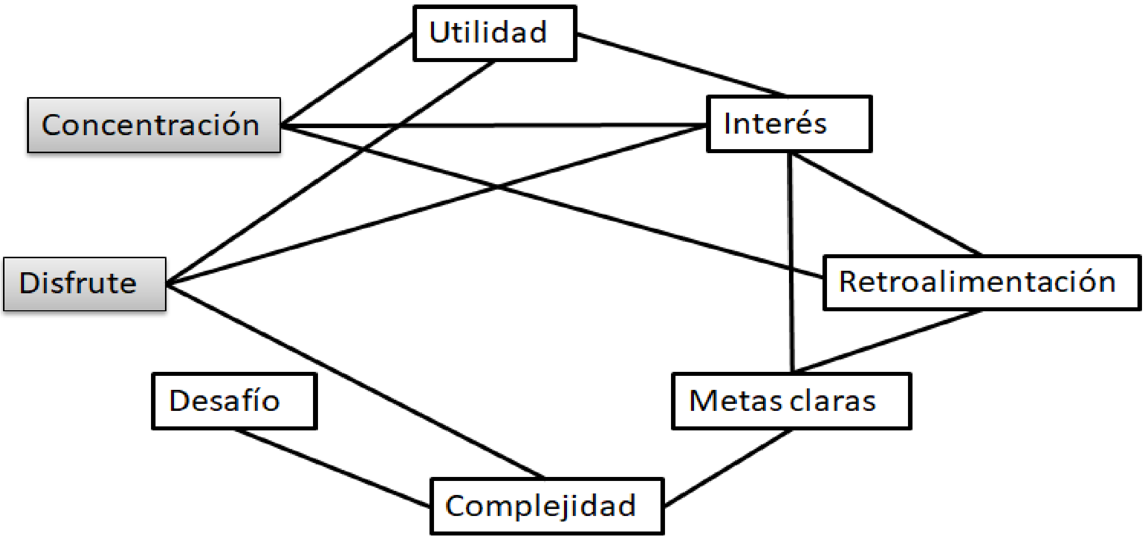


Figura 1. Grafo obtenido al aplicar el algoritmo PC

En cuanto al nivel de complejidad, vemos que, por un lado, influye directamente en el disfrute, y por otro, está relacionado con la claridad de metas. Si bien no hay una relación clara en la literatura, parece necesario tener la meta clara para evaluar si la tarea es fácil o difícil o incluso que no ver claro la meta haga que parezca más complicada. Por otro lado, cabría la posibilidad de que, en el caso de tareas de dificultad elevada, dicha complejidad diera lugar a confusión entre lo que pide. En el primer caso, la complejidad solo tendría influencia sobre el disfrute, mientras que, en el segundo caso, afirmamos también una relación indirecta con la concentración.

Por último, encontramos que el nivel de desafío está vinculado únicamente con la complejidad, por lo que, la única forma de que influya en el flujo es tomarlo como causa de la percepción de complejidad en lugar de como consecuencia. De hecho, podría ser que los estudiantes los considerasen como sinónimos.

En resumen, todos los factores recogidos en el cuestionario influyen en el flujo, ya sea de manera directa o indirecta. El nivel de desafío y complejidad de la tarea influyen únicamente en el disfrute con la actividad, la retroalimentación de manera directa en la concentración e indirecta en el disfrute, la utilidad y el interés influyen de manera directa en ambas, y la claridad de metas de manera indirecta en ambas (Figura 2).

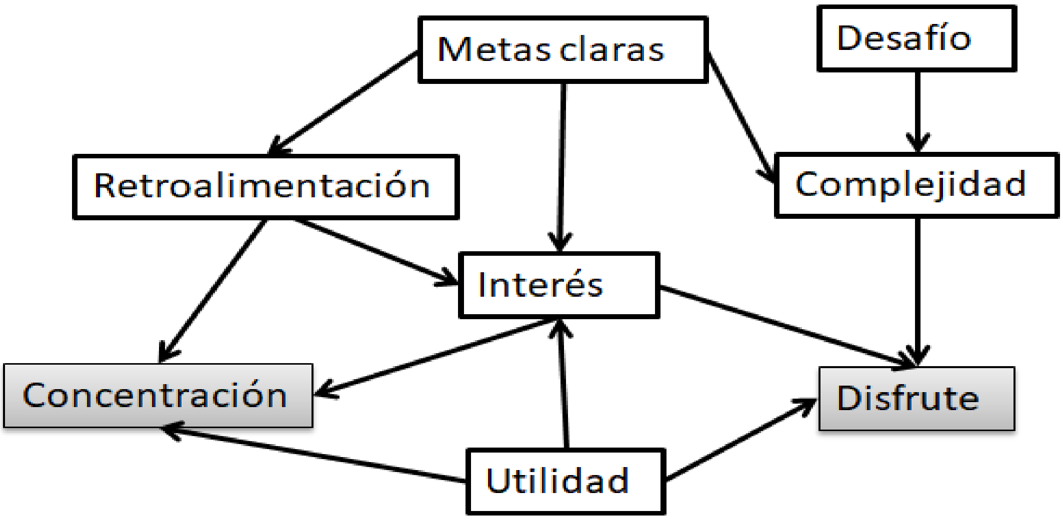


Figura 2. Red bayesiana obtenida tras orientar el grafo del algoritmo PC

Pero ¿en qué medida cada una de estas variables es condición suficiente para experimentar flujo? ¿En qué medida cada variable es una condición necesaria para que se experimente flujo? En la Tabla 1 se muestra, por un lado, la probabilidad con la que sintieron flujo los estudiantes (se concentraron y disfrutaron) sabiendo que estaba presente una de las otras variables (columna 2) y, por otro lado, la probabilidad de que, sabiendo que ha experimentado flujo, estuviera presente una de las otras variables (columna 3). Como podemos observar, más del 95% de los estudiantes que experimentaron flujo afirmaron que la actividad le resultó interesante, por lo que podría considerarse como casi un requisito para fluir. La utilidad, relacionada en numerosas ocasiones con el interés, se posiciona como otro de los aspectos más importantes para fluir, identificado en más del 90% de los casos en los que el estudiante experimentó flujo.

Tabla 1. Tabla de probabilidades de causa y efecto en de las variables con respecto al flujo

	Causa	Efecto
Complejidad	0.684	0.700
Utilidad	0.727	0.914
Claridad de las metas	0.730	0.597
Retroalimentación	0.743	0.631
Interés	0.744	0.957
Desafío	0.647	0.362

En cambio, el nivel de complejidad, la claridad de metas y la retroalimentación aparecen como facilitadores de la experiencia, ya que la probabilidad de que experimentar flujo sabiendo que cada uno de estos aspectos estaba presente se encuentran entre 0.684 y 0.743. Del mismo modo, el porcentaje de estudiantes que experimentaron flujo y afirmaron haber tenido la meta clara fue de 59.7%, de recibir retroalimentación fue de 63.1% y de que la tarea tenía complejidad intermedia un 70%.

A continuación, mostraremos cómo se reflejaron estas relaciones en las grabaciones.

La relación más evidente en los vídeos se encontró entre el interés y la concentración y el disfrute. En aquellas ocasiones en que la actividad captó el interés de los estudiantes no se produjeron interrupciones de ningún tipo entre los compañeros que hicieran alusiones a aspectos externos a la actividad, lo que mostraba concentración con la actividad. Por otro lado, en la mayoría de las ocasiones, dicho interés y concentración aparecían unidos a caras de sorpresa por los resultados obtenidos y risas o sonrisas de complicidad entre los estudiantes, así como comentarios del tipo "déjame hacerlo a mí, porfi, porfi" o "¡qué chulo está!", ambos signos de disfrute con la actividad.

En cambio, solo encontramos un fragmento en el que una estudiante hizo alusión expresa a la utilidad de la tarea del geoplano, cuando afirmó que "este material debería estar en los colegios". Por otro lado, podría pensarse que cuando algunos estudiantes mencionaron que "Si son iguales nos han timado" mientras realizaban la tarea de comparación de la capacidad de distintas botellas, le están viendo cierta utilidad para el futuro. En consecuencia, esta escasez de alusiones expresas a la utilidad hace que las relaciones con el resto de las variables que aparecen en la Figura 2 no puedan ser apoyadas ni rechazadas.

A diferencia de la utilidad, todas las grabaciones contaban con un fragmento que mostraba la presencia de metas claras poco después de comenzar la grabación. Dicha presencia fue observada porque afirmaban haberlo comprendido, expresando con sus propias palabras lo que debían hacer, o preguntaban al profesor si dichas expresiones eran correctas. En el caso de la obtención de fórmulas con el geoplano, el profesor tuvo que resolver la primera de las figuras planteadas junto con los dos grupos para clarificar el objetivo de la actividad y en una de las grabaciones sobre el volumen tuvo que aclarar a dos estudiantes que se trataba de comparar "lo que ocupa". En las dos grabaciones de la tarea de obtención de fórmulas se vio que, justo al completar la fórmula de la primera figura, pensaron que se trataba de una tarea compleja, con frases del tipo "¿y tenemos que hacerlo con todas? Esto es muy complicado. La que hemos hecho es la más fácil". En cambio, en el resto de las tareas comenzaron a trabajar y manipular los objetos, así como a dar su opinión sobre cómo resolverlo, mostrando cierta seguridad en sus respuestas. Estos fragmentos apoyan la relación entre la claridad de metas y la complejidad expresada en el gráfico.

No obstante, también se observaron algunos fragmentos que reflejaban la ausencia de metas claras o que la meta del estudiante difería de la del profesor. Dichos fragmentos coincidían con situaciones en las que se le proporcionaba retroalimentación al estudiante. Por ejemplo, en la tarea de comparación de la capacidad de distintas botellas, un estudiante no reconocía que dos botellas tuvieran la misma capacidad, a pesar de haber llenado de agua una de ellas y verterla en la otra y que sus compañeros dijeran que eran iguales, porque "alguna tendremos que poner que es más grande". Su meta consistía en ordenar de mayor a menor, de manera estricta. En el caso de la obtención de fórmulas para el cálculo de áreas (tomando como unidad un triángulo equilátero) con el geoplano la falta de coincidencia entre la meta del profesor y la interpretación del estudiante se hizo evidente cuando la profesora les mostró que la fórmula que habían propuesto para el rectángulo no era adecuada. El profesor quería que creasen fórmulas que fueran útiles para calcular el área de figuras planas (en este caso un rectángulo) de cualquier dimensión, midiendo algunas longitudes con una regla y aplicando su fórmula. En cambio, los estudiantes habían interpretado que la meta era obtener un patrón para calcular el área de figuras planas dibujadas en el geoplano, situación en la que no es necesario mantener la unidad de medida de la longitud en todas las dimensiones del rectángulo. La aclaración sobre la meta de la tarea en un momento tan avanzado de la tarea les provocó dudas sobre la validez de sus respuestas. Dicho de otro modo, mientras que al comienzo (cuando tenían una meta clara, aunque no coincidiera con la del profesor) se mostraban felices y orgullosos de haber obtenido las fórmulas de las primeras figuras, dudar de lo que pedía por un cambio de metas hizo que se produjera ausencia de retroalimentación. Dicho de otro modo, tener la meta clara es condición necesaria para recibir retroalimentación, pero no es suficiente. Por ejemplo, todos tenían claro lo que pedían las tareas de comparación y medida del volumen, pero afirmaron no estar seguros de si sus razonamientos eran correctos, requiriendo la aprobación del profesor/a para estar seguros de que iban por el buen camino.

Por último, encontramos que, cuando la retroalimentación proporcionada por el material, los compañeros o el profesor indicaba que las ideas aportadas por los participantes no eran válidas para resolver el problema de manera reiterada, se observó una pérdida del interés en la actividad, disminuyendo la participación en la discusión de la solución. Un ejemplo muy claro de esta relación (retroalimentación→ interés) se observa en dos de las grabaciones de la medida de la capacidad pulmonar por medio de la medida del volumen de un globo en el que se introduce el aire de sus pulmones. Ambos grupos sugieren pesar el globo, aunque comprenden que es erróneo al seguir la sugerencia del profesor de pesar uno vacío. Posteriormente sugieren medir el tiempo que tarda en soltar el aire del globo y/o inflarlo, pero sus propios compañeros notan que podría hacerse más rápida o lentamente con la misma cantidad de aire. También intentan medir el contorno con una regla, aunque lo dejan por su rigidez. Alguno sugiere sumergir el globo en agua y ver la cantidad de líquido que desplaza, pero sus compañeros indican que “eso es para el volumen y nos piden la capacidad”. En dicha actividad, el interés, la concentración y el disfrute con la actividad decrece a medida que avanza el tiempo y aumentan las ocasiones en que aparece retroalimentación negativa. En contraste, en las tareas de comparación de la capacidad y las primeras fórmulas del cálculo de áreas se observa que tras recibir retroalimentación positiva (la fórmula funciona o a este recipiente le cabe más que a este) los estudiantes se mostraron interesados y concentrados en la actividad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación proporciona datos empíricos que apoyan la idea de que aspectos como la claridad de metas, la retroalimentación, el nivel de complejidad, el interés y la utilidad de la actividad influyen en la aparición de experiencias de flujo de maestros en formación con tareas matemáticas. Además, se ha construido una red bayesiana que muestra las relaciones de dependencia existentes entre las distintas variables. Dicha red mejora el modelo propuesto por Montoro (2014), en el que se muestran únicamente las relaciones establecidas entre la concentración y el disfrute con el resto de las variables, incluyendo todas las relaciones posibles.

En dicha red, las únicas variables con relación directa tanto en la concentración como en el disfrute son la utilidad y el interés. La retroalimentación tiene relación directa con la concentración e indirecta con el disfrute, mientras que la complejidad influye directamente en el disfrute. En contraste, la claridad de metas influye en la retroalimentación, la complejidad y el interés, provocándose una relación indirecta con la concentración y el disfrute. De entre todas estas relaciones, la establecida entre la complejidad y el disfrute contrasta con los resultados de Montoro (2014), ya que en su modelo la complejidad estaba vinculada a la concentración y no al disfrute.

Por otro lado, los resultados muestran que, si bien hacer frente a tareas de complejidad intermedia que tengan objetivo claro y proporcionen retroalimentación se han considerado en la literatura como requisitos para fluir (Nakamura y Csiksznetmihalyi, 2002), hubo un porcentaje de estudiantes considerable que experimentó flujo en nuestra muestra sin tener totalmente claro lo que pedía la actividad, teniendo dudas de si había realizado bien la actividad o percibiendo que la tarea era sencilla o bastante complicada. Dicho de otra forma, si bien facilitan la aparición del flujo con la actividad, no son requisitos indispensables para fluir.

Además, se ha visto que el interés y la utilidad son los aspectos con mayor influencia en la concentración y el disfrute con la actividad en nuestra muestra. La fuerte relación entre el interés y el flujo lleva a cuestionarnos si se trata de otra componente más de la experiencia de flujo, dado que algunas investigaciones recientes (Csikszentmihalyi, 2014) consideran el flujo como un constructo formado por la concentración, el interés y el disfrute con la actividad.

Por otro lado, el hecho de que aparezca la utilidad como principal facilitador del interés, la concentración y el disfrute con la actividad y que esta variable se haya considerado como facilitador del flujo principalmente en entornos escolares donde las actividades no fueron escogidas libremente (Schweinle, Meyer y Turner, 2006; Schweinle, Turner y Meyer, 2008) nos sugiere que quizás la importancia de esta variable se deba a la población con la que se realizó la investigación. Se trata de estudiantes que, en su mayoría no están motivados intrínsecamente por las matemáticas y con un grado de autoconfianza en sus capacidades para resolver tareas matemáticas bajo.

Futuras investigaciones podrían ver la influencia del grado de autoconfianza y las interacciones producidas en los grupos como modo de complementar este modelo.

Referencias

Alonso, J. (2005). Motivaciones, expectativas y valores-intereses relacionados con el aprendizaje: el cuestionario MEVA. *Psicothema*, *17*(3), 404-411.

Csikszentmihalyi, M. (1997). Flow and creativity. *NAMTA Journal*, *22*(2), 60-97.

Csikszentmihalyi, M. (2014). *Applications of Flow in Human Development and Education: The collected works of Mihaly Csikszentmihalyi*. Nueva York, EE. UU.: Springer.

Deci, E. L. y Ryan, R. M. (2000). The ‘‘what’’ and ‘‘why’’ of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry*, *11*(4), 227-268.

Ghani, J. A. y Deshpande, S. P. (1994). Task characteristics and the experience of optimal flow in human-computer interaction. *The Journal of Psychology*, *128*(4), 381-391.

Heine, C. A. (1997). *Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Chicago, Illinois, EE. UU.

Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Marbán, J. M. (2016). Matemáticas y dominio afectivo. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 69-74). Málaga: SEIEM.

Montoro, A. B. (2014). *Motivación y matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de maestro de Educación Primaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Almería, Almería.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2012). Elaboración y aplicación de un instrumento para medir experiencias de flujo. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 397- 406). Baeza, Jaén: SEIEM.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2015). Explorando el flujo que experimentan los estudiantes para maestro de primaria al enfrentarse a tareas en grupo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 391-400). Alicante: SEIEM.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2019). Exploring flow in pre-service primary teachers doing measurement tasks. En M. S. Hannula, G. C. Leder, F. Morselli, M. Vollstedt y Q. Zhang (Eds.), *Affect and Mathematics Education: Fresh Perspectives on Motivation, Engagement, and Identity* (pp. 283-308). Cham, Suiza: Springer.

Nakamura, J. (1998). Experiencia óptima y las aplicaciones del talento. En M. Csikszentmihalyi e I. S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 71-90). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Nakamura, J. y Csikszentmihalyi, M. (2002). The concept of flow. En C. R. Snyder y S. J. Lopez (Eds.), *Handbook of Positive Psychology* (pp. 89-105). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Reeve, J. (1994). *Motivación y emoción* (A.M. Lastra. Trad.). Madrid: McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1992).

Rodríguez-Sánchez, A. M., Cifre, E., Salanova, M. y Åborg, C. (2008). Technoflow among Spanish and Swedish students: A Confirmatory Factor Multigroup Analysis. *Anales de Psicología*, *24*(1), 42-48.

Schweinle, A., Meyer, D. K. y Turner, J. C. (2006). Striking the right balance: Students’ motivation and affect in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*, *99*(5), 271-294.

Schweinle, A., Turner, J. C. y Meyer, D. K. (2008). Understanding young adolescents' optimal experiences in academic settings. *The Journal of Experimental Education*, *77*(2), 125-146.

Scutari, M. y Denis, J-B. (2015). *Bayesian Networks: With Examples in R.* Boca Ratón, EE. UU.: CRC Press.

Whalen, S. P. (1997). *Assessing flow experiences in highly able adolescent learners.* Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, EE. UU.

[xxv] Esta investigación es posible gracias a las ideas de Francisco Gil Cuadra, quien nos animó a trabajar en este tópico.

ESTUDIO CUALITATIVO DE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA SOBRE LA MAGNITUD DE LAS FRACCIONES[xxvi]

Qualitative study of primary and secondary school students' reasoning about fraction magnitude

González-Forte, J. M.[a], Fernández, C.[a], Van Hoof, J.[b] y Van Dooren, W.[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]Katholieke Universiteit Leuven

Resumen

Estudios cuantitativos previos han mostrado que los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria tienen dificultades con la magnitud de las fracciones. Estas dificultades han sido atribuidas al uso inapropiado del conocimiento sobre los naturales o al uso de otros razonamientos incorrectos como el pensamiento en diferencias. Sin embargo, la presencia de estudios cualitativos que apoyen estas interpretaciones es escasa. En este estudio entrevistamos a 52 estudiantes de 1º de ESO, pertenecientes a diversos perfiles obtenidos en un estudio cuantitativo previo, con el objetivo de indagar acerca de sus razonamientos y de la confianza que tienen en ellos. Los resultados muestran consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en la entrevista. Además, los estudiantes tenían un alto nivel de confianza en sus razonamientos.

Palabras clave: *fracciones, sesgo del número natural, pensamiento en diferencias, estudio cualitativo, Educación Primaria y Secundaria.*

Abstract

Previous quantitative studies have shown students' difficulties in understanding the magnitude of fractions. This is often explained by the natural number bias or the use of other incorrect reasoning such as gap thinking. However, qualitative studies that support these interpretations are scarce. In the current research, we interview 52 seventh grade students belonging to different profiles obtained in a previous quantitative study. The objective is to examine students' reasoning used in fraction magnitude and students' level of confidence in the reasoning used. Results show a high consistency between the reasoning of the students during the interview and the profile in which they were identified. Furthermore, students had a high level of confidence in their reasoning.

Keywords: *fractions, natural number bias, gap thinking, qualitative study, Primary and Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Investigaciones previas han mostrado que los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, e incluso universitarios, tienen dificultades con algunos aspectos de los números racionales (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Smith, 1995) siendo una de las posibles causas el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se trabaja con los racionales (Moss y Case, 1999; Ni y Zhou, 2005). La tendencia a usar el conocimiento sobre los números naturales en los números racionales se ha denominado sesgo del número natural (*natural number bias*) (Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015).

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2019). Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 363-372). Valladolid: SEIEM.

Centrándonos en la magnitud de los números racionales, frecuentemente los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria usan su conocimiento sobre la ordenación de los números naturales para comparar fracciones, considerando que una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores (por ejemplo, 18/24 es mayor que 12/20 "porque 18 es mayor que 12 y 24 mayor que 20") (Behr et al., 1984; González-Forte, Fernández y Llinares, 2018; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Además, en la comparación de números decimales tienden a creer que el número con más dígitos en la parte decimal es el número mayor, considerando por ejemplo que 0.37 es mayor que 0.6 "porque 37 es mayor que 6" (Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson y Peled, 1989).

Sin embargo, la mayoría de estos estudios son de carácter cuantitativo, en los que han propuesto ítems de comparación de fracciones y números decimales (de elección múltiple) que son congruentes e incongruentes con el conocimiento de los números naturales. Los ítems congruentes son aquellos en los que un conocimiento sobre los naturales permite obtener una respuesta correcta. Por ejemplo, ítems de comparación de fracciones en los que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador mayores (3/5 vs. 8/9), o ítems de comparación de decimales donde el número mayor tiene más dígitos en la parte decimal (0.72 vs. 0.2). Los ítems incongruentes son aquellos en los que el uso del conocimiento sobre los números naturales lleva a una respuesta incorrecta. Por ejemplo, ítems de comparación de fracciones donde la fracción mayor tiene el numerador y denominador menores (2/3 vs. 4/9), o ítems de comparación de decimales donde el número mayor tiene menos dígitos en la parte decimal (0.6 vs. 0.47). Los resultados de estos estudios muestran como estudiantes de primaria y secundaria, e incluso universitarios, resuelven correctamente los ítems congruentes, pero tienen dificultades en los ítems incongruentes (DeWolf y Vosniadou, 2015; Durkin y Rittle-Johnson, 2015; González-Forte et al., 2018; Van Hoof, Lijnen, Verschaffel y Van Dooren, 2013), poniendo de manifiesto, a través de hipótesis, que las dificultades pueden ser debidas al uso del conocimiento de los números naturales para comparar fracciones o números decimales.

Centrándonos en las investigaciones sobre comparación de fracciones, no todas han obtenido resultados en la misma dirección: mayores niveles de éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes. Varios estudios han mostrado que estudiantes de Educación Primaria y Secundaria presentan un alto nivel de éxito en ítems incongruentes y un bajo rendimiento en los congruentes (Gómez y Dartnell, 2019). Este resultado también ha sido obtenido con estudiantes universitarios (Barraza, Avaria y Leiva, 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015). Estos resultados ponen de manifiesto que el uso del conocimiento sobre los naturales quizás no sea la única razón que explique las dificultades de los estudiantes para comparar fracciones; y resaltan la necesidad de tener en cuenta otros posibles razonamientos usados por los estudiantes.

Una posible explicación podría ser el uso de un razonamiento conocido como sesgo inverso (*reverse bias)*, que se basa en la comparación de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor (Fazio, DeWolf y Siegler, 2016; Rinne, Ye y Jordan, 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Este razonamiento, centrado en la idea de que los denominadores más pequeños indican que la cantidad dividida tiene partes más grandes, lleva a los estudiantes a considerar que 2/3 es mayor que 3/5 "porque 3 piezas son más grandes que 5" (Pearn y Stephens, 2004, p. 434). El uso de este razonamiento podría ser la causa por la que algunos estudiantes de primaria y secundaria resuelven correctamente los ítems incongruentes (en los que la fracción mayor tiene numerador y denominador menores), e incorrectamente los ítems congruentes (en los que la fracción mayor tiene numerador y denominador mayores) (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2019). Otra posible explicación a las diferencias encontradas en el nivel de éxito entre ítems incongruentes y congruentes puede ser el empleo del pensamiento en diferencias (*gap thinking)* (Pearn y Stephens, 2004). Esta estrategia se basa en comparar la diferencia (absoluta) entre numerador y denominador en ambas fracciones. En este sentido, una fracción se considera mayor si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor (ej.: 2/3 es mayor que 7/9 "porque de 2 a 3 hay una diferencia de uno y de 7 a 9 hay una diferencia de dos") (Fazio et al., 2016; Pearn y Stephens, 2004; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Los resultados han mostrado que el pensamiento en diferencias parece influir en las diferencias entre los niveles de éxito en los ítems congruentes e incongruentes en estudiantes de Educación Secundaria (González-Forte, Fernández y Van Dooren, 2018) y en universitarios (Gómez, Silva y Dartnell, 2017), pues resolvían correctamente los ítems donde el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta correcta (ej.: 5/7 vs. 2/5, donde la fracción mayor tiene menor diferencia entre numerador y denominador), e incorrectamente los ítems donde el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta incorrecta (ej.: 1/3 vs. 5/8, donde la fracción mayor tiene mayor diferencia entre numerador y denominador).

Nuestro estudio, que es parte de una investigación más amplia llevada a cabo con 1262 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, se centra en esta línea de investigación indagando acerca de los razonamientos que utilizan los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven tareas de comparación de fracciones.

En un estudio cuantitativo previo, estos 1262 estudiantes respondieron a un cuestionario de elección múltiple con 31 ítems de comparación de fracciones y de números decimales, específicamente diseñados para detectar respuestas basadas en el sesgo del número natural, pensamiento en diferencias o sesgo inverso. De esta manera, había ítems congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 5/8 vs. 2/7), ítems incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 2/3 vs. 3/7), ítems donde un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias lleva a la respuesta correcta (ej.: 3/7 vs. 7/9), e ítems donde el pensamiento en diferencias lleva a una respuesta incorrecta (ej.: 5/9 vs. 1/3). Además, el empleo de ítems congruentes e incongruentes con el conocimiento sobre el número natural también permite examinar la presencia del razonamiento de sesgo inverso, pues este razonamiento permite resolver correctamente los ítems incongruentes e incorrectamente los congruentes. En cuanto a los ítems con números decimales, había ítems congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 0.400 vs. 0.25), e ítems incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 0.36 vs. 0.5).

Mediante un análisis *TwoStep Cluster* se determinaron seis perfiles de estudiantes: estudiantes que respondieron a todos (o casi todos) los ítems correctamente (perfil *Correcto*), estudiantes que resolvieron incorrectamente todos los ítems incongruentes, tanto con fracciones como con números decimales, y resolvieron correctamente los ítems congruentes (perfil *Full NNB -estudiantes completamente sesgados por el número natural*), estudiantes que tuvieron dificultades en los ítems incongruentes con fracciones, pero resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes con números decimales (perfil *Fraction NNB -estudiantes sesgados por el número natural en ítems de fracciones*), estudiantes que tuvieron dificultades solo en los ítems en los que el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta incorrecta (perfil *GT*), estudiantes que resolvieron de manera incorrecta los ítems congruentes con fracciones y resolvieron correctamente los incongruentes, y con números decimales resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes (perfil *RB –sesgo inverso*), y estudiantes que resolvieron los ítems sin ningún patrón identificable (*Resto*).

Los perfiles obtenidos, basados en patrones de respuesta ante los ítems, evidencian diferentes formas de resolver los ítems de comparación de números racionales. En cada perfil se deduce implícitamente el razonamiento empleado por los estudiantes, pero no se tienen evidencias cualitativas que lo justifiquen. El objetivo de este estudio es proporcionar evidencias cualitativas (validar) de los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo analizando la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en una entrevista. Además, también estamos interesados en examinar el grado de confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento, con el fin de identificar en qué medida los razonamientos incorrectos son estables. Según Fischbein (1987), los conocimientos intuitivos de los estudiantes tienen un carácter obvio y evidente, creando una gran confianza en su uso y persistiendo a lo largo del aprendizaje. De este modo, examinar el grado de confianza en las respuestas de los estudiantes nos permitirá conocer el nivel de consolidación y arraigo que tiene cada uno de los razonamientos incorrectos en los estudiantes, y las posibles razones de su desconfianza.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 52 estudiantes de 1º de ESO: 15 estudiantes del perfil *Correcto*, 14 estudiantes del perfil *GT*, 15 estudiantes de los perfiles *Full NNB y Fraction NNB* (en conjunto, perfil *NNB*), y 8 estudiantes del perfil *RB*. Las entrevistas se realizaron de manera individual y fueron grabadas en vídeo, tras previo consentimiento de los padres. No hubo tiempo límite, y en ellas el estudiante podía realizar todo tipo de cálculos, anotaciones y dibujos que considerase oportunos. Tuvieron una duración aproximada de entre 10 y 15 minutos.

La entrevista se dividió en dos fases. En la Fase 1, el investigador mostraba al estudiante cuatro respuestas suyas a cuatro ítems de comparación de fracciones del cuestionario que había resuelto previamente. El estudiante, tras observar su respuesta, debía de explicar cómo había obtenido la fracción mayor. Los ítems usados para la entrevista fueron: 2/3 vs. 7/9, 4/7 vs. 1/3, 4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7. Los ítems 2/3 vs. 7/9 y 4/7 vs. 1/3 son congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural, e incongruentes con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias o de sesgo inverso. En cambio, los ítems 4/5 vs. 5/8 y 2/3 vs. 3/7 son congruentes con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso, e incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural. De este modo, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los incongruentes en el cuestionario (perfil *NNB)*, razonen basándose en el conocimiento sobre el número natural, considerando que la fracción mayor es aquella con numerador y denominador mayores. En el caso de los estudiantes que respondieron de forma correcta los ítems donde un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias lleva a la respuesta correcta e incorrectamente los ítems donde el pensamiento en diferencias lleva a una respuesta incorrecta (perfil *GT*), se espera que en la entrevista razonen basándose en la diferencia entre numerador y denominador, considerando que la fracción mayor es aquella con menor diferencia entre ambos. Por último, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems incongruentes (donde el razonamiento de sesgo inverso lleva a la respuesta correcta) e incorrectamente los ítems congruentes (donde el razonamiento de sesgo inverso lleva a la respuesta incorrecta) (perfil *RB*), razonen basándose en el tamaño de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor. Además, en esta fase, con el fin de conocer el grado de confianza de cada estudiante en su razonamiento, el estudiante tenía que decir cuánta seguridad tenía de que su respuesta fuera correcta. Para ello, debían de elegir una respuesta de la siguiente escala: (1) Dudo bastante, (2) Dudo, (3) Casi seguro, y (4) Muy seguro.

En la Fase 2, se les proporcionó dos ítems con tres respuestas ficticias, dadas en el mismo formato que los ítems del cuestionario. De este modo, los estudiantes podían considerar que se trataba de respuestas reales de otros compañeros. Se mostró el ítem 1/3 vs. 5/8, que es congruente con un razonamiento basado en el sesgo del número natural, e incongruente con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso; y el ítem 4/7 vs. 3/4, que es congruente con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso, e incongruente con un razonamiento basado en el sesgo del número natural. Las respuestas ficticias proporcionadas incluían la elección de la fracción mayor y el razonamiento escrito del estudiante en cada caso, por lo que se incluyeron los razonamientos basados en el sesgo del número natural, pensamiento en diferencias y de sesgo inverso (Tabla 1). Los estudiantes tenían que indicar y justificar con cuáles de ellas estaban de acuerdo y explicar por qué no estaban de acuerdo con las otras.

Tabla 1. Respuestas ficticias de estudiantes mostradas en la Fase 2

Ítem	Respuesta
1/3 vs. 5/8	**Pere** (Pensamiento en diferencias): Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. **Marta** (Sesgo del número natural): Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. **Andrés** (Sesgo inverso): Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor.
4/7 vs. 3/4	**María** (Pensamiento en diferencias): Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. **Roberto** (Sesgo del número natural): Es 4/7 porque 4 es más grande que 3 y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. **Alicia** (Sesgo inverso): Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor.

Análisis

El análisis se realizó en dos fases. En primer lugar, se analizó el razonamiento usado por los estudiantes durante las dos fases de la entrevista, para conocer la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado en la entrevista. Este análisis nos permite identificar formas de razonar que usan los estudiantes cuando comparan fracciones y, por tanto, evidenciar cualitativamente los resultados del estudio cuantitativo. En segundo lugar, se analizaron los niveles de confianza. Con las puntaciones obtenidas en la escala de confianza [1-4] se calcularon las puntaciones medias en cada uno de los perfiles (calculando porcentajes sobre 10).

RESULTADOS

El análisis cualitativo apoya (valida) los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo, ya que la mayoría de los estudiantes entrevistados de cada perfil usaron razonamientos en las entrevistas consistentes con las respuestas que habían dado en el cuestionario. A continuación, se muestran ejemplos de razonamientos de estudiantes pertenecientes a cada uno de los perfiles entrevistados.

Trece de 15 estudiantes del perfil *Correcto* fueron consistentes con su razonamiento en el estudio cuantitativo. Es decir, estos estudiantes utilizaron un razonamiento correcto en la Fase 1 y no eligieron como correcta ninguna de las respuestas de estudiantes proporcionadas en la Fase 2. Las Tablas 2 y 3 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P196) en ambas fases. En ambas tablas se observa cómo este estudiante usa un razonamiento correcto.

Tabla 2. Respuestas del estudiante P196 del perfil *Correcto* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	7/9 es mayor porque 2/3 es dos terceras partes y 7/9 supera las dos terceras partes, que serían 6/9
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque 4/5 supera mucho la mitad y 5/8 muy poco. Utilizo la mitad para comparar
4/7 vs. 1/3	4/7 es mayor porque 1/3 es menos que la mitad y 4/7 es más que la mitad
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque 2/3 es más que la mitad y 3/7 es menos que la mitad

Tabla 3. Respuestas del estudiante P196 del perfil *Correcto* durante la Fase 2

Ítem	Respuesta	Razonamiento	
1/3 vs. 5/8	Ninguno	Pere	No tiene por qué… Cada trozo que sobra tiene un tamaño
		Marta	Yo no usaría esta estrategia. Si en vez de 1/3 fuera 2/3, no valdría. Es una estrategia que sirve solamente para algunas fracciones
		Andrés	Esta es incorrecta. No hay que tener en cuenta solo el denominador, sino también el numerador
4/7 vs. 3/4	Ninguno	María	Esta estrategia es incorrecta. Yo no le diría a nadie que se fijara en lo que le queda al numerador para llegar al denominador
		Roberto	Es incorrecta. Es posible que una fracción tenga numerador y denominador bajos, y la fracción sea mayor
		Alicia	Es incorrecta. Porque puede ser 1/4 y 4/7 y seguiría siendo mayor 4/7. Es una estrategia que no siempre sirve

Nueve de 14 estudiantes del perfil *GT* permanecieron consistentes con su razonamiento. Estos estudiantes utilizaron un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias en la Fase 1 y eligieron la respuesta de Pere y María en la Fase 2. Por lo tanto, siempre consideraron que la fracción mayor era aquella con la menor diferencia entre el numerador y el denominador. Las tablas 4 y 5 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P079) en ambas fases. Se observa cómo usan un pensamiento en diferencias.

Tabla 4. Respuestas del estudiante P079 del perfil *GT* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	2/3 es mayor porque a 2/3 le quedaría 1 y a 7/9 le quedaría 2. Me basé en la distancia para marcar la fracción mayor
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque de 4 a 5 va 1, y de 5 a 8 va 3. Como en 4/5 hay menos distancia, esa es la fracción mayor
4/7 vs. 1/3	1/3 es mayor porque en 1/3 hay 2 y en 4/7 hay 3. Como hay menos en 1/3, esa es la fracción mayor
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque de 2 a 3 sólo hay 1, y en cambio de 3 a 7 hay 4. Es decir, a 2/3 le quedaría 1, y a 3/7 le quedaría 4. Cuanto menos quede, mayor es la fracción

Tabla 5. Respuestas del estudiante P079 del perfil *GT* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Pere	Estoy de acuerdo con Pere porque yo también habría marcado 1/3, ya que la distancia es menor que en 5/8
4/7 vs. 3/4	María	Marta dice lo mismo que he dicho yo. Cuanta menos distancia haya entre los números, mayor es la fracción

*El estudiante P079 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Pere y María.

Once de 15 estudiantes del perfil *NNB* fueron consistentes con su razonamiento. Es decir, estos estudiantes también se basaron en el orden de los números naturales para comparar las fracciones en la Fase 1 y eligieron la respuesta de Marta y Roberto en la Fase 2. Siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con un numerador y denominador mayores. Las tablas 6 y 7 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P074) en ambas fases. Se observa cómo sigue un razonamiento basado en el sesgo del número natural.

Tabla 6. Respuestas del estudiante P074 del perfil *NNB* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	7/9 es mayor porque el 7 y 9 son números mayores. Me guío por los números, por el numerador y el denominador
4/5 vs. 5/8	5/8 es mayor porque el 5 y el 8 son números mayores que los otros. Siempre comparo los números
4/7 vs. 1/3	4/7 es mayor porque mi criterio es que, si el numerador y el denominador son números mayores, la fracción es mayor. Entonces, cuanto mayor sea el numerador y el denominador, mayor es la fracción
2/3 vs. 3/7	3/7 es mayor porque el 3 y el 7 son números mayores

Tabla 7. Respuestas del estudiante P074 del perfil *NNB* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Marta	Este razonamiento es el que yo he hecho. Estaría de acuerdo con Marta. 5/8 es mayor porque los números son mayores
4/7 vs. 3/4	Roberto	Estaría de acuerdo con Roberto porque que lo que yo creo. La fracción mayor es la que tiene números mayores. Por ejemplo, si en vez de 4/7 fuera 7/4 también sería mayor, porque los números son mayores. Si tuviera que decir una fracción mayor que 4/7 diría 5/7, o 5/8. Porque el 5 es mayor que el 4 y el 8 es mayor que el 7

*El estudiante P074 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Marta y Roberto.

Seis de 8 estudiantes del perfil *RB* también fueron consistentes con su razonamiento en el estudio cualitativo. Estos estudiantes se basaron en el razonamiento de sesgo inverso en la Fase 1 y eligieron las respuestas de Andrés y Alicia en la Fase 2. Estos estudiantes siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con el denominador menor. Las tablas 8 y 9 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P022) en ambas fases. Se observa cómo sigue un razonamiento de sesgo inverso.

Tabla 8. Respuestas del estudiante P022 del perfil *RB* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	2/3 es mayor porque el 3 es más pequeño que el 9
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque el 5 es más pequeño que el 8
4/7 vs. 1/3	1/3 es mayor porque me fijo en el denominador, es decir, en el 3 y en el 7. Como el 3 es más pequeño que el 7, marco 1/3. Es decir, si el denominador es más pequeño que el otro, marco la fracción que tenga el denominador más pequeño.
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque me fijo en el denominador. Miro si el denominador es mayor o menor. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor. Es decir, como en 2/3 el denominador es más pequeño que en 3/7, la fracción es mayor

Tabla 9. Respuestas del estudiante P022 del perfil *RB* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Andrés	Esta es la misma que he dicho yo. Es como pienso yo. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor
4/7 vs. 3/4	Alicia	Esta es la que he hecho yo. Cuanto más pequeño sea el numerador, mayor será la fracción. Yo creo que esta estaría bien

*El estudiante P022 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Andrés y Alicia.

Los estudiantes que fueron inconsistentes con su razonamiento durante la entrevista respondieron en una de las dos fases de la misma manera que su perfil, pero en la otra fase cambiaron su forma de razonar, o respondieron ambas fases de la entrevista con un razonamiento diferente al de su perfil.

La Tabla 10 muestra el porcentaje de confianza de cada perfil en los cuatro ítems. Únicamente se tuvieron en cuenta las puntaciones de los estudiantes que fueron consistentes con su razonamiento durante las entrevistas (es decir, aquellos estudiantes que razonaron en la entrevista del mismo modo que el perfil en el que estaban incluidos). Esta tabla muestra que los estudiantes del perfil *Correcto*, quienes resolvieron correctamente tanto el cuestionario como la entrevista, tienen más confianza en sus razonamientos que los estudiantes del resto de los perfiles. Sin embargo, los porcentajes de confianza de los perfiles *GT*, *NNB* y *RB* también muestran una alta seguridad de estos estudiantes en su razonamiento, puesto que están alrededor de un 80%. De este modo, pese a tratarse de estudiantes que emplean razonamientos incorrectos, una alta confianza en sus razonamientos indica que, para ellos, el razonamiento empleado es totalmente válido.

Tabla 10. Porcentaje de confianza de los perfiles en cada ítem.

	2/3 vs. 7/9	4/5 vs. 5/8	4/7 vs. 1/3	2/3 vs. 3/7
Correcto	94.3	94.3	100	98.0
GT	86.0	83.3	80.5	83.3
NNB	79.6	77.3	81.8	77.3
RB	75.0	75.0	75.0	79.3

Analizando el nivel de confianza de los perfiles que se basan en razonamientos incorrectos, se observa como el perfil *GT* es el perfil con mayor confianza en su razonamiento. Es decir, tienen más confianza en que su estrategia (pensamiento en diferencias) es correcta, que los estudiantes de los perfiles *NNB* y *RB* con sus respectivas estrategias (sesgo del número natural y sesgo inverso).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La presente investigación tiene como objetivo proporcionar evidencias cualitativas (validar) de los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo analizando la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en una entrevista. Además, se examina el grado de confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento, con el fin de identificar en qué medida los razonamientos incorrectos son estables.

Los resultados nos han permitido dar evidencias que sustentan la existencia de diferentes formas de razonar acerca de la magnitud de una fracción, particularmente en el contexto de la comparación de fracciones. De esta manera, apoyan la existencia de tres formas incorrectas de razonar sobre la magnitud de la fracción en tareas de comparación de fracciones: razonamiento basado en el uso del conocimiento del número natural “una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores” (sesgo del número natural) (Behr et al., 1984; Stafylidou y Vosniadou, 2004), razonamiento basado en la diferencia entre numerador y denominador “una fracción es mayor si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor” (pensamiento en diferencias) (Pearn y Stephens, 2004; Stafylidou y Vosniadou, 2004), y razonamiento basado en el tamaño del denominador “la fracción mayor es aquella con el denominador menor” (sesgo inverso) (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Estos datos cualitativos proporcionan evidencias a las hipótesis obtenidas en nuestro estudio cuantitativo previo y en otras investigaciones cuantitativas previas, en las que hubo un alto nivel de éxito en ítems incongruentes (con el conocimiento del número natural) y un bajo rendimiento en ítems congruentes (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2019). Además, los resultados muestran persistencia en el empleo del razonamiento, ya que durante la última parte de la entrevista se les mostraron varios tipos de razonamientos incorrectos, pero la mayoría fueron consistentes con la elección de la misma forma de razonar que habían empleado tanto en el cuestionario como en la primera fase de la entrevista. Por otra parte, hubo estudiantes que fueron inconsistentes, es decir, cambiaron su forma de razonar del cuestionario a la entrevista. La mayoría de estos estudiantes cambiaron su forma de razonar durante la Fase 2, en la que dudaron de su forma de razonar cuando se les mostró otras respuestas de estudiantes. Además, las entrevistas se llevaron a cabo dos meses después de la realización del cuestionario, por lo que los estudiantes pudieron modificar su forma de razonar durante este tiempo.

En cuanto al nivel de confianza en los razonamientos de cada uno de los perfiles, los resultados muestran como el perfil *Correcto*, que aplica razonamientos correctos, muestra un alto nivel de confianza. Sin embargo, pese a que los porcentajes de los tres perfiles que emplean formas de razonar incorrectas (*GT, NNB* y *RB*) son menores que los del perfil *Correcto*, éstos se encuentran entre el 75% y el 85%, por lo que tienen altos índices de confianza en su razonamiento, incluso en ítems en los que les llevaba a la respuesta equivocada. Este resultado nos lleva a considerar que los estudiantes no solo usan un razonamiento incorrecto cuando comparan fracciones, sino que tienen un alto grado de confianza en su razonamiento incorrecto. Por lo tanto, parece que son razonamientos consolidados y difíciles de cambiar durante el aprendizaje (Fischbein, 1987).

Referencias

Barraza, P., Avaria, R. y Leiva, I. (2017). The role of attentional networks in the access to the numerical magnitude of fractions in adults/El rol de las redes atencionales en el acceso a la magnitud numérica de fracciones en adultos. *Estudios de Psicología*, *38*(2), 495-522.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post T. R. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323-341.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29.

Fazio, L. K., DeWolf, M. y Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *42*(1), 1-16.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233-1250.

Gómez, D. M., Silva, E. y Dartnell, P. (2017). Mind the gap: congruency and gap effects in engineering students' fraction comparison. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol.* 2 (pp. 353-360). Singapur: PME.

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Van Dooren, W. (2018). Gap and congruency effect in fraction comparison. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 2* (pp. 459-466). Umeå, Suecia: PME.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Pearn, C. y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430-437). Sydney, Australia: MERGA.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Rinne, L. F., Ye, A. y Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, *53*(4), 713-730.

Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, *13*(1), 3-50.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, *15*(2), 154-164.

[xxvi] Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (UAFPU2018-035).

IDENTIFICANDO CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CUANDO DEFINEN[xxvii]

Identifying commognitive conflicts in the discourse of university students when defining

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

En este estudio, avanzamos en nuestra investigación sobre la práctica de definir entre estudiantes universitarios. Para ello, adoptamos como marco teórico un marco sociocultural: la teoría de la comognición de Sfard (2008). Dicho marco considera las matemáticas como un tipo particular de discurso, luego este último se convierte en el principal objeto de estudio. Para acceder al discurso de los estudiantes cuando definen, grabamos sus discusiones mientras respondían a una serie de preguntas abiertas sobre la descripción y definición de cuerpos geométricos. También les pedimos que escribiesen sus respuestas consensuadas. Todo este discurso lo analizamos en busca de posibles conflictos comognitivos, que en ocasiones suponen oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Aquí presentamos tres de los conflictos identificados, que aportan información sobre la práctica de definir.

Palabras clave: *conflicto comognitivo, discurso, estudiantes universitarios, práctica matemática de definir.*

Abstract

In this study, we continue our research on the practice of defining of university students. With this aim, we adopt as theoretical framework a sociocultural one: Sfard's (2008) theory of commognition. This framework considers mathematics as a particular type of discourse, thus this discourse becomes the main object of study. In order to access the students' discourse when defining, we recorded their discussions while answering a series of open questions about the description and definition of solids. We also asked them to write down their agreed upon answers. We analysed the discourse in search of possible commognitive conflicts, which sometimes become a source of learning opportunities for students. We present here three of the identified commognitive conflicts, which provide information about the practice of defining.

Keywords: *commognitive conflict, discourse, university students, mathematical practice of defining.*

INTRODUCCIÓN

La investigación vinculada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario ha experimentado un gran auge en los últimos años (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz y Rasmussen, 2016; Nardi, Biza, González-Martín, Gueudet y Winsløw, 2014). Entre los focos de interés en esta área de investigación podemos señalar los estudios sobre prácticas matemáticas (por ejemplo, definir, modelar, conjeturar y probar). En este trabajo entendemos las prácticas matemáticas como aquellas que desarrollan los matemáticos cuando construyen conocimiento matemático.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Identificando conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes universitarios cuando definen. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 373-382). Valladolid: SEIEM.

La importancia de la práctica de definir ha sido resaltada por distintos autores (entre otros, De Villiers, 1998; Freudenthal, 1973; Ouvrier-Buffet, 2006, 2011). Específicamente, Tall (1991) destaca la importancia del proceso de definir en la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado (*advanced mathematical thinking,* en el original), señalando que existe un cambio significativo entre describir y definir.

Una manera de estudiar la práctica de definir, al igual que el resto de las prácticas matemáticas, es usando un marco sociocultural. En este sentido, Planas (2010) sostiene que "los enfoques socioculturales en educación matemática toman el conocimiento matemático como construcción social y centran su atención en el análisis de los procesos por los cuales esta construcción social se produce" (p. 167). Entre los diferentes marcos socioculturales adoptaremos la teoría de la comognición (Sfard, 2008), que considera el discurso como foco principal de estudio. Esta teoría ha sido utilizada por diversos autores, mostrando su eficacia en la investigación en educación matemática en diferentes niveles educativos y, en particular, a nivel universitario (Nardi, Ryve, Stadler y Viirman, 2014; Viirman y Nardi, 2017, 2019).

La teoría de la comognición está siendo utilizada por distintos investigadores para el estudio de la práctica matemática de definir. Por ejemplo, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) caracterizan el discurso matemático sobre el proceso de definir en estudiantes de enseñanzas no obligatorias; Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2018) identifican rutinas de estudiantes universitarios cuando definen, y Schüler-Meyer (2018) estudia cómo estudiantes de secundaria construyen la definición de sucesión convergente.

En la teoría de la comognición, está ganando mucho protagonismo el estudio de los conflictos comognitivos. En esta línea, Sánchez y García (2014) estudian los conflictos comognitivos entre normas que surgen cuando estudiantes universitarios definen, como un paso previo necesario para la identificación de cambios en el discurso. Por otra parte, Jayakody (2015) identifica distintos conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes universitarios sobre funciones continuas y Thoma y Nardi (2018) identifican diferentes conflictos comognitivos a partir de pruebas escritas de estudiantes universitarios y de entrevistas con su profesor.

En este estudio pretendemos avanzar en el estudio de la práctica de definir de estudiantes universitarios mediante la identificación de conflictos comognitivos, ya que en muchas ocasiones estos suponen oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Nuestro foco de atención en este estudio es la práctica matemática de definir, que entendemos como un proceso que consta de varias etapas (Martín-Molina et al., 2018). La primera de ellas consiste en describir el objeto a definir, la segunda en formular una o varias definiciones preliminares de ese objeto y la última en seleccionar la definición que se considera "mejor" de todas las construidas. Esta definición seleccionada se convertirá en la definición "formal" del objeto.

Al igual que Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005), consideramos que las prácticas matemáticas de definir, probar, modelar, etc., son actividades sociales y culturales. Por tanto, adoptaremos para este estudio un marco sociocultural: la teoría de la comognición de Sfard (2008). El término comognición viene de la consideración conjunta de los términos comunicación y cognición en inglés. Para esta autora, no hay diferencia entre pensar y comunicar, pues ella sostiene que pensar es comunicarse con uno mismo. Además, en esta teoría las matemáticas son consideradas como un tipo particular de discurso, que se convierte en el objeto de estudio. Dicho discurso se caracteriza a través de cuatro propiedades: uso de palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas.

La primera propiedad de Sfard (2008), uso de palabras, se refiere tanto al uso de palabras matemáticas (como, por ejemplo, rectángulo, ángulo, prisma, etc.) como al uso de palabras coloquiales con significado matemático (como, por ejemplo, tumbado con el significado de oblicuo). La segunda propiedad, mediadores visuales, hace alusión a los objetos visibles que los participantes utilizan como parte de su comunicación (un gráfico de una función o una fórmula matemática, entre otros). Las narrativas son expresiones, habladas o escritas, sobre los objetos, relaciones entre objetos o actividades con o de los objetos. Estas narrativas están sujetas a aceptación o rechazo por parte de los participantes y, en caso de ser aceptadas por la comunidad, se denominan narrativas asumidas (por ejemplo, las definiciones matemáticas o los teoremas). Por último, las rutinas son patrones repetitivos en el discurso de los participantes, que pueden ser inferidas mediante la detección de regularidades en cualquiera de las otras tres propiedades (por ejemplo, en cómo se realizan los cálculos o cómo se definen los objetos). En un trabajo reciente sobre las rutinas, Lavie, Steiner y Sfard (2019) proponen tener en cuenta no solo el cómo y cuándo se realiza una actividad, sino también cómo el que hace la actividad la interpreta y cuáles son sus experiencias previas.

Además, Sfard (2008) distingue dos tipos de reglas que regulan la comunicación humana: reglas a nivel objeto y meta-reglas. Las reglas a nivel objeto son narrativas que hablan sobre el comportamiento regular de los objetos (por ejemplo, “la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360 grados”) y las meta-reglas son reglas que definen patrones de actividad de los participantes en el discurso cuando estos tratan de producir y justificar narrativas a nivel objeto (por ejemplo, la forma de demostrar la narrativa del ejemplo anterior sobre cuadriláteros podría ser “la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360 grados porque el cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos”).

Por otro lado, en la teoría de la comognición, el aprendizaje se considera un cambio en el discurso de los participantes, que puede ser detectado a partir de un cambio en una o más de las cuatro propiedades del discurso anteriormente mencionadas. Este aprendizaje puede surgir a partir de la resolución de un conflicto comognitivo que, para Sfard (2008), es una situación en la que diferentes participantes usan las mismas palabras o símbolos escritos con diferente significado o actúan regidos por distintas meta-reglas.

En esta investigación, estudiamos el discurso de los estudiantes universitarios cuando definen cuerpos geométricos. Concretamente, identificamos las cuatro propiedades del discurso y sus meta-reglas, con el objetivo de localizar posibles conflictos comognitivos. La resolución de estos conflictos, que no abordamos en esta comunicación, podría conllevar un aprendizaje para estos estudiantes.

METODOLOGÍA

En esta sección, presentamos la metodología que hemos adoptado en este estudio para alcanzar nuestro objetivo. En primer lugar, describimos los participantes y el contexto de esta investigación. Seguidamente, se presentan las principales características del instrumento de investigación y, finalmente, se describen los procesos de recogida y análisis de datos.

Participantes y contexto

En este estudio participaron estudiantes para maestro de Educación Primaria (la mayoría de 18-19 años) que estaban matriculados en una asignatura de contenido matemático del primer curso del grado. Los estudiantes de esta asignatura recibían dos horas de docencia de contenido teórico a la semana y una hora de contenido práctico. Dentro de cada clase práctica, los estudiantes se organizaban en grupos de tres a cinco estudiantes para tratar de resolver un problema de matemáticas que el docente les planteaba al inicio de la clase. En una de las clases prácticas, se les presentó a los estudiantes el instrumento de investigación y se les invitó a participar en el estudio. Fueron 45 estudiantes los que decidieron voluntariamente participar en este estudio. Dichos estudiantes estaban distribuidos en 12 grupos de trabajo (aquí llamados G1, G2, …, G12).

Instrumento de investigación

En la teoría de la comognición, el discurso se considera el objeto de estudio. Por este motivo, el instrumento de investigación fue diseñado para promover la aparición del discurso de los estudiantes cuando construyen y seleccionan definiciones de cuerpos geométricos. En concreto, este instrumento consta de dos partes diferenciadas. La primera parte trata de recoger información acerca de cómo los estudiantes describen y definen cuerpos geométricos. La segunda parte pone el foco en estudiar cómo los estudiantes seleccionan una definición entre varias disponibles. El estudio que aquí presentamos se centra en los resultados que se derivan del análisis de los datos relativos a la primera parte del instrumento. En esta parte del instrumento aparece una imagen (ver Figura 1) con tres poliedros diseñados con el software dinámico GeoGebra: un cubo; un prisma cuadrangular, oblicuo y convexo; y un prisma cuadrangular, oblicuo y cóncavo. Estos cuerpos geométricos fueron elegidos porque existen algunas propiedades que los tres cuerpos comparten (por ejemplo, los tres poliedros son prismas cuadrangulares) y porque cada uno de los cuerpos se diferencia de los otros por alguna propiedad (por ejemplo, el cubo es regular y los otros no). Tras esta imagen, aparecen nueve preguntas abiertas que tratan de promover la aparición del discurso de los estudiantes cuando describen estos cuerpos geométricos y los definen. En concreto, las cuatro primeras preguntas están relacionadas con la descripción de los cuerpos geométricos y la identificación de similitudes y diferencias entre los mismos. Las otras cinco preguntas tratan de obtener información sobre cómo los estudiantes construyen definiciones de dichos cuerpos geométricos y cómo reflexionan sobre estas definiciones. Algunas de estas preguntas son:

- Pregunta 1. En los 3 cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- Pregunta 2. De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Pregunta 5. Definid cada uno de los cuerpos.
- Pregunta 7. ¿Podría servir alguna de las definiciones de los cuerpos que habéis dado para otro de los cuerpos? ¿Por qué? (Por ejemplo, la definición del cuerpo 1 para el cuerpo 2 o el 3).

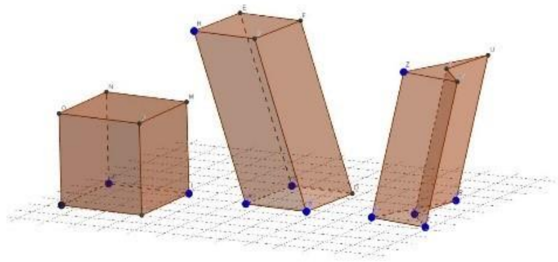


Figura 1. Representación de los cuerpos geométricos del instrumento (Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Fernández-León, 2019)

Recogida de datos

La recogida de datos se puso en marcha en las clases prácticas de la asignatura cuando se entregó el instrumento de investigación a los asistentes a dichas clases que quisieron participar voluntariamente en la investigación. En concreto, se entregó una copia en papel del instrumento a cada uno de los 12 grupos de estudiantes voluntarios. A algunos grupos se les ofreció un portátil que tenía abierto el programa GeoGebra con los cuerpos geométricos del instrumento construidos. Cada grupo tenía una grabadora de audio que iba recogiendo el discurso de los miembros del grupo cuando trataban de contestar a las preguntas del instrumento. Además, cada grupo debía escribir en su copia del instrumento de investigación la respuesta consensuada a cada una de las preguntas. Es importante resaltar que la recogida de datos de este estudio se produjo cuando los estudiantes ya habían recibido instrucción sobre geometría en el plano en la asignatura de matemáticas que estaban cursando, pero no sobre geometría en el espacio.

Los datos usados en este trabajo son las grabaciones en audio de los 12 grupos y las transcripciones de esas grabaciones (que nos permiten acceder al discurso de los estudiantes) y las respuestas escritas de cada grupo (que nos permiten acceder al consenso del grupo en cada pregunta).

Análisis

El proceso de análisis de los datos se ha llevado a cabo en dos fases. En la primera fase, se identificaron en las transcripciones y en las respuestas escritas de cada grupo las cuatro propiedades y las meta-reglas del discurso (Sfard, 2008). Fruto de esta primera fase surgieron los trabajos de González-Regaña, Martín-Molina, Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2017) y Gavilán-Izquierdo et al. (2019), en los que puede encontrarse un estudio detallado sobre el uso de palabras y narrativas de estos estudiantes; y el trabajo de Martín-Molina et al. (2018), donde se describen y clasifican las rutinas que caracterizan el proceso de definir de los estudiantes.

En la segunda fase del análisis, se identificaron los conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes. Para identificar estos conflictos, nos basamos en las cuatro propiedades del discurso previamente estudiadas. En concreto, una vez que fueron identificadas y categorizadas cada una de estas propiedades, se localizaron partes del discurso donde las interacciones entre los participantes mostraban discrepancias en el uso de palabras o entre las narrativas, mediadores visuales, rutinas o reglas. Estas discrepancias en el discurso fueron analizadas para determinar qué estaba provocando dicho conflicto.

RESULTADOS

En el análisis del discurso de los estudiantes hemos podido identificar diferentes conflictos comognitivos. En este trabajo vamos a presentar tres de ellos. El primero está vinculado a las distintas formas que tienen los estudiantes de entender el proceso de definir, que en algunos casos refleja una confusión entre definir y describir. El segundo de los conflictos comognitivos es el relativo al choque entre el discurso matemático propio de la geometría plana (2D) que tienen algunos estudiantes con el de la geometría tridimensional (3D) que tienen otros. El tercer conflicto tiene relación con la medición de una superficie y surge cuando una estudiante quiere medir el área de una superficie usando una unidad de medida arbitraria (un “cuadrito”), que otra estudiante no acepta como unidad.

A continuación, pasamos a explicar con más detalle cada uno de estos conflictos comognitivos. Para ello, como evidencia empírica, mostramos algunos protocolos que, junto a otros, nos han permitido identificarlos.

El primer conflicto comognitivo que aquí presentamos muestra el choque que se produce entre las rutinas usadas por los estudiantes cuando, en la pregunta 5 del instrumento de investigación, se les pide que definan cada uno de los cuerpos geométricos. Este choque se observa mediante las narrativas en las que algunos estudiantes afirman que la definición es la respuesta que dieron en la pregunta 1, donde se les pedía que describiesen los elementos de los cuerpos geométricos; mientras otros estudiantes sostienen que la definición es diferente de una mera descripción porque debe incluir tanto una etiqueta como una lista de características; y cuando otros estudiantes consideran que definir es dar tan solo una etiqueta.

Un ejemplo de este primer conflicto comognitivo podemos encontrarlo en el discurso de los estudiantes del grupo G7. En respuesta a la pregunta 5, en la que se les pide que definan cada uno de los cuerpos geométricos, dicen lo siguiente respecto al primer cuerpo:

206. E1: Si hablamos de prismas, es un prisma hexagonal, pero…

207. E4: Ya la hemos definido antes, en…

208. E3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.

209. E4: Eah, las características. Claro, que es un cubo con estas características…

Aquí se observa que el estudiante E4 considera que ya han definido el cuerpo en las preguntas anteriores acerca de la descripción. Por otro lado, otros estudiantes no usan esta misma rutina, lo que expresan mediante la siguiente narrativa:

213. E2: El nombre y… las características… es la definición.

Esta afirmación genera una discusión que da como resultado que el grupo dé la siguiente definición consensuada del primer cuerpo en sus respuestas escritas:

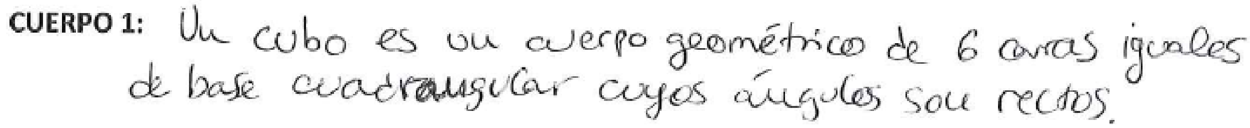

CUERPO 1: Un cubo es un cuerpo geométrico de 6 caras iguales de base cuadrangular cuyos ángulos son rectos.

Figura 2. Respuesta escrita del grupo G7 a la pregunta 5

Por último, nos gustaría resaltar que este grupo deja en blanco la siguiente pregunta del instrumento (pregunta 6), en la cual se les pide a los estudiantes que den otra definición para cada uno de los tres cuerpos geométricos.

El segundo conflicto comognitivo que presentamos en este trabajo muestra un choque entre el discurso matemático que tienen los estudiantes que se mueven en un contexto puramente bidimensional y el que tienen aquellos estudiantes que son capaces de manejar un discurso propio de la geometría tridimensional. Concretamente, hemos observado que algunos estudiantes son capaces de utilizar meta-reglas propias del discurso tridimensional para justificar diferentes narrativas relativas a propiedades geométricas de los cuerpos y otros estudiantes no son capaces de utilizarlas.

Un ejemplo de este segundo conflicto podemos encontrarlo en el discurso del grupo G5 (que disponía de portátil con GeoGebra) cuando sus estudiantes debaten sobre las características de las caras de los cuerpos geométricos que van a incluir en la definición de los mismos. En concreto, el siguiente protocolo del grupo G5 muestra parte de la discusión de este grupo cuando sus estudiantes tratan de justificar si las bases del segundo cuerpo geométrico son o no cuadradas. Aunque los estudiantes del grupo G5 no son los mismos que los del grupo G7 del ejemplo anterior, utilizaremos los mismos nombres, E1, E2, E3 y E4, para denominarlos.

420. E3: Sí es cuadrado. Es un cuadrado.

421. E1: Aquí no.

422. E3: Está coincidiendo ahora mismo la base con lo de abajo.

423. E1: Pero es que ahora mismo no lo tienes puesto los vértices para tú poder comprobarlo.

424. E3: Está uno encima del otro.

425. E1: Pero tienes que tener, para tú poder verlo, tienes que tener los vértices perpendiculares. Si no, no lo estás teniendo objetivo.

426. E4: Ahí lo estás teniendo perpendiculares.

427. E1: No.

428. E3: Espérate.

429. E1: Tienes que tener los ejes así, como los teníamos antes. Es cuando lo vas a ver. Si no, no lo puedes ver. […]

[…]

437. E1: Espérate. Caras iguales… ¿Todas ellas rectangulares, no?

438. E4: Sí.

439. E3: Mira, podemos saber pa[ra] ver si de verdad son…

440. E4: Yo veo que acierta según la perspectiva porque yo, por ejemplo… también las hemos visto antes como cuadrados.

441. E3: Se ve ahora mismo si son…

442. E4: Perpendicular a la base. Son rectangulares, sí.

443. E3: Son rectángulos.

444. E4: Sí, son todos rectángulos, entonces sí.

Finalmente, el grupo G5 escribe en la copia del instrumento la siguiente definición consensuada del segundo cuerpo geométrico, que es una mera descripción de características del cuerpo geométrico:


Caras iguales dos a dos.
Todas ellas rectangulares
El ángulo que forma la base con las caras perpendiculares no forma
90° ya que está inclinado

Figura 3. Respuesta escrita del grupo G5 a la pregunta 6

En la línea 420 del protocolo anterior, la estudiante E3 sostiene que las bases del segundo cuerpo geométrico son cuadradas. Seguidamente, la estudiante E1 niega esa afirmación, lo que genera un debate en el que las estudiantes intentan justificar estos dos diferentes puntos de vista. Este debate pone de manifiesto un conflicto comognitivo entre el discurso de la estudiante E1 y el de la estudiante E3. Aunque en este debate todas las estudiantes construyen sus argumentos haciendo referencia a cómo o desde qué posición están mirando el segundo cuerpo geométrico, no todas lo hacen utilizando las mismas herramientas. En concreto, la estudiante E1 utiliza la posición de los ejes de coordenadas con respecto a las aristas del segundo cuerpo (de ahí que hable de perpendicularidad) para poder deducir que las bases son rectangulares y no cuadrados. La estudiante E3 lo mira inicialmente desde otra posición (ver líneas 422 y 424), de ahí que con la perspectiva del dibujo en GeoGebra crea que las bases son cuadrados y no rectángulos.

El último conflicto que presentamos aquí se manifiesta a través de la diferencia entre las distintas narrativas que usan las estudiantes del grupo G5 cuando discuten sobre qué es una unidad de medida válida. En particular, cuando las estudiantes están buscando una propiedad que sea común a todos los cuerpos, primero afirman que todos los cuerpos tienen el mismo número de caras, vértices y aristas. Después discuten si todas tienen algunas caras paralelas (propiedad que deciden no incluir entre sus respuestas escritas). Finalmente, en su búsqueda de alguna otra propiedad común a los tres cuerpos, dos estudiantes mantienen la siguiente conversación:

131. E3: Pero no sé, a lo mejor el área, a lo mejor si la calculamos es el mismo, pero no tenemos datos suficientes.

132. E1: Hombre, datos sí tienes porque te podrías poner a contar los cuadritos.

133. E3: Pero no sabes cuánto mide cada cuadrito.

134. E1: Pero puedes llamarle una unidad […]

Podemos observar que la estudiante E1 afirma que pueden calcular el área de la superficie de los cuerpos usando como unidad un “cuadrito”, mientras que E3 descarta esa opción porque afirma que no pueden medir sin saber cuánto mide cada “cuadrito”. Entendemos que la estudiante E3 se refiere a que no saben cuántos centímetros mide, es decir, que no acepta una unidad de medida que no sea una de las legales (pertenecientes al sistema internacional de medidas) o sus divisores.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio hemos identificado conflictos comognitivos, que son una posible fuente de aprendizaje matemático, esto es, de cambio en el discurso. Concretamente, presentamos tres conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes cuando están implicados en la práctica de definir cuerpos geométricos.

El primero de ellos muestra el conflicto que se produce cuando algunos estudiantes identifican describir con definir (sin hacer ninguna distinción), mientras que otros estudiantes sostienen que la definición debe ser distinta de una mera descripción. En este sentido, estos últimos estudiantes consideran que la definición debe incluir al menos una etiqueta, pudiendo añadirse una lista de características matemáticas del cuerpo geométrico cuya definición se está construyendo. Por tanto, se trata de un conflicto comognitivo que afecta al proceso de definir más allá del contenido matemático tratado en el instrumento (en este caso, geometría 3D). En este sentido, podríamos decir que este conflicto comognitivo aparece en el meta-discurso de los estudiantes, ya que está vinculado a la existencia de diferentes rutinas. Además, este conflicto comognitivo plantea la problemática de la relación entre describir y definir, aspecto que puede ser abordado desde la perspectiva comognitiva (Tabach y Nachlieli, 2016).

El segundo conflicto comognitivo se produce cuando algunos estudiantes se mueven en un discurso puramente bidimensional mientras que otros estudiantes son capaces de manejar un discurso de geometría tridimensional. Este conflicto está vinculado al contenido matemático específico del instrumento de investigación, por lo que podemos decir que se encuentra en el discurso de nivel objeto de los estudiantes. Por otra parte, este conflicto puede ser también un reflejo de ciertos aspectos curriculares, ya que tradicionalmente la geometría 3D ha tenido menos presencia en las aulas frente a la geometría 2D.

Finalmente, el tercer conflicto comognitivo identificado se produce cuando, a la hora de identificar propiedades comunes a los tres cuerpos geométricos del instrumento, una estudiante propone una unidad de medida no legal para medir la superficie de los cuerpos geométricos, mientras que otro estudiante solo acepta que puedan utilizarse unidades de medida legales. Al igual que el conflicto comognitivo anterior, este conflicto tiene una naturaleza discursiva de nivel objeto.

En resumen, los dos últimos conflictos comognitivos tienen naturaleza discursiva de nivel objeto, ya que los conflictos comognitivos están referidos al contenido matemático. Por el contrario, el primero de ellos es de naturaleza meta-discursiva, ya que afecta a la práctica matemática de definir. Esto pone de manifiesto el potencial explicativo de la teoría de la comognición y del instrumento de investigación utilizado.

Otros autores también han categorizado distintos tipos de conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes. Por ejemplo, Jayakody (2015) identifica conflictos vinculados al discurso sobre funciones continuas, que esta autora considera que pueden ser interpersonales o intrapersonales. El conflicto es interpersonal entre entrevistador y entrevistado (estudiantes de primer año de universidad) sobre un determinado concepto (en su investigación sobre el término “dominio”), es decir, entre dos discursantes distintos. El conflicto es intrapersonal cuando es entre los discursos que surgen de diferentes realizaciones de un mismo concepto para el mismo individuo. En definitiva, para Jayakody (2015), el conflicto comognitivo no solo surge de discrepancias entre dos individuos, interpersonal, sino también entre dos discursos inconmensurables del mismo individuo, intrapersonal. Consideramos que nuestra investigación complementa el trabajo de Jayakody (2015) ya que categorizamos distintos tipos de conflictos, que asociamos al nivel objeto o al nivel meta.

Tabach y Nachlieli (2015) toman los conflictos comognitivos como justificación de que se puede combinar un discurso de nivel objeto (sobre funciones concretas) con un discurso de nivel meta (sobre la definición de palabras específicas). Nuestro análisis llega a un resultado similar, pero en un contexto geométrico, habiendo identificado dos conflictos comognitivos de nivel objeto y otro de nivel meta. Estos conflictos muestran que puede haber una combinación de discursos a nivel objeto y a nivel meta, lo que puede producir aprendizaje de ambos niveles (no solo a nivel objeto).

En un futuro, los resultados de este estudio, de naturaleza exploratoria, podrían ampliarse si se aumentase el número de participantes. Además, considerar otros contenidos matemáticos (análisis, álgebra, etc.) permitiría una visión más global de la práctica de definir entre estudiantes universitarios.

Referencias

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. y Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead*. Cham, Suiza: Springer.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch y PME.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *RELIME*, *17*(1), 7-32.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 135-156). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Aspectos del discurso de estudiantes universitarios cuando construyen definiciones matemáticas. En FESPM (Ed.), *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM), Vol. 8* (pp. 77-85). Madrid: FESPM.

Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. En T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 611-619). Pittsburgh, EE. UU.: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 355-362). Umeå, Suecia: PME.

Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A. S., Gueudet, G. y Winsløw, C. (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematic education. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 91-94.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. y Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 182-198.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: In-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73.

Sánchez, V. y García, M. (2014). Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 305-320.

Schüler-Meyer, A. (2018). Defining as discursive practice in transition – Upper secondary students reinvent the formal definition of convergent sequences. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2018)* (pp. 537-546). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163-187.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299-306.

Thoma, A. y Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: Manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 161-180.

Viirman, O. L. y Nardi, E. (2017). From ritual to exploration: The evolution of biology students' mathematical discourse through mathematical modelling activities. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 2274-2281). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Viirman, O. y Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: Biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 233-252.

[xxvii] Este trabajo se ha realizado al amparo de la ayuda IV.4 del Plan Propio de Investigación y transferencia de la Universidad de Sevilla. Además, todos los autores son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Teaching knowledge of the content of the quadratic function in pre-service teachers of Mathematics

Hau-Yon, F. y Zapata, M.

Universidad de Piura

Resumen

El conocimiento didáctico del contenido (PCK) es relevante ya que permite identificar los conocimientos, estrategias y pensamiento de los profesores, pero recogerlo y describirlo es una tarea compleja debido a su propia naturaleza. En esta investigación (que es parte de otra más amplia) se trata de caracterizar el PCK de los Estudiantes Para Profesor (EPP) de la carrera de Matemática y Física respecto a la función cuadrática utilizando como herramienta la Representación del Contenido (CoRe). El PCK se ha caracterizado tomando en cuenta las categorías de los subdominios del PCK del modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge *- MTSK. Este estudio permitirá a los estudiantes para profesor reflexionar sobre el conocimiento matemático y didáctico del tema en cuestión.*

Palabras clave: *Conocimiento didáctico del contenido (PCK), Representación del Contenido (CoRe),* Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (*MTSK), Formación de profesores de matemática de secundaria, función cuadrática.*

Abstract

Teaching Content Knowledge, known as Pedagogical Content Knowledge (PCK), is relevant because it allows the identification of knowledge, strategies and beliefs of teachers. However, due to its own nature, it is complex to collect and describe. This research (which is part of a larger one) intends to characterize the PCK of pre-service teachers (EPP) of Mathematics and Physics in terms of the quadratic function, using Content Representation (CoRe) as a tool. PCK has been characterized taking into account the categories of the subdomains of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK model. This study will allow pre-service teachers to reflect on mathematical and teaching knowledge of the subject matter.

Keywords: *Pedagogical knowledge content (PCK), Content Representation (CoRe), Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK), Secondary School Mathematics teacher training, quadratic function.*

INTRODUCCIÓN

Dos son las principales preocupaciones de los formadores de futuros docentes de matemáticas, por un lado, que interioricen y comprendan el contenido matemático, y por otro, que sepan enseñarlo. Debido a las dificultades que presentan los estudiantes para profesor (EPP en adelante), tanto en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la función cuadrática como en la planificación y ejecución de sesiones de clase, se ha considerado la necesidad de conocer cómo es el PCK de los estudiantes respecto de este tema, de modo que se les pueda orientar a lo largo de su formación. Pero determinar este conocimiento didáctico no es sencillo, por lo que existen herramientas que permiten describirlo, tal es el caso de entrevistas, análisis de videos, observaciones de clase y las

Hau-Yon, F. y Zapata, M. (2019). Conocimiento didáctico del contenido de la función cuadrática en estudiantes para profesor de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 383-392). Valladolid: SEIEM.

desarrolladas por Loughran, Mulhall y Berry (2004), la Representación del Contenido (CoRe) y los Repertorios de Experiencia Profesional y Didáctica. Para este estudio solo se ha utilizado el CoRe con el objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido (PCK) respecto a la función cuadrática como punto de inicio o referencia de un estudio más amplio donde se analizarán las prácticas de los EPP en función de las categorías del modelo MTSK.

Los objetivos específicos fueron recoger el conocimiento que tienen los EPP acerca de la enseñanza, así como de las características del aprendizaje y de los estándares de aprendizaje relacionados con el tema de función cuadrática.

A continuación, se desarrolla la fundamentación teórica que sustenta la investigación.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se aborda en esta sección el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) con sus subdominios y categorías, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y cómo recogerlo, y los estudios realizados sobre función cuadrática.

Modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK*

Una de las líneas de investigación sobre la Formación de Profesores de Matemática se centra en el estudio del conocimiento profesional del profesorado, basándose en diversos modelos. El marco referencial que se ha tomado en este trabajo es el MTSK propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Este modelo parte de los trabajos sobre el conocimiento profesional desarrollados por Shulman (1986, 1987), y del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008).

El MTSK es un modelo teórico cuyo objetivo es estudiar analíticamente el conocimiento del profesor y, a la vez, se le considera como herramienta metodológica para analizar las prácticas pedagógicas tomando como base sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Está compuesto por dos dominios: El *Conocimiento Matemático (MK, Mathematical Knowledge)* y el *Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK, Pedagogical Content Knowledge)*, cada uno de los cuales posee tres subdominios.

En este informe se explicará con mayor detalle los subdominios del PCK ya que el objetivo del estudio es caracterizar el conocimiento didáctico del contenido de los EPP de matemáticas.

El primer subdominio del PCK es el *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, Knowledge of Mathematics Teaching)*, referido al conocimiento que tiene el profesor sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza, condicionadas por la naturaleza misma del contenido (Escudero, 2015). Este subdominio incluye "vías, recursos y formas de enseñar matemáticas […] conocimiento que posee de diferentes estrategias y teorías institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas" (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015, p. 597). Este subdominio está conformado por tres categorías: la primera categoría, Teorías de enseñanza (C1), estudia –como su mismo nombre lo indica– el conocimiento sobre teorías y formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático basado en resultados de investigación en Educación Matemática y en Didáctica de la Matemática. Incluye, además, el conocimiento sobre teorías personales de enseñanza. La segunda categoría, Recursos materiales y virtuales (C2), considera el conocimiento de las características matemáticas específicas de los recursos utilizados para la enseñanza del contenido matemático en particular y no solo al conocimiento del recurso como tal. La tercera categoría, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (C3), constituye todo aquello que el profesor debe conocer respecto de las potencialidades, limitaciones y repercusiones de las mismas para elegir las más adecuadas en el proceso de enseñanza del contenido matemático (Escudero-Ávila, Contreras y Vasco, 2016).

El segundo subdominio es el *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, Knowledge of Features of Learning Mathematics)* que Escudero (2015) define como el "conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general" (p. 44); con ello, la importancia recae en las características de aprendizaje derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático. En palabras de Escudero-Ávila, Climent y Vasco (2016) "su foco principal lo constituye el contenido matemático como objeto de aprendizaje" (p. 43). Este subdominio está compuesto por cuatro categorías. Siguiendo la numeración a partir de las anteriores, la cuarta categoría, Teorías de aprendizaje (C4), considera el conocimiento de teorías de aprendizaje personales o formales asociadas al aprendizaje tanto de la matemática en general como a contenidos específicos. La quinta categoría, Fortalezas y dificultades (C5), se refiere tanto al conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido como al conocimiento de los errores, obstáculos y dificultades típicos y atípicos de aprendizaje que pueden presentar los alumnos sobre un contenido matemático específico; no obstante, se incluyen en esta categoría solo las que son propias del contenido matemático. La sexta categoría, Formas de interacción con un contenido matemático (C6), tiene en cuenta el conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, típicos y atípicos (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013; citado en Escudero-Ávila et al., 2016). Asimismo, incluye el conocimiento que tiene el profesor sobre los modos de aprehensión asociados a la naturaleza del contenido matemático (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017). La séptima categoría, Intereses y expectativas (C7), se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre las principales motivaciones de sus alumnos al abordar un contenido matemático, así como al conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad, preconcepciones o concepciones erróneas que pueden tener sobre un determinado contenido matemático (Escudero-Ávila et al., 2016).

El tercer subdominio es el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, Knowledge of Mathematics Learning Standards)* que considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de lo que sus alumnos deben lograr en un nivel determinado que, además de lo prescrito en el currículo, incluye las investigaciones y opiniones de profesores expertos (Flores et al., 2013). Presenta tres categorías, que presentamos siguiendo la numeración anterior. La octava categoría, Expectativas de aprendizaje (C8), contempla aquel conocimiento que tiene el profesor sobre lo que espera que sus alumnos aprendan en un nivel educativo específico. La novena categoría, Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (C9), se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que debe desarrollarse el contenido matemático, el mismo que debe ser acorde con el nivel educativo. Por último, la décima categoría, Secuenciación con temas anteriores y posteriores (C10), contempla el conocimiento sobre el ordenamiento de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o en cursos anteriores; esto es, los conocimientos y capacidades previas que posee un alumno para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares determinan, y lo que aportará este en el abordaje de temas posteriores (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

El PCK y cómo capturarlo

Pinto y González (2006), Pinto y González (2008) y Van Driel, Verloop y De Vos (1998), que han realizado investigaciones sobre el PCK en general y en el campo de la matemática, evidencian la complejidad en la comprensión, descripción, análisis y caracterización del PCK, debido a la propia naturaleza del conocimiento profesional. Baxter y Lederman (1999) afirman que como el PCK no puede observarse directamente por ser un constructo interno, es complejo, tácito y de difícil acceso para articular y registrar.

Si bien el PCK se desarrolla a través de la experiencia de los profesores en aula, conocerlo es verdaderamente importante. Su aporte tanto en programas de formación de maestros como en los de servicio es ineludible (Lehane y Bertram, 2016). Después de años de investigación, se ha concluido que la mejor forma de caracterizar el PCK es a partir de observaciones del desempeño docente y entrevistas donde se consulte sobre cómo, por qué y para qué enseña un determinado contenido. Pinto y González (2006) concluyen que cerca del 88% de investigaciones se centran en el conocimiento del contenido a enseñar y menos de la mitad en el conocimiento de la didáctica específica del contenido.

Para capturar el PCK es necesaria una combinación de enfoques y herramientas, una de ellas –la utilizada en este estudio– es la Representación del Contenido *(CoRe, Content Representation)* propuesta por Loughran et al. (2004). Lehane y Bertram (2016) sostienen que la función principal del CoRe es evidenciar el nivel de comprensión que tienen los profesores respecto a un contenido específico, a través de las siguientes ocho preguntas (Loughran et al., 2004, p. 376):

> P1: ¿Qué intentas que los estudiantes aprendan alrededor de esta idea?
>
> P2: ¿Por qué es importante para los estudiantes aprender esta idea?
>
> P3: ¿Qué más sabes sobre esta idea? (Lo que tú no vas a enseñar por ahora a los estudiantes)
>
> P4: ¿Cuáles son las dificultades y limitaciones conectadas a la enseñanza de esta idea?
>
> P5: ¿Qué conocimiento acerca del pensamiento de los estudiantes influye en tu enseñanza de esta idea?
>
> P6: ¿Cuáles otros factores influyen en la enseñanza de esta idea?
>
> P7: ¿Qué procedimientos empleas para que los alumnos se comprometan con la idea?
>
> P8: ¿Qué maneras específicas utilizas para evaluar el entendimiento o confusión de los alumnos sobre la idea?

En el 2011, Hume y Berry (2011, citados en Lehane y Bertram, 2016) concluyeron que el proceso de construcción del CoRe en futuros profesores, dada la poca experiencia en aula, es una tarea compleja; pero con la ayuda oportuna de profesores expertos logran mejorar no solo sus CoRe sino que podían acceder al conocimiento de profesores con experticia tanto en el contenido temático como en el pedagógico.

Estudios sobre la función cuadrática

Dada la complejidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática, es de interés caracterizar el PCK de los EPP. La dificultad en la comprensión de este objeto matemático va desde la etapa escolar hasta la universitaria.

Manrique, Gallo y Gallardo (2017) en el estudio que realizan sobre el estado del arte del concepto de función mencionan las investigaciones desarrolladas por autores como Amaya, Pino-Fan y Medina (2016), Flores (2004), Gómez y Carulla (2001) o Hitt (2003), entre otros. Estas investigaciones evidencian las dificultades que subyacen a la enseñanza de este tema, en las que predomina una manipulación algebraica de ecuaciones como forma de trabajar el concepto de función cuadrática, así como una crítica a la metodología tradicional, ya que los estudiantes “repiten” los conceptos sin comprenderlos. Los autores afirman que se abusa del registro algebraico, que conlleva dificultades para relacionarlo con los distintos registros de representación.

Muchos investigadores en educación matemática señalan que, para llegar a la comprensión de un concepto en toda su amplitud, es necesario recurrir a diversos sistemas de representación, ya que cada uno de ellos aporta o hace “visible” ciertas características (Duval, 1998). Castro y Castro (1997, citado en Blázquez y Ortega, 2001) señalan que los sistemas de representación utilizados para trabajar el concepto de función son: verbal, tabular (numérico), gráfico (visual) y algebraico (simbólico). En este estudio se ha denominado sistema de representación verbal al que hace uso del lenguaje común o natural para representar situaciones reales o matemáticas; el sistema numérico a aquel que hace uso de valores numéricos específicos que se representan en una tabla de valores o de forma tabular; el sistema gráfico a aquel que hace uso del plano cartesiano y el simbólico a aquel que hace uso del campo algebraico y en el que se consideran tres formas simbólicas de representar la función cuadrática: estándar, canónica y multiplicativa (Gómez y Carulla, 2001).

METODOLOGÍA

La población se conformó por nueve EPP, por este motivo el método empleado en esta investigación ha sido el estudio de casos con el que se ha caracterizado el PCK de los nueve estudiantes de pregrado, que cursaron la asignatura de Práctica preprofesional B, en el VIII ciclo de la carrera de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (Perú) en el segundo semestre del año 2018. Cabe señalar que estos EPP aún no tienen experiencia ejecutando sesiones de aprendizaje en aulas de instituciones educativas. Sin embargo, han conducido sesiones de aprendizaje sobre función cuadrática (véase Tabla 1) con sus compañeros del curso en la asignatura de práctica preprofesional. La carrera se compone de diez ciclos académicos y en cuya malla curricular se contemplan asignaturas de formación básica o general, formativas (pedagógicas y curriculares), humanísticas y de especialidad (asignaturas que abordan contenido matemático y didáctico). El ámbito corresponde al Conocimiento y Desarrollo profesional del profesor (Llinares, 2008) y la metodología de investigación es de tipo cualitativa.

Los contenidos desarrollados por cada uno de los EPP (A_1, A_2, …, A_9) sobre función cuadrática, que asignó la docente de la asignatura de práctica preprofesional B, se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Contenido desarrollado por los nueve EPP: Función cuadrática

Alumno	**Contenido matemático**
A_1	Definición/Notación. Propiedades
A_2	Simetría de una función. Dominio y Rango
A_3	Sistema de representación simbólico
A_4	Estudio de la función estándar como suma de funciones
A_5	La función cuadrática como Polinomio de 2° grado y como ecuación cuadrática
A_6	Sistema de representación gráfico
A_7	Sistema de representación numérico y aplicaciones físicas
A_8	Sistema de representación verbal y aplicaciones matemáticas
A_9	Conversión del registro gráfico al algebraico

Tomando como base el cuestionario (CoRe) se realizó un análisis de contenido para determinar el PCK de los EPP respecto a la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática; para ello se han relacionado los subdominios del PCK y sus categorías con las preguntas del CoRe, tal como se observa en la Tabla 2.

Tabla 2. Relación entre el CoRe y los subdominios y categorías del PCK

Subdominios del PCK	Categorías de los subdominios	CoRe
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. KMT	C1	P6
	C2	P4 y P7
	C3	P7, P5, P4 y P8
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. KFLM	C4	P6
	C5	P4
	C6	P5
	C7	P2
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. KMLS	C8	P2
	C9	P1 y P3
	C10	-[xxviii]

Para poder organizar, presentar y analizar la información recogida de los cuestionarios del CoRe, aplicados en forma individual a cada uno de los nueve EPP, se ha utilizado la técnica del análisis del contenido. Para ello, se establecieron y definieron las unidades de análisis UA_i a partir de las respuestas dadas por los EPP al cuestionario CoRe –previamente codificadas– y estas se clasificaron en función de las categorías de cada uno de los subdominios del PCK en hojas de codificación (Hernández, Fernández y Baptista, 2003). Las unidades de análisis relacionadas dieron lugar a la formación de las Ideas Núcleo (IN_i), tal como se puede evidenciar en la Figura 1:

La IN_2 se obtuvo a partir de las UA_{29} y UA_{30} (respuestas del alumno A_1 al cuestionario CoRe) y que pertenecen a la Categoría 3 del subdominio KMT del PCK.

UA_{29}: "En esta parte se usaron comparaciones de una actividad cotidiana con el tema".

UA_{30}: "Se hace demostraciones con alguna parte del cuerpo como herramienta para recordar los conceptos y diferencias de términos".

IN_2: Emplea procedimientos para relacionar el contenido matemático con sucesos de la vida diaria.

IN_2 = PCK, KMT, C3, P7, A_1, UA_{29} y UA_{30}.

En general, las ideas núcleo se han obtenido de la forma:

$\boxed{IN_i = \text{Dominio, Subdominio, Categoría, CoRe, } A_i\text{, Unidades de análisis}}$

Figura 1. Obtención de las Ideas Núcleo

Finalmente, la síntesis de las ideas núcleo ha permitido obtener información del conocimiento didáctico del contenido en función de cada una de las categorías del PCK. A continuación, se presentan los resultados de cada uno de los subdominios del PCK de los EPP de matemáticas.

RESULTADOS

Resultados del subdominio Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas - KMT

Respecto a la C1, teorías de enseñanza asociadas a la función cuadrática, los nueve EPP manifiestan que los alumnos deben participar activamente en la adquisición del contenido a aprender y para que se produzca el aprendizaje se debe tener presente que el conocimiento a enseñar debe ser significativo, interpretativo y no memorístico; seis sostienen que se debe preguntar continuamente a los alumnos para saber si entienden lo que se les va explicando, resolver dudas, aclarar conceptos y retroalimentar; y siete señalan que deben establecerse relaciones entre el contenido de enseñanza y los sucesos de la vida cotidiana, contextualizar sus ejemplos y problemas y deben relacionarse los conocimientos previos con el contenido a desarrollar. Seis EPP indican que se debe promover tanto el trabajo individual como el grupal de modo que se generen espacios de diálogo, discusión y análisis para que ellos mismos construyan sus aprendizajes.

En cuanto a la C2, recursos materiales y virtuales, cinco EPP manifiestan que se debe trabajar con softwares matemáticos graficadores, que potencian la capacidad de observación de modo que sean los propios alumnos los que propongan sus hipótesis y las comprueben a través del trabajo con gráficas. Además de visualizarlas, podrán relacionar los sistemas de representación de la función cuadrática y sus transformaciones y/o conversiones, así como deducir las implicancias en la gráfica al variar los elementos de la representación simbólica. Señalan también que el tema función cuadrática limita la utilización de material concreto, ya que es muy analítico.

En la C3, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, todos los EPP coinciden en señalar que es la participación activa de los alumnos la que ayuda a la adquisición del contenido a aprender, así como la utilización de ejemplos adecuados y la retroalimentación constante por parte del docente. Siete EPP señalan la importancia de relacionar el concepto y propiedades de la función cuadrática con los sucesos cotidianos, tratando de representar el contenido matemático de manera concreta, utilizando ejemplos y/o problemas reales, así como emplear el recurso de la visualización, descripción que coincide con Gómez y Carulla (2001). Muy pocos, tres, opinan que se debe hacer uso de contraejemplos. La mayoría de los EPP (ocho de nueve) piensan que solo se pueden hacer conversiones del registro algebraico al gráfico y no al revés. Por otro lado, los EPP piensan que los alumnos se motivan cuando el aprendizaje se realiza tanto a través del juego o competencias, como con la utilización de recursos visuales; además señalan que el tema es novedoso pero complejo. Respecto a las dificultades y limitaciones conectadas a la enseñanza de Funciones Cuadráticas, ocho EPP indican que los alumnos no poseen los conocimientos previos necesarios para comprender el tema (presentan dificultades con las operaciones algebraicas, limitaciones para completar cuadrados, no identifican las formas de representación simbólica, manifiestan dificultades para sumar y/o restar gráficamente la función lineal con la cuadrática; no diferencian ecuación de función cuadrática, entre otros). Siete señalan que deben hacerse preguntas y aplicar fichas de ejercicios para que los alumnos las resuelvan solos o en grupo, y cinco expresan que se debe utilizar y trabajar las representaciones gráficas; así como solicitar a los alumnos explicaciones y demostraciones de lo que se va desarrollando.

Resultados del subdominio Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas – KFLM

En la C4, teorías de aprendizaje, dos de los nueve EPP consideran que un aspecto a tener en cuenta es la organización de los contenidos a aprender, que deben ordenarse y secuenciarse de manera que se favorezca el aprendizaje; primero teniendo claridad en los conceptos de función cuadrática, elementos y propiedades para luego estudiar las transformaciones y conversiones entre registros.

Respecto a la C5, fortalezas y dificultades conectadas al aprendizaje de función cuadrática, ocho EPP indican que una de las mayores dificultades que presentan los alumnos es que no recuerdan o no poseen los conocimientos necesarios para comprender el tema, conflictuándose, incluso, porque no saben diferenciar la ecuación de la función cuadrática. Entre las fortalezas observadas, cinco EPP comentan que los alumnos hacen uso de recursos tecnológicos.

En cuanto a la C6, formas de interacción de los estudiantes con el contenido función cuadrática, ocho de los nueve EPP piensan que los alumnos solo hacen conversiones del registro algebraico al gráfico y no al revés, ya que así se lo enseñaron en el colegio y es la forma en la que se presenta el tema en los libros de texto. Asimismo, cinco afirman que los alumnos aprenden mejor cuando están motivados; indican que el aprendizaje es más fácil y comprensivo si se recurre a herramientas y técnicas visuales, de modo que el alumno no tiene que "imaginarse" el objeto matemático, sino que puede observarlo directamente, hipotetizar, comprobar y elaborar sus propias conclusiones, tal como señala Hitt (2003).

En la C7, referida a intereses y expectativas, siete de los nueve EPP señalan la importancia de comprender el tema de función cuadrática para establecer relaciones entre este concepto y los sucesos cotidianos. A tres EPP no les es familiar ni la forma canónica ni la multiplicativa, solo la forma estándar. Siete de los EPP participantes resaltan la importancia de representar el contenido matemático de manera concreta, aplicando las funciones cuadráticas a situaciones reales.

Resultados del subdominio Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS

En la C8, expectativas de aprendizaje, tres de los nueve EPP mencionan la aplicación del concepto y propiedades de la función cuadrática para resolver problemas cotidianos, así como demostrar a los alumnos que no solo se pueden hacer conversiones en un solo sentido –del algebraico al gráfico– sino en ambos. Asimismo, dos EPP expresan que se deben identificar los elementos y propiedades de la parábola para modelizar matemáticamente situaciones reales.

En cuanto a la C9, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, cada uno de los EPP indican que saben otros contenidos que no los enseñarían porque no los consideran necesarios para el nivel de educación secundaria, como la suma y diferencia de funciones (dos de nueve EPP), el estudio de la parábola como sección cónica (solo uno), la demostración de fórmulas para determinar el eje de simetría, el vértice, etc. (dos de nueve), así como la identificación de la representación simbólica a partir de la gráfica (únicamente un EPP).

CONCLUSIONES

El objetivo de este informe ha sido presentar la caracterización sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido de función cuadrática de los estudiantes para profesor de matemática.

Los EPP tienen un conocimiento formal de teorías de enseñanza de manera general, pero un conocimiento empírico de las teorías de enseñanza de las matemáticas, que es lo que el modelo MTSK contempla; por ello se puede afirmar que conocen ciertos aspectos que les permiten "generar" una teoría empírica o personal de enseñanza. En cuanto a las estrategias de enseñanza, los EPP señalan que estas deben ser diseñadas de tal manera que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y construir el conocimiento por sí mismos.

Respecto a los recursos materiales y virtuales, los EPP señalan la importancia de la utilización de software gráfico que ayude en la visualización de las representaciones gráficas de la función cuadrática; aunque trabajan primero el proceso de tabulación. Esto permitirá a los alumnos relacionar dos registros de representación, ya que, si solo trabajan uno, no se llega a la comprensión del objeto matemático y su aprendizaje se reduce a la manipulación algebraica.

Se advierte la importancia que los EPP le dan a la utilización de ejemplos y situaciones relacionadas con la vida cotidiana para motivar a los alumnos, ya que trabajar con hechos reales conlleva un aprendizaje significativo. Asimismo, mencionan la aplicación de actividades de transformación y/o conversión que apoyarán a la comprensión del concepto de función cuadrática y a la relación entre los diversos sistemas de representación a través del proceso de visualización. Respecto al conocimiento que tienen los EPP sobre Teorías de aprendizaje, puede señalarse que, si bien los estudiantes no mencionan formalmente teorías de aprendizaje sobre función cuadrática, sí hacen mención a ciertos aspectos que podrían entenderse como teorías personales, tratando de acercar a los estudiantes a hechos reales, indicando la importancia de modelizar matemáticamente situaciones cotidianas.

Los EPP conocen varios softwares matemáticos (Cabri, Derive o GeoGebra) y aunque no se cuenta con datos sobre si conocen sus características matemáticas y didácticas, se puede advertir su uso en el proceso de aprendizaje. Los EPP señalan la importancia de observar y analizar las repercusiones que tienen en las representaciones gráficas las variaciones de los parámetros de la representación simbólica de la función cuadrática, así como la comprensión de las propiedades y elementos de la misma. Todos los EPP mencionan que una dificultad que podrían presentar los alumnos es determinar la expresión simbólica de la función cuadrática a partir de la gráfica, debido a que no se evidencian este tipo de tareas y/o ejemplos en los libros de texto ni en materiales curriculares.

Se ha realizado una búsqueda de la aplicación del CoRe para caracterizar el PCK de los profesores en el campo de la matemática; sin embargo, no se ha podido identificar en esta área la utilización de esta herramienta.

Referencias

Amaya, T. R., Pino-Fan, L. R. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática, 28*(3), 111-144.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baxter, J. A. y Lederman, N. G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-205.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Escudero, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva, Huelva.

Escudero-Ávila, D., Climent, N. y Vasco, D. (2016). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 42-48). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Ávila, D., Contreras, L. C. y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Domínguez, A. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.* (pp. 49-54). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores, C. D. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME, 7*(3), 195-218.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática. En M. L. Tirado (Ed.), *Educación en Matemáticas* (pp. 337-363). Bogotá, Colombia: IDEP.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación (3ª ed.).* México D. F., México: McGraw Hill.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-223.

Lehane, L. y Bertram, A. (2016). Getting to the CoRe of it: A review of a specific PCK conceptual lens in science educational research. *Educación Química, 27*(1), 52-58.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Loughran, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2004). In search of pedagogical content knowledge in science: Developing ways of articulating and documenting professional practice. *Journal of Research in Science Teaching, 41*(4), 370-391.

Manrique, J., Gallo, A. y Gallardo, H. (2017). *Estado del arte alrededor del concepto de función*. En R. Prada (Coordinador), II Encuentro Internacional en Educación Matemática. Universidad Francisco de Paula Santander, San José de Cúcuta, Colombia.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 589-605.

Pinto, J. E. y González, M. T. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas: una aproximación para su estudio. En P. Bolea, M. Moreno y M. J. González (Eds.), Investigación en Educación Matemática: Actas del X Simposio de la SEIEM (pp. 237-255). Huesca: SEIEM e Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática, 20*(3), 83-100.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Van Driel, J. H., Verloop, N. y De Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching, 35*(6), 673-695.

[xxviii] La categoría 10 no se puede relacionar con ninguna de las preguntas del CoRe.

IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA REFLEXIÓN DE PROFESORES: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIO DE CLASES

Didactic suitability in the reflection of teachers: analysis of a lesson study experience

Hummes, V. B.[a], Breda, A.[a] y Seckel, M. J.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidad Católica del Maule

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo analizar los criterios usados, por un grupo de profesores, para orientar su práctica, cuando participan en una experiencia de Estudio de Clases, en la que planifican, implementan y reflexionan sobre un proceso de instrucción. Como herramienta teórica, para categorizar los criterios, se usa la noción de idoneidad didáctica. Se trata de un estudio de caso en el que se usa una metodología cualitativa. Se concluye que el grupo de profesores utiliza, de manera implícita, algunos de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. En particular, utilizan de manera más amplia el criterio cognitivo, interaccional y epistémico y, en menor medida, el emocional y el de medios, mientras que casi no hay reflexiones sobre el criterio de idoneidad ecológico.

Palabras clave: *estudio de clases, idoneidad didáctica, reflexión docente.*

Abstract

The objective of this work is to analyse the criteria used by a group of teachers to guide their practice, when they participate in a Lesson Study experience, in which they plan, implement and reflect on an instructional process. As a theoretical tool, to categorize the criteria, the notion of didactic suitability is used. It is a case study in which a qualitative methodology is used. It is concluded that the group of professors uses, implicitly, some of the components and indicators of didactic suitability criteria. In particular, they use the cognitive, interactional and epistemic criteria more broadly and, to a lesser extent, the emotional and mediational, while there are almost any reflections on the criterion of ecological suitability.

Keywords: *lesson study, didactic suitability, teacher reflection.*

INTRODUCCIÓN

Diferentes tendencias sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre su práctica docente como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza (Brockbank y McGill, 2002; Dewey, 1989; Perrenoud, 2004). En esta línea, Schön (1992) señala la necesidad de formación de profesionales reflexivos, enfatizando que las escuelas deben repensar la práctica y los fundamentos pedagógicos en que se basan sus planes de estudio, al mismo tiempo que deben favorecer cambios en sus instituciones para que abran un espacio para la práctica reflexiva como un elemento clave en la formación de sus profesionales.

Como se afirma en Breda, Font y Pino-Fan (2018), desde la didáctica de la matemática han surgido diferentes propuestas que proporcionan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la competencia reflexiva, un ejemplo es la metodología *Estudio de Clases* (en adelante, EC) (Fernández y Yoshida, 2004), que consiste en una actividad de investigación en el aula (Baldin, 2009; Burghes y Robinson, 2010; Ponte, Baptista, Velez y Costa, 2012), que fomenta el desarrollo

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 393-402). Valladolid: SEIEM.

de la competencia reflexiva durante la realización de la actividad docente. Por otro lado, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019) nos proporciona los *Criterios de Idoneidad Didáctica* (en adelante, CI) y su desglose en componentes e indicadores, como una herramienta metodológica para estructurar la reflexión del profesor. Se trata de criterios que pueden servir para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para evaluar su implementación, tal como se viene haciendo en distintos procesos de formación en algunos países (Font, Breda y Pino-Fan, 2017; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Seckel y Font, 2016). Cada una de estas metodologías presenta ventajas y limitaciones.

El EC (Isoda, Stephens, Ohara y Miyakawa, 2007) es una metodología usada para la mejora de la educación matemática, que ha ganado espacio en los procesos de formación inicial y el desarrollo profesional de docentes de matemáticas en servicio. Si bien el EC puede ser usado para crear actividades o buenas prácticas, hay investigadores que señalan que no es ese su principal objetivo. La principal preocupación de esta metodología es que profesores que están fuera del contexto de estudio o fuera de comunidades escolares que estudian la lección "[…] adopten sin ninguna reflexión estas prácticas cuando hay carencias en su compresión, debido a la falta de conocimiento matemático y pedagógico, y pocas habilidades para observar y evaluar el aprendizaje de sus estudiantes en el aula" (Yoshida, 2012, p. 141). En esta afirmación hay varios aspectos a considerar: 1) Hay unos generadores de buenas prácticas (comunidades que hacen EC), y 2) Profesores que asumen estas buenas prácticas. En el segundo caso, el mecanismo por el cual los profesores asumen las buenas prácticas es el principio de autoridad de expertos, los cuales avalan la efectividad de unas determinadas prácticas. Ahora bien, ¿cómo se genera en un EC el convencimiento de que se ha llegado a buenas prácticas? ¿Se trata también de aplicar el principio de autoridad asumiendo unas prácticas efectivas avaladas por los expertos o se trata de otro mecanismo diferente, en el que los criterios aparecen como acuerdos explícitos o implícitos sobre ciertas normas que deben guiar la práctica del profesor, las cuales tienen una amplia aceptación en la comunidad interesada en la enseñanza de las matemáticas? Para responder a esta pregunta es necesario investigar cómo aparecen en un EC los criterios que orientan las prácticas que se planifican, implementan y rediseñan y, en particular, el rol que juega la reflexión en la generación de estos criterios, tal como se ha hecho en Hummes, Font y Breda (2019) y Hummes, Breda, Font y Seckel (en prensa).

Para aportar información que ayude a responder a la pregunta anterior, y en la línea de investigar sobre la reflexión del profesorado como estrategia para su desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el objetivo de este trabajo es analizar cuáles de los criterios usados por un grupo de maestros de primaria para orientar su práctica en las fases de diseño, implementación y reflexión de un proceso de instrucción –realizado en el marco de una experimentación de la metodología EC– están contemplados en los criterios, componentes e indicadores de la noción idoneidad didáctica.

Después de esa introducción, en la primera sección de este trabajo se presenta, brevemente, el marco teórico usado y una revisión de la literatura al respecto (Estudio de Clases y Criterios de Idoneidad Didáctica). En la segunda sección, se presenta la metodología usada (estudio de caso). En la tercera sección, se hace el análisis de los datos (se examina si las consideraciones de los profesores se pueden interpretar como evidencias de empleo implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CI), y en la cuarta se hace una discusión sobre los resultados proponiendo algunas consideraciones finales.

MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta el marco teórico usado: la metodología EC y la herramienta CI, y se hace una breve revisión de la literatura al respecto.

El enfoque Estudio de Clases (*Lesson Study*)

La metodología EC o *Lesson Study* surgió en Japón como estrategia de desarrollo profesional docente. Se focaliza en el aprendizaje colectivo a partir de la práctica de enseñanza. Consiste básicamente en el diseño colaborativo y minucioso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Fernández y Yoshida, 2004; Hart, Alston y Murata, 2011; Lewis, 2002; Murata y Takahashi, 2002; Wang-Iverson y Yoshida, 2005). Los EC son metodologías de trabajo docente apoyadas en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que buscan, al mismo tiempo, la mejora de la práctica docente, el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo profesional de los profesores.

La idea es que los profesores se reúnan con una problemática en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planeen una lección para que el alumno aprenda, y, por último, examinen y discutan lo que ellos observan en dicha implementación. A través de múltiples interacciones, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo la enseñanza incide sobre él. Esta metodología consta de cuatro etapas: Planificación de la clase, Realización y observación de la clase, Reflexión conjunta sobre los datos registrados y Rediseño; pero no hay una pauta explícita que oriente la reflexión y la toma de decisiones. Para investigar cuáles son los criterios que orientan las prácticas, y cómo son generados en una experiencia de EC, se ha utilizado la noción de Idoneidad Didáctica (CI).

Los Criterios de Idoneidad Didáctica

Los CI propuestos en el marco teórico EOS pretenden ser una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. En el EOS se consideran los siguientes CI (Font, Planas y Godino, 2010):

1. Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”.
2. Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
3. Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
6. Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, a las directrices curriculares, y a las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los CI exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de estos criterios. Por ejemplo, existe consenso en que es necesario implementar unas “buenas” matemáticas, pero es posible entender cosas muy diferentes por ello. En Breda y Lima (2016), Seckel y Font (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda *et al.* (2018) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, sistema que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa, y se explica cómo se han generado dichos criterios y sus respectivos componentes e indicadores. Se detallan a continuación los criterios y componentes de idoneidad didáctica (más detalles en Breda, Font, Lima y Pereira, 2018) (Tabla 1).

Tabla 1. Criterios y componentes de idoneidad (basado en Breda y Lima, 2016).

Criterio de Idoneidad	Componente
Epistémica	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitiva	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectiva	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológica	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Tal como se muestra en la revisión de la literatura realizada en Breda, Font y Lima (2015), la noción de idoneidad didáctica ha tenido un impacto relevante en la formación de profesores en diferentes países (Mallart, Font y Malaspina, 2015; Pochulu *et al.*, 2016; Seckel y Font, 2015). Dicho impacto está relacionado con la idea de que uno de los componentes del conocimiento didáctico-matemático del profesor es aquel que permite valorar y justificar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

METODOLOGÍA

En esta investigación, de carácter exploratorio y analítico-interpretativo, se realiza el análisis cualitativo de un video que presenta diferentes etapas (diseño, implementación y reflexión) de una experimentación de un EC, con el propósito de examinar cuáles fueron los criterios de idoneidad didáctica utilizados implícitamente por un profesor de matemáticas y sus colaboradores. Se trata de un estudio de caso (Yin, 2001), donde los sujetos investigados son los profesores participantes en la experiencia.

Después de una búsqueda de diferentes videos sobre EC en la plataforma web *YouTube,* se seleccionó este video por dos razones. La primera, fue el importante número de visualizaciones que tiene y, la segunda, es porque en ese video se puede observar el proceso de EC de forma casi completa, es decir, hay una fase de diseño, una de implementación y una de reflexión.

Esencialmente, se buscó primero seleccionar consideraciones empleadas por el profesor y sus colegas para fundamentar la secuencia de tareas que propone en su clase. En segundo lugar, se analizó si estas consideraciones se pueden considerar como evidencias de empleo implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CI. En cierta manera, se trata de un "análisis de contenido" de las intervenciones. Para ello, primero se transcribió todo el video, de manera que las unidades de información fueron todas las intervenciones de los profesores participantes, y todas ellas aparecen en este documento. A continuación, se agruparon las intervenciones consecutivas que las autoras consideraron una evidencia de un uso implícito de un componente o indicador de un CI. Por último, se trianguló este análisis con un experto en el uso de los CI.

ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIO DE CLASES

Los profesores se han reunido para planificar colectivamente una clase de matemáticas basada en un estándar de desempeño que aparece en el currículo chileno para nivel básico 2 "Caracterizan prismas rectos y pirámides considerando el número y la forma de las caras y el número de aristas y vértices. Seleccionan redes de prismas y pirámides para armar un cuerpo geométrico dadas algunas características de este". El profesor P, que es quien más adelante imparte la clase, inicia la discusión presentado una tarea a sus colegas:

P: Con base en esta actividad genérica, busqué una regularidad que es lo que nos habíamos planteado, de tener siempre un desafío o algo. ¿Cierto? Entonces tomé una pirámide de base tres, los vértices aumentan en uno y las aristas aumentan el doble que la base.

En este comentario se puede inferir que el grupo toma como primer criterio de diseño de una tarea que ésta presente un reto o un desafío para el alumnado (se trata, sobre todo, del componente alta demanda cognitiva del criterio de idoneidad cognitivo).

Un maestro (M1) cuestiona a P sobre cuáles son los objetivos específicos y qué es lo que se espera que los alumnos aprendan en la clase:

M1: ¿Cuál es el objetivo y cuál es el aprendizaje que vamos a esperar de los alumnos? ¿Qué concluyan las pirámides? ¿Que se nos transforme en una clase de [no se entiende] armando las pirámides y contando los vértices y las aristas o qué?

El profesor M2 (que tiene el rol de moderador del grupo) hace intervenir a los otros miembros del grupo:

M2: ¿Qué opinan los demás colegas?

Una maestra del grupo (M3) argumenta:

M3: Es decir lo importante no es la construcción, sino que el niño se apoya en el material para luego llegar a reflexionar, mirar lo que construyó y llegar a reflexionar con respecto a eso, al material que fue capaz de elaborar.

En este comentario, se infiere que la maestra considera que en estas edades conviene utilizar material manipulativo para facilitar poder encontrar regularidades. Aunque no lo dicen explícitamente, se infiere que los demás colegas asumen este criterio (se trata del componente recursos materiales del criterio de idoneidad de medios).

A continuación, intervienen más maestros y se produce el siguiente diálogo en el que M4, con el apoyo de M2, señala la importancia de tener en cuenta los conocimientos previos de los alumnos (un componente del criterio de idoneidad cognitiva):

M4: Yo creo que antes hay que ver esto de si los niños realmente conocen bien e identifican bien lo que es vértice, lo que es arista y lo que es lado.

M2: ¿Aprendizajes previos?

M4: Claro.

Coherentemente con el hecho de querer diseñar una tarea desafiante, seguidamente se produce un diálogo en el que se puede inferir el interés por diseñar una tarea que lleve a los alumnos a realizar un proceso de generalización, que les permita conjeturar una relación entre el número de lados de la base de la pirámide, el número de aristas y el de vértices (se trata del componente *riqueza de procesos* del criterio de idoneidad epistémica).

M3: O sea, empezarían los niños por construir los cuerpos geométricos y de ahí ellos pueden hacer un registro, ir contando, mirando, observando, contando el número de vértices, contando el número de aristas, hacer un registro, quizá en su cuaderno, para generalizar todo el trabajo que se está haciendo, llevarlo a una tabla en el pizarrón...

P: [Dirigiéndose al pizarrón] ¡Vamos a ver! [Apuntando en el pizarrón] Tenemos el número base de la pirámide.

M2: El número de lados de la base.

M4: Es claro.

P: Entonces, la idea es que los chiquillos vayan registrando... Ellos mismos vayan pasando estos registros... [Apunta en la columna "número base de la pirámide" en una tabla que él construye en el pizarrón] la base 3, la base 4, y le dejamos libre una base y nos pasamos a la 6.

El profesor completa la tabla con el número de vértices y aristas correspondientes.

Seguidamente el grupo se enfoca a analizar si la tarea puede ser resuelta por los alumnos y cómo gestionarla para que ellos la puedan resolver. En la primera parte del diálogo, se trata del indicador *los significados pretendidos se pueden alcanzar* (al estar en la zona del desarrollo próximo del alumno) y del componente *aprendizaje* del criterio de idoneidad cognitiva, y también del indicador *se contemplan momentos en que los estudiantes asumen responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)* del componente autonomía del criterio de idoneidad interaccional:

M1: ¿Qué es lo que vamos a esperar como respuesta de los alumnos? Que se den cuenta que hay una relación entre la cantidad de lados de la base, con la cantidad de vértices y con la cantidad de aristas. ¿Verdad?

M5: Porque ellos tendrían que dar una mirada vertical u horizontal del cuadro que nosotros estamos haciendo ahí

M1: Para ellos va a ser muy fácil mirar hacia abajo y van a encontrar una regla, inmediatamente la regularidad, pero la van a ver hacia abajo. O sea, no van a ver la relación en forma horizontal que es lo que nosotros esperamos [gesticula con las manos indicando hacia abajo y en horizontal].

M2: ¿Con qué preguntas vamos a tratar de acercar los niños a que encuentren la regularidad?

P: ¿Vamos a dejar que los chiquillos analicen al tiro [al momento]? ¿O primero registren de varias pirámides y analicen la tabla al final? ¿O ya colocan en base tres y luego al lado, al lado y en ese minuto analizan al tiro o primero se lo deja hacer varios, registran y al final la tabla?

M4: Sí, ahí van a descubrir. Si hacen varios ejercicios van a descubrir regularidades, si hacen uno no van a descubrir.

Una vez realizada la primera etapa de un EC (la planificación), el video continua con la implementación del profesor P de la clase que se ha planificado (segunda etapa del EC). Después, el video muestra fragmentos de la tercera etapa (análisis y reflexión de la clase implementada). En esta tercera etapa, se pretende generar un espacio de trabajo que permite agudizar la mirada poniendo atención a cómo los alumnos y alumnas reaccionaron en el aula, cómo expresaron sus ideas y cómo el profesor ha conducido los procesos de aprendizaje. En todo caso, para el profesor P fue un impacto verse a sí mismo impartiendo una clase.

P: La verdad es que casi me emociono [Risas].

P: Ya, es muy impresionante. Uno no aprecia la realidad y a los niños cuando están en el momento, como sí puede percibir ahí [señala hacia la pantalla donde han visto el video de su clase] esas caritas, esa alegría, esas ganas de participar de los chiquillos.

A continuación, el video presenta un fragmento cuyo objetivo es mostrar qué pasó con la lectura de la tabla (Figura 1). En particular, si hay evidencias del aprendizaje esperado en los alumnos.

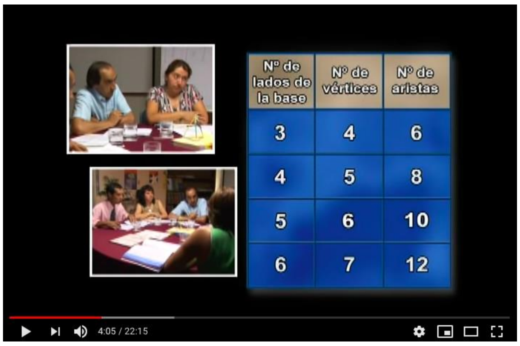


Figura 1. Tabla propuesta por el profesor P. Fuente:
https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8&t=1165s

Su conclusión es que no se llegó al objetivo de encontrar una relación entre el número de lados de la base, el número de vértices y el número de aristas (lo que ellos llaman lectura horizontal de la tabla), pero reconocen la realización de procesos relevantes como el paso de lo concreto a lo abstracto y la importancia que tuvo el recurso "tabla" para facilitarlo. En este diálogo aparece el componente *aprendizaje* del criterio de idoneidad cognitivo y el componente *uso de recursos materiales* del criterio de idoneidad de medios:

M2: Como dijo la maestra M4, en cierto momento los chiquillos vieron de forma vertical la tabla.

M4: Sí.

M2: La lectura fue de forma vertical. ¡Ya! ¿Y el objetivo nuestro, cuál era?

P: El objetivo de nosotros era que fuera horizontal. Hacer que los niños supiesen que a la base solamente tendrían que sumar uno para saber cuántos vértices y que el doble siempre va a ser las aristas.

M2: Cuando P hace alusión a la base cinco y una alumna A1 instantáneamente empieza a levantar la mano, antes que él haga la pregunta, ¿esperaba que los chiquillos dieron respuestas tan rápidamente, como surgió en el video?

P: No. Creo que, cuando lo planificamos, si recuerdan, tuvimos algunas dudas con respecto a si iban a ser capaces pronto de llegar a esto, ¿cierto? De responder a esos espacios que habíamos dejado dentro de esa tabla que hicimos. Y no pensé que iba ser tan rápido.

M4: Yo la verdad creo que la acción de la alumna A1 evidencia claramente que los niños ahí en ese minuto abandonaban lo concreto y se fueron al abstracto. Que en realidad es el objetivo final de una clase de matemática. Que salten y que no construyó ella a la pirámide 5, sino que ella saltó inmediatamente a lo mental.

M1: Ahora yo pienso que el vehículo aquí fundamental ¿no es cierto? en la consecución de los resultados y de que la alumna A1 respondiera tan rápido fue la tabla. [Apunta para la tabla] Esta tabla que nosotros planteamos cuando hicimos la planificación fue la que le dio el indicador clarísimo para lograr establecer ya un orden meramente abstracto, o sea, trabajar en forma numérica.

A continuación, el grupo pasa a hacer valoraciones positivas sobre la interacción entre los alumnos (se trata de un componente del criterio interaccional):

M1: En el video me llamó la atención el grupo cuando estaba trabajando donde no podían armar la pirámide.

M3: Lo del aprendizaje colaborativo. Fue el primero punto, yo creo, me parece, al escuchar ustedes, que fue lo que nos llamó de inmediato la atención. O sea, el niño empezó a construir la pirámide y se equivocó, y la niña de inmediato empezó a interactuar con él en el sentido de irle corrigiendo.

Más adelante, pasan a reflexionar sobre el tratamiento de la diversidad, en particular sobre la falta de actividades de ampliación y de refuerzo (un indicador del componente *adaptación curricular a las diferencias individuales* del criterio de idoneidad cognitivo). También, se infiere el indicador *se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión*, del componente interacción profesor-alumno del criterio de idoneidad interaccional:

M4: Al igual que Cecilia, he visto algunos chicos que luego de terminar la compleción en la pizarra, los vértices, las aristas, se pusieron a jugar, a tomar las pajillas. Entonces, yo creo que ahí nosotros tendríamos que replantearnos alguna actividad en la cual dejáramos esta situación y no nos quedaran esos niños sin hacer nada.

M3: Me parece que, cuando apareció, salió la primera alumna A1 a poner los números adelante. Ahí me parece que faltó quizá una pregunta para integrar a los otros niños que estaban muy calladitos, algunos por atrás. Trabajando sí, pero más callados porque había otro que era con otra personalidad que participaba mucho.

M2: Algo entonces tendremos que apuntar para la próxima planificación que hagamos, para la reorganización, es pensar en los chiquillos más avanzados y los más atrasados, no tan solo en lo general.

A partir de esta reflexión, los profesores proponen cambios en las tareas para generar una interacción que facilite la integración de los alumnos y el tratamiento de la diversidad (idoneidad cognitiva e interaccional):

M4: Hablando un poco lo que dice el colega, el cierre era que el cierre lo desafío lo hicimos nosotros lo planificamos orales y tal vez debería, para que hubiera participado, porque en el oral participan algunos niños...

P: Se debería haber hecho una pequeña plantilla con los tres bases mano y a lo mejor esos tres desafíos haberlos intercalado, una le da la base, la otra le da la arista y la otra la da los vértices y que los chiquillos se lo han entregado y así uno va teniendo el detalle del curso.

El video termina con un comentario en el que se hace una valoración relacionada con aspectos emocionales (componente *emociones* del criterio de idoneidad emocional):

M2: ¿Algún otro comentario?

M1: Me llamó mucho la atención un chico que, al final, ya cuando estaba terminando, ¿verdad? Con el cierre. Pero ya estaba desesperado [para dar la respuesta correcta]. Ya sabía que lo tenía... O sea, ahí yo encuentro, por ejemplo, una cara de felicidad, y esa felicidad es entusiasmo porque aprendió. O sea, de hecho, por ejemplo, un alumno que aprende es un alumno feliz.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el análisis realizado, se evidencia que en una clase basada en la metodología EC surgen consensos implícitos entre el profesor que desarrolla la clase y los otros profesores participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CI. Este es un resultado coincidente con los obtenidos en Hummes *et al.* (2019) y Hummes *et al.* (en prensa). Los resultados obtenidos muestran cómo en las etapas de planificación y reflexión van apareciendo, en las reflexiones de los participantes y de manera implícita, algunos de los componentes e indicadores de los CI. En particular, utilizan de manera más amplia el criterio cognitivo, interaccional y epistémico y, en menor medida, el emocional y el de medios, mientras que no hay reflexiones sobre el criterio de idoneidad ecológica.

Una de las ventajas de trabajar con la dinámica de EC es que algunos de los aspectos que no están presentes en la reflexión del propio profesor, pueden estar presentes en la reflexión de los otros profesores que participan del proceso de instrucción. Es decir, la metodología EC se convierte en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CI surjan como consensos en la reflexión del grupo de profesores (Hummes *et al.*, 2019).

Con relación a los resultados obtenidos, un aspecto a explicar es la razón por la cual los CI funcionan implícitamente como regularidades en el discurso de los profesores sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para pautar su reflexión. Una explicación plausible (Breda *et al.*, 2018; Hummes *et al.*, 2019; Seckel, Breda, Sánchez y Font, en prensa) es que los CI reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesorado de los CI se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación, también plausible, es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque, en la formación que ha recibido, se le presentan como algo naturalizado e incuestionable en la formación que ha recibido.

Por último, señalar la limitación que implica emplear un vídeo buscado en *YouTube*, realizado por personas ajenas a la investigación.

Agradecimiento

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE-UB) y 434218 (Desarrollo de la competencia reflexiva en el contexto de prácticas progresivas de futuros profesores Educación General Básica con Mención en Matemática, Chile). Y con el apoyo del programa de Doctorado Pleno en el Exterior proceso número 88881.173616/2018-01 (Capes).

Referencias

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da metodologia japonesa de *Lesson Study* nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. En *Anais do XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, 2009*. São Paulo, Brasil: SBPN.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. y Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios valorativos y Normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un Máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Brockbank, A. y McGill, I. (2002). *Aprendizaje reflexivo en la Educación Superior*. Madrid: Morata.

Burghes, D. N. y Robinson, D. (2010). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning*. Reading, Reino Unido: CfBT Education Trust.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, EE. UU.: Erlbaum.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37- 42.

Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (Eds). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Hummes, V. B., Breda, A., Font, V. y Seckel, M. J. (en prensa) Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el *Lesson Study*. *Praxis & Saber*.

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Combined use of the Lesson Study and the Didactic Suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. *Acta Scientiae, 21*(1), 64-82.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y. y Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*. Singapur: World Scientific.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson Study: A Handbook of Teacher-led Instructional Change*. Philadelphia, EE. UU.: Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources.

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos, 38*(152), 14-30.

Murata, A. y Takahashi, A. (2002). Vehicle to connect theory, research, and practice: How teacher thinking changes in district-level Lesson Study in Japan. En D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1879-1888). Athens, EE. UU.: IGPME.

Perrenoud, P. H. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar: Invitación al viaje*. Barcelona: Graó.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *RELIME*, 19(1), 71-98.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I. y Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática, 5*, 7-24.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (en prensa). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa.*

Seckel. M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional, 11*(19), 55-75.

Seckel, M. J. y Font, V. (2016). El portafolio como herramienta para desarrollar y evaluar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 499-508). Málaga: SEIEM.

Wang-Iverson, P. y Yoshida, M. (Eds.) (2005). *Building our understanding of Lesson Study*. Philadelphia, EE. UU.: Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources.

Yin, R. (2001). *Estudo de caso: Planejamento e Métodos.* Porto Alegre, Brasil: Bookman.

Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States: Current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 140-152.

EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN EN LIBROS ESPAÑOLES DE MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII[xxix]

The development of the equation concept in Spanish mathematics books from the 18th century

Madrid, M. J.[a], León-Mantero, C.[b], Maz-Machado, A.[b] y López-Esteban, C.[c]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba, [c]Universidad de Salamanca

Resumen

La historia de las Matemáticas y la educación matemática contribuye a conocer el tratamiento matemático que distintos contenidos han recibido a lo largo de los años; por ejemplo, el conocimiento sobre la historia de las ideas algebraicas favorecerá entre otras cuestiones la comprensión de las dificultades históricas en la construcción de distintos conceptos de esta rama de conocimiento. Teniendo esto en cuenta, este trabajo se centra en la definición de ecuación para comparar las distintas definiciones que varios autores españoles del siglo XVIII dieron sobre ella. Se ha realizado un análisis de tipo histórico utilizando como herramienta el análisis de contenido de libros de Matemáticas antiguos, técnica ampliamente utilizada en investigaciones en este campo. Los resultados muestran cómo durante el siglo XVIII convivían las ideas clásicas sobre el Álgebra con las nuevas ideas que provenían en general de autores extranjeros.

Palabras clave: *ecuación, historia de las ideas algebraicas, historia de las Matemáticas y la educación matemática, siglo XVIII.*

Abstract

History of mathematics and mathematics education helps to understand the mathematical treatment that different contents have received throughout the years; for example, the knowledge about the history of algebraic ideas may help to understand the historical difficulties in the construction of different concepts of this branch of knowledge. Taking this into account, this paper focuses on the definition of equation in order to compare the different definitions that several Spanish authors of the 18th century gave about it. An analysis of historical kind has been carried out using as a tool the content analysis of old mathematics books, a technique which is widely used in research in this field. The results show how, during the 18th century, classical ideas about algebra coexisted with the new ideas that came mainly from foreign authors.

Keywords: *equation, history of algebraic ideas, history of mathematics and mathematics education, 18th century*.

INTRODUCCIÓN

La historia de las Matemáticas y de la educación matemática tienen entre sus múltiples objetivos conocer cómo ha evolucionado el tratamiento dado a distintos contenidos matemáticos a lo largo de los años. Ejemplos de ello son las investigaciones tanto a nivel nacional como internacional centradas en la evolución histórica del concepto de límite funcional (Sierra, González y López, 1999), en el estudio de la geometría analítica en España durante el siglo XIX (Sánchez y González, 2017), en el análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en libros de texto de las leyes educativas españolas: Ley General de Educación, Ley de Ordenación General del Sistema Educativo y Ley Orgánica de Educación (Conejo, Arce y Ortega, 2015), o el trabajo de

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2019). El desarrollo del concepto de ecuación en los libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 403-412). Valladolid: SEIEM.

Papadopoulos (2008), que analiza la enseñanza del cálculo del área de formas complejas y no regulares en libros de texto de griegos entre los siglos XVIII y XX.

Estos trabajos han utilizado libros de Matemáticas del pasado como una de las fuentes principales para conocer más sobre la historia de las Matemáticas y la educación matemática. Esto se debe a que, como apuntan distintos estudios, el libro de texto no ha sido solo un apoyo para la enseñanza en el aula, sino también una importante fuente de información para la investigación en educación matemática. Esto ocurre porque los libros para la enseñanza, en este caso de las Matemáticas, reflejan no solo los contenidos matemáticos que incluyen, sino que además muestran la vinculación con los avances del sistema educativo, los conocimientos científicos de cada momento, etc. (Maz-Machado y Rico, 2015).

Así mismo, la relevancia de la historia de las Matemáticas en el aula viene contrastada por distintos autores; por ejemplo, Rico (1997) apunta que puede ser un organizador curricular para la enseñanza de las Matemáticas que favorezca la motivación o la comprensión de las dificultades históricas en la construcción de un concepto determinado.

Sin embargo, en este sentido, indica Puig (2003) que para que la historia de las Matemáticas pueda utilizarse de manera provechosa en la investigación en Didáctica de las Matemáticas, es importante que esta se realice teniendo en cuenta las preguntas presentes en la investigación en Didáctica de las Matemáticas y no únicamente las preguntas propias de la investigación histórica.

Considerando que los contenidos algebraicos forman parte de las Matemáticas que se imparten en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y, por tanto, el conocimiento sobre ellos desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática es necesario, en este trabajo nos hemos centrado en conocer más sobre la evolución histórica de algunos contenidos algebraicos en los libros de Matemáticas en castellano.

Así en 1552 se publica el considerado primer libro impreso en castellano en el que se trata el Álgebra, la *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel. El propio autor indica que los contenidos que trata son cosa nueva y “jamás vista, ni declarada, y podrá ser, que ni aun entendida ni imprimida en España” (Aurel, 1552).

Sin embargo, existe un manuscrito anónimo en catalán del Monasterio de Sant Cugat que contiene contenidos algebraicos y que pudo ser escrito en la primera mitad del siglo XVI (Docampo, 2006), y por tanto previamente a la obra de Marco Aurel.

Además, el mismo año en el que Aurel publicó su libro, Gonzalo de Busto imprimió en Sevilla una nueva edición del tratado de Juan de Ortega agregándole trece ejemplos de arte mayor. No parece probable que Gonzalo de Busto extrajera de la obra de Marco Aurel sus ejemplos, no solo por la cercanía en el momento de publicación de ambas obras sino, sobre todo, porque esos ejemplos sólo contienen la aplicación de algunas reglas para resolver esos problemas sin más explicación y no utiliza el autor abreviaturas para los nombres de las especies de números, ni las italianas ni las que usa Marco Aurel, sino que escribe “cosa”, “censo”, “cubo”, etc. (Puig y Fernández, 2013).

En cualquier caso, Rey-Pastor (1934) considera que el libro de Aurel ejerció gran influencia en el desarrollo de la Matemática en España en este siglo. De hecho, varios libros de Matemáticas en castellano publicados en el siglo XVI y comienzos del XVII, en concreto las obras de Juan Pérez de Moya, de Antich Rocha o de Juan Bautista Tolrá, con la excepción de la de Pedro Núñez, incluyeron contenidos algebraicos que salieron del libro de Aurel (Puig y Fernández, 2013).

Prueba de ello es que el propio Antich Rocha indica: “… he determinado seguir a Marco Aurel Aleman, y traerte 8 igualaciones, en las quales están fundadas las respuestas desta regla” (Rocha, 1564, p. 264).

También en el siglo XVII algunos autores españoles incluyen contenidos algebraicos, por ejemplo la *Arithmetica especulativa, y practica y arte del algebra* de Andrés Puig o la *Arithmetica Universalis* de Joseph Zaragozà (Puig, 2018).

El siglo XVIII en España puede dividirse en dos periodos bien diferenciados: el periodo anterior a la expulsión de los jesuitas de España en 1767 y el periodo posterior en el que predominan instituciones civiles y militares (Gómez, 2011).

Estas instituciones militares o civiles necesitan profesores con conocimientos matemáticos para asegurar la enseñanza y estos profesores, a diferencia del periodo anterior, no son ya religiosos sino que pertenecen a la sociedad civil. Esto supone un paulatino desplazamiento de las órdenes religiosas del control educativo y científico español (Maz, 2005). Además, muchos de estos profesores escribieron distintos tratados sobre Matemáticas para la enseñanza en estas instituciones, que incluían distintos contenidos matemáticos, entre ellos contenidos algebraicos. Estos hechos convierten al siglo XVIII español en un periodo de cambios en el panorama científico, lo cual ha favorecido que distintos autores hayan enfocado sus investigaciones al estudio de manuales de Matemáticas publicados en este siglo, por ejemplo, los trabajos de Blanco (2013) o Maz y Rico (2009).

La relevancia de la enseñanza de contenidos algebraicos en el siglo XVIII se muestra no solo en la diversidad de libros de Matemáticas para la enseñanza que incluían estos contenidos, sino también por ejemplo en el hecho de que en exámenes de Matemáticas para los alumnos de la Real Maestranza de Granada, se incluyera un apartado de Álgebra en el que se debía, entre otras cuestiones, explicar su objeto, los caracteres y signos que utiliza, resolver ecuaciones de primer y segundo grado, etc. (*Exámenes de matemáticas y lengua francesa que sufrieron los alumnos en la clase de la Real Maestranza de Granada*, 1798). Teniendo esto en cuenta, en este trabajo ponemos el foco de interés en el tratamiento del concepto de ecuación en libros de Matemáticas en castellano del siglo XVIII.

METODOLOGÍA

Se trata de un trabajo de tipo descriptivo y *ex post facto*, enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico (Fox, 1981). En este trabajo se ha puesto el foco en uno de los componentes de la historia de las ideas algebraicas que destaca Puig (2003): la historia de la resolución de ecuaciones.

Por ello el objetivo de este estudio es identificar y caracterizar el tratamiento matemático dado a la definición de ecuación en distintos libros de Matemáticas publicados en España durante el siglo XVIII.

La técnica de análisis que se ha tenido en cuenta es el análisis de contenido de libros de texto, siguiendo las pautas propuestas por Maz (2009) y que han sido utilizadas en otras investigaciones en este ámbito (Madrid, Maz-Machado, León-Mantero y López-Esteban, 2017; Maz y Rico, 2009; Maz-Machado y Rico, 2015).

Para realizar este análisis se definieron como unidades de análisis cada uno de los párrafos incluidos en los textos en los que se incluía la definición de ecuación. Estos se leyeron, analizaron y posteriormente se realizó su categorización mediante una triangulación de expertos en Historia de la Educación Matemática.

De cara a la selección de las obras se consideraron los siguientes criterios adaptados de Maz (2005):

- Idioma: se consideraron únicamente los libros escritos originalmente en castellano.
- Siglo XVIII: todos los libros analizados se publicaron por primera vez en el siglo XVIII.
- Álgebra: todos los libros analizados incluyen al menos una definición de ecuación.

- Disponibilidad del texto: la lejanía en el tiempo de publicación de algunos de estos libros dificulta el acceso a ellos, por tanto se escogieron obras que estuvieran disponibles cuando fuese necesario. Esto hizo que la muestra elegida fuera intencional y por conveniencia.

La búsqueda y localización de los libros de Matemáticas se realizó a través de la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España y del catálogo digital Google Books y se seleccionaron finalmente once textos que se presentan en el apartado siguiente.

A lo largo de esta comunicación, en todas las transcripciones de las obras se han mantenido, en la medida de lo posible, tanto el lenguaje como la ortografía original, aun cuando estos no coincidan con el lenguaje ni con las normas ortográficas, de puntuación y acentuación del castellano actual.

RESULTADOS

La importancia que los autores del siglo XVIII otorgan al Álgebra queda manifiesta en las palabras de Tosca en su Introducción breve a las disciplinas matemáticas: “Entra en tercero lugar la Algebra, que con sagacidad increíble, sigue por varias, y ocultas sendas la verdad hasta encontrarla; dissuelve las questiones mas dificiles, y allana los mas intrincados laberintos” (Tosca, 1707, p. 3).

En ese mismo sentido dice Cerda cuando compara Aritmética y Álgebra: “el modo de obrar es algo diferente el uno del otro; el del Algebra es mas facil, y expedíto, porque no está atado a tantas leyes, y circunstancias, el de la Arithmetica es mas dificil, y penoso” (Cerda, 1758a, p. 6).

En cuanto a las definiciones de ecuación incluidas por estos autores, Pedro de Ulloa publica en 1706 su obra *Elementos Mathematicos* que tiene unas 25 páginas dedicadas a las ecuaciones. Para definir ecuación indica lo siguiente:

> Expressadas las Cantidades en la forma dicha, se corregiràn las expresiones, siempre que se pueda, reduciendolas à los menos terminos, que sea possible, como si la expression que se tiene, es, x+ 5 + x + 10. antes de passar àdelante, se escribirà 2x+15. Despues segun las condiciones, que explicita, ò implicitamente se dice, que tienen las Cantidades conocidas con las no conocidas se compararàn las unas con las otras para expressar la Razon geometrica, que tienen entre sì. Esta Razon, ò será de igualdad, ù de desigualdad, Si es de igualdad, expressando esse Cotejo con su señal quedarà expressada de dos modos una misma Cantidad, y esse Cotejo es lo que se llama Equacion, ò Igualacion (Ulloa, 1706, p. 127).

Vicente Tosca publica en 1709 el segundo tomo de su *Compendio mathematico* y dedica en esta obra un tratado completo al Álgebra de más de 250 páginas que subdivide en 8 libros. Define igualación brevemente como: “la comparacion, ò cotejo de una cantidad con otra igual, pero de diferente nombre, ò caracter, como x Ω b. z ---a Ω b^2 &c.” (Tosca, 1709, p. 112).

Incluye Francisco Xavier Garcia (1733) en su obra *Arithmetica especulativa y practica y arte mayor o algebra* el Libro Sexto que trata del Álgebra y de las prevenciones que son necesarias para su perfecta inteligencia. Al contrario que las obras de Ulloa o Tosca, utiliza este autor las denominaciones cosa, censo, etc. y sus abreviaturas.

> Igualacion no es otra cosa, que igualar, ò anivelar una cantidad comparada con otra, y es lo mismo (hablando vulgarmente) que una porcion de pimienta dividirla en las balanzas de un peso, que en donde cae el peso, yà se vè que ay mas que en la otra, por esso se quita de la una, y se añade en la otra, hasta tanto que las dos balanzas estèn iguales. Assi que tambien una cantidad del numero si se iguala con otra, tambien se quita, y se añade por los preceptos que se ponen para igualar la una con la otra, v.g. si se igualasen 7. co. à 42. numeros, ò 4. Censos à 36. numeros, ò 3. Censos, mas 6. cosas à 60. numeros, y assi otras muchas, que vendrán de diversos modos (Garcia, 1733, p. 378).

Pedro Padilla y Arcos incluye en su tercer tomo del *Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra* (1756) un tratado sobre el Álgebra. Define en él ecuación (Padilla y Arcos, 1756, p. 104): “Quando dos cantidades iguales en la realidad, pero diversas en la denominacion, ò expression, se igualan entre sì, resulta una equacion.”

Añade además como corolario (Padilla y Arcos, 1756, p. 104): "La expression Algebrica de una equacion serà el escribir las cantidades con sus denominaciones, y el signo de igualdad = entre ellas". E indica ejemplos como $x+ y = xy$, $a^2= y^2 – x^2$ ó $x^3 – 2xy^2 = 500$.

Thomas Cerda publica en 1758 sus dos tomos de *Liciones de Mathematica, o Elementos generales de arithmetica y algebra para el uso de la clase* (Cerda, 1758a, 1758b). Incluye en su segundo tomo unas 180 páginas dedicadas a las ecuaciones, llegando hasta el estudio de las ecuaciones superiores y al método de Newton. Se trata de un libro de Álgebra en el sentido moderno del término, que incorpora los avances recientes de su época (Maz y Rico, 2009).

Define ecuación como: "una proposicion, que afirma la igualdad de dos quantidades, ò de dos Sumas por medio de la señal (=) general de la Algebra para significar igualdad, el qual media entre dos partes, que se llaman Miembros de la Equacion" (Cerda, 1758b, p. 3).

Benito Bails publica en 1776 sus *Principios de matematica.* La obra incluye en su primer tomo un apartado con los Principios del Álgebra con unas 90 páginas. Y define ecuación como sigue:

> como todo el empeño está en averiguar á qué cantidad ó cantidades conocidas es igual la cantidad incógnita, toda cuestión matematica pára en la espresion de esta igualdad, poniendo entre las cantidades conocidas y la incógnita el signo = que, según digimos (165), significa igual a; toda espresion puesta en esta forma se llama una equacion (Bails, 1776, p. 141).

Indica como ejemplo de ecuación de primer grado $x=c$ y $x^2 = ab$ como ecuación de segundo grado.

Juan Justo Garcia publica en 1782 su obra *Elementos de aritmética, álgebra y geometría* escrita para sus propios alumnos de la Universidad de Salamanca. La obra incluye en su libro distintos capítulos sobre Álgebra, entre ellos incluye la definición de ecuación:

> Equacion es una espresion algébrica que espresa la igualdad de dos cantidades mediante el signo =, como $8 + 4 = 12$; $a +b =c$; se compone de dos miembros el primero le forman las cantidades 8 y 4, a y b que estan á la izquierda del signo; al segundo 12 y c, que estan á la derecha (Garcia, 1782, p. 92).

Se publica en 1782 la obra *Rudimentos de algebra: para facilitar la enseñanza de la Escuela Patriótica de la Real Sociedad Aragonesa de Amigos del Pais* escrita por Jayme Conde. Indica el autor brevemente lo siguiente: "Por equacion se entiende la igualación de dos cantidades" (Conde, 1782, p. 14).

También en 1782, publica en Segovia el italiano Pedro Giannini el segundo tomo dedicado del *Curso matematico para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería*, cuyo objeto es la Aritmética universal, que incluye un segundo libro dedicado a la resolución de ecuaciones. Define ecuación como: "Equacion ó Igualación se llama la comparación de dos cantidades iguales mezcladas indistintamente con cantidades conocidas é incógnitas, y expresadas de diferente modo; como x^2-a $b=bx +cd$, $x^2y – 3abx + cy^2= y^3 – d^2h$." (Giannini, 1782, p. 261).

Manuel Poy y Comes publica en 1786 en Barcelona el libro *Elementos de aritmetica y algebra para la instruccion de la juventud*. Incluye en sus elementos unos capítulos sobre Álgebra y así define en ecuación: "En esta ciencia continuamente se trata de la igualdad. La expresion algebrayca de un problema, ò de una condicion problématica, se llama equacion, ó igualacion, la qual consiste en un agregado de terminos algebraycos unidos con este signo =" (Poy y Comes, 1786, p. 215).

En 1794 publica Francisco Verdejo el *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud*. Incluye en este libro distintos capítulos sobre Álgebra, entre ellos el capítulo VII que se centra en la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado, con su aplicación a varias cuestiones. Y define ecuación como: "toda expresion compuesta de varias cantidades separadas con el signo de igualdad, tales son $a =m$, $a – b + c =q$, $m^3 – an^2 + dc^2= q^3 – phe$, &c." (Verdejo, 1794, p. 128).

La Tabla 1 muestra una comparativa de las principales diferencias entre las distintas definiciones presentadas para el concepto de ecuación en cada una de las obras.

Tabla 1. Comparativa de la definición de ecuación en las obras

	Igualar	Comparación o cotejo	Proposición	Expresión (algebraica)
Elementos mathematicos (Ulloa, 1706)		X		
Compendio mathematico. Tomo II (Tosca, 1709)		X		
Arithmetica especulativa y practica y arte mayor o algebra (Garcia, 1733)	X			
Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra (Padilla y Arcos, 1756)	X			X
Liciones de mathematica, o elementos generales de arithmetica y algebra para el uso de la clase. Tomo 2. (Cerda, 1758b)			X	
Principios de matematica (Bails, 1776)				X
Rudimentos de algebra (Conde, 1782)	X			
Elementos de aritmetica, álgebra y geometría (Garcia, 1782)				X
Curso matematico para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería (Giannini, 1782)		X		
*Elementos de aritmetica y algebra para la instruccion de la juventud (*Poy y Comes, 1786)				X
*Compendio de matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud (*Verdejo, 1794)				X

Como se ha indicado previamente el primer libro impreso en España en el que se incluyen contenidos algebraicos es el *Libro primero de Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel publicado en 1552, en él incluye el autor varios capítulos sobre la regla de la cosa o arte mayor. El concepto de ecuación en la *Arithmetica Algebratica* (Aurel, 1552) es:

> Y digo que para hazer una demanda, por la dicha regla, has de imaginar q tal cuenta, o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres probar. Y pornas q la respuesta fuesse una ℞, con la qual has de proceder con los avisos y reglas dadas, como si fuere la propia quantidad sabida, o respuesta verdadera, hasta tanto que venga a la postre la ultima respuesta, debaxo de caracteres, o quantides ocultas. La qual, o las quales diras ser ygual a lo que tu querrias q viniesse. Y luego practicaras esta tal ygualacion, por una de las 8 ygualacioones siguientes a la que será sujeta, y por ella te será declarada la valor de la ℞ oculta, y primero propuesta (Aurel, 1552, fo. 76b).

Y añade “Que quiere dezir ygual” (Aurel, 1552, fo. 77):

> En las igualaciones, siempre serán necesarias dos partes. La una, la que viene en la operacion de la demanda con caracteres ocultos y la otra, la que tu querrias que viniesse, o la que havia de venir. Por lo qual diras, que la una es ygual a la otra (Aurel, 1552, fo. 77).

Se trata por tanto de un planteamiento similar al que encontramos en la obra de Francisco Xavier Garcia, relacionando simplemente igualación con igualar; aunque las abreviaturas que este utiliza no son las mismas que Marco Aurel, sino las italianas presentes en autores españoles como Pérez de Moya, Antich Rocha, etc. Destaca sin embargo en la obra de Francisco Xavier Garcia el ejemplo propuesto de la balanza para explicar el concepto de ecuación.

Análogamente si consideramos la definición aportada por Joseph Zaragoza en su obra de 1669: "Igualacion es la conparacion de una Cantidad con otra igual de diferente nombre, ó la igualdad de dos Cantidades en el nõbre diferentes" (Zaragoza, 1669, p. 330).

Esta es similar a la planteada posteriormente por Ulloa o por Tosca. Además, estos dos autores son los únicos entre los autores del siglo XVIII estudiados que utilizan, igual que Zaragoza, el Ω en lugar del =.

Colin MacLaurin, quien fue seguidor de Newton, escribió la obra *Treatise of Algebra* en la que se dedicó fundamentalmente a comentar la obra *Arithmetica Universalis* de Newton (Hormigón, 1994), en ella indica que "An equation is a "Proposition asserting the Equality of two Quantities". It is expressed most commonly by setting down the Quatinties, and placing the sign (=) between them" (MacLaurin, 1748, p. 61). Similar definición a la que posteriormente plantea Cerdá, conocedor además de la obra de MacLaurin, a la que hace referencia en su página 20 para hablar de un método para despejar ecuaciones con varias incógnitas.

Blanco (2013) indica que aunque Pedro Padilla no se refiere explícitamente a la *Enciclopedia* de D'Alambert y Diderot en su obra, algunas clasificaciones que presenta este autor muestran la temprana recepción y circulación de la *Enciclopedia* en España. En ese sentido, si nos fijamos en la definición de ecuación que incluye Berthoud (1751) en la *Enciclopedia* podemos ver cierta similitud: una expresión de la misma cantidad presentada bajo dos denominaciones diferentes.

A su vez Bézout publica en 1766 el tercer tomo de su *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* dedicado al Álgebra, que Hormigón (1994) considera fue fuente de inspiración para Bails y sus *Elementos*. Incluye el autor la siguiente definición de ecuación:

> Pour marquer que deux quantités sont égales, on les sépare l'une de l'autre par ce signe =, qui se pronoce par le mot égale, ou par les mots est égal à; ainsi cette expresision a = b, se prononceroit en disant a égale b, ou a est égal à b.
>
> L'assamblage de deux ou de plusieurs quantités séparées ainsi par le signe =, est ce qu'on appelle une Equation (Bézout, 1766, pp. 45 – 46).

Dicha definición tiene también similitudes con la planteada por Bails en su obra *Principios* de 1776. A su vez, indica Robledo (2010) que los *Elementos* de Juan Justo Garcia son una adaptación de, entre otros, los *Elementos* de Bails, y si comparamos la definición de ecuación dada por ambos autores también es posible observar similitudes.

En definitiva, estos ejemplos son una muestra de cómo distintos autores extranjeros o españoles son conocidos por los autores de estas obras, ejemplo de ello es el Resumen histórico sobre el Álgebra de Juan Justo Garcia en el que menciona gran variedad de autores, por ejemplo, Diofanto, Hipatia, Lucas de Burgo, Cardano, Pedro Núñez, Euler, Lagrange, Descartes, Newton, Leibniz, Fontaine o MacLaurin entre otros, o Tosca que menciona en su obra a Michel Rollé con su *Tratado de álgebra*, etc.

Finalmente, comparando con la definición actual de ecuación que puede encontrarse en un libro de texto de primero de ESO:

"Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas" (Pancorbo y Ruiz, 2015, p. 122), entendiendo además por expresión algebraica "una expresión matemática en la que intervienen letras, números y símbolos de operaciones matemáticas" (Pancorbo y Ruiz, 2015, p. 119).

Vemos que en las definiciones de Bails o Verdejo ya aparecerá el termino expresión, o en el caso de Juan Justo Garcia o de Manuel Poy y Comes expresión algebraica, más cercano al actual. Sin embargo, dentro de un libro de texto actual no se incluiría como ejemplo de ecuación: 8 + 4 = 12, que sin embargo sí incluye Juan Justo Garcia.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

Como indica Rico (1997), el conocimiento sobre las dificultades en el desarrollo de un concepto matemático que nos aporta la historia de las ideas algebraicas puede facilitar su comprensión. Los contenidos algebraicos forman parte de muchos de los libros de matemáticas publicados en el siglo XVIII, las distintas definiciones de ecuaciones incluidas por los autores nos permiten conocer cómo convivían en este siglo XVIII las concepciones de autores del pasado junto con las nuevas ideas matemáticas que provenían en general del extranjero.

Ejemplo de ello es el libro de Garcia (1733) que sigue utilizando los nombres: cosa, censo, etc. que aparecían ya en el primer libro impreso de álgebra en España en 1552, mientras que definiciones como la de Manuel Poy y Comes se acercan más a la concepción de ecuación que se puede encontrar en un libro de texto actual. Este estudio nos muestra a su vez cómo las obras de muchos autores extranjeros eran ya conocidas en España, por ejemplo Cerda (1758b) menciona las obras de autores extranjeros como MacLaurin, o Juan Justo Garcia que en su resumen histórico sobre el Álgebra cita a Descartes, Newton o MacLaurin, entre otros.

La continuación de este trabajo se centrará en estudiar el tratamiento matemático dado a otros contenidos algebraicos, por ejemplo: la resolución de ecuaciones de primer o segundo grado, de ecuaciones con varias incógnitas, etc. El propósito será confirmar si las diferencias que muestran los autores en la definición de ecuación se mantienen en el tratamiento de otros contenidos algebraicos, y si las similitudes encontradas con libros publicados por autores extranjeros se mantienen en el resto de contenidos, permitiéndonos por tanto valorar su influencia. Así mismo se podrán considerar los contextos en los que se presentan los contenidos para valorar las diferencias según el tipo de obra.

La realización de actividades en las que se analicen ventajas e inconvenientes de las distintas definiciones y de la actual resulta una de las posibles contribuciones a la Didáctica de la Matemática, como plantearon ya Meavilla y Oller (2014) con el simbolismo algebraico del siglo XVI.

Referencias

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica*. Valencia: Casa de Ioan de Mey Flandro.

Bails, B. (1776). *Principios de matematica donde se enseña la especulativa, con su aplicacion a la dinámica, hydrodinámica, óptica, astronomía, geografia, gnomónica, arquitectura, perspectiva, y al calendario*. Madrid: Joachin Ibarra.

Berthoud, F. (1751). Equation. En D. Diderot y J. D'Alembert (Eds.), *Encyclopedie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome Cinquieme* (pp. 842- 871). París, Francia: Chez Briasson, David, Le Breton, Durand.

Bézout, E. (1766). *Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, troisième partie, contenant l'algèbre & l'application de cette science à l'arithmétique & à la géométrie*. París, Francia: Chez J. B. G. Musier.

Blanco, M. (2013). The mathematical courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in eighteenth-century Spain and France. *Science & Education, 22*(4), 769-788.

Cerda, T. (1758a). *Liciones de mathematica, o elementos generales de arithmetia y algebra para el uso de la clase. Tomo 1*. Barcelona: Francisco Suria.

Cerda, T. (1758b). *Liciones de mathematica, o elementos generales de arithmetia y algebra para el uso de la clase. Tomo 2*. Barcelona: Francisco Suria.

Conde, J. (1782). *Rudimentos de algebra para facilitar la enseñanza de la Escuela Patriótica de la Real Sociedad Aragonesa de Amigos del Pais*. Zaragoza: Blas Miedes.

Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM, 8*, 51–71.

Docampo, J. (2006). Reading Luca Pacioli's *Summa* in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic. *Historia Mathematica*, *33*(1), 43–62.

Exámenes de matemáticas y lengua francesa que sufrieron los alumnos en la clase de la Real Maestranza de Granada (1798). Granada: Imprenta Nueva.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.

Garcia, F. X. (1733). *Arithmetica especulativa y practica y arte mayor o algebra*. Zaragoza: Imprenta Real de Luis de Cueto.

Garcia, J. J. (1782). *Elementos de aritmetica, álgebra y geometría*. Madrid: Joachín Ibarra.

Giannini, P. (1782). *Curso matematico para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería. Tomo Segundo*. Segovia: Antonio Espinosa.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Épsilon, 77*, 9–22.

Hormigón, M. (1994). *Las matemáticas en el siglo XVIII.* Madrid: Akal.

MacLaurin, C. (1748). *A Treatise of Algebra*. Londres, Reino Unido: A. Millar and J. Nourse.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del Siglo XVI. *Bolema, 31*(59), 1082–1100.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5–20). Santander: SEIEM.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Las *Liciones de mathemáticas* de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma*, *60*, 35–41.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME*, *18*(1), 49–76.

Meavilla, V. y Oller, A. M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS, 87*, 59-68.

Padilla y Arcos, P. (1756). *Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra*. *Tomo 3.* Madrid: Imprenta de Antonio Marin.

Pancorbo, L. y Ruiz, G. (2015). *Matemáticas 1.2.* Barcelona: Vicens Vives.

Papadopoulos, I. (2008). Complex and non-regular shapes: Their evolution in Greek textbooks (1749-1971). *Science & Education*, *17*(1), 115–129.

Poy y Comes, M. (1786). *Elementos de aritmetica y algebra para la instruccion de la juventud*. Barcelona: Francisco Suria y Burgada.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97–108). Granada: SEIEM.

Puig, L. (2018). *Lo viejo y lo nuevo en la enseñanza del álgebra en el siglo XVII en España: la Arithmetica especulativa, y practica y arte del algebra de Andrés Puig frente a la Arithmetica Universalis de Joseph Zaragozà.* Comunicación presentada en el Grupo de Investigación "Historia de las matemáticas y educación matemática (HMEM)", XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Gijón.

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143–150). Granada: Comares.

Rey-Pastor, J. (1934). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid: Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39–59). Barcelona: ICE - Horsori.

Robledo, R. (2010). Juan Justo García. En J. M. Lama (Ed.), *Los primeros liberales españoles: la aportación de Extremadura, 1810-1854 (biografías)* (pp. 27-48). Badajoz: Diputación de Badajoz, Departamento de Publicaciones.

Rocha, A. (1564). *Arithmetica*. Barcelona: Casa de Claudio Bornat a la Águila Fuerte.

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX : estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de Las Ciencias*, *35*(3), 89–106.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 463–476.

Tosca, T. V. (1707). *Compendio mathematico. Tomo I* . Valencia: Antonio Bordazar.

Tosca, T. V. (1709). *Compendio mathematico. Tomo II*. Valencia: Antonio Bordazar.

Ulloa, P. de. (1706). *Elementos mathematicos*. Madrid: Antonio Gonçalez de Reyes.

Verdejo, F. (1794). *Compendio de matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud* (1ª ed.). Madrid: Viuda de Ibarra.

Zaragoza, J. (1669). *Arithmetica universal que comprehende el arte menor, y maior, algebra vulgar, y especiosa*. Valencia: Geronimo Vilagrasa.

[xxix] Esta comunicación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

INTRODUCIENDO LOS REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES DURANTE DOS CICLOS DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN[xxx]

Introducing inverse proportional distributions during two cycles of Action-Research

Martínez-Juste, S.[a], Muñoz-Escolano, J. M.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

Los repartos inversamente proporcionales suponen un tipo de problema de proporcionalidad clásico que ha ganado nuevamente importancia tras su inclusión explícita en el currículo oficial español. Sin embargo, la enseñanza tradicional se orienta hacia la aplicación de técnicas no justificadas en problemas poco realistas cuyo enunciado solicita explícitamente realizar un reparto inversamente proporcional. En este trabajo, en el marco de una Investigación-Acción, se analizan las respuestas de alumnos de 2º de secundaria sin instrucción específica previa a una tarea introductoria sobre repartos inversamente proporcionales. En el proceso en que se llevó a cabo la experimentación se introdujeron cambios sustanciales en el contexto del problema planteado que promovieron la aparición de estrategias de resolución incipientes que un instructor puede aprovechar para formalizar técnicas de resolución generales.

Palabras clave: *repartos inversamente proporcionales, razonamiento proporcional, matemáticas, secundaria, Investigación-Acción.*

Abstract

Inversely proportional distributions are a type of conventional proportionality problem that has gained importance again due to its explicit inclusion in the official Spanish curriculum. However, traditional teaching focuses on the application of unjustified techniques to unrealistic problems whose statement explicitly requests the application of an inversely proportional distribution. In this paper, in the frame of Action-Research, we analyse the answers to an introductory task about inversely proportional distributions of 8th grade students without a previous specific instruction on that type of problems. In the process in which the experimentation was carried out, we introduced significant changes in the context of the proposed problem that promoted the emergence of incipient resolution strategies that an instructor could benefit from in order to formalize general resolution methods.

Keywords*: inverse proportional distributions, proportional reasoning, mathematics, secondary, Action-Research.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Para muchos autores, el desarrollo del razonamiento proporcional es una de las piezas clave de la aritmética escolar (Lesh, Post y Berh, 1988). De entre los diversos contextos realistas (Blanco, 1993) en los que surgen situaciones problemáticas asociadas a la proporcionalidad aritmética (Oller-Marcén y Gairín, 2015), los repartos proporcionales suponen un ejemplo clásico (Gómez, 1999) que ha cobrado importancia con la última reforma educativa. De hecho, los repartos directa e inversamente proporcionales aparecen explícitamente en el currículo de 2º curso de Educación

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 413-422). Valladolid: SEIEM.

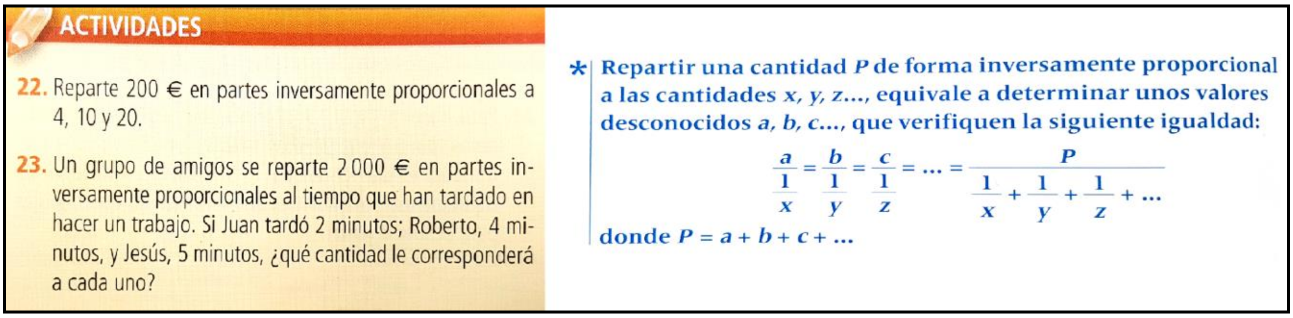
Secundaria Obligatoria (ESO) desarrollado a partir la LOMCE[xxxi] (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2017).

Un reparto inversamente proporcional puede caracterizarse como sigue (Martínez-Juste et al., 2017): Dada una cantidad K de una magnitud M_2 y dado un conjunto de pesos o cantidades de una magnitud M_1, $\{w_1, w_2,\ldots, w_p\}$, debemos encontrar una serie de cantidades de la magnitud M_2, $\{k_1, k_2,\ldots, k_p\}$, de forma que $k_1+\ldots+k_p = K$ y $k_i/k_j = w_j/w_i$ para toda pareja de índices i, j.

Este tipo de tarea ha aparecido históricamente en libros y manuales de matemáticas. En el Libro de los Nueve Capítulos (*Jiuzhang Suanshu*, s. III) aparece, por ejemplo, el siguiente problema resuelto mediante un reparto inversamente proporcional (Kangshen, Crossley y Lun, 1999, p. 166):

> Hay cinco oficiales de distintos rangos: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao y Gongshi. Deben pagar un total de 100 monedas. Si el pago debe compartirse de acuerdo con sus rangos, el de mayor rango paga menos y el de rango más bajo paga más, Di: ¿cuánto debe pagar cada uno?

El tratamiento en los libros de texto (Oller-Marcén, 2012) suele iniciarse planteando un contexto de reparto en el que se solicita explícitamente a los alumnos hacerlo de forma "inversamente proporcional" (Figura 1, izquierda). Para su resolución se indica generalmente que debe realizarse un reparto directamente proporcional a los inversos de los pesos w_1, w_2, …, w_p. La resolución pasa entonces por construir la constante de proporcionalidad $K/(1/w_1+ 1/w_2 +\ldots+ 1/w_p)$ o, equivalentemente, $k_i/(1/w_i)$, valor al que no suele darse una interpretación en el contexto del problema (Figura 1, derecha).


ACTIVIDADES

22. Reparte 200 € en partes inversamente proporcionales a 4, 10 y 20.

23. Un grupo de amigos se reparte 2 000 € en partes inversamente proporcionales al tiempo que han tardado en hacer un trabajo. Si Juan tardó 2 minutos; Roberto, 4 minutos, y Jesús, 5 minutos, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno?

* Repartir una cantidad P de forma inversamente proporcional a las cantidades $x, y, z, \ldots$, equivale a determinar unos valores desconocidos $a, b, c, \ldots$, que verifiquen la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \ldots = \frac{P}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\ldots}$$

donde $P = a + b + c + \ldots$

Figura 1. Repartos inversamente proporcionales en un libro de texto (Carrasco, Martín y Ocaña, 2011)

Considerar el conocimiento informal previo de los alumnos es uno de los aspectos principales que los docentes deben tener en cuenta en su planificación (Silvestre y da Ponte, 2012, p. 74). Así pues, parece interesante analizar las respuestas dadas por alumnos que no han recibido instrucción previa (Fernández, 2009; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2015) en las tareas que el docente quiere introducir en los procesos de enseñanza.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en estudiar si distintos contextos realistas en los que se puede plantear una tarea de reparto inversamente proporcional pueden fomentar la elección o no de un modelo proporcional por parte de estudiantes sin instrucción previa, así como identificar distintas estrategias de resolución que surgen en cada uno de los contextos. De este modo, tratamos de encontrar un contexto para introducir este tipo de tareas que sea adecuado para fomentar las ideas que se quiere que los alumnos pongan en juego. Para ello, analizamos las producciones de alumnos de 2º de ESO que no han recibido instrucción previa ante dos tareas de repartos inversamente proporcionales planteadas en contextos realistas muy diferentes.

MARCO TEÓRICO

Desde el punto de vista estructural, las situaciones de repartos proporcionales (tanto directos como inversos) son casos particulares de exposiciones, tal como define Freudenthal (1983) en su análisis fenomenológico de la proporcionalidad, y están íntimamente relacionadas con las estructuras parte-parte-todo (Cramer y Post, 1993). Los individuos que son sujeto del reparto forman un conjunto

$\Omega=\{x_1,\dots, x_n\}$ sobre el que se consideran dos espacios de medida (ω_1,M_1) y (ω_2,M_2). Las cantidades asignadas a los individuos en el primer espacio de medida ("magnitud según la cual se reparte", M_1) son lo que hemos denominado anteriormente "pesos", es decir, $\omega_1(x_i)=w_i$. El problema consiste en determinar las cantidades $\omega_2(x_i)=k_i$ de la "magnitud a repartir" (M_2), de forma que $\Sigma\omega_2(x_i)=K$ y de forma que la aplicación f entre las magnitudes M_1 y M_2 definida por $f(\omega_1(x_i))=\omega_2(x_i)$ sea de proporcionalidad directa o inversa, según el caso.

En un contexto genérico de reparto de una cantidad de magnitud a partir de cantidades de otra magnitud, además del modelo proporcional que acabamos de describir, existen otros posibles modelos de reparto. Una revisión de la literatura sobre actuaciones de alumnos ante situaciones de reparto lleva a una clasificación de los modelos en tres bloques: modelos de reparto equitativo, modelos proporcionales y modelos de compensación aditiva (Antequera y Espinel, 2011; Peled y Balacheff, 2011; Sánchez, 2013). Además, la elección de uno u otro modelo por parte de los estudiantes puede estar fuertemente influenciada por el contexto en que se presenta la tarea (Sánchez, 2013) y por motivos extramatemáticos (Peled y Bassan-Cincinatus, 2005). Los trabajos que abordan el tratamiento escolar de los repartos proporcionales y clasifican algunas de las técnicas de resolución habituales suelen centrarse en los repartos directamente proporcionales (Gómez, 1999; Sánchez, 2013) ya que, como hemos comentado, los repartos inversamente proporcionales habitualmente se reducen a un reparto directamente proporcional y, en consecuencia, son escasamente abordados en la literatura de manera específica, pese a que distintos estudios, como por ejemplo (Fisher, 1988; Nunes, Desli y Bell, 2003), ponen de manifiesto la especificidad de la proporcionalidad inversa en distintos niveles educativos

Oller-Marcén (2012) clasifica las estrategias de resolución de repartos proporcionales en libros de texto distinguiendo si se razona de forma aritmética, interpretando las operaciones realizadas, si se utilizan fórmulas como la regla de tres, si se usan propiedades de series de razones, si se establece un algoritmo de resolución o si se razona de forma algebraica. Por su parte, Gómez (1999) describe varias estrategias de resolución presentes en libros antiguos distinguiendo entre aritméticas, algebraicas y basadas en la regla de tres. Además, también distingue si en las anteriores se usan razones o tasas (Lamon, 1993).

Las estrategias algebraicas son utilizadas generalmente en los planteamientos parte-parte ya que implican el manejo de dos cantidades desconocidas, k_i y k_j. Por otro lado, las estrategias aritméticas hacen uso de relaciones parte-todo, que involucran una cantidad desconocida y la constante de proporcionalidad. Por tanto, en este caso, el reparto proporcional puede abordarse mediante la resolución de varios problemas de valor perdido (Cramer y Post, 1993) de proporcionalidad simple. En el caso de los repartos inversamente proporcionales, las estrategias aritméticas que hacen uso de relaciones parte-todo involucran el cálculo de la cantidad $1/(1/w_1 + 1/w_2 +\dots+ 1/w_p)$, que puede ser interpretada como una cantidad de la magnitud M_1.

METODOLOGÍA

El presente trabajo forma parte de una propuesta de enseñanza completa para la proporcionalidad aritmética en 1º y 2º de ESO (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Pecharromán, 2014). Debido a su utilidad en las investigaciones sobre Didáctica de la Matemática (Romera, 2012; Novo, Alsina, Marbán y Berciano, 2017) y teniendo en cuenta el doble papel como profesor e investigador de uno de los autores, la metodología empleada para la experimentación fue la Investigación-Acción (en adelante, I-A).

La idea de la I-A es reflexionar y actuar sobre la práctica educativa intentando mejorarla (McNiff, 2013). Esta metodología se compone de cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión. En la primera se analiza el problema de investigación y se realiza una propuesta de enseñanza que se pone en práctica en la fase de acción. En la fase de acción el profesor-investigador recoge información que se organiza y trata durante la fase de observación. Por último, se analizan y valoran los resultados obtenidos en la fase de reflexión para extraer conclusiones y tomar decisiones con el objetivo de mejorar el proceso. Las fases anteriores se suceden cíclicamente, tomando como punto de partida en cada ciclo las conclusiones del ciclo anterior (Elliot, 1990).

La propuesta didáctica completa se diseñó utilizando la metodología del Análisis Didáctico (Gallardo y González, 2006; Gómez, 2002) y se apoya en varios conceptos fundamentales: la idea de razón como tanto por uno, las constantes de proporcionalidad (directas e inversas), el trabajo con magnitudes y la interpretación de las operaciones binarias entre cantidades de magnitud. Para introducir los diferentes contenidos se siguió una metodología de enseñanza a través de la resolución de problemas (English y Gainsburg, 2015; Gaulin, 2001; Lopes y Costa, 1996) y se trabajó en parejas ya que era esa la organización usual del aula. Los alumnos se enfrentan inicialmente a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción específica previa sobre aquello que se pretende introducir. Es por ello por lo que las tareas iniciales elegidas para introducir los repartos inversamente proporcionales deben hacer surgir entre los alumnos ideas y estrategias espontáneas que permitan al profesor-investigador generar un debate a partir de las producciones de los alumnos para contrastar y formalizar los diferentes acercamientos a la solución del problema.

El trabajo que presentamos se desarrolla dentro de los dos primeros ciclos de I-A y se refiere a la tarea introductoria de repartos inversamente proporcionales. Estos ciclos de I-A se llevaron a cabo en dos grupos naturales de 2º de ESO del IES Leonardo de Chabacier (Calatayud) durante los cursos 2014-2015 y 2016-2017. Participaron 20 alumnos en cada uno de los ciclos, por lo que se recogieron 10 producciones (una por pareja) en cada ciclo. La situación introductoria para los repartos inversamente proporcionales se realizó tras 7 sesiones de trabajo sobre problemas de valor perdido y comparación cuantitativa y cualitativa (Cramer y Post, 1993), tanto en situaciones de proporcionalidad simple como compuesta. En ambos ciclos, los alumnos afrontaron la situación introductoria sobre repartos inversamente proporcionales con los mismos conocimientos sobre proporcionalidad, pero sin haber trabajado este tipo de problemas.

El problema inicial propuesto era susceptible de ser modelizado según una situación de reparto inversamente proporcional. No obstante, la situación planteada no contiene referencias en su enunciado al tipo de problema o a posibles estrategias de resolución.

En el primer ciclo exploratorio se escogió un contexto de reparto de dinero entre dos personas buscando compensar una situación en la que uno de los participantes en el reparto partía en situación de desventaja:

> Una abuela tiene 60.000 € que quiere repartir entre sus dos únicos nietos. Uno de ellos tiene un sueldo de 1.000 € al mes, mientras que el otro gana 3.000 €. La abuela ha decidido que el reparto debe hacerse de forma que se compense la diferencia de sueldos de sus nietos. ¿Cómo debería repartir su dinero?

El análisis de las producciones de los alumnos en este primer ciclo aconsejó cambiar el problema introductorio. Así, para el segundo ciclo, se decidió prescindir de un contexto de reparto de dinero entre personas e introducir un problema en el que la constante de proporcionalidad y la cantidad $1/(1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p)$ tuvieran una interpretación asequible en términos de cantidades de una determinada magnitud. Como justificamos más adelante, el problema introductorio en el segundo ciclo de I-A fue el siguiente:

> Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

RESULTADOS DE LAS FASES DE ACCIÓN Y DE REFLEXIÓN

Análisis de las producciones de los alumnos en el problema introductorio del primer ciclo

De las 10 parejas de alumnos, una entregó la tarea en blanco. Entre las restantes 9 producciones, encontramos 7 parejas que usan modelos de reparto no proporcionales y 2 parejas que usan un modelo de reparto inversamente proporcional.

Los modelos no proporcionales son todos de compensación aditiva, que buscan compensar la diferencia de sueldo mensual entre los individuos involucrados en el reparto. Aparecen esencialmente dos tipos de respuestas entre estas parejas. En 4 casos (aunque uno de ellos inacabado) se realiza la siguiente secuencia de operaciones: dividir equitativamente el dinero a repartir, calcular la diferencia mensual entre los sueldos y concluir que al que más cobra hay que darle la mitad del dinero menos la diferencia de sueldos y al que menos cobra la mitad del dinero más la diferencia de sueldos (Figura 2, izquierda). De esta forma, la diferencia total entre las cantidades recibidas es el doble de la diferencia absoluta de lo que cobran mensualmente, es decir, deben darse 28000 € al nieto que más cobra y 32000 € al nieto que menos.

En el otro tipo de producción aditiva las 3 parejas responden que los nietos deben cobrar 29000 € y 31000 €, según tienen el mayor o el menor sueldo. En este caso, los alumnos comienzan restando la diferencia de sueldos a la cantidad total a repartir, después reparten esta cantidad equitativamente y suman la diferencia extraída a la parte correspondiente al nieto con menor sueldo (Figura 2, derecha).

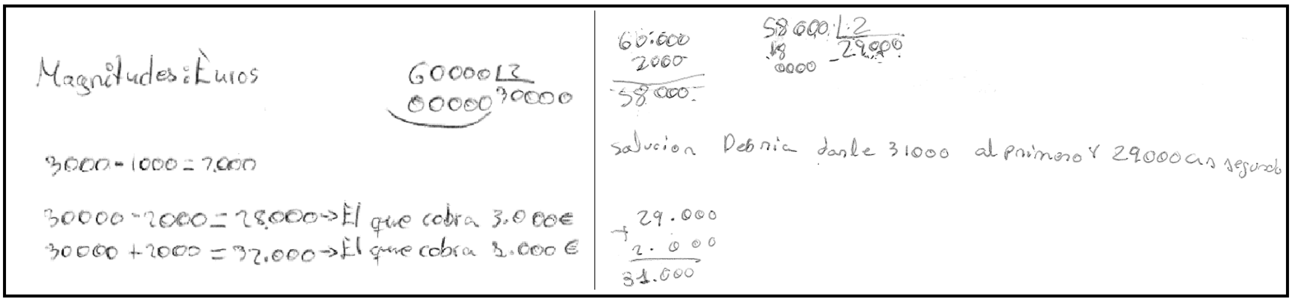


Figura 2. Modelos de repartos no proporcionales

Las otras dos parejas aplican un modelo proporcional, realizando una compensación multiplicativa de la comparación entre los sueldos de los nietos. Una de ellas da una solución incorrecta de acuerdo al modelo inversamente proporcional puesto que reparten el doble de dinero al nieto con menor sueldo que al nieto con mayor sueldo (Figura 3, izquierda). La otra pareja realiza correctamente el reparto, al nieto que gana el triple que el otro le reparten la tercera parte (15000 €) de lo que reparten al nieto que gana menos (45000 €). Además, esta pareja deja constancia de la secuencia de operaciones que realiza (Figura 3, derecha).

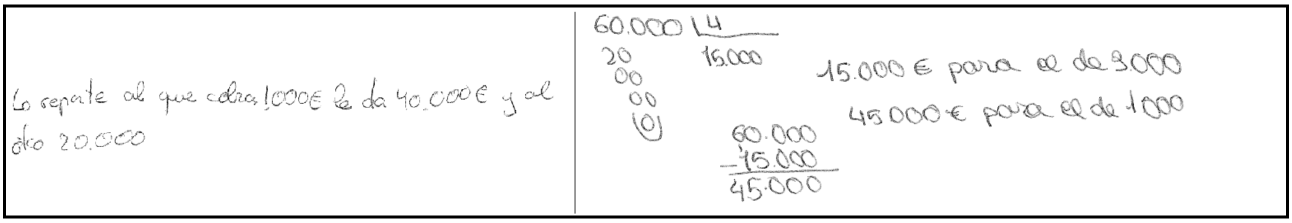


Figura 3. Modelos de repartos proporcionales

Reflexiones a partir del análisis del primer ciclo

El equipo de investigadores, tras la información recogida en la fase de acción, reflexiona sobre los resultados para intentar introducir mejoras en la situación introductoria. Como hemos observado, el contexto no promueve el uso de un modelo de reparto inversamente proporcional utilizando la relación multiplicativa entre los sueldos. De hecho, tan solo una de las parejas lo aplica correctamente. Este escaso éxito hace pensar al equipo investigador que para poder formalizar estrategias de resolución en modelos de reparto inversamente proporcionales convendría buscar un contexto diferente que minimizara el uso de modelos de compensación aditiva.

Además, la única producción que utiliza correctamente un modelo de reparto inversamente proporcional tiene, al menos, dos rasgos interesantes. En primer lugar, observamos que los alumnos aplican el hecho de que un reparto inversamente proporcional a pesos 1000 y 3000 es equivalente a un reparto inversamente proporcional a pesos 1 y 3. Por otro lado, usan una estrategia que, si bien podría formalizarse para repartos inversamente proporcionales entre dos individuos, sería difícilmente generalizable a repartos inversos entre 3 o más individuos porque, una vez obtenida la cuarta parte del dinero, los alumnos reparten a cada nieto el resultado de multiplicar esa cantidad por el peso contrario que le correspondía al individuo.

Así pues, esta producción podría aprovecharse para, por un lado, introducir la normalización de pesos en un reparto y por otro para generar una estrategia de resolución aplicable en modelos de reparto inversamente proporcionales entre dos individuos sustentada en la secuencia de operaciones realizada por los alumnos que lleva a la igualdad $k_1=(K/(w_1+w_2))\cdot w_2$ y la análoga para k_2.

A pesar del interés, que pueden tener los debates que podrían generarse sobre su normalización y formalización, esta estrategia no admite una generalización inmediata a repartos con tres pesos. Además, dado el contexto del problema, no resulta sencillo interpretar las operaciones que se realizan.

Por todo lo anterior, el equipo de investigadores decidió cambiar el problema introductorio sobre repartos inversamente proporcionales para explorar las potencialidades de otros contextos. Para ello, tras un repaso a la fenomenología histórica de la proporcionalidad, se encontró el problema siguiente (Kangshen et al., 1999, p. 340):

> Ahora una persona puede enderezar 50 cuerpos de flecha en un día, o colocar plumas para 30 flechas, o instalar 15 puntas de flecha. Asume que endereza cuerpos, coloca plumas instala puntas de flecha a mano y dedicándose solo a una tarea por vez. Di: ¿cuántas flechas puede preparar en un día?

En este problema, aparece un contexto de reparto de tiempo donde los pesos vienen dados por la velocidad a la que un artesano hace cada una de las partes en que componen una obra. De esta manera, los inversos de los pesos son interpretables como el tiempo que el artesano debe dedicar a cada una de las piezas. Así $1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p$ puede interpretarse como el tiempo que el artesano tarda en hacer cada una de las obras y la constante de proporcionalidad $K/(1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p)$ como el número de obras que pueden completarse en el tiempo del que se dispone. Por tanto, las cantidades k_i son el tiempo que el artesano debe dedicar a hacer un número de piezas de "tipo i" igual al número de obras.

Para el problema introductorio del segundo ciclo, se modificó el problema anterior presentándolo en un ámbito más cercano a los alumnos, en el que un artesano fabrica muñecos en lugar de flechas. Además, al igual que en el primer ciclo, ambos un peso es múltiplo de otro.

Análisis de las producciones de los alumnos en el problema introductorio del segundo ciclo

En este segundo ciclo no hubo respuestas en blanco. De las 10 parejas, ninguna utiliza modelos de compensación aditiva, 3 recurren a un modelo de reparto equitativo y las 7 parejas restantes optan por un modelo de reparto inversamente proporcional aplicado de forma correcta.

Las parejas que realizan un reparto equitativo calculan a su vez el número total de piezas de cada tipo que el artesano haría en dicho tiempo (Figura 4, izquierda y centro), a excepción de una pareja que, pese a repartir el tiempo en dos partes iguales, interpreta de forma errónea el resultado (Figura 4, derecha).

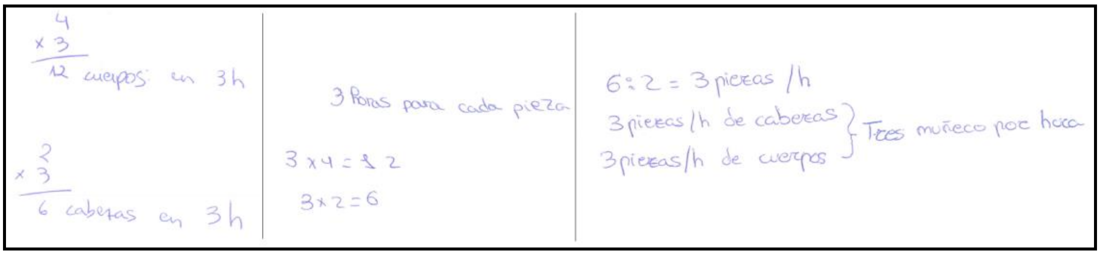


Figura 4. Repartos mediante un modelo de reparto equitativo

En el resto de las producciones, algunos alumnos responden que se debe dedicar el doble de tiempo a la tarea que se realiza a la mitad de velocidad (Figura 5, abajo izquierda). Es decir, responden que, de las 6 horas, debe dedicar 2 horas a hacer los cuerpos y 4 horas a hacer las cabezas. Además, todos ellos interpretan la constante de proporcionalidad 8 como el número total de muñecos (o de piezas de cada tipo para hacer muñecos enteros) que hace el artesano, a pesar de que el problema no lo solicitaba (Figura 5). De hecho, la búsqueda de esta constante de proporcionalidad es la que parece haber guiado el razonamiento de muchas de las parejas que explicitan argumentos del tipo "Hemos buscado hacer las mismas piezas", "… que haya muñecos enteros", etc.

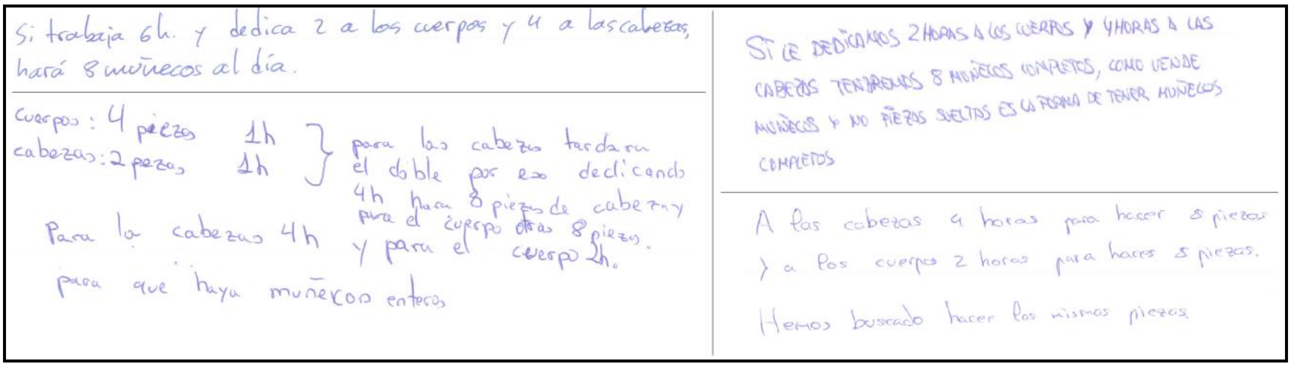


Figura 5. Interpretaciones de la constante de proporcionalidad

Cinco de las parejas utilizan resoluciones similares a la descrita en el primer ciclo. Dos de ellas realizan explícitamente la suma de los pesos y la división del tiempo total por la suma de los pesos (Figura 6, izquierda) si bien la sencillez de la estructura numérica en esta situación provoca que no se expliciten todas las operaciones. Otra respuesta interesante puede verse en la Figura 6 (derecha) donde los alumnos establecen los inversos de los pesos y los interpretan correctamente como el tiempo que se dedica a hacer cada una de las piezas.

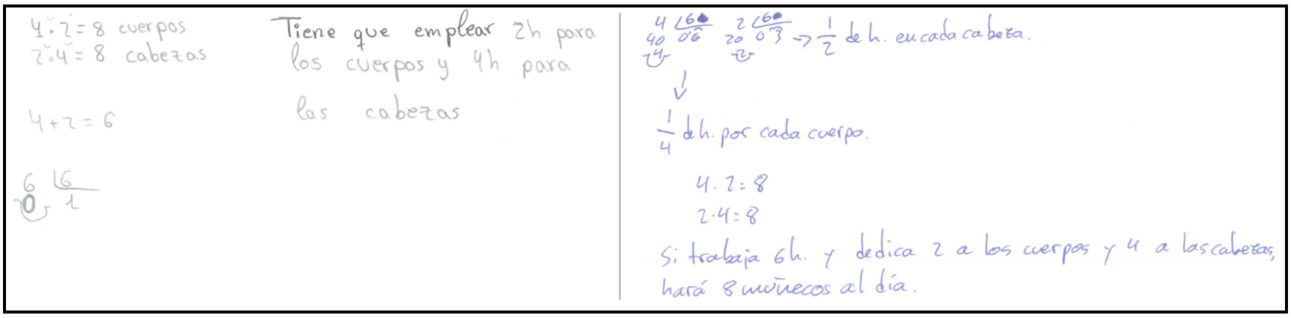


Figura 6. Resoluciones utilizando un modelo de reparto inversamente proporcional

Reflexiones a partir del análisis del segundo ciclo

Los cambios introducidos en el nuevo problema han producido cambios sustanciales en las respuestas de los alumnos respecto al primer ciclo de I-A. En primer lugar, el número de respuestas que utilizan un modelo de reparto inversamente proporcional es mayoritario, pasando de 2 (solo una de ellas correcta) a 7 (todas ellas correctas).

La situación que debía modelizarse ha permitido a los alumnos interpretar la constante de proporcionalidad. Además, el significado de dicha constante ha guiado el camino hacia una correcta resolución.

Por otro lado, las respuestas que no usan un modelo de reparto inversamente proporcional no recurren a modelos de compensación aditiva. Este hecho podría estar influenciado no solo por el contexto del problema sino porque las magnitudes M_1 y M_2 son diferentes.

El tipo de magnitudes elegidas parece ser también la clave para la aparición de ideas que podrían desembocar, con un trabajo más amplio, en la formalización de una estrategia de resolución aritmética general. Que M_2 sea una magnitud intensiva ha facilitado que una pareja de alumnos haya podido interpretar correctamente los inversos de los pesos. Este es el primer paso para poder realizar una interpretación de la cantidad $1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p$ que en este problema se puede interpretar como el tiempo que se tarda en hacer un muñeco completo.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta el número de parejas que utilizan un modelo de reparto proporcional, así como las ideas puestas en juego en las producciones de los alumnos, el contexto utilizado en el segundo ciclo parece más adecuado que el del primero para introducir problemas de repartos inversamente proporcionales ya que permite al docente generar una discusión más rica en los debates posteriores. Aun así, sería conveniente explorar qué sucedería en contextos similares con más individuos entre los que repartir y con diferentes estructuras numéricas que podrían generar mayores dificultades o influir en la estrategia de resolución empleada (Riehl y Steinthorsdottir, 2019).

En problemas planteados en un contexto de reparto de una cantidad de dinero, como el propuesto en el primer ciclo de I-A, intervienen factores del entorno social y cultural de los alumnos que generan diferentes modelos de reparto no necesariamente proporcionales (Antequera y Espinel, 2011; Peled y Balacheff, 2011; Peled y Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2014). Además, como en otras experiencias de enseñanza de tareas de proporcionalidad (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2019), la capacidad para trabajar con diferentes tipos de magnitudes e interpretar las operaciones entre cantidades de magnitud en términos de la cantidad de una nueva magnitud han sido determinantes para el éxito de los estudiantes. La utilización de magnitudes homogéneas y extensivas no favorece la interpretación de la constante de proporcionalidad en el contexto de reparto monetario. En cambio, el uso de determinadas magnitudes heterogéneas, una de ellas intensiva, promovió un mayor número de respuestas ajustadas a un modelo de reparto inversamente proporcional en el segundo ciclo.

Conjuntamente con la delimitación de las características deseables de las magnitudes, para la elaboración de la situación del segundo ciclo, la revisión de los contextos en los que históricamente han surgido problemas de proporcionalidad aritmética (Oller-Marcén y Gairín, 2015) fue clave. Como señala Chorlay (2011, p. 64) "una perspectiva histórica puede ayudar en la toma de decisiones didácticas". En nuestro caso, ha permitido determinar un contexto en el que la aplicación de un modelo de reparto inversamente proporcional surge de forma relativamente natural.

Finalmente, nuestro trabajo pone de manifiesto la utilidad de la I-A para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares (Romera, 2012). Tras el ciclo inicial se identificaron las debilidades de la situación introductoria lo que permitió diseñar una situación que produjo, no solo mayor número de respuestas proporcionales, también un trabajo más elaborado y argumentado en la interpretación de los resultados aritméticos obtenidos.

Referencias

Antequera, A. T. y Espinel, M. C. (2011). Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(2), 213-228.

Blanco, L. J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Univérsitas.

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J. M. (2011). *Mate_02*. Zaragoza: Edelvives.

Chorlay, R. (2011). The multiplicity of viewpoints in elementary function theory: Historical and didactical perspectives. En V. Katz y C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 57-66). Washington, EE.UU.: MAA.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2015). Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 313-335). Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria.* Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 57-77). Huesca: SEIEM e Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías. *RELIME, 2*(2-3), 19-29.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Kangshen, S., Crossley, J. N. y Lun, A. W-C. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: children’s cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, EE.UU.: Lawrens Erlbaun Associates.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations for the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, EE.UU.: NCTM.

Lopes, J. B. y Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas. *Enseñanza de las Ciencias, 14*(1), 45-61.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2017). ¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa? En FESPM (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CB-721* (pp. 121-129). Madrid: FESPM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 85-106.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Pecharromán, C. (2014). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 459-470). Segovia: Academia de Artillería de Segovia.

McNiff, J. (2013). *Action Research: Principles and Practice*. Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M. y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar, 25*(52), 29-39.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*(7), 651-675.

Oller-Marcén, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Oller-Marcén, A. M. y Gairín, J. M. (2015). Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1859-1865). Praga, República Checa: Charles University y ERME.

Peled, I. y Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM, 43*(2), 307-315.

Peled, I. y Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modelling: taking certainty out of proportion. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 57-64). Melbourne, Australia: PME.

Riehl, S. M. y Steinthorsdottir, O. B. (2019). Missing-value proportion problems: the effects of number structure characteristics. *Investigations in Mathematics Learning, 11*(1), 56-68.

Romera, M. J. (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. *Investigación en la Escuela, 78*, 69-80.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *RELIME, 16*(1), 65-97.

Sánchez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 44-60.

Silvestre, A. L. y da Ponte, J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA, 6*(3), 73-83.

[xxx] Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S36_17D - Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

[xxxi] Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre. *Boletín Oficial del Estado*, nº 295, 2013, 10 de diciembre.

¿QUÉ CONOCIMIENTOS DE LA MEDIA ARITMÉTICA TIENEN LOS ESTUDIANTES AL INICIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA?

What students know of arithmetic mean when starting Secondary Education?

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de nuestro estudio fue evaluar la comprensión de la media aritmética por estudiantes de primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello proponemos a una muestra de estudiantes un cuestionario con 7 ítems de respuesta abierta que evalúan el conocimiento de diferentes objetos matemáticos ligados a la media. Los resultados muestran una gama variada de dificultad y nos permiten identificar cuáles de los objetos evaluados resultan más o menos difíciles para los estudiantes. Asimismo, el análisis de las respuestas incorrectas permite identificar algunos conflictos semióticos en la comprensión de la media en estos estudiantes.

Palabras clave: *media aritmética, Educación Secundaria Obligatoria, evaluación, conocimiento de los estudiantes.*

Abstract

The aim of our study was to evaluate the understanding of the arithmetic mean by secondary students in their first year of Compulsory Secondary Education. A questionnaire with 7 open response items was proposed to a sample of students, which assess the knowledge of different mathematical objects linked to the mean. The results show a wide range of difficulty and allow us to identify which of the evaluated objects are more or less difficult for students. In addition, the analysis of the incorrect answers allows identifying some semiotic conflicts in the understanding of the arithmetic mean in these students.

Keywords: *arithmetic mean, Compulsory Secondary Education, assessing, students' knowledge.*

INTRODUCCIÓN

La media aritmética tiene una aplicación directa en muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, en las calificaciones de un alumno o en las noticias, o cuando se habla de la tasa de natalidad o la renta *per cápita*. Es también un concepto primordial en estadística, tanto en análisis exploratorio de datos como, más tarde, en probabilidad o inferencia.

Su enseñanza se incluye en la Enseñanza Primaria, donde se sugiere una iniciación intuitiva a las medidas de centralización, con especial referencia a la media. El MECD (2014) incluye como contenido el estudio intuitivo de la media aritmética, la moda y el rango, y como criterio de evaluación se cita la aplicación a situaciones familiares de las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.

Aunque la media aritmética parece aparentemente sencilla, la investigación previa ha descrito errores de comprensión por parte de los estudiantes. Dicha investigación preferentemente se ha centrado en la educación secundaria o universitaria. Dado que actualmente se incluye el tema en la Educación Primaria, el objetivo de este trabajo es aportar alguna información sobre los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre este tema al final de dicho periodo educativo.

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 423-432). Valladolid: SEIEM.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Nos basamos en el enfoque ontosemiótico de la educación matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y, más concretamente, en la elaboración del cuestionario se han tenido en cuenta los tipos de objetos primarios considerados en dicho enfoque, esto es:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).
- Situaciones-problemas (problemas, aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas, ejercicios, etc.).
- Conceptos, dados por su definición o descripción.
- Propiedades o atributos.
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas).
- Razonamientos o argumentos usados para validar y explicar las proposiciones y procedimientos (deductivo, inductivo, etc.).

En particular nos interesamos por la comprensión de propiedades y procedimientos ligados a la media, que se evalúan en diferentes campos de problemas (media como reparto equitativo, obtención de un valor probable, elemento representativo, mejor estimación de una cantidad desconocida y comparación de distribuciones). Se usará lenguaje verbal, numérico y tabular.

Se usará también la idea de *conflicto semiótico*. En la práctica matemática se realizan numerosos procesos semióticos al interpretar el significado de las funciones semióticas, que constan de tres componentes: la expresión, el contenido y la regla de correspondencia que interpreta la relación entre expresión y contenido. Cualquier tipo de objeto matemático antes nombrado puede ser expresión o contenido de la función semiótica. Cuando se realiza una interpretación no acorde con la institución matemática de una de estas funciones, es decir, una disparidad entre el significado de un objeto matemático y el que le atribuye el estudiante, aparece el conflicto semiótico.

Antecedentes

A continuación, se describen nuestros antecedentes, clasificados de acuerdo a los diferentes objetos matemáticos que se han investigado:

Comprensión de la definición: Watson y Moritz (2000) analizan el significado intuitivo dado por alumnos de Educación Primaria y Secundaria al término *promedio*. Un gran número de alumnos consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Sin embargo, esta definición se acerca más al concepto de mediana, que sólo coincidirá con la media cuando la distribución sea simétrica. Mokros y Russell (1995) dividen en varias clases los significados incorrectos atribuidos por alumnos de entre 11 y 14 años a la palabra *media*: valor modal, valor más frecuente, valor razonable, punto medio y algoritmo. Por otro lado, Martínez y Huerta (2016) indican que están influidas por el contexto en el que se formulan los datos.

Comprensión de propiedades: Gattuso y Mary (1998) analizan el significado de la media en alumnos de entre 14 y 16 años de secundaria. Puede concluirse que los alumnos, en general, presentan ciertas deficiencias relacionadas con propiedades numéricas (en el cálculo de la media hay que tener en cuenta todos los valores y la media se ve alterada por cualquier cambio en los datos) y algebraicas (la media no tiene elemento neutro). Respecto a las propiedades estadísticas, Cobo (2003) estudia la que indica que la media es un elemento representativo, así como todas las propiedades anteriores en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria de 12 y 16 años. Por su parte, Reading y Pegg (1996) indican que los estudiantes de secundaria tienen dificultad en elegir qué estadístico entre la media, la mediana o la moda representa mejor un conjunto de datos.

Comprensión de procedimientos: Pollatsek, Lima y Well (1981) encuentran falta de comprensión de la media ponderada, hecho que también es detectado por Cobo (2003) en su trabajo. La autora indica que el algoritmo más comprendido es el cálculo directo, con más dificultad en la inversión del mismo o en construir una distribución, conocida la media.

Nuestro trabajo adapta, para estudiantes de menor edad, siete de los ítems utilizados por Cobo (2003) y posteriormente por Mayén (2009), quien los usa con estudiantes de 16 a 18 años. Con ello pretendemos dar información sobre la comprensión de los estudiantes que comienzan la Educación Secundaria Obligatoria. Esta información es importante, puesto que investigaciones como las de Estrada, Batanero y Fortuny (2003), Ortiz y Font (2014) y Rivas, Godino, Arteaga y Estepa (2013) han mostrado que algunos futuros profesores de Educación Primaria comparten estas dificultades.

METODOLOGÍA

La muestra estuvo formada por 84 estudiantes de un centro público de Sevilla de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria con 12 y 13 años (en total cuatro grupos, de 21, 21, 19 y 23 alumnos). Se trata por tanto de un estudio exploratorio con una muestra intencional y no se pretenden generalizar los resultados. El cuestionario fue pasado en el mes de mayo, cuando los estudiantes aún no habían estudiado contenidos relacionados con las medidas de posición central. Por tanto, sus conocimientos del tema corresponden con los del currículo de Educación Primaria del curso anterior al que se pasó el cuestionario (que corresponde al currículo LOE). Es decir, la definición de la media y su diferenciación con la moda, su cálculo a partir de datos sencillos y una comprensión intuitiva de algunas propiedades, campos de problemas y procedimientos.

Recogidas las respuestas se realizó un análisis de contenido (Sandín, 2003), propio de la investigación cualitativa, para clasificar las diferentes respuestas en correctas e incorrectas y dentro de ellas clasificar los principales errores encontrados.

El cuestionario propuesto se presenta en el apéndice del manuscrito. El ítem 1 ha sido adaptado de Watson y Moritz (2000), eliminando el formato original de respuesta múltiple. Dichos autores solo proponen la segunda pregunta, referida al número medio de niños en Australia y que nosotros hemos cambiado por Andalucía, tal como también hacen Cobo (2003) y Mayén (2009). Hemos añadido la primera cuestión, que nos permitirá comparar con la segunda pregunta pues la variable es entera, mientras la media es un número decimal, lo que puede ser difícil de comprender para el estudiante. El ítem 2, también adaptado de otro de Watson y Moritz (2000), es más sencillo que el de estos autores, que pedían construir un conjunto de 10 datos (en vez de cuatro).

El ítem 3 pretende evaluar si los estudiantes son capaces de calcular una media ponderada y de invertir el algoritmo de la media. El ítem 4 está adaptado de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009), que plantearon uno similar pero usando números decimales en vez de números enteros, y busca evaluar la comprensión de la media como mejor estimación de una cantidad desconocida cuando hay valores atípicos. El ítem 5 está construido por nosotros y se plantean tres preguntas: la primera de ellas permite averiguar si los estudiantes saben pasar de la media al total, es decir, si saben invertir el algoritmo; la segunda, si son capaces de interpretar cómo varía la media cuando sufre un cambio de origen; y la tercera, si pueden interpretar la media cuando se modifica la escala.

Con el ítem 6 se pretende evaluar la comprensión de la utilidad que tiene la media para comparar dos grupos. Finalmente, el ítem 7 busca evaluar la comprensión del algoritmo de la media aritmética en su versión inversa y la definición de la media a partir del algoritmo. Las propiedades que tiene que usar implícitamente el estudiante para resolver los problemas se presentan en la Tabla 1, donde la letra N denota propiedades numéricas, la A propiedades algebraicas y la E estadísticas, todas ellas definidas por Cobo (2003). Los campos de problemas asociados a cada ítem se presentan en la Tabla 2 y los procedimientos en la Tabla 3.

Tabla 1. Propiedades implícitas en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(N1) Valor en el rango	x	x					
(N2) La media no tiene que coincidir con los datos	x						
(N3) Intervienen todos los valores		x	x	x		x	x
(N4) Cambios al cambiar un dato			x				x
(A1) No es una operación interna	x						
(A2) No asociativa			x				
(A3) Cambios de origen y escala					x		
(E1) Representante de un colectivo	x	x		x		x	
(E2) Poco resistente				x			

Tabla 2. Campos de problemas en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(CP1) Estimar una cantidad desconocida				x			x
(CP2) Realizar un reparto equitativo	x						
(CP3) Elemento representativo en distribuciones simétricas			x		x		
(CP4) Comparar dos distribuciones						x	
(CP5) Obtener un valor probable, conocida la media		x					

Tabla 3. Procedimientos evaluados en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(P1) Media datos aislados				x		x	
(P2) Media ponderada			x				
(P6) Invertir algoritmo media		x	x	x	x		x
(P7) Construir una distribución dada la media		x					x

RESULTADOS

La Figura 1 presenta nuestros resultados sobre el índice de dificultad de las tareas, considerando la dificultad como porcentaje de respuestas correctas, a las que se han añadido el porcentaje de respuestas incorrectas o de estudiantes que no responden. En dicha figura podemos observar que el índice de dificultad fluctúa entre 0,03 en el ítem 3 (inversión del algoritmo del cálculo de una media ponderada) y 0,82 en el ítem 1a (definición de media con sus propias palabras).

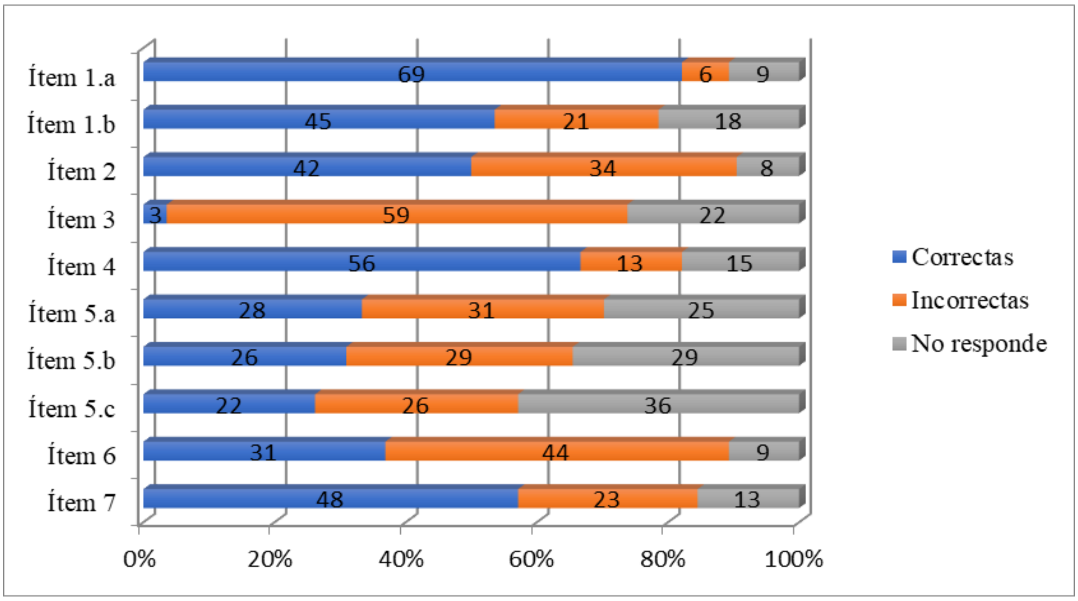


Figura 1. Porcentaje de respuestas en cada ítem

A continuación, exponemos los ítems ordenados en orden decreciente de dificultad, y se describen los objetos matemáticos asociados a la media en cada ítem y que los estudiantes comprenden mejor o peor:

- Ítem 3 (0,03): Inversión del algoritmo del cálculo de la media; media ponderada. Fue extremadamente difícil, por lo que consideramos no debe utilizarse este tipo de ítem con alumnos de esta edad. Destacamos también la alta proporción de no respuestas en este ítem. El cálculo de la media ponderada ha sido difícil tanto en Cobo (2003) como en Pollatsek et al. (1981).
- Ítem 5c (0,26): Calcular la media cuando se modifica la escala. No considerado en investigaciones previas.
- Ítem 5b (0,31): Calcular la media cuando de modifica el origen. No considerado en investigaciones previas.
- Ítem 5a (0,33): Pasar de la media al total, invirtiendo el algoritmo de la media. Cobo (2003) obtuvo 95,8% de respuestas correctas en un ítem similar. Igualmente fueron altas las proporciones de no respuestas en los tres apartados del ítem 5.
- Ítem 6 (0,37): Comparar dos distribuciones de datos con variables numéricas utilizando la media. Mayén (2009) obtuvo el 50% de respuestas correctas en un ítem de similar contenido.
- Ítem 2 (0,50): Construir una distribución a partir de una media dada. La mitad de los estudiantes no llegan a construir un conjunto que tenga alguna variabilidad para un promedio dado, que también se ha encontrado en investigaciones como la de Mokros y Russell (1995) y en el estudio de Mayén (2009). Las respuestas correctas en un ítem similar en el trabajo de Cobo (2003) fueron el 67%.
- Ítem 1b (0,54): Definir la media con sus propias palabras y comprender que la media no es una operación interna en el conjunto dado de datos. Al comparar con los resultados de investigaciones previas encontramos que en el trabajo de Cobo (2003) el porcentaje de respuestas correctas fue el 69%, pero la mitad de su muestra eran chicos de cuarto curso de ESO, y en el estudio de Mayén (2009), a pesar de ser mayores que los nuestros, obtuvieron el 56%. Por tanto, nuestros resultados han sido razonables.
- Ítem 7 (0,57): Inversión del algoritmo de la media y obtener un número para obtener una media dada, cuando se conocen otros dos.
- Ítem 4 (0,67): Estimar un valor desconocido utilizando la media. En el trabajo de Cobo (2003) el porcentaje de respuestas correctas fue el 67%, mientras que en el estudio de Mayén (2009) obtuvieron un 86%. Nuestro resultado es razonable, pero, sin embargo, ningún estudiante hizo referencia al valor atípico que aparecía en los datos del problema.
- Ítem 1a (0,82): Definir la media con sus propias palabras cuando la media pertenece al mismo conjunto numérico que los datos. Observamos que fue mucho más sencilla esta pregunta que la segunda del mismo ítem.

Al clasificar estos índices de dificultad en función de los campos de problemas, propiedades y algoritmos evaluados en los ítems nos resulta la siguiente graduación de dificultad para los estudiantes de nuestra muestra (de más difícil a más sencillo):

- *Campos de problemas:* Obtener un valor representativo fue en general muy difícil, salvo en uno de los ítems (0,03, ítem 3, 0,33, ítem 5a y 0,5, ítem 2). Comparar dos distribuciones tuvo también dificultad (0,37, ítem 6), estimar una cantidad desconocida usando la media fue un campo de problema bien comprendido por los estudiantes (0,67, ítem 4 y 0,57 ítem 7), así como obtener un valor probable (0,5, ítem 2) y realizar un reparto equitativo (0,54 en el ítem 1b y 0,82 en el ítem 1a).

- *Procedimientos*: Lo más difícil fue invertir el algoritmo de cálculo para el caso de la media ponderada (0,03, ítem 3), seguido por invertir el algoritmo de la media (0,33, ítem 5a). Tuvo dificultad media construir una distribución, dada la media (0,5, ítem 2), y fue sencillo deducir un número para obtener una media dada (0,57, ítem 7)
- *Propiedades:* Las propiedades más abstractas y peor comprendidas fueron que la media no es asociativa (0,03, ítem 3), el cambio de escala (0,26, ítem, 5c) y el cambio de origen (0,31, ítem 5b). Fue sencillo, sin embargo, entender que la media es poco resistente (ítem 4, 0,57), que no es una operación interna (0,54, ítem 1b), que no tiene que coincidir con los datos (0,54, ítem 1b), y que ha de ser un valor en el rango (0,54, ítem 1b y 0,82, ítem 1a).

Análisis de respuestas incorrectas

Para completar la parte cuantitativa del análisis, dada por los porcentajes de respuestas correctas, a continuación analizamos las respuestas incorrectas más frecuentes en cada uno de los ítems. En el primero, la principal respuesta incorrecta fue repetir una variante del enunciado, indicando que el valor medio es el más frecuente, como, por ejemplo, "normalmente las familias andaluzas tienen 1,2 hijos". Esta respuesta incorrecta indica una interpretación de la media como moda, y también fue detectada en Watson y Moritz (2000), Cobo (2003) y Mayén (2009) (véase un ejemplo en la Figura 2). Se trata de un error importante, pues los estudiantes que lo presentan no entienden la propiedad A1 (la media no es una operación interna del conjunto de datos). Además, no tiene sentido pensar en un número de hijos decimal. Por otro lado, la media no siempre es el valor más frecuente. Otras respuestas consideradas como incorrectas han sido: "tienen pocos hijos", "suelen tener un hijo", que no hacen referencia al promedio. Todas ellas implican que el estudiante no concibe la media como resultado de realizar un reparto equitativo, es decir, pensar que entre 10 familias se juntarían un total de 12 hijos. Véase en el ejemplo presentado en la Figura 2, en el que el estudiante también asume en el primer apartado que la media es el valor normal o más frecuente, aunque en este apartado la media pertenece al conjunto dado de datos.

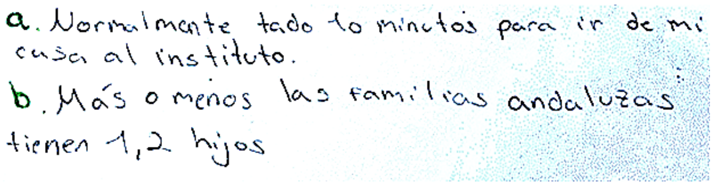


Figura 2. Ejemplo de respuesta incorrecta al ítem 1

En el ítem 2, la mayoría de las respuestas incorrectas se pueden encajar en dos categorías, aunque ambas provienen del mismo fallo: dar un conjunto de valores cuyo total no coincide con el dado en el ítem (véase un ejemplo en la Figura 3). Este error se debe a que los estudiantes no son capaces de formar una distribución con cierta variabilidad y que proporcione la media dada. En el ejemplo, el estudiante da cuatro hermanos de la misma edad, situación muy poco probable (cuatrillizos) en la vida real.

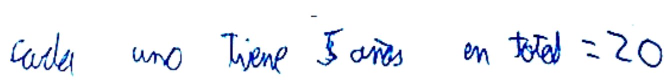


Figura 3. Ejemplo de respuesta incorrecta en el ítem 2

Las respuestas incorrectas al ítem 3 se dividen en tres grandes grupos. En primer lugar encontramos algunos estudiantes que, por ensayo-error, responden con un solo valor, que suele ser equivocado, como, por ejemplo, "1,89 cm", "1,85 cm" o "1,99 cm". Otros estudiantes dan como resultado la división de 175 entre 5, con lo que confunden la media con el total y tratan de calcular el peso de cada jugador, incluso cuando el valor obtenido es tan bajo que no tiene sentido. Por último, otros estudiantes dividen 175 entre 6, es decir, siguen un razonamiento similar pero teniendo en cuenta el nuevo jugador. En todos los casos falla la capacidad de encontrar una media ponderada y de invertir el algoritmo de la media. Además, falla la comprensión de que el resultado es absurdo en la vida real.

En el ítem 4 encontramos como respuesta incorrecta principal la consistente en dar la suma de todos los valores de los datos. Otra respuesta encontrada es suponer que se sigue la tendencia del último día “44 operaciones, una más que el día anterior”. Es interesante destacar un estudiante que utiliza el rango para obtener el punto medio del intervalo como solución (véase la Figura 4) pues asume el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2009).

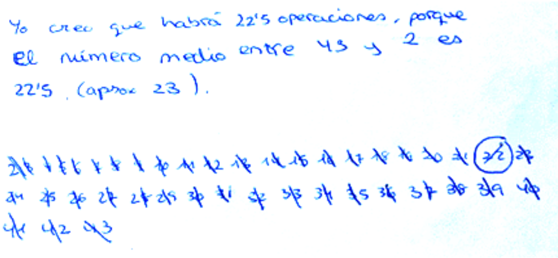


Figura 4. Ejemplo de respuesta incorrecta en el ítem 4

En el primer apartado del ítem 5 (calcular el total conocida la media), la respuesta incorrecta más repetida es 245 kg (siendo la respuesta correcta 230 kg). Por tanto, hay un fallo en pasar de la media al total, no sabiendo invertir correctamente el algoritmo de cálculo de la media. Los errores en los otros apartados se deben a no comprender cómo cambia la media al sumar a todos los datos un mismo número (apartado b) o al cambiar la unidad de medida (apartado c). Por ello, muchos dejan la respuesta en blanco o dan respuestas al azar.

Las principales respuestas incorrectas al ítem 6 se deben a un error en el cálculo de la media de puntos conseguidos por cada una de las dos chicas del enunciado, incluso cuando se trata del cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados; pensamos que por dificultades operatorias. En todo caso, los alumnos que dieron la respuesta correcta eligieron la alumna con mayor valor medio o total en el número de puntos, lo que indica una buena intuición de la media como estadístico que permite comparar dos grupos. Además, la mayoría trata de dar una respuesta, lo que confirma que la dificultad se debe a los cálculos y sería necesario volver a analizar este ítem utilizando números más sencillos.

No encontramos un patrón en los errores en el último ítem, donde los estudiantes que dan respuestas erróneas también dan valores aleatorios o bien responden simplemente “un 7”. De nuevo las respuestas muestran la escasa capacidad de invertir el algoritmo de cálculo de la media, a pesar de ser un contexto bien conocido para los estudiantes.

Conflictos semióticos identificados

Para completar nuestros resultados, detallamos los conflictos semióticos que se han identificado en las respuestas incorrectas y parcialmente correctas de los estudiantes a las diferentes preguntas planteadas, que clasificamos de acuerdo con los tipos de objetos matemáticos a que se refieren.

Conflictos relacionados con los problemas: Cuando el estudiante no reconoce un problema que se puede resolver con la ayuda de la media aritmética:

- No toman como solución la media en situaciones de estimación de una medida a partir de diversas mediciones; en el ítem 4 dan como solución la suma de todos los valores dados, suponen que la media sigue la tendencia del último dato o asumen como media el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2009).

- No utilizan la media para resolver situaciones de comparación de dos distribuciones de datos con valores numéricos, como ocurre en el ítem 6. En lugar de ello, realizan comparaciones cualitativas o utilizan sólo algunos datos.

Conflictos relacionados con las definiciones (conceptos): Cuando se confunden diferentes conceptos:

- Se confunde la media con el mínimo, en el ítem 1.
- Concepción determinista del problema, suponiendo un tiempo constante en el ítem 1. Es decir, no se percibe la aleatoriedad de la situación, por tanto hay una interpretación pobre de la aleatoriedad.

Conflictos relacionados con los algoritmos, que se aplican incorrectamente o que no se saben aplicar:

- No construyen un conjunto de datos que tenga alguna variabilidad para un promedio dado (ítem 2), hecho que también se ha encontrado en investigaciones como la de Mokros y Russell (1995).
- No logran entender el procedimiento de cálculo de la media y la correspondiente inversión del algoritmo del cálculo, cuando tienen que calcular el total conocida la media (ítem 2).
- Confusión generalizada cuando intervienen dos procedimientos de cálculo al mismo tiempo. Por ejemplo, el cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias y la inversión del algoritmo del cálculo de la media, en el ítem 3.
- No reconocen que tienen que invertir el algoritmo del cálculo de la media, en el ítem 5.
- Errores en el procedimiento de cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados, en el ítem 6.

Conflictos relacionados con las propiedades de la media:

- Se atribuye a la media la propiedad de ser operación interna, cuando no la tiene (ítem 1); también descrito en Mayén (2009) y Cobo (2003).
- No son capaces de interpretar cómo varía la media cuando se modifica la escala o el origen, en el ítem 5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestro trabajo proporciona información detallada sobre la comprensión de los estudiantes de la muestra sobre los diferentes campos de problemas, procedimientos y propiedades asociadas a la media, así como sobre algunos conflictos semióticos que aparecen en relación a estos objetos y de confusión de la media con otros conceptos.

Aunque no se detalla en los decretos curriculares qué se entiende por una introducción intuitiva a la media, y por su aplicación a situaciones familiares, pensamos que los resultados muestran que los estudiantes participantes ya han adquirido dichos contenidos. Se observa una comprensión de más de la mitad de la muestra de prácticamente todas las propiedades numéricas incluidas en nuestra evaluación, así como de las estadísticas. Igualmente, el algoritmo de cálculo directo e incluso formar una distribución sencilla de media dada se domina. Por el contrario, las propiedades algebraicas y otros algoritmos, como la inversión del cálculo o la media ponderada, han sido difíciles y deberán ser objeto de estudio en cursos posteriores. También algunos campos de problemas que fueron difíciles en el trabajo de Cobo (2003) y Mayén (2009), como estimar un valor desconocido, han sido sencillos, posiblemente por haber utilizado datos más simples que los de estas autoras.

Como contrapartida, aunque aparentemente la media es un concepto sencillo y los estudiantes deberían haber trabajado con ella en la Educación Primaria, observamos que al comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria se encuentran en algunos estudiantes conflictos en sus propiedades y algoritmos, una falta de reconocimiento de algunos campos de problemas e incluso dificultades con su definición. Algunos de estos conflictos también se encontraron en investigaciones con estudiantes de mayor edad, como Cobo (2003), Mayén (2009) y Mokros y Russell (1995), pero hemos descrito otros nuevos relacionados con el cambio de escala y origen o la falta de identificación de algún campo de problemas.

Finalmente, los resultados indican el interés de repetir el estudio ampliando la muestra a otros centros educativos para poder generalizar los resultados. Pensamos que este tipo de investigación es necesaria pues es importante que el profesor que debe enseñar a estos estudiantes sea consciente de las dificultades de los estudiantes, para que pueda organizar acciones educativas dirigidas a ayudar a sus estudiantes a superarlas (Rivas et al., 2013).

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2003). Dificultades de los profesores en formación en conceptos estadísticos elementales. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VII: Séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 201-212). Granada: SEIEM.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. En L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee y K-W. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. ICOTS5* (pp. 687-692). Singapur: IASE.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2016). Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas de centralización afectadas por valores atípicos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 335-344). Málaga: SEIEM

Mayén, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's concepts of averages and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Ortiz, J. J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *REDIMAT, 3*(3), 192-219.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 191-204.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 187-194). Valencia: PME.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 11-50.

APÉNDICE: CUESTIONARIO

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:

a. En promedio tardo 10 minutos para ir de mi casa al instituto.
b. El número medio de hijos en las familias andaluzas es 1,2.

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de rugby es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Ítem 4. El número de operaciones en un hospital durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6 y 43. Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Ítem 5. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg, ¿cuál será el peso medio? ¿Cuál será el peso medio en gramos?

Ítem 6. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron los siguientes. Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

María	18	23	22	24	19	25	16
Elena	18	26	18	28	22	17	18

Ítem 7. Ernesto obtuvo un 8 en el primer examen de la asignatura y un 5 en el segundo examen. Le falta el tercer examen y quiere sacar un notable (7 o más) en la asignatura. ¿Qué nota mínima tiene que sacar en el tercer examen para conseguir el notable?

CAMBIOS EN CÓMO ESTUDIANTES PARA MAESTRO ANTICIPAN RESPUESTAS DE NIÑOS DE PRIMARIA[xxxii]

Changes in how prospective teachers anticipate elementary children's answers

Montero, E.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]Escuni Centro Universitario de Magisterio, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es examinar cómo estudiantes para maestro usan la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria. Los participantes fueron 61 estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, que asistieron a un módulo de enseñanza de 9 sesiones. Los datos se recogieron al inicio del módulo y al finalizar este a partir de: i) dos tareas de resolución de un problema y de anticipación de dos respuestas de niños de Primaria, y ii) una tarea de anticipación de dos respuestas con estrategias dadas. Se analizaron las estrategias usadas por los estudiantes para maestro. Los resultados muestran que el módulo de enseñanza les ayudó a ampliar su repertorio de estrategias de resolución de problemas de división-medida y, en consecuencia, a anticipar respuestas de niños de Primaria.

Palabras clave: *problemas de división-medida, progresión de aprendizaje, anticipación, mirada profesional.*

Abstract

The aim of this research is to examine how pre-service teachers use the information provided by a learning progression on strategies for multiple group problems of measurement division, to anticipate answers of Elementary students. The participants were 61 pre-service teachers of undergraduate studies in Primary Education who attended a 9-session teaching module. The data were collected at the beginning and at the end of the module, and correspond to: i) two tasks of solving a problem and anticipating two responses of Primary children, and ii) a task of anticipating two responses with strategies given. Strategies used by pre-service teachers were analysed. The results show that the teaching module helped the pre-service teachers to broaden their repertoire of solving strategies for measurement division problems and, consequently, anticipate responses of Primary children.

Keywords: *measurement division problems, learning progression, anticipation, professional noticing.*

INTRODUCCIÓN

Entre las tareas profesionales de los maestros está saber anticipar, interpretar y dotar de significado las respuestas de los estudiantes (*mirada profesional*, Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Cuando los maestros planifican una actividad es conveniente que prevean las respuestas que pueden dar los estudiantes y usen este conocimiento para planificar qué preguntas les pueden hacer o qué variables de tarea podrían modificar para superar sus dificultades o plantearles situaciones más complejas.

El uso de progresiones de aprendizaje como referente para que los estudiantes para profesor desarrollen la mirada profesional está integrado en diversos estudios que han desarrollado módulos de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018). Las progresiones de aprendizaje son "formas sucesivamente más sofisticadas de pensamiento sobre un tópico que pueden seguir los niños mientras aprenden e investigan un determinado tópico" (National Research Council, 2007, p. 214). En estos módulos de formación, los participantes resuelven tareas que

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM.

representan aspectos de la enseñanza (Grossman, Compton, Igra, Ronfeldt, Shahan y Williamson, 2009), en las que se plantean cuestiones relacionadas con anticipar respuestas de estudiantes e interpretar su comprensión, entre otras.

La mayor parte de los trabajos empíricos realizados en el ámbito de la educación matemática y de la formación inicial en el contexto del desarrollo de la mirada profesional se han centrado en cómo los futuros profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes (Schack, Fisher y Wilhelm, 2017; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). Sin embargo, pocos estudios lo han hecho en la forma en la que estos anticipan posibles respuestas de los estudiantes (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016), como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

La capacidad de anticipación puede ayudar a superar una dificultad que diversas investigaciones han constatado en los EPM: no saber valorar e interpretar, o no hacerlo de forma adecuada, respuestas de estudiantes a problemas con fracciones que son distintas a las que ellos darían al problema (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014) o que no siguen el procedimiento tradicional (Son y Crespo, 2009). La importancia de saber anticipar para poder planificar ha sido puesta de manifiesto en el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) y de las competencias que debe poner en juego el profesorado para tener en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith y Stein, 2011).

En lo que se refiere a la anticipación de respuestas de los estudiantes, el trabajo de Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) ha puesto de relieve cómo una progresión de aprendizaje sobre la equipartición ayudó a profesores en ejercicio a anticipar respuestas de estudiantes atendiendo a los niveles de competencia indicados en la progresión, incluidas las estrategias y concepciones erróneas asociadas a diferentes niveles de competencia, y alinearon sus objetivos y tareas con la comprensión de sus estudiantes. Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo (2018) propusieron a estudiantes para profesor de matemáticas de Secundaria que anticiparan respuestas de estudiantes de Bachillerato a problemas sobre el límite de una función en un punto apoyándose en una progresión de aprendizaje, y que propusieran problemas para apoyar el progreso conceptual de los estudiantes. Los resultados mostraron que identificar en la progresión de aprendizaje la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango como avance conceptual (*Key Development Understanding* -KDU-, Simon, 2006), ayudó a los estudiantes para profesor a anticipar respuestas y a apoyar sus propuestas de enseñanza.

En este contexto, el objetivo específico de esta investigación es examinar cómo estudiantes para maestro usan la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria.

MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos la progresión de aprendizaje de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida. Estos problemas son de “isomorfismo de medidas” de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes (Vergnaud, 1994) que relacionan tres cantidades: número de grupos, cantidad de elementos en cada grupo y cantidad total en el conjunto de los grupos. Se identifican tres subtipos de problemas según cuál sea la incógnita: multiplicación (la incógnita es la cantidad total), división-medida (la incógnita es el número de grupos) y división-partitiva (la incógnita es la cantidad de elementos en cada grupo).

Los problemas de grupos múltiples (Empson y Levi, 2011) son problemas con un número entero de grupos y una cantidad fraccionaria en cada grupo. Por ejemplo: “Tenemos 9 litros de helado y queremos hacer batido. Si para una jarra de batido necesito 3/4 de litro de helado, ¿cuántas jarras podemos preparar con los 9 litros?” Empson y Levi (2011) han caracterizado una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones que consta de tres etapas, en las dos primeras se utilizan estrategias aditivas y en la tercera estrategias multiplicativas (Figura 1).

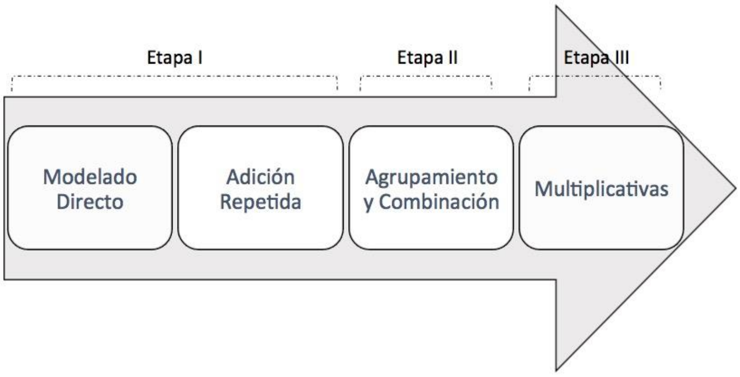


Figura 1. Progresión de aprendizaje de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida (Empson y Levi, 2011)

Etapa I: Modelado directo y adición repetida. Se representa cada unidad fraccionaria individualmente. En el modelado directo los niños representan de forma icónica todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final. Por ejemplo, en el problema del helado, una forma de implementar esta estrategia es dibujar los 9 recipientes de litro, dividir cada uno en cuartos; a continuación se hacen grupos de 3/4 que se usan en cada jarra de batido hasta completar los 36 cuartos de litro. Como hay 12 grupos de 3/4 la solución es 12 jarras de batido.

La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

Etapa II: Agrupamiento y combinación. En la segunda etapa también se utilizan estrategias aditivas, pero no se representa cada unidad fraccionaria sino que se agrupan y se cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema del helado se agrupa cuatro veces 3/4 y se tiene 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 que son 3 litros de helado que dan para 4 jarras de batido; 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 son otros 3 litros de helado más que dan para 4 jarras de batido más; de nuevo, 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 son otros 3 litros de helado más que dan para 4 jarras de batido más. En total con 9 litros de helado se tiene para preparar 12 jarras de batido.

Etapa III: Estrategias multiplicativas. En esta etapa se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la relación de proporcionalidad ($f(ax)=af(x)$), un proceso constructivo combinando las relaciones de proporcionalidad y la suma ($f(ax+bx) = af(x)+bf(x)$), o directamente la multiplicación; en este último caso se interpreta el significado de la fracción como relación multiplicativa, por ejemplo: 3/4 significa que con 3 litros de helado se tiene para 4 jarras de batido; si se tienen 9 litros (el triple de litros), se tiene para 4 x 3 = 12 jarras (el triple de jarras).

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 61 estudiantes para Maestro (de ahora en adelante, EPM) en Educación Primaria que estaban cursando la asignatura “Matemáticas y su Didáctica II” de tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria (quinto semestre). Esta asignatura incluye dos bloques: i) Fracciones y ii) Magnitudes y su medida. Para el bloque de las fracciones se diseñó un módulo de enseñanza con el objetivo de que adquirieran la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones. En esta investigación presentamos los datos correspondientes a la tercera implementación del módulo, cuyo diseño se mejoró tras el análisis retrospectivo de las versiones anteriores (Montero y Callejo, 2018).

El módulo se desarrolló en nueve sesiones de dos horas. Previamente a la participación en el módulo de enseñanza, los EPM resolvieron problemas con fracciones para identificar sus distintos significados. En la primera sesión se propuso a los EPM resolver un problema de división-medida y anticipar dos respuestas de niños de Primaria (tareas A y B de esta comunicación). A lo largo del módulo de enseñanza se trabajó un abanico amplio de estrategias, apoyándose en la progresión de aprendizaje. Este trabajo consistió en realizar distintos tipos de tareas: analizar respuestas variadas de niños de Primaria identificando las estrategias (sesiones 2, 3 y 4), resolver problemas con distintas estrategias (sesión 5) y analizar respuestas desde la perspectiva de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes (sesiones 6, 7 y 8). En la sesión 9 se hizo una revisión de una tarea resuelta en la sesión 8 de identificación de las estrategias usadas por dos niñas, donde aparecían los cuatro tipos de estrategias de la progresión.

En la primera sesión, los EPM no disponían de información para realizar las tareas que se le pidieron. A lo largo de las sesiones se les fue dando información que podían utilizar para resolver las tareas, articulada en torno a la progresión de aprendizaje.

Instrumentos de recogida de datos

Los instrumentos de recogida de datos fueron tres tareas. Las dos primeras se propusieron en la primera sesión, cuando aún no se había proporcionado a los EPM información sobre la progresión de aprendizaje, y la tercera dos semanas después de concluir el módulo de enseñanza. La tarea A es de resolución de un problema de grupos múltiples del tipo división-medida, la tarea B es de anticipación de respuestas de niños de Primaria al mismo problema (Figura 2), la tarea C es también de anticipación de respuestas de niños de Primaria (Figura 3).

La tarea C se diseñó teniendo en cuenta las respuestas de los EPM a la tarea B y a otra tarea propuesta en la sesión 8 en la que se les pidió que identificaran estrategias usadas por dos niñas de Primaria (Ana y Sara) resolviendo tres problemas. En la tarea B las estrategias de anticipación menos frecuentes fueron las de agrupamiento y combinación (etapa II) y las multiplicativas (etapa III), asimismo tuvieron mayor dificultad para identificarlas en respuestas de niños de Primaria en la tarea que se trabajó en la sesión 8. Por ello, en la tarea C se les pidió específicamente que anticiparan respuestas de niños de Primaria con estas dos estrategias: agrupamiento-combinación y multiplicativa.

Tarea A. Resolver el siguiente problema: *Tengo 7 pizzas y media (7 y ½) que voy a repartir por varias mesas de un salón donde voy a celebrar una fiesta de cumpleaños. He decido poner tres cuartos (3/4) de pizza en cada mesa. ¿En cuántas mesas podré poner esta cantidad de pizza?*
Tarea B Resolver el problema de las pizzas de dos formas diferentes, como lo haría un niño de Primaria.

Figura 2. Tareas propuestas en la sesión inicial

Tarea C

Hemos comprado 15 piezas de tela para hacer cojines y para cada uno usaremos 3/8 de una pieza. ¿Cuántos cojines se pueden hacer con 15 piezas de tela?

Teniendo en cuenta la propuesta de Empson y Levi para las estrategias de resolución de problemas de división-medida:

a) Anticipa cómo resolvería este problema un niño de Primaria con una estrategia de agrupamiento y combinación (aditiva).

b) Anticipa cómo resolvería este problema un niño de Primaria con una estrategia multiplicativa.

En la respuesta a cada uno de los apartados muestra todo el proceso y explica qué caracteriza esta estrategia de resolución. No puedes usar una representación icónica.

Figura 3. Tarea de anticipación final

Análisis de datos

Las unidades de análisis de las estrategias usadas en la resolución del problema de las pizzas o en las anticipaciones de los problemas de las pizzas o de los cojines corresponden a las descritas en la progresión en el aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de "grupos múltiples" de Empson y Levi (2011): los tres tipos de estrategias aditivas (modelización directa, adición repetida y agrupamiento y combinación, de las etapas I y II), y las estrategias multiplicativas de la etapa III.

Además se añadieron dos categorías: algoritmo de la división de fracciones y fracción como operador (Figura 4), que usaron los EPM en las tareas A y B.

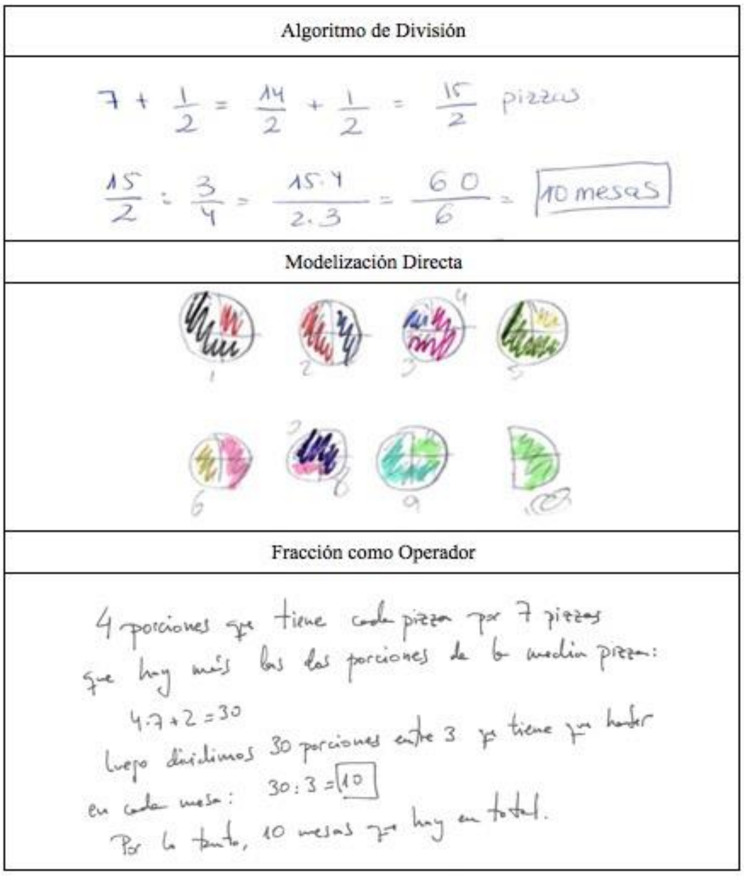


Figura 4. Estrategias usadas en la resolución del problema

La estrategia de uso de la fracción como operar consiste en utilizar la fracción inversa de la dada como operador, por tanto se multiplica el número de objetos por el denominador, para contabilizar el número total de "partes" que se pueden obtener (tercios, cuartos, etc. en función del denominador de la fracción); a continuación se divide el total de las partes entre el numerador. Por ejemplo, en el problema de las pizzas, se multiplican las 7 pizzas y media por 4 para saber cuántos "cuartos de pizza" se tiene (con 7 x 4 = 28 cuartos y 2 cuartos de la media pizza, se tienen 30 cuartos de pizza en total) y a continuación se divide 30 entre el numerador para saber cuántos grupos de "3 cuartos" se pueden obtener (30 : 3 = 10 mesas). En la Figura 4 presentamos ejemplos de las estrategias de resolución empleadas en la tarea A por los EPM.

RESULTADOS

Presentamos los resultados en dos apartados correspondientes a las tareas A y B, realizadas al inicio del módulo, y a la tarea C, realizada una vez concluido el módulo.

Tareas de resolución y de anticipación inicial

Los 61 EPM resolvieron el problema de las pizzas (tarea A) empleando principalmente el algoritmo de la división de fracciones (65.6%); en menor medida emplearon la fracción como operador (16.4%), la modelización directa (16.4%) y la adición repetida (1.6%) (ver Tabla 1). Ningún EPM utilizó estrategias de agrupamiento y combinación o multiplicativas en la resolución de este problema (Tabla 1).

En la tarea de anticipación de respuestas de niños de Primaria al mismo problema, los EPM (tarea B en Tabla 1) usaron las mismas estrategias, si bien hubo un desplazamiento, adquiriendo protagonismo la modelización directa (72.1% en la anticipación 1) en detrimento del algoritmo de la división que pasó a ser empleado por el 9.8% de los EPM. Apareció como novedosa la estrategia de agrupamiento y combinación, aunque con una frecuencia muy baja (1.6% en la primera anticipación y 3.3% en la segunda). En ninguna de las anticipaciones de la tarea B emplearon los EPM estrategias multiplicativas.

Todos los EPM contestaron a la tarea A y a la anticipación del niño 1, pero hubo 7 EPM que no contestaron a la anticipación del niño 2. En conversación oral con estos 7 EPM expresaron la dificultad para pensar una estrategia diferente a las empleadas en las tareas A y B (anticipación 1).

Tabla 1. Estrategias empleadas por los EPM para resolver el problema (tarea A) y anticipar respuestas de niños de Primaria (tarea B)

		Tarea A	Tarea B Anticipación 1	Tarea B Anticipación 2
Aditivas	IA-Modelización directa	10 (16.4%)	44 (72.1%)	28 (45.9%)
	IB-Adición repetida	1 (1.6%)	7 (11.5%)	9 (14.7%)
	II-Agrupamiento y combinación	0	1 (1.6%)	2 (3.3%)
	III-Multiplicativas	0	0	0
	Algoritmo División	40 (65.6%)	6 (9.8%)	6 (9.8%)
	Fracción Operador	10 (16.4%)	3 (4.9%)	9 (14.7%)
	No contesta	0	0	7 (11.5%)
	Total	61	61	61

Tareas de anticipación final

En cuanto a la tarea de anticipación final (tarea C), la Tabla 2 muestra que más de tres cuartas partes de los EPM intentaron resolver el problema con las estrategias indicadas (80.3% de agrupamiento y combinaciones y 86.9% multiplicativas), mostrando y describiendo las características propias de cada una, aunque algunos de ellos no lo hicieron de forma correcta por errores en los cálculos (9.8% de agrupamiento y combinación y 9.8% multiplicativas).

49 EPM (80.3%) emplearon y describieron una estrategia que mostraba las características propias de agrupamiento y combinación (con 3 piezas más, obtendremos 8 cojines más), si bien solo el 70.5% de los EPM fue capaz de realizar correctamente los cálculos además de indicar las características. 12 EPM (19.7%) no supieron resolverlo con las características propias, confundiéndolas únicamente con las de la estrategia de “adición repetida”, pues entendieron que al haber una “suma reiterada” se trataba de esta estrategia, sin caer en la cuenta de que el sumando de esta adición repetida es la unidad fraccionaria individualmente, y no el agrupamiento de varias de estas unidades fraccionarias para tener un número entero. Ningún EPM confundió la estrategia de agrupamiento y combinación con la multiplicativa.

En el caso de la anticipación de la estrategia multiplicativa (ver Tabla 2), 53 EPM caracterizaron correctamente la resolución: si con 3 piezas podemos hacer 8 cojines, con el quíntuple de piezas (con 15), podremos hacer el quíntuple de cojines (40). De ellos, 47 EPM (77.0%) resolvieron correctamente la tarea. En este apartado, hubo una mayor dispersión en las estrategias que usaron (fracción como operador, 3 EPM; división, 2 EPM, y estrategias aditivas, 2 EPM).

La mayor parte de ellos no hicieron directamente las anticipaciones con estrategias de agrupamiento y combinación y multiplicativas, pues 4 EPM necesitaron apoyarse en otras estrategias que parece que dominaban mejor como la modelización directa, a pesar de haberles indicado que no hicieran una representación icónica, y 45 en la adición repetida, para luego anticipar las estrategias pedidas, lo que muestra que los EPM tenían un mayor dominio de las estrategias aditivas de la primera etapa de la progresión y necesitan acudir a éstas.

Tabla 2. Tipos y corrección de las estrategias de anticipación final (tarea C)

	Estrategias de agrupamiento y combinación			Estrategias multiplicativas			
Estrategia /Corrección	Correcto	Incorrecto	Total	Correcto	Incorrecto	No contesta	Total
IA-Modelización directa	0	0	0	0	0	0	0
IB-Adición repetida	5 (8.2%)	7 (11.5%)	12 (19.7%)	0	1 (1.6%)	0	1 (1.6%)
II-Agrupamientos	43 (70.5%)	6 (9.8%)	49 (80.3%)	1 (1.6%)	0	0	1 (1.6%)
III-Multiplicativas	0	0	0	47 (77.0%)	6 (9.8%)	0	53 (86.9%)
Algoritmo División	0	0	0	2 (3.2%)	0	0	2 (3.2%)
Fracción Operador	0	0	0	3 (4.9%)	0	0	3 (4.9%)
No contesta	0	0	0	0	0	1 (1.6%)	1 (1.6%)

*Los sombreados corresponden a las estrategias solicitadas en cada uno de los apartados

Si comparamos las estrategias de la progresión de aprendizaje usadas por los EPM en la anticipaciones inicial y final, en la anticipación inicial la estrategia de modelización directa fue la más utilizada tanto en la primera como en la segunda respuesta de anticipación (72.1% y 45.9% respectivamente); de ellos el 26.2% utilizó esta misma estrategia para las dos anticipaciones. Le siguió la adición repetida (11.5% en la primera anticipación y 14.7% en la segunda). Además, un EPM usó la estrategia agrupamiento y combinación en la anticipación del niño 1 y 2 EPM en la del niño 2. Ningún EPM anticipó una estrategia multiplicativa. Por otra parte hubo 7 EPM que solo fueron capaces de anticipar una respuesta de un niño de Primaria. Se puede decir que más allá del uso de la modelización directa y la adición repetida, su repertorio de estrategias era muy limitado a la hora de anticipar respuestas de los niños de Primaria.

Sin embargo, en la tarea de anticipación final, la mayor parte de los EPM supo anticipar correctamente estrategias de agrupamiento y combinación y multiplicativas (70.5% y 77.0%, respectivamente) y solo 1 EPM no fue capaz de anticipar una estrategia multiplicativa. Por otra parte, solo 2 EPM llegaron a captar la idea de fracción como relación multiplicativa y anticiparon esta estrategia interpretando directamente el dato del enunciado, la fracción 3/8, como “con 3 piezas se pueden hacer 8 cojines”.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo específico de esta investigación fue examinar cómo estudiantes para maestro usaban la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria.

Nuestros resultados muestran que la mayor parte de los EPM ha progresado en la destreza de anticipar, pues tras concluir el módulo de enseñanza supieron anticipar respuestas de niños de Primaria con estrategias que no utilizaron en la sesión inicial. Si en esta sesión el repertorio de estrategias se limitaba a modelización directa, el algoritmo de la división, la fracción como operador y la adición repetida, en la sesión final la mayor parte de los EPM supo anticipar correctamente las estrategias pedidas de agrupamiento y combinación y multiplicativas (70.5% y 77.0%, respectivamente).

A partir de los datos obtenidos en la sesión inicial (tareas A y B), a lo largo del módulo de enseñanza se trabajó un abanico más amplio de estrategias, apoyándose en la progresión de aprendizaje, que dio a los EPM un marco sobre las estrategias que suelen usar los niños, como se ha indicado en la sección de participantes y contexto. Creemos que el trabajo realizado en la sesión 9, donde se hizo una revisión de una tarea resuelta en la sesión 8 de identificación de las estrategias usadas por dos niñas, y donde aparecían los cuatro tipos de estrategias de la progresión de aprendizaje, pudo ayudar en la tarea final de anticipación a los EPM a distinguir entre estrategias aditivas y multiplicativas, y, en particular, entre las estrategias de agrupamiento y multiplicativas, ya que más del 70% supieron realizar estas anticipaciones de forma correcta.

Nuestros resultados confirman los de otros trabajos de desarrollo profesional que han mostrado que el uso de una progresión de aprendizaje ha ayudado a desarrollar la destreza de anticipar (Wilson et al., 2015; Fernández et al. 2018). En estos trabajos se pidió también a los profesores o estudiantes para profesor que propusieran tareas para mejorar la comprensión de los estudiantes, lo que supone el uso de la progresión de aprendizaje para planificar la enseñanza.

Los EPM que siguieron el módulo de enseñanza no tuvieron ocasión de usar su conocimiento sobre la progresión de aprendizaje y la anticipación para planificar la enseñanza. En este sentido, en futuros trabajos podemos indagar cómo usan los EPM estos conocimientos en sus prácticas de enseñanza. En este caso habría que tener en cuenta, como señala Empson (2011), que "cómo y cuándo – y algunas veces si – los niños llegan a entender y usar estas estrategias depende de una serie de factores que son diferentes de una clase a otra y de un niño a otro" (p. 577). Asimismo indica que uno de estos factores es el significado de las fracciones que predomina en la enseñanza, por ejemplo, si este significado es la relación parte-todo, los alumnos privilegiarán el uso de estrategias aditivas, si es el significado de la fracción como razón puede predominar el uso de estrategias multiplicativas; también los niños pueden usar estrategias que no se consideran en la progresión de aprendizaje.

En nuestra investigación hemos constatado que a los EPM les ha costado más anticipar estrategias multiplicativas que aditivas. Las relaciones multiplicativas están en el centro de las ideas de razón y proporción. Esta dificultad con la identificación de las estrategias multiplicativas se puede interpretar por el hecho de que cuando dos cantidades se comparan aditivamente, es más fácil visualizar y representar las diferencias entre ellas que cuando se trata de la razón entre estas cantidades. Además, si los EPM solo piensan en la multiplicación como suma repetida será difícil para ellos entender la fracción como razón que expresa una relación entre dos magnitudes, por ejemplo entender que se puede interpretar el dato “3/8 de una pieza” en el enunciado del problema de los cojines como razón entre el número de piezas y cojines, “con 3 piezas se pueden hacer 8 cojines”.

Esta capacidad de anticipar es progresiva y consideramos que fue importante revisar a lo largo del módulo de enseñanza las anticipaciones realizadas por los EPM, como fuente de aprendizaje de los formadores de maestros. Esto permitió detectar los aspectos donde había menos claridad. En todas las sesiones del módulo de enseñanza se dedicó un tiempo a la revisión y puesta en común. En este tiempo se abordaban los puntos más problemáticos, como la distinción entre estrategias aditivas y multiplicativas y de las aditivas entre sí.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-598.

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children’s Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, EE. UU.: Heinemann.

Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Baeza, Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La *coordinación de las aproximaciones* en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students’ mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM*, *13*, 39-61.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, *111*(9), 2055-2100.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers’ MKT when interpreting pupils’ productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135–150.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students’ answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(8), 2155-2170.

Montero, E. y Callejo, M. L. (2018). Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 378-386). Gijón: SEIEM.

National Research Council (2007). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8*. Washington, EE. UU.: The National Academies Press.

Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (Eds.). (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks*. Cham, Suiza: Springer.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes*. Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston, EE. UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J-W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, *48*(1-2), 1-27.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 41-60). Albany, EE. UU.: State University of New York Press.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

[xxxii] La participación de M. Luz Callejo en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

¿EXISTE DESCONEXIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA?

Is there disconnection in the teaching of mathematics and physics in middle-high school?

Monterrubio-Pérez, M. C.[a], González-Astudillo, M. T.[b], García-Olivares, A.[c], Rodríguez-Cornejo, P.[a] y Rodríguez-Barrueco, M. J.[a]

[a]IES María de Molina de Zamora, [b]Universidad de Salamanca, [c]CEPA San Jorge de Palencia

Resumen

Las Matemáticas que se enseñan en Secundaria deberían poder ser utilizadas por los alumnos en la clase de Física, pero la realidad es que los profesores de esta materia vuelven a enseñar esos contenidos con un enfoque diferente. En la primera fase del estudio, se analiza la visión que tienen los alumnos de la Física y las Matemáticas a partir de un cuestionario. En la segunda fase, se les plantea un mismo problema que resuelven los alumnos en clase de Matemáticas y en clase de Física, analizándose las diferencias de resolución en ambos casos.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, práctica educativa, física.*

Abstract

Mathematics taught in Middle-High School should be able to be used by the students in Physics but teachers of this subject re-teach those contents with a different approach. In the first phase of this study, we analyse the vision that students have of Physics and Mathematics from a questionnaire. In the second phase, the same problem is presented to the students to solve in Mathematics class and in Physics class, analysing the differences of resolution in both.

Keywords: *didactics, mathematics, educational practice, physics.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Esta comunicación se enmarca dentro del Proyecto de Investigación Educativa "La Modelización matemática y el trabajo cooperativo en el aprendizaje de Matemáticas y Física y Química en Educación Secundaria" (EDUCYL2018_08) que está financiado por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León a través de la Dirección General de Innovación y Equidad Educativa. En él se aborda entre otras cuestiones la desconexión entre las Matemáticas y la Física que es algo que reconocen todos los profesores, tanto de una asignatura como de la otra. Este hecho repercute de manera especial en la asignatura de Física ya que, en muchas ocasiones, deben introducir contenidos propios del área de Matemáticas pero que no se han trabajado todavía y que se necesitan en esa asignatura. También es habitual que a los alumnos les cueste reconocer en la asignatura de Física muchos contenidos que, realmente, ya han trabajado desde las Matemáticas. Este hecho ocurre, entre otros motivos, por lo siguiente:

- Existen diferencias en la notación utilizada, hecho que confunde a los alumnos y les lleva a pensar que no hay relación entre los contenidos de ambas materias. Por ejemplo, se observan dificultades en la resolución de ecuaciones relativas a la notación porque, por ejemplo, en Matemáticas se suele denotar por x a la incógnita y en Física, al usar otras letras para identificar las incógnitas, los alumnos no las identifican y tienen dificultades incluso en el momento de despejarlas.

Monterrubio-Pérez, M. C., González-Astudillo, M. T., García-Olivares, A., Rodríguez-Cornejo, P. y Rodríguez-Barrueco, M. J. (2019). ¿Existe desconexión en la enseñanza de las matemáticas y la física en Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 443-451). Valladolid: SEIEM.

- Generalmente, en Matemáticas el trabajo se centra solo en magnitudes escalares, de forma que, al tratar el concepto de velocidad, por ejemplo, nunca se mencionan ni la dirección ni el sentido, solo se trabaja con el módulo.
- Mientras que en Matemáticas es habitual el uso de la regla de tres, en Física se intenta evitar utilizarla.
- La representación gráfica de funciones se trabaja poco desde el punto de vista de la interpretación de gráficas en el aula de matemáticas.

Estas observaciones son habituales en las conversaciones de carácter informal entre profesores de ambas áreas. Este hecho nos llevó a plantearnos la posibilidad de realizar una investigación sobre la desconexión existente entre las matemáticas y la física en Educación Secundaria con el objetivo de desarrollar estrategias que permitan mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de ambas materias. De hecho, este trabajo, forma parte de uno más amplio en el que se está tratando de profundizar en esta desconexión y en el desarrollo de nuevas estrategias que permitan un aprendizaje conectado de ambas materias. Concretamente, en esta comunicación, se presenta un estudio de carácter exploratorio con los siguientes objetivos:

- Comparar la utilidad que perciben los alumnos de los contenidos de las asignaturas de Matemáticas y Física.
- Determinar si la forma en la que resuelven determinados ejercicios de enunciado verbal se ve influenciada por la asignatura en la que se encuentran.

ANTECEDENTES

Uno de los objetivos principales del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos consigan una cierta competencia matemática. La adquisición de la competencia matemática se pone de manifiesto cuando son capaces de resolver situaciones en las que precisan utilizar matemáticas.

La Ley Orgánica 8/2013 para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Jefatura del Estado, 2013) considera las competencias como “capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

En el marco del proyecto PISA se evalúa la alfabetización matemática (*Mathematical Literacy*) que hace referencia a “las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.” (OCDE, citado por Rico y Lupiáñez, 2008, p. 227).

Entre los estándares comunes propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) se propone prestar atención, de forma especial, a las Conexiones Matemáticas. El hecho de establecer conexiones entre las matemáticas y otras áreas del currículo ayuda a los alumnos a ver la utilidad de las matemáticas lo que puede ayudar a mejorar la motivación y el interés por parte de los alumnos, aspectos que repercutirán en la mejora del aprendizaje.

El establecimiento de conexiones dentro de las propias Matemáticas constituye un recurso motivador importante y, como señala Ortega (2005): “La motivación puede surgir de muchas formas, pero sin duda la más importante es mostrar las aplicaciones de la matemática a temas de actualidad y que sean de interés para los alumnos” (p.9).

Por otra parte, desde el NCTM (1991) también se señala la importancia de la argumentación, la comunicación de ideas matemáticas. Es habitual escuchar a algún alumno que dice que sabe hacerlo pero no sabe explicarlo. El hecho de explicarlo ayuda a una comprensión más profunda de lo que están haciendo.

Por otro lado, sería interesante desarrollar un proceso de enseñanza y aprendizaje significativo que permita a los alumnos establecer relaciones entre todo lo que estudian, lo que, evidentemente, les permitiría poder aplicarlo en diferentes situaciones. Para ello, una posibilidad sería el desarrollo de tareas basadas en aspectos propios del constructivismo.

Una de las posibilidades es trabajar la competencia en modelización matemática. De acuerdo con Pérez-Gómez (2015): "Un modelo matemático es una descripción en lenguaje matemático de un objeto que existe en un dominio extramatemático" (p. 11).

La modelización conlleva un proceso de reflexión y razonamiento que va más allá de los procedimientos mecánicos que en muchas ocasiones desarrollan los alumnos en las clases de Matemáticas. Es importante plantear a los alumnos situaciones abiertas, con posibilidad de varias soluciones, donde además contamos con datos que no vamos a necesitar, porque la realidad es así, nos aporta datos que no necesitamos y, generalmente, los alumnos están acostumbrados a incluir en la resolución de los ejercicios todos los datos que aparecen en los enunciados.

METODOLOGÍA

Con el fin de analizar si es cierta esta desconexión entre las asignaturas de Matemáticas y Física y Química que observamos los profesores, hemos realizado las siguientes actuaciones:

Se ha pasado un cuestionario a un grupo de alumnos de 4º de ESO de un centro de educación Secundaria con el fin de analizar la valoración que ellos hacen de la utilidad de ambas asignaturas y de la relación entre ellas. Como ya se ha indicado, se trata únicamente de un estudio exploratorio. Este apartado se aborda dentro de lo que se ha llamado Estudio 1.

Además, hemos planteado un enunciado verbal en dos grupos diferentes de 4º de ESO, en uno en clase de Matemáticas y en el otro en clase de Física, para valorar si la forma de resolver es diferente dependiendo de la clase en la que se encuentran. Esto se trata en lo que se denomina en esta comunicación Estudio 2.

Estudio 1

En el cuestionario se plantean preguntas sobre la utilidad de las Matemáticas para el estudio de la Física, la utilidad de ambas asignaturas para la vida cotidiana y también se les pregunta sobre una serie de contenidos concretos para que indiquen la o las asignaturas en las que los cursan.

En la pregunta 1 se trata de averiguar la utilidad que ven de las matemáticas para resolver situaciones físicas.

Con la segunda y tercera preguntas tratamos de conocer la relación que existe entre la utilidad que perciben y el gusto por una de las materias.

Las preguntas cuarta y quinta se centran en los contenidos matemáticos y su utilidad para la Física, así como la preferencia que manifiestan por alguno de estos contenidos.

Finalmente, se trata de observar si los estudiantes consideran algunos contenidos del currículo (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2015) como pertenecientes o no a ambas materias.

A continuación, se presenta el cuestionario:

1. ¿Crees que las Matemáticas son útiles para el estudio de Física?

Sí ☐

No ☐

¿Por qué?

2. ¿Qué asignatura te gusta más?

Matemáticas ☐

Física ☐

3. ¿Qué asignatura crees que es más útil para la vida cotidiana?

Matemáticas ☐

Física ☐

¿Por qué?

4. ¿Qué parte de las Matemáticas te gusta más?

Álgebra (polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones) ☐

Geometría ☐

Funciones ☐

Estadística y Probabilidad ☐

5. ¿Qué parte de las Matemáticas crees que está más relacionada con la Física?

Álgebra (polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones) ☐

Geometría ☐

Funciones ☐

Estadística y Probabilidad ☐

Pon ejemplos

6. Indica en qué asignatura has estudiado los siguientes contenidos:

CONTENIDOS	MATEMÁTICAS	FÍSICA
Factores de conversión		
Error absoluto y error relativo		
Vectores		
Trigonometría		
Representación gráfica de funciones		
Proporcionalidad		
Regla de tres		

Estudio 2

Una vez que los estudiantes han respondido al cuestionario, se les plantearon una serie de problemas en clase de Física y de Matemáticas. Como ejemplo, se presenta la resolución de uno de ellos que suele ser habitual en las clases de ambas materias. Se trata de un ejercicio de móviles que se encuentran. En otras ocasiones se han abordado también problemas de este tipo en relación con la resolución que hacen alumnos con talento (Gutiérrez y Jaime, 2013) o futuros docentes (Socas, Hernández y Palarea, 2014). Se plantea el siguiente enunciado verbal:

> Villarriba y Villabajo están separadas 20 km. Marta, que vive en Villarriba, llama a Ignacio, que vive en Villabajo, y deciden coger sus bicis para encontrarse en el camino entre los dos pueblos. Marta sale a las once en punto y pedalea a 10 m/s. Ignacio sale a las once y diez y su bici solo le permite ir a 8 m/s. Calcula dónde se encuentran y a qué hora.

El planteamiento se lleva a cabo en dos grupos de alumnos de 4º de ESO que cursan Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y Física y Química. El ejercicio lo resuelven 14 alumnos en clase de Física y 21 alumnos en clase de matemáticas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL ESTUDIO 1

En el primer ítem del cuestionario se les pregunta si creen que las Matemáticas son útiles para el estudio de la Física y solo un alumno, de los 35 que responden al cuestionario, responde que no.

En la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos para los ítems 2 y 3. En el ítem 2 se les pregunta por la asignatura que más les gusta mientras que en el ítem 3 se les pide que indiquen la asignatura que consideran más útil para la vida cotidiana. En ambos ítems, un alumno elige las dos asignaturas.

Tabla 1. Resultados de los ítems 2 y 3

		Matemáticas	Física
Ítem 2	N	29	7
	%	83%	20%
Ítem 3	N	31	5
	%	82%	14%

Los resultados ponen de manifiesto que, mayoritariamente, prefieren las matemáticas y, además, las consideran más útiles para la vida cotidiana. En el ítem 3 se les pidió que indicaran los motivos y el análisis de los argumentos permite observar que se fijan, fundamentalmente, en los contenidos de matemáticas propios de la Aritmética y señalan que en Matemáticas se trabajan contenidos más generales y que las operaciones como sumar, restar, multiplicar, dividir y calcular porcentajes le resultan útiles para las facturas, para ir de compras, en particular, en la época de rebajas. Resulta muy llamativo que los contenidos de Matemáticas a los que hacen referencia en realidad son contenidos que ya conocen desde la Educación Primaria. Sin embargo, consideran que en Física se trabajan contenidos muy específicos que solo les van a ser de utilidad para aquellos alumnos que decidan estudiar Física en un futuro.

Tabla 2. Resultados de los ítems 4 y 5

		Álgebra	Geometría	Funciones	Estadística y Probabilidad
Ítem 4	N	22	3	2	8
	%	63 %	9 %	6 %	22 %
Ítem 5	N	21	5	13	1
	%	60 %	14 %	37%	3 %

En el ítem 4 se les pide que señalen la parte de las matemáticas que más les gusta y en el ítem 5 deben elegir la parte de las Matemáticas que consideran que está más relacionada con la Física.

Mayoritariamente eligen Álgebra como la parte que más les gusta y que más relacionada está con la Física. El argumento para justificar dicha relación es el hecho de que consideran que todas las fórmulas son ecuaciones.

En segundo lugar, la parte más relacionada con la Física piensan que es el bloque de funciones dado que estudian las gráficas de distintos movimientos.

Tabla 3. Asignatura en la que estudian determinados contenidos

		Factores de conversión	Error absoluto y relativo	Vectores	Trigo-nometría	Represen-tación gráfica de funciones	Propor-cionalidad	Regla de tres
Matemáticas	N	14	35	19	35	29	34	33
	%	40 %	100 %	54 %	100 %	83 %	97 %	94 %
Física	N	30	3	31	15	22	7	26
	%	86 %	9 %	89 %	43 %	63 %	20 %	74 %

En la Tabla 3 deben señalar en qué asignatura estudian una serie de contenidos concretos. Este apartado aporta unos resultados muy interesantes en relación con los resultados esperados.

Mientras que en el apartado sobre *Error absoluto y error relativo* todos los alumnos señalan que lo estudian en Matemáticas, solo 3 alumnos lo indican como contenido de Física, probablemente porque dichos alumnos cursan una asignatura optativa denominada Laboratorio de Física en la que sí se estudia este contenido, mientras que no forma parte del currículo de la asignatura de Física.

En trigonometría, los 35 alumnos que forman la muestra señalan que estudian este contenido en Matemáticas mientras que solo 15 consideran que lo estudian en Física, cuando es un contenido que deberían estar acostumbrados a utilizar al trabajar con planos inclinados, por ejemplo.

La representación gráfica de funciones es un contenido que trabajan en ambas áreas, con porcentajes relativamente similares.

Llama poderosamente la atención lo relativo a los vectores. Se trata de un contenido que han estudiado en 3º de ESO, en particular en el apartado de Movimientos en el plano para el estudio de las traslaciones. Además, lo estudian de nuevo en 4º de ESO pero para desarrollar la Geometría Analítica, de forma que se pone de manifiesto, claramente, que no consideran que se trate del mismo contenido, puesto que en Matemáticas no se presta atención a los vectores en el estudio de las magnitudes.

Y, finalmente, prestamos atención a los contenidos de Factores de conversión, Proporcionalidad y Regla de tres. Mientras que el equipo investigador había previsto que ningún alumno o casi ninguno señalaría la regla de tres como contenido propio de la Física, dado que las profesoras hacen hincapié en evitar su uso y trabajar aplicando factores de conversión, el resultado muestra que 26 alumnos señalan la regla de tres como contenido de Física y 30 señalan los factores de conversión, de modo que son valores muy similares. Destaca el hecho de que no consideran la proporcionalidad presente en Física, solo la eligen 7 alumnos, mientras que 34 consideran que se estudia en Matemáticas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL ESTUDIO 2

En el estudio llevado a cabo sobre el enunciado verbal planteado se observa lo siguiente:

Se obtienen mejores resultados en la asignatura de Física que en la asignatura de Matemáticas, lo que, de entrada, ya resulta curioso porque en Física prácticamente todos los alumnos lo resuelven, aunque encuentren alguna dificultad, pero en Matemáticas son pocos los alumnos que lo resuelven, a pesar de que el procedimiento para resolverlo es puramente matemático.

El método de resolución cambia completamente, tal como esperábamos.

Mientras que, en Física, toman el sistema de referencia, igualan la posición final de ambos: $x_m = x_i$, y desarrollan considerando que la velocidad de Marta es de 10 m/s mientras que la de Ignacio es de -8 m/s; en Matemáticas, se considera el espacio recorrido por cada uno, con sus velocidades de 8 m/s y 10 m/s respectivamente, y la suma de los espacios recorridos dará como resultado el espacio total que deben recorrer (20 km).

Es decir, mientras que en Física consideran la velocidad como magnitud vectorial y tienen en cuenta el sentido, lo que aporta el signo negativo a la velocidad, en Matemáticas se considera únicamente el módulo de la velocidad. Este hecho hace que un alumno de la clase de matemáticas realice el planteamiento erróneo que se presenta en la Figura 1.

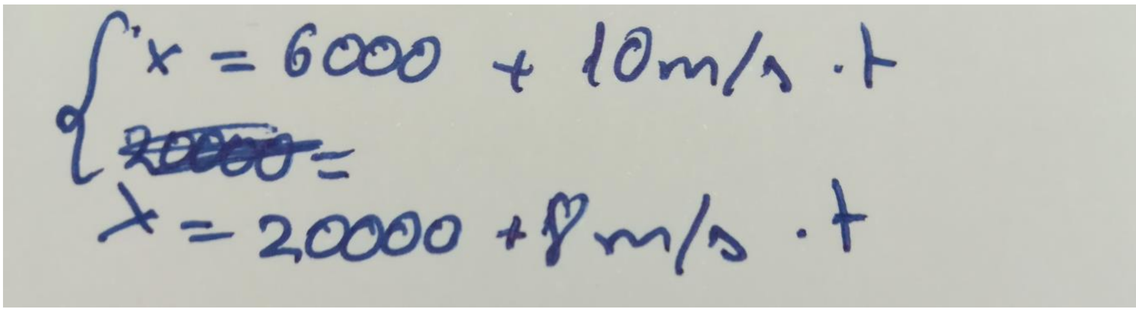


Figura 1. Resolución de un alumno en clase de Matemáticas

Otro aspecto interesante es el relativo al uso de las unidades. Mientras que en Matemáticas no aparecen las unidades en ningún momento en cuanto plantean la ecuación, en Física sí que las incluyen. Este hecho es interesante porque muchos errores en la resolución en clase de Matemáticas se deben a que las unidades no concuerdan, cuestión de la que se habrían dado cuenta si hubieran escrito las unidades al menos en el primer planteamiento, como se muestra en la Figura 2, correspondiente a una resolución en clase de Matemáticas.

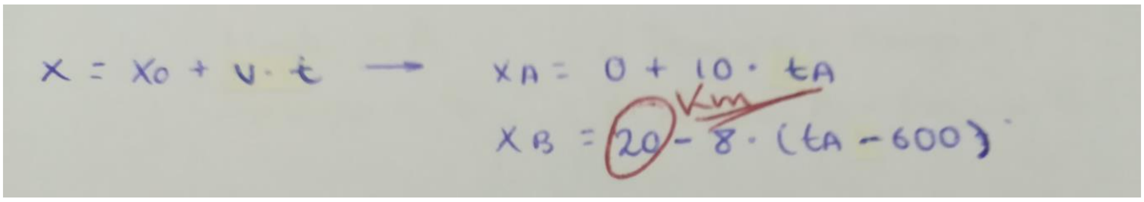


Figura 2. Resolución de un alumno en clase de Matemáticas

Sin embargo, en clase de Física, al hacer el planteamiento de forma más detallada, incluyendo las unidades al menos en el planteamiento, aunque después, en la resolución ya no las utilicen para evitar confusiones, pueden comprobar de forma sencilla que las unidades concuerdan y ya prescindir de ellas.

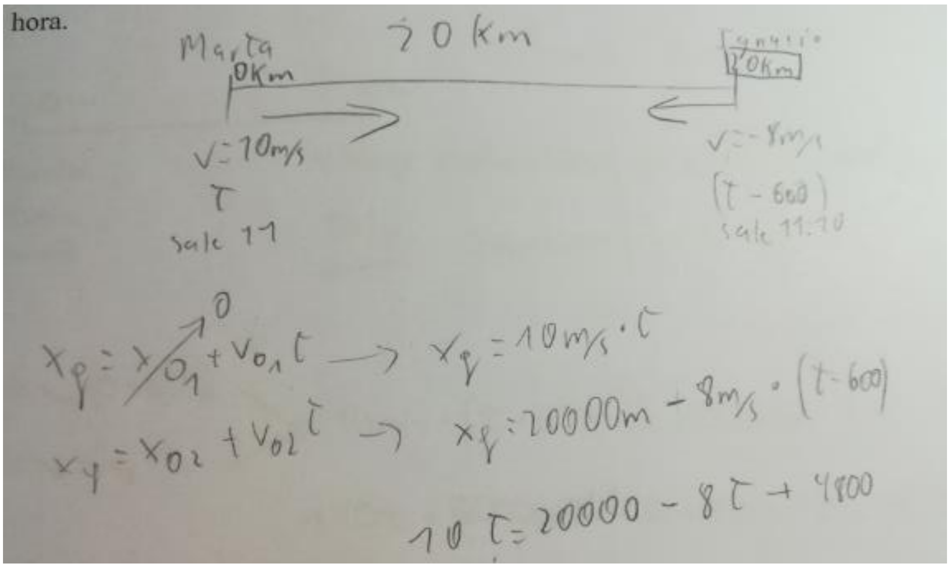
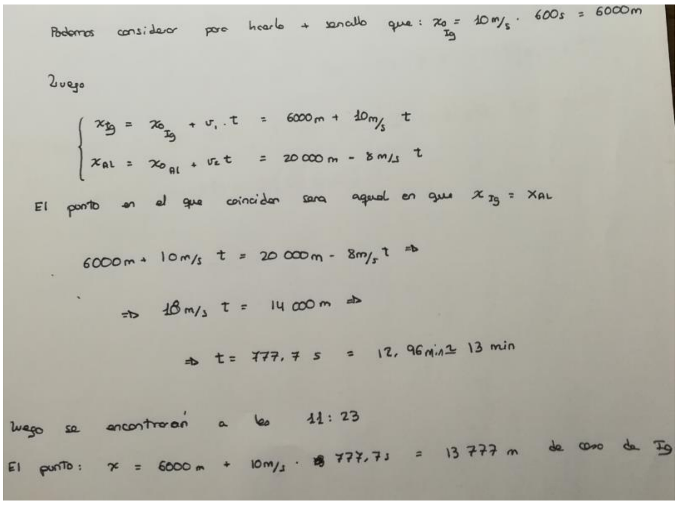


Figura 3. Resolución de un alumno en clase de Física

Este mismo enunciado se planteó a un grupo de alumnos de la especialidad de Matemáticas del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y, curiosamente, los resultados obtenidos son similares. Los graduados en Matemáticas resuelven de la misma forma que los alumnos de secundaria en clase de Matemáticas, mientras que los graduados en Física resuelven como los alumnos de Educación secundaria en clase de Física. Esta situación ocurre tanto en lo relativo al uso de la velocidad como magnitud vectorial o escalar y en lo que respecta al uso de las unidades en el planteamiento matemático del enunciado. En la Figura 4 se presenta la resolución de un alumno del Máster de Profesorado de Educación Secundaria, graduado en Física.



Podemos considerar para hacerlo + sencillo que: $x_{0_{Ig}} = 10\,m/s \cdot 600s = 6000m$

Luego

$$\begin{cases} x_{Ig} = x_{0_{Ig}} + v_1 \cdot t = 6000m + 10m/s\ t \\ x_{AL} = x_{0_{AL}} + v_2 t = 20\,000\,m - 8\,m/s\ t \end{cases}$$

El punto en el que coinciden será aquel en que $x_{Ig} = x_{AL}$

$$6000m + 10m/s\ t = 20\,000m - 8m/s\ t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\,m/s\ t = 14\,000\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 777,7\ s = 12,96\,min \simeq 13\ min$$

Luego se encontrarán a las 11:23

El punto: $x = 6000\,m + 10m/s \cdot 777,7s = 13\,777\,m$ de casa de Ig

Figura 4. Resolución de un alumno del Máster de profesorado

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados realizado en los apartados anteriores nos lleva a hacer varias reflexiones.

Resulta curioso que prácticamente todos los alumnos consideran que las matemáticas son útiles para el estudio de la Física y, sin embargo, no son capaces de darse cuenta de que muchos contenidos coinciden en ambas asignaturas.

Mientras que en Física los alumnos están acostumbrados a explicar la resolución que realizan, en Matemáticas no se suele trabajar la argumentación, aspecto fundamental en el proceso de aprendizaje.

Consideramos que trabajar de forma natural utilizando en las clases de Matemáticas modelos propios de la asignatura de Física puede llevar a una mejor comprensión de las dos asignaturas y, por tanto, repercutirá en la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos.

Este hecho nos lleva a tratar de continuar con esta línea de investigación de forma que podamos hacer propuestas razonadas sobre los currículos de las dos asignaturas. En particular, parece interesante dedicar menos tiempo al bloque de contenidos propio de la aritmética, al que se dedica mucho tiempo que podría dedicarse de una forma distribuida, como bloque transversal mientras se están desarrollando el resto de los bloques. Este hecho, permitiría que los contenidos propios de las matemáticas, como por ejemplo la trigonometría, pudiera desarrollarse en las clases de Matemáticas y, cuando en Física, precisen utilizarlos, que no se vea el profesorado de Física con la necesidad de impartir dichos contenidos, a los que evidentemente no pueden dedicarle el tiempo que precisan los alumnos, lo que lleva a trabajar de forma mecánica sin poder desarrollar bien los conceptos. Todo ello precisa de una coordinación entre el profesorado de ambas materias. Además, consideramos que resulta especialmente útil trabajar en las aulas la competencia en modelización matemática que permita a los alumnos aplicar las matemáticas en la resolución de problemas que puedan plantearse en diferentes contextos y situaciones.

Estas cuestiones deberían tenerse en cuenta en la formación de profesores ya que, los futuros docentes deben ser conscientes de las diferencias existentes al abordar la resolución de este tipo de ejercicios desde dos perspectivas diferentes.

Agradecimiento

Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019 bajo el proyecto SA050G19.

Referencias

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Jefatura del Estado (2013). *Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa. BOE de 10 de diciembre de 2013.* Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Madrid: Autor.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas.* Barcelona: Graó.

Pérez-Gómez, R. (2015). Resolución de problemas y modelización matemática para la clase. *UNO*, *69*, 7-21.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Socas, M. M., Hernández, J. y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

¿A MAYOR ANSIEDAD MENOR RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS?

The more anxiety the less performance in mathematics?

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A.

Universidad de Murcia

Resumen

Para conocer cómo están relacionadas ansiedad ante las matemáticas, actitud hacia las matemáticas y rendimiento en matemáticas en el grado de Maestro de Primaria se efectúa una investigación en una muestra de 344 alumnos de segundo curso en el que tienen su primera asignatura de Matemáticas, obteniendo que los alumnos tienen ansiedad media, rendimiento de notable y actitud positiva. La correlación entre actitud y ansiedad es alta y negativa (r=-.730), entre actitud y rendimiento es baja y positiva (r=.380), y entre ansiedad y rendimiento es baja y negativa (r=-.406). El rendimiento en matemáticas depende de las variables ansiedad y actitud, pero los resultados obtenidos no permiten afirmar que a mayor ansiedad menor rendimiento en matemáticas, ni a mayor rendimiento menor ansiedad.

Palabras clave: *ansiedad ante las matemáticas, actitud hacia las matemáticas, rendimiento en matemáticas, futuros maestros.*

Abstract

To find out how anxiety about mathematics, attitude toward mathematics and performance in mathematics are related in the Primary Master's degree, a research is carried out in a sample of 344 second grade students in which they have their first subject of Mathematics, getting that students have average anxiety, remarkable performance and positive attitude. The correlation between attitude and anxiety is high and negative (r=-.730), between attitude and performance is low and positive (r=.380), and between anxiety and performance is low and negative (r=-.406). The performance in mathematics depends on the variables anxiety and attitude, but the obtained results do not allow to assert that the more anxiety the less performance in mathematics, nor the more performance the less anxiety.

Keywords: *anxiety about mathematics, attitude towards mathematics, performance in mathematics, future teachers.*

INTRODUCCIÓN

La ansiedad matemática se asocia con las emociones negativas y con una reducción de la actividad implicada en el razonamiento matemático, interfiriendo con la capacidad matemática de una persona para aprender matemáticas que no va necesariamente unida a alumnos con bajo rendimiento (Valdizán y Rodríguez, 2012). Y Suárez-Pellicioni, Núñez-Peña y Colomé (2014) indican que las personas con ansiedad matemática evitan esta materia en su enseñanza obligatoria, recibiendo menos formación en matemáticas y cuando son evaluados su rendimiento en matemáticas es bajo.

Caballero, Blanco y Guerrero (2007) indican que la actitud hacia las matemáticas viene generada por una serie de sentimientos y predisposiciones hacia las mismas y va referida al aprecio y valoración por esta materia o al rechazo o negación que suscita. Y Auzmendi (1992) caracteriza las actitudes como: 1) Son ambivalentes, 2) Se desarrollan en todos los niveles, 3) En un principio

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en Matemáticas? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 453-462). Valladolid: SEIEM.

tienden a ser positivas, 4) Varían con el paso del tiempo, 5) Evolucionan negativamente, y 6) Estos sentimientos son persistentes.

Muchos alumnos que superan las pruebas de acceso a la universidad se matriculan en el Grado de Maestro de Primaria (en adelante, GMP) y al finalizar sus estudios serán profesores de matemáticas de niños de 6 a 12 años, por lo que es necesario un estudio sobre los factores actitud, ansiedad y rendimiento en matemáticas al inicio de su primera asignatura de Matemáticas y su didáctica.

MARCO TEÓRICO

La ansiedad ante las matemáticas se reconoce por determinados síntomas como son confusión, falta de autoconfianza, pérdida repentina de la memoria, taquicardia, sudoración, dolor de cabeza... La memoria de trabajo a corto plazo es la más perjudicada puesto que es la que nos ayuda a mantener una cantidad limitada de información para resolver un problema y la ansiedad interfiere sobre ella pudiendo llevar a un estudiante a bloquearse ante la resolución de un problema experimentando un sentimiento negativo, y "un alumno que experimenta sentimientos negativos al hacer matemáticas puede plantearse que la única manera de evitar esos sentimientos es dejar de estudiarlas" (Pérez-Tyteca, 2012, p. 382).

Valdizán y Rodríguez (2012) indican una serie de consejos al alumnado y al profesorado para reducir el nivel de ansiedad, entre los primeros se encuentran mantener una actitud positiva cuando piensen en la clase de matemáticas y estar tranquilo y relajado. Y entre los segundos, vincular los problemas con la vida cotidiana y potenciar el trabajo colaborativo. Segarra y Pérez-Tyteca (2017) proponen para minimizar las respuestas de ansiedad de futuros maestros realizar talleres integrados en las asignaturas, y lo hacen efectivo Pérez-Tyteca y Monje (2017) en el diseño de un taller para alumnos que estudian el Grado de Maestro de Infantil tras detectar que el 17% de la muestra de 204 alumnos tiene un nivel muy alto de ansiedad entre 4 y 5, tras aplicarle la escala de 1 a 5 de Fennema-Sherman (Fennema y Sherman, 1976) en donde el colectivo obtiene una media de 3,037.

Palacios, Hidalgo, Maroto y Ortega (2013) abordan la ansiedad, la actitud y el rendimiento en matemáticas estudiando estos factores conjuntamente, siendo la relación entre actitud y ansiedad de orden inverso. Se plantean si la ansiedad genera rendimientos bajos o los rendimientos bajos generan ansiedad matemática, llegando a la conclusión de que "las actitudes hacia las matemáticas son el antecedente más importante de la ansiedad matemática. Estas determinan la ansiedad matemática (…) y a mayores niveles de ansiedad, menores rendimientos matemáticos" (p. 106).

Rosário et al. (2008) se centran en ansiedad ante los exámenes "dependiendo del grado en que la situación de examen o de evaluación sea percibida como amenazadora, el alumno experimenta un incremento en el nivel de ansiedad" (p. 564). La ansiedad disminuye conforme aumenta el rendimiento en matemáticas y las chicas se muestran más ansiosas que los chicos, siendo necesaria una intervención preventiva por parte de los profesores que a su vez deben de trabajar este tema en la formación inicial y continua.

García-Fernández, Martínez-Monteagudo e Inglés (2013) indican el carácter anticipatorio de la ansiedad, Bausela (2018) relaciona ansiedad y rendimiento diciendo que "un nivel de ansiedad es necesario para ser eficientes, pero superado dicho nivel puede entorpecer o incluso interferir de forma negativa el rendimiento" (p. 169). Y Palacios et al. (2013) plantean que existe un nivel idóneo de ansiedad, que un nivel alto de ansiedad facilita el aprendizaje mecánico en tareas simples, pero que ante situaciones de creatividad produce peores resultados.

Sesé, Jiménez, Montaño y Palmer (2015), en una muestra de 472 estudiantes de Ciencias de la Salud con asignaturas de estadística, analizan las relaciones entre bagaje matemático, ansiedad ante los exámenes, ansiedad ante la estadística, actitud hacia la estadística y rendimiento, viendo que las actitudes son el principal predictor del rendimiento, que el bagaje matemático predice la ansiedad, y que las actitudes están influidas positivamente por el bagaje matemático y negativamente por la ansiedad.

Las investigaciones sobre el dominio afectivo en educación matemática han adquirido un peso importante dedicando la SEIEM un seminario a su estudio en donde Caballero, Cárdenas y Gordillo (2016) establecen un programa de control para maestros en formación inicial, Gómez-Chacón (2016) una visión de los estudios centrados en la interacción afecto-cognición y sus efectos y Palacios-Picos (2016) presenta diferentes modelos y propuestas de medida relacionados con las actitudes hacia las matemáticas y ansiedad matemática.

En Nortes y Nortes (2017) utilizando una muestra de 174 estudiantes del Grado de Maestro de Primaria se midió el nivel de competencia matemática elemental, actitud y ansiedad hacia las matemáticas, entre otras cuestiones, obteniendo que actitud y ansiedad están relacionadas negativamente (r=-.715), competencia correlaciona negativamente con ansiedad (r=-.265), y competencia y actitud correlaciona positivamente (r=.202). Y en Nortes y Nortes (2014) al realizar un estudio en dos cursos académicos consecutivos con 506 alumnos de 2.º, 3.º y 4.º del GMP obtuvieron que la ansiedad hacia las matemáticas se mantiene estable, que las chicas tienen mayor ansiedad que los chicos y ambos ante un examen su ansiedad es alta.

La ansiedad y la actitud hacia las matemáticas juegan un papel fundamental dentro del dominio afectivo ya que el primero representa un miedo hacia las matemáticas y el segundo un sentimiento hacia las mismas. Ambos factores tienen una gran influencia en el rendimiento en matemáticas.

OBJETIVO

En el presente estudio con una muestra de alumnos de 2.º curso del Grado de Maestro de Primaria, alumnos que no han recibido ninguna asignatura de Matemáticas en el Grado, distribuidos en varios grupos, se va a analizar las relaciones entre las tres variables ansiedad matemática, actitud hacia las matemáticas y rendimiento en matemáticas y tratar de contestar a las siguientes preguntas:

P1. ¿A mayor ansiedad ante las matemáticas, menor rendimiento en matemáticas?

P2. ¿A mayor rendimiento en matemáticas, menor ansiedad?

P3. ¿A actitud hacia las matemáticas muy positiva, menor ansiedad?

P4. ¿A mayor ansiedad hacia las matemáticas, actitud negativa?

P5. ¿A actitud positiva hacia las matemáticas, mayor rendimiento?

P6. ¿A mayor rendimiento en matemáticas, actitud hacia las matemáticas muy positiva?

MÉTODO

Participantes

Son 344 estudiantes de 2.º curso del Grado de Maestro de Primaria (GMP), matriculados el curso 2018/19 en la facultad de Educación de la Universidad de Murcia, de los que 84 son hombres y 260 son mujeres, de edades comprendidas entre 18 y 46 años y edad media 19,9 años, repartidos en siete grupos, de los que 44 estudiantes son del grupo bilingüe de inglés. La muestra no es probabilística.

Instrumentos

1. Cuestionario de Ansiedad ante las Matemáticas de Fennema-Sherman (1976), tipo Likert, de 1 a 5, que consta de 12 cuestiones, seis redactadas en positivo y seis en negativo en donde se han puntuado de forma complementaria para que a mayor puntuación mayor ansiedad. Es una de las subescalas de actitudes hacia las matemáticas formada por 108 cuestiones.

2. Cuestionario de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi (1992), tipo Likert de 1 a 5, que consta de 25 cuestiones, quince redactadas en forma positiva y diez en forma negativa en donde se han puntuado de forma complementaria, para que a mayor puntuación mayor actitud. Los 25 ítems se reparten en cinco factores: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza.

3. Prueba de competencia Matemáticas de sexto de Primaria (INEE, 2018) que consta de 30 preguntas, unas abiertas y otras cerradas en donde se puntúan con 1 o con 0, según estén bien contestadas, o mal/en blanco.

Procedimiento

Las pruebas se pasaron la primera semana del curso 2018/19 en todos los grupos y fueron codificadas por el mismo profesor. En el tratamiento estadístico se utiliza Systat v.13.

RESULTADOS

Resultados globales

Los estadísticos de las variables estudiadas, Ansiedad ante las Matemáticas (en adelante, ANS), Actitud hacia las Matemáticas (en adelante, ACT) y Rendimiento en Matemáticas (en adelante, RMA), se presentan en la Tabla 1. La fiabilidad de los cuestionarios con el coeficiente alfa de Conbach es de 0,895 (ACT), 0,877 (ANS) y 0,768 (PR), los dos primeros buenos y el tercero aceptable. Los cuestionarios de Auzmendi (1992) y de Fennema y Sherman (1976) son los más utilizados en castellano para medir Actitud hacia las matemáticas y Ansiedad ante las Matemáticas.

Tabla 1. Estadísticos de ansiedad, actitud y rendimiento en matemáticas

	Ansiedad	*Actitud*	*Rendimiento*
NÚMERO	344	344	344
MÍNIMO	1,000	1,720	3,000
MÁXIMO	5,000	4,880	10,000
MEDIANA	3,000	3,280	7,333
MEDIA	2,950	3,206	7,185
DT	0,763	0,557	1,461

- Ansiedad media es 2,950, actitud media 3,206, y rendimiento medio 7,185.
- Entre (Media-DT, Media+DT) se encuentra en ansiedad el 69,15% del alumnado, en actitud el 66,28% y en rendimiento en matemáticas el 58,43%.
- Calculados los cuartiles, el 25% de los participantes tiene una actitud por encima de 3,560 (C.S.), un rendimiento por encima de 8,333 (C.S.) y una ansiedad por debajo de 2,417 (C.I.).
- Otro 25% tiene una actitud por debajo de 2,76 (C.I.), un rendimiento por debajo de 6,167 (C.I.) y una ansiedad por encima de 3,417 (C.S.).
- La actitud del 50% de estudiantes es igual o superior a 3,280, la ansiedad igual o superior a 3 y el rendimiento matemático igual o superior a 7,333.

Porcentajes de ansiedad, actitud y rendimiento por grupo

Se utiliza la clasificación de Pérez-Tyteca (2012) de intervalos de ansiedad, se establecen intervalos de actitud y se consideran intervalos de rendimiento entre 0 y 10. Ansiedad ante las matemáticas (ANS), Actitud hacia las Matemáticas (ACT) y Rendimiento en Matemáticas, se han clasificado así:

ANS: [1] = Nula, (1, 2] = Baja, (2, 3] = Media, (3, 4] = Alta y (4, 5] = Muy alta

ACT: [1, 2] = Muy negativa, (2, 3] = Negativa, (3, 4] = Positiva y (4, 5] = Muy positiva

RMA: [0, 5) = Suspenso, [5, 7) = Aprobado, [7, 9) = Notable y [9, 10] = Sobresaliente

Se considera de bajo rendimiento los alumnos con calificación [0, 5) y de muy alto rendimiento los pertenecientes al intervalo [9, 10]. Los porcentajes de alumnos atendiendo a cada dos variables se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Porcentajes de alumnos cruzando dos variables

	ANSIEDAD					
RMA	[1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]	TOT
[0, 5)	---	---	2,03	3,78	1,74	7,55
[5, 7)	---	0,87	10,47	15,41	2,62	29,37
[7, 9)	---	6,98	**22,38**	17,44	3,20	**50,00**
[9, 10]	0,29	4,36	6,40	1,74	0,29	13,08
TOTAL	0,29	12,21	**41,28**	38,37	7,85	100
	ACTITUD					
RMA	[1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]	TOT
[0, 5)	---	---	4,36	3,20	---	7,56
[5, 7)	---	0,87	15,70	12,50	0,29	29,36
[7, 9)	---	0,29	14,83	**31,10**	3,78	**50,00**
[9, 10]	---	---	1,16	9,88	2,03	13,08
TOTAL	0	1,16	36,05	**56,69**	6,10	100
	ACTITUD					
ANSIEDAD	[1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]	TOT
[1]	---	---	---	---	0,29	0,29
(1, 2]	---	---	0,58	7,56	4,07	12,21
(2, 3]	---	---	6,40	**33,14**	1,74	**41,28**
(3, 4]	---	0,58	22,38	15,41	---	38,37
(4, 5]	---	0,58	6,69	0,58	---	7,85
TOTAL	0	1,16	36,05	**56,69**	6,10	100

- Más del 50% del alumnado tiene actitud positiva, el 50% tiene notable y menos del 50% ansiedad baja.
- En la relación ANS-RMA: Ansiedad media-Notable es el porcentaje más alto (22,38%), seguido de Ansiedad alta-Notable (17,44%) y el tercero Ansiedad alta-Aprobado (15,41%).
- En la relación ACT-RMA: Actitud positiva-Notable es el porcentaje más alto (31,10%), seguido de Actitud negativa-Aprobado (15,70%) y de Actitud negativa-Notable (14,83%).
- En la relación ANS-ACT: Ansiedad media-Actitud positiva es el porcentaje más alto (33,14%), seguido de Ansiedad alta-Actitud negativa (22,38%) y de Ansiedad alta-Actitud positiva (15,41%).

Valores extremos de ansiedad, actitud y rendimiento en matemáticas

Se considera el intervalo (1, 2] como ansiedad baja y actitud muy negativa y el intervalo (4, 5] como ansiedad muy alta y actitud muy positiva, y en rendimiento en matemáticas el intervalo [0, 5) como de rendimiento bajo y el [9, 10] como de rendimiento muy alto . En este contexto se analizan los resultados por grupos y por total.

Ansiedad ante las matemáticas

- Con ansiedad baja hay 23 hombres y 19 mujeres, el 12,21% del total de participantes. La media de ansiedad baja de estos 42 alumnos es de 1,692, teniendo una actitud positiva de 3,809 y un rendimiento notable de 8,349. Y una parte de los 42 alumnos tiene la ansiedad más baja con 1,375 y una actitud muy positiva, representando el 28,6%.
- El grupo bilingüe, es el segundo grupo en ansiedad más baja con una proporción de alumnos del 15,9% y la actitud más positiva de los siete grupos.
- Con ansiedad muy alta hay 27 alumnos, 5 hombres y 22 mujeres, el 7,85%. Estos alumnos tienen una media de ansiedad de 4,401, un rendimiento de 6,444 y una actitud negativa de 2,409.

- Hay 8 alumnos de un grupo con ansiedad muy alta, cuya media es de 4,427, la más alta, siendo su actitud de 2,535 y un rendimiento de 7,417, mientras que los 7 alumnos del segundo grupo con ansiedad más alta, el 17,95% de su grupo, tienen la actitud más negativa.

Actitud hacia las matemáticas

- Solo 4 alumnos tienen una actitud muy negativa, el 1,16%., de media 1,910, corresponde ansiedad alta de 3,979 y un rendimiento medio de 6,333.
- Actitud muy positiva la tienen 7 hombres y 14 mujeres, el 6,10% del total de participantes.
- El 20,45% del grupo bilingüe tiene una actitud muy positiva con media de 4,338 y una ansiedad baja de media de 1,889, siendo su rendimiento medio de 8,111.
- Solo un grupo de los siete de 2.º no tiene alumnos con una actitud muy positiva, en el resto a actitud muy positiva corresponde ansiedad baja en cuatro de los grupos.

Rendimiento en Matemáticas

- De los 172 estudiantes con notable, 24 tienen ansiedad baja, 77 media, 60 alta y 11 muy alta.
- El 13,08% de los alumnos tiene sobresaliente de media 9,333, con ansiedad media de 2,328 y actitud positiva de 3,628.
- Hay dos alumnos y una alumna con puntuación máxima de 10, con actitud 4 y 3,720, y ansiedad de 1,667 y 1,750, respectivamente; la alumna tiene actitud 3,840 y ansiedad 2,667. Ninguno de los tres con puntuación de 10 tiene una actitud muy positiva hacia las matemáticas.
- La puntuación más alta dentro de suspenso es 4,667 y la tienen 12 alumnos, 4 hombres y 8 mujeres de los que un hombre tiene 5 de ansiedad y 2,44 de actitud y una mujer de ansiedad 4,333 y de actitud 2,04, como valores extremos de ansiedad.
- Hay dos alumnas con puntuación mínima en matemáticas de 3 con actitud de 2,8 y 2,96 y ansiedad 3,667 y 3,583, respectivamente.

Variables relacionadas

A continuación se efectúa el estudio atendiendo a dos puntuaciones en donde se relacionan las variables con intervalos extremos: Actitud muy positiva-Ansiedad baja, Actitud muy negativa-Ansiedad muy alta, Rendimiento muy alto-Ansiedad baja, y Rendimiento bajo-Ansiedad muy alta.

Actitud muy positiva y ansiedad baja/nula

- El 4,36% de los estudiantes, 15, se sitúa en un nivel afectivo muy positivo para aprender matemáticas, con baja o nula ansiedad y actitud muy positiva.
- Hay tres grupos de los siete en donde todos los alumnos tienen una actitud inferior o igual a 4 y una ansiedad superior a 2.
- Dos grupos, uno el bilingüe, tienen muy buena disposición para lograr altos resultados en matemáticas, actitud muy positiva y ansiedad baja, con más del 13% de sus alumnos.

Actitud muy negativa y ansiedad muy alta

- Solo hay dos alumnos con actitud muy negativa y ansiedad muy alta, el 0,58%, que necesitan aumentar la autoconfianza y reducir la ansiedad ante las matemáticas para poder enfrentarse con éxito a esta asignatura, no obstante están dentro del grupo de aprobados.
- Hay cinco grupos de los siete en donde sus alumnos no tienen actitud muy negativa ni ansiedad muy alta ante las matemáticas.

Rendimiento muy alto y ansiedad baja/nula

- Alumnos con rendimiento muy alto y ansiedad baja o nula, hay 16, el 4,65%.
- Solo hay un grupo que no tenga alumnos con estas dos características.
- Hay dos grupos que tienen mejor valoración, el bilingüe, con mayor rendimiento, 9,333 y actitud muy alta 4,307 y el segundo con menor ansiedad, 1,250, y rendimiento 9,222.
- Como valores extremos dos alumnos obtienen 10 en rendimiento y en ansiedad 1,667 y 1,750, y un alumno tiene 1 en ansiedad y 9 en rendimiento.

Rendimiento bajo y ansiedad muy alta

- Hay seis alumnos con estas características de rendimiento bajo (suspenso) y ansiedad muy alta (más de 4), el 1,74%.
- Un alumno tiene 5 de ansiedad y rendimiento 4,667.
- Dos alumnos tienen un 3 en rendimiento (la puntuación más baja) y su ansiedad es solo alta.
- Hay tres grupos de los siete que no tienen alumnos con estas características, dos grupos con un alumno y dos grupos con dos alumnos.

Se ha visto en la Tabla 2 que alumnos con rendimiento muy alto y actitud muy negativa no hay, es decir no hay alumnos con sobresaliente y actitud inferior o igual a 2. También se ha buscado a alumnos con rendimiento bajo y actitud muy positiva y no se ha encontrado ninguno, es decir no hay alumnos con suspenso y una actitud superior a 4. Además, de los alumnos con rendimiento muy alto, ansiedad baja o nula son el 35,55% y con actitud positiva o muy positiva el 91,06%, mientras que de los alumnos con rendimiento muy alto, ansiedad alta o muy alta son el 15,52% y con actitud negativa o muy negativa el 8,87%. No se han encontrado alumnos con rendimiento bajo y ansiedad baja y tampoco alumnos con rendimiento bajo y actitud muy negativa.

Otras relaciones entre las tres variables objeto del estudio, son:

- Alumnos con ansiedad muy alta (4, 5] que tengan un rendimiento bajo [0, 5) son el 22,17%.
- Alumnos con rendimiento muy alto [9, 10] que tengan ansiedad baja (1, 2] o media (2, 3], son el 82,26%.
- Alumnos con actitud muy positiva que tengan ansiedad baja o nula son el 71,48%.
- Alumnos con ansiedad muy alta que tengan actitud baja o media son el 92,61%.
- Alumnos con actitud muy positiva que tengan rendimiento muy alto están el 33,29%.
- No hay alumnos con actitud muy positiva y ansiedad muy alta.
- No hay alumnos con actitud muy positiva y ansiedad baja.
- Solo un alumno tiene ansiedad muy alta y sobresaliente.

Correlaciones

Se procede a analizar en qué medida las calificaciones de la prueba de Competencia Matemática de sexto de Primaria están asociadas con Ansiedad y Actitud hacia las matemáticas. Para ello se efectúa el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson entre las tres variables, obteniendo un coeficiente de correlación de -.406 (p<.001) para ansiedad-rendimiento y .380 (p<.001), para actitud-rendimiento, siendo la primera negativa y la segunda positiva. A mayor ansiedad peor actitud y a mejor actitud mejores resultados en matemáticas (o a mejores resultados mejor actitud).

Las nubes de puntos rendimiento-actitud y rendimiento-ansiedad son muy dispersas y las rectas de regresión, son: RMA = 3,985 + 0,998*ACT (r=.380) y RMA = 9,476 – 0,777*ANS (r=-.406).

Posteriormente se procede a utilizar el procedimiento de regresión múltiple (paso a paso) entrando a formar parte de la ecuación estas dos variables, Actitud (*t*=2,512, p=.012) y Ansiedad (*t*=-3,824, *p*<.001), como variables independientes y rendimiento como variable dependiente, con la siguiente composición: RMA = 7,217 + 0,473*ACT – 0,525*ANS (R^2 = .180). La baja varianza explicada nos indica que el resultado en matemáticas depende de otras muchas variables además de las dos estudiadas de actitud y ansiedad hacia las matemáticas.

Se calcula la correlación para confirmar el grado de relación entre ansiedad y actitud y se obtiene que r=.-730 (*p*<.001). A mejor actitud menor ansiedad y a peor actitud, mayor ansiedad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Tres de cada cuatro alumnos tienen una ansiedad igual o superior a 2,417, dos de cada cuatro una ansiedad igual o superior a 3 y uno de cada cuatro ansiedad igual o superior a 3,417, en una puntuación de 1 a 5. La actitud y la calificación del 50% de los participantes son iguales o superiores a 3,28 y a 7,333, respectivamente. Los alumnos en su mayoría tienen ansiedad media, rendimiento de notable y actitud positiva.

Solo un estudiante tiene ansiedad máxima de 5, tres estudiantes tienen una calificación máxima de 10 y ninguno tiene una actitud máxima de 5, llegando a 4,88. En el otro extremo hay un estudiante con puntuación mínima de 1, no tiene ansiedad, dos con calificación de 3 y uno con actitud de 1,72, situándose con ansiedad baja el 12,21% y con actitud muy positiva el 6,1% de los participantes. Los estudiantes con rendimiento muy alto, sobresaliente, tienen una ansiedad media en seis grupos y una ansiedad baja en el otro grupo.

El hecho de que la nube de puntos (ansiedad, rendimiento) sea muy dispersa da a entender que no exista una relación rectilínea entre dichas variables e incide en la idea de García-Fernández et al. (2013) y Bausela (2018) de la existencia de una relación curvilínea entre ansiedad y rendimiento.

Ansiedad media es el porcentaje más alto en cuatro grupos, mientras que ansiedad alta la tienen tres grupos, siendo en seis grupos predominante la actitud positiva y en uno la actitud negativa, habiendo un grupo que no tiene estudiantes con actitud muy positiva hacia las matemáticas. El porcentaje de rendimiento más alto es de notable en todos los grupos.

La correlación entre actitud y ansiedad es alta y negativa, muy próxima a la obtenida en Nortes y Nortes (2017), resultando que a mejor actitud menor ansiedad y a peor actitud mayor ansiedad, situándose el 4,36% de los alumnos en un nivel afectivo muy positivo para aprender matemáticas con una actitud muy positiva y ansiedad baja. Se ratifica en este sentido que “altas puntuaciones en la escala actitudinal determinan bajos valores en la escala de ansiedad” (Palacios et al., 2013. p. 105). Además, de los participantes con actitud muy alta, el 71,48% tiene ansiedad baja o nula (P3) y de los alumnos con ansiedad muy alta el 92,61% tiene actitud negativa (P4). Es decir que a mejor actitud menor ansiedad y a mayor ansiedad, peor actitud.

No se han encontrado alumnos con altas puntuaciones en la escala actitudinal y ansiedad muy alta, ni tampoco con actitud muy negativa y ansiedad baja, ni con actitud muy negativa y ansiedad media. Todo dentro de lo que cabría de esperar. Sin embargo, alumnos con ansiedad muy alta y sobresaliente hay uno.

La correlación entre rendimiento y ansiedad es significativa y negativa, muy por encima de la obtenida en Nortes y Nortes (2017), solo hay seis alumnos con rendimiento bajo y ansiedad muy alta, en contra de lo obtenido por Palacios et al. (2013) “a mayores niveles de ansiedad menor rendimiento en matemáticas” (p. 106). El 4,65% de los participantes se encuentra con rendimiento muy alto y ansiedad baja o nula, en buena disposición frente a las matemáticas.

Que la variable rendimiento en matemáticas depende de actitud y ansiedad ha quedado constatada, sin embargo estas dos variables en una ecuación de regresión múltiple explican un porcentaje muy bajo de la varianza, lo que indica que son otros muchos factores los que inciden en este resultado como pueden ser metodología, factores familiares, profesorado… y que no han sido tenidos en cuenta en el presente estudio.

El contenido de la prueba matemática, al ser de sexto de primaria, el alumno no la considera “amenazadora” (Rosário et al., 2008, p. 564) por lo que el alumno no ha experimentado un nivel muy alto de ansiedad y se ha situado en uno de cada dos alumnos por encima de tres, y de los 172 estudiantes con rendimiento de notable, 24 tienen ansiedad baja, 77 media, 60 alta y 11 muy alta.

Bausela (2018) indica que no hay relación directa entre rendimiento académico y ansiedad, y que la ansiedad no predice por sí misma el riesgo de tener bajo rendimiento, y en el presente estudio se ha obtenido una correlación significativa entre ambas variables, pero por debajo de 0,5.

Sesé et al. (2015) afirman que “los estudiantes con mejor rendimiento en estadística deberían ser aquellos con actitudes más positivas hacia la estadística, (…) y valores más bajos de ansiedad ante los exámenes y ansiedad estadística” (p. 298), y no corroborado en matemáticas en el presente estudio en donde los alumnos con sobresaliente tienen ansiedad baja o nula el 35,55% (P2) y si corroborada la segunda en donde alumnos con rendimiento muy alto el 91,06% tienen actitud positiva o muy positiva (P6). Y alumnos con actitud muy positiva que tengan sobresaliente son el 33,29% (P5), pero de los alumnos con ansiedad muy alta, tan solo tienen rendimiento bajo, suspendiendo, el 22,17% (P1). De ahí que a la pregunta si a mayor ansiedad menor rendimiento no podamos afirmarla, ya que las preguntas P1 y P2 se han saldado con porcentajes inferiores al 50%, y que apoya la correlación encontrada entre ambas variables, en contra de lo obtenido por Palacios et al. (2013). Sin embargo, alumnos de sobresaliente con nivel medio de ansiedad llegan al 47,48% (P2), indicando que un nivel de ansiedad es necesario para ser eficientes (Bausela, 2018). Tampoco se puede afirmar que ante una actitud muy positiva se tiene mayor rendimiento (P5).

Además, alumnos con actitud muy positiva que tengan ansiedad baja o nula son el 71,48% (P3) y alumnos con ansiedad muy alta que tengan actitud negativa o muy negativa son el 92,61% (P4). Por lo que a una actitud muy positiva hay menor ansiedad (P3), a mayor ansiedad actitud hacia las matemáticas negativa (P4) y a mayor rendimiento en matemáticas, actitud muy positiva (P6).

El presente trabajo es una contribución al área de Didáctica de las Matemáticas corroborando la necesidad de la introducción del tratamiento afectivo en la preparación de futuros maestros, si bien tiene como limitaciones que al haber considerado solamente las variables actitud, ansiedad y rendimiento, la ecuación predictora del rendimiento en matemáticas sea solo aproximada. Tampoco se hace un análisis de los ítems de los instrumentos empleados, y no haber contado con la participación de alumnos del Grado de Maestro de Primaria de otras universidades.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Ediciones Mensajero.

Bausela, E. (2018). PISA2012: Ansiedad y bajo rendimiento en competencia matemática. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación – e Avaliação Psicológica, 46*(1), 161-173.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las matemáticas de los estudiantes para maestros de la facultad de educación de la universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-91). Málaga: SEIEM.

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(5), 324-326.

García-Fernández, J. M., Martínez-Monteagudo, M. C. e Inglés, C. J. (2013). ¿Cómo se relaciona la ansiedad escolar con el rendimiento académico? *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud, 4*(1), 63-76

Gómez-Chacón, I. M. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Málaga: SEIEM.

INEE (2018). *Prueba de competencia matemática de 6º Curso de Educación Primaria. Curso 2017/2018.* Recuperado de http://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-nacionales/evaluacion-sexto-primaria/pruebas-oficiales-2017-2018.html.

Nortes, R. y Nortes, A. (2014). Ansiedad hacia las matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 485-492). Salamanca: SEIEM.

Nortes, R. y Nortes, A. (2017). Competencia matemática, actitud y ansiedad hacia las Matemáticas en futuros maestros. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20*(3), 145-160.

Palacios, A., Hidalgo, S., Maroto, A. y Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(2), 93-111.

Palacios-Picos, A. (2016). Estrategias y técnicas cuantitativas para el estudio del dominio afectivo en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 115-134). Málaga: SEIEM.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Pérez-Tyteca, P. y Monje, J. (2017). Taller de resolución de problemas para prevenir la ansiedad matemática en los futuros maestros de educación infantil. *Edma 0-6, 6*(2), 14-27.

Rosário, P., Núñez, J. C., Salgado, A., González-Pienda, J. A., Valle, A., Joly, C. y Bernardo, A. (2008). Ansiedad ante los exámenes: relación con variables personales y familiares. *Psicothema, 20*(4), 563-570.

Segarra, Y. R. y Pérez-Tyteca, P. (2017). Nivel de ansiedad hacia las Matemáticas de futuros maestros de Educación Primaria. En R. Roig-Vila (Ed.), *Investigación en docencia universitaria. Diseñando el futuro a partir de la innovación educativa* (pp. 442-451). Barcelona: Octaedro.

Sesé, A., Jiménez, R., Montaño, J. J. y Palmer, A. (2015). ¿Pueden las actitudes hacia la estadística y la ansiedad estadística explicar el rendimiento de los estudiantes? *Revista de Psicodidáctica, 20*(2), 285-304.

Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I. y Colomé, A. (2014). Errores numéricos: ¿Cómo afectan a las personas con ansiedad matemática? *Ciencia Cognitiva, 8*(2), 28-31.

Valdizán, J. R. y Rodríguez, A. (2012). *Ansiedad Matemática.* Conferencia presentada en la VIII Jornada Neurofisiológica del Hospital Universitario Ramón y Cajal. Madrid. Recuperado de http://www.gustavolorenzo.es/conferencias/neuro/2012/m3c1.pdf.

CÓMO DEFINEN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: ANÁLISIS DE SUS DEFINICIONES DE POLÍGONO

How prospective teachers define: analysis of their polygon definitions

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J.

Universidad de Huelva

Resumen

Con esta investigación pretendemos acercarnos a la forma en la que los estudiantes para maestro (EPM) definen habiendo recibido instrucción previa. Aplicamos la metodología de análisis de contenido utilizando como elementos de información las producciones escritas de los EPM en una tarea de evaluación referente a definir polígono. Estructuramos el análisis en torno a las características de las definiciones que recoge la literatura de investigación y en relación con los elementos matemáticos que están presentes en dichas producciones, diferenciando entre la definición en el contexto formal y escolar, como es el caso del grado de rigurosidad en uno y otro contexto. Nuestras conclusiones permiten determinar una imagen de cómo definen los EPM cuya utilidad radica en generar tareas formativas que se adecúen a esta forma de interacción con el conocimiento de la práctica matemática de definir.

Palabras clave: *definición de polígono, características de la definición, conocimiento de la práctica matemática, estudiantes para maestro.*

Abstract

With this research, we intend to approach the way in which prospective teachers (PT) define after receiving instruction. We apply the methodology of content analysis using as information elements the written productions of the PTs in an evaluation task related to polygon definition. We structure the analysis around the characteristics of the definitions that the research literature gathers and in relation to the mathematical elements that are present in these productions, distinguishing between the definition in the formal context and scholar context. Our conclusions allow us to determine an image of how PTs define, that is usefulness in generating training tasks that adapt to this form of interaction with the knowledge of the mathematical practice of defining.

Keywords: *definition of polygon, characteristics of definition, knowledge of practice in mathematics, prospective primary teachers.*

INTRODUCCIÓN

La práctica de definir supone, en muchos casos, un reto para profesores y estudiantes de cualquier nivel educativo. Generar, conocer y dominar una definición requiere de un conocimiento profundo del contenido y de la forma en que la matemática se construye. Esta práctica viene mostrando su importancia desde trabajos como Edwards y Ward (2008), Leikin y Winicki-Landman (2000), Van Dormolen y Zaslavsky (2003), De Villiers (1998), Zaslavsky y Shir (2005) y Zazkis y Leikin (2008), en los que ya se analizaron algunos de sus aspectos, entre ellos, el rigor.

Estos autores lo consideran desde una perspectiva flexible en la que el grado de rigor se adapta a las necesidades del contexto. Ante tareas de enseñanza como adaptar una definición para hacerla comprensible a sus alumnos, o exponerles ejemplos y contraejemplos concretos en un nivel determinado, el maestro precisa de conocimiento sobre la práctica de definir. La importancia de estas tareas hace que Zazkis y Leikin (2008), basándose en las investigaciones de Zaslavsky y Shir

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.

(2005), consideren que el conocimiento sobre definir en matemáticas es un eje vertebrador de la práctica docente, de ahí la relevancia de considerar este elemento del conocimiento del futuro maestro.

En este trabajo, a partir de las respuestas de los estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM) a una pregunta de evaluación en la que enuncian una definición de polígono, y teniendo en cuenta las cualidades que la literatura considera imprescindibles en una definición, pretendemos describir qué características presentan las definiciones dadas por los EPM. Asimismo, nos proponemos analizar los elementos matemáticos que contienen las definiciones de polígono enunciadas por los EPM y las distintas formas equivalentes de expresarlos. Este análisis media en la descripción de las características de la definición en tanto que nos permite acceder a ellas.

MARCO TEÓRICO

Una de las prácticas matemáticas que el maestro debe desarrollar en el aula es la de definir y, para ello debe conocer con cierta profundidad qué significa definir, cuál es el papel de esta práctica en el aprendizaje de la matemática y qué requerimientos debe satisfacer una definición. Este conocimiento se inserta dentro del conocimiento sintáctico enunciado por Schwab (1978) y se caracteriza, entre otros aspectos, por contener las reglas de producción y del quehacer matemático. En este sentido, la tarea de definir requiere conocer determinadas reglas del tal modo que el cumplimiento de cada una de ellas genere una definición adecuada.

El significado de la práctica de definir se puede enunciar según los dos usos dados en matemáticas. De Villiers (1998), inspirado en Freudenthal (1973), denomina estos dos usos como descriptivo (a posteriori) y constructivo (a priori), y Zaslavsky y Shir (2005) los renombran, respectivamente, como estructural y procedimental. Definir a posteriori consiste en comunicar las propiedades que verifica un objeto matemático y que lo diferencian de otros objetos; el objeto matemático y sus propiedades se conocen antes de enunciar la definición. Definir a priori implica producir nuevo conocimiento a partir de “la exclusión, generalización, especialización, sustitución o incorporación de propiedades” (De Villiers, 1998, p. 250) de un concepto ya definido; el objeto matemático se genera con la definición.

En relación con las características de las definiciones, Zazkis y Leikin (2008) matizan a Zaslavsky y Shir (2005) y subrayan la conveniencia de conocer las cualidades de una definición, cuyo cumplimiento determinará su corrección y bondad. Una definición establece condiciones necesarias y suficientes para los conceptos, que preferiblemente serán las mínimas necesarias, utilizando solo conceptos ya definidos y sin emplear la palabra asignada al concepto en la propia definición. En concordancia con sus aportaciones, tomaremos como referencia teórica para nuestro análisis las características de ser: no contradictoria, no ambigua y mínima.

La cualidad de que una definición sea no contradictoria conlleva que todas las condiciones que contempla deban coexistir. Por tanto, en caso de ser contradictoria no existirá ningún objeto que verifique la definición, vulnerándose así el criterio de existencia (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). La inclusión de esta característica en el análisis de las definiciones pone el foco en las relaciones que los EPM establecen entre los diferentes elementos matemáticos involucrados en la definición.

De otro lado, decimos que una definición es no ambigua cuando hay una única manera de interpretar todas las condiciones. Esto implica que dos definiciones pueden ser equivalentes en el sentido de Van Dormolen y Zaslavsky (2003) cuando cumplen el criterio de no ambigüedad en el sentido de precisión en la definición. Por ejemplo, incluir en una definición de polígono el elemento matemático “línea” en lugar de “línea recta” para hablar de su borde genera una definición ambigua que no será equivalente a otras que sí sean precisas.

Finalmente, el criterio de minimalidad se cumple cuando una definición no es redundante y contiene “solo la información que es estrictamente necesaria para identificar el concepto definido” (Zaslavsky y Shir, 2005, p. 320). Para Vinner (1991) y Leikin y Winicki-Landman (2000) es un criterio exigible, mientras que De Villiers (1998) y Van Dormolen y Zaslavsky (2003) lo consideran opcional. En nuestro estudio, consideramos necesario incluir el criterio de minimalidad aunque de manera flexible, siguiendo la idea propuesta por Zazkis y Leikin (2008), que utilizan el término casi mínima para referirse a una definición que contiene algún elemento redundante para hacerla más accesible al estudiante y así facilitar su comprensión. Por ello, en un contexto educativo, a pesar de no ser mínima, no pierde su rigurosidad. El rigor en una definición deriva de este criterio de minimalidad, unido a estar enunciada con términos matemáticos adecuados. El rigor se considera un distintivo de la práctica matemática, del que hay que considerar diferentes niveles según el contexto en el que desarrolle dicha práctica, ligados a los diferentes niveles de minimalidad.

Las características propuestas por Van Dormolen y Zaslavsky (2003) se completan con la jerarquía y axiomatización. Esto es, que los elementos que aparecen en la definición hayan sido definidos previamente de manera no circular y que cuando este proceso no pueda aplicarse más, se recurra a axiomas, verdades irrefutables admitidas por la comunidad científica. Si bien no han sido elementos centrales de nuestro análisis, por la naturaleza de la actividad empleada para la recogida de datos, hemos incluido una definición jerárquica por la particularidad de cumplir esa condición.

En cuanto al papel de la práctica de definir en el aprendizaje, Edwards y Ward (2008) enuncian algunos objetivos pedagógicos generales, que coinciden con las necesidades de conocimiento sobre la práctica de definir que debe poseer el maestro: fomentar la comprensión del elemento matemático involucrado, de la naturaleza de una definición y de su papel en la práctica matemática.

El contexto de enseñanza requiere que el profesor transponga la matemática académica a la matemática escolar, entendiendo esta última como el “conjunto de conocimientos matemáticos construidos y elaborados en el entorno escolar, que no es la matemática de los matemáticos, sino una reconstrucción con fines específicos de enculturación matemática básica” (Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero-Ávila y Flores-Medrano, 2016, p. 298). En el caso de la definición, en esa adaptación juega un papel primordial la conservación de aquellos elementos matemáticos que son elementales, no por su simplicidad, sino porque son el fundamento sobre los que se generan otros (Schubring, 2016).

El foco de nuestra investigación se sitúa en la formación inicial de maestros, centrando nuestro interés en cómo define el futuro maestro como parte del proceso de construcción de su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. En particular, de la enseñanza de definiciones y de las características de estas, todo ello enfocado a un aprendizaje donde prime la construcción de significados por parte de los alumnos de educación primaria, y no el formalismo.

METODOLOGÍA

Para acercarnos al objetivo de describir las definiciones de polígono enunciadas por los EPM, se han analizado las respuestas dadas por estos a una pregunta de examen utilizando un enfoque de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Para ello, hemos considerado la distinción clásica de niveles de división semiótica (Morris, 1938), focalizando nuestro estudio en las dimensiones semánticas y pragmáticas del texto, esto es, separándolo de la base escrita; bajo el presupuesto de que el sentido de una información textual es externo a la superficie el texto (Navarro y Díaz, 1999). La tarea fue realizada por 101 estudiantes para maestro, de los cuales 11 no respondieron. El enunciado de la tarea fue: “Enuncia una definición de polígono”, asumiendo que no hay una única definición de polígono y con la intención de que cada EPM generase la suya propia. Esta intencionalidad está originada por el trabajo que se desarrolló durante la instrucción, que se inserta en un proyecto de innovación docente, en el que los EPM tuvieron que realizar diversas tareas en las que se trabajó la construcción de definiciones, se discutió la equivalencia entre ellas y se analizaron en términos de suficiencia en dinámicas abiertas con discusiones y puestas en común.

El proyecto de innovación docente fue diseñado en base a tres bloques de contenido: el análisis de la práctica educativa, la construcción inductiva de la definición de polígono a través de ejemplos y el concepto de polígono. En relación con la definición de polígono, en una tarea de clase se trabajó la suficiencia a través del análisis de distintas definiciones planteadas por el formador. Los EPM debían justificar su valoración respecto a la característica de suficiencia con posibles contraejemplos (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006) derivados de atender a todos los elementos matemáticos contenidos en las definiciones, teniendo como resultado una figura no poligonal.

En contextos de formación inicial de maestros, el formador es el encargado de hacer la transposición entre la matemática disciplinar y el contenido de la formación (Jaworski y Huang, 2014; Zaslavsky y Leikin, 2004) de forma similar al rol del profesor que enseña matemáticas y a las relaciones que se establecen en relación con el triángulo didáctico en este contexto. Así pues, a pesar de haber proporcionado varias definiciones, durante la instrucción se institucionalizó la siguiente:

> Un polígono es la región plana delimitada por una línea poligonal cerrada que tiene la misma cantidad de vértices, lados y ángulos.

La justificación de la elección de esta definición se basa en que es una definición que se encuentra a medio camino entre una definición matemática formal (Puig Adam, 1968):

> Si n puntos del plano, A, B, C, …, F se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los n-2 puntos restantes, se llama 'polígono convexo' al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.

Y una definición matemática escolar (Almodóvar y Rodríguez, 2008):

> Un polígono es una línea poligonal cerrada y su interior.

Para analizar las producciones de los alumnos hemos considerado los requisitos en relación con las definiciones que hemos encontrado en la literatura de investigación -ser no contradictoria y no ambigua-, considerando además la característica de minimalidad. No obstante, y condicionado por el contexto en el que analizamos las definiciones, hemos considerado analizar el requisito de ser no ambigua, primero desde un punto de vista escolar y luego, desde un punto de vista formal. Esta distinción tiene su origen en la revisión de las definiciones de polígono presentes en los libros de texto de segundo ciclo de Educación Primaria de las principales editoriales españolas. Seleccionamos la definición de polígono de Santillana considerando su precisión y suficiencia. Considerar estos dos niveles (formal y escolar) tiene su base en que, si partimos del presupuesto de que los EPM no interaccionan directamente con la matemática disciplinar, es coherente considerar que la valoración de la ambigüedad en sus definiciones deba considerarse también dentro del contexto de la matemática escolar. Finalmente, es necesario mencionar que no vamos a considerar el criterio de invarianza bajo el cambio de representación ni el de jerarquía, dado que los datos de lo que disponemos no arrojan ninguna conclusión relevante en relación con estas categorías.

Del mismo modo, hemos incluido en nuestro análisis la identificación de los elementos matemáticos que son comunes a todas las definiciones de polígono: las condiciones de ser simple, ser una figura plana cerrada y componerse de segmentos rectilíneos. Considerar estos elementos nos ayuda en el análisis de las características de las definiciones, sin pretender analizar la comprensión de los EPM. En nuestra inferencia del contenido de las definiciones de los EPM hemos considerado la utilización de sinónimos o ideas cuya consecuencia es atribuible a alguno de estos elementos. Estas equivalencias se muestran a continuación en la Tabla 1.

Tabla 1. Equivalencias entre las descripciones de elementos matemáticos en la definición

Elemento matemático	Equivalentes encontrados
Simple	una parte exterior-una parte interior; mismo número de vértices, lados y ángulos; encierra una región del plano
Cerrado	delimitado; limitado
Figura plana	región plana; el interior de una figura plana; posee área; sección del plano
Segmentos rectilíneos	línea poligonal; lados; línea quebrada

El análisis de las características de las definiciones enunciadas por los EPM, y los elementos matemáticos que estas incluyen, se ha validado mediante el consenso entre los investigadores (Flick, 2007), en un proceso en el que las definiciones se analizaron individualmente y se consensuaron en diferentes sesiones de trabajo. Las definiciones que se han recogido en este trabajo, por la naturaleza de los datos, son todas descriptivas, en las que se enuncian propiedades del objeto polígono que son conocidas por los estudiantes para maestro. La secuencia de términos matemáticos que describen objetos y propiedades asociados a la noción de polígono constituye, en cada caso, la definición del concepto que posee cada estudiante para maestro.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de las respuestas de los EPM pone de manifiesto algunos aspectos relativos a los criterios asignados a una definición, que se pueden ver sintetizados en la Tabla 2.

Tabla 2. Síntesis de los resultados por categorías

		Puntuación	
	N	*Sí (%)*	*No (%)*
No contradictoria	90	62 (68,69%)	28 (31,11%)
Ambigüedad			
Escolar	90	32 (35,56%)	58 (64,44%)
Formal	90	82 (91,11%)	8 (8,89%)
Minimalidad	90	13 (14,44%)	77 (85,56%)

En primer lugar, encontramos que, de manera general, las definiciones de los EPM no muestran un carácter contradictorio, es decir, los estudiantes para maestro exponen definiciones que no contienen elementos matemáticos opuestos o incompatibles entre sí, lo que hace que el criterio necesario de definición *no contradictoria* sea el más repetido entre éstas. Por otro lado, desde el punto de vista de la *ambigüedad*, se aprecia que los EPM generan definiciones que resultan no ser ambiguas desde el punto de vista escolar, pero, en algunos casos, aparecen definiciones que pueden tener cierta ambigüedad desde el punto de vista formal de la matemática, aunque satisfacen la minimalidad que debe tener una definición conocida por un EPM, que responde a otros criterios de rigurosidad.

En lo referente a la *minimalidad*, la gran mayoría de los estudiantes para maestro genera una definición que contiene elementos matemáticos redundantes, por lo que se puede decir que es la categoría que menos cumplen las definiciones de los EPM. Un ejemplo de esto podría ser la definición expuesta por E35T1:

> Un polígono es aquella figura plana con un único interior y exterior (dicho interior es continuo). Esta figura tiene que tener el mismo número de lados, de ángulos y vértices. La figura plana tiene que estar cerrada. Los polígonos pueden ser regulares o irregulares (y sus líneas tienen que ser poligonales).

Esta definición menciona hasta en tres ocasiones la *simplicidad* de la definición en elementos matemáticos tales como *un único interior y exterior, interior continuo y mismo número de lados, de ángulos y vértices*, siendo así una definición redundante.

Sin embargo, no es habitual que los estudiantes para maestro expongan definiciones como la anteriormente citada donde un mismo elemento redunda hasta en tres ocasiones, sino que, más bien, sus definiciones contienen normalmente un único elemento redundante como puede ser la definición de E19T4 en la que encontramos redundancia cuando el elemento *cerrado* se expresa tanto como *región limitada*, como en términos de *delimitada por una línea quebrada*:

> Un polígono es una región limitada plana con bordes, vértices y ángulos, delimitada por una línea quebrada donde se puede distinguir la parte interior de la exterior.

Asimismo, aunque la tendencia ha sido que las definiciones no han satisfecho la categoría de minimalidad, encontramos varias definiciones que resultan ser *casi mínimas*, como el caso del estudiante para maestro E18T1 que expresa:

> Un polígono es la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

La valoración de que esta definición sea *casi mínima* se apoya en que encontramos redundancia en la presencia del elemento cerrado cuando el alumno expresa que es una región limitada y, posteriormente, afirma que es una línea poligonal cerrada. No obstante, aunque no sea totalmente una definición mínima, consideramos que esta es una definición tipo que los EPM deben conocer y comprender, ya que el grado de minimalidad que contempla unido a la presencia de términos matemáticos adecuados, la dota del rigor pertinente para emplearse en contextos de enseñanza y aprendizaje. Esta definición se asemeja a la que hemos encontrado en el texto de Almodóvar y Rodríguez (2008), conteniendo elementos matemáticos comunes y encontrándose a caballo entre la definición formal de polígono y la definición que debe conocer un alumno de Educación Primaria.

Por último, y a pesar de que de manera general los EPM no se contradigan en las definiciones que aportan, existen algunas que contienen elementos matemáticos que son incompatibles entre sí a la hora de definir polígono. Se puede apreciar este aspecto, por ejemplo, en la definición de E02T1 al escribir que:

> Un polígono es una región plana que está constituida por diversos elementos como pueden ser: vértices, aristas, bases y caras laterales. Para que una figura sea un polígono debe estar cerrada, nunca abierta. Un polígono no puede estar formado por líneas curvas.

Se puede apreciar en la definición cómo utiliza elementos tales como *aristas y caras laterales* y, en la misma definición, afirma que la región debe cumplir la condición de ser *plana*.

A pesar de que el tipo de datos que manejamos no nos permite detectar cómo se aplica la definición de polígono, en un caso excepcional un estudiante para maestro, E47T1, ha respondido con una definición jerárquica, empleando pequeñas aclaraciones a los elementos matemáticos de línea poligonal y ángulo:

> Podemos considerar como polígono aquellas figuras planas, de región cerrada, en los que existe un área en su interior, ya que se puede distinguir del exterior de la figura. Además, se compone de líneas poligonales (líneas rectas), denominadas como lados de la figura, los cuales forman ángulos (porción del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común) interiores a la figura y exteriores a la misma. A la vez, se forman diagonales, las cuales son segmentos que unen un vértice con otro no consecutivo.

En relación con los elementos matemáticos a partir de los que se definen los polígonos, los de segmentos rectilíneos, figura plana y cerrado son los que más veces se emplean en las definiciones, bien con estos términos o con cualquiera equivalente, destacando el de segmentos rectilíneos. La síntesis de resultados se expone en la Tabla 3.

Tabla 3. Síntesis de los resultados de elementos matemáticos considerados

		Puntuación	
	N	*Sí (%)*	*No (%)*
Simple	90	12 (13,33%)	78 (87,67%)
Cerrado	90	71 (78,89%)	19 (21,11%)
Figura plana	90	74 (82,22%)	16 (17,78%)
Segmentos rectilíneos	90	80 (88,89%)	10 (11,11%)

En algunos casos menos frecuentes, se da por hecho que los lados y segmentos que delimitan el polígono son rectos por naturaleza, y no se especifica que estos no pueden ser curvos, ni con estos términos ni con el adjetivo recto, lo que tiene una consecuencia directa en la ambigüedad de las definiciones. Este es el caso de E05T4:

> Es una figura cerrada formada por tres o más segmentos unidos por sus vértices.

También de E13T1, que explica la relación entre segmento y lado, pero en ningún caso puntualiza que han de ser rectos:

> Polígono es una figura geométrica plana cerrada, que posee más de tres lados, ángulos y vértices. Los polígonos están compuestos por varios segmentos que son los lados y los puntos de encuentro son los vértices. Cuando los lados se unen forman un ángulo.

Puntualmente se ha detectado cierta insistencia en remarcar este elemento, como en E12T1 que aclara qué entiende por lados rectos empleando la negación de su contrario: "todos los lados rectos (no poseen curvas)", incidiendo en la minimalidad de su definición.

La primacía del elemento segmentos rectilíneos nos induce a reflexionar sobre la importancia que tiene para los EPM este elemento en la caracterización de un polígono. Cuando no se emplea este término sino segmento o línea, la ausencia de especificar en algunos casos que han de ser rectos, parece asociado no a un error por desconocimiento, sino más bien a un obstáculo didáctico por la presencia generalizada de las nociones de segmentos y líneas en contextos en los que no se trabajan con segmentos curvos. El hecho de que en algunos libros de texto de Educación Primaria hayamos encontrado el elemento segmento sin ir acompañado del adjetivo recto, puede explicar que ocurra lo mismo en las definiciones de nuestros estudiantes para maestro, que no perciben la ambigüedad en sus definiciones que resultan tener un bajo nivel de precisión. Hay que tener también en cuenta que en la definición adoptada como formal en el aula de los estudiantes para maestro, el término recto no aparece explícitamente por estar contenido en la noción de línea poligonal.

CONCLUSIONES

A la luz de los resultados obtenidos, podemos concluir que las definiciones enunciadas por los estudiantes para maestro contemplan la mayor parte de los elementos matemáticos considerados como necesarios para la construcción de una definición, por tanto, se consideran suficientes. No obstante, hemos observado diferencias entre dichos elementos, principalmente en lo relativo a la idea de que los polígonos han de tener un único interior continuo, perdiendo así la característica de ser simples. Podemos inferir que esta idea ha sido escasamente considerada por los EPM antes de su formación inicial, ya que no se enuncia de manera explícita en ninguna de las definiciones escolares de polígono, por lo que existe cierta imprecisión en sus definiciones.

Considerando la noción de rigor desde un punto de vista flexible, en el que la minimalidad tolera cierta redundancia por sus ventajas pedagógicas (Leikin y Winicki-Landman, 2000; Zazkis y Leikin, 2008), observamos que las definiciones de los EPM, generalmente, mantienen el rigor propio de un contexto escolar. Sin embargo, desde un punto de vista formal, la condición de muchas definiciones de casi mínimas las sitúa fuera de su consideración como rigurosas formalmente. Este rigor adaptado parece caracterizar el modo en que los EPM conocen la práctica matemática de definir.

Este trabajo se puede tomar como punto de partida para profundizar en las relaciones que se pueden establecer entre las definiciones que enuncian los EPM y la imagen del concepto definido que poseen. Los conceptos matemáticos adquiridos por los EPM durante su escolarización están condicionados en gran medida por las definiciones (escolares) y las imágenes de los mismos con las que han interactuado (Tall y Vinner, 1981; Zaslavsky y Shir, 2005). En consonancia con esta idea, para el caso de la definición de polígono, se podría explicar que en las definiciones de los EPM no haya estado presente la característica de ser simple porque no suele incluirse en las definiciones escolares. El principio de extensión genérica (Tall, 1991) justifica que los EPM trasladen la imagen restringida de que un polígono solo puede ser simple, a un contexto más amplio y riguroso, en el que se hace necesario matizar en la definición la característica topológica de simplicidad. Este mismo principio justifica la ausencia, en algunos casos, de la característica necesaria de que los segmentos y líneas deban ser rectos, y es extensible a otras definiciones matemáticas.

Estas relaciones nos ayudarían a comprender cómo los estudiantes para maestro entienden y construyen las definiciones, lo que por un lado informa de su conocimiento especializado (Zazkis y Leikin, 2008) y, por otro lado, es útil para generar secuencias de formación inicial que favorezcan el desarrollo de dicho conocimiento. Poder acercarnos a la comprensión de los conceptos matemáticos de los EPM, más allá de los elementos matemáticos que enuncian en sus definiciones, podría servir para diseñar secuencias de formación. Por ejemplo, en el caso de la definición de polígono, en las que se explicitaran de forma detallada todos los elementos que posteriormente incluyen en sus definiciones y que, a priori, no sabemos cómo los conocen.

La ausencia de características necesarias en una definición afecta a su ambigüedad y precisión. Creemos que una forma de abordar con los EPM la práctica de definir para que contemple aspectos relacionados con estas características, debería incidir en los criterios de jerarquía y axiomatización. Considerando estos criterios se hace explícita la red de elementos matemáticos que contiene una definición, y a partir de las definiciones de estos, se pueden dimensionar las implicaciones de considerarlos o no en una definición en la que son necesarios.

Referencias

Almodóvar, J. A. y Rodríguez M. G. (2008). *Matemáticas 4: Primaria. Proyecto la casa del saber*. Madrid: Santillana.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 126-154). Praga, República Checa: PME.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I. y Flores-Medrano, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Madrid: Paraninfo.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch y PME.

Edwards, B. y Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). Washington, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Jaworski, B. y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM*, *46*(2), 173-188.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Leikin, R. y Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 2. *For the Learning of Mathematics, 20*(2), 24–29.

Morris, C. W. (1938). Foundations of the Theory of Signs. En O. Neurath (Ed.), *International Encyclopedia of Unified Science* (pp. 1-59). Chicago, EE.UU.: Chicago University Press.

Navarro, P. y Díaz, C. (1999). Análisis de contenido. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez (Coords.), *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales.* (pp. 177-224). Madrid: Síntesis.

Puig Adam, P. (1968). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Euler Editorial.

Schubring, G. (2016). Preface to the 2016 Edition. The Notion of Elementary Mathematics. En F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (p. vii). Berlín, Alemania: Springer.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. Wilkof (Eds.), *Science, Curriculum and Liberal Education: Selected Essays* (pp. 229–272). Chicago, EE. UU.: University of Chicago Press.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91–106.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 5–32.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317–346.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131–148.

UN ACERCAMIENTO AL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS[xxxiii]

An approach to the Mathematics Teacher's Educator Knowledge

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L.C.

Universidad de Huelva

Resumen

El objetivo de esta investigación es acercarnos al conocimiento del formador de profesores que enseñarán matemáticas a través de un proceso de investigación top-down y bottom up. Para ello, hemos revisado distintos resultados de investigación que dirigen la mirada hacia determinados elementos que parecen estar presentes en el conocimiento del formador y, a su vez, hemos indagado en la realidad de aula de un formador de maestros de primaria, buscando indicadores que nos permitan complementar los resultados de un campo de investigación emergente, como es el conocimiento del formador de docentes que enseñarán matemáticas. Nuestra investigación nos ha permitido acercarnos al conocimiento que se necesita para gestionar el aprendizaje de futuros maestros, atendiendo a la complejidad de la profesionalización, incluyendo elementos de práctica docente e identidad profesional.

Palabras clave: *conocimiento del formador de profesores, tareas de formación, identidad profesional, conocimiento especializado del profesor de matemáticas.*

Abstract

The objective of this research is to do an approach to the knowledge of the teacher educator of teachers who will teach mathematics through a top-down and bottom up research process. For this, we reviewed research results that focus in certain elements that seem to be present in the knowledge of the teacher educator. At the same time, we deepened in the classroom reality of primary teacher educator, looking for indicators that allow us to complement the results of an emerging research field, such as the knowledge of the mathematics teacher educator. Our research has allowed us to approach to the knowledge that is needed to manage the learning of future teachers, attending to the complexity of professionalization, including elements of teaching practice and professional identity.

Keywords: *teacher educator' knowledge, task of teaching to teach, professional identity, mathematics teachers' specialized knowledge.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del formador no ha recibido la misma atención que el conocimiento del profesor desde el punto de vista de los resultados de investigación. Solo en los últimos años, este conocimiento ha ido ganando interés para diversos investigadores del área, considerándose un campo de investigación emergente (Beswick y Chapman, 2013; Even, 2008; Jaworski y Huang, 2014). Un punto de partida para abordar este conocimiento, en la medida que el formador es un profesor, es utilizar como referente la perspectiva de conocimiento del profesor de Shulman (1986), redefiniendo la naturaleza del contenido (*content knowledge* y *pedagogical content knowledge* en la terminología de Shulman).

El término formador de profesores incluye diferentes agentes que trabajan con los profesores en distintos contextos y momentos de su desarrollo profesional. Así, existe cierto consenso en

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473-482). Valladolid: SEIEM.

considerar como formadores[xxxiv] a aquellos que trabajan con los profesores en la empresa de desarrollar su conocimiento profesional para la enseñanza (Even, 2008); desde la formación inicial, como los profesores universitarios, hasta la formación continua, lo que incluiría a los investigadores en educación matemática, los responsables de coordinación curricular en la implantación de reformas educativas o los profesores expertos, siempre en contextos de trabajo colaborativo con profesores. Nuestro acercamiento hacia el conocimiento profesional del formador parte de un informante que imparte clases en un contexto de formación inicial universitaria de maestros, en materia de didáctica de las matemáticas, y en concreto, en el ámbito de la geometría. Por tanto, en adelante, cuando nos refiramos a formador de profesores, lo haremos orientados hacia ese perfil.

En los estudios respecto al conocimiento del formador de profesores, es común que se identifiquen determinados elementos que configuran una forma particular de conocimiento profesional, tanto en sus relaciones con el conocimiento del profesor, como con otros aspectos que intervienen en la construcción y el desarrollo del perfil profesional. En nuestro trabajo, pretendemos explorar esa forma particular de conocimiento en consonancia con la metodología que nos ha permitido la elaboración de un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). El modelo, obtenido a través de procesos bottom-up y top-down (Grbich, 2003), se ha ido refinando por su aplicación en diferentes estudios de caso, que han abordado su comprensión en diferentes niveles educativos, mientras se desarrollaban diferentes tópicos matemáticos. Los escenarios de nuestras investigaciones, de forma similar al modo en que lo han hecho otros equipos (Ball, Thames y Phelps, 2008), se han caracterizado por el análisis de episodios que proceden de observaciones de aula, acompañándolos a veces, de entrevistas semi-estructuradas en las que profundizar sobre los indicios y oportunidades que nos brindaba la propia observación. Es desde esta perspectiva desde la que haremos nuestro acercamiento al conocimiento del formador. Así, en este trabajo nos planteamos como objetivo poner de relieve las especificidades del conocimiento del formador, en sus múltiples dimensiones, a través de un estudio de caso, en el contexto concreto de una clase de formación inicial, centrada en la idea de polígono.

REFERENTES TEÓRICOS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

El formador de profesores debe estar al tanto de las teorías más relevantes en educación matemática, así como de los resultados de investigación más recientes y de las prácticas y recursos que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Jaworski y Huang, 2014). Este hecho nos informa de algunas de las diferentes fuentes de las que emana el conocimiento profesional del formador, que hemos teorizado como: la matemática disciplinar, la investigación en educación matemática y la práctica e identidad profesional (Contreras, Montes, Muñoz-Catalán y Joglar, 2017).

Algunos investigadores conceptualizan el conocimiento del formador como una extensión del conocimiento que el profesor necesita para enseñar (Perks y Prestage, 2008; Zaslavsky y Leikin, 2004; Zopf, 2010). Esto implica considerar una adaptación al nuevo contexto de enseñanza y trasladar los distintos enfoques de conocimiento del profesor a la comprensión del conocimiento del formador. Así, el conocimiento del formador se estructuraría, según Chick y Beswick (2018), en: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático, que conformarían el *subject matter knowledge*[xxxv] (Shulman, 1986); y los conocimientos sobre los profesores como aprendices, sobre su interacción con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, sobre cómo enseñar a enseñar matemáticas y sobre el currículum de formación de profesores, de forma paralela a como se ha estructurado el *pedagogical content knowledge* (Shulman, 1986).

No obstante, si consideramos el conocimiento del profesor como parte del conocimiento del formador, en tanto que configura el contenido de la formación, debemos reflexionar sobre cómo uno y otro profesional se relacionan con ese conocimiento. En concordancia con Zopf (2010), la diferencia más significativa entre el formador y el profesor en relación con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas radica en la profundidad y la amplitud. Esta diferencia es consecuencia de cómo el formador necesita poseer este conocimiento para transformarlo y facilitar su adquisición, y de cómo el profesor lo necesita como instrumento con el fin de que sus alumnos aprendan matemáticas. De esta forma, las conexiones que realizan los formadores entre las diferentes componentes del conocimiento del profesor, y de estos elementos cognitivos con otros ligados al desarrollo de la profesión del profesor, unidas a un conocimiento matemático base más extenso, determinarían la diferencia.

Retomando la idea del formador de profesores de matemáticas como facilitador en el aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar matemáticas, hemos de tener en cuenta que la articulación de ese contenido ocurre a dos niveles, entre el formador y el profesor, y entre el profesor y sus estudiantes. Ambos planos están relacionados, ya que si el éxito del primero condiciona el segundo, el segundo de los escenarios sirve de *feedback* para el primero (Jaworski y Huang, 2014).

En relación a la transformación del primer plano entre formador y profesor, Zaslavsky y Leikin (2004) proponen la extensión del triángulo didáctico a formador-profesor-conocimiento de la enseñanza de la matemática. Según estos autores, el formador debe proponer retos que involucren a los profesores en las tareas de construcción del contenido relacionado con la enseñanza de las matemáticas, de la misma forma que el profesor hace con sus estudiantes en relación con la matemática escolar. En el contexto de las investigaciones de Perks y Prestage (2008), el conocimiento del formador conecta con el saber práctico -que incluye actividades para la formación-, las tradiciones profesionales -en las que se incluyen las formas de trabajar con profesores y las investigaciones en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas-, y el conocimiento del estudiante, -que se estructura partiendo del conocimiento que desarrollamos por haber sido profesores-, componiendo así un modelo tetraédrico.

De estos tres referentes que, como hemos señalado, tienen en común el solapamiento del conocimiento del profesor y el conocimiento del formador, podemos extraer otras ideas que orienten nuestra aproximación hacia la comprensión del conocimiento del formador. De un lado, coinciden en incluir las características del aprendiz en estos contextos, que como señala Zopf (2010), tiene que reconstruir una matemática ya aprendida y añadir elementos relacionados con cómo se enseña, porque, y este es otro de los puntos en común, lo que enseña un formador y lo que aprende un profesor, no son (solo) matemáticas.

Nuestro posicionamiento con respecto al conocimiento del formador coincide en ambos puntos con los referentes anteriormente citados. No obstante, las observaciones de aula que hemos ido realizando, han puesto de relieve la emergencia de determinados contenidos que son más cercanos a la aproximación de Beswick y Chapman (2012), quienes señalan que la inclusión del conocimiento del profesor en el conocimiento del formador no es completa, y que si bien hay elementos de conocimiento del profesor que los formadores no necesitan conocer o que necesitan conocer de un modo diferente, éste contendría otros conocimientos específicos.

Asimismo, siguiendo la conceptualización de Feiman-Nemser (2008), consideramos que enseñar a enseñar incluye: *enseñar a pensar como un profesor, enseñar a conocer como un profesor, enseñar a sentirse como un profesor y enseñar a actuar como un profesor* (p. 698). Estos cuatro aspectos requieren de conocimiento de distintas naturalezas y si la relación entre *pensar como* y *conocer como* con el conocimiento profesional parece inmediata, podríamos cuestionarnos qué elementos de conocimiento del formador le permiten enseñar a *sentirse como* y a *actuar como un profesor* a los estudiantes para profesor de matemáticas.

De esta forma, consideraremos que el formador debe poseer conocimiento relacionable con algún modelo de conocimiento (e.g. MTSK, Carrillo et al., 2018)[xxxvi]. Esto es así debido a que, si consideramos que el conocimiento del profesor se articula en relación a los presupuestos de un modelo, el conocimiento del formador como agente participante en la construcción de conocimiento en los profesores, debe tenerlo en cuenta. Este conocimiento matizado desde la perspectiva de Beswick y Chapman (2012), y unido a los distintos tipos de conocimiento propuestos por Feiman-Nemser (2008), configuran nuestro acercamiento a la cuestión de investigación.

En este trabajo mostraremos episodios que creemos que ponen de relieve estos conocimientos, para arrojar luz a lo que consideramos que es un conocimiento multidimensional y complejo. El punto de partida será el análisis del contenido de la formación, constituido por los saberes que se ponen en juego en el aula de formación inicial que, aunque no reflejen totalmente el conocimiento del formador, nos sirven como detonante para estudiar su configuración.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Dada la aproximación cualitativa que requiere la pregunta de investigación, se optó por el estudio de caso como estrategia metodológica seleccionando un caso instrumental (Bassey, 1999) que nos permita acercarnos a una realidad de aula de formación inicial en la que se está construyendo conocimiento profesional adoptando un enfoque metodológico top-down y bottom-up (Grbich, 2003). El informante de esta investigación, con el seudónimo Lucas, es un formador de maestros con más de 35 años de experiencia, de formación matemático y activo en investigación en Educación Matemática, en el ámbito de conocimiento y desarrollo profesional del profesor. Dada la trayectoria, experiencia y riqueza del conocimiento de Lucas, entendemos que es una fuente de información rica, motivo por el que fue seleccionado para la investigación, además de la accesibilidad a la información que nos proporcionaba. El posicionamiento de Lucas sobre el conocimiento del profesor de matemáticas está estrechamente ligado a los fundamentos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK (Carrillo et al. 2018), que se encuentra en la base de la estructura del programa de la asignatura y de la planificación de sus sesiones (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado, 2019).

En este sentido, las concepciones de Lucas respecto al contenido de la formación de maestros nos han llevado a poder identificar situaciones en las que, si bien el foco principal es la matemática, se está fomentando el desarrollo de un conocimiento profesional que va más allá del trabajo puramente matemático. Durante sus sesiones, se alimentan distintos tipos de conocimiento que se interrelacionan para conformar un perfil profesional determinado en sus estudiantes para maestro (en adelante, EPM) que se acerca a un modelo de profesor de matemáticas reflexivo. Asimismo, encontramos evidencias de la transferencia de conocimientos provenientes de su trabajo como investigador, lo que nos informa de las relaciones que se establecen entre las diferentes fuentes de conocimiento en el formador de maestros.

En el contexto de la investigación, la formación de los EPM en el ámbito de la Didáctica de las matemáticas en la Universidad de Huelva tiene una carga lectiva de 21 créditos ECTS, distribuidos en diferentes cursos académicos y orientados a distintos bloques de contenido matemático y su enseñanza. Las clases que se grabaron y de las que se han extraído las evidencias se centraban en el ámbito de la geometría, en una materia cuatrimestral que se imparte en el último curso de la formación de maestros.

Para realizar esta investigación se han grabado en vídeo un total de 17 sesiones de clase, con presencia de la primera autora y recogida de notas de campo, la observación ha sido no participante (Flick, 2007). La información recogida del aula se ha complementado con la realización de entrevistas con el formador. Estas entrevistas han servido como vehículo para corroborar algunos de los indicios de investigación y para validar los resultados obtenidos, a través de extractos de vídeo que se han compartido con el informante. Asimismo, dada la naturaleza del estudio, se ha realizado una entrevista biográfica con la que hemos podido acceder a la historia profesional del formador y comprender, desde su óptica, las motivaciones que tiene y las decisiones que toma.

Para el análisis de la información se seleccionaron episodios, de una u otra fuente, que han sido organizados en función del contenido de la formación abordado, con la intención de ser agrupados y generar categorías que nos permitan comprender qué se está trabajando en el aula de formación inicial y qué conocimiento profesional subyace en la planificación y la gestión de esas situaciones. La validación del análisis se consigue mediante los procesos de triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007) y el contraste entre fragmentos procedentes de distintos instrumentos de recogida, como aproximación multi-metodológica (Baxter y Lederman, 2001).

ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS DE FORMACIÓN

En las siguientes líneas, presentamos extractos de la observación de aula en los que identificamos tipos de conocimiento que sirven para evidenciar esa especificidad de la que nos informan Beswick y Chapman (2012) para el conocimiento del formador y que sostenemos que lo diferencian del conocimiento del profesor de matemáticas.

En la primera de las evidencias, Lucas se encuentra gestionando una actividad sobre la construcción de la definición de polígono. El objetivo principal de la tarea es que los EPM, a partir de la diferenciación de distintas figuras, encuentren las características clave que van a conformar la definición, de forma que vivencien un proceso elemental en la construcción de la matemática. No obstante, la situación se utiliza como vehículo para llevar al aula otro tipo de reflexiones, que nos hacen ver cómo Lucas tiene presente los dos niveles de desarrollo de la formación de profesores, en la que se alternan los roles de aprendiz y futuro profesor.

Lucas: […] Pensemos como estudiantes de primaria por un momento, a ver cómo se sentirían ellos en una sesión donde se intenta construir el concepto de polígono. ¿Qué más queremos pensar? ¿Hay una única forma de definir polígono? ¿De una manera correcta? ¿O hay varias posibilidades? Si los niños de primaria hicieran esto ¿qué aprenderían? [*Se acerca a los alumnos*] ¿Qué es más interesante, definir polígono y ver lo que son ejemplos o no ejemplos de polígono o construir la definición entre todos sobre la base de unos ejemplos? Es decir... ¿Qué es mejor, ir de lo particular a lo general o de lo general a lo particular? No lo contestemos ahora, pero al final de la sesión deberemos haber contestado a todas estas preguntas.

Durante este fragmento, Lucas intenta situar a los futuros profesores en el papel de alumnos de primaria, invitándoles a iniciar una reflexión basada en diferentes roles con la que puedan medir el alcance de las decisiones que toman los profesores en el desarrollo de una propuesta de enseñanza. Esta estrategia de enseñanza se observa en otros cortes de la grabación de las sesiones, lo que nos informa del saber práctico de Lucas como formador, pero además, de cuál es el contenido que pretende construir con sus EPM. En este caso, el contenido, gira en torno al conocimiento especializado (MTSK) que se requiere en la construcción de conceptos geométricos, reflexionando sobre el proceso de construcción de la definición –incluido en el *conocimiento de la práctica matemática*-, sobre cómo interactúan los alumnos con ese contenido –que alimentaría el *conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas*- y sustentado en la discusión crítica de decisiones metodológicas para la tarea, donde se incluyen elementos de teoría de didáctica de la matemática, como las aproximaciones inductivas y deductivas y las diferentes secuencias de ejemplificación– todos estos saberes estrechamente ligados al *conocimiento para la enseñanza de las matemáticas*. La identificación de estos conocimientos en el discurso de formador nos da pie a reflexionar sobre el conocimiento que le permite utilizar el MTSK como objeto de aprendizaje de los EPM, que incluye en cierta forma el modelo de conocimiento especializado, pero que se distingue como más conexo y manejable. Este conocimiento del modelo permite a Lucas hacerlo accesible a los EPM.

Lucas pretende que sus alumnos construyan un conocimiento profesional basado en el cuestionamiento de diferentes aspectos del conocimiento especializado que conlleva el análisis profundo de las tareas de enseñanza, y que presentan al EPM la oportunidad de desarrollar una identidad profesional basada en la reflexión. Esto nos sirve para identificar el conocimiento del formador sobre concepciones de los profesores y sobre cómo estas modulan el conocimiento, construyendo una manera determinada de sentirse como profesor entre los futuros profesores.

Podemos mostrar más situaciones en las que se observa la dualidad aprendiz-futuro profesor. Por ejemplo, en el segundo extracto, observamos cómo se pone de manifiesto un conocimiento que, si bien podría encuadrarse dentro del *conocimiento sobre estándares de aprendizaje* para profesores de matemáticas, muestra una comprensión de dicho conocimiento que es distinta a la del profesor. En el aula de formación inicial se está trabajando sobre la comprobación y la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados. En la unidad, una alumna corta los ángulos de un triángulo genérico para colocarlos de forma consecutiva:

Lucas: Esta es la manera más intuitiva, más sencilla [*de hacer la comprobación*]. En el primer curso de primaria, donde se os antoje de comprobar, no de demostrar, comprobar y demostrar son conceptos distintos… de comprobar que la suma de los triángulos interiores es un llano, de convencerse de que es un llano, pero no es suficiente para nosotros.

Consideramos que es una comprensión diferente a la del profesor, en tanto a la riqueza de los distintos tipos de conocimiento que relaciona Lucas sobre la comprobación en matemáticas. En la evidencia, el detonante es el resultado matemático de que la suma de los ángulos del triángulo es 180 grados, porque los EPM lo utilizarán más adelante para caracterizar otros tipos de polígonos. No obstante, en la gestión de Lucas se relacionan *conocimiento sobre la práctica matemática* (comprobación-demostración), *conocimiento sobre los estándares de aprendizaje* (secuenciación por niveles en la etapa de Educación Primaria), *conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas* (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la construcción de conocimiento matemático) y *conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas* (cómo los alumnos de primaria pueden iniciarse en la formalización de la matemática). El conocimiento que subyace a la capacidad de hacer este tipo de relaciones no es, en principio, un conocimiento atribuible a un maestro de primaria.

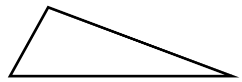
Las referencias a la etapa de Educación Primaria son comunes en las sesiones de formación de Lucas y además de dirigirse hacia la articulación de distintos contenidos, se orientan hacia la construcción de un modelo de profesor crítico que cuestione los recursos y las prácticas educativas a partir de una reflexión basada en las matemáticas y su aprendizaje. En el siguiente extracto, el origen se encuentra en las diferentes categorizaciones que se pueden hacer de los cuadriláteros, según los criterios que se tengan en cuenta. En concreto, Lucas trabaja con sus alumnos la diferencia entre categorizaciones inclusivas y disjuntas cuando transforma la tarea en una actividad profesional:

Lucas: Buscad en los libros de texto si lo llaman romboide o lo llaman paralelogramo sin más, a ver qué libro lo llama de una manera y qué libro lo hace de otra. En segundo [curso de Grado], normalmente yo pregunto quién ha aprendido a restar con el algoritmo de tomar prestado y quién ha aprendido con el algoritmo de regalar, y normalmente hay de los dos tipos, pues a ver si en los libros de texto también tenemos esa diferencia, o a ver por otro lado si la mayoría de libros usan el concepto excluyente, usan una opción excluyente frente a una opción inclusiva, todo esto lo veremos más adelante… pero ya que está aquí lo aprovechamos.

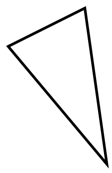
Así, observamos cómo Lucas tiene presentes diferentes aproximaciones de enseñanza y trata de reconstruir con sus alumnos ideas matemáticas que son esenciales, pero desde un punto de vista profundo, que ayude al EPM a repensar con fundamento el contenido y a flexibilizar su idea de la materia y de los diferentes enfoques metodológicos.

Lo mismo ocurre en otras situaciones, como durante una sesión en la que se trabajan las características de los triángulos, en la que Lucas hace hincapié en cómo los diseños de actividad o los ejemplos que se exponen a los alumnos de primaria, tienen consecuencias sobre su aprendizaje:

Lucas: ¿Qué imagen tendrán los niños de un triángulo? Los triángulos en la cabeza de los niños: primero, serán isósceles, y hay muchos más; segundo, tendrán una sola base, porque aquí la idea de base se potencia como única cuando no hay solo una ¿por qué? Porque estamos estableciendo un lado paralelo a los bordes de la pizarra ¿no? Ocasionalmente pintaremos el escaleno:



Pero de nuevo lo haremos igual, pintaremos… [*Señala el lado horizontal*] Bueno pues esto no lo vamos a hacer, ¿no? Es lo que quiero decir, no vamos a seguir con esta dinámica de repetir los errores que los libros de texto provocan en los estudiantes. Se recomienda trabajar con representaciones en la pizarra diferentes, si quiero pintar un triángulo genérico pues lo pintaré de manera que no haya bordes de referencia:



En este último caso, además, la entrevista posterior con el formador nos sirvió para corroborar su intencionalidad en que los estudiantes se cuestionen no sólo el libro de texto, sino en general los recursos que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas, de forma que asuman un papel crítico. Además, afloran indicios de la inclusión de teorías provenientes de la investigación en Educación Matemática, otro de nuestros puntos de partida, cuando el formador hace alusión a la imagen del concepto de triángulo (Tall y Vinner, 1981) y a las consecuencias del empobrecimiento de dicha imagen a través de la utilización de ejemplos estandarizados.

Por último, otros escenarios en las sesiones analizadas nos informan de actividades de formación inicial que servirían de punto de partida para la identificación de conocimiento del formador. Ejemplo de este tipo de tareas y las relaciones que hace el formador, se encuentran en el siguiente fragmento.

Lucas: De hecho, la actividad de hoy os sugería –la actividad tres- que diseñarais una actividad para clasificar triángulos, usando geoplanos o trama, así que eso es lo que espero que ahora me contéis, qué habéis hecho, cómo habéis diseñado esa actividad.

Marta: Bueno lo que haría sería que dibujaría… pondría en el suelo puntos reflejando una trama y ahora a los alumnos los ataría a todos mediante una cuerda. Todos los alumnos estarían en la cuerda y yo pues marcaría, por ejemplo, les pondría puntos rojos y tendrían que marcar los tres puntos.

Lucas: Así que está usando una versión muy personal de una trama y yo creo que ella lo está haciendo pensando en que cuando los niños vivencian el concepto que se va… no solo a manipular sino vivir, trazar, al moverse por el concepto que se pretende trabajar, van a conseguir un nivel de adquisición mayor […] Marta y ¿tú crees que ellos se quedan en su cabeza, cada vez, el triángulo que han formado para poder compararlos unos con otros? [Espera] Vamos a verlo, a ver, todo el mundo de pie. Formad un triángulo cualquiera [Se levantan y se van dando las manos]

La actividad que se realiza en al aula vuelve a hacer énfasis en el papel de las tareas en el aprendizaje de los alumnos situando al EPM en un aula de primaria y propiciando la discusión de las aproximaciones de los futuros maestros a un mismo contenido. De este modo, la tarea de formación incluyó reflexiones sobre el diseño en el grupo de futuros profesores que sirvió para la puesta en valor de la identidad profesional compartida entre el grupo de profesores.

Paloma: Yo le daría una trama a un encargado que vaya dibujando lo que están haciendo…

Lucas: Que vayan otros representando lo que unos van haciendo… Esto como sugerencias, Marta.

Marta: No es que se me acaba de ocurrir que sería mejor darles un geoplano antes de darles la trama.

Lucas: Lo que tú acabas de descubrir es que cuando varios maestros de un colegio trabajan en equipo, diseñan actividades mejores… Claro, sin duda alguna. Eso hagámoslo, por favor, no trabajemos aisladamente. Bueno, ¿ya lo tenemos?

Además, Lucas sitúa a los EPM en un escenario de trabajo colaborativo entre profesores lo que además de reforzar la identidad profesional en relación a *sentirse como profesor*, favorece el aprendizaje del EPM en relación al diseño de tareas y de las diferentes formas de trabajo, reforzando el *actuar como profesor* entre el grupo de clase.

CONCLUSIONES

En pos de alcanzar nuestro objetivo por comprender la naturaleza del conocimiento del formador de profesores, nuestro estudio nos ha permitido poner de relieve, en primer lugar, elementos del conocimiento del formador que suponen una forma diferente de conceptualizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que tienen los profesores. Esta diferencia, como señalan Beswick y Chapman (2013), radica tanto en las diferencias del contenido que enseñan, como en la intencionalidad de la enseñanza que se ponen de manifiesto en los dos niveles de aprendizaje que el formador tiene en su mente: el del futuro profesor y el de los futuros alumnos de éstos.

Hemos puesto de manifiesto que, en aquellos elementos del conocimiento de profesor y formador que son comunes (desde nuestra perspectiva, los que se corresponden con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK), estos tienen en el formador mayor extensión, profundidad (en el sentido de Zopf, 2010) y, sobre todo, riqueza de relaciones, como se evidencia cuando relaciona el *conocimiento sobre la práctica matemática* (comprobación-demostración del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo), *conocimiento sobre los estándares de aprendizaje* (secuenciación de los distintos grados de formalización según la etapa de Educación Primaria), *conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas* (la estrategia que utiliza, asociada al recurso de recortar, para la construcción de ese conocimiento) y *conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas* (comprensión de cómo los alumnos de primaria pueden iniciarse en el proceso de formalización). Esto supone una aportación de este estudio dado que estudios anteriores se limitan a comparar el conocimiento disciplinar de formador y profesor.

Hemos mostrado también evidencias de conocimiento que permiten al formador *enseñar a pensar como un profesor, enseñar a conocer como un profesor, enseñar a sentirse como un profesor y enseñar a actuar como un profesor* (Feiman-Nemser, 2008, p. 698). Lucas sitúa a sus EPM en escenarios de trabajo colaborativo entre profesores y muestra conocimiento sobre diferentes características que configuran la identidad profesional de un profesor, incluyendo sus concepciones, trasladando a sus estudiantes elementos que caracterizan a un profesor crítico y reflexivo ante los recursos y las prácticas educativas en educación matemática. En este mismo sentido, emergen en este estudio algunos elementos propios del conocimiento del formador, como parte de su saber práctico, como es el conocimiento de las estrategias de enseñanza basadas en roles.

Las diferencias del conocimiento del formador con respecto al profesor al que forma, así como las relaciones con el conocimiento de dichos profesores, unidas a la relevancia del propio formador en los procesos de formación inicial, ponen de relieve la necesidad de discutir las especificidades del conocimiento del formador. Esta discusión puede ser útil de cara a comenzar a estudiar modelos de formación de formadores, que nos permitan converger, en última instancia, en un modelo compartido de formación de profesores.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Londres, Reino Unido: Open University Press.

Baxter, J. A. y Lederman, N. G. (2001). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes* (pp. 629-632). Cham, Suiza: Springer.

Beswick, K. y Chapman, O. (2013). Mathematics teacher educators' knowledge. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (p. 215). Kiel, Alemania: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 475-499.

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C. y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11-25). Huelva: CGSE.

Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practicing mathematics teachers. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional, Vol. 4* (pp. 57-74). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Feiman-Nemser, S. (2008). Teacher learning: how do teachers learn to teach? En M. Cochran-Smith, S. Feiman-Nemser, D. J. McIntyre y K. E. Demers (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education: Enduring Questions in Changing Contexts* (p. 697-705). Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Grbich, C. (2003). *New Approaches in Social Research*. Londres, Reino Unido: SAGE.

Jaworski, B. y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM*, *46*(2), 173-188.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Perks, P. y Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional, Vol. 4* (pp. 265-280). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education 7*(1)**,** 5-32.

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (Tesis doctoral no publicada). University of Michigan, Ann Arbor, EE. UU.

[xxxiii] Esta investigación está financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva y por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España.

[xxxiv] En este trabajo nos referiremos al formador como aquel agente que interviene en la formación del profesor que enseñará matemáticas desde la perspectiva de la educación matemática. Hablaremos de profesor que enseña o enseñará matemáticas con la intención de englobar a maestros, o profesores de primaria, y profesores de Secundaria y Bachillerato.

[xxxv] Usaremos la terminología de Shulman (1986) entendiendo que *subject matter* y *content* no se refieren aquí (solo) a matemáticas, sino al contenido de la formación.

[xxxvi] El modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) se articula sobre la base de las concepciones del profesor, sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje, y se estructura en dos grandes dominios: el dominio del conocimiento matemático, que incluye como subdominios el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de la matemática y el conocimiento de la práctica matemática; y el dominio del conocimiento didáctico del contenido, que se compone de los subdominios del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

CONOCIMIENTO SOBRE LOS ESTUDIANTES COMO RESOLUTORES DE PROBLEMAS MANIFESTADO POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA[xxxvii]

Knowledge about students as problem solvers manifested by future primary teachers

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos un análisis del conocimiento sobre el aprendizaje de la resolución de problemas, específicamente sobre el conocimiento de los estudiantes como resolutores, manifestado por 149 futuros profesores de educación primaria al terminar su formación. A través de un cuestionario los sujetos manifestaron un mayor conocimiento sobre características de resolutores exitosos. Por ejemplo, reconocen que los buenos resolutores presentan una mejor organización de su conocimiento y un adecuado manejo de las emociones. Sin embargo, muestran respuestas dudosas al pedirles identificar características de resolutores novatos como la identificación de información importante o el uso de estrategias inadecuadas.

Palabras clave: *resolución de problemas, Educación Primaria, conocimiento del profesor.*

Abstract

We present an analysis on prospective primary teachers' knowledge about problem-solving learning, specifically about students as problem solvers upon completion of their university training. Through a questionnaire, 149 subjects manifested a greater knowledge about characteristics of successful resolvers. For example, they recognize that good resolvers present a better organization of their knowledge and adequate emotion' management. However, they show dubious answers by asking them to identify features of novice solvers such as identifying important information or using inappropriate strategies.

Keywords: *problem solving, Primary Education, teacher knowledge.*

INTRODUCCIÓN

Ser profesor de matemáticas requiere de un conocimiento más amplio que conocer el contenido matemático que se enseña. Por lo tanto, "el conocimiento necesario para enseñar efectivamente la resolución de problemas debe ser más que una capacidad general para resolver problemas" (Chapman, 2015, p. 19). Lester (2013) refuerza esta idea señalando que la capacidad de los profesores para resolver problemas complejos y cognitivamente exigentes no es suficiente para garantizar una enseñanza adecuada de resolución de problemas (en adelante, RP). Este autor señala que es necesario aclarar qué aspectos, además de la competencia del profesor como resolutor de problemas, deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas. Sin embargo, numerosos trabajos han señalado las dificultades para delimitar el conocimiento profesional de los profesores en los marcos mayormente utilizados, existiendo solapamientos (Montes, Contreras y Carrillo, 2013) o la necesidad de incluir otros elementos teóricos para complementar los análisis (Rojas, Flores y Carrillo, 2013). Específicamente, las investigaciones que se ocupan del conocimiento profesional sobre RP de profesores evidencian una organización diferente a la

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Conocimiento sobre los estudiantes como resolutores de problemas manifestado por futuros profesores de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 483-492). Valladolid: SEIEM.

usualmente utilizada (Chapman, 2015), provocando entre otras limitaciones, omisiones en aspectos relativos a la naturaleza de la RP (Foster, Wake y Swan, 2014).

Enseñar la RP requiere que el profesor tenga una competencia pedagógica en la que los docentes presten atención a los estudiantes como resolutores, sin embargo esta acción es un desafío tanto para los profesores en activo (Saadati, Chandia y Ruiz, 2018) como para los futuros docentes (Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas, Cea, Randolph y Medel, 2015; Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2002). Por ejemplo, Crespo (2003) señala como uno de los factores más complejos de aprender por los profesores, la consideración del resolutor en la selección de problemas. Específicamente, los futuros profesores plantean problemas demasiado fáciles para las capacidades de los estudiantes. Así mismo, Livy y Downton (2017) realizan una clase con estudiantes de escuela primaria en la que los estudiantes para profesor participan como observadores. Los análisis a las reflexiones y observaciones de los futuros maestros muestran el asombro que generan las respuestas de los estudiantes cuando resuelven problemas y la importancia de atender al pensamiento matemático de los niños como clave para desarrollar su competencia matemática. Por su parte, Hallman-Thrasher (2017) señala que los futuros profesores son capaces de anticipar respuestas, pero tienen dificultades para mantener el nivel cognitivo de estas, no así cuando son inesperadas. No obstante, sus resultados sugieren que los futuros profesores conciben que anticipar las respuestas es lo deseado y cuando reciben respuestas inesperadas tratan de guiarlas a lo que se espera en vez de indagar en el error.

Estas consideraciones nos llevan a plantearnos la pregunta de investigación que guía este trabajo: ¿qué conocimiento manifiestan los futuros profesores de primaria sobre los estudiantes como resolutores de problemas una vez completada su formación universitaria? Debido a que los sujetos de este estudio presentan diferencias en su formación universitaria en educación matemática, hemos analizado y descrito su conocimiento considerando dos grupos, dado el impacto que podría tener en sus respuestas.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE RP

Entendemos el conocimiento profesional sobre RP, basándonos en el trabajo de Chapman (2015), que propone un marco específico, denominado "Conocimiento para la enseñanza de la RP matemáticos", y en nuestra caracterización (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2019). Chapman (2015) considera como eje articulador la competencia del profesor para resolver problemas, distinguiendo un conocimiento del contenido sobre problemas, su resolución e invención; un conocimiento pedagógico sobre los estudiantes como resolutores y sobre las prácticas de enseñanza; además de una dimensión constituida por factores afectivos y creencias que afectan a la enseñanza y el aprendizaje de este tópico. Sin embargo, en investigaciones previas hemos detectado algunas carencias en él, y especificidades del profesor de primaria que este marco no contempla y que hacen compleja su utilización en la discusión de este conocimiento (Piñeiro, Castro y Castro-Rodríguez, 2016). Así, hemos reinterpretado este modelo partiendo de nuestro entendimiento sobre la competencia para resolver problemas (Piñeiro, Chapman, Castro-Rodríguez y Castro, 2019). En él, además de la propia competencia para resolver problemas del profesor, distinguimos dos dimensiones, una referida al conocimiento teórico del proceso, y otra a aspectos del conocimiento pedagógico relativos al aprendizaje y la enseñanza. En este trabajo nos limitamos al conocimiento pedagógico de la RP y particularmente al conocimiento de los estudiantes.

CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO SOBRE LA RP

Un primer elemento necesario para identificar el conocimiento profesional relativo a la enseñanza de la RP es adoptar una perspectiva del conocimiento sobre los procesos, en vez de un enfoque de contenidos matemáticos, tal como se realiza tradicionalmente en los modelos de conocimiento del profesor. Para ello, además del marco de Chapman (2015) y un análisis curricular (Piñeiro et al., 2016), recurrimos al triángulo didáctico adaptado al proceso de RP. Entendemos que el triángulo didáctico hace posible comprender el proceso de enseñanza de la RP de una manera holística, manteniendo una fidelidad a la naturaleza del proceso (Nipper y Sztajn, 2008). Esta perspectiva hace emerger interacciones, la primeras son dobles (profesor/estudiante, estudiante/RP y profesor/RP) y han atraído la atención de la mayoría de la investigación en este campo. No obstante, la interacción triple ha sido señalada como central, si el propósito es mejorar el desempeño de los estudiantes al resolver problemas (Lester y Cai, 2016). La Figura 1 muestra la triada didáctica, sus relaciones, y nuestra interpretación de los elementos de conocimiento del profesor sobre la RP que se desprenden.

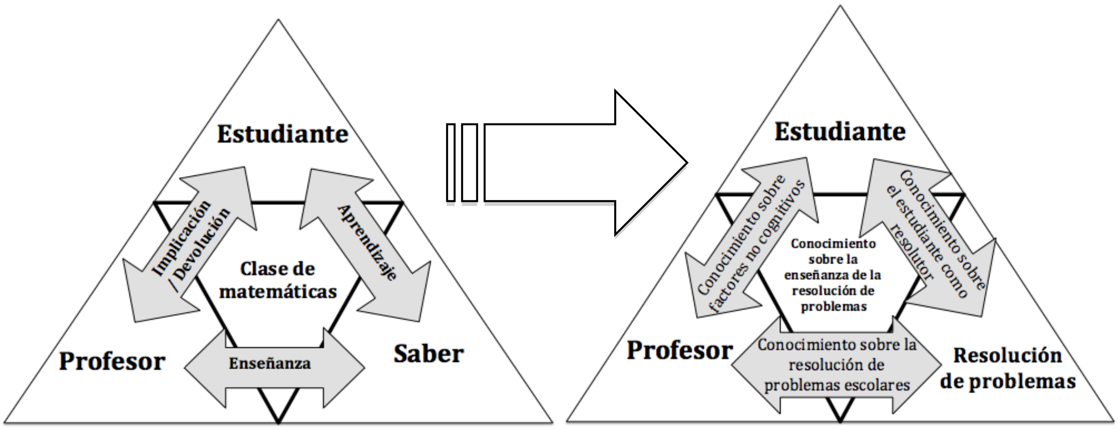


Figura 1. Triángulo didáctico y conocimiento pedagógico para resolver problemas

Estas relaciones permiten identificar y organizar elementos del conocimiento didáctico del profesor sobre la RP tan importantes como: a) el estudiante como resolutor, b) la RP como tarea escolar, c) factores no cognitivos que afectan la RP, y d) gestión de la enseñanza de la RP. Los tres primeros componentes tienen relación con el aprendizaje de la RP, mientras que el cuarto es relativo a su enseñanza. En este trabajo profundizamos en el primero de ellos, el conocimiento sobre el estudiante como resolutor, que contempla ideas sobre las características de los resolutores exitosos y las posibles dificultades (Piñeiro et al., 2019).

Conocimiento de los estudiantes como resolutores

Pensemos en un problema aritmético verbal cualquiera, un resolutor exitoso sería capaz de resolver el problema a través de representaciones, estrategias de conteo o algoritmos, identificaría la relación de cambio, composición, comparación o igualdad existente entre las cantidades y sería capaz de explicar cómo y qué situaciones provocaron que resolviera el problema de la forma en que lo hizo. Por su parte, un estudiante que presenta dificultades podría usar una estrategia de conteo del total de los elementos y se tomaría más tiempo en resolverlo que el resto de sus compañeros. Este conocimiento permite que el profesor focalice sus esfuerzos en brindar otras estrategias de resolución con un mayor grado de eficiencia, en vez de por ejemplo, ayudas para comprender el problema o representarlo. Tener un conocimiento de ambos aspectos, el éxito y las dificultades, proporcionan al profesor elementos sobre los cuales tomar decisiones para acompañar a sus estudiantes.

En nuestro contexto, supone un conocimiento del profesor que permite poner atención en lo que pueden hacer, qué puede interferir y hasta dónde se podrá desarrollar la competencia para resolver problemas de los estudiantes. Es decir, conocimiento sobre fortalezas y debilidades, que permitan acompañarlos en un desarrollo apropiado de habilidades involucradas en la RP (Chapman, 2015). Esta autora señala que los aspectos solicitados al profesor son: comprender la naturaleza conceptual de las dificultades y ser capaz de interpretarlas desde la perspectiva de los estudiantes, cualidades cognitivas y disposición de los estudiantes exitosos resolviendo problemas, y lo que los estudiantes son capaces de hacer mientras resuelven problemas. De este modo, las características de resolutores exitosos, y las posibles dificultades, permiten una delimitación y organización sobre lo que el profesor espera que sus estudiantes aprendan, en términos de expectativas y limitaciones. A este respecto, Schoenfeld (1992) señala que los buenos resolutores se distinguen de los resolutores noveles en al menos las siguientes características:

- El conocimiento de los buenos resolutores está bien conectado con un esquema mental sofisticado, mientras que el de los resolutores noveles, no.
- Los buenos resolutores tienden a enfocar su atención en las características estructurales de los problemas, mientras que los resolutores noveles focalizan en características superficiales.
- Los buenos resolutores son más conscientes que los resolutores noveles de sus fortalezas y debilidades como resolutores de problemas.
- Los buenos resolutores son mejores que los resolutores noveles en el monitoreo y regulación de sus acciones y esfuerzos cuando resuelven problemas.
- Los buenos resolutores tienden a estar más preocupados que los resolutores noveles en obtener soluciones elegantes a los problemas.

Características de resolutores exitosos: una perspectiva que permite abordar las expectativas de aprendizaje son las características de resolutores exitosos (e.g. Kaur, 1997). Chapman (2015) señala que los profesores debiesen considerar dichas características para identificarlas en sus estudiantes con el fin de redirigir o reforzar según sea el caso. Aquí emergen las posibles formas de proceder asociadas a cada fase de resolver un problema y las estrategias de resolución que se espera los estudiantes puedan desarrollar (e.g. Posamentier y Krulik, 2009).

Dificultades y errores: las limitaciones están referidas a las posibles dificultades que pueden presentar y en los errores que estas pueden provocar en los estudiantes. Estos errores serán las evidencias visibles de la dificultad presentada por los estudiantes. Chapman (2015) señala que los errores permitirían una vía de entrada a la comprensión conceptual del problema presentado. Las dificultades ampliamente estudiadas son mayoritariamente referidas a problemas aritméticos de enunciado verbal, que en el contexto de la educación primaria toman gran relevancia (NCTM, 2000). No obstante, existen otras dificultades relativas al proceso de resolver un problema, como por ejemplo comprender las variables y condiciones del problema. Estas dificultades suponen que el profesor tenga conocimiento sobre cómo mediar cuando un estudiante no comprende el problema a través de, por ejemplo, representaciones.

MÉTODO

Para responder a nuestra pregunta de investigación, hemos utilizado un cuestionario por el poder que este tipo de instrumento para, entre otros, describir el conocimiento de las personas (Fink, 2003). Hemos optado por un instrumento cerrado y de carácter dicotómico, debido a que esperamos ciertas respuestas que nos muestren presencia o ausencia de un determinado conocimiento (Fink, 2003).

Contexto y participantes

En este estudio participan 149 estudiantes del grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, España. Estos han sido agrupados de acuerdo a la formación recibida, por la incidencia que pueda tener en sus respuestas. Un primer grupo con 56 estudiantes (GA) y otro con 93 estudiantes (GB). Ambos grupos habían cursado a lo largo de sus estudios tres asignaturas del área de matemáticas. La primera centrada en el estudio del contenido de las matemáticas escolares. La segunda relativa a la enseñanza y aprendizaje de los distintos núcleos temáticos de las matemáticas escolares, concretada en aspectos cognitivos y didácticos. La tercera orientada al estudio del currículo y al diseño e implementación de unidades didácticas para la Educación Primaria.

En estas asignaturas, la RP se trata de manera transversal. Específicamente, al discutir significados y modos de uso de conceptos matemáticos. Las actividades en las que han participado son principalmente de dos tipos: clases magistrales en las que se presentan, guían y sintetizan algunos de los temas de los cursos. El formador presenta el tema, facilitando la comprensión de aquellos contenidos teóricos que tienen mayor complejidad, orientando las reflexiones y análisis de los alumnos, a partir de las lecturas de los textos recomendados en la bibliografía, moderando los posibles debates. Los futuros profesores tienen la oportunidad de resolver tareas matemáticas que pueden ejemplificar o introducir los contenidos tratados. El segundo tipo, denominado actividades prácticas, puede tener dos orientaciones, laboratorio y TIC. En las prácticas de laboratorio, los futuros profesores trabajan con materiales manipulativos y en las prácticas TIC se centran en la gestión de software educativo y recursos de Internet. Esta última se trata principalmente en la asignatura del primer curso. Ambos casos, promueven la adquisición de conceptos y el desarrollo de habilidades como el análisis semántico de problemas, la justificación de propiedades o técnicas matemáticas, entre otros. Así mismo, en el segundo y tercer curso han debido impartir clases de matemáticas en centros escolares.

El GB, además había cursado una asignatura optativa, de la cual uno de sus contenidos es la RP de manera explícita. Específicamente, se tratan aspectos tales como: a) caracterización y ejemplificación del papel de RP en el aprendizaje de las matemáticas y su vínculo con la competencia matemática, b) desarrollo y aplicación de estrategias y heurísticas para RP, c) aplicación de criterios para inventar problemas de Matemáticas, o d) análisis de las estrategias de enseñanza adecuadas para enseñar RP en el aula de matemáticas.

En definitiva, los futuros profesores de este estudio no han tenido una enseñanza explícita sobre características de estudiantes como resolutores.

Instrumento

Para el desarrollo del instrumento (Figura 2), tomamos como punto de partida el marco de Chapman (2015) sobre las categorías de conocimiento del profesor para enseñar RP.

Lee cada frase y marca con una equis la casilla SÍ o NO según corresponda.

Sección A1.
Lee las siguientes características de un posible estudiante y decide cuáles corresponden a un buen resolutor de problemas:

1.	Su conocimiento matemático está conectado y bien organizado.	SÍ	NO
2.	Son persistentes en mantener la planificación de la estrategia seleccionada.	SÍ	NO
3.	Tienden a centrar su atención en las características estructurales del problema y no en las superficiales u obvias.	SÍ	NO
4.	Se frustran con mayor facilidad al no conseguir los resultados rápidamente.	SÍ	NO
5.	Son conscientes de sus fortalezas y debilidades.	SÍ	NO
6.	Se muestran capaces de supervisar y regular su propio trabajo.	SÍ	NO
7.	Se preocupan de que su proceso de resolución esté bien hecho, utilizando estrategias sofisticadas, siendo claro y razonable en su proceso.	SÍ	NO
8.	Están menos preocupados por los detalles y más por acabar rápido.	SÍ	NO

Sección A.2.
De las siguientes características, ¿cuáles son comunes en los resolutores principiantes o novatos?

9.	Distinguen la información relevante de la irrelevante.	SÍ	NO
10.	Mantienen la planificación de su estrategia a pesar de que no sea apropiada.	SÍ	NO
11.	Son impulsivos en la elección de una estrategia de resolución.	SÍ	NO
12.	Mantienen su estrategia de solución aunque no observen resultados parciales adecuados.	SÍ	NO
13.	Tienen poca claridad del camino a seguir para alcanzar la solución.	SÍ	NO
14.	Utilizan estrategias poco apropiadas al tipo de problema propuesto.	SÍ	NO
15.	Encuentran un resultado sin revisar su coherencia.	SÍ	NO

Figura 2. Preguntas del cuestionario relativas al conocimiento de los estudiantes como resolutores

Procedimiento

El cuestionario fue aplicado al finalizar el curso académico 2017/2018 y fue respondido individualmente en una duración de aproximadamente 20 minutos. Los futuros profesores no fueron avisados con antelación y se obtuvo su consentimiento en la misma aplicación. Uno de los investigadores estuvo presente durante todo el proceso.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Este estudio tiene como objetivo caracterizar el conocimiento teórico sobre el proceso de RP manifestado por los futuros maestros de primaria. Esto ha motivado el uso de una de las formas de interpretación del escalamiento multidimensional, que permite identificar las agrupaciones que emergen de sus respuestas, describir la característica común de estas y etiquetar el atributo presente en ellas (Bisquerra, 1989). Por lo tanto, hemos realizado dos análisis a los datos obtenidos.

En primer lugar, se realizaron agrupamientos de las respuestas, mediante un análisis multivariante a través de un escalamiento multidimensional ALSCAL (SPSS), siguiendo las recomendaciones de Bisquerra (1989). Este análisis fue realizado al cuestionario completo, es decir a sus 80 ítems; sin embargo, aquí presentamos solo los resultados de los relativos al conocimiento de los estudiantes como resolutores.

En este análisis, el "estrés constituye un importante elemento no solo para valorar el grado de ajuste conseguido mediante la representación, sino también para la decisión sobre la dimensionalidad de la misma" (Gil, 1993, p. 75). En ambos grupos, el cuestionario sobre aprendizaje arrojó 3 dimensiones. Para el GA el stress fue del 0,11. Esto es más alto que el 0,10 recomendado, probablemente debido al nivel de formación de este grupo. Sin embargo, hemos decidido mantener las tres dimensiones, pues como señala Bisquerra (1989), la presentación y la comprensión de los datos deben prevalecer. Debido a que tres dimensiones emergen en los demás cuestionarios de los grupos de cuarto año con un ajuste apropiado, mantenemos esta tridimensionalidad para hacer comparaciones. En el GB fue 0,8, considerado adecuado (Bisquerra, 1989).

La primera dimensión ha sido interpretada como acuerdo en el conocimiento y se corresponde con las respuestas a 54 preguntas en el GA y respuestas a 63 preguntas en el GB. Estas respuestas presentan un alto porcentaje de acuerdo en su respuesta, positiva o negativa.

La segunda dimensión está determinada por respuestas a 13 preguntas en el GA y respuestas a 10 preguntas en el GB. Ambos grupos presentan discrepancias en la cantidad de respuestas afirmativas y negativas, fluctuando sus porcentajes para cada opción. Hemos etiquetado a este grupo de respuestas como duda.

La tercera dimensión se corresponde con respuestas a 13 preguntas en el GA y respuestas a 7 preguntas en el GB. En ellas, sus porcentajes de acuerdo fluctúan o no para cada opción, pero al ser analizadas en conjunto a otras respuestas del cuestionario, estas presentan contradicciones, por lo que ha recibido esta etiqueta. Aquí resaltamos que algunos de los porcentajes de respuesta (como a la pregunta 9 y 10) se explican por la alta presencia que presentan en las dimensiones de acuerdo y duda, es decir, hay ítems que obtuvieron una alta presencia en más de una dimensión, pero aquí solo mostramos la dimensión en la que obtuvo mayor presencia.

La Tabla 1 muestra la distribución de las respuestas a las preguntas según su dimensionalidad y el conocimiento asociado.

Un segundo análisis es de carácter comparativo-descriptivo de las respuestas de ambos grupos. En los siguientes apartados se muestran organizadas de acuerdo a nuestro análisis teórico previo y las dimensiones obtenidas en el escalamiento multidimensional realizado a cada cuestionario

Tabla 1. Dimensionalidad y conocimientos en el cuestionario sobre estudiantes como resolutores

	Dimensión 1 Acuerdo		Dimensión 2 Duda		Dimensión 3 Contradicción	
	GA	GB	GA	GB	GA	GB
Características de resolutores exitosos	1, 4, 5, 6, 7, 8	1, 4, 5, 6, 7, 8	2, 3	2		3
Dificultades y errores	9, 11	9, 11, 13	10, 12, 13, 14, 15	10, 12, 14, 15		

Características de resolutores exitosos

Ambos grupos, cuando se trata de identificar características de resolutores exitosos, muestran respuestas que se ubican en la dimensión de acuerdos, a excepción de sus respuestas a las preguntas 2 y 3. En general los futuros profesores reconocen características de resolutores exitosos. Sin embargo, la persistencia que mantienen en el plan y la identificación de características estructurales y no superficiales son aspectos que se muestran difíciles. Por ejemplo, de los 58 estudiantes del GB que responden positivamente a que los resolutores exitosos se focalizan en características estructurales de los problemas (Pregunta 3), cerca de un 40% responde que los estudiantes novatos también son capaces de hacerlo. La Tabla 2 muestra los ítems y porcentajes de cada grupo.

Tabla 2. Porcentajes de respuestas a características de resolutores exitosos

		GA (N=56)		GB (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
1	Conocimiento conectado y organizado	95,6	5,4	97,8	2,2
2	Son persistentes en el plan	71,4	28,6	60,2	39,8
3	Identifican características estructurales	75	25	62,4	37,6
4	Se frustran con facilidad	21,4	78,6	22,6	77,4
5	Conocen sus fortalezas y debilidades	85,7	14,3	93,5	6,5
6	Son metacognitivos	96,4	3,6	92,5	7,5
7	Preocupados del fondo y forma	96,4	3,6	92,5	7,5
8	Preocupados por acabar rápido	8,9	91,1	10,8	89,2

Dificultades y errores

En este conocimiento disminuyen las respuestas en la dimensión de acuerdos y se posicionan mayoritariamente en la de duda. Este hecho nos hace pensar que en general, las características de un resolutor novato son complejas de identificar por parte de los futuros profesores.

La Tabla 3 muestra el contenido de los ítems y porcentajes de cada grupo.

Tabla 3. Porcentajes de respuestas a dificultades y errores

		GA (N=56)		GB (N=93)	
	Ítem	SÍ	NO	SÍ	NO
9	Distinguen información relevante	30,4	69,6	36,6	63,4
10	Son persistentes en el plan	69,6	30,4	64,5	35,5
11	Son impulsivos	89,3	10,7	82,8	17,2
12	Mantienen estrategia sin ver resultados parciales	75	25	72	28
13	No tienen claridad de la estrategia a seguir	76,8	23,2	80,6	19,4
14	Utilizan estrategias poco adecuadas	66,1	33,9	73,1	26,9
15	No revisan la coherencia del resultado	76,8	23,2	78,5	21,5

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Chapman (2015) señala que el conocimiento de las características de resolutores exitosos y posibles dificultades es un activo que deberían conocer los profesores. En este sentido nuestro trabajo aporta información sobre este aspecto. Los resultados muestran que ambos grupos manifiestan conocimiento teórico sobre los estudiantes como resolutores. Sin embargo, las preguntas relativas a indagar en dificultades y errores, a través de la etiqueta resolutores novatos, arrojan que los conocimientos de los futuros profesores presentan dudas e incluso algunas contradicciones, especialmente en el grupo sin formación adicional. Este resultado podría ser explicado por la formación recibida y que se puede observar en manuales (e.g. Flores y Rico, 2015) utilizados por los formadores. En ellos, cuando se trata explícitamente la RP, se tratan características del resolutor ideal. Así mismo, los errores y dificultades a los que los futuros profesores son expuestos tienen relación con conceptos matemáticos, omitiendo estas características de resolutores novatos.

Nuestros resultados muestran que el conocimiento de los futuros profesores sobre el aprendizaje de la RP no parece estar organizado y conectado. Esto es debido a que a pesar de poseer conocimiento sobre cómo puede verse un estudiante exitoso, los profesores en formación no son capaces de extrapolar ese conocimiento a un estudiante que no posea las características señaladas. Por otro lado, un resultado desalentador tiene relación con que este conocimiento pareciera ser generalizado para ambos grupos, pues sus respuestas se ubican en dimensiones bastante similares a pesar de la diferente formación recibida. Nuestros resultados parecen sugerir que la formación adicional no es suficiente cuando se trata de características de resolutores novatos. Esto reafirma la dificultad que tiene para los profesores el desarrollo de su conocimiento sobre RP (Hallman-Thrasher, 2017), y pone de manifiesto la necesidad de profundizar en este tipo de conocimiento en la formación inicial.

Livy y Downton (2017) señalan que una mediación activa por parte de los futuros profesores produce buenos resultados en el desarrollo de su competencia para resolver problemas. Estos autores plantean la importancia de que los profesores sean capaces de identificar los puntos críticos en las soluciones de los estudiantes y basen su mediación en ellos. En este sentido, nuestro trabajo complementa estos hallazgos pues la identificación de características y dificultades de los estudiantes como resolutores ayudaría a tomar buenas decisiones a los futuros profesores. Así mismo y como han mostrado otros estudios (Crespo, 2003; Hallman-Thrasher, 2017), los futuros profesores tienden a subestimar la habilidad de sus estudiantes para resolver problemas, planificando actividades poco desafiantes. A este panorama, debe agregarse el bajo nivel de competencia para resolver problemas que presentan los futuros profesores de primaria españoles (Nortes y Nortes, 2016). Creemos que este hecho podría provocar que el conocimiento sobre resolutores exitosos no sea de utilidad, pues el conocimiento que se tenga de las matemáticas implicadas en los problemas los haría conscientes de las ideas claves presentes ya que los futuros profesores tienden a evaluar las actuaciones de los posibles estudiantes de acuerdo a su propio actuar cuando resuelven problemas (Van Dooren et al., 2002).

Las condiciones que permiten que una genuina RP emerja, son complejas y requieren por parte del profesor un conocimiento matemático y didáctico profundo (Chapman, 2015). Este trabajo lo focalizamos en el conocimiento didáctico, específicamente en el componente relativo a los estudiantes como resolutores de problemas. Los futuros profesores de este estudio manifiestan un conocimiento teórico sobre los estudiantes como resolutores. Sin embargo, debido a las dificultades para reconocer las dificultades o características de resolutores noveles en sus respuestas, es posible que ese conocimiento no se traslade a la práctica docente. Por tanto, creemos necesario que los programas de formación se preocupen de este aspecto, fomentando habilidades que hagan posible la transferencia de sus conocimientos a la práctica de aula. Algunos enfoques que permiten a los estudiantes interactuar con estudiantes reales (e.g. Crespo, 2003; Livy y Downton, 2017), permite a los futuros docentes ser conscientes de las capacidades de sus posibles futuros estudiantes.

Un resultado que resalta de este estudio es que, al contrario de lo que podría creerse, los futuros profesores manifiestan un conocimiento teórico sobre la RP que contrasta con su competencia para resolver problemas expuesta en otras investigaciones (e.g. Nortes y Nortes, 2016). Lo que difiere con la premisa el conocimiento sobre los conceptos matemáticos mejora el conocimiento didáctico del contenido (e.g. Carrillo, 2014). Sin embargo, nuestros resultados sugieren que esta relación que se ha manifestado cuándo se analiza el conocimiento desde la perspectiva de los conceptos puede darse de una manera diferente cuando nos situamos desde la perspectiva de un proceso como la RP.

Finalmente, este tipo de estudios permiten identificar áreas problemáticas en las que profundizar en futuras investigaciones de carácter cualitativo. Esto es debido a que el carácter mayormente cuantitativo de nuestros resultados no permite conocer las razones subyacentes de las respuestas de los futuros profesores que serían accesibles con un enfoque cualitativo.

Referencias

Bisquerra, R. (1989). *Introducción conceptual al análisis multivariable: un enfoque informático con los paquetes SPSS-X, BMDP, LISTEL y SPAD*. Barcelona: PPU.

Carrillo, J. (2014). El conocimiento de los estudiantes para maestro (TEDS-M España) desde la perspectiva de su especialización. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 115-123). Salamanca: SEIEM.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Mathematics, Science and Technology Education, 3*(1), 19-36.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V. y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Estudios de Política Educativa, 1*(1), 64-105.

Fink, A. (2003). *How to Ask Survey Questions* (2a ed.). Thousand Oaks, EE.UU.: Sage Publications.

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Madrid: Pirámide.

Foster, C., Wake, G. y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 97-104). Vancouver, Canadá: PME.

Gil, J. (1993). La posición del profesorado ante el cambio educativo. Un escalamiento multidimensional no métrico de los discursos sobre la reforma. *Revista de Investigación Educativa, 21*, 67-82.

Hallman-Thrasher, A. (2017). Prospective elementary teachers' responses to unanticipated incorrect solutions to problem-solving tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(6), 519-555.

Kaur, B. (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. *The Mathematics Educator*, *2*(1), 93-112.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 245-278.

Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 117-135). Nueva York, EE.UU.: Springer.

Livy, S. y Downton, A. (2017). Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 51*, 150-160.

Montes, M. Á., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EEUU: Autor.

Nipper, K. y Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: Conceptualizing mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 333-341.

Nortes, R. y Nortes, A. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. *Revista de Investigación Educativa*, *34*(1), 103-117.

Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas en primaria: una perspectiva curricular. En J. A. Marcías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 427-436). Málaga: SEIEM.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en Educación Primaria. *PNA*, *13*(2), 104-129.

Piñeiro, J. L., Chapman, O., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Exploring prospective primary school teachers' mathematical problem-solving knowledge. En J. Novotná y H. Moraová (Eds.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Mathematics Teaching. SEMT '19* (pp. 305-315). Praga, República Checa: Charles University.

Posamentier, A. S. y Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics. Grades 3–6: Powerful strategies to deepen understanding*. Thousand Oaks, EE.UU.: Corwin.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *AIEM*, *4*, 47-64.

Saadati, F., Chandia, E. y Ruiz, N. (2018). Pedagogical problem-solving knowledge of Chilean mathematics teachers and instructional reflection. En D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the first PME Regional Conference: South America* (pp. 129-136). Rancagua, Chile: PME.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, EE.UU.: Macmillan.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 319-351.

[xxxvii] Este trabajo se enmarca dentro del Proyecto PGC2018-095765-B-I00 (MICIN) del Gobierno Español, y gracias CONICYT Chile y una Beca de Doctorado en el Extranjero, folio 72170314.

SOPORTES LINGÜÍSTICOS MATEMÁTICAMENTE RELEVANTES EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA[xxxviii]

Mathematically relevant linguistic means in the teaching of the quadratic equation

Planas, N., Badillo, E. y Chico, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

La atención sistemática a la función de la lengua del profesor en clase sigue siendo un reto de la formación del profesorado de matemáticas. Con el objetivo último de desarrollar contenidos formativos basados en resultados de la investigación en el aula que informen sobre la identificación y el diseño de soportes lingüísticos matemáticamente relevantes para el trabajo de componentes del currículo, analizamos la significación del registro matemático en la lengua del profesor. En este texto, nos centramos en el caso de los verbos relacionales y los complementos lingüísticos asociados que son de necesaria lexicalización para restringir el campo semántico en la enseñanza de la ecuación cuadrática. Concluimos sobre la importancia de anticipar, en la preparación de la enseñanza, aspectos de precisión lingüística con impacto en la producción del registro matemático escolar y en la comprensión de conceptos como el de ecuación cuadrática.

Palabras clave: *lengua del profesor en clase, ecuación cuadrática, registro matemático, soportes lingüísticos matemáticamente relevantes, formación del profesorado de matemáticas.*

Abstract

The systematic attention to the function of the language of the teacher in the classroom remains a challenge of mathematics teacher education. Towards the ultimate end of developing teacher education contents that are classroom- and research-based and inform the identification and design of mathematically relevant linguistic means for the work of specific curricular components, we examine the signification of the mathematical register in the language of the teacher. In this report, we primarily focus on the case of relational verbs and the related linguistic complements, whose lexicalization is of necessity for the restriction of the semantic field in the teaching of the quadratic equation. We conclude about the importance of anticipating, in teaching preparation, quality issues of linguistic precision with an impact on both the production of the school mathematical register and the understanding of concepts such as that of quadratic equation.

Keywords: *language of the teacher in the class, quadratic equation, mathematical register, mathematically relevant linguistic means, mathematics teacher education.*

INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

En el área de educación matemática es cada vez más abundante la investigación sobre cuestiones de lengua en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Las revisiones de la literatura, desde Austin y Howson (1979) hasta Planas, Morgan y Schütte (2018), dan cuenta del progresivo aumento, visibilidad e impacto de los estudios en este dominio. Desde el supuesto de la influencia de las habilidades lingüísticas y comunicativas del alumno y del profesor en el rendimiento escolar, se avanza hacia una mayor precisión pedagógica y didáctica acerca de la lengua adecuada para el trabajo en clase orientado a la comprensión conceptual de contenidos matemáticos concretos

Planas, N., Badillo, E. y Chico, J. (2019). Soportes lingüísticos matemáticamente relevantes en la enseñanza de la ecuación cuadrática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 493-502). Valladolid: SEIEM.

(Prediger, 2019; Prediger y Wessel, 2013). En este marco de desarrollo de la investigación de aula sobre educación matemática y lengua, y con miras a contribuir al avance de la investigación sobre formación del profesorado de matemáticas, situamos el objetivo de identificar soportes lingüísticos relevantes para la enseñanza de componentes del currículo. En esta ocasión aportamos resultados sobre la lengua del profesor en la introducción del concepto de ecuación cuadrática. Nuestro equipo está retomando datos de sesiones que se concibieron y analizaron como experimentos para la mejora de la enseñanza mediante ejemplos de una variedad de conceptos del currículo matemático de secundaria (ver criterios elaborados para estos experimentos en Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2016; y Planas, Chico, García-Honrado y Arnal-Bailera, 2019). Ahora observamos aspectos de la enseñanza que no fueron planificados en colaboración con los profesores de aula participantes, de modo que más adelante dispongamos de conocimiento suficiente para diseñar, implementar y evaluar de manera sistemática experimentos de enseñanza que sí incorporen soportes lingüísticos matemáticamente relevantes para el trabajo de contenidos matemáticos del currículo.

A pesar del aumento en el número de estudios de aula con atención a la lengua de la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, en conjunto todavía cubren una parte bastante reducida del currículo. Este es posiblemente uno de los motivos del escaso recorrido, a fecha de hoy, de la investigación en educación matemática, lengua y formación del profesorado. La consolidación de una línea de investigación en este sentido constituye un reto pendiente de nuestra comunidad. Desde la perspectiva de una formación del profesorado de matemáticas basada en resultados de la investigación en el aula (Callejo, 2015; Carrillo y Climent, 2011; textos del seminario coordinado por García, 2018), el diseño, la implementación y la evaluación de experimentos de enseñanza con la incorporación de soportes lingüísticos que sean matemáticamente relevantes para el desarrollo de contenidos curriculares es un paso clave en la preparación fundamentada de programas más completos de formación inicial y continua del profesor de matemáticas. El profesor de matemáticas debe tener la oportunidad de acceder a conocimientos pedagógicos generales sobre la influencia de los modos de comunicación y de la lengua en la enseñanza y el aprendizaje, especialmente en aulas donde el registro matemático se desarrolla en una lengua distinta a la de los alumnos. Por otra parte, el profesor también debe tener la oportunidad de completar estos conocimientos con otros de carácter didáctico-lingüístico sobre soportes facilitadores de la comunicación y comprensión de contenidos matemáticos. Se necesita, por tanto, investigación que aporte resultados de aula que, a su vez, acaben sustentando el conocimiento profesional necesario para una enseñanza donde el uso de la lengua sea matemáticamente relevante de acuerdo con el contenido a trabajar.

En la sección que sigue, resumimos tres aspectos cualitativos (forma, función y fluidez) que la literatura sobre educación matemática y lengua revela como primordiales en la enseñanza y el aprendizaje. Conjeturamos que la integración del conocimiento de aula generado sobre estos aspectos habrá de articular y validar la preparación de propuestas de formación del profesorado de matemáticas. A continuación, aportamos datos de sesiones de clase, con dos profesores distintos, en torno a las representaciones algebraicas y verbales del concepto de ecuación cuadrática en la enseñanza. Examinamos formas lingüísticas verbales para las cuales se observan funciones matemáticamente relevantes en tanto que facilitan la producción de significados del registro matemático que son particulares de la ecuación cuadrática, como estructura y clase de equivalencia.

LA LENGUA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN CLASE

Adoptamos una visión sociocultural de la lengua (oral y escrita) que aúna el sistema lingüístico y las prácticas discursivas en la situación inmediata de uso en un contexto de cultura determinado. De acuerdo con esta visión, en el estudio de la lengua en la enseñanza y el aprendizaje, tenemos en cuenta tres aspectos: 1) forma, 2) función y 3) fluidez. Este último aspecto alude a la práctica, es esencialmente pedagógico y no específico para contenido matemático. Los experimentos de enseñanza que constituyen nuestra fuente de observación y de datos combinan prácticas individuales y de discusión en pareja y en grupo, habladas y escritas, con y sin intervención directa del profesor que, en su totalidad, promueven la apropiación fluida de la lengua en uso (Moschkovich, 2015). Bajo el supuesto de que la gestión del aula en estos experimentos incentiva alcanzar fluidez en el uso de un cierto sistema lingüístico o registro con unas ciertas prácticas discursivas, en este informe priorizamos el análisis de las formas y funciones de dicho sistema en la lengua del profesor y en la práctica de clase. Como la noción lingüística de forma es especialmente amplia, nos ceñimos al estudio de la forma verbal, por delante de la simbólica y la diagramática o visual. Dicho esto, por forma (verbal) entendemos la parte del sistema lingüístico relativa al plano de la expresión léxica y sintáctica, mientras que por función entendemos la parte del sistema lingüístico relativa al plano de los significados semánticos y pragmáticos que las formas codifican.

La forma y la función son aspectos indisociables de cualquier sistema lingüístico (Halliday, 1978), en particular del sistema comúnmente conocido como registro matemático (Pimm, 2018). Un registro es una variedad del sistema lingüístico de una lengua ordinaria. Así, el registro matemático verbal es el conjunto de términos, abreviaciones, estructuras gramaticales y demás formas lingüísticas existentes en una lengua para las cuales se han institucionalizado significados con funciones precisas en el contexto de cultura asociado a una comunidad considerada matemática. Dado que las matemáticas no tienen una estructura lingüística como el castellano o el catalán, el registro matemático (verbal) toma expresiones léxicas y sintácticas de la lengua en la que se desarrolla. Otra cuestión es el potencial de significados susceptibles de ejercer funciones específicas reconocibles por la comunidad matemática de referencia. Si bien en toda lengua hay terminología sobrevenida a fin de ampliar el registro matemático, la mayoría de los términos interpretables en este registro pertenecen también a otros registros, por lo que se necesita distinguir entre significados potenciales y significados efectivos. Tomando palabras a nivel individual, encontramos términos como *igual*, *raíz* o *diagonal* que pertenecen al registro matemático en castellano cuando se asocian a significados culturalmente establecidos como propios de la clase de matemáticas y de la comunidad matemática de referencia (i.e. una cierta matemática escolar). El sistema lingüístico ofrece la opción de varios significados potenciales para un mismo término, además de la opción de fijar de manera lexicalizada aquellos significados que sitúen el término en el registro matemático.

La relación entre formas lingüísticas y funciones de atribución semántico-pragmática no solo tiene que ver con la producción de significado, son también relaciones que subyacen al desarrollo de tareas cognitivas (Halliday, 1978). Dos formas lingüísticas aparentemente similares utilizadas con una determinada función en una situación de práctica pueden conllevar cargas cognitivas distintas y estar facilitando procesos de comprensión sustancialmente distintos. Por ejemplo, “Si los ángulos no suman ciento ochenta grados, entonces no son de un triángulo” y “Los ángulos que no suman ciento ochenta grados no son de un triángulo” son dos formas que expresan la propiedad relativa a la suma de los ángulos internos de un triángulo en geometría euclídea. Ambas contienen léxico interpretable en el registro matemático (ángulos, suman, triángulo, ciento ochenta, grados), pero lo conectan sintácticamente de modos distintos con efectos esperables distintos. La primera forma incluye la marca lógico-organizadora *si-entonces*, que en el sistema lingüístico castellano funciona facilitando el razonamiento argumentativo causal entre cláusulas. Una tercera forma simbólica, $A+B+C=180^{\circ}$, posiblemente con la imagen visual de un triángulo, es todavía distinta a las anteriores formas desde varios puntos de vista aunque dependiente de la forma verbal que la explicará en clase. Esta forma simbólica irá acompañada de explicaciones en la lengua del profesor con formas verbales susceptibles de distintas significaciones y cargas cognitivas. Por ello, las representaciones simbólico-algebraicas que se encuentran en un libro de texto o en una pizarra (como ocurre con los datos de clase que comentamos en la próxima sección) son importantes pero no autónomas en la función de generar significado matemático y comprensión conceptual.

La relación entre formas y funciones en el registro matemático es particularmente complicada en lo que se refiere a las expresiones que son verbos en el sistema lingüístico. En “el cuadrado es un cuadrilátero”, por ejemplo, el verbo funciona como clasificador jerárquico, mientras que este verbo funciona como identificador lingüísticamente reversible en “el cuadrado es este” o “este es el cuadrado”. Fijar el significado de “el cuadrado es un cuadrilátero” en el registro matemático no es por tanto trivial ni dependiente solo de los significados individuales para cuadrado y cuadrilátero. Se requiere como mínimo dar significado a “el cuadrilátero no siempre es un cuadrado”. Como todas las palabras dentro de la lengua, los verbos tienen su campo semántico, que se completa en la situación inmediata y el contexto de cultura. Halliday (1978) y Pimm (2018) discuten acerca del potencial semántico-pragmático de los verbos relaciones (por ejemplo, comparar, cambiar, agrupar, ordenar, clasificar), esto es, el tipo de verbos que expresan procesos operacionales básicos. Son verbos con un campo semántico propio y amplio, que se restringe a medida que se aportan otras palabras con información sobre el uso relacional del verbo en una situación y un contexto. Por ejemplo, en castellano, la palabra *comparar* es por si sola semánticamente incompleta y existe como verbo en el sistema lingüístico a fin de designar un proceso que busca comparar unas ciertas entidades bajo ciertos criterios para unas determinadas finalidades. Esta concreción del campo semántico requiere la lexicalización de palabras externas al verbo que son los complementos que realizan los distintos argumentos. Esta exigencia de limitar el campo semántico mediante signos léxicos adicionales se da para ubicar los verbos relacionales con precisión en el registro matemático. Cuando estos argumentos están elididos (no lexicalizados) en la expresión verbal, el campo semántico del verbo no se completa dentro del registro matemático de manera explícita. Si dichos argumentos no han sido expresados en otras situaciones, permanecen desconocidos. Aun así, la condición de haber sido expresados con anterioridad no es suficiente para que se den por sobreentendidos. La significación del verbo en el registro matemático tiene que haber sido el foco de prácticas donde se desarrolle con fluidez la capacidad de reconocer el campo semántico restringido. Con esto se manifiesta una vez más la profunda interrelación entre los aspectos de forma, función y fluidez.

SOPORTES LINGÜÍSTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra han mostrado que los alumnos de secundaria generalmente no relacionan las secuencias de transformación de ecuaciones con el manejo de ecuaciones equivalentes (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2007). Si bien los alumnos aprenden a operar correctamente sobre la estructura de una ecuación mediante la aplicación de las mismas operaciones básicas a cada lado del signo igual, no está claro que hayan desarrollado significados acerca del equilibrio simétrico, del sentido estructural o de la relación de equivalencia que existe entre ecuaciones que se transforman aplicando reglas de trasposición de la suma y del producto. Incluso cuando los alumnos hablan de equivalencia entre, por ejemplo, $2x+7=1$ y $2x+7-5=1-5$, esto no implica que identifiquen el criterio subyacente a dicha relación de equivalencia ni que observen similitudes y diferencias en la estructura. En el contexto de los Simposios de la SEIEM, Socas (1999), Castro (2012) y Vega-Castro, Molina y Castro (2011) han señalado el fenómeno de desajuste entre el trabajo conceptual-estructural y el procedimental-operacional como una de las causas de la dificultad de comprender el papel de la equivalencia y de la estructura en el aprendizaje del álgebra escolar. Con base en estos resultados, parece oportuno preguntarse si hay además otras causas externas a los alumnos y relativas a la expresión del registro matemático en la enseñanza. Para el caso de la ecuación cuadrática, esto supone extender el estudio de las dificultades de comprensión de los alumnos al estudio de las formas lingüísticas en la lengua del profesor en clase y su función efectiva en la comunicación y producción de significados matemáticamente relevantes en la articulación del concepto como objeto y proceso.

Dos de los experimentos de enseñanza realizados por nuestro equipo en 2015 y conducidos por dos profesores distintos –Profesora A y Profesor B–, se centraron en el concepto de ecuación cuadrática y sus realizaciones dentro del registro matemático algebraico. Ambos experimentos compartían los objetivos de introducir el concepto, junto con deducir y aplicar la fórmula general de resolución, en dos clases de tercer curso de secundaria. Para ello, se dedicaron dos sesiones sucesivas de una hora en cada clase. Como en Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), volvemos a tomar datos de experimentos de enseñanza finalizados para ilustrar formas lingüísticas con distintos efectos en la producción de significados matemáticamente relevantes en el marco de los objetivos de enseñanza que se decidieron en el diseño de los experimentos. Con la discusión de datos que sigue y teniendo en cuenta la complejidad matemática de la ecuación cuadrática como estructura y relación de equivalencia, pretendemos responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los verbos relacionales en la lengua de los profesores en clase?
- ¿Están siempre determinados los significados de estos verbos en el registro matemático?
- ¿Qué soportes lingüísticos contribuyen a la determinación de significados en dicho registro?

Sin ánimo de exhaustividad, la columna izquierda de la Tabla 1 recoge algunos de los verbos relacionales identificados con mayor frecuencia. Los rasgos lingüísticos de estos verbos son similares en la lengua original de los datos, el catalán, y en la lengua de este informe: A mayor exigencia de concreción semántica, mayor desarrollo sintáctico del verbo. Esta observación es pertinente porque al traducir palabra por palabra se mantiene la peculiaridad de incompletitud semántica del verbo sin complementos. Dicho esto, la atención a la lengua de la Profesora A y del Profesor B en clase permite documentar la lexicalización de complementos lingüísticos solo para algunas apariciones de algunos de los verbos relacionales. Estos complementos funcionan agregando significados matemáticamente relevantes que el campo semántico del verbo por sí solo no proporciona y que son básicos para avanzar en la construcción del concepto de ecuación cuadrática. Ambos fenómenos, de completitud e incompletitud semántica, se dan para instancias de un mismo verbo y en la lengua de ambos profesores en cualquiera de las sesiones.

Tabla 1. Verbos relacionales situados en el registro matemático

Verbos	*Complementos (Argumentos)*	*Soportes matemáticamente relevantes*
Comparar	Ecuaciones cuadráticas (Entidad) Tener las mismas soluciones (Criterio) $ax^2+bx+c=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (Estado)	Comparar ecuaciones cuadráticas fijándonos en que tengan las mismas soluciones para determinar su equivalencia
Agrupar	Términos de una ecuación cuadrática (Entidad) Tener el mismo orden (Criterio) $a_1x^2+\ldots+a_ix^2$; $b_1x+...+b_jx$; $c_1+\ldots+c_k$ (Estado)	Agrupar los términos del mismo orden de una ecuación cuadrática para determinar la expresión general
Simplificar	Una ecuación cuadrática (Entidad) Sumar términos del mismo orden (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Simplificar una ecuación cuadrática sumando los términos del mismo orden para determinar la expresión general
Transformar	Ecuación cuadrática original (Entidad) Ser equivalentes (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Transformar la ecuación cuadrática original en otras equivalentes hasta llegar a la expresión general
Cambiar	Ecuación cuadrática original (Entidad) Ser equivalentes (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Cambiar la ecuación cuadrática original por otras equivalentes hasta llegar a la expresión general

Para cada verbo, la columna intermedia de la Tabla 1 distingue argumentos involucrados acerca de: la entidad o entidades originales que se relacionan, el criterio o criterios de relación y el estado final buscado. Desde la perspectiva del registro matemático, el campo semántico de los verbos relacionales debe estar restringido e incluir referencias explícitas a estos argumentos. La columna derecha de la Tabla 1 propone el total de complementos que deben acompañar a cada verbo en la lengua del profesor para que esta actúe como mediador o soporte matemáticamente relevante en la enseñanza y en la comprensión del concepto de ecuación cuadrática. De entre las opciones de significación del verbo en el registro matemático, seleccionamos los argumentos y complementos lingüísticos según la situación inmediata de la enseñanza planificada y el contexto de cultura de la matemática escolar. Por ejemplo, para *comparar*, el criterio de comparación dadas dos ecuaciones admite multitud de argumentos, de entre los que seleccionamos *tener las mismas soluciones*. Para *simplificar*, dada una ecuación cuadrática el criterio también podría ser *dividir todos los términos por un divisor común*. Las siguientes subsecciones ilustran estas reflexiones con datos.

Completitud semántica de formas verbales

Empezamos con datos sobre el uso semántico progresivamente restringido de las formas *comparar* y *agrupar*, a raíz de la progresiva lexicalización de complementos sintácticos en la lengua del profesor. Ambas formas verbales tienen significados internos que comparten en distintos registros (por ejemplo, *comparar* como fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar diferencias y semejanzas), a la vez que pueden completarse con significados potenciales más restrictivos, algunos de los cuales son específicos del registro del álgebra de ecuaciones.

“Habrá que comparar” y “Comparar ecuaciones ¿fijándonos en qué?”

Profesora A: [$ax^2+bx+c=0$, $2x^2+3x-5=0$, en la pizarra] Esto es una ecuación cuadrática donde el coeficiente a es dos, el coeficiente b es tres y, atención, la c vale menos cinco, no os dejéis el menos. Podemos ir cambiando los coeficientes. Aunque lo que nos dé parezca diferente, según en lo que nos fijemos a lo mejor no lo es. Habrá que comparar. Es como con un medio y dos cuartos, parecen fracciones diferentes pero si las comparamos fijándonos en el decimal que sale, resulta que son equivalentes. ¿Sí? Pues nos va a interesar comparar ecuaciones y ver si son la misma. Un medio y dos cuartos son fracciones equivalentes porque dan el mismo decimal. Bueno, entonces, ¿qué tiene que pasar para que dos ecuaciones sean equivalentes? Compararemos ecuaciones ¿fijándonos en qué? Nos interesará que tengan las mismas soluciones.

“Habrá que comparar” es un enunciado sintácticamente completo, pero semánticamente pendiente de determinar puesto que en su constitución interna no informa sobre qué se compara, con qué criterio ni con qué propósito. No hay tampoco referencia deíctica a información comunicada en enunciados anteriores, por lo que no parece darse continuidad a significados que se están tratando. Estamos ante una expresión de significación abierta cuya pertenencia al registro matemático se podría cuestionar. La función pragmática de carácter imperativo subyace a la indeterminación semántica de *comparar* en esta expresión. Tras una introducción general donde se utiliza la forma relacional sin concretar, el campo semántico se lexicaliza en dos direcciones. Primero, se menciona la comparación de fracciones según el criterio del decimal al que se convierten mediante la división. Luego se menciona la comparación de ecuaciones según el criterio dado por las soluciones que las resuelven. Esta última función se vuelve a significar en momentos posteriores de la sesión.

“Ejercicios de agrupar” y “Agrupo los términos de cada orden”

Profesor B: Todo lo que hemos practicado con los polinomios nos va a servir para las ecuaciones de segundo grado. Hemos practicado bastantes, muchos ejercicios de agrupar. Con cualquier ecuación, primero tengo que asegurarme de que todo lo que se pueda agrupar, esté agrupado. Los términos sin equis, todos juntos. Los términos con equis también juntos y los términos con equis al cuadrado, ídem. Si agrupo los términos de cada orden y hago la operación, tengo los coeficientes a, b y c. Primero pongo los términos del mismo orden uno al lado de otro.

Como en el ejemplo anterior, observamos unas primeras formas relacionales con significación pendiente de determinar en el registro matemático. La expresión “ejercicios de agrupar” relega el verbo al papel de calificador de unos ejercicios, con lo que el núcleo semántico son los ejercicios. La forma “… todo lo que se pueda agrupar, esté agrupado” tampoco restringe el significado de agrupar en la situación inmediata de enseñanza. La posterior lexicalización de las entidades que se agrupan es la que facilita el acceso al registro del álgebra de ecuaciones donde se agrupan términos de un cierto tipo que luego se operan. Por razones pragmáticas de economía de la lengua, en cualquier registro es habitual el uso elidido de significados que puedan considerarse redundantes. No obstante, la situación de enseñanza es de introducción al álgebra de ecuaciones. De ahí que la omisión de complementos que restrinjan el campo semántico de verbos como comparar y agrupar sea problemática. El uso lingüísticamente abreviado de comparar o de agrupar no parece suficiente en los momentos iniciales de la enseñanza y práctica del registro algebraico. En la próxima subsección vemos ejemplos de indeterminación semántica de los argumentos necesarios para ubicar el verbo con respecto a la enseñanza de la ecuación cuadrática. A diferencia de los ejemplos mostrados hasta aquí, la indeterminación persiste a lo largo de las respectivas sesiones de clase.

Indeterminación semántica de formas verbales

Los datos que siguen muestran cómo los verbos *simplificar*, *transformar* y *cambiar* mantienen una indeterminación semántica continuada en el registro matemático, sin una diferenciación explícita con respecto a su función en la enseñanza y la comprensión de la ecuación cuadrática. El contraste en el conjunto de datos señala la coexistencia de los fenómenos de completitud e incompletitud semántica en la expresión de verbos relaciones durante la enseñanza. Esto caracteriza la lengua del profesor en clase en el continuo entre completitud e incompletitud semántica.

"Simplifico todo tanto como pueda"

> Profesor B: [$3x^2+5x^2+3x-3x+8x-5+5=0$, en la pizarra] Si agrupo los términos de cada orden y hago la operación, tengo los coeficientes a, b y c. Primero pongo los términos del mismo orden uno al lado de otro. Luego simplifico todo tanto como pueda. Y lo que no haga falta, pues no lo simplifico. ¿Qué ocurre con los términos de primer orden? Pues nada, porque solo hay un ocho equis. ¿Lo veis? ¿Y qué ocurre con los términos independientes? Pues nada tampoco. ¿Veis el cero? Me tengo que fijar en lo que tenga cada vez, en cada término y en el signo que vaya delante del número.

Este momento de enseñanza es matemáticamente relevante porque se discute la particularidad estructural de una expresión algebraica escrita en la pizarra y, atendiendo al sentido estructural, se sugiere una estrategia no mecánica de simplificación de los términos del mismo orden, $3x^2+5x^2$, $3x-3x+8x$ *y* $-5+5$. Es además un momento que ilustra la caracterización de la lengua del profesor en clase en el continuo entre los extremos de completitud e incompletitud semántica. Mientras que se completa el significado de agrupar en relación con los términos de cada orden (ver subsección anterior), el significado de "simplifico todo tanto como pueda" permanece indeterminado. Las entidades a simplificar y el criterio de simplificación no se lexicalizan de manera precisa a lo largo de la sesión, ni el de sumar términos del mismo orden, ni el de dividir todos los términos por un divisor común, ni otros. No se comunica, por tanto, la función relacional de simplificar en el registro matemático. No hay un soporte lingüístico que complemente el verbo en la realización de funciones de significación matemática. En particular, este verbo no se vincula a la enseñanza del sentido estructural ni de razonamientos de compensación entre términos de la expresión algebraica.

"Ir transformando lo que tengamos hasta que vaya bien"

> Profesora A:Siempre podéis pensar cualquier ecuación de más de una manera. ¿Recordáis que aplicabais las reglas de la suma y del producto con las que despejabais la incógnita y resolvíais ecuaciones de primer grado? Bueno, pues también tenemos que ir transformando lo que tengamos hasta que vaya bien. No siempre ocurre que tenemos la ecuación bien puesta. Pues eso, se trata de prepararla bien.

Como en el resto de los ejemplos, en este momento de enseñanza abundan verbos situados en distintos puntos del continuo entre completitud e incompletitud semántica. Las formas impersonales del tipo *tenemos que*, *ocurre que* y *se trata de* denotan procesos materiales (de obligación, de movimiento…) ajenos al registro matemático, mientras que las formas personales del tipo *podéis pensar*, *recordáis*, *aplicabais*, *despejabais* y *resolvíais* ejercen una función interlocutiva de demanda de procesos mentales, algunas con complementos que las concretan en el registro matemático. Hemos seleccionado la forma semánticamente indeterminada *ir transformando* por admitir soportes que serían matemáticamente relevantes para la enseñanza y la comprensión de la transposición de términos y de la ecuación como representante de una clase de equivalencia. No se lexicaliza el objeto inicial de la transformación ni el criterio matemático de finalización del proceso de modo que transformar es a la vez verbo nuclear en cuanto a la estructura sintáctica y verbo secundario en cuanto a la estructura semántica. Se lexicaliza la aplicación de las reglas de la suma y del producto, como mecanismos con los que se producen las distintas transformaciones en ecuaciones lineales, pero no se comunica la relación que permanece invariante en las ecuaciones cuadráticas. Si bien es cierto que, en otro momento de la sesión, se expresa el objetivo de "hallar la ecuación donde sea directamente aplicable la fórmula general", se sigue sin expresar la relación de equivalencia entre la ecuación original y la expresión general o ecuación última que se busca.

"La iremos cambiando y haremos tantos cambios como haga falta"

Profesor B: Hay la equis, que es la incógnita que no sabemos. Luego hay los coeficientes que son siempre números reales conocidos. Tenemos que aprender a encontrar las soluciones, que son los números que se sustituyen en la equis y cumplen la igualdad. Digo las soluciones porque habrá dos soluciones o a veces una sola. ¿Qué tenemos que hacer con la ecuación? La iremos cambiando y haremos tantos cambios como haga falta. ¿Lo veis? Vamos haciendo cambios hasta que haga falta.

En este ejemplo en torno al verbo cambiar, mostramos otra versión similar al problema de la determinación semántica en el registro matemático. Como ocurre con la realización lingüística *ir transformando*, nada se dice acerca de los contenidos matemáticos que son el objeto de enseñanza, ni es posible identificar el criterio involucrado en el proceso de cambiar/transformar. El campo semántico del verbo no se completa con argumentos que determinen la relación u operación. La forma *iremos cambiando* sin complementos apunta de nuevo a una economía de la lengua. Sigue una nominalización, *cambios*, que hereda la misma economía de la estructura argumental por lo que el potencial de significados se mantiene abierto y polivalente. Por otra parte, las formas *iremos cambiando* y *tantos cambios como haga falta* comunican un proceso susceptible de continuar sobre el cual no se especifica el estado final. Dada la amplitud con la que se significa el verbo y su nominalización, la función que se realice será particular, personal y determinada respecto a la participación en situaciones previas de uso de las formas *cambiar* y *cambio*.

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

Hemos estudiado la lengua de dos profesores en clase desde la convicción de que la lengua de la enseñanza tiene implicaciones en el uso fluido y la comprensión del registro matemático. Hemos visto que el carácter determinado de los elementos del registro matemático no implica el carácter determinado de la lengua del profesor en todo momento de la enseñanza en clase. Los datos de cuatro sesiones con dos profesores permiten afirmar que sus lenguas, durante la enseñanza de la ecuación cuadrática, coinciden en la alternancia de usos semánticos determinados e incompletos de verbos relacionales. Dada la naturaleza del objeto matemático, la completitud semántica de este tipo de verbos, mediante lexicalización de argumentos, es de gran importancia. Si bien para formas como comparar y agrupar se acaban significando las entidades que se relacionan, el criterio de relación y la finalidad, simplificar, transformar y cambiar permanecen matemáticamente indeterminadas en las respectivas sesiones de clase. A pesar de que nuestros resultados no son extrapolables a la caracterización de la lengua de la enseñanza en otras clases, es razonable pensar que el fenómeno de alternancia documentado es un rasgo común en el habla del profesor.

Los fenómenos individuales de completitud e incompletitud semántica no son opuestos ni deben interpretarse como extremos realizables en la lengua de la enseñanza en clase. Ambos extremos son abstracciones útiles para expresar la idea de que las formas de la lengua no siempre funcionan al servicio de un mismo registro. De hecho, la existencia misma de una palabra en el sistema lingüístico es incompatible con la indeterminación total de su significado en cualquier situación inmediata y contexto de cultura. La indeterminación es siempre parcial y limitada al potencial de significados en torno a una expresión lingüística, del mismo modo que la determinación permanente del campo semántico no es posible. Excluyendo ambos extremos, por tanto, la lengua del profesor de matemáticas en clase puede estar determinada –en forma y función– dentro del registro matemático en mayor o menor medida. Cuanto más determinada esté en esta dirección, más se facilitará la apropiación fluida del registro matemático –sus formas y funciones– que se enseña.

Para apoyar la producción de significados matemáticamente relevantes en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, hay complementos sintácticos capaces de restringir el potencial semántico de la lengua en uso. El recurso de los soportes lingüísticos matemáticamente relevantes, sin embargo, no es trivial. La lengua actúa bajo un principio de economía que es de difícil regulación. Si se expresan siempre y en su totalidad los argumentos relativos a un verbo, se corre el riesgo de obstaculizar la comunicación con exceso o redundancia de significados. Por otra parte, si se eliden algunos de los argumentos para algunos de los verbos, se corre el riesgo de no proporcionar significados necesarios para situar la comunicación en un cierto registro. Según como se resuelva el dilema a cada momento, la lengua funcionará pragmáticamente con unas u otras prioridades. Desde la perspectiva del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, esta es una reflexión importante. La reflexión sobre la determinación necesariamente discontinua de la lengua del profesor en el registro matemático es un paso previo a la planificación selectiva de soportes lingüísticos matemáticamente relevantes en la enseñanza de contenidos matemáticos. No hay, sin embargo, reglas ni respuestas generales que sirvan para contenidos matemáticos específicos y que resuelvan la enseñanza de estos contenidos para cualquier situación y contexto.

La literatura del área ha identificado y documentado dificultades epistémicas en la comprensión de la ecuación cuadrática como estructura y clase de equivalencia. Es razonable pensar que la elisión lingüística de argumentos sobre sentido estructural y relaciones de equivalencia no ayuda a superar estas dificultades. Al respecto y para situaciones de introducción al concepto en el contexto escolar de dominio del trabajo procedimental-operativo (Castro, 2012), el refuerzo sintáctico de los argumentos asociados a ciertos verbos relacionales es algo planificable y susceptible de ser incorporado en los programas de formación del profesorado de matemáticas. Los distintos soportes lingüísticos que serán matemáticamente relevantes en cada ocasión tendrán que ver con las características epistémicas del concepto. Así, en Prediger y Wessel (2013) por ejemplo, se proponen soportes particulares para el concepto de fracción y su significado como operador en el registro matemático. En ese estudio, el foco de las propuestas de mejora en la lengua del profesor en clase no son los verbos relacionales sino un tipo de sustantivos con una carga particular en el sistema lingüístico del alemán. A medida que se amplíe la lista de resultados centrados en contenidos matemáticos del currículo, estaremos más cerca de poner a disposición del profesorado de matemáticas un cuerpo de conocimientos que permita abordar una aproximación profunda y formativa a la lengua de la enseñanza como recurso pedagógico y didáctico.

Referencias

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M. y Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221-247.

Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 10*(2), 161-197.

Callejo, M. L. (2015). Aprender (a enseñar) matemáticas: Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. En N. Planas (Coord.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 93-112). Barcelona: Graó.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM, 43*(6-7), 915-926.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Granada: SEIEM.

García, F. J. (Coord.) (2018). Seminario 'International perspectives on design-oriented research in mathematics education'. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 82-109). Gijón: SEIEM.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotics: The social interpretation of language and meaning*. Baltimore, EE.UU.: University Press.

Moschkovich, J. N. (2015). Scaffolding student participation in mathematical practices. *ZDM, 47*(7), 1067-1078.

Pimm, D. (2018). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. Londres, Reino Unido: Routledge (Revivals).

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor. ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N., Chico, J., García-Honrado, I. y Arnal-Bailera, A. (2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En M. T. González, E. Badillo, N. Climent y C. Fernández (Eds.), *Educación matemática y formación del profesorado*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: ejemplos, explicaciones y coherencia local. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres, Reino Unido: Routledge.

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, DOI: 10.1007/s13394-019-00258-1.

Prediger, S. y Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions. Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal, 25*(3), 435-456.

Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 261-282). Valladolid: SEIEM.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-584). Ciudad Real: SEIEM.

[xxxviii] Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR.

ACTIVIDAD *SCAFFOLDING* EN GEOMETRÍA PARA DESARROLLAR HABILIDADES DE ARGUMENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Scaffolding task in geometry to develop argumentation and classification skills in pre-service early childhood education teachers

Ricart, M.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Estrada, A.[a]

[a]Universidad de Lleida, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

*El objetivo de este trabajo es explorar el conocimiento didáctico matemático de 94 futuros maestros de Educación Infantil, así como poner de manifiesto el potencial de la herramienta utilizada: la tarea WODB (*Which One Doesn't Belong*). Para ello, se analizan los argumentos de las respuestas de los estudiantes universitarios a una tarea WODB de geometría 3D, así como los errores que cometen. Los resultados indican que los futuros maestros no tienen bien adquiridos los significados de algunos conceptos geométricos elementales, sus argumentos se basan más bien en aspectos perceptivos e, incluso, tienen dificultades para clasificar. Así, su conocimiento didáctico-matemático no es suficiente para llevar a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en Infantil. La tarea WODB no solo se revela como un scaffolding para desarrollar conexiones y argumentación, también para identificar niveles de Van Hiele y progresar en ellos.*

Palabras clave: *conocimiento del profesor, argumentación, geometría, educación infantil.*

Abstract

The aim of this work is to assess the mathematical didactical knowledge of 94 pre-service Early Childhood Education teachers, as well as to show the potential of the used tool: the WODB (Which One Doesn't Belong) task. *For this, the arguments of the answers of the university students to a WODB task of 3D geometry are analysed, as well as the errors they commit. The results show that future teachers do not fully understand the meanings of some elementary concepts of geometry, their arguments are rather based on perceptive aspects and even, they have difficulty in classifying. Consequently, his didactical-mathematical knowledge is not enough to carry out teaching and learning processes of geometry in Early Childhood Education. It is concluded that the WODB is not only revealed as a scaffolding for the development of connections and argumentation, but also to identify levels of Van Hiele and progress through them.*

Keywords: *teacher knowledge, argumentation, geometry, early childhood education.*

INTRODUCCIÓN

Las actividades WODB (*Which One Doesn't Belong*), conocidas también como "cuál es el que no encaja" o "quién es el intruso" están despertando el interés en los docentes, como señalan algunos autores (Larsen, 2016, 2017; Larsen y Liljedahl, 2017). Su utilización como recurso didáctico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas parte, posiblemente, del trabajo de Danielson (2016), cuyo libro está dedicado a la geometría. Las WODB consisten en presentar una colección de cuatro objetos y preguntar por aquel que no encaja. Es decir, se trata de señalar cuál presenta una cualidad o una propiedad que lo diferencia de los otros tres. Ahora bien, en el caso de los que se proponen últimamente en matemáticas, como los del mencionado libro de Danielson o los que se pueden ver

Ricart, M., Beltrán-Pellicer, P. y Estrada, A. (2019). Actividad *scaffolding* en geometría para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de Educación Infantil. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 503-512). Valladolid: SEIEM.

en el sitio web www.wodb.ca, todos y cada uno de los elementos del WODB presentan una cualidad o propiedad única. Por lo tanto, el objetivo de la actividad consiste en aportar al menos una razón para cada uno de los elementos y expresarla por escrito de forma precisa.

En consecuencia, los sistemas de prácticas que moviliza son esencialmente discursivos y, como veremos, en el caso de la geometría permiten evaluar el nivel de razonamiento de Van Hiele (1986) de los participantes, así como tipificar sus errores y dificultades en los modelos de clasificación de Radatz (1979), Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1987) y Astolfi (1999). Incluso, posibilitan matizar los propios de la geometría espacial, hecho que consideramos importante y necesario para llevar a cabo acciones docentes más precisas orientadas a la superación de éstos, pues los modelos anteriores engloban errores y dificultades de los estudiantes en las matemáticas en general (Bocco y Canter, 2010; Franchi y Hernández, 2004; Tovar y Mayorga, 2015).

En definitiva, presentamos una propuesta de utilización de las tareas WODB como herramienta para desarrollar el proceso matemático de argumentación y comunicación en los futuros maestros de Educación Infantil, así como para explorar su conocimiento didáctico matemático.

Este trabajo se estructura en cuatro apartados: el marco teórico, en el que se enmarcan las WODB dentro de las tareas de geometría; la metodología, que es mixta con un diseño exploratorio e interpretativo, donde se contextualiza la experiencia en la que se usó la tarea WODB; el apartado de análisis y discusión, en el que se categorizan los argumentos de los participantes y, en particular, las respuestas incorrectas; y, finalmente, un apartado donde se presentan las conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Para Duval (1999), la argumentación es una justificación de una afirmación o de un enunciado que requiere de la producción de razones y que suele responder a preguntas del tipo "¿por qué?". A su vez, determina dos criterios para decidir sobre la validez de un argumento: su pertinencia, que se refiere a que su contenido esté relacionado semánticamente con la afirmación a justificar, y la fuerza, que mide tanto su posibilidad de réplica como su valor epistémico. El trabajo de la argumentación en la geometría requiere del proceso de razonamiento, que junto con el de visualización y de construcción con herramientas son los tres tipos de procesos cognitivos implicados en las tareas geométricas (Duval, 1998).

Dentro de las SEIEM se han presentado varios trabajos enfocados al tipo de argumento de los estudiantes ante tareas de geometría. Destacamos el de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017), que caracterizan la argumentación de niños de tres a cinco años a partir de características propias de cada nivel de Van Hiele y del tipo de aprehensión de Duval (1998): perceptiva, discursiva u operativa. Bernabeu, Llinares y Moreno (2017) también determinan la argumentación de estudiantes de primaria teniendo en cuenta el tipo de aprehensión. Larios, Pino-Fan y González (2017) hacen lo propio en la secundaria con el modelo de Flores (2007).

Realmente, las tareas WODB son similares a alguna de las propuestas por Gutiérrez y Jaime (2012) para la mejora de la calidad de las imágenes de conceptos geométricos que se forman los estudiantes. Estos autores sugieren comparar diferentes ejemplos para identificar sus diferencias más significativas y poner así de manifiesto la existencia de una propiedad que tiene un ejemplo y no otro. En la misma línea, Patkin (2015) recomienda actividades de discriminación de atributos críticos de los conceptos a partir de series de ejemplos y contraejemplos, pues ayudan a la adquisición de los conceptos de la geometría tridimensional y, a su vez, ponen en evidencia errores y dificultades de los estudiantes.

Asimismo, las tareas de clasificación están presentes en las unidades didácticas de enseñanza de los sólidos basadas en los niveles del modelo de Van Hiele (1986) para el desarrollo del razonamiento geométrico (Guillén, 1997). De hecho, se considera que la clasificación es un proceso matemático intrínseco del razonamiento lógico y, en consecuencia, los criterios considerados en las clasificaciones de sólidos son indicadores del nivel de razonamiento de Van Hiele en que están los estudiantes. Por ejemplo, considerar semejanzas o diferencias físicas globales entre los sólidos es una característica del nivel 1; hacerlo a partir de razonamientos empíricos es del nivel 2, y realizar clasificaciones lógicas a partir de una propiedad conocida es del nivel 3 (Guillén, 2004; Gutiérrez, 2012).

Por otro lado, diversos marcos teóricos en educación matemática han propuesto modelos para caracterizar el conocimiento y las competencias de los docentes. Por ejemplo, desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) ha surgido el modelo de categorías para el conocimiento didáctico matemático (Pino-Fan y Godino, 2015) y las competencias profesionales del docente de matemáticas: el CCDM (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Font, 2018; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). En ese sentido, proponemos la tarea WODB para contenidos concretos, como la geometría, a modo de herramienta para evaluar el conocimiento común del contenido y el ampliado, que según el CCDM son, respectivamente, aquel que se considera suficiente para resolver las actividades curriculares de un nivel educativo concreto y aquel que permite a los docentes proponer nuevos retos y relacionar el objeto matemático estudiado con otras nociones matemáticas. Asimismo, la naturaleza de la tarea tanto de fomentar respuestas con diversas justificaciones válidas, como la de requerir comunicación escrita, permite evaluar, en parte, el conocimiento especializado del CCDM y analizar otros aspectos del conocimiento didáctico matemático en el plano lingüístico. En esta línea, destacamos el trabajo de Gonzato, Godino, Contreras y Fernández (2013) en la formación de maestros, en el que se explora el conocimiento especializado a partir de las justificaciones dadas en unas tareas sobre visualización de objetos 3D.

METODOLOGÍA

La metodología tiene un enfoque mixto, con un diseño exploratorio e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). La experiencia se realizó con 94 estudiantes del tercer curso del grado de Educación Infantil de una universidad española dentro de la asignatura "Aprendizaje de las Matemáticas" en la que se trabajan tanto contenidos matemáticos como aspectos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la etapa de cero a seis años. La tarea WODB a partir de la cual se presenta este estudio (Figura 1) fue diseñada por el profesorado que imparte la asignatura con la intención didáctica de desarrollar la competencia matemática de los futuros maestros asociada al proceso matemático de argumentación y conexiones, así como conocer explícitamente el vocabulario matemático referente a la geometría adquirido por los estudiantes. Fue validada por profesorado experto en didáctica de la geometría.

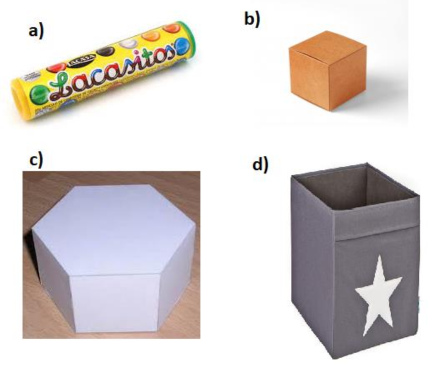


Figura 1. Actividad WODB de geometría.

Los participantes ya habían resuelto una tarea de este tipo con anterioridad dentro de la asignatura pero, en ese caso, sobre contenidos de probabilidad, por lo que la tarea WODB les era familiar. Para la recogida de datos se repartió a cada estudiante una hoja en blanco con las cuatro imágenes y se les pedía que identificaran el intruso.

Siguiendo la dinámica de trabajo con tareas WODB, se dejaron 10 minutos para pensar en silencio e individualmente y responder debajo de las imágenes, en la misma hoja del enunciado. La puesta en común de las razones y la institucionalización de ellas se hizo en una sesión posterior después de que el profesor hubiese leído las respuestas de los estudiantes.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las respuestas de los estudiantes se han categorizado en cuatro grupos (Tabla 1), teniendo en cuenta el contenido matemático del argumento y de si hay muestras, o no, de clasificación de las situaciones: argumento correcto, argumento parcialmente correcto, respuesta incorrecta y, por último, en blanco, donde se contabilizan los casos en que no se ha hallado ninguna razón para una situación determinada. A continuación, detallamos las tres primeras categorías.

Tabla 1. Porcentaje de respuestas según tipo de argumento y situación

	Situación a	*Situación b*	*Situación c*	*Situación d*
Argumento correcto	78,72%	2,13%	4,26%	45,74%
Argumento parcialmente correcto	4,26%	24,47%	11,70%	8,51%
Respuesta incorrecta	14,89%	56,38%	60,64%	45,74%
En blanco	2,13%	17,02%	23,40%	0%

Argumento correcto

El argumento correcto, que es fuerte y pertinente, expresa correctamente una idea matemática cierta, que es una posible razón de intruso. Un ejemplo para la situación *a* es que "es el único que está formado por una superficie curva", pues los demás están formados solamente por superficies planas. Por lo que respecta a los argumentos correctos de los futuros maestros, estos se basan, mayoritariamente, en el concepto de cilindro o de superficie, aunque también hay algunos que se basan en el tipo de línea. En concreto, aproximadamente, un 41,5% de argumentos correctos expresan que la razón de la situación *a* es que es el único cilindro y, además, en general, la completan con una característica intrínseca del sólido o con un aspecto relacionado con los conocimientos didácticos estudiados a partir de la experimentación, como que es el único que puede rodar. Este tipo de argumento es empírico (Larios et al., 2017) y, por tanto, indica un nivel 2 de Van Hiele (Guillén, 2004; Gutiérrez, 2012). Es necesario precisar que se admite como argumento correcto que digan que es el único cilindro porque en las demás situaciones los objetos tienen forma de prisma, pero, en la situación *b* y en la *c*, no se admite como argumento correcto razones del tipo "es el único cubo" o "el único prisma hexagonal", pues no hay una categoría que, en ambos casos, englobe las otras tres. En tal situación, el argumento se ha considerado parcialmente correcto.

Un ejemplo para la situación *b* es que "es el único que su desarrollo plano está compuesto por un único tipo de figura plana (el cuadrado)", mientras que los desarrollos de los demás lo están por dos de diferentes: círculo y rectángulo en el primer caso, hexágono y rectángulo para el prisma hexagonal, y cuadrado y rectángulo en la última situación. Aunque ninguno de los futuros maestros ha presentado esta razón, ha habido respuestas correctas con argumentos también empíricos que, claramente, se han construido a partir de las actividades manipulativas de la asignatura: "es el único que al ponerlo en el retroproyector se visualiza siempre la misma figura" o "es el único cuyo desarrollo plano es un hexaminó".

Un ejemplo de posible argumento correcto para la situación *c* es que "es el único que su desarrollo plano está compuesto por una figura plana (el hexágono) que no se debe reconocer por su nombre en Educación Infantil", pues solamente deben identificar los círculos, los triángulos y los cuadriláteros. Un 4,26% de los futuros maestros ha hallado dicha razón.

Finalmente, un ejemplo para la situación *d* es que "es la única superficie abierta", pues los demás son cuerpos geométricos. Casi la mitad de los futuros maestros han acertado en ver que era la única superficie abierta, pero no todos han matizado que el resto son cuerpos geométricos. El 8,51% de las respuestas se refieren a la propiedad de abierto, pero no matizan si es o no es una superficie, simplemente lo justifican diciendo que está abierta. En este caso, se considera una respuesta parcialmente correcta.

Parcialmente correcto

El argumento parcialmente correcto es poco pertinente o no es especialmente fuerte. Este expresa una razón matemática parcialmente correcta que puede deberse a una falta de precisión en el lenguaje matemático (poca pertinencia), a que, aunque es cierto que la característica hallada es única de ese objeto, no hay una categoría clara que englobe las otras situaciones (poca fuerza) o a que compara todas las situaciones, pero no llega a una clasificación, pues se queda en una identificación del tipo "es el que más … tiene" (poca fuerza).

Los argumentos parcialmente correctos de la situación *a* se refieren, de manera intuitiva, a la superficie curva con expresiones del tipo "forma redonda" y coinciden con algunos de los detectados en Berciano et al. (2017) del tipo de aprehensión perceptiva y nivel 1 de Van Hiele.

Por lo que se refiere a los argumentos parcialmente correctos en *b*, además del argumento "es el único cubo", afirman que "es el único con todas las caras iguales". De este enunciado, como mínimo, se deduce que las caras de las demás figuras no son todas iguales y que, por tanto, el cilindro tiene caras. Para justificar que la razón dada por los estudiantes se considera parcialmente correcta citamos a Godino y Ruiz (2002):

> Un poliedro es el sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas. Cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro […]. (p. 482)
>
> Un cilindro es el sólido cuya superficie se genera trasladando los puntos de una región cerrada simple contenida en un plano hacia un plano paralelo. […] Los puntos que unen puntos correspondientes en las curvas que limitan las bases forman la superficie lateral. (p. 488)

En la línea de los autores anteriores, asumimos que el cilindro no tiene caras y que, por tanto, no hay clasificación posible relacionada con la razón de tener todas las caras iguales.

En cuanto a las respuestas parcialmente correctas de *c*, hay de tres tipos: "es el único prisma hexagonal", "es el único que tiene 8 caras" o "es el que más caras tiene". En los dos primeros casos se presenta un argumento matemático cierto, pero la clasificación en un mismo conjunto de las otras tres situaciones se limita a no ser un prisma hexagonal o a no tener 8 caras.

Para la situación *d*, un ejemplo de respuesta parcialmente correcta es la citada anteriormente al comentar los argumentos correctos.

Pensamos que los porcentajes de argumentos correctos y parcialmente correctos para las situaciones *b* y *c* son bajos porque la razón matemática de intruso asociada a ellas implica habilidades y procesos fundamentales de visualización espacial, como examinar los posibles desarrollos del sólido (Gonzato, Godino y Neto, 2011). De hecho, Radatz (1979) identifica el uso de imágenes espaciales como una dificultad para los estudiantes.

Respuesta incorrecta

Es aquella que expresa una idea equivocada, muestra errores conceptuales y/o no compara matemáticamente las situaciones, de manera que no clasifica. Se han observado diferentes patrones dentro de este tipo de respuesta: los que expresan una idea matemática que no es cierta, aquellos que describen matemáticamente el objeto según su forma, los que se basan en la identificación de una característica no inherente del objeto y los que son absurdos, pues no tienen ningún sentido. Asimismo, en cada tipo de respuesta anterior de los estudiantes, se identifican diferentes niveles de adquisición de vocabulario matemático (Tabla 2): uso adecuado, que se refiere a una comprensión adecuada del significado de los conceptos geométricos utilizados; confusión de términos, que alude a que, claramente, se identifica un elemento matemático con el nombre de otro elemento; uso no adecuado, que engloba aquellas razones en que se presentan conceptos inexistentes inventados a partir de juntar palabras geométricas y/o muestran carencias en el significado de los conceptos básicos geométricos y, finalmente, hay una categoría para las respuestas en las que no se identifica el uso de semántica propia de la geometría. Estas subcategorías de respuesta incorrecta permiten identificar errores que cometen los estudiantes en el ámbito específico de la geometría, siendo algunos de ellos casos particulares de los tipos de error definidos en los modelos de errores en matemáticas de Radatz (1979), Movshovitz-Hadar et al. (1987) o Astolfi (1999).

- En las respuestas de argumento incorrecto y uso adecuado, el estudiante conoce el significado de los conceptos matemáticos básicos de la geometría, pero la razón que presenta, centrada en una propiedad o característica matemática, no se cumple para el objeto o bien, se cumple para ese caso, pero también para alguna de las otras situaciones, lo que hace que la afirmación "es el único que…" no sea verdad. En esta subcategoría destacamos la respuesta para *b* "el cubo es el único que al seccionarlo sale siempre la misma figura plana" porque el estudiante demuestra una habilidad visual limitada. Los errores de esta subcategoría se corresponden, en general, con el de inferencias lógicamente no válidas de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y, además, en algunos casos, con el de dificultades para obtener información espacial de Radatz (1979).

- En las respuestas de argumento incorrecto y confusión de términos matemáticos, el estudiante presenta una razón centrada en una característica o propiedad matemática, pero denomina un elemento matemático de forma clara con el nombre de otro. El error más común que se ha observado, sobre todo en las opciones *b* y *c*, es el de referirse a las caras del prisma como lados del prisma. También ha sido frecuente la alusión al prisma hexagonal como hexágono. Según Guillén (1997), este error de cambiar términos del plano por términos del espacio y al revés, es usual cuando los estudiantes razonan en un nivel 1 de Van Hiele. Este aspecto es un indicador del bajo nivel de conocimiento común del contenido de los futuros maestros.

- En argumento incorrecto y uso no adecuado predominan las razones basadas en un concepto inventado a partir de juntar conceptos geométricos existentes, lo que lleva a una contradicción y denota una falta de conocimiento de significado matemáticos. Algunos ejemplos de conceptos inventados son: "prisma circular", "prisma cuadrilátero", "cuerpo abierto" o "cuerpo plano". Asimismo, hay otro tipo de argumentos que predominan en las situaciones *b, c* y *d*. Son argumentos que utilizan las nociones topológicas de dentro y fuera para aludir al volumen: "es el único que podemos poner cosas dentro", "es el único en el que podemos entrar" o, nuevamente, son argumentos que muestran habilidades de visualización espacial: "al desplegarlo queda abierto" o "es el único que tiene simetría: se ve igual lo mires por donde lo mires", refiriéndose al cubo.

- Respecto a estas dos últimas subcategorías descritas, pensamos que la confusión de términos podría considerarse una subcategoría de la de uso no adecuado porque, de hecho, hay una carencia en el significado de los términos usados. Asimismo, para Larios et al. (2017) son ambos argumentos simbólicos y, además, se corresponden con los mismos tipos de error de los modelos de Radatz (1979), Movshovitz-Hadar et al. (1987) y Astolfi (1999): dificultad del lenguaje, definiciones deformadas y resultado de concepciones alternativas, respectivamente. No obstante, dado que esta confusión está muy focalizada en unos términos en concreto y el porcentaje de respuestas es considerable, se establecen como dos categorías diferenciadas.

- En la subcategoría de descripción del objeto, el estudiante se limita a describir el objeto a partir de su forma pero no hace la acción de comparar las situaciones, por lo que no clasifica y, en consecuencia, la respuesta no es un argumento. Este error puede ser causado por la complejidad propia del contenido (Astolfi, 1999). Asimismo, en algunos casos, claramente identifica un elemento geométrico con el nombre de otro (confusión de términos) o, directamente, se inventa conceptos (uso no adecuado). En estos casos, además de ser causado por la dificultad del contenido también coincide con un error causado por la dificultad del lenguaje (Radatz, 1979), por definiciones deformadas (Movshovitz-Hadar et al., 1987) o como resultado de concepciones alternativas (Astolfi, 1999).
- La tipología de respuestas de característica no inherente al objeto encaja con el error de operaciones intelectuales implicadas de Astolfi (1999). Comprende aquellos argumentos ligados a validaciones perceptivas, con un predominio de la componente visual (Gonzato et al., 2013), es decir, se basan en una propiedad visual de la imagen o en una característica figural que resulta irrelevante (Larios et al., 2017). Por ejemplo, en el caso *b* afirman que es el intruso porque “es el más pequeño” y en el *c* se fijan en la perspectiva de la foto: “es el único que no está inclinado”. En la situación *c* también han argumentado que es el intruso porque “es el que más capacidad tiene” (uso adecuado). Según Gutiérrez y Jaime (1995) esta tipología señala un razonamiento geométrico que no es lo suficientemente elevado.
- Finalmente, la subcategoría de absurdo engloba las respuestas que contienen argumentos que no tienen ningún sentido lógico. Algunos ejemplos son: “todos son objetos y este es una figura” o “es una superficie, pero está montada como si fuera un cuerpo (cubo)” para el *b*; “podemos preguntar un razonamiento lógico: ¿dónde está la caja respecto al suelo? Encima.” para el *c*; “es el único que está destapado” para el *d*. Los errores de esta subcategoría pueden ser debidos tanto a la comprensión de las instrucciones como a las operaciones intelectuales implicadas (Astolfi, 1999).

Tabla 2. Porcentaje de respuestas incorrectas por categoría y situación según vocabulario

	Uso adecuado	Confusión términos matemáticos	Uso no adecuado	No muestra vocabulario específicamente matemático
Argumento incorrecto	0% a 2,13% b 7,45% c 6,38% d	3,19% a 26,6% b 15,96% c 1,06% d	6,38% a 7,45% b 14,89% c 27,66% d	0% a 0% b 0% c 0% d
Descripción del objeto	3,19% a 2,13% b 4,26% c 4,26% d	0% a 0% b 2,13% c 0% d	0% a 0% b 4,26% c 1,06% d	0% a 0% b 0% c 0% d
Característica no inherente	0% a 0% b 1,06% c 0% d	0% a 0% b 0% c 0% d	0% a 0% b 0% c 0% d	0% a 9,57% b 7,45% c 0% d

Absurdo	0% a 0% b 0% c 0% d	0% a 0% b 0% c 0% d	2,13% a 4,26% b 4,26% c 1,06% d	0% a 4,26% b 0% c 2,13% d

Es necesario destacar que, aunque los estudiantes saben que puede haber más de una razón para cada situación, en la mayoría de los casos los futuros maestros solo presentan una o ninguna. Esto apunta a que no son capaces de proporcionar diversas justificaciones, lo que se traduce en que su conocimiento especializado es bajo. En el caso particular de la situación *a*, como ya se ha dicho, matizan o refuerzan con una explicación que podría considerarse otro argumento, pero la estructura y el fondo de la oración hace pensar que más bien se debe a una falta de confianza en sus propios conocimientos matemáticos, lo que denota una baja competencia cognitiva (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011).

CONCLUSIONES

En primer lugar, subrayamos el potencial de la tarea WODB para los docentes, pues permite fácilmente captar los significados personales logrados, así como focalizar errores y dificultades del alumnado. Asimismo, a los estudiantes les beneficia de cara al desarrollo de las conexiones y la argumentación, por lo que podemos catalogar la tarea WODB como una herramienta matemática *scaffolding*, pues estos no argumentan si no se les incita a ello (Albano e Iacono, 2019).

En segundo lugar, queremos resaltar que, aunque los futuros maestros están familiarizados con el vocabulario propio de la geometría, no dominan los significados de los conceptos básicos. Esto puede deberse a los métodos de enseñanza de profesores y libros de texto de los conceptos elementales de la geometría, basados, tal y como señalan Gutiérrez y Jaime (2012), en la memorización de definiciones y de poca eficacia a la hora de resolver problemas.

A continuación, destacamos los errores y dificultades particulares de la geometría de los sólidos hallados en este trabajo y sobre los cuales es necesario seguir trabajando: a) de significados: tienen un conocimiento limitado de las definiciones de los conceptos básicos previos o hacen una ampliación errónea de objetos mentales, pues cambian términos de geometría tridimensional por términos de la geometría plana; b) de habilidades de visualización espacial: presentan dificultades para desplegar mentalmente las figuras tridimensionales, solamente seccionan los cuerpos por un plano horizontal o vertical o hacen una ampliación limitada del concepto de simetría en las 3D y c) de clasificaciones básicas: hacen clasificaciones por cualidades no intrínsecas de los sólidos o, incluso, tienen dificultades para comparar.

En la línea de Seah (2015), alertamos que el conocimiento común, así como tampoco el conocimiento ampliado del contenido de los futuros maestros de Educación Infantil, pueden no ser suficientes para llevar a cabo procesos óptimos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues la búsqueda de semejanzas y diferencias es un contenido fundamental del currículo de tres a seis años y ellos mismos no las hallan en los sólidos. Por lo que se refiere al especializado, la perspectiva perceptual domina a aspectos conceptuales (Bernabeu et al., 2017; Gonzato et al., 2013; Larios et al., 2017) y, por tanto, los razonamientos de los futuros maestros no son los deseables. Dado que este trabajo nos ha proporcionado información sobre los niveles de Van Hiele de los futuros maestros, en líneas futuras de investigación nos proponemos diseñar una colección de tareas WODB propias para cada nivel y, así, poder identificar niveles de razonamiento geométrico en los estudiantes y progresar en ellos.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el grupo S36_17D - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Albano, G. e Iacono, U. D. (2019). A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *16*(4), 1-12.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Diada Editora.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Bocco, M. y Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de Educación, 53*(2), 1-13.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book*. Portland, EE.UU.: Stenhouse Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp.163-174). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Flores, A. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática, 19*(1), 63-98.

Font, V. (2018). Competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. Un modelo basado en el enfoque ontosemiótico. *ALME, 31*(1), 749-756.

Franchi, L. y Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere, 8*(24), 63-71.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, Á. y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 23*(3), 5-37.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125.

Gutiérrez, Á. (2012). Investigar es evolucionar: un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 43-59). Barcelona: Graó.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32*, 55-70.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª ed.). Ciudad de México, México: McGrawHill.

Larios, V., Pino-Fan, L. R. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *AIEM, 12*, 39-57.

Larsen, J. (2016). Negotiating meaning: A case of teachers discussing mathematical abstraction in the blogosphere. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 331–338). Tucson, EE.UU.: The University of Arizona.

Larsen, J. (2017). What mathematics teachers seek when approaching professional learning through social media. En V. Guyevskey y A. Rouleau (Eds.), *MEDS-C 2017. Proceedings of the 12th annual Mathematics Education Doctoral Students Conference* (pp. 66–73). Burnaby, Canadá: Simon Fraser University.

Larsen, J. y Liljedahl, P. (2017). Exploring generative moments of interaction between mathematics teachers on social media. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 129-136). Singapur: PME.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavski, O. e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Patkin, D. (2015). Various ways of inculcating new solid geometry concepts. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 3*(2), 140-154.

Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.

Seah, R. (2015). Understanding geometric ideas: Pre-Service primary teachers' knowledge as a basis for teaching. En M. Marshman, V. Geiger y A. Bennison (Eds.), *Mathematics education in the margins. Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 571- 578). Sunshine Coast, Australia: MERGA.

Tovar, E. D. y Mayorga, L. (2015). Errores en el aprendizaje de figuras y cuerpos geométricos en educación media general. *Revista Ciencias de la Educación, 25*(45), 174-186.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Londres, Reino Unido: Academic Press.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO CERO, EN ALUMNOS DE ESCUELA ELEMENTAL

Learning difficulties of the number zero, in elementary school students

Rodríguez, M. L.[a], Gómez, B.[b] y Filloy, E.[a]

[a]Cinvestav – IPN, [b]Universitat de València

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo identificar las dificultades que tienen los niños para construir los números naturales, al trabajar con un modelo de enseñanza diseñado con base en el modelo formal matemático de von Neumann. En este reporte, la atención se centra en las dificultades que tienen los niños para la construcción del número cero, partiendo de que en matemática educativa las dificultades de aprender matemáticas están en las matemáticas mismas. Los Modelos Teóricos Locales y sus cuatro componentes son el marco teórico y metodológico, partiendo de la observación de la experiencia empírica: Modelo Formal (von Neumann); Modelo de Cognición: procesos para pasar de la acción a la operación a través de la asimilación; Modelo de Comunicación: procesos de producción de sentido y construcción de significado de las actividades que se les proponen; Modelo de Enseñanza: secuencias de actividades diseñadas con base en el modelo formal.

Palabras clave: *Dificultades, construcción del número cero, Modelo Formal, Modelo de Enseñanza.*

Abstract

This research aims to identify the difficulties that children have in constructing natural numbers, by working with a teaching model designed based on von Neumann's mathematical formal model. In this report, the focus is on the difficulties that children have in the construction of the number zero, based on the fact that in educational mathematics the difficulties of learning mathematics are in mathematics itself. Theoretical Local Models and its four components are the theoretical framework and the methodology, starting from the observation of the empirical experience: Formal Model (von Neumann); Cognition model: processes to move from action to operation through assimilation; Communication Model: processes of meaning production and construction of meaning of the proposed activities; Teaching Model: sequences of activities designed based on the formal model.

Keywords: *Difficulties, Zero number construction, Formal Model, Teaching Model.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en matemática educativa sigue preocupada por las dificultades que tienen los niños para aprender los números en un proceso que les llevarán a comprender y construir las estructuras aritméticas y que servirán de base para desarrollar un pensamiento matemático. Se considera que, en gran parte, estas dificultades son debidas a factores contextuales (familiar, social, cultural y escolar) que de manera directa o indirecta promueven el aprendizaje de los números con actividades relacionadas con el conteo oral y escrito, con ciertas carencias conceptuales.

En la Educación Primaria de México (Secretaría de Educación Pública, 2011), el tratamiento de los números se enfoca en el predominio del uso de la cardinalidad, y sólo hay un contenido temático referente al sentido y uso de la ordinalidad, mismo que se traduce en dos lecciones del libro de texto oficial denominado “Desafíos Matemáticos” de primer grado (Secretaría de Educación Pública, 2015). Este hecho hace que los niños aprendan los números con desfases o deficiencias

Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E. (2019). Dificultades en el aprendizaje del número cero, en alumnos de escuela elemental. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 513-522). Valladolid: SEIEM.

conceptuales relacionadas con la ordinalidad y el cero. Esto va acompañado de prácticas de enseñanza centradas en la memorización, mecanización y ejercitación de secuencias numéricas orales y escritas, así como el uso de operaciones aritméticas a través de los algoritmos elementales, descuidándose las actividades orientadas a la construcción conceptual de los números, y con una falta de tratamiento del cero como número, que se usa sin explicación en el inicio de secuencias numéricas o como cifra para representar números de más de un dígito.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación que se ha venido realizando desde el 2016 en la Ciudad de México, con alumnos de primero a cuarto grado de Educación Primaria, está centrada en estudiar las dificultades que se observan en los niños al trabajar con un modelo de enseñanza con base en una estructura matemática formal para la construcción de los números naturales y que pueda servir de apoyo para la construcción del pensamiento aritmético.

La estructura aritmética que se propone se basa en el modelo de von Neumann “definition of ordinals” (en lo sucesivo, modelo formal de von Neumann), el cual recupera los aportes de la teoría de conjuntos de Cantor y los axiomas de Peano. De manera natural se establece el orden a partir de la construcción del primer número (cero), e iterando la unidad para construir el sucesor.

La discusión Cantor – Peano sobre la construcción de los números naturales no tiene sentido para esta investigación, porque en la construcción del número desde el punto de vista conjuntista de Cantor (1845 -1918) no hay orden. Dicho orden se construye a partir de las relaciones entre la cardinalidad de los conjuntos, provocando que el contar sea un proceso complejo, los números naturales se construyen separados unos de otros y no hay continuidad; mientras que en la construcción de los números en la perspectiva ordinal de Peano (1857 – 1932), se propone la axiomatización de los números a partir de la construcción del primer elemento que precisa la idea del sucesor, pero no hay conjuntos.

En cambio, en la línea señalada por John von Neumann (1923 – 1957), estos números se construyen en un número finito de iteraciones a partir de la construcción del cero como número y como conjunto vacío, lo que además constituye un principio fundamental: es el único número que sumado o restado a cualquier número siempre lo deja igual. El orden se da de manera natural por la construcción, no se trata de una sucesión solamente.

Con estos referentes y con la finalidad de hacer matemática educativa en el global de esta investigación, se pretende analizar el problema de la enseñanza de los números naturales, incluido el cero, partiendo de que las dificultades de aprenderlos están en la matemática misma.

Pregunta y objetivos de la investigación

A tal fin, las preguntas generales que guían la investigación son:

- ¿Qué elementos deberán considerarse para el diseño de un modelo de enseñanza que permita trasladar el Modelo Formal de von Neumann a actividades concretas dirigidas a niños de 6 a 9 años?
- ¿Qué dificultades se pueden observar en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética cuando los niños trabajan la construcción de los números naturales a partir del modelo formal de von Neumann?

Por lo que respecta a la presente comunicación, esta segunda pregunta se particulariza en:

- ¿Qué dificultades se pueden observar en la construcción del cero como número, a partir del modelo formal de von Neumann?

Para responder a las preguntas de investigación se han planteado los siguientes objetivos:

- Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.
- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de Educación Primaria, en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursión; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

Este segundo objetivo se particulariza, a los efectos de esta comunicación, en:

- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de Educación Primaria para construir el número cero, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursión; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Con los aportes de los Modelos Teóricos Locales (en adelante, MTLs) (Filloy, Puig y Rojano, 2008), se estructura el Marco Teórico a partir de sus cuatro componentes:

- Modelo de Competencia Formal: estructura formal de von Neumann, para la construcción de los números naturales, incluyendo al cero como primer elemento de la construcción.
- Modelo Cognitivo: Procesos que se desarrollan para pasar de la acción a la operación, por medio de la asimilación, considerando la reversibilidad y transitividad que identificaron Piaget e Inhelder (1984) y las aportaciones de la teoría de la actividad, para realizar los procesos de significación (Galperin, 1976; Talizina, 2001), los cuales se van a utilizar para la construcción de la siguiente componente.
- Modelo de Comunicación: Producción de sentido y significación en la comunicación, apoyándose en los aportes de la semiótica de Peirce (1987) y la herramienta de los Sistemas Matemáticos de Signos (en adelante, SMS) en Filloy et al. (2008).
- Modelo de Enseñanza: Este diseño pretende trasladar el Modelo formal de von Neumann a secuencias de actividades lúdicas, con el uso de material concreto para la construcción de los números naturales.

Los MTLs usan la observación empírica como principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. La observación se desarrolla en dos momentos: a) observación experimental para realizar un diagnóstico con la participación de 3 grupos de 1º, 2º y 3º de tres escuelas primarias públicas de la Ciudad de México, con la finalidad de elegir a los niños que participarán en el estudio de casos y en la entrevista clínica; b) desarrollo de la experimentación, diseñando las categorías de análisis para finalmente rediseñar un Modelo de Enseñanza con base en el Modelo Formal.

Para este reporte, sólo se presenta el análisis de la sesión de construcción del número cero con el grupo de primer grado.

La metodología es de corte cualitativo y toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas cuando se implementan diferentes tipos de actividades, con la intención producir sentido de mensajes matemáticos y su decodificación. Es local porque se profundiza en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitiva, de enseñanza y de comunicación.

Modelo Formal: El número cero como punto de partida para la construcción en von Neumann

Para el diseño de este componente, se ha tomado como base la estructura matemática de von Neumann para la construcción de los números naturales, quien hace uso de la teoría de conjuntos (Cantor) y encapsula en la iteración los axiomas de Peano, con el Principio de inducción finita, donde todo número es construido a partir de un número finito de interacciones, empezando por el cero. La suma se da manera natural, es el sucesor (n + 1) y la resta es la operación contraria, es el antecesor (n – 1).

Otro de los atributos de este modelo es que presenta una lógica de construcción de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

Desde la perspectiva didáctica, en la enseñanza y el aprendizaje de los números en los primeros años de escolaridad de los niños, el número cero constituye una problemática pedagógica, pues curricularmente en el Plan y Programas de México (Secretaría de Educación Pública, 2011) no tiene un espacio para ser tratado conceptualmente. Pero, desde el punto de vista de los autores de este artículo, es una necesidad trabajarlo, para evitar conflictos con la construcción de los números naturales, comenzando con los significados de vacío, posicional y cifra. Esto puede ser pertinente para que los alumnos de manera eficiente puedan ir conceptualizando las nociones aritméticas e ir estableciendo el nexo con el álgebra. Se considera idóneo el modelo desarrollado por von Neumann porque empieza con el cero como conjunto vacío. En esta construcción, se van trabajando de manera natural las propiedades aritméticas en la construcción de los números naturales.

La construcción de von Neumann ha sido desarrollada por Hamilton y Landin (1961) usando definiciones matemáticas y probando los teoremas para la construcción de los números naturales a partir del cero como el primer número y, a partir de él, se construyen los sucesores, usando la iteración y la recursión. El "orden" se da por la misma construcción. Con el proceso de iteración las acciones se repiten una y otra vez (Choate, Devaney y Foster, 1999, p. IX) y con la recursión se podrá realizar el mismo procedimiento que se hizo para el primer elemento con todos los subsecuentes, es decir, el n+1 se obtiene directamente del paso n.

Entonces se tiene que: "Cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que lo preceden" (van Heijenoort, 1967, p. 347) lo que se puede representar por las siguientes definiciones: "Cero es el vacío; i. e., $0 = \varnothing$", se continúa con: $1=\{0\}=0\cup\{0\}$. De manera similar se construyen los números siguientes (Hamilton y Landin, 1961, p. 76):

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Cada uno de estos conjuntos está bien ordenado por la relación de pertenencia $\in$. El siguiente es el sucesor y se define como se indica en el párrafo siguiente.

El conjunto $x \cup\{x\}$ es el sucesor del conjunto x. Si y es un conjunto, y si hay un conjunto x tal que y es el sucesor de x, entonces y es un sucesor. Para cada conjunto x, el sucesor de x es x'.

Por lo tanto, $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$, etc.

Diseño e implementación del Modelo de Enseñanza

El Modelo de Enseñanza es una colección de textos, en donde se genera un intercambio de textos, modelando situaciones con lenguajes que van de concretos a abstractos para producir códigos de resolución (Filloy, 1999, p. 23). Para este fin se ha diseñado una secuencia de actividades concretas con base en el modelo de von Neumann, de acuerdo con la estructura desarrollada en Hamilton y Landin (1961, pp. 74-123). Se usan bolsas de plástico transparente como contenedores de los conjuntos, las cuales tienen una tira adherida de un color específico a uno de los costados de la bolsa (para el número cero es color amarillo). Se usa una calculadora simple, números de "fommy" (material usado en su elaboración) y otros objetos manipulables.

Con estas actividades se introduce a los niños en la construcción del número cero a partir de la noción de vacío, como el primer elemento de la secuencia numérica, usando para ello bolsas de hule transparente. Para dirigir las actividades, la investigadora (profesora) usa la pregunta como un recurso didáctico para orientar a los niños a reflexionar y argumentar sobre las condiciones de la bolsa sin tener algún contenido dentro, con la finalidad de que la relacionen con la palabra "vacío". Una vez que se ha logrado este acercamiento, se les pregunta si existe algún número para poder representarlo, así como sus usos en diferentes contextos. Se les propone presionar la tecla de color amarillo en la calculadora, en la que previamente las teclas de los números fueron tapadas con un color específico. Se les pregunta si lo conocen, dónde lo han visto y si lo han usado.

Una vez que nombran el número construido como cero, se les invita a colocarlo en una recta, en donde se inicia el principio del orden, pues a continuación se comienza a dar sentido a la iteración al preguntarles si se podrá construir "el que sigue" usando la recursión (definición de sucesor). Se les pregunta si este número tiene un antecesor, con la finalidad de que conceptualicen el número cero como el primer elemento de los números naturales. Otra de las fortalezas de este modelo de enseñanza es usar la iteración de la unidad para la construcción de los sucesores, al mismo tiempo que se van ordenando en la recta. A continuación, se presenta la Tabla 1, en la que se sintetiza el contenido, la articulación de las actividades diseñadas con el modelo formal y el material concreto que manipularán los niños.

Tabla 1. Articulación del Modelo Formal con el Modelo de Enseñanza

Contenido	Modelo Formal	Modelo de Enseñanza/Actividades	Material concreto
Construcción de los primeros números naturales	Definición del número cero como conjunto vacío y definición del número uno, con la iteración	Construcción de los números con bolsitas	Bolsas pequeñas de hule transparente (recipiente), números de plástico flexible. Calculadora, recta representada con un hilo y/o cinta adhesiva de color
	Definición y construcción del sucesor	Construcción de los números con bolsitas, cubitos, cuadros, puntos	
	Definición de número natural y el cero	Vamos a la inversa: del 9 al cero. Quién está antes y quién después	
	Definiciones de orden, relaciones de $>, <$, el sentido de pertenencia $\in$ e intervalo de a hacía b. Construcción de la nueva unidad: decena	Comparación de los números en la Recta Numérica Juego del "Cambio"	Fichas de colores y dados

Categorías de análisis para interpretar la experiencia empírica

Para observar la experiencia empírica, con el fin de describir y explicar las actuaciones de los niños, y en relación con las dificultades recurrentes que se presentaron durante el proceso con este modelo de enseñanza, se han diseñado las siguientes categorías, en las cuales se retoman los aportes del Modelo de Cognición para identificar los procesos cognitivos que se desarrollan con las actividades, retomando las Tendencias Cognitivas (en adelante, TC) que proponen Filloy et al.

(2008, pp. 163-166). Estas TC han sido reestructuradas de acuerdo con las dificultades recurrentes que se presentaron durante la realización de las actividades con los alumnos. Del Modelo de Comunicación, se retoman los aportes semióticos de Peirce (1987) para identificar y comprender el uso competente de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales y los esbozos lógico/semióticos que estructuran los niños para resolver problemas aritméticos, así como la producción de sentido y procesos de significación a través de la generalización y abstracción reflexiva en su construcción (Filloy, 1999, pp. 73-79). Todo ello permitió diseñar las categorías que posibilitarán comprender los Procesos de Significación a través de Argumentos (en adelante, PSA) que usaron. De las relaciones significantes de Peirce (1987), se identificaron los usos semánticos, sintácticos y pragmáticos que hacen con los números (Filloy, 1999, p. 51), así como para la construcción de los Indicadores de las Relaciones Significantes (en adelante, IRS). La Tabla 2 recoge las categorías y subcategorías consideradas en el análisis.

Tabla 2. Categorías y subcategorías para el análisis

Categoría	Subcategorías
1. Tendencias cognitivas (TC)	1.1 Dotación de sentidos intermedios: utilización de códigos personales para dotar de sentido a acciones concretas intermedias, lo que puede constituir el tránsito de lo concreto a lo abstracto 1.2 Obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras en que han aprendido las nociones numéricas, que les generan dificultades semánticas y sintácticas en la construcción de los números naturales 1.3 Obstructores provenientes de los procesos cognitivos, que les generan dificultades para establecer las relaciones de reversibilidad y transitividad
2. Procesos de Significación a través de Argumentos (PSA)	2.1 Inducción: Clasifica, prueba experimentalmente hipótesis, opera desde lo simbólico, usa la verificación para aproximarse a lo real 2.2 Deducción: Habilidad para razonar de lo general a lo particular 2.3 Abducción: Inferencia hipotética, implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y reglas. Usa la falsabilidad, para discriminar premisas verdaderas o falsas. La abducción es el razonamiento que permite transitar de una hipótesis a otra más abstracta
3. Indicadores de las Relaciones Significantes (IRS)	3.1 Uso semántico de los números en las acciones de representación y conteo: secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo, puntos de la recta numérica (Puig, 1994, p. 11); en acciones de etiquetar, contar, numerar y ordenar 3.2 Uso pragmático de los números en situaciones problemáticas

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Principales dificultades observadas

Las actuaciones de los niños se organizaron con base en los indicadores de las relaciones significantes descritas anteriormente. Así, para el primero de ellos, el uso semántico de los números en acciones de representación y conteo (subcategoría 3.1), se consideraron los siguientes cuatro organizadores:

- 3.1.1 Construcción del conjunto vacío como número cero
- 3.1.2 No identifica al número cero como representante del conjunto vacío
- 3.1.3 No identifica al número cero como el principio de la secuencia numérica
- 3.1.4 No identifica el número cero como el primer elemento de la recta numérica

Para la subcategoría 3.2, el uso pragmático de los números en situaciones problemáticas, se consideraron dos organizadores:

- 3.2.1 Representar el conjunto sucesor y antecesor del número cero

- 3.2.2 Dificultad para usar relaciones de reversibilidad en el uso de la iteración y recursión en la construcción de cada sucesor.

Ejemplos de un fragmento de la sesión del número cero

En este apartado se muestra un fragmento que se analizará en el subapartado siguiente con las categorías e indicadores descritos arriba. Con la inicial M se indican las intervenciones de la maestra. Las intervenciones de los alumnos se indican comenzando con una letra N.

M: ¿Qué tengo aquí? [La maestra muestra una bolsa de hule transparente]

M: ¿Qué tiene la bolsa? [La maestra la pone con la abertura hacia abajo]

Ns: Nada.

N1: Una mano [La maestra introduce su mano a la bolsa para mostrar que está vacía]

M: ¿De qué otra manera podemos decir lo que tiene la bolsa? [La maestra introduce algunos objetos a la bolsa y luego la vacía frente a ellos]

M: ¿Cómo quedó la bolsa?

Ns: Vacía.

M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?

Ns: Porque no tiene nada.

NF: Porque si no metes algo, no tienes nada.

NE: Si está vacío, no está pesado.

NA: Si le metes algo, ya está lleno.

M: ¿Qué nombre le podemos poner a la bolsa vacía? [Los niños no entienden la pregunta]

NE: O por números.

M: ¿Cómo dijiste?

Ns: Por números.

M: ¿Y cuál creen que sea el número que debe de estar aquí? [La maestra les pide que elijan uno de los números de *fommy*, que tiene pegados en el pizarrón]

Ns: El uno, el dos, el tres,… [La maestra les da una calculadora, con las teclas tapadas con un color, porque las bolsas tienen una tira de un color específico para cada número]

M: Presionen el color amarillo… [En la calculadora porque es el color de identificación que tiene la bolsa] ¿Qué salió en la pantalla?

Ns: Nada [Relacionan el numeral cero con nada]

M: ¿Nada? ¿Quién es ese número?

M: ¿Quién puede pasar al pizarrón a buscar el número que aparece en la pantalla y pegarlo en la bolsa? [Una alumna pasa al pizarrón y toma el numeral cero de *fommy* y lo muestra a sus compañeros]

M: ¿Se parece al que apareció en la calculadora?

Ns: Sí, no… [Algunos niños contestan sin poner atención a la pregunta]

M: ¿Cómo se llama éste? [Se refiere al numeral que escogió la alumna]

Ns: Cero.

M: Ese número es el mismo que sale en la calculadora, sólo que aquí tienen una forma un poco distinta de como los escribimos.

M: Oigan, y… ¿Dónde ocupan el cero? [Algunos niños mencionan distintos números donde aparece el cero, como el 10, 20, 30 y 200]

M: Ahora fíjense lo que vamos a hacer. Lo vamos a acomodar. ¿En dónde lo coloco? ¿Aquí, en medio o hasta el final? [la maestra señala la recta que está dibujada en el pizarrón]

Ns: Hasta el final.

M: ¿Hasta el final?

Ns: ¡Ah! ¡En el primero!

Ns: Y el uno en el segundo. [Los niños se adelantan y dicen el número que sigue, pues ya conocen la secuencia numérica]

M: ¿Podremos construir el que sigue?

Ns: Sí.

M: ¿Cómo saben cuál es el que sigue?

N: Es el uno.

M: ¿Y cómo sabes que es el uno? [La maestra le pregunta al niño que dijo el número siguiente]

N: Porque el uno debe de estar ahí y el cero debe de estar hasta el último.

M: ¿Hasta el último?

NF: En el primero.

M: Fabián, ¿cuál crees que sea el que sigue?

F: Cuando el uno esté primero y el cero esté hasta el último [Sigue insistiendo en la palabra último, para referirse al primero]

M: ¿El cero está hasta el último?

Ns: ¡El cero es el primero! [Repiten en coro otros niños]

Análisis de la experiencia empírica

Construcción del conjunto vacío como número cero (IRS 3.1.1), la mayoría de los niños relacionan la noción de nada con vacío; y algunos justifican su respuesta, argumentando sus hipótesis. El alumno NF hace un razonamiento de negación de la acción de introducir elementos al conjunto (fabilismo, PSA 2.3), pasando a otra hipótesis más abstracta. NE reflexiona inductivamente (PSA 2.1) al compararlo con el peso y NE deduce (PSA 2.2) que lo contrario de vacío es lleno, usando la relación de reversibilidad (TC 1.2). Estas tendencias cognitivas les permitieron establecer relaciones significantes al hacer un uso pragmático de la situación problemática, estableciendo analogías para describir una acción contraria a la acción de vacío (IRS 3.2). Al relacionar la acción de vaciar la bolsa con el vacío, los niños dotan de sentidos intermedios, de acuerdo con sus experiencias previas (TC 1.1), al decir que será un número el nombre de este conjunto vacío.

No identifican al número cero como el representante del conjunto vacío (IRS 3.1.2), al responder “uno, dos, tres” para nombrar a este conjunto primer conjunto (bolsa vacía). Los niños no sólo usan los números como secuencia numérica empezando por el uno (TC 1.3), también constituye otra dificultad que no identifiquen al número cero como el principio de la secuencia numérica (IRS 3.1.3). Lo mismo sucede cuando esperan que en la pantalla aparezca alguno de los numerales del 1 al 9, pues relacionan el cero con el número ocho, por estar pixelado.

La percepción (IRS 3.2.1) fue un obstáculo que se presentó en dos momentos (TC 1.3): cuando un alumno sólo da cuenta de la manipulación del objeto (acción de meter la mano a la bolsa para mostrar que está vacía), sin entender que la acción estaba enfocada en la ausencia de elementos.

La dotación de sentidos intermedios (TC 1.1) fue una tendencia cognitiva que se manifestó en casi todos los alumnos, cuando se les preguntó por los usos del número cero, haciendo referencia a su sentido conceptual como cifra; y haciendo uso de la deducción (PSA 2.2) al proponer ejemplos como 10, 20, 30 y 200, usando el cero con un sentido distinto al vacío o nada.

Dificultad para usar relaciones de reversibilidad con el uso de la iteración y recursión en la construcción del número cero (IRS 3.2.2). Esta dificultad se observó en el momento de colocar al primer elemento en la recta, misma dificultad que está relacionada con el orden como principio de construcción de la secuencia numérica, constituyendo un obstructor, debido a la manera en que han aprendido los números tanto en el contexto familiar como el escolar. Los alumnos siempre comienzan con el número uno (TC 1.2), a pesar de que fue el cero el primer número que se construyó en esta forma de concebirlos. Por ello es importante recuperar la definición de intervalo de von Neumann como el principio de construcción, que en este caso permitió a los niños establecer que el número cero es el primer elemento de la construcción de los números naturales y se ubica al principio y no el final, como decía NF. Esto último también representó para este alumno una dificultad en el uso semántico para su representación en la recta en el principio (IRS 3.1.4) como el primer elemento de la secuencia numérica.

Reflexiones para la investigación en Matemática Educativa

Con este análisis, se ha pretendido identificar las dificultades que tienen los niños, cuando se les presenta un modelo de enseñanza diseñado a partir del modelo formal von Neumann, para construir el número cero como la representación del conjunto vacío y el principio del sentido ordinal de los números naturales, tratando de identificar los SMS involucrados, guiados por el modelo de cognición y comunicación. Se pudo observar que las principales dificultades estuvieron relacionadas con las formas de uso pragmático de los números de acuerdo con las experiencias que han tenido en los diferentes ámbitos de su vida familiar, social y escolar.

El uso de las preguntas permitió a la docente guiar el proceso de enseñanza y a los niños dar sentido a las acciones que realizaron para construir relaciones significantes para conceptualizar el número cero.

Aunque la intención de esta investigación no es mejorar la enseñanza, se considera que aporta elementos para proponer un nuevo modelo de enseñanza con base en la estructura matemática de von Neumann.

Referencias

Choate, J., Devaney, R. L. y Foster, A. (1999). *Iteration: A tool kit of dynamic activities.* Emeryville, EE.UU.: Key Curriculum Press.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México, D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* Nueva York, EE.UU.: Springer.

Galperin, P. Y. (1976). *Introducción a la psicología: un enfoque dialéctico*. Madrid: Pablo del Río Editor.

Hamilton, N. y Landin, J. (1961). *Set Theory and the Structure of Arithmetic*. Boston, EE. UU.: Allyn and Bacon.

Heijenoort, J. van (1967). *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, EE.UU.: Harvard University Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica.* Madrid: Taurus Ediciones.

Puig, L. (1994). Semiótica y Matemáticas. En J. Talens, S. Sevilla y S. Zunzunegui (Eds.), *Eutopías Series. Documentos de Trabajo, Vol. 51.* Valencia: Ediciones Episteme. Recuperado de: https://www.uv.es/puigl/sm.pdf

Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de Estudios. Educación Básica*. México D. F., México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2015). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado.* México D. F., México: Autor.

Talizina, N. F. (Ed.) (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático.* San Luis Potosí, México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

MODELOS PARA EL ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN ENTRE SECUNDARIA Y UNIVERSIDAD EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA[xxxix]

Models for studying the transition between secondary and university in the teaching and learning of mathematics

Rodríguez-Cisneros, L.[a] y Perdomo-Díaz, J.[b]

[a]Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra, [b]Universidad de La Laguna

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo para el estudio de la transición de Educación Secundaria a Universidad, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Dicho modelo se ha creado a partir de un análisis sistemático de cuatro investigaciones que han abordado este objeto de estudio desde diferentes enfoques. El modelo propuesto trata de integrar los principales elementos encontrados en la literatura (el estudiante, la matemática y el entorno), además de incorporar aspectos propios del contexto en que será usado. Este modelo puede servir, además de como referente para investigar el proceso de transición, para la formulación de acciones didácticas que faciliten la transición de secundaria a universidad.

Palabras clave: *matemáticas, transición, educación secundaria, bachillerato, universidad.*

Abstract

The main aim of this paper is to present a model for the study of the transition from Secondary to University, in relation to the teaching and learning of mathematics. This model has been created from a systematic analysis of four investigations that have addressed this object of study from different approaches. The proposed model tries to integrate the main elements found in the literature (the student, the mathematics and the environment), as well as incorporating aspects of the context in which it will be used. This model can serve, as well as as a reference to investigate the transition process, for the formulation of didactic actions that facilitate the transition from secondary to university.

Keywords: *mathematics, transition, secondary education, high school, university.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas que preocupa, no solo al ámbito de la investigación en Educación, sino a buena parte de la sociedad, es el alto nivel de abandono que se produce en los estudios universitarios. En el caso de Latinoamérica, la tasa de abandono en estos estudios está sobre el 50% (Rubio-Gómez, Tocaín-Garzón, y Mantilla-Guerra, 2012). En el caso particular de Ecuador, el porcentaje es algo menor, entre un 12% y un 30% (Fernández-Orrantia y Silva, 2014). Las posibles razones del abandono han sido investigadas hace décadas, encontrándose que hay factores personales, familiares, económicos, educativos, entre otras (por ejemplo, Rach y Heinze, 2017).

La Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE), universidad privada más antigua del país, tiene una sede en la ciudad de Ibarra, cuyos datos históricos muestran tasas de abandono entre 13% y 33% (Rubio-Gómez et al., 2012). Una de las características de esta sede es que la mayoría de los grados que se ofertan tiene alguna asignatura relacionada con las matemáticas en los primeros cursos. De acuerdo a reportes de notas finales que constan en su secretaría, entre los años 2012 y 2017, los porcentajes de suspenso en las asignaturas del área de matemáticas de los semestres

Rodríguez-Cisneros, L. y Perdomo-Díaz, J (2019). Modelos para el estudio de la transición entre secundaria y universidad en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 523-532). Valladolid: SEIEM.

iniciales de las carreras de esa sede están entre 27% y hasta 76%. ¿De qué forma están relacionados estos porcentajes con el abandono de los estudiantes?

Por otra parte, en Ecuador, todos los estudiantes, en el último año de bachillerato, presentan un examen denominado “Ser Bachiller” que aplica el Instituto Nacional de Evaluación Educativa de Ecuador (INEVAL). Resultados recientes (INEVAL, 2018) muestran que, en el dominio matemático, el porcentaje de respuestas correctas es bastante bajo: resolución de problemas estructurados (47%), relaciones entre variables y sus representaciones (44%), organización y análisis de información (47%), relaciones y patrones (65%) y razones y proporciones (41%), lo que indicaría niveles limitados en el desarrollo de ciertas destrezas matemáticas en los estudiantes que completan el bachillerato. ¿Qué relación podrían tener estos resultados con la tasa de abandono en el primer año de universidad?

Varias investigaciones indican que el propio proceso de transición de Educación Secundaria a la Educación Superior podría estar entre los factores que provocan el abandono durante el primer año de universidad (Bardelle y Di Martino, 2012; Di Martino y Gregorio, 2018; Gueudet, 2008).

En general, la transición desde la etapa de Educación Secundaria a la Universidad se describe como un período emocionante, complejo y, en algunos casos, problemático. Aunque la transición de la matemática de secundaria a universidad se ha investigado a lo largo de los años y desde diferentes enfoques, aún son escasos los estudios a nivel latinoamericano sobre este tema. Si bien algunos autores han propuesto categorías para estos estudios sobre transición (De Guzmán, Hodgson, Robert y Villani, 1998; Gueudet, 2008), habría mucho por investigar en este campo en el contexto latinoamericano que tiene aspectos culturales y sociales particulares que requerirían incluir aspectos específicos en los modelos ya propuestos.

El objetivo de esta comunicación es presentar un modelo para el estudio de la transición matemática que integre aspectos del estudiante, la matemática y el entorno. El modelo se ha construido a partir del análisis sistemático de los modelos propuestos en cuatro investigaciones con foco en diferentes dominios, desde el cognitivo al afectivo.

A continuación, se presenta la síntesis de las cuatro investigaciones seleccionadas, que estudian la transición desde enfoques diferentes, para terminar presentando el modelo generado a partir de ellos y una reflexión final donde se señalan los principales aportes y algunos posibles usos de este modelo alternativo.

LA TRANSICIÓN MATEMÁTICA COMO OBJETO DE ESTUDIO POR GUEUDET (2008)

Este trabajo comienza con una reflexión en torno a las dudas que surgen al tratar de definir en qué momento ocurre la transición ya que, por ejemplo, a veces los temas matemáticos considerados significativamente difíciles se proponen en segundo año de universidad o el contenido matemático que podría considerarse del plan de estudios universitario ya se enseña en secundaria para preparar a los estudiantes. Para Gueudet (2008), la transición es un cambio a un “país nuevo, con un nuevo idioma y nuevas leyes que hacen que el estudiante novato se sienta como un extranjero”. Según afirma, este cambio se desarrolla aproximadamente dos años antes de ingresar a la universidad y dos años después, pues considera que las investigaciones que se desarrollen en ese lapso de tiempo pueden establecer resultados sobre temas relacionados a la transición.

Los problemas asociados con la transición han sido investigados ya desde hace varios años; en su revisión, la autora sistematiza investigaciones desde 1991 a 2007 tomando como referencia experiencias documentadas en Francia, Reino Unido, Bélgica y Dinamarca, en grados que corresponden al último nivel de Educación Secundaria.

Gueudet (2008) toma como referencia una revisión de la literatura realizada por De Guzmán et al. (1998), en la que se clasifican los estudios atendiendo a las perspectivas desde las que se realiza la investigación (epistemológicas, cognitivas, socioculturales y didácticas), y reorganiza los trabajos sobre transición según el foco de atención en las investigaciones. Distingue así entre estudios centrados (i) en los modos de pensamiento y la organización del conocimiento, (ii) en la demostración y la comunicación matemática y (iii) en la transposición didáctica y el contrato didáctico. A continuación, se resumen las ideas principales del estudio de Gueudet (2008) desde cada uno de estos aspectos.

Modos de pensamiento y organización del conocimiento

En este enfoque, Gueudet (2008) menciona a Tall (1991) como un referente del Pensamiento Matemático Avanzado pues caracteriza la transición entre dos modos de pensamiento, que puede corresponder a la transición entre secundaria y universidad, pero no en forma exclusiva. Por otro lado, Sierpinska (2000) distingue entre el pensamiento teórico y práctico. Este autor menciona que los matemáticos usan ambos modos de pensamiento y que muchas dificultades encontradas en estudiantes de primer año de universidad en el contexto podrían estar relacionadas con el uso del pensamiento práctico por encima del pensamiento teórico. Esto sería similar a lo propuesto por Lithner (2000) que distingue entre razonamiento plausible y razonamiento basado en experiencias establecidas. Ambos trabajos muestran que los estudiantes están limitados a un modo de pensamiento y razonamiento debido a la falta de experiencia matemática, aunque también la forma en que se enseña el contenido en colegio o en universidad sería responsable de esas dificultades.

Para Gueudet (2008), considerar este enfoque en el diseño de enseñanza, implica ampliar la gama de tareas de manera que permitan el desarrollo de diferentes soluciones, con el fin de fomentar la autonomía matemática de los estudiantes. Otra acción didáctica sería el uso de diferentes representaciones del mismo objeto matemático en paralelo, por ejemplo, con el uso de un entorno de geometría dinámica, sistemas de álgebra computacional o incluso ejercicios en línea interactivos para fomentar la flexibilidad entre los modos de pensamientos. Estas acciones, entre otras pueden fomentar el desarrollo del pensamiento flexible y así facilitar la transición de secundaria a universidad.

Demostración y comunicación matemática

En este aspecto, Gueudet (2008) señala que existe un cambio gradual de la forma en que se organizan los conocimientos hacia el lenguaje matemático que se utiliza para la construcción y comunicación de las pruebas matemáticas. El autor indica que la enseñanza recibida en la universidad podría ser, al menos en parte, responsable de las dificultades encontradas por los estudiantes novatos. De acuerdo con Dreyfus (1999), los profesores universitarios y los libros de texto no tienen como objetivo explícito dar a los estudiantes los medios para aprender a construir pruebas y controlar su validez; estos aspectos de las matemáticas parecen quedar bajo la responsabilidad de los estudiantes. En base a este enfoque, Gueudet (2008) indica que existe una necesidad real de mejorar los textos propuestos a los estudiantes por los profesores y de los libros de texto para aclarar las reglas y expectativas sobre el conocimiento sintáctico. Esto requeriría formación en didáctica de los profesores universitarios, que aunque podría ser considerada como una idea extraña por muchos matemáticos, ayudaría a los estudiantes novatos en este aspecto de la transición matemática.

Transposición didáctica y contrato didáctico

Si bien en las secciones anteriores se identifican causas epistemológicas para las dificultades de los estudiantes que indicarían que el contenido matemático avanzado parece intrínsecamente difícil, los demás estudios revisados por Gueudet (2008) tienden a integrar cada vez más la forma en que se enseñan los conocimientos, en la secundaria y en la universidad. Para Chevallard (1992), el conocimiento que se enseña proviene de un proceso de transposición didáctica de acuerdo a la institución y Brousseau (2002) menciona que la escuela secundaria y la universidad tienen diferentes contratos didácticos y el cambio de un contrato a otro puede generar rupturas. Para Artigue (2004), al ingresar a la universidad, ocurre un cambio entre dos culturas institucionales. Cuestionar este cambio de cultura puede llevar a los investigadores a considerar contenido matemático preciso y desarrollar estudios detallados de transposición que permitan comprender las diferencias de la transposición didáctica y el contrato didáctico en secundaria y universidad para establecer los aspectos que están influyendo en la transición matemática.

Si bien la comparación de las expectativas de los docentes de secundaria y universitaria no parece haberse investigado todavía, en la investigación de Castela (2004) y Crawford, Gordon, Nicholas y Prosser (1998) se mencionan las expectativas de docentes universitarios en comparación con los resultados derivados del análisis de textos matemáticos propuestos a los estudiantes. En ese trabajo, se identifica que la actividad de los estudiantes está más centrada en aprender a imitar estrategias que en desarrollar una comprensión real. La explicación para esto sería los ejercicios que constan en los libros de texto, que en muchos casos son elaborados por los propios profesores. En este contexto, el principal factor identificado por estos autores es el tipo de evaluación desarrollada en la universidad. Como generalmente los propios profesores elaboran los exámenes, tienden a proponer ejercicios similares a los ejercicios estudiados en clase para evitar un fracaso masivo; de esta manera los alumnos saben que, durante el examen, será suficiente recordar una situación similar a los textos y la técnica correspondiente. En el contexto ecuatoriano, el esquema mencionado podría ser válido en secundaria donde se trabaja en destrezas con criterio de desempeño. Sin embargo, en universidad debería reformularse la evaluación hacia el desarrollo de competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales.

Así, el modo de evaluación parece prevenir el cambio de actitud al guiar a los estudiantes a desarrollar una actitud opuesta a las expectativas de los docentes universitarios. Esto ha llevado a varios grupos de investigación a proponer y evaluar modos alternativos de evaluación en la universidad. Sin embargo, para Gueudet (2008) aún no se ha estudiado la evaluación con un enfoque de transición secundario-universidad específico.

En conclusión, Gueudet (2008) menciona que la transición secundaria-universidad se estudió inicialmente como un conjunto de problemas de estudiantes novatos. Las contribuciones de investigación desde diferentes enfoques permitieron una distinción entre fenómenos individuales, sociales e instituciones. También permitieron resolver diferentes tipos de dificultades, lo que finalmente llevó a diferentes puntos de vista de la transición. Se indica la necesidad de una mayor investigación, con el fin de precisar los roles y consecuencias de estas características. Por ejemplo, la cuestión del uso de la tecnología y la evaluación en la transición educativa de secundaria a universidad no se había investigado todavía.

LAS ACTITUDES MATEMÁTICAS EN LA TRANSICIÓN POR GÓMEZ-CHACÓN (2009)

En esta investigación se hace referencia a que la transición es un tema que preocupa tanto a matemáticos como a educadores matemáticos. Si bien la autora no describe de forma explícita que se entiende por transición, establece que las dificultades de aprendizaje en el cambio de secundaria a universidad se originan en la interacción cognición-afecto. Gómez-Chacón realiza una revisión de la literatura, identificando las mismas aproximaciones al tema presentadas por Gueudet (2008) y recalcando que escasamente se han estudiado aspectos afectivos como parte de las dificultades de los estudiantes en la transición de la secundaria a la universidad. En este contexto, el trabajo de esta investigadora se centra en las dificultades de aprendizaje del estudiante que tienen su origen en la interacción cognición-afecto y presenta una experiencia institucional desarrollada desde 1999 en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) para estudiantes de licenciatura de matemáticas.

En primer lugar, se indican brevemente algunas variables de origen afectivo que influyen en el aprendizaje. De acuerdo a la autora, los estudios sobre aprendizaje y afecto hacen referencia a que las reacciones afectivas pueden tener influencias diferentes en varios procesos cognitivos y conativos que afectan el desarrollo del pensamiento matemático (procesos creativos e intuitivos, procesos atribucionales…) y los catalogados como procesos directivos (procesos metacognitivos y metaafectivos). Esta afirmación, que es citada más adelante por Rach y Heinze (2017), es contrastada con los resultados de las investigaciones sobre dificultades en los estudiantes de primer año y se comprueba que estos últimos, cuando llegan a la universidad, escasamente han desarrollado un pensamiento matemático avanzado. De esta forma, partir del supuesto de que el quehacer matemático tiene anclajes emocionales con procesos como los descritos anteriormente, implica plantearse cuestiones relacionadas, por ejemplo, con la adquisición de actitudes hacia la matemática y actitudes matemáticas en los estudiantes.

Actitudes hacia la matemática y actitudes matemáticas

Para Gómez-Chacón (2009), las actitudes hacia la matemática están relacionadas con la valoración y aprecio por la disciplina y el interés como asignatura y por su aprendizaje, mientras que las actitudes matemáticas tienen un carácter más bien cognitivo y se refieren al modo de usar capacidades que son relevantes en el trabajo matemático. La autora reflexiona sobre la adquisición de una actitud inicial adecuada y la adquisición de actitudes matemáticas. En este último aspecto, se centra en dos actitudes matemáticas: la actitud inductiva y la actitud de precisión y rigor. Por otro lado, también señala que las actitudes en matemáticas requieren de técnicas y medios adecuados para su evaluación y describe algunos ejemplos del uso de la observación, cuestionarios y escalas.

Al reflexionar sobre las actitudes, se puede afirmar que los estudiantes tienden a relacionar la actitud hacia la matemática (interés) con la actitud matemática (cognición), de manera que su valoración a esta disciplina depende de su rendimiento académico. Si se considera que la transición es un cambio significativo en la vida académica, es necesario que la actitud hacia la matemática (interés) sea positiva incluso si la actitud matemática (cognición) es afectada en el proceso de transición a universidad. En este sentido, es importante que tanto el estudiante como al docente estén al tanto de esta relación para que puedan establecer mecanismos para desarrollar actitudes hacia la matemática y actitudes matemáticas que faciliten este cambio.

VARIABLES EN LA TRANSICIÓN MATEMÁTICA POR RACH Y HEINZE (2017)

Para estos autores, la transición es una nueva etapa de la vida que implica un ajuste del estudiante a un nuevo entorno de aprendizaje. En su investigación, señalan que los desafíos de la transición de las matemáticas escolares (colegio) a las matemáticas científicas (universidad) pueden estar relacionados con el abandono de los estudiantes de primer semestre en especialización matemática de una universidad alemana. En particular, el estudio se concentra en las razones educativas y en las características individuales de los estudiantes. Sin embargo, también menciona a las teorías de ajuste persona-ambiente que plantean que un alto grado de correspondencia entre las características individuales del alumno y las características del entorno de aprendizaje, pueden generar procesos de aprendizaje exitosos. Esto implica que la responsabilidad de prevenir altas tasas del abandono no recae solo en los estudiantes o escuelas.

De acuerdo a la revisión realizada por Rach y Heinze (2017), se identifican dos diferencias fundamentales entre aprender matemáticas en la secundaria y aprender matemáticas en la universidad: (a) el carácter de las matemáticas que se enseña y (b) las demandas de oportunidades de aprendizaje. En cuanto a la primera diferencia, se considera a manera de ejemplo la definición de conceptos y la prueba de afirmaciones matemáticas, mientras que en la segunda diferencia se menciona el tipo de oportunidades de aprendizaje y las demandas de aprendizaje.

Por otro lado, Gómez-Chacón (2009) menciona que en los procesos de aprendizaje en secundaria y universidad, las variables afectivas y cognitivas se consideran factores importantes para un mayor aprendizaje. En este contexto, Rach y Heinze (2017) trabajaron con cinco variables individuales: (a) conocimiento previo, (b) logros previos, (c) interés, (d) autoconcepto y (e) estrategias de aprendizaje con alumnos de primer semestre de una universidad alemana que estudian matemáticas como una especialidad.

Los resultados del estudio muestran que las características cognitivas y afectivas de los estudiantes que están relacionadas con las matemáticas escolares tienen un impacto limitado en el éxito del estudio de las matemáticas científicas del primer semestre. Únicamente el logro escolar general tiene un impacto significativo. En contraste, los conocimientos previos específicos relacionados con las matemáticas científicas y las habilidades de los estudiantes para desarrollar estrategias de aprendizaje adecuadas se convierten en factores principales para una fase de transición exitosa. Por lo tanto, el estudio concluye que los requisitos previos de aprendizaje específicos relacionados con las matemáticas científicas deben fomentarse y desarrollarse antes o al comienzo del primer semestre. Esto podría proporcionar ideas sobre cómo organizar cursos preparatorios para estudiantes de primer año de matemáticas con la intención de reducir el abandono escolar.

LA CRISIS MATEMÁTICA EN LA TRANSICIÓN POR DI MARTINO Y GREGORIO

El último trabajo analizado (Di Martino y Gregorio, 2018) se centra en el dominio afectivo y su relación con el proceso de transición de secundaria a universidad. En este trabajo se analiza el fenómeno de la deserción en la licenciatura en Matemáticas de una universidad italiana, considerando dos grupos de estudiantes, un grupo de estudiantes con buen rendimiento en las asignaturas de matemáticas en la universidad y otro grupo de estudiantes que abandonaron los estudios universitarios el primer año.

Di Martino y Gregorio (2018) consideran la transición como “un rito de paso” con diferentes fases, caracterizado por una serie de crisis que sufre el individuo al ver cómo quedan interrumpidas, deformadas o eliminadas una serie de rutinas (Clark y Lovric, 2008). La investigación que realizan se apoya en la teoría de la atribución (Weiner, 1986), dando importancia al punto de vista de los estudiantes, a cómo interpretan sus propias dificultades y su éxito o fracaso.

En esta investigación se analiza el rol que desempeñan en el proceso de transición cada elemento que compone el modelo de las actitudes frente a las matemáticas establecido por Di Martino y Zan (2010): (a) visión de las matemáticas, (b) competencia percibida en matemáticas, y (c) disposición emocional hacia las matemáticas. Este modelo tiene algunos elementos en común con las cinco variables que Rach y Heinze (2017) consideran relevantes para una transición exitosa.

En cuanto a la disposición emocional hacia las matemáticas, los autores encontraron diferencias entre dicha disposición al entrar en la universidad y en momentos posteriores. Analizando los motivos que los participantes daban a las emociones negativas asociadas al impacto de la realidad de la universidad, los autores encontraron lo que denominan fenómeno de la “primera vez”, que hace referencia a distintas situaciones que los estudiantes señalan que experimentaron por primera vez en la universidad. Algo que distingue a los dos grupos de participantes es la forma de ver y afrontar esas emociones negativas: mientras los estudiantes que abandonaron los estudios hablan del “peso de la vergüenza”, los alumnos exitosos señalan haber superado esa vergüenza y haber aceptado una “nueva identidad matemática”.

Sobre la visión de la matemática y la competencia percibida en matemáticas, en general, los estudiantes de los dos grupos encontraron más dificultades de las esperadas cuando entraron en la universidad, distinguiéndose cinco categorías de causas para esas dificultades: (i) factores de contexto, relacionados con la adaptación de las clases o los exámenes, (ii) aspectos de la transición, relacionados con la discontinuidad de la matemática y las diferencias didácticas, (iii) conocimiento inadecuado, relacionado con el conocimiento de matemáticas que se adquiere en secundaria, (iv) inadecuada forma de pensar para las matemáticas, relacionado con la actitud de los estudiantes ante las dificultades encontradas y (v) comparación con los pares, relacionado con el cambio de auto-percepción en comparación con sus compañeros.

En este sentido, las teorías sobre el éxito, construidas durante la secundaria, tienen serias consecuencias. Una de las grandes diferencias entre los estudiantes que desertaron y los que continuaron fue las razones a las que atribuían las causas de las dificultades. Mientras que los desertores atribuían mayormente las dificultades únicamente a factores externos, los estudiantes exitosos asociaban las dificultades como algo inestable y controlable.

MODELO PROPUESTO PARA EL ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN

A partir de la revisión de las investigaciones realizadas y del análisis de los trabajos citados en esta comunicación, coincidimos con Di Martino y Gregorio (2018) en que la transición de la matemática de secundaria a universidad es un rito de paso que se iniciaría el año anterior a la finalización de la secundaria y terminaría aproximadamente en el primer año de universidad, como lo menciona Gueudet (2008). Con esta premisa, se propone un modelo que integra tres dimensiones que intervienen en el proceso de transición de secundaria a la universidad, en relación con el aprendizaje de la matemática: (a) Estudiante (individuo); (b) Matemática (disciplina) y (c) Entorno (educativo). Estos aspectos están relacionados con las categorías identificadas en estudios de transición realizados por De Guzmán et al. (1998) y Gueudet (2008) así como en las características individuales de Rach y Heinze (2017) y los aspectos afectivos de Gómez-Chacón (2009) y Di Martino y Gregorio (2018) que están citadas en esta comunicación. En la gráfica se presenta la relación entre estos elementos:

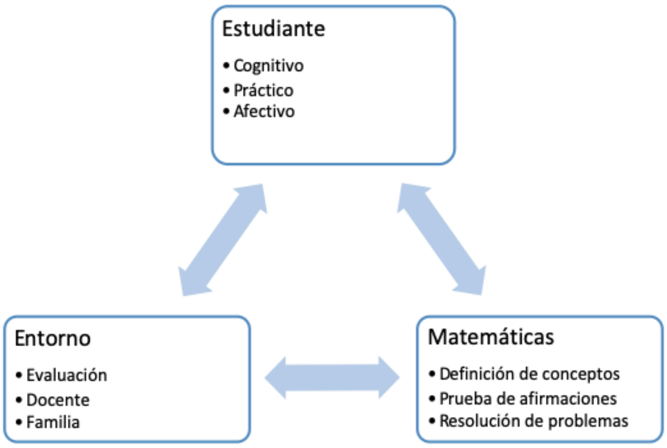


Figura 1. Modelo propuesto

En la primera dimensión que corresponde al estudiante, intervienen elementos relacionados con el dominio cognitivo y afectivo. Estos elementos se han separado para efectos de la presentación del modelo, pero están estrechamente enlazados y se activan en diferentes niveles en la transición matemática de secundaria a universidad.

En el dominio cognitivo, se han considerado los aportes de Tall (1991) en cuanto al pensamiento matemático avanzado (AMT) que menciona que "el cambio de matemática elemental a AMT implica una transición significativa: de describir a definir, de convencer a probar de una manera lógica basada en definiciones" (p. 20). A modo de ejemplo, Contreras (2000) menciona obstáculos epistemológicos en la enseñanza del análisis matemático en la secundaria y primer curso de universidad. Con estos referentes y las investigaciones revisadas, se ha establecido que el elemento cognitivo corresponde al pensamiento teórico mencionado por Sierpinska (2000) que se caracteriza por sistemas organizados de conceptos y la reflexión sobre los medios de representación. También está relacionado con el razonamiento plausible identificado por Lithner (2000) que guía hacia lo que probablemente es la verdad y se basa en propiedades matemáticas.

En cuanto al dominio práctico incluido en la propuesta, este corresponde al pensamiento práctico establecido por Sierpinska (2000) que utiliza ejemplos prototípicos y razonamiento basado en la lógica de la acción. De acuerdo con Sierpinska (2000), los matemáticos usan ambos modos de pensamiento: la mayoría de las veces, en un contexto familiar, piensan de manera práctica, y usan el pensamiento teórico cuando enfrentan un problema nuevo y difícil. Muchas dificultades encontradas por los estudiantes de primer año pueden interpretarse como consecuencias del pensamiento práctico. De la misma manera, está relacionado con el razonamiento basado en experiencias establecidas mencionado por Lithner (2000).

Finalmente, respecto al dominio afectivo, es necesario indicar que la actividad matemática “como un comportamiento puramente cognitivo es extremadamente raro” (Schoenfeld, 1983, p. 330). En este sentido, en Gómez-Chacón (2009) se menciona un dominio afectivo en matemáticas con cuatro categorías: creencias, actitudes, emociones y valores. Además, diferencia entre actitudes hacia las matemáticas que se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina, así como al interés en esta asignatura y su aprendizaje y por otro lado menciona las actitudes matemáticas que son más bien de carácter cognitivo. Adicionalmente, Caballero, Cárdenas y Gordillo (2016) también mencionan que la intervención de variables afectivas en el área matemática debe tener presente que las creencias, actitudes y emociones están interrelacionadas. Con estos aportes, queda clara la necesidad de integrar este elemento en el modelo propuesto.

En la segunda dimensión, la matemática como disciplina, Rach y Heinze (2017) mencionan que la definición de conceptos y prueba de afirmaciones matemáticas indican diferencias entre las matemáticas de secundaria a universidad. En cuanto a la definición de conceptos, las matemáticas en secundaria tienen una perspectiva utilitaria mientras que las matemáticas en la universidad tienen una perspectiva científica. Esto está relacionado con la prueba de afirmaciones matemáticas: en secundaria se validan por evidencia empírica mientras que, en la universidad, “la comunidad matemática científica ha desarrollado estándares estrictos cuyo tipo de argumento es aceptado como evidencia de las matemáticas como disciplina científica” (Rach y Heinze, 2017, p. 1346). Por otro lado, según lo menciona Santos-Trigo y Aguilar (2018), la resolución de problemas es un elemento esencial del quehacer de la matemática. Como área de estudio, la resolución de problemas matemáticos analiza “cómo se construye el conocimiento disciplinario, cómo se formulan los problemas y las formas de caracterizar y explicar el proceso de construcción de conceptos y la resolución de los problemas” (Santos-Trigo y Aguilar, 2018, p. 149).

En la dimensión correspondiente al entorno, podemos destacar el modo de la evaluación desarrollado en la universidad. Para Gueudet (2008), cuando los docentes proponen ejercicios similares a los ejercicios estudiados durante los tutoriales, eventualmente estarían llevando a los estudiantes a aprender a imitar estrategias. Sin embargo, como se mencionó en la reflexión sobre Gueudet (2008), la evaluación debe reorientarse hacia el desarrollo de competencias y razonamiento flexible más allá del desarrollo de destrezas. Además, la evaluación en secundaria y universidad difiere en cuanto al proceso, retroalimentación, modalidad, frecuencia, etc. Consideramos que este aspecto es necesario en el modelo ya que, según Gueudet (2008), no se habría estudiado la evaluación como un factor que incide en la transición. En cuanto al docente como elemento del entorno educativo, éste está relacionado con las oportunidades de aprendizaje que menciona Rach y Heinze (2017). En este sentido, mencionan que en secundaria los docentes organizan el contenido matemático orientado al estudiante mientras que, en la universidad, a menudo se utiliza la prueba de teoremas para presentar ideas matemáticas a los estudiantes, con una orientación hacia el conocimiento. Adicionalmente, se ha considerado a la familia como un elemento relevante para el entorno educativo a partir de la investigación de Roesken, Hannula, y Pehkonen (2011). Si bien la investigación mencionada no está relacionada directamente con la transición matemática, hace referencia a que es un parámetro decisivo para el compromiso y el éxito académico.

Los aspectos considerados en este modelo podrían analizarse desde la percepción tanto del estudiante como del docente considerando la teoría de la atribución (Weiner, 1986) así como también desde reflexiones antropológicas, sociológicas o epistemológicas.

REFLEXIONES FINALES

En el modelo presentado se integra dimensiones de la transición que ya se habían identificado en las investigaciones citadas, como el aspecto cognitivo, práctico, afectivo en la dimensión del estudiante y aspectos de la definición, demostración y resolución de problemas en la dimensión matemática. Además, se integra en la dimensión del entorno a aspectos como ya mencionados como el docente y aspectos nuevos como la evaluación y la familia. Consideramos que los elementos nuevos del modelo son importantes ya que la evaluación en el sistema educativo ecuatoriano tiene características diferentes al cambiar de secundaria a universidad y este aspecto no ha sido estudiado con detalle desde el enfoque de transición. En cuanto al apoyo familiar, consideramos que puede ser un factor que influye en el éxito académico en procesos de transición. Para ubicar esta información en contexto, el INEVAL en Ecuador utiliza una encuesta de factores asociados para contextualizar los resultados de las evaluaciones considerando su situación familiar, entre otros aspectos.

El modelo propuesto no pretende ser exhaustivo, sino más bien es una aproximación a elementos que se han considerado que pueden integrar resultados de investigaciones anteriores. Este modelo puede ser útil para profundizar o estudiar por separado sus aspectos, así como podría ser una referencia para la propuesta de instrumentos que permitan obtener resultados para formular acciones didácticas que faciliten la transición matemática de secundaria a universidad.

Referencias

Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques? Conferencia plenaria en *First French-Canadian Congress of Mathematical Sciences.* Toulouse, Francia.

Bardelle, C. y Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary-tertiary transition in mathematics: for what purpose? *ZDM, 44*(6), 787-800.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970–1990.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-92). Málaga: SEIEM.

Castela, C. (2004). Institutions influencing mathematics students' private work: a factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 33-63.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 77-111.

Clark, M. y Lovric, M. (2008). Suggestion for a theoretical model for secondary-tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 25-37.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En N. Climent, L. C. Contreras y J. Carrillo (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-85). Huelva: SEIEM.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J. y Prosser, M. (1998). Qualitatively different experiences of learning mathematics at university. *Learning and Instruction, 8*(5), 455-468.

De Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A. y Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. En G. Fischer y U. Rehmann (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 3* (pp. 747-762). Berlín, Alemania: Deutscher Mathematiker-Vereinigung.

Di Martino, P. y Gregorio, F. (2018). The mathematical crisis in Secondary–Tertiary transition. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(4), 825-843.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). "Me and maths": Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27-48.

Dreyfus, T. (1999). Why Jonny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 85-109.

Fernández-Orrantia, X. y Silva, E. (2014). Deserción estudiantil universitaria en el primer semestre. El caso de una institución de educación superior ecuatoriana. *Cuadernos del Contrato Social por la Educación, 10*, 34-48.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-terciary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237-254.

INEVAL (2018). *Informe de resultados nacional. Ser Bachiller Año lectivo 2017-2018.* Quito: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190.

Rach, S. y Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(7), 1343-1363.

Roesken, B., Hannula, M. S. y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM, 43*(4), 497-506.

Rubio-Gómez, M. J., Tocaín-Garzón, A. L. y Mantilla-Guerra, M. L. (2012). La deserción universitaria en los primeros niveles y la inserción laboral de los graduados. *Axioma, 1*(8), 26-35.

Santos-Trigo, M. y Aguilar, D. A. (2018). Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 148-167). Ciudad de México, México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: belifs systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*(4), 329-363.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Weiner, B. (1986). *An attributional theory of achievement motivation and emotion.* Nueva York, EE.UU.: Springer.

[xxxix] Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

RELACIONES ENTRE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA E INDAGACIÓN EN UN CONTEXTO ARQUEOLÓGICO[xl]

Relationship between mathematical modelling and inquiry in an archaeological context

Sala, G., Font, V. y Barquero, B.

Universitat de Barcelona

Resumen

Este trabajo muestra la investigación llevada a cabo para estudiar la relación e interacciones que se establecen entre modelización matemática e indagación, mediante el análisis de la implementación de una secuencia didáctica codisciplinar de contexto arqueológico llevada a cabo con alumnos de 13-14 años en un instituto de Badalona. En la primera parte se exponen los modelos teóricos en que se enmarca la investigación. A continuación, se describe el análisis realizado focalizado en identificar los subprocesos que componen los procesos de indagación y de modelización que realizan los estudiantes y la posible relación que se establece entre ambos procesos. Finalmente, se presentan algunas conclusiones sobre esta interacción entre los distintos subprocesos y sobre el papel del contexto, que emerge como un elemento importante tanto para el proceso de indagación como en el proceso de modelización matemática.

Palabras clave: *modelización matemática, aprendizaje basado en indagación, contexto arqueológico, conexiones*

Abstract

This paper shows the research carried out to study the relationship and interactions established between mathematical modelling and inquiry, through the analysis of the implementation of a codisciplinary didactic sequence of archaeological context. The implementation was carried out with students of 13-14 years in a high school of Badalona. In the first part, the theoretical models in which the investigation is framed are exposed. Then, there is a description of the analysis focused on the identification of the modelling and inquiry sub processes realised by the students and the possible relationship that could be established between both processes. Finally, some conclusions about the interaction between the diverse sub processes that compose modelling and inquiry processes and about the role of context, which emerged as an important element both for the development of the process of inquiry and for the process of mathematical modelling.

Keywords: *mathematical modelling, inquiry-based learning, archaeological context, connections*

INTRODUCCIÓN

Como ponen de manifiesto Artigue y Blomhøj (2013), es una tendencia actual el incremento de los términos que se refieren a la *enseñanza basada en la indagación* en los distintos documentos curriculares, y más concretamente, en los que se refieren a la enseñanza y aprendizaje de matemáticas y las ciencias. Diversos enfoques y proyectos, como por ejemplo, los proyectos internacionales PRIMAS (Maaß y Doorman, 2013), MASCIL (Doorman, Jonker y Wijers, 2016) o FIBONACCI (Harlen, 2012a), centrados en cómo promover la enseñanza basada en indagación y la enseñanza de la modelización matemática, describen los beneficios que significa para el aprendizaje de los estudiantes trabajar en un enfoque de indagación en contextos realistas.

Sala, G., Font, V. y Barquero, B. (2019). Relaciones entre modelización matemática e indagación en un contexto arqueológico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 533-542). Valladolid: SEIEM.

Asimismo, de acuerdo con Blomhøj (2004), actualmente la modelización matemática es una práctica de enseñanza relevante para cualquier nivel educativo, que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Estas actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al estudiante a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos.

Diversos autores coinciden en describir la proximidad entre ambos tipos de actividades, modelización matemática e indagación, también como fáciles de combinar en la enseñanza de las matemáticas (Artigue y Blomhøj, 2013; Maaß y Doorman, 2013; Maaß y Engeln, 2018), aunque no se profundiza en una clara conceptualización de dicha complementariedad. Para conocer las relaciones que se establecen entre modelización matemática e indagación es necesaria una mirada conjunta de ambos procesos.

En este sentido, la investigación que realizamos trata de dar respuesta a diversas preguntas de investigación como, por ejemplo: *cuando los alumnos siguen una indagación ¿realizan todos y cada uno de los subprocesos del ciclo de indagación?, ¿y los del ciclo de modelización?, ¿hay acciones de los alumnos, que formen parte de los subprocesos del ciclo de modelización, que parecen coincidir con los de los subprocesos del ciclo de indagación?, ¿aparecen como complementarios ambos tipos de subprocesos?, ¿en qué momentos del ciclo de indagación emergen evidencias de modelización?, ¿qué elementos emergen como básicos para que la modelización matemática aparezca como una necesidad para seguir adelante con la indagación?*

En definitiva, el objetivo de nuestra investigación es estudiar la relación e interacciones que se establecen entre modelización matemática e indagación, cuando los estudiantes se encuentran inmersos en la realización de una secuencia didáctica de contexto arqueológico. En nuestra investigación proponemos realizar una mirada a la modelización matemática entendiéndola como un proceso integrado al de la indagación, para poder estudiar cómo, modelización e indagación, se relacionan.

En los siguientes apartados se expone, en primer lugar, un breve resumen de los principales elementos del marco teórico de la investigación. A continuación, el análisis realizado y los resultados obtenidos a partir de la implementación de una secuencia didáctica codisciplinar (matemáticas e historia) de contexto arqueológico y, finalmente, algunas de las conclusiones extraídas en relación a las implicaciones de conocer algunas de las conexiones entre modelización matemática e indagación.

PERSPECTIVA DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA INDAGACIÓN

Blomhøj (2004) afirma que detrás de todo modelo matemático existe un proceso de modelización y que esto significa que alguien, de manera implícita o explícita, ha recorrido el proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. Han aparecido diversas descripciones y conceptualizaciones de los procesos de modelización, aunque una de las más consensuadas en toda la comunidad se describe a partir del llamado *ciclo de modelización* del cual coexisten distintas versiones (Blomhøj y Jensen, 2003; Blum y Leiß, 2007; Borromeo-Ferri, 2006, entre otros). En este trabajo, nos centramos en los ciclos de modelización propuestos en Blomhøj y Jensen (2003) y Blomhøj (2004), dado que en ellos se incluye mención especial a el *dominio de indagación* (ver Figura 1). Según estos autores, la indagación suele tomar especial relevancia al inicio del proceso de modelización en los momentos cuando, dada la realidad a estudiar, se delimitan las tareas y cuestiones a tratar y se seleccionan las variables por considerar, hecho que llevará a la definición del sistema extra-matemático a estudiar.

Blomhøj y Jensen (2003) conciben el proceso de modelización como un proceso dinámico, que en ningún caso debe entenderse de forma lineal, sino que siempre toma la forma de un proceso cíclico, donde las reflexiones sobre el modelo, y la intención de su uso, llevan a una redefinición del modelo. Estos autores describieron de forma analítica el proceso de modelización matemática (ver Figura 1) consistente en los siguientes seis subprocesos: (a) *Formulación del problema*, formulación de una tarea que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada; (b) *Sistematización,* selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del *dominio de indagación* resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática; (c) *Matematización,* traducción de estos objetos y relaciones al lenguaje matemático; (d) *Análisis del sistema matemático,* uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones; (e) *Interpretación/Evaluación,* interpretación de los resultados y conclusiones considerando el *dominio de la investigación* inicial; y (f) *Validación*, evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

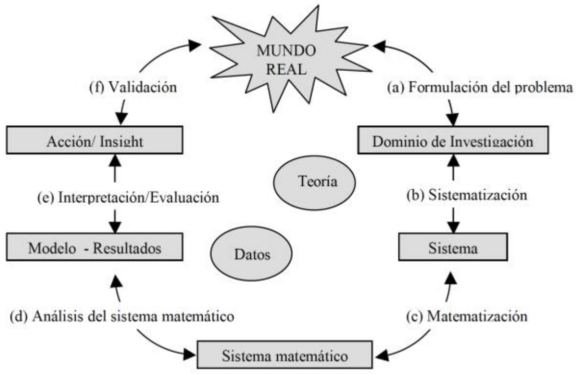


Figura 1. Modelo gráfico de un proceso de modelización matemática (Blomhøj, 2004, p. 148)

Un aspecto que queremos destacar de esta descripción es que los autores insisten en la necesidad de retorno a la indagación cuando se deba empezar a interpretar la validez de los modelos matemáticos en el sistema considerado (subproceso *e*). Además, afirman que los datos empíricos y el conocimiento teórico (indicados mediante dos elipses en la Figura 1) concernientes al dominio de la indagación son la base de todos los sub-procesos del ciclo de modelización, estableciendo un claro vínculo entre indagación y modelización.

El modelo cíclico de la Figura 1, según Blomhøj (2004), no pretende describir el camino ideal que un alumno debe recorrer en un proceso de modelización, no obstante, recomienda que los estudiantes trabajen con los diversos sub-procesos en contextos diversos para ir desarrollando la competencia de modelización. Afirma que, en una situación de enseñanza, es el contexto el que tiene el potencial para desafiar a los alumnos a trabajar en todas las partes o subprocesos de modelización pero también advierte de que no todos los contextos son igualmente adecuados.

Blomhøj y Jensen (2003) también se ocuparon de definir *competencia de modelización*. De su definición se puede inferir que un estudiante es competente en modelización cuando domina todos los subprocesos descritos (y representados en la Figura 1): "Por competencia en modelización matemática quiero decir ser capaz de llevar a cabo de forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado (..)" (Blomhøj, 2004, p. 26).

En relación al estudio y conceptualización de la indagación en el marco de la "Enseñanza Basada en Indagación", se han impulsado muchas investigaciones, algunas de las cuáles han dado resultados relevantes, tanto desde la perspectiva de la educación científica como de la matemática. Entre ellas, tal como mencionan Dorier y Maaß (2014), hay que resaltar la investigación de Artigue y Baptist (2012), en el marco del proyecto Fibonacci, con el objetivo de promover e investigar sobre la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Basada en la Indagación, así como las relaciones entre ésta y la Educación Científica Basada en la Indagación. Este proyecto define la indagación de la siguiente forma: "indagación es un término utilizado tanto dentro de la educación como en la vida cotidiana para referirse a la búsqueda de conocimiento o información haciendo preguntas". Artigue, Dillon, Harlen y Léna (2012, p. 9), afirman que "la ciencia y las matemáticas comparten el dominante modo de construcción de conocimiento a través de la investigación.", centrándose en el estudio del proceso de construcción de la comprensión a través de la recopilación de evidencias para probar posibles explicaciones y las ideas detrás de ellas de una manera científica.

Sala (2016) se centró también en caracterizar la competencia de indagación, contemplando además la perspectiva curricular nacional. Uno de los resultados de esta investigación fue una tabla analítica de los siete subprocesos que constituyen el proceso de indagación. Esta tabla de caracterización puede consultarse en Sala (2016, p. 67) y en Sala, Font y Giménez (2015, p. 489).

Fruto del trabajo de investigación sobre la caracterización de la competencia de indagación fue también la siguiente definición, más vinculada al currículum que a la propia caracterización de la competencia, que describe la competencia de indagación como:

> La facultad de movilizar los conocimientos y los recursos adecuados para aplicar un método lógico y razonable, con la ayuda y supervisión de la persona docente, para encontrar respuestas a preguntas sobre aspectos o situaciones problemáticas dentro del contexto de las materias escolares, que aún no han sido solucionadas en el nivel y en el ámbito adecuado a los conocimientos, habilidades y actitudes que se poseen. (Sala, 2016, p. 64)

Por ello, dado que Artigue et al. (2012) también describen el proceso de indagación como un proceso dinámico y lo representan con un gráfico que muestra sus características cíclicas, en el mismo sentido que lo hacen Blomhøj y Jensen (2003) en la descripción del proceso de modelización matemática, durante nuestra investigación sobre las conexiones entre modelización matemática e indagación, se elaboró un gráfico (Figura 2) para representar la conceptualización del proceso de indagación a partir de su caracterización.

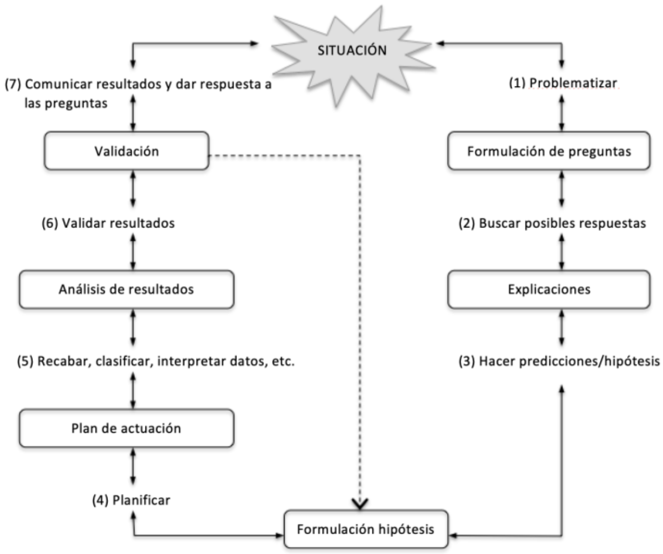


Figura 2. Modelo gráfico de un proceso de indagación (fuente propia)

El modelo gráfico que se presenta (Figura 2) corresponde a un proceso de indagación ideal, que no tiene porqué corresponder exactamente con el recorrido real que realiza el alumnado en una aula cuando están inmersos en una indagación, dentro del contexto escolar. Es un modelo cíclico que, igual que en el diagrama del proceso de modelización, parte de una situación real y pretende mostrar el dinamismo del proceso. Los estudiantes pueden realizar solo algunos de los subprocesos indicados y sus acciones las podríamos localizar avanzando y/o retrocediendo en el diagrama, en función de su nivel competencial y de los retos que ofrezca el contexto de la indagación.

Los subprocesos que caracterizan el proceso de indagación, basados en (Sala, 2016, p. 67), son siete (ver Figura 2) y se describen analíticamente de la siguiente forma: (1) *Problematizar*, traducir a preguntas la situación problemática presentada para poder transformarla en objeto de investigación; es imprescindible al inicio de la indagación pero puede también ser necesario en un momento intermedio para poder seguir avanzando y encontrar respuestas parciales; (2) *Buscar posibles respuestas*, mostrar intencionadamente una actitud crítica, de duda, y contrasta la información que emerge (del contexto y de los trabajos de indagación en curso) con sus ideas previas, lo que le permite encontrar explicaciones y decidir si debe continuar investigando; (3) *Hacer predicciones/hipótesis*, construir predicciones y/o hipótesis a partir de diferentes variables que identifica en la situación problemática, con el objetivo de contrastarlas; (4) *Planificar*, participa, organiza (y lidera) la comunidad de investigación de la que forma parte, proponiendo de forma justificada planificaciones flexibles y adaptables al curso de los trabajos de indagación; (5) *Recabar, clasificar, interpretar datos, etc.*, busca, recoge, registra y escoge, de entre todas las posibles fuentes, la información útil para la indagación; elabora, analiza y valora la información creando conexiones entre ésta y las hipótesis planteadas, con la ayuda de las herramientas teóricas necesarias escogidas conscientemente; (6) *Validar resultados*, valida los resultados contrastándolos con las hipótesis formuladas y argumenta críticamente; en el caso de no validación de la hipótesis, se contempla la posibilidad de buscar explicaciones alternativas en base a las evidencias y partiendo de formular nuevas hipótesis (en la Figura 2 se muestra con una flecha a rayas de retorno desde el rótulo de *Validación* hasta el rótulo de *Formulación de hipótesis*); y (7) *Comunicar resultados y dar respuesta a las preguntas*, elabora informes de indagación rigurosos, argumentando con los resultados las respuestas a las preguntas planteadas surgidas del contexto problemático, responde a cualquier tipo de pregunta sobre el trabajo de indagación llevado a cabo y sobre su impacto y limitaciones; reflexiona, individualmente y en grupo, sobre el propio trabajo y el trabajo en equipo.

En relación con los posibles puntos en común entre modelización matemática e indagación, Harlen (2012b) hace algunas reflexiones sobre las semejanzas y las diferencias entre las experiencias de aula que fomentan la comprensión en ciencias y matemáticas. Por un lado, coinciden en ambas experiencias la importancia de establecer un compromiso por resolver un problema, trabajar de forma colaborativa, las discusiones y diálogo, poder considerar enfoques alternativos, el pensamiento crítico, la reflexión sobre el aprendizaje y la comunicación. En ambas aulas el alumnado se dedica a responder preguntas o resolver problemas de los que no saben la solución y sobre los que desean encontrar la respuesta. En relación a las diferencias, se observan diferentes enfoques del trabajo, en cómo se abordan los problemas o preguntas, cómo se buscan las soluciones, la base de validación de éstas y la naturaleza de las explicaciones. Además, una parte importante del proceso de indagación en las aulas de matemáticas consiste en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática. Se hace especial hincapié en puntualizar que en la enseñanza basada en indagación en el marco de educación matemática, el término *modelización* normalmente es usado en un sentido estricto, haciendo referencia exclusivamente al proceso que involucra la matematización y la construcción de modelos matemáticos.

En definitiva, diversos autores destacan los múltiples puntos de contacto entre el ámbito de indagación y de modelización (Artigue y Blomhøj, 2013). Por ello, en nuestra investigación nos propusimos hallar algunas relaciones entre los procesos de modelización y de indagación a partir de analizar los subprocesos modelización y los subprocesos de indagación en una misma implementación de una secuencia didáctica de contexto real arqueológico.

Como se ha mencionado anteriormente, Sala (2016), durante la investigación que dio lugar a su Tesis Doctoral, analizó la implementación de diversas secuencias didácticas con el objetivo de caracterizar la competencia de indagación de los participantes. Pero fue durante este análisis que advirtió que podían haber surgido elementos de modelización matemática que analizó en Sala, Font, Giménez y Barquero (2017) y en Sala, Font, Barquero y Giménez (2017).

No obstante, en el trabajo que se presenta aquí, el análisis se ha focalizado en el estudio de las relaciones entre ambos procesos. Para ello, nos basamos en la descripción del proceso de modelización matemática de Blomhøj y Jensen (2003) (ver Figura 1) y en la descripción del proceso de indagación ofrecido por Sala (2016) (ver Figura 2) para investigar sobre las conexiones existentes entre ambos procesos cuando los alumnos siguen una secuencia didáctica de indagación en un contexto arqueológico.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DURANTE LA INDAGACIÓN

Se analiza la implementación realizada durante dos semanas del curso 2014-15 con un grupo de 30 estudiantes de primero de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) de un instituto de Badalona (Catalunya, España), de una secuencia didáctica que se denominó *¿Qué esconden estas ruinas?* Mientras duró la implementación se interrumpió el horario habitual de clases del alumnado, que se dedicó en exclusiva a seguir la indagación planteada. Previamente a la implementación el alumnado había estudiado el proceso de romanización de los territorios de la actual Catalunya, así como, los siguientes contenidos matemáticos: rectas y ángulos, polígonos (triángulos y cuadriláteros), perímetros y áreas, circunferencia y círculo.

En la experimentación participaron conjuntamente las profesoras de matemáticas y de historia —que actuaron como guías— junto a la primera autora de este trabajo —que actuó como observadora no participante. Los datos se tomaron de las grabaciones de algunas de las sesiones, de las producciones del alumnado (p.ej. informes entregados, exposiciones orales, etc.) y del diario de campo de la observadora.

La problemática inicial planteada al alumnado, que se organizó en equipos de indagación de 3 personas, fue una situación basada en el descubrimiento de unas ruinas romanas en el centro de Badalona por el equipo de arqueólogos del Museo de Badalona, hace una década. Investigaciones arqueológicas (Padrós y Moranta, 2001) explican que estas ruinas podrían corresponder a un antiguo edificio perteneciente a la ciudad clásica *Baetulo* —el nombre romano de Badalona. El problema que inició la indagación fue averiguar a qué tipo de edificio público podrían corresponder las ruinas romanas descubiertas. Las preguntas iniciales fueron propuestas por las profesoras[xli].

Los ciclos de indagación y/o modelización anteriormente descritos sirvieron como herramientas para analizar cómo los estudiantes iban avanzando y/o retrocediendo a través de las diversas cuestiones que se iban planteando. La pregunta inicial que inició y motivó la indagación fue ¿Qué esconden estas ruinas? Según el diagrama de la Figura 2, diremos que la *problematización* de la situación real (subprocesos (a) y (1) de las Figuras 1 y 2, respectivamente) los estudiantes la concretaron con la siguiente pregunta: ¿A qué tipo de edificio romano pueden corresponder las ruinas romanas encontradas?

Frente a esta primera cuestión, la historia aporta *posibles respuestas* (subproceso (2), Figura 2): teatro, circo, anfiteatro, basílica, termas, panteón, templo, etc. La *explicación* de que fuese un edificio u otro podía ser de diferentes tipos, pero la más idónea para resolver la tarea en el contexto escolar en que se propuso era basarla en la forma del edificio: si es una elipse puede tratarse de un anfiteatro, si es un semicírculo podría ser un teatro o, si además tuviera una parte de su perímetro rectangular, un circo, etc. y quedaron descartados todos los edificios con planta exclusivamente poligonal, ya que el muro es curvilíneo. Pero para que esta explicación fuera aceptable fue necesario abrir otro ciclo de preguntas, posibles respuestas y explicaciones, volviendo atrás en el diagrama de la Figura 2. La pregunta formulada fue: ¿Qué formas geométricas pueden encajar con la forma del muro parcial del edificio descubierto por los arqueólogos (un muro curvilíneo de 1.5 metros de altura)?

Dado que el muro es curvilíneo y teniendo en cuenta las formas de los edificios, se *conjeturó/formuló la hipótesis* (subproceso (3), Figura 2) que el muro romano podría formar parte de un edificio de forma curva, como el teatro (semicircular), el anfiteatro (elíptico) o el circo (con una parte de su planta semicircular). Con ello surgieron preguntas derivadas que se concretaron en: ¿Como podríamos comprobar con cuál de estas formas encaja el contorno del muro descubierto?

Por lo tanto, para avanzar en la indagación se planteó, con la ayuda y guía de las profesoras de Historia y de Matemáticas un *plan de actuación* (subproceso (4), Figura 2), para determinar la forma de la curva de la cual el trozo de muro formaba parte. Para ello, el alumnado realizó diversas acciones para encontrar respuestas donde el papel fundamental lo tuvieron las matemáticas. Más concretamente, para indagar si el muro romano formaba parte de una elipse o de una circunferencia los estudiantes se desplazaron a una plaza pública cerca de su escuela donde previamente las profesoras habían dibujado la forma del muro romano en el suelo de acuerdo con la información arqueológica de que se disponía. Allí, el alumnado intentó encajar el muro dibujado en una elipse de forma gráfica y con un procedimiento manual basado en su definición. Así pues, dos estudiantes permanecieron quietos en los focos (determinados por ensayo-error) de la posible elipse, sosteniendo cada uno el extremo de una cuerda por donde se había pasado una anilla que podía moverse a lo largo de la cuerda. Un tercer estudiante, sosteniendo la anilla de manera que la cuerda estuviera tensada en todo momento, intentó reseguir el muro dibujado. Este proceso de *recogida e interpretación de datos* (subproceso (5), Figura 2) se repitió diversas veces, cambiando el lugar de los focos para intentar reseguir el muro como forma de validación del modelo geométrico considerado. Pero el alumnado determinó así que este no podía ser parte de una elipse. Descartada la elipse, el alumnado intentó encajar el muro en una circunferencia, aproximando su centro y radio. Para *recoger nuevos datos, matematizarlos e interpretarlos* los equipos de indagación se sirvieron de diferentes procedimientos de construcción. En primer lugar, intentaron encontrar el centro por ensayo-error, tanteando posibles centros. Dado que no dio muy buenos resultados, lo volvieron a intentar dibujando con yeso algunas de las tangentes en diferentes puntos del muro, se trazó la perpendicular (con regla y escuadra grandes de madera) a esas tangentes para encontrar el centro en su intersección y después poder determinar el radio. Otros equipos prefirieron probar con el procedimiento de dibujar dos mediatrices a partir de tres puntos del arco de muro, con la ayuda de cuerda y yeso para marcar. En el punto de corte de las mediatrices encontraron el centro. Por lo tanto, se concluyó que el muro pertenecía a un edificio circular, validando el modelo y la hipótesis inicial. Entendemos que en este momento de la indagación, los estudiantes realizaron subprocesos de modelización matemática correspondientes a *sistematización* y *matematización* (subprocesos (b) y (c), Figura 1) de los datos.

Esta primera etapa de indagación permitió *validar* el modelo construido (subproceso (f) y (6), Figuras 1 y 2, respectivamente) dando respuesta a la pregunta planteada: el muro encajaba con una circunferencia.

Por un lado, ante la complejidad del problema matemático, como era la de descubrir qué tipo de curva podía encajar en el muro, el contexto histórico de la situación, es decir, el retorno de la modelización matemática al dominio de la indagación, jugó un papel clave permitiendo al alumnado reconocer las *hipótesis* más plausibles, ya que limitó las posibles curvas a considerar de acuerdo con las formas que se usaba en la construcción de los edificios públicos romanos (elipse o circunferencia). Sin este contexto histórico, el problema hubiera sido demasiado complicado (desde un punto de vista estrictamente matemático) para el alumnado de esta etapa educativa al no poseer los conocimientos suficientes.

Pero la historia continuó teniendo un rol importante en la indagación, ya que aunque los estudiantes supieran que la forma del edificio en ruinas era de circunferencia se abrían dos posibilidades. El edificio podía ser un teatro (planta semicircular) o bien, un circo (planta de un lado semicircular y rectangular del otro). Para determinar de cuál de estos dos edificios se podía tratar, se necesitaron datos históricos acerca de las dimensiones y envergadura de cada tipo de edificio. Los estudiantes partieron de estas dos *nuevas hipótesis* (subproceso (3), Figura 2) y se plantearon las siguientes cuestiones: ¿Podríamos dibujar, con los datos que tenemos, la planta de un teatro y de un circo para saber cómo eran exactamente?

En esta etapa se inició un nuevo ciclo de indagación para *recabar información* (subproceso (5), Figura 2) sobre la arquitectura de época romana. Se ofreció a los estudiantes la posibilidad de conocer la obra "De architectura" de *Marcus Vitruvius*, donde se especifican los cánones de construcción de diversos edificios públicos romanos etc. Después de una puesta en común, se decidió intentar validar la hipótesis de que el edificio era un teatro. Entonces, el alumnado con la ayuda de las profesoras, *planificó* (subproceso (4), Figura 2) las acciones a llevar a cabo partiendo de *sistematizar* (subproceso (b) Figura 1) los datos recogidos en la anterior etapa de la indagación (datos del informe arqueológico, datos históricos, datos del enclave del yacimiento, datos del ciclo de modelización realizado en la primera etapa, etc.), *interpretándolos y matematizándolos* (subproceso (d), Figura 1) según el canon de *Vitruvius* para la construcción de teatros. El alumnado pudo consultar una versión facsímil del tratado, traducido al español para poder construir un modelo de teatro romano con los datos recogidos, mediante Geogebra. Todo este proceso dio como resultado un modelo geométrico del posible teatro de *Baetulo* que cada equipo de investigación *construyó, ajustó y simuló* (subprocesos (d) y (e), Figura 1) con la información que havía recabado y puesto en común con los otros equipos. Este es otro momento donde la indagación conecta con la modelización matemática

Una vez los diferentes equipos de indagación hubieron construido sus modelos (no todos siguieron el canon de Vitruvius) con GeoGebra, las profesoras, con el objetivo de que los alumnos tuvieran que *evaluar* sus modelos para ver si se trataba del teatro de *Baetulo*, descartando así la hipótesis de que fuera un circo, formularon nuevas preguntas: ¿El modelo construido encaja de forma adecuada en el plano dimensional de la zona donde se hallaron las ruinas?

Para responder a esta pregunta, el alumnado superpuso su imagen del modelo del teatro obtenida con GeoGebra, sobre el plano del lugar del yacimiento arqueológico (donde se pueden observar los detalles y contornos de los restos encontrados) adecuándolo a su escala para ver si se conseguía encajar los contornos de ambos. Es decir, los estudiantes decidieron que era necesario *interpretar* y *evaluar* (subproceso (c), Figura 1) el modelo realizado con la realidad. Dado que el proceso de encaje del modelo suponía una reducción o ampliación del mismo, era necesario comprobar que el resultado seguía cumpliendo las características de los teatros romanos, según *Vitruvius*, más allá de la forma, como por ejemplo, la ubicación (que la situación de las salidas del teatro coincidiesen con espacios del mapa donde hubiera habido una plazoleta) o que, aplicando la escala indicada en el mapa al edificio se mantuvieran sus proporciones, tal y como indicaba el canon. Los alumnos realizaron estas comprobaciones de forma satisfactoria obteniendo la respuesta a la pregunta, y *validando la hipótesis* (subproceso (f) y (6), Figuras 1 y 2, respectivamente) acerca de que el muro debió pertenecer a un teatro romano.

Finalmente, tras una puesta en común para compartir el trabajo realizado por todos los equipos de investigación, el alumnado confeccionó un informe de la indagación con el objetivo de *comunicar sus resultados* (subproceso (7), Figura 2) y dar respuesta a las preguntas y a la situación problemática inicial.

RELACIONES ENTRE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA E INDAGACIÓN

El uso de los modelos (y su representación gráfica) del proceso de modelización matemática (Blomhøj y Jensen, 2003) y del proceso de indagación (Sala, 2016) ha facilitado llevar a cabo el análisis de la implementación de una secuencia didáctica con el objetivo de identificar los subprocesos que el alumnado ha realizado y las relaciones que se han establecido entre ambos procesos. Se han podido describir el avance y retroceso del alumnado por los ciclos de modelización e indagación, ciclos que no se realizan solo una vez, sino que se repiten cada vez que surgen nuevas cuestiones parciales en las que se desmenuza la pregunta principal y que no avanzan en ningún caso linealmente hacia delante.

En relación a los subprocesos del ciclo de indagación podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes han realizado todos los subprocesos. No hemos estudiado qué nivel competencial han alcanzado porque no era el objetivo de este trabajo. De la misma manera, los estudiantes, se han involucrado en el proceso de modelización matemática cuando los datos recabados del contexto eran susceptibles de ser matematizados, concretamente, al menos en dos momentos de la secuencia didáctica: en la actividad realizada en la plaza para descubrir con qué tipo de curva encajaba el muro romano y en la construcción del modelo geométrico del teatro romano mediante GeoGebra.

Cuando los alumnos se encuentran ante una situación problemática, cuyo contexto les supone un reto, se inician ambos procesos de indagación y de modelización a partir de la problematización, de la traducción en preguntas, de esa situación anclada en la realidad y que reclama respuestas. A lo largo de la indagación hemos observado que hay ciertos elementos (comunes a los procesos de indagación y modelización matemática), como la necesidad de analizar e interpretar datos, que promueven que algunos alumnos utilicen las matemáticas como una herramienta eficaz. En estas ocasiones la mayoría de los alumnos se inicia en la modelización matemática, realizando la mayoría de subprocesos descritos. También el subproceso de validación de respuestas parece que emerge como un elemento común al proceso de modelización y al de indagación.

Durante los ciclos de indagación hemos podido obtener evidencias de modelización matemática, promovidos por la necesidad de dar respuestas precisas a preguntas pertenecientes a la arqueología y la historia. Es decir, el contexto ha jugado un rol importante en crear la *necesidad de usar las matemáticas* e iniciar subprocesos propios de la modelización matemática. También es cierto que el hecho que el problema estuviera radicado en un contexto real concreto ha hecho posible que la indagación fuera un reto asumible para los estudiantes, al acotar las respuestas matemáticamente plausibles. Por ejemplo, al estudiar con qué curva podría encajar el trozo de muro romano (en la actividad en la plaza pública, descrita anteriormente), los modelos se reducían a los posibles contornos de los edificios romanos y no a los infinitos modelos de curvas posibles existentes.

Para finalizar, este es un trabajo de análisis de las relaciones entre los procesos de modelización matemática e indagación incipiente en el cual tenemos la intención de profundizar ya que nos parece interesante poder identificar cuáles son los elementos de la indagación que emergen como potenciadores de la modelización matemática, despertando el interés de los estudiantes para involucrarse en su práctica.

Referencias

Artigue, M. y Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education. En S. Borda-Carulla (Coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School.* Recuperado de: https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. y Léna, P. (2012). *Learning Through Inquiry*. En S. Borda-Carulla (coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School.* Recuperado de: http://www.fibonacci-project.eu/

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johanson, D. V. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-160). Goteborg, Suecia: NCME, Goteborg University.

Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123-139.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Doorman, M., Jonker, V. y Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. Friburgo, Alemania: University of Education.

Dorier, J-L. y Maaß, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300-304). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Harlen, W. (2012a). The *Tools for Enhancing Inquiry in Science Education* and inquiry in mathematics. En S. Borda-Carulla (Coord.), *Tools for Enhancing Inquiry in Science Education* (pp. 31-34). Recuperado de: https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/1-tools_for_enhancing_inquiry_in_science_education.pdf

Harlen, W. (2012b). Inquiry in Science Education. En S. Borda-Carulla (coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School*. Recuperado de: https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_science_education.pdf

Maaß, K. y Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM, 45*(6), 887-899.

Maaß, K. y Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM, 50*(1-2), 273-285.

Padrós, P. y Moranta, L. B. (2001). La ciutat i la memòria: el teatre romà de Baetulo. *Carrer dels Arbres, 3a època*, *12*, 15-31.

Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària* (Tesis doctoral no publicada) Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Sala, G., Font, V., Barquero, B. y Giménez, J. (2017). Mathematical modelling in an archaeological context: Their complementarity as essential tool for inquiry. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 1033-1040). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Sala, G., Font, V. y Giménez, J. (2015). Una mirada curricular a la competencia de indagación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 485-490). Alicante: SEIEM.

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer.

[xl] Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE-UB) y RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

[xli] La descripción detallada del diseño puede consultarse en Sala (2016).

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE FUTUROS PROFESORES A UN CUESTIONARIO SOBRE EL DESARROLLO DE LA CREATIVIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Analysis of preservice teachers' responses to a questionnaire about the development of creativity in mathematics classroom

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A.

Universidad de Barcelona

Resumen

En este trabajo se analizan las respuestas de 43 futuros profesores de matemáticas de secundaria a un cuestionario sobre la creatividad y su desarrollo en las aulas. Los futuros profesores, alumnos de un máster de formación de profesorado, no recibieron una formación específica sobre el tema de la creatividad durante el máster. El cuestionario consta de 26 preguntas tipo Likert y 5 preguntas abiertas. Las preguntas tipo Likert se analizaron con técnicas descriptivas, a partir de los porcentajes de respuesta. A continuación, se realizó un análisis de contenido de las respuestas a las preguntas abiertas. Finalmente, se combinó la información de ambos análisis. Se observa que la mayoría de los participantes considera que la creatividad es una cualidad que se puede desarrollar e identifica acciones que pueden favorecer su desarrollo en las clases de matemáticas. En cambio, menos de la mitad describe una actividad concreta en este sentido.

Palabras clave: *futuros profesores, enseñanza secundaria, creatividad, matemáticas.*

Abstract

In this study, we analyze the answers of 43 secondary school preservice teachers of mathematics to a questionnaire about creativity and its development in the classroom. The preservice teachers, who are students of a master's degree in teaching in secondary school, did not receive specific training in the subject of creativity during the master's degree. The questionnaire consists of 26 Likert questions and 5 open questions. We analyzed the Likert questions using descriptive techniques, based on the answering percentages. Then, we did a content analysis of the responses to open questions. Finally, we combined the information from both analyses. We observe that most of the participants consider that creativity is a quality that can be developed and identify actions that can promote its development in the mathematics classroom. However, less than half of the participants describe an activity according to this discourse.

Keywords: *preservice teachers, secondary school, creativity, mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones sitúan la creatividad en el foco de interés, relacionándola con otras habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la comunicación y el uso de nuevas tecnologías (Pásztor, Molnár, y Csapó, 2015). En muchos casos, los currículos educativos incluyen el desarrollo de la creatividad entre sus objetivos. Concretamente en matemáticas, algunos autores (Mann, 2006; Silver, 1997) destacan el papel fundamental de la creatividad para resolver y proponer problemas y consideran que el docente debería plantearse el desarrollo de la creatividad en el aula de manera inclusiva, teniendo en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje de sus alumnos. Esta visión contrasta con otros puntos de vista que consideran que la creatividad es una capacidad innata y no contemplan la posibilidad de que se pueda desarrollar (Silver, 1997).

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 543-552). Valladolid: SEIEM.

Conocer las concepciones que tienen los profesores sobre creatividad nos puede dar información de cómo podrían desarrollarla en las clases. En este sentido, se han llevado a cabo investigaciones que estudian las concepciones de los profesores (Aktaş, 2016; Barquero, Richter, Barajas y Font, 2014; Lev-Zamir y Leikin, 2011; Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan, 2016) y, en ocasiones, se comparan con su práctica en el aula (Lev-Zamir y Leikin, 2013). Otras investigaciones también se centran en la formación de profesores que les permita fomentar la creatividad de sus alumnos (Hosseini y Watt, 2010; Panaoura y Panaoura, 2014). En particular, el objetivo de nuestro estudio es identificar las ideas acerca de la creatividad que tienen los futuros profesores de matemáticas de secundaria y distinguir qué criterios proponen para su desarrollo en el aula.

MARCO TEÓRICO

La investigación en creatividad asume diferentes definiciones y caracterizaciones del término (Joklitschke, Rott y Schindler, 2018; Kampylis y Valtanen, 2010) y diversas maneras de desarrollar la creatividad (Kaufman y Sternberg, 2006; Sriraman, 2004). Ante esta diversidad, surgen modelos que comprenden diferentes tipos o niveles de creatividad. Un ejemplo es el modelo 4C de Kaufman y Beghetto (2009), que distingue: la creatividad cotidiana (little-c), para resolver situaciones del día a día; la creatividad para interpretar experiencias o eventos que sean novedosos para el individuo, basándose en lo que conoce (mini-c), que se podría relacionar con el aprendizaje personal; la creatividad a nivel profesional (Pro-c); y la creatividad de los genios, aquellas personas que hacen una aportación ampliamente reconocida en una o varias disciplinas (Big-C). Por tanto, en este estudio, cuando se hace referencia a la creatividad de los alumnos, correspondería al nivel mini-c, ya que nos situamos en el contexto de las clases en Educación Secundaria.

Otro enfoque es la caracterización de la creatividad en términos de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración (Almeida, Prieto, Ferrando, Oliveira y Ferrándiz, 2008; Sriraman, 2004). Los Tests de Torrance del Pensamiento Creativo (TTCT, por su sigla en inglés), por ejemplo, utilizan estos componentes como criterios para valorar la creatividad del individuo. La fluidez se define como el número de respuestas que ofrece el individuo en una tarea. La flexibilidad corresponde a los diferentes tipos de respuesta que proporciona. La originalidad se refiere a aquellas respuestas que son poco comunes, novedosas. Y la elaboración se entiende como la cantidad de detalles que se incluyen en la respuesta. Lev-Zamir y Leikin (2011) consideran estos componentes en su modelo de las concepciones de la creatividad en la enseñanza de las matemáticas que tienen los profesores. En su modelo distinguen las concepciones en subcategorías que se refieren a la flexibilidad, la originalidad y la elaboración del alumno, por una parte, y del profesor, por otra.

Respecto a los elementos que afectan al desarrollo de la creatividad, encontramos investigaciones que analizan cómo se relaciona la creatividad con la inteligencia, la manera de pensar, la personalidad, el conocimiento y la formación previa, la motivación, el entorno y la interacción con otras personas (Kaufman y Sternberg, 2006; Sriraman, 2004). Por otra parte, algunos autores entienden la creatividad matemática, en concreto, como un proceso que surge de la interacción de otros procesos matemáticos, como la generalización, la búsqueda de conexiones, la validación, la exploración y el planteamiento de conjeturas y problemas (Sala, Font, Barquero y Giménez, 2017).

Por otro lado, hay autores que distinguen diversas fases dentro de los procesos creativos (Sriraman, 2004). El modelo Gestalt para describir el proceso creativo en matemáticas diferencia las siguientes fases: preparación, donde se estudia el problema a resolver y diferentes combinaciones de estrategias y elementos que puedan ser útiles en la resolución; incubación, fase de actividad inconsciente donde el individuo ya no se dedica a pensar en cómo resolver el problema; iluminación, momento en el que surge una idea que puede conducir a la resolución del problema; y verificación, donde se aplica la idea de la fase anterior y se comprueba si resuelve el problema.

Como resultado de esta investigación esperamos determinar, entre otros aspectos, los criterios hipotéticos que orientarían la práctica del futuro profesor, en el caso de que éste se propusiese el desarrollo de la creatividad en los alumnos. Dichos criterios se pueden interpretar como creencias, si entendemos, de acuerdo con Peirce, la creencia como una disposición para la acción.

METODOLOGÍA

El objetivo de esta investigación es identificar las ideas acerca de la creatividad que tienen los futuros profesores de matemáticas de secundaria y distinguir qué criterios proponen para su desarrollo en el aula, sin que hayan recibido una formación específica para ello. Con esta finalidad, se utilizó un cuestionario que consta de 26 preguntas cerradas tipo Likert donde indicar el grado de acuerdo o desacuerdo (de 1 a 5) y 5 preguntas abiertas. Las preguntas cerradas se organizan en seis ámbitos: 1) Características de la creatividad y el pensamiento creativo, 2) Elementos del proceso creativo, 3) Características de un estudiante creativo, 4) Características de un profesor creativo, 5) Elementos para promover la creatividad matemática en el aula de secundaria, y 6) Consecuencias positivas de trabajar de manera creativa. Las preguntas abiertas complementan la información de las preguntas cerradas. El cuestionario se modificó a partir de otro utilizado en investigaciones previas (Barquero et al., 2014), introduciendo aspectos que se consideraban de interés y adaptándolo al contexto de los participantes en este estudio, alumnos de un máster de formación de profesorado de secundaria. En concreto, se añadieron las preguntas A.2.6, B.4.1, B.4.2, B.4.3, C.4 y C.5. Los cambios se hicieron para conseguir el objetivo propuesto y fueron revisados por un investigador con amplia experiencia en este máster y, también, como miembro de equipos de investigación en proyectos relacionados con el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas.

El cuestionario se implementó en los tres grupos de un máster de formación de profesorado de secundaria (especialidad de matemáticas) del curso 2017-2018, con los alumnos asistentes ese día que voluntariamente quisieron contestarlo, en total 43. Los participantes disponían de una hora para contestar el cuestionario. En ese momento, los futuros profesores, aunque tuvieran una formación previa variada (grado en matemáticas, en física, ingenierías, economía, etc.), ya habían realizado las prácticas en los centros implementando una unidad didáctica, por lo que tenían experiencias reales de aula. Durante el máster, los futuros profesores no reciben una formación específica sobre desarrollo de la creatividad en sus alumnos, aunque es posible que se haga algún comentario al respecto. Para verificar esta suposición, la pregunta abierta C.5 del cuestionario pide precisamente que identifiquen, si es posible, algún momento durante el curso en el que se hayan transmitido ideas en relación a la creatividad matemática o trabajo creativo en el aula de secundaria.

Primero, se analizaron las respuestas a las preguntas tipo Likert a partir de los porcentajes de respuesta en los diferentes niveles para cada pregunta. A continuación, se realizó un análisis de contenido de las respuestas a las preguntas abiertas. Se generaron categorías de tipo inductivo a partir de fragmentos de las respuestas en las preguntas C.1 (¿Qué características consideráis que debe tener una actividad matemática que promueva la creatividad? Indicad brevemente tres de estas características), C.2. (¿Qué consideráis que se puede hacer en el aula para promover la creatividad matemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?) y C4 (¿Qué importancia debería tener, dentro de la labor docente, que los profesores de matemáticas diseñen actividades didácticas que permitan desarrollar la creatividad de sus alumnos?). Al analizar la pregunta C.3 (¿Puedes dar algún ejemplo de actividad matemática donde hayas observado o supongas que se promueve la creatividad? Justificad vuestra respuesta indicando sus principales características) se contrastaron las actividades que proponían los futuros profesores con las características que se habían identificado en las preguntas C.1 y C.2. Por último, en la pregunta C.5 se identifican las asignaturas del máster donde se han introducido algunas ideas sobre creatividad. Finalmente, se compararon los resultados de las preguntas cerradas con los de las preguntas abiertas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se explican los resultados obtenidos, primero, en las preguntas cerradas y, a continuación, las preguntas abiertas. En la Tabla 1 se muestran las frecuencias relativas en forma de porcentaje de respuesta a los diferentes niveles para cada pregunta tipo Likert, donde 1 corresponde a "muy en desacuerdo", 2 a "en desacuerdo", 3 a "ni de acuerdo ni en desacuerdo", 4 a "de acuerdo" y 5 a "muy de acuerdo". En el caso de las preguntas del bloque B.3 los niveles se distribuyen de "poco impacto" a "mucho impacto", siendo este último el que se indicaba con 5.

Tabla 1. Respuestas a las preguntas tipo Likert

A.1. ¿Qué caracteriza la creatividad y el pensamiento creativo?	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %
1. La creatividad es una cualidad o capacidad innata	11,6	25,6	30,2	20,9	11,6
2. La creatividad es una cualidad que se puede desarrollar, educar, instruir, etc.	0,0	11,6	18,6	30,2	39,5
3. El pensamiento matemático creativo es una consecuencia de momentos puntuales de inspiración	14,0	39,5	25,6	16,3	4,7
4. El pensamiento creativo está asociado a un proceso de estudio largo y profundo de una situación problemática	18,6	20,9	30,2	27,9	2,3
A.2. ¿Qué elementos son importantes en un proceso o trabajo creativo?					
1. La interacción con otras personas y/o diferentes puntos de vista es importante para desarrollar un trabajo creativo	2,3	2,3	7,0	39,5	48,8
2. Para poder avanzar en un proceso creativo hace falta una formación rica y robusta en conocimientos específicos (en matemáticas, en arte, en tecnología, etc.)	9,3	27,9	34,9	14,0	14,0
3. La interacción entre diferentes disciplinas no es relevante para generar creatividad	46,5	30,2	16,3	7,0	0,0
4. En un proceso creativo siempre aparecen contribuciones originales o novedosas	9,3	27,9	34,9	18,6	9,3
5. El proceso creativo acostumbra a priorizar una forma de abordar el/los problema/s	9,3	20,9	44,2	25,6	0,0
6. Es necesario que la persona esté motivada con el tema que trata para poder ser creativa	7,0	2,3	9,3	48,8	32,6
B.1. ¿Cómo es un/a estudiante creativo/a?					
1. Es capaz de formular cuestiones e iniciar investigaciones	2,3	7,0	16,3	39,5	34,9
2. Tiene un fuerte conocimiento de conceptos y herramientas matemáticas	7,0	27,9	41,9	16,3	7,0
3. Sabe encontrar diferentes maneras de representar los conceptos o de llegar a la solución de un problema	4,7	0,0	11,6	44,2	39,5
B.2. ¿Cómo es un/a maestro/a o profesor/a creativo/a?					
1. Tiene una actitud transgresora hacia la enseñanza tradicional de las matemáticas	11,6	4,7	37,2	37,2	9,3
2. Tiene un fuerte conocimiento de conceptos y herramientas matemáticas	7,0	9,3	39,5	27,9	16,3
3. Tiene herramientas y recursos para estimular la creatividad en sus estudiantes	0,0	0,0	7,0	41,9	51,2
4. Sabe cómo valorar y apoyar la creatividad en sus estudiantes	2,3	2,3	0,0	25,6	69,8
B.3. ¿Qué elementos consideras que tienen más o menos impacto en promover la creatividad matemática en nuestras aulas?					
1. La actitud del maestro o profesor	2,3	2,3	2,3	16,3	76,7
2. El uso de nuevas tecnologías para la enseñanza	7,0	4,7	30,2	48,8	9,3
3. La ruptura disciplinar (que las matemáticas entren en contacto con otras disciplinas)	2,3	2,3	11,6	55,8	27,9
4. Un buen diseño de actividades matemáticas	2,3	2,3	9,3	41,9	44,2
5. La/s actitud/es del/los estudiante/s	0,0	7,0	4,7	60,5	27,9
6. El contacto docencia con investigación	4,7	7,0	41,9	37,2	9,3
B.4. ¿Qué impacto puede tener el hecho de trabajar de manera creativa?					
1. El hecho de trabajar promoviendo la creatividad matemática hace que los alumnos aprendan más.	4,7	0,0	18,6	48,8	27,9

2. El hecho de trabajar promoviendo la creatividad matemática hace que los alumnos se esfuercen y trabajen más.	4,7	2,3	27,9	39,5	25,6
3. El hecho de trabajar promoviendo la creatividad matemática hace que a los alumnos les guste más la asignatura.	2,3	4,7	16,3	53,5	23,3

Se observa que más de la mitad de los participantes considera que la creatividad es una cualidad que se puede desarrollar, el 69,7% indica estar de acuerdo o muy de acuerdo con esta afirmación. Mientras que la visión de la creatividad como una cualidad o capacidad innata no es tan aceptada entre los futuros profesores (32,5%). Si comparamos las respuestas de cada participante en las preguntas A.1.1 y A.1.2, en general, o toman posiciones intermedias en ambas o se decantan claramente por una de las dos opciones (o bien entender la creatividad como cualidad innata o bien que se puede educar). A pesar de ello, 7 participantes indicaron estar de acuerdo o muy de acuerdo con ambas afirmaciones a la vez. Por otra parte, la mayoría de los futuros profesores no está de acuerdo con que el pensamiento creativo sea consecuencia de momentos puntuales de inspiración, pero tampoco lo asocian con un proceso de estudio profundo de la situación problemática. Respecto a los elementos que los futuros profesores destacan como más importantes en un proceso o trabajo creativo, encontramos la interacción con otras personas o diferentes puntos de vista (el 88,3% indica estar de acuerdo o muy de acuerdo en la pregunta A.2.1), la interacción entre diferentes disciplinas (el 76,7% estaría en desacuerdo o muy en desacuerdo en la pregunta A.2.3) y la motivación (el 81,4% indica estar de acuerdo o muy de acuerdo en la pregunta A.2.6).

A la hora de caracterizar a un estudiante creativo, los futuros profesores indican mayoritariamente que ha de ser capaz de formular cuestiones e iniciar investigaciones (el 74,4% están de acuerdo o muy de acuerdo) y saber encontrar diferentes maneras de representar los conceptos o resolver un problema (el 83,7%, de acuerdo o muy de acuerdo). En cambio, no dan tanta importancia a tener un fuerte conocimiento matemático. Igualmente, para caracterizar a un profesor creativo, destacan principalmente que tenga herramientas y recursos para estimular la creatividad de sus estudiantes (el 93,1% indica estar de acuerdo o muy de acuerdo) y que valore la creatividad en sus estudiantes (el 95,4%, de acuerdo o muy de acuerdo), y en menor medida su conocimiento matemático.

En general, los futuros profesores consideran que la actitud del profesor tiene mucho impacto en la promoción de la creatividad matemática en las aulas de secundaria (el 93% indican que tiene bastante o mucho impacto, y en el nivel más alto se acumula el 76,7%), seguido de la actitud de los estudiantes (el 88,4% en los niveles 4 y 5) y un buen diseño de las actividades matemáticas (el 86,1% en los niveles 4 y 5). También el hecho de que las matemáticas entren en contacto con otras disciplinas en las actividades de clase ayudaría, según los participantes, a promover la creatividad (el 83,7% indican los niveles 4 y 5). En cambio, no consideran que el uso de nuevas tecnologías y el contacto entre docencia e investigación tengan un impacto tan notable.

Como consecuencias de trabajar en clase promoviendo la creatividad destacan que los alumnos aprendan más (el 76,7% de participantes estarían de acuerdo o muy de acuerdo) y que les guste más lo que hacen (el 76,8%, de acuerdo o muy de acuerdo). El 65,1% estaría de acuerdo o muy de acuerdo con que trabajar de manera creativa hace que los alumnos se esfuercen y trabajen más.

Tabla 2. Respuestas a las preguntas abiertas C.1 y C.2

C.1. ¿Qué características consideráis que debe tener una actividad matemática que promueva la creatividad? Indica brevemente tres de estas características.	Cantidad de futuros profesores que mencionan esta característica
Actividad abierta	21 (48,8% de los participantes)
Actividad interdisciplinaria	5 (11,6% de los participantes)
Actividad visual	2 (4,7% de los participantes)
Actividad participativa y dinámica	5 (11,6% de los participantes)
Actividad que motive a los alumnos	13 (30,2% de los participantes)
Actividad próxima, que tenga conexión con la realidad	10 (23,3% de los participantes)

Actividad que tenga los objetivos claros	2 (4,7% de los participantes)
Actividad que dé libertad al estudiante	4 (9,3% de los participantes)
Actividad adaptada a la diversidad de ritmos de aprendizaje	3 (7,0% de los participantes)
Actividad atractiva para el profesor	2 (4,7% de los participantes)
Actividad que utilice material manipulativo y/o TAC	8 (18,6% de los participantes)
Actividad que incluya imaginar o visualizar con la mente	3 (7,0% de los participantes)
Actividad que sea innovadora, diferente a lo habitual, original por parte del profesor	4 (9,3% de los participantes)
Actividad donde el profesor da respuestas y los alumnos buscan la pregunta	1 (2,3% de los participantes)
Actividad que invite a hacerse preguntas	4 (9,3% de los participantes)
Actividad generalizable	1 (2,3% de los participantes)
Actividad difícil, que requiera pensar	3 (7,0% de los participantes)
Actividad que potencie otras habilidades aparte de las matemáticas	1 (2,3% de los participantes)
Actividad que fomente el pensamiento crítico	1 (2,3% de los participantes)
Actividad grupal	6 (14,0% de los participantes)
Trabajar problemas	1 (2,3% de los participantes)
Juegos	3 (7,0% de los participantes)
Actividad a la que se destine el tiempo necesario	2 (4,7% de los participantes)
C.2. ¿Qué consideráis que se puede hacer en el aula para promover la creatividad matemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?	**Cantidad de futuros profesores que mencionan esta acción**
El profesor debe tener una actitud abierta	9 (20,9% de los participantes)
Usar materiales manipulativos	5 (11,6% de los participantes)
Motivar a los alumnos	7 (16,3% de los participantes)
Proponer y resolver problemas abiertos	10 (23,3% de los participantes)
Proponer actividades interdisciplinarias	5 (11,6% de los participantes)
El profesor debe tener una actitud positiva	3 (7,0% de los participantes)
Los alumnos deben generar preguntas y su propio conocimiento	4 (9,3% de los participantes)
Hacer debate en grupo	9 (20,9% de los participantes)
El profesor debe innovar, hacer cosas diferentes a lo habitual	1 (2,3% de los participantes)
No utilizar libro ni dosier	1 (2,3% de los participantes)
Explicar matemáticas con historias divertidas	1 (2,3% de los participantes)
Proponer actividades que fomenten la creatividad (comentario general)	3 (7,0% de los participantes)

En las preguntas abiertas C.1 y C.2 los futuros profesores debían identificar qué características ha de tener una actividad matemática que promueva la creatividad y, más en general, qué acciones se pueden llevar a cabo en el aula de matemáticas para promover la creatividad. La Tabla 2 muestra el resumen de las respuestas a estas dos preguntas. La característica principal que destacan es que sea una actividad abierta, en el sentido de que admita diferentes métodos de resolución y diferentes soluciones posibles. A continuación, destacan que la actividad debe ser motivadora e de interés para el alumno. Dos futuros profesores consideran que la actividad debe motivar también al docente. La siguiente característica más común es que sea una actividad contextualizada, que tenga conexión con la vida cotidiana de los alumnos; en cambio, solo 5 futuros profesores indican que tenga conexiones con otras disciplinas. Las siguientes características que más destacan son: el uso de material manipulativo y nuevas tecnologías (8 futuros profesores); el trabajo y debate en grupo (6 futuros profesores); y la participación de los alumnos y dinamismo de la actividad (5 futuros profesores). Relacionado con la última característica, 4 futuros profesores también destacan la libertad de los alumnos. La innovación a la hora de trabajar diferentes contenidos o plantear las clases de manera distinta a la habitual también es una característica que 4 futuros profesores indican, esta característica se podría relacionar con la originalidad del profesor. Por otra parte, 4 participantes indican que la actividad debe invitar al alumno a hacerse preguntas y 3, que requiera razonar y/o conjeturar. Un futuro profesor indica que debería ser generalizable, es decir, que permita formular preguntas más allá de la actividad. Hay dos futuros profesores que destacan el carácter visual de la actividad, lo cual se podría relacionar también con la categoría de recursos manipulativos y tecnológicos señalada previamente. En otra categoría se han incluido tres comentarios en relación a la imaginación y visualización mental. Respecto a los recursos, dos futuros profesores destacan que debe dejarse el tiempo necesario para que los alumnos reflexionen. Teniendo en cuenta la cognición del estudiante, tres futuros profesores indican que la actividad debe estar adaptada a los conocimientos de los alumnos y la diversidad de ritmos de aprendizaje. Un participante destaca que el enunciado debe ser simple pero que tampoco guíe demasiado al estudiante, y otro señala que los objetivos deben ser claros y cortos. El hecho de que la actividad permita desarrollar otras habilidades que no sean matemáticas es una característica que destaca un futuro profesor. Además, otro futuro profesor remarca que se potencie el pensamiento crítico. Hay varios participantes que describen, en general, actividades que podrían promover la creatividad en su opinión, como por ejemplo que los alumnos busquen preguntas dadas las respuestas o trabajar problemas. También hay tres comentarios de diferentes participantes sobre plantear la actividad como un juego y uno de ellos, en concreto, que considera esta característica en negativo, ya que explica que los alumnos no aprovechan el tiempo en este tipo de situaciones.

En la pregunta C.2 sobre las acciones que se pueden realizar para promover la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, muchos futuros profesores indican realizar actividades con las características descritas en la pregunta anterior: actividades de planteamiento abierto (10), de debate en grupo (9), actividades motivadoras basadas en los intereses de los alumnos (7), con material manipulativo (5), interdisciplinarias (5) y actividades donde los alumnos deben generar preguntas (4). Aparte, se han identificado dos categorías relacionadas con la actitud del profesor en el aula: 9 futuros profesores indican que el docente debe tener una actitud abierta, que escuche a los alumnos y genere un clima en el aula que les invite a participar; y 3 futuros profesores consideran que el profesor debe mostrar una actitud positiva y dinámica. Un participante destaca que se deben combinar sesiones más tradicionales con otras más innovadoras, variar la distribución de las mesas en el aula y cambiar las herramientas, adaptándose al tipo de actividad que se presente. Otro participante señala que se debería dejar de seguir el libro de texto o un dossier como base para las clases.

En la pregunta C.3 observamos que a los futuros profesores les cuesta encontrar ejemplos de actividades que promuevan la creatividad (7 dejan la pregunta en blanco y 3 indican que no conocen ninguna actividad). Por otra parte, 18 futuros profesores ofrecen respuestas en las que no está claro cómo se realiza la actividad que promueva la creatividad. Se considera que solo 15 futuros profesores responden a lo que pide la pregunta, especificando una actividad donde ellos piensan que se promueve la creatividad y justificándola brevemente. Entre las actividades que proponen encontramos algunas de las características que se han indicado previamente en las preguntas C.1 y C.2.: que tenga un planteamiento abierto, que invite a los alumnos a hacerse preguntas y les haga pensar, que utilice recursos como material manipulativo o tecnológico, que sea en grupo, que sea de interés para el alumno, que sea contextualizada y que dé libertad a los alumnos. A continuación, se incluye una de las respuestas a modo de ejemplo.

> Muchas actividades en 3 actos, que parten de un vídeo sin una pregunta clara, pueden promover la creatividad desde un buen principio. Por ejemplo, la actividad "Will it hit the hoop?" de Dan Meyer, a pesar de que presenta una pregunta bastante clara, permite el uso de diferentes recursos para su resolución (p.e. GeoGebra) y comienza con una situación próxima y atractiva. (E11) (Ejemplo de actividad abierta, con uso de recursos, contextualizada y motivadora)

En la pregunta C.4 (Tabla 3) encontramos futuros profesores que indican que el desarrollo de la creatividad en las clases es importante y lo justifican de diferentes maneras: motiva a los alumnos (9), contribuye al aprendizaje de los alumnos y/o del docente (5), y es útil en la vida y el mundo laboral (5). Un ejemplo de estas respuestas es:

> Lo considero muy importante, ya que creo que va ligado a la motivación de los alumnos, y por tanto, es una pieza clave para su aprendizaje. (E4)

Tabla 3. Respuestas a la pregunta abierta C.4

C.4. ¿Qué importancia debería tener, dentro de la labor docente, que los profesores de matemáticas diseñen actividades didácticas que permitan desarrollar la creatividad de sus alumnos?	Frecuencia de respuesta
A favor, porque contribuye al aprendizaje de alumnos y docente	5 (11,6% de los participantes)
A favor, porque motiva a los alumnos	9 (20,9% de los participantes)
A favor, porque es útil en la vida y el mundo laboral	5 (11,6% de los participantes)
A favor, con carácter de obligación	2 (4,7% de los participantes)
A favor, respuesta no justificada	10 (23,3% de los participantes)
A favor, y que se desarrolle conjuntamente en otras disciplinas	2 (4,7% de los participantes)
A favor con matices	4 (9,3% de los participantes)
En contra, al menos en algunos casos	2 (4,7% de los participantes)
Respuesta ininteligible	2 (4,7% de los participantes)
Respuesta en blanco	2 (4,7% de los participantes)

Diez futuros profesores indican que es muy importante promover la creatividad sin justificarlo. Dos futuros profesores ven fundamental (utilizan los términos "obligatorio" y "básico") que los profesores diseñen actividades para desarrollar la creatividad de sus alumnos. Pero también hay participantes que toman posiciones más intermedias. Dos de ellos indican que se debería promover la creatividad conjuntamente en todas las disciplinas y cuatro de ellos explican que se debe estudiar bien la situación e implementar actividades que promuevan la creatividad, pero con límites. Por otra parte, dos futuros profesores no están de acuerdo con promover la creatividad en algunos casos:

> Pienso que tiene mucha importancia, pero muy poco sentido para el sistema educativo, ya que las PAU (por ejemplo) no se caracterizan por la creatividad. (E34)

Con la pregunta C.5 no se pretendía estudiar directamente las respuestas de los futuros profesores sobre la creatividad y la manera de promocionarla, sino que se incluyó para verificar o no la suposición de que en las clases del máster se transmitían ideas en este sentido, a pesar de que no haya una formación específica en el tema de creatividad. La mayoría de futuros profesores (32) considera que en el máster se hacen comentarios en mayor o menor profundidad sobre la importancia de desarrollar la creatividad y a veces se ofrecen ejemplos de actividades. Dichas actividades se trabajan en las asignaturas de didácticas específicas, según destacan 18 futuros profesores, y especialmente en geometría (4 de ellos lo especifican); en la asignatura de recursos manipulativos y tecnológicos, según 15 participantes; en psicología (3); en pedagogía (2); en modelización (2); en campos de problemas (1); y en la asignatura de evaluación (1). También, un futuro profesor indica que considera que se mostraron ejemplos para promover la creatividad de los alumnos en una conferencia que se realizó en el horario del máster, aunque es posible que no fuese de asistencia obligatoria para los futuros profesores. Por otra parte, 6 participantes dejan la pregunta C.5 en blanco, dos contestan que no consideran que se haya tratado el tema de la creatividad y otros tres, que han sido comentarios muy puntuales y descontextualizados o poco útiles.

Al considerar conjuntamente las respuestas de las preguntas Likert con las de las preguntas abiertas, se extraen las siguientes conclusiones principales. En cuanto a los elementos que se consideran más importantes para desarrollar la creatividad, aparecen la interacción con otras personas, la motivación y la interdisciplinariedad. Esto se ve también reflejado en las características que destacan los futuros profesores que deberían tener las actividades matemáticas que desarrollen la creatividad, ya que proponen que sean actividades participativas y de debate entre los alumnos, que sean interesantes para ellos y que sean interdisciplinares. Pero además señalan otros elementos como el planteamiento de preguntas abiertas, el uso de material manipulativo (y no tanto las nuevas tecnologías) y la contextualización de las actividades. Algunos participantes relacionan la contextualización de las actividades con la motivación de los alumnos, explicando que, si se plantea una actividad con elementos familiares y útiles en su día a día, será más atractiva para ellos.

Respecto al papel del docente, los futuros profesores le dan mucha importancia a la actitud del profesor. Consideran que debe tener una actitud positiva y abierta para dialogar y comprender a los alumnos. Desde el punto de vista pedagógico, los futuros profesores opinan que es importante que el docente tenga recursos para estimular la creatividad de sus alumnos, diseñe buenas actividades matemáticas y se adapte a los intereses y a los diferentes ritmos de aprendizaje. Sin embargo, no destacan la formación matemática del docente como un aspecto clave para ser creativo, en general.

Por último, los futuros profesores destacan que el hecho de trabajar de manera creativa en clase potencia el aprendizaje de los alumnos (y también del profesor) y que motiva a los alumnos. A su vez, esto les permite justificar la importancia de desarrollar la creatividad y añaden que es necesaria para resolver situaciones en la vida cotidiana y para el futuro laboral de los alumnos.

CONCLUSIONES

En primer lugar, observamos que casi el 70% de los participantes piensan que la creatividad es una cualidad que se puede desarrollar. Pensamos que esto es básico para que luego se planteen cómo trabajar en las clases de matemáticas de manera que los alumnos puedan desarrollar su creatividad. Observamos que los futuros profesores, en general, no asocian la creatividad a un proceso profundo de estudio de la situación problemática previo a su resolución. El estudio previo del problema correspondería a la primera fase del modelo Gestalt y, de hecho, el resto de las fases del modelo (incubación, iluminación y verificación) tampoco aparecen reflejadas en las respuestas de los futuros profesores. Aunque dos participantes destacan que es fundamental dejar el tiempo necesario a los alumnos para que reflexionen cuando se plantean actividades que promuevan su creatividad.

Los futuros profesores consideran que un estudiante creativo es capaz de formular preguntas y encontrar diferentes tipos de resolución a un problema. Para caracterizar a un profesor creativo, tienen en cuenta que diseñe actividades que permitan desarrollar la creatividad de sus alumnos, que valore las aportaciones de los alumnos y que tenga una actitud positiva y abierta. Estos resultados son similares a los que obtienen Yazgan-Sağ y Emre-Akdoğan (2016), trabajando también con futuros profesores. Por otra parte, teniendo en cuenta las subcategorías que plantean Lev-Zamir y Leikin (2011), encontramos ejemplos de flexibilidad por parte del profesor, en su actitud y a la hora de diseñar tareas con preguntas abiertas, interesantes, interdisciplinarias y adaptadas a la diversidad del grupo de alumnos. También, algunos participantes destacan aspectos que se podrían relacionar con la originalidad del profesor, como la propuesta de actividades innovadoras que no sigan la pauta de un libro de texto o un dossier. Aunque menos frecuentes, también encontramos referencias a la flexibilidad de los alumnos, en la resolución de problemas y la participación en debates del grupo, y a su originalidad, a través de la generación de preguntas y problemas por ellos mismos.

Algunos enfoques teóricos de la creatividad (Sriraman, 2004; Sternberg y Lubart, 1993) incluyen elementos que los futuros profesores relacionan con el desarrollo de la creatividad, como la interacción con otras personas y la motivación. A pesar de que los futuros profesores muestran creencias en consonancia con estas investigaciones, cuando en la pregunta C.3 se pide que expliquen un ejemplo de actividad, menos de la mitad de los participantes ofrecen una descripción clara. Esto puede ser debido a que muchos no concretan las ideas que expresan, o bien no las han incorporado realmente a su práctica de enseñanza. En este sentido, Lev-Zamir y Leikin (2013) compararon las concepciones de profesores en sus declaraciones y en la práctica y observaron que no siempre están de acuerdo. Por otra parte, en nuestro estudio algunos futuros profesores (4,7%) no consideran importante que se fomente la creatividad en las clases de matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo recibió apoyo de los proyectos de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB) y con el apoyo de la Secretaria d'Universitats i Recerca de la Generalitat de Catalunya i del Fons Social Europeu.

Referencias

Aktaş, M. (2016). Turkish high school teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Journal of Education and Training Studies, 4*(2), 42–52.

Almeida, L. S., Prieto, L., Ferrando, M., Oliveira, E. y Ferrándiz, C. (2008). Torrance Test of Creative Thinking: The question of its construct validity. *Thinking Skills and Creativity, 3*(1), 53-58.

Barquero, B., Richter, A., Barajas, M. y Font, V. (2014). Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 157-166). Salamanca: SEIEM.

Hosseini, A. S. y Watt, A. P. (2010). The effect of a teacher professional development in facilitating students' creativity. *Educational Research and Reviews, 5*(8), 432–438.

Joklitschke, J., Rott, B. y Schindler, M. (2018). Theories about mathematical creativity in contemporary research: A literature review. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 171-178). Umeå, Suecia: PME.

Kampylis, P. G. y Valtanen, J. (2010). Redefining creativity - Analyzing definitions, collocations, and consequences. *The Journal of Creative Behavior, 44*(3), 191-214.

Kaufman, J. C. y Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four C Model of creativity. *Review of General Psychology, 13*(1), 1–12.

Kaufman, J. C. y Sternberg, R. J. (2006). *The International Handbook of Creativity*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Lev-Zamir, H. y Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education, 13*(1), 17–32.

Lev-Zamir, H. y Leikin, R. (2013). Saying versus doing: Teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM, 45*(2), 295-308.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Panaoura, A. y Panaoura, G. (2014). Teachers' awareness of creativity in mathematical teaching and their practice. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 4*, 1–11. Recuperado de: http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/4.curriculum/panaoura01/article.pdf

Pásztor, A., Molnár, G. y Csapó, B. (2015). Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement. *Thinking Skills and Creativity, 18*, 32-42.

Sala, G., Font, V., Barquero, B. y Giménez, J. (2017). Contribución del EOS en la construcción de una herramienta de evaluación del pensamiento matemático creativo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator, 14*(1), 19-34.

Sternberg, R. J. y Lubart, T. I. (1993). Investing in Creativity. *Psychological Inquiry, 4*(3), 229-232.

Yazgan-Sağ, G. y Emre-Akdoğan, E. (2016). Creativity from two perspectives: prospective mathematics teachers and mathematician. *Australian Journal of Teacher Education, 41*(12), 25-40.

EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE EXPERIENCIAS ALEATORIAS EQUIVALENTES[xlii]

The reasoning of high school students on the notion of equivalent random experiences

Sánchez, E.[a], González, A.[a], Sánchez, M.[b] y Carrasco, G.[c]

[a] Cinvestav–IPN, [b] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada–IPN, [c] Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se exponen los resultados de un cuestionario de cinco preguntas sobre Experiencias Aleatorias Equivalentes (EAE) que se aplicó a 21 estudiantes en un experimento de enseñanza. Tres preguntas fueron de identificación, una de explicitación de propiedades y otra de construcción de EAE. Dado que esta noción está presente en el razonamiento probabilístico de cualquier nivel escolar y ausente en los programas de estudio, surgieron las preguntas: ¿Cómo razonan los estudiantes con la noción de EAE? ¿Hacerla explícita les ayuda a mejorar su razonamiento? Para responderlas, se hizo un análisis de las respuestas mediante un proceso de codificación y detección de asociaciones entre las frecuencias de respuestas pertenecientes a cada código. Los resultados confirman que cuando los estudiantes pueden hacer explícitas las propiedades de las EAE tienen mejores niveles de respuesta en las otras preguntas.

Palabras clave: *Razonamiento, Probabilidad, Experiencias aleatorias equivalentes (EAE).*

Abstract

The answers to five questions about Equivalent Random Experiences (ERE) that were applied to 21 high school students in a teaching experiment are analyzed. Three questions were of identification, one of property specification and another one of construction. Given that the ERE notion is present in the probabilistic reasoning of any school level and absent in the probability study programs, the following questions arose: How do students reason with the notion of equivalent random experiences? Does making it explicit help them to improve their reasoning? To answer these questions, an analysis of the responses was made through a process of encoding and detecting associations between the response frequencies belonging to each code. The results confirm that when the students can make explicit the properties of the ERE they have better levels of response in the other questions.

Keywords: *Reasoning, Probability, Equivalent random experiences (ERE).*

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Desde hace tiempo se ha documentado que la puesta en marcha y el desarrollo del razonamiento en situaciones de incertidumbre y en probabilidad suele ser especialmente difícil para los estudiantes de todos los niveles escolares, y el bachillerato (15-18 años) no es la excepción (Batanero y Sánchez, 2005; Garfield y Ahlgren, 1988; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Y es en este nivel en el cual los estudiantes, en mayor medida que en los niveles anteriores, deben transitar hacia un razonamiento más sofisticado, en el que no es suficiente saber hacer, sino también saber decir; esto es, encontrar soluciones a determinados problemas y argumentarlos o justificarlos. El concepto de Experiencias Aleatorias Equivalentes (en adelante, EAE) es una herramienta básica en probabilidad

Sánchez, E., González, A., Sánchez, M. y Carrasco, G. (2019). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre la noción de experiencias aleatorias equivalentes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 553-562). Valladolid: SEIEM.

para transferir problemas y soluciones de un contexto a otro, generalizar y justificar sus resultados. En los procedimientos de simulación computacional se debe garantizar la equivalencia entre la experiencia aleatoria original que se quiere investigar y la experiencia aleatoria que la simula, esta se representa en un lenguaje de programación. Más adelante ofreceremos otros ejemplos que muestran diversos usos de la noción de EAE, pero, por lo pronto, diremos que hemos constatado que su estudio no se prescribe en los programas de probabilidad del bachillerato de México. También se puede constatar que no se incluye en los libros de texto (Ortiz 2014; Ortiz, Batanero y Serrano, 2001). A partir de estas consideraciones surge una pregunta que constituye un problema didáctico que requiere mayor indagación. Dado que en muchos procedimientos de probabilidad se utiliza implícitamente esta noción, ¿es conveniente hacerla explícita en los programas, textos y, por tanto, en la enseñanza del curso de probabilidad? En esta comunicación no podemos ofrecer una respuesta a dicha pregunta, pero la sustituiremos por otras en cuya respuesta sí podemos avanzar: ¿Cómo razonan los estudiantes con la noción de EAE? ¿Hacerla explícita les ayuda a mejorar su razonamiento?

MARCO CONCEPTUAL

Entendemos por marco conceptual los conceptos centrales, y posibles relaciones entre ellos, que intervienen en aspectos importantes de la investigación, por ejemplo, en el diseño y el análisis de los datos (Miles y Huberman, 1994). Para el presente estudio son: Experiencias Aleatorias Equivalentes (EAE), Razonamiento y Explicitud, cuya relación consiste en que para que los estudiantes utilicen la noción de EAE en sus razonamientos probabilísticos es necesario que hagan explícitas sus propiedades y no sólo que identifiquen parejas de EAE's. A continuación, expondremos brevemente tales conceptos.

Dos experiencias aleatorias con espacios muestrales finitos son *equivalentes* si ambas producen el mismo modelo de probabilidad o, de manera más específica, si cumplen las siguientes tres propiedades:

1) Los espacios muestrales tienen el mismo número de elementos.
2) Existe una correspondencia biunívoca entre el espacio muestral de una experiencia y el espacio muestral de la otra.
3) Los elementos correspondientes de uno y otro espacio muestral tienen la misma probabilidad.

Esta definición no se encuentra explícita en los libros de texto de probabilidad, pero sí que está implícita pues se hace uso de ella. En el presente estudio creemos que es importante hacerla explícita con fines didácticos.

Un *razonamiento* es un proceso en el que a partir de ciertas premisas y mediante transformaciones válidas se obtiene una conclusión verdadera, siempre que las premisas sean verdaderas. Por extensión, también son razonamientos los procesos que permiten apoyar la probable condición de verdad de una proposición a partir de ciertas premisas, aunque no se asegure totalmente la verdad de la conclusión (Shaughnessy, Chance y Kranendonk, 2009). El razonamiento de los estudiantes sobre la noción de EAE se refiere a la forma en que utilizan la noción o sus propiedades en un razonamiento, ya como premisas, ya como conclusión.

La *explicitud* es un término de Brandom (2002) para referir que en los procesos de formación de un concepto se *hace explícito* lo que está *implícito* en una acción. Señala que dicha transición es necesaria para que el contenido de una acción pueda jugar un rol inferencial (es decir, tener un papel en un razonamiento). Para Brandom (2002), la conceptualización permite que el contenido de una acción se pueda transferir y aplicar a otras circunstancias mediante un mecanismo de razonamiento. En el caso presente, la comparación de las respuestas de los estudiantes a tareas de identificación de EAE con la explicitación de las propiedades que las definen nos ofrecerá indicios sobre su conceptualización por parte de los estudiantes.

ANTECEDENTES

Aunque sólo se han localizado dos investigaciones didácticas que mencionan la noción de EAE, estas resultan ilustrativas. Además, en esta revisión se han incluido algunos problemas provenientes de la literatura, uno de didáctica de la probabilidad, otro de psicología y uno de matemáticas, tales que en todos ellos subyace el concepto de EAE, aunque no se haga ahí explícito.

Chaput, Girard y Henry (2011) formularon una pregunta sobre EAE a propósito de un estudio sobre simulación computacional en probabilidad:

> La pregunta es cómo justificar a los estudiantes la equivalencia entre experiencias aleatorias reales o pseudo-concretas y una simulación por computadora, programada juiciosamente desde un modelo teórico. La equivalencia está asegurada por el hecho de que ambos experimentos son relativos al mismo modelo probabilístico, un concepto que aún no está disponible para los estudiantes. (Chaput et al. 2011, p. 93)

Desde el comienzo de sus estudios de probabilidad, los estudiantes construyen modelos probabilísticos, es decir, para cada situación particular de monedas, dados y otros que se suelen trabajar en clase, se especifica la terna que forma un modelo de probabilidad (finito): Espacio muestral, Eventos, Probabilidades. Entonces Chaput et al. (2011) quieren decir que aún no está disponible para los estudiantes la formulación *abstracta* de modelo de probabilidad; pero hacer que los estudiantes la tengan disponible implica, si se mira bien, que tengan disponible también la noción de equivalencia de experiencias aleatorias.

En el estudio de Benson y Jones (1999), los autores investigaron cómo estudiantes de los diferentes niveles escolares (desde primaria hasta universidad) usan *generadores de probabilidad* (bolas de colores, dados, ruletas) para modelar diferentes tareas de situaciones en contexto. Los autores definen el concepto de generador de probabilidad como "un dispositivo que produce resultados 'aleatorios' que siguen una distribución de probabilidad específica" (p. 2). Generalmente estos mecanismos se construyen con urnas, monedas, dados y ruletas. Después de discutir las elecciones de generadores aleatorios para diferentes problemas en contexto, Benson y Jones (1999, p. 6) comentan que "esto también plantea la pregunta de si los estudiantes pueden reconocer cuándo y por qué dos generadores aleatorios son equivalentes".

La noción de EAE está presente de manera implícita en una diversidad de problemas de probabilidad. Por ejemplo, Watson, Collis y Moritz (1997) presentaron a estudiantes de grados 3, 6 y 9 un problema similar al siguiente:

> La caja A y la caja B están llenas de canicas rojas y azules como se describe en los incisos. Las canicas se mezclan bien en cada caja. Se desea obtener una canica azul, pero solo se puede elegir una canica sin mirar. ¿Qué caja elegirías? Por favor explica tu respuesta.
>
> - Caja A (con 6 rojas y 4 azules)
> - Caja B (con 60 rojas y 40 azules)
> - No importa

La respuesta correcta es "No importa" y la justificación, cuando los estudiantes manejan la noción, sería simplemente que las experiencias aleatorias "Sacar una bola al azar de la caja A" y "Sacar una bola al azar de la caja B" son equivalentes.

Un segundo ejemplo tomado de la psicología es el de la solución a las variantes del problema de Kahneman y Tversky (1982, p. 34), estos se resuelven fácilmente si se percibe que la experiencia aleatoria de elegir una familia de seis vástagos al azar y observar la secuencia de mujeres y hombres es equivalente a la experiencia de lanzar una moneda seis veces y observar la secuencia de caras y sellos. Versiones posteriores a la original, utilizados en algunos estudios, tienen la forma siguiente:

> Teniendo en cuenta los vástagos de una familia, se puede representar con una M cada hija y con H cada hijo y con una cadena de M's y H's la secuencia de hijas e hijos en la familia.
>
> Si se elige al azar en una ciudad una familia con 6 hijos ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable?
>
> a) MHMHHM   b) HMHHHH   c) Son igualmente probables

En ambos casos la probabilidad de una secuencia cualquiera de seis elementos es 1/64. Conviene notar cómo situaciones de incertidumbre en contextos sociales (familias de seis hijos) se reducen a situaciones de juego mediante la noción de equivalencia de experiencias aleatorias.

El tercer ejemplo lo hemos adaptado de un problema de la historia del desarrollo de la probabilidad, y es una idea de Borel que permitió establecer la relación entre la teoría de la probabilidad y la teoría de la medida de conjuntos de números reales. Para no introducir conceptos muy técnicos y para que sea consistente con este trabajo, hemos adaptado el problema para casos finitos, a diferencia del caso infinito que investigó Borel (Kac, 1959).

La idea es que se pueden ver como equivalentes las dos siguientes experiencias aleatorias: a) Lanzar una moneda N veces y observar la secuencia que ocurre, b) Elegir al azar un número decimal binario de N cifras decimales en [0, 1]. El diccionario que propone Borel se representa en la Tabla 1.

Tabla 1. Diccionario para asociar dos experimentos aleatorios

Experimento	Lanzar 10 veces una moneda	Elegir al azar un número decimal binario en [0, 1]
Códigos	C = cara, S = sello	1 = "C", 0 = "S"
Ejemplo de un resultado	SSCCCCSSCS	0.0011110010
Probabilidad de ese resultado	$P(SSCCCCSSCS) = \frac{1}{2^{10}}$	$P(0.0011110010) = \frac{1}{2^{10}}$

Con este diccionario problemas de lanzamiento de monedas se transforman en problemas de conjuntos de números en el intervalo [0, 1] y viceversa. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que un número binario decimal en [0, 1] de 10 cifras, elegido al azar, tenga exactamente 3 dígitos "1" y 7 dígitos "0"? es equivalente a ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras y 7 sellos al lanzar una moneda 10 veces?

Los anteriores ejemplos muestran que la equivalencia de experiencias aleatorias es una noción implícita en las actividades escolares relacionadas con la resolución de problemas probabilísticos y, también, ha jugado un papel importante en la actividad científica que ha propiciado el desarrollo del enfoque moderno de la probabilidad. Por estas razones, es lícito explorar hasta qué punto los estudiantes de bachillerato identifican si dos experiencias aleatorias son equivalentes o no, y si al hacer explícitas las propiedades que las caracterizan mejoran su razonamiento probabilístico.

MÉTODO

El estudio y los resultados que se incluyen en la presente comunicación forman parte en una secuencia de *experimentos de enseñanza* (Confrey y Lachance, 2000), cuyo propósito es la apropiación por parte de los estudiantes del contenido de un curso de probabilidad de nivel bachillerato con ayuda de recursos tecnológicos. En dos experimentos anteriores (Sánchez, Carrasco y Herrera, 2018; Sánchez, García-García y Mercado, 2018) las observaciones se enfocaron en los contenidos de distribución binomial y variación, y en el uso de la tecnología para desarrollarlos. En el experimento previo al que aquí se informa, se observó la dificultad de los estudiantes para entender la relación de equivalencia entre un experimento aleatorio de un problema contextualizado (situación original) y el correspondiente experimento aleatorio simulado en el ordenador para producir datos como si hubieran sido generados por la situación original. En consecuencia, se tomó la decisión en este tercer *experimento de enseñanza* de modificar el cuestionario diagnóstico y algunas actividades para producir respuestas de los estudiantes que nos informen de sus razonamientos sobre la equivalencia de experiencias aleatorias.

Participantes

Participaron 21 estudiantes de un bachillerato público de México y el experimento se llevó a cabo durante el curso de probabilidad y estadística que deben llevar y acreditar. Ellos ya habían llevado los cursos de álgebra e introducción al cálculo diferencial e integral, que forman parte de su programa de estudios. Además, las dos autoras se hicieron cargo de llevar a cabo las actividades, mientras que los dos autores contribuyeron en el análisis de los datos, la discusión y la escritura del informe.

Instrumento

Se diseñaron cinco problemas que se incluyeron en el cuestionario diagnóstico y también se agregaron problemas sobre EAE en las hojas de trabajo de las actividades de simulación física y computacional. El informe se basa sólo en las respuestas al cuestionario diagnóstico, que aquí se reproduce:

<u>Problema 1.</u> Considere el experimento “lanzar una moneda y observar la cara que cae”. ¿Cuál de los siguientes experimentos es equivalente a este? Justifica tu respuesta.

a) Lanzar un dado y observar el número que se obtiene

b) Extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra; y observar el color de la bola que sale

c) Lanzar dos monedas simultáneamente y observar las caras que caen

[La respuesta correcta es el inciso b]

<u>Problema 2.</u> Considere las siguientes experiencias aleatorias:

Experimento A: Extraer al azar una bola de una urna que contiene: 2 bolas rojas, 1 bola negra, 2 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

[Las probabilidades son: 2/5, 1/5, 2/5 (esta información no se les da a los estudiantes)]

Experimento B: Extraer al azar una bola de una urna que contiene: 1 bola roja, 1 bola negra, 3 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

¿Son equivalentes los experimentos A y B? ¿Por qué?

[Las probabilidades son: 1/5, 1/5, 3/5]

<u>Problema 3.</u> Considere los siguientes experimentos:

Experimento C: Elegir al azar a una persona del siguiente grupo de estudiantes: Ana, Juan, María, Pedro, Nicolás y Bertha. Observar si es mujer o no.

Experimento D: Lanzar un dado y observar si el resultado es un número par o no.

¿Son equivalentes los experimentos C y D? ¿Por qué?

<u>Problema 4.</u> ¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes?

<u>Problema 5.</u> Lean la siguiente situación:

Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

Imagine y describa una experiencia aleatoria que sea equivalente a la experiencia descrita.

Procedimiento de análisis

Se analizaron sobre todo las justificaciones o argumentaciones de las respuestas a los cinco problemas dados. A partir de los rasgos comunes, se caracterizaron las respuestas en patrones definidos y se contaron las frecuencias con las que se presentaron dichos patrones.

RESULTADOS

Dividiremos la exposición de los resultados en tres partes. 1) Comentarios sobre las respuestas a cada problema. 2) Relación de los problemas 1, 2 y 3 de identificación con el 4 de caracterización. 3) Problema 5 de construcción.

Comentarios sobre las respuestas a los problemas 1, 2, 3 y 4

En la Tabla 2 se concentran las frecuencias con las que se clasificaron las respuestas a cada problema. El código A1 significa que en la respuesta se mencionaron dos propiedades de las EAE: Igualdad de elementos en los espacios muestrales e igualdad de las probabilidades (no se menciona en ningún caso la correspondencia, pero en los problemas es tan evidente esta propiedad que no parece necesaria su mención; excepto quizá en el problema 3 en que puede resultar útil su consideración). Conviene notar que el Problema 2 tiene el código especial A1', pues en él las experiencias no eran equivalentes; el código agrupa las respuestas en que los estudiantes argumentan que las experiencias no son equivalentes porque las probabilidades no son las mismas en cada experiencia. El código A2 (el más frecuente) agrupa las respuestas en que los argumentos se apoyan sólo en el espacio muestral, mientras que el A3 los que se apoyan sólo en las probabilidades. El código A4 significa que los estudiantes buscan la equivalencia o no de las experiencias en las características físicas del generador de probabilidad.

Tabla 2. Frecuencias por código a las soluciones de los problemas 1, 2, 3 y 4

Códigos*	*Prob. 1*	*Prob. 2*	*Prob. 3*	*Prob 4*	*Total*
A1. Espacio muestral y probabilidades	8	--	5	5	18
A1' No hay igualdad de probabilidades	--	10	--	--	10
A2. Espacio muestral	6	4	11	5	26
A3. Probabilidades	3	5	0	7	15
A4. Generador de probabilidad	4	2	5	4	15
Total	21	21	21	21	84

* No se distingue entre respuestas correctas y erróneas ya que sólo se clasifica el concepto utilizado en el argumento.

De las respuestas al problema 1, en 17 se señala que el lanzamiento de una moneda es equivalente a extraer una bola de una urna con dos bolas; no obstante, sólo ocho ofrecen un argumento más completo que el resto. Cuatro responden incorrectamente. En el Problema 2, también se pueden distinguir dos conjuntos de respuestas casi del mismo tamaño: diez respuestas afirman correctamente que las experiencias no son equivalentes, mientras que 11 dicen lo contrario. En el Problema 3, todos los estudiantes respondieron correctamente que las experiencias aleatorias son equivalentes, pero sólo cinco apoyaron su argumento tanto en la igualdad del número de elementos de los espacios muestrales como en la igualdad de las probabilidades. En el problema 4 se les pide que escriban las propiedades de experiencias aleatorias. Cinco refieren las dos propiedades principales (igualdad de elementos de los espacios muestrales e igualdad de probabilidades). Cinco mencionan sólo el espacio muestral y siete mencionan la igualdad de probabilidades. En resumen, los problemas 3 y 4 resultan los más difíciles; en promedio, el 21% de las respuestas consideran las dos propiedades principales, mientras que, en promedio, en el 31% de las respuestas se menciona el espacio muestral; esta propiedad es la más utilizada en los argumentos.

Relación de los problemas 1, 2 y 3 de identificación con el 4 de caracterización.

Para hacer una mejor comparación entre las frecuencias de respuestas de los cuatro problemas se han definido tres niveles de respuesta para cada problema, del modo en que se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Definición de niveles por problema

	Problema 1, 3 y 4	*Problema 2*
Nivel 1	Mencionan: Espacio muestral y probabilidades	Mencionan que: No hay igualdad de probabilidades
Nivel 2	Mencionan: Espacio muestral o probabilidades (no ambas)	Mencionan: Espacio muestral
Nivel 3	Mencionan: Dispositivo generador	Mencionan: Probabilidades o dispositivo generador

Nivel 1. Las respuestas en el Nivel 1 son las de mejor calidad entre todas las respuestas que dieron los estudiantes. Para los problemas 1, 3 y 4, que una respuesta pertenezca al Nivel 1 significa que se menciona tanto la igualdad de los espacios muestrales como la igualdad de las probabilidades. En el caso del problema 2, las respuestas están en este nivel cuando en su argumento mencionan que no hay igualdad de probabilidades.

Nivel 2. Las respuestas en el Nivel 2 son algo inferiores en calidad que las anteriores, pues en los problemas 1, 3 y 4 implicaría que únicamente mencionan en su respuesta el espacio muestral o la igualdad de probabilidades (y no ambas). En el caso de las respuestas al problema 2, estas se han considerado de Nivel 2 cuando sólo mencionan el espacio muestral.

Nivel 3. Las respuestas en el Nivel 3 son de calidad inferior a las del Nivel 2. En los casos de los problemas 1, 2 y 3, las respuestas se caracterizan por hacer referencia al dispositivo generador como criterio para que se cumpla o no la equivalencia. También consideramos en este nivel las respuestas al problema 2 que hacen referencia a la igualdad de probabilidades (porque no la hay). Para el caso del problema 4 no se define este Nivel 3.

Tabla 4. Frecuencias de los niveles de los problemas 1, 2 y 3 versus del nivel del 4

		Nivel 1 en Problema 4	*Nivel 2 en Problema 4*	*Nivel 3 en Problema 4*	*Total*
Problema 1	Nivel 1	2	6	0	8
	Nivel 2	2	5	2	9
	Nivel 3	1	1	2	4
	Total	5	12	4	21
Problema 2	Nivel 1	3	6	1	10
	Nivel 2	1	3	1	5
	Nivel 3	1	3	2	6
	Total	5	12	4	21
Problema 3	Nivel 1	2	2	1	5
	Nivel 2	3	6	2	11
	Nivel 3	0	4	1	5
	Total	5	12	4	21

Para comparar las respuestas del problema 4 con las respuestas de los problemas 1, 2 y 3, se representan los datos en la Tabla 4. Para llevarla a cabo conviene tener en cuenta que, con relación al problema 4, cinco respuestas fueron de Nivel 1, doce del Nivel 2 y cuatro del Nivel 3 (ver Tabla 4).

Para entender la Tabla 4 centremos la atención en los datos del problema 1. La terna 2, 2, 1 de la primera columna significa: “De los 5 estudiantes que respondieron el problema 4 al Nivel 1, hubo 2 que respondieron el problema 1 al Nivel 1; 2 que respondieron el problema 2 al Nivel 2, y 1 que respondió el problema 3 al Nivel 3". La terna 6, 5, 1 de la columna encabezada con "Nivel 2 en Problema 4" significa que: "De los 12 estudiantes que respondieron al problema 4 al nivel 2, 6 respondieron el problema 1 al nivel 1, 5 le respondieron al nivel 2, y 1 le respondió a nivel 3.

El problema para responder a partir de la Tabla 4 es: ¿El nivel de las respuestas a los problemas 1, 2 y 3 está asociado al nivel de respuesta del problema 4? Aclaremos que la muestra es pequeña para hacer afirmaciones con una probabilidad razonable de acertar. No obstante, conviene utilizar los datos para formular conjeturas que podrían someterse a contraste posteriormente. Con esta salvedad, se puede observar que hay una ligera pero sistemática tendencia a que las respuestas en el Nivel 1 para los problemas 1, 2 y 3 tengan una mayor incidencia con el Nivel 1 del problema 4 que con la incidencia de las del Nivel 3 del mismo problema. Por ejemplo, la terna de la primera fila del problema 1 es 2, 6, 0; donde 2 son los estudiantes que responden tanto el problema 1 como el 4 en el Nivel 1, mientras que el 0 significa que ninguno de los que responde el problema 1 en el nivel 1 respondió el problema 4 en el nivel 3. Como este patrón es similar en los siguientes problemas se puede conjeturar una asociación que indica que responder bien el problema 4 se asocia con responder bien los problemas 1, 2 y 3. También se puede notar que un Nivel 3 en los problemas 1, 2, 3 tiene una mayor asociación con el Nivel 3 de las respuestas al problema 4 que con las respuestas del nivel 1 del mismo problema. Por ejemplo, en la Tabla 6 la terna que representa el Nivel 3 del problema 1 es: 1, 1, 2; esto significa que hay únicamente un estudiante que respondió el problema 4 en el Nivel 1 (y el problema 1 en el Nivel 3), mientras que el 2 de esa terna significa que 2 estudiantes respondieron el problema 4 en el Nivel 3 (y también el problema 1 en el Nivel 3). Para finalizar el análisis de los datos de la Tabla 4, se puede notar que las respuestas del Nivel 2 en los problemas 1, 2 y 3, tienen una mayor incidencia con las respuestas de Nivel 2 del problema 4 que con las respuestas de Nivel 1 y Nivel 3 del problema 4. Esto lleva a conjeturar que es frecuente que los estudiantes que responden en el Nivel 2 el problema 4 también responden en el Nivel 2 en las preguntas 1, 2 y 3. En resumen se pueden conjeturar 3 tendencias:

- Responder en el Nivel 1 la pregunta 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 1 los problemas 1, 2 y 3.
- Responder en el Nivel 3 el problema 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 3 los problemas 1, 2 y 3.
- Responder en el Nivel 2 el problema 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 2 los problemas 1, 2 y 3.

Aunque las asociaciones son débiles, se fortalecen por el hecho de presentarse de manera consistente en el conjunto de los problemas. De manera general, tales tendencias reflejan que quien hace explícitas las propiedades de EAE (problema 4) también es capaz de identificar cuándo dos parejas de EAE son equivalentes y quien no puede hacer explícita tales propiedades, tendrá problemas para identificar parejas de EAE's.

Problema 5 de construcción

En la tarea 5 sólo hubo dos tipos de respuesta (Tabla 5). En ella, se pedía un ejemplo de un par de EAE's. Todos los ejemplos que dieron los estudiantes se refieren al lanzamiento de monedas. Esto se explica por lo cercano que este contexto es para los alumnos y porque durante las actividades se les sugirió el uso de monedas para hacer simulaciones.

Tabla 5. Categorías de respuesta del problema 5 de construcción

Código	Frecuencia
E1. Experiencia equivalente	11
E2. Experimento de Bernoulli	10

Las respuestas que se clasificaron en el código E1 consistieron en dar una experiencia aleatoria equivalente solo a la experiencia de “elegir una respuesta al azar a una pregunta del cuestionario”. Por otro lado, las respuestas en el código E2 también definen un experimento de Bernoulli con la moneda, pero añaden que dicho experimento se repite tres veces. Es decir, los estudiantes siguen un camino más corto y fácil para definir una experiencia aleatoria equivalente. Este atajo fue posible pues los alumnos tuvieron en cuenta la propiedad de la distribución binomial que la describe como repetición de experiencias de Bernoulli y considerando la variable “el número de éxitos”. En estos códigos no fueron independientes al nivel alcanzado en el problema 4 (Tabla 6).

Tabla 6. Relación entre los problemas 4 y 5

		Nivel 1 en Problema 4	*Nivel 2 en Problema 4*	*Nivel 3 en Problema 4*	*Total*
	E1	5	4	2	11
Problema 5	E2	0	8	2	10
	Total	5	12	4	21

El Nivel 1 en el problema 4 está asociado al nivel E1 en el problema 5 pero no al nivel E2, es decir, los que construyeron una experiencia equivalente a la dada, tuvieron Nivel 1 en la problema 4.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El conocimiento y uso, por parte de los estudiantes, de la noción EAE’s es un recurso que puede ayudar a mejorar el desarrollo de su razonamiento probabilístico. Hemos visto que quien menciona las propiedades de EAE’s suele ser capaz de identificar si una pareja de experiencias aleatorias es equivalente o no. En la exploración que se hizo en este trabajo, se observó que cuando los estudiantes hacen explícitas las propiedades de las EAE’s tienen un relativo buen desempeño en la identificación de parejas de EAE’s. Por esta razón, una recomendación para la enseñanza es promover que los estudiantes hagan explícitas las propiedades de las EAE’s desde que comienzan su curso de probabilidad. Esta recomendación se apoya en el análisis de Brandom (2002) acerca del tránsito de descripciones o acciones a conceptos: “desde el comienzo he dicho que estoy particularmente interesado en lo que distingue lo conceptual de lo no conceptual” (p. 12). Este mismo autor comenta que un rasgo fundamental que distingue lo conceptual es su *articulación inferencial*; esto implica que un concepto surge y se expresa en prácticas de dar y pedir razones. La explicitación de las propiedades de las EAE’s permite incorporarlas en razonamientos ya sea como premisas ya como conclusiones. La habilidad de identificar parejas de EAE’s no es suficiente para jugar dicho papel, es necesario hacer explícitas las propiedades que guían y permiten dicha identificación. Los sujetos de Benson y Jones (1999) de 4º grado hacia arriba fueron capaces de elegir dos o más generadores de probabilidad equivalentes para modelar un mismo problema contextualizado, utilizando sobre todo la noción de correspondencia. Sin embargo, sus sujetos hacían la identificación mediante acciones, haciendo correspondencias físicas o con figuras pero sin mencionar las propiedades que justifican la equivalencia; es decir, sus sujetos tenían un dominio práctico pero no conceptual de la EAE’s. Por otro lado, la explicitación de la definición y, por tanto, de las propiedades de EAE’s puede contribuir a resolver el problema de formulado por Chaput et al. (2011), pues al establecer la equivalencia de la experiencia original y la simulada, los estudiantes estarán en condiciones de entender que los resultados que arroja el ordenador se pueden interpretar como si hubieran sido generados por el original.

Este estudio se ha limitado a explorar la relación entre la identificación de parejas de EAE’s en tres problemas sencillos y el problema de hacer explícitas sus propiedades. Pero no se hace un seguimiento sobre el papel que la adquisición, construcción o posesión del concepto de EAE’s puede jugar en la solución de problemas más complejos y en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes, en particular, con los otros conceptos del curso introductorio de probabilidad.

Consideramos que un estudio en este sentido proporcionaría evidencia para afirmar o descartar la importancia de introducir actividades sobre las EAE's en el curso de la probabilidad.

Referencias

Batanero, C. y Sánchez, E (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 241-266). New York, EE.UU.: Springer.

Benson, C. T. y Jones, G. A. (1999). Assessing students' thinking in modeling probability contexts. *The Mathematics Educator*, *4*(2), 1–21.

Brandom, R. B. (2002). *La articulación de razones: una introducción al inferencialismo*. Madrid: Siglo XXI.

Chaput, B., Girard, J-C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 85–95). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). Mahwah, EE.UU.: Lawrence Erlbaum.

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 44–63.

Kac, M. (1959). *Statistical independence in probability, analysis and number theory*. Washington, EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32–47). New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis (2nd ed.)*. Thousand Oaks, EE.UU.: Sage.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503–511). Salamanca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, *38*, 5–14.

Sánchez, E., Carrasco, G. y Herrera, M. Á. (2018). Fundamental ideas in the probabilistic reasoning of high-school students in binomial distribution activities. En M. A. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10)*. Kyoto, Japón: IASE. Recuperado de: https://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_6C3.pdf

Sánchez, E., García-García, J. I. y Mercado, M. (2018). Determinism and empirical commitment in the probabilistic reasoning of high school students. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 223-239). Cham, Suiza: Springer.

Shaughnessy, J. M., Chance, B. L. y Kranendonk, H. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability*. Reston, EE.UU.: NCTM.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 60–82.

[xlii] Esta investigación fue financiada por CONACYT, México, proyecto 254301 y por Fondo SEP-CINVESTAV: proyecto 188.

LA MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR SOBRE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS

Professional noticing of prospective secondary school mathematics teachers about students' mathematical thinking solving arithmetic and algebraic problems

Sánchez-Matamoros, G.[a], Moreno, M.[b] y Valls, J.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor de secundaria sobre el pensamiento matemático (procedimental y/o relacional), manifestado por estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Los participantes de esta investigación son 22 estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de la Universidad de Alicante. Los datos son las respuestas de los participantes a una tarea profesional que formaba parte de un módulo de enseñanza sobre pensamiento relacional y procedimental diseñado ad hoc*. Los resultados muestran que los estudiantes para profesor de secundaria, mayoritariamente, interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato como pensamiento relacional si estos usan propiedades algebraicas para resolver y justificar los problemas aritméticos y algebraicos.*

Palabras clave*: mirar profesionalmente, pensamiento relacional, pensamiento procedimental, problemas aritméticos y algebraicos, educación secundaria.*

Abstract

The aim of this research is to characterize the professional noticing of the prospective secondary school teachers of the mathematical thinking, procedural and/or relational, that high school students manifested in the resolution of arithmetic and algebraic problems. Participants are 22 prospective secondary school teachers who were enrolled on an initial training programme at University of Alicante. Data are the prospective secondary teachers' answers to a professional task included in a teaching module designed ad hoc *about procedural and relational thinking. The results show that mostly of prospective secondary school teachers interpret the mathematical thinking of high school students considering only the use of algebraic properties as a manifestation of relational thinking in the arithmetic and algebraic problems.*

Keywords: *professional noticing, relational thinking, procedural thinking, arithmetic and algebraic problems, high school.*

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado tiene como finalidad desarrollar las competencias profesionales propias de la función docente, en particular, la competencia docente *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*. Según la revisión realizada por Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) sobre investigaciones recientes acerca de la mirada profesional, la mayoría describen cómo los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Valls, J. (2019). La mirada profesional de estudiantes para profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 563-572). Valladolid: SEIEM.

estudiantes en un tópico específico, por ejemplo: Fernández, Llinares y Valls (2013), para los problemas aditivos y proporcionales; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) y Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012), para la derivada; Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassell y Yoder (2013), para el estudio de la aritmética temprana; o Wilson, Mojica y Confrey (2013), para la equipartición.

Tradicionalmente la aritmética ha consistido, casi exclusivamente, en dar respuestas numéricas a las operaciones planteadas. Además, las operaciones aritméticas básicas se han centrado en los procesos de operar, es decir, en una sucesión de pasos que concluyen con un número, que es el resultado de la operación, por tanto, la aritmética se considera como una secuencia de procedimientos rutinarios. Por el contrario, podría parecer que el objetivo de la enseñanza del álgebra es el estudio de las relaciones, pues la solución de una ecuación es la transformación final de una sucesión de transformaciones que expresa una relación (x = un número o números), lo que implicaría que el álgebra se aprende necesariamente de forma significativa. No obstante, tanto los algoritmos de la aritmética como los procedimientos para resolver ecuaciones algebraicas pueden ser enseñados de forma rutinaria o de forma significativa (Carpenter, Levi, Franke y Koehler, 2005). Los estudiantes suelen estar satisfechos con una comprensión procedimental de los conceptos matemáticos, mientras que muchos maestros y profesores de matemáticas quieren que estos adquieran una comprensión relacional, esto es, que los estudiantes sean conscientes del por qué y cómo se usan las propiedades y relaciones de las operaciones (Skemp, 1976).

Así, algunas investigaciones han tenido como objetivo analizar el pensamiento relacional de niños de primaria y secundaria, por ejemplo: Carpenter, Franke y Levi (2003), integrando la aritmética y el álgebra en primaria; Castro y Molina (2007), en igualdades numéricas de aritmética básica; Empson, Levi y Carpenter (2011), en fracciones; o Vega-Castro, Molina y Castro (2011, 2012), en simplificación de fracciones algebraicas. Sin embargo, son pocas las investigaciones (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007; Walkoe, 2015) centradas en que un profesor mire profesionalmente si un estudiante manifiesta evidencias de un pensamiento relacional o procedimental. Por esta razón, es necesario que los futuros profesores de secundaria sean capaces de mirar profesionalmente manifestaciones del pensamiento relacional vs procedimental en los estudiantes de secundaria.

Por tanto, en este estudio nos vamos a centrar en cómo los estudiantes para profesor de secundaria miran profesionalmente el pensamiento matemático, procedimental o relacional, manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Para ello, en el contexto del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, se diseñó un módulo de enseñanza cuyos objetivos eran: (a) identificar y caracterizar evidencias del pensamiento relacional de estudiantes de secundaria en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, y (b) seleccionar, analizar y diseñar problemas cuya resolución promoviera el pensamiento relacional. Se pone el foco de atención en el primer objetivo del módulo, centrándonos en dos de las tres destrezas con las que Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizaron la competencia *mirar profesionalmente*: identificar las propiedades de las operaciones y de las expresiones que los estudiantes de bachillerato usan para resolver los problemas, así como interpretar el pensamiento, relacional o procedimental, que manifiestan los estudiantes de bachillerato en sus resoluciones en función del uso de las propiedades identificadas.

Por tanto, el objetivo que nos hemos planteado es caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor de secundaria sobre el pensamiento matemático (procedimental y/o relacional), manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco conceptual se apoya en la *competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* (Jacobs et al., 2010) y en el pensamiento matemático entendido como *pensamiento relacional* versus *procedimental* que ponen de manifiesto los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Las investigaciones sobre el conocimiento matemático para la enseñanza subrayan la importancia de que el profesor interprete lo que los estudiantes hacen cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos, para ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011)

La competencia docente de *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes fue conceptualizada por Jacobs et al. (2010) como tres destrezas interrelacionadas centradas en el pensamiento matemático de los y las estudiantes: (a) identificar los aspectos relevantes de las producciones de los y las estudiantes; (b) interpretar el pensamiento matemático de estos; y (c) tomar decisiones basadas en dicha interpretación.

Por otra parte, el *pensamiento relacional* fue definido por Mason, Stephen y Watson (2009) como "una disposición del individuo para usar, explicar y conectar distintas propiedades en su pensamiento matemático", existiendo una diferencia sutil entre reconocer las relaciones en situaciones particulares y percibirlas como ejemplos de propiedades generales, susceptibles de aplicarse en situaciones diferentes. Estos autores plantean que reconocer una relación entre dos o más objetos no es en sí mismo un pensamiento relacional, el núcleo de este pensamiento relacional se encuentra en el uso de las propiedades.

Otro autores consideran que el pensamiento relacional en aritmética está más focalizado en el uso de las propiedades fundamentales de los números y de las operaciones para transformar las sentencias numéricas que en encontrar el resultado de las operaciones (Kızıltoprak y Köse, 2017) o en la actividad intelectual de examinar las expresiones aritméticas globalmente (i.e., como totalidades) y aprovechar las relaciones identificadas tanto para resolver un problema como para tomar una decisión o aprender más sobre una situación o un cierto concepto (Castro y Molina, 2007). En álgebra, Hoch y Dreyfus (2006) subrayan que el pensamiento relacional es una colección de habilidades, diferenciadas de la habilidad manipulativa (pensamiento procedimental), que permite a los estudiantes hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Para estos autores, el pensamiento relacional permite mirar las expresiones y ecuaciones en su totalidad y percibir las relaciones numéricas tanto entre como dentro de las expresiones y ecuaciones.

Estas particularizaciones del pensamiento relacional hacen referencia a las cinco formas de prestar atención a los objetos o estructuras matemáticas propuestas por Mason et al. (2009):

- Mirar el todo (totalidad de la estructura matemática)
- Identificar detalles (hacer distinciones)
- Reconocer relaciones (entre elementos específicos identificados)
- Percibir propiedades (como generalizaciones que pueden ser ejemplificadas en situaciones específicas)
- Razonar a partir de las propiedades identificadas.

Así pues, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo interpretan los estudiantes para profesor el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas aritméticos y algebraicos, a partir de las propiedades y de las transformaciones identificadas?

MÉTODO

Los participantes son 22 estudiantes para profesor de secundaria (de ahora en adelante, EPS), procedentes de distintos grados: matemáticas, física e ingeniería; matriculados en un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria que se imparte en la Universidad de Alicante. Los estudiantes se agruparon en seis grupos de tres o cuatro personas.

En el contexto de la asignatura "Enseñanza de las Matemáticas" de este master, se diseñó un módulo de enseñanza sobre pensamiento relacional *versus* procedimental. Este módulo estaba compuesto por siete sesiones de 120 minutos cada una. En las diferentes sesiones se planteaban tareas a resolver por los diferentes grupos y a discutir en gran grupo. Para resolver estas tareas los EPS disponían de un documento teórico, elaborado por el equipo investigador, con información sobre características del pensamiento relacional y procedimental. En esta investigación nos centraremos en la tarea propuesta en la sesión 3, que tenía como objetivo: identificar evidencias de pensamiento matemático (pensamiento relacional y/o procedimental) en las respuestas de los y las estudiantes de bachillerato a dos problemas, uno aritmético y otro algebraico (Hoch y Dreyfus, 2006).

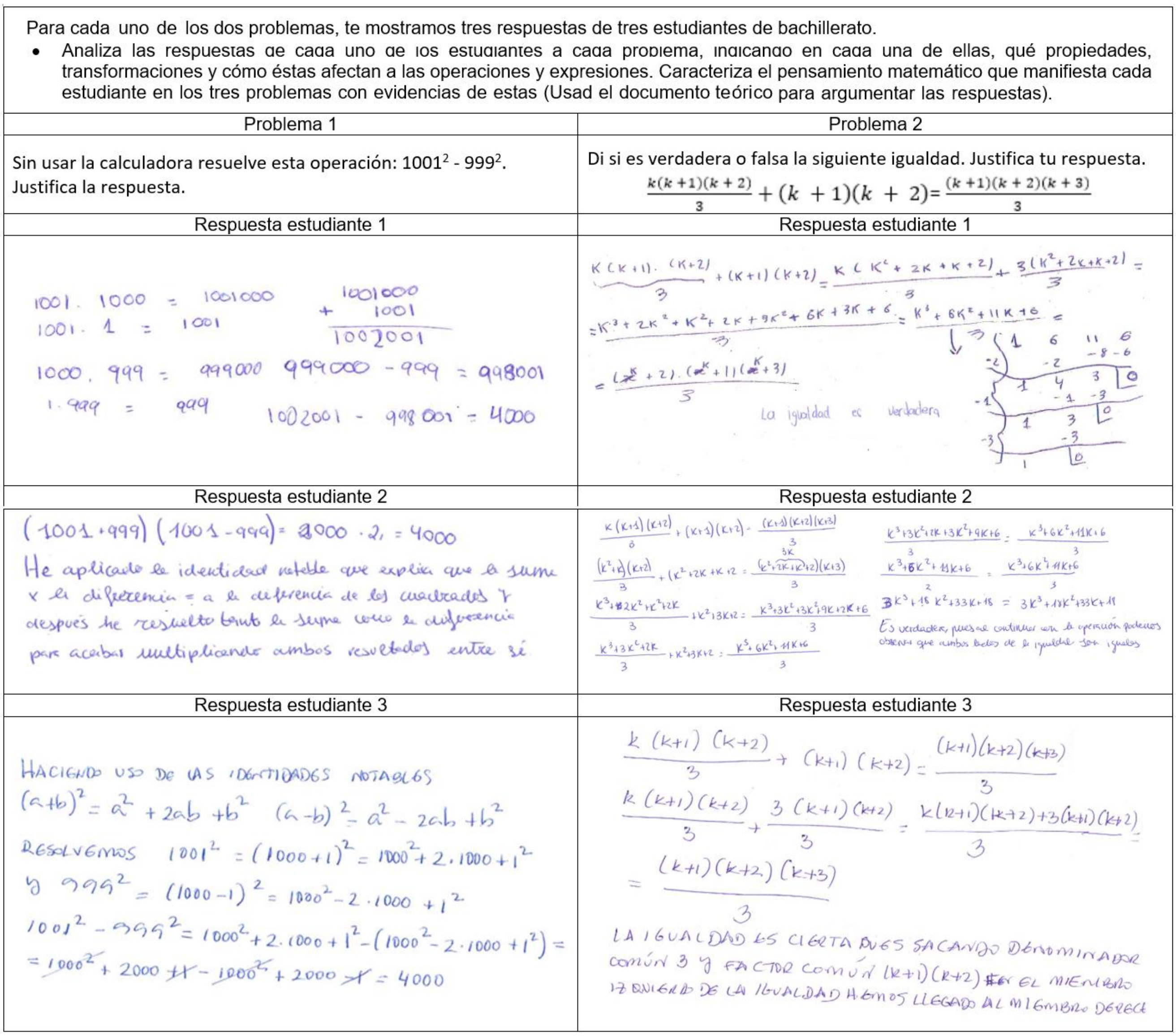
Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos de esta investigación es la tarea correspondiente a la sesión 3 del módulo de enseñanza. Esta tarea está formada por las respuestas de tres estudiantes de bachillerato a dos problemas, y por dos preguntas profesionales (ver Figura 1).

La pregunta profesional se refiere a la adquisición de las destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes: identificar propiedades y transformaciones, e interpretar el pensamiento matemático de estos, a partir de las propiedades y transformaciones previamente identificadas.

Las respuestas de los tres estudiantes a los dos problemas manifiestan distintos tipos de pensamiento. Los tres estudiantes en el problema 1 evidencian características de pensamiento relacional. Los estudiantes E1 y E3, aunque inicialmente usan relaciones numéricas ($1001 = 1000 + 1$ y $999 = 1000 - 1$) para simplificar los cálculos, posteriormente actúan de distinta manera ante la transformación obtenida por la aplicación de la relación numérica. El estudiante E1 percibe la propiedad distributiva como una propiedad que se puede aplicar en cualquier situación, en este caso, como un producto de factores, y razona en base a esta propiedad identificada; mientras que el estudiante 3 establece relaciones generales basadas en la propiedad fundamental del álgebra $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Por otra parte, el estudiante E2 establece directamente una relación algebraica haciendo uso de la propiedad $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, sin necesidad de realizar transformaciones aritméticas en la expresión inicial.

Las respuestas de los tres estudiantes al problema 2 evidencian distintos tipos de pensamiento. Los estudiantes E1 y E2 manifiestan características de pensamiento procedimental, al usar la propiedad distributiva en el sentido $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para operar y desarrollar uno de los miembros de la expresión o ambos. El estudiante E3, sin embargo, muestra características de pensamiento relacional al ver la sentencia algebraica en su totalidad y percibir la propiedad distributiva en el sentido $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, para agrupar y simplificar el miembro izquierdo de la expresión y verificar la igualdad directamente.



Para cada uno de los dos problemas, te mostramos tres respuestas de tres estudiantes de bachillerato.

- Analiza las respuestas de cada uno de los estudiantes a cada problema, indicando en cada una de ellas, qué propiedades, transformaciones y cómo éstas afectan a las operaciones y expresiones. Caracteriza el pensamiento matemático que manifiesta cada estudiante en los tres problemas con evidencias de estas (Usad el documento teórico para argumentar las respuestas).

Problema 1	Problema 2
Sin usar la calculadora resuelve esta operación: $1001^2 - 999^2$. Justifica la respuesta.	Di si es verdadera o falsa la siguiente igualdad. Justifica tu respuesta. $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$
Respuesta estudiante 1	**Respuesta estudiante 1**
$1001 \cdot 1000 = 1001000$; $1001 \cdot 1 = 1001$; $1001000 + 1001 = 1002001$; $1000 \cdot 999 = 999000$; $1 \cdot 999 = 999$; $999000 - 999 = 998001$; $1002001 - 998001 = 4000$	$\frac{k(k+1)\cdot(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k^2+2k+k+2)}{3} + \frac{3(k^2+2k+k+2)}{3} = \frac{k^3+2k^2+k^2+2k+9k^2+6k+3k+6}{3} = \frac{k^3+6k^2+11k+6}{3} = \frac{(k+2)\cdot(k+1)(k+3)}{3}$ La igualdad es verdadera
Respuesta estudiante 2	**Respuesta estudiante 2**
$(1001+999)(1001-999) = 2000 \cdot 2 = 4000$ He aplicado la identidad notable que explica que la suma x la diferencia = a la diferencia de los cuadrados y después he resuelto tanto la suma como la diferencia para acabar multiplicando ambos resultados entre sí	$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ … $\frac{k^3+6k^2+11k+6}{3} = \frac{k^3+6k^2+11k+6}{3}$ Es verdadera, pues se continúa con la operación podemos observar que ambos lados de la igualdad son iguales
Respuesta estudiante 3	**Respuesta estudiante 3**
HACIENDO USO DE LAS IDENTIDADES NOTABLES $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ RESOLVEMOS $1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2+2\cdot1000+1^2$ y $999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2-2\cdot1000+1^2$ $1001^2-999^2 = 1000^2+2\cdot1000+1^2-(1000^2-2\cdot1000+1^2) = 1000^2+2000+1-1000^2+2000-1 = 4000$	$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ LA IGUALDAD ES CIERTA PUES SACANDO DENOMINADOR COMÚN 3 Y FACTOR COMÚN $(k+1)(k+2)$ EN EL MIEMBRO IZQUIERDO DE LA IGUALDAD HEMOS LLEGADO AL MIEMBRO DERECHO

Figura 1. Tarea planteada en la sesión 3 del módulo de enseñanza

Análisis de datos

Los datos son las respuestas de los EPS a la tarea propuesta en la sesión 3. El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado por el equipo de investigación de manera inductiva, atendiendo a qué propiedades de las usadas por los estudiantes de bachillerato, para resolver los problemas propuestos, han identificado los EPS y cómo han interpretado, a partir de estas, el pensamiento matemático de los tres estudiantes de bachillerato.

Este análisis ha permitido inferir características de cómo los EPS miraban profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato a partir de las propiedades y transformaciones que realizaban estos al resolver los problemas aritméticos y algebraicos propuestos.

RESULTADOS

En esta sección se describen, en dos apartados, las diferentes formas en las que los EPS han usado las propiedades y transformaciones identificadas para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato en los problemas aritmético y algebraico. En un primer apartado se describen los EPS que identifican las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato y las usan de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático de estos, y un segundo apartado con aquellos EPS que identifican las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato y las usan para interpretar el pensamiento matemático de estos.

Identifican las propiedades y transformaciones y las usan de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático

Los tres EPS del grupo 4, en el problema aritmético, identifican en el estudiante E1 la relación numérica que transforma los números dados y la propiedad distributiva. En los estudiantes E2 y E3, identifican las identidades notables. Sin embargo, usan retóricamente estas propiedades y transformaciones al justificar de la misma forma el pensamiento matemático puesto de manifiesto por los tres estudiantes, para ello hacen uso de expresiones literales del documento teórico sin establecer ninguna relación con las propiedades y transformaciones identificadas en las resoluciones de estos. Cuando interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes, este grupo de EPS considera que E1 muestra pensamiento relacional, E2 muestra rasgos de pensamiento relacional, mientras que E3 usa pensamiento relacional.

> En el problema 1, el estudiante 1, muestra pensamiento relacional ya que transforma los números dados del problema, utilizando la propiedad distributiva para realizar cálculos más sencillos, es decir, elige manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura en su mínima expresión. El estudiante 2, muestra rasgos de pensamiento relacional. Es capaz de identificar la propiedad $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ y de transformar la expresión inicial que le permite operar con mayor facilidad. En otras palabras, reconoce una estructura familiar en una expresión más compleja. El estudiante 3, usa pensamiento relacional. Es capaz de identificar la propiedad $(a + b)^2 = a^2 +2ab+b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Además de modificar la cifra que le dan para amoldarla a la propiedad anteriormente citada. Reconoce una estructura familiar en una expresión más compleja [énfasis añadido].

Asimismo, en el problema algebraico, los EPS identifican en las respuestas de los tres estudiantes propiedades aritméticas (asociativa y distributiva) y transformaciones (método de Ruffini, mínimo común múltiplo y sacar factor común). Sin embargo, al interpretar el pensamiento matemático de los tres estudiantes, usan los mismos argumentos (uso de propiedades y transformaciones) para interpretar de forma diferente el pensamiento matemático de estos estudiantes. Así consideran que los estudiantes E1 y E3, en el problema algebraico, manifiestan un pensamiento relacional al usar correctamente las propiedades identificadas y las transformaciones, pero para E2, que también usa correctamente las propiedades y transformaciones identificadas, lo interpretan como pensamiento procedimental.

> En el problema 2, el estudiante E1 manifiesta claramente un pensamiento relacional pues aplica y conecta de manera adecuada propiedades de la multiplicación, de fracciones y el algoritmo de la Regla de Ruffini (sin que el problema lo pida) para transformar, en cada paso que realiza, una expresión equivalente que haga más sencillo el problema. El estudiante E2, muestra un pensamiento procedimental, con buen dominio de las propiedades de la multiplicación, del cálculo de fracciones y de la resolución de ecuaciones. Opera correctamente utilizando la propiedad asociativa y distributiva, calcula el mínimo común múltiplo para operar con fracciones y, además, realiza una operación que implica a las dos partes, izquierda y derecha, de la expresión. El estudiante E3, muestra en un principio un pensamiento relacional, para usar la suma de fracciones con el mínimo común múltiplo. En un segundo paso usa un método más relacional sacando un factor común, aplicando la inversa de la propiedad distributiva [énfasis añadido]

Identifican las propiedades y transformaciones y las usan para interpretar el pensamiento matemático

En esta categoría se encuentran 19 de los 22 EPS, pertenecientes a los grupos 1, 2, 3, 5 y 6. Estos EPS, en el problema algebraico (problema 2), identifican las propiedades y transformaciones y a partir de ellas interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes como procedimental en el caso de los estudiantes E1 y E2 y relacional en el caso del estudiante E3, tal como evidencian la respuesta de los EPS del grupo 6 a este problema:

> En el problema 2, el estudiante 1 se centra en la parte izquierda de la igualdad, desarrollando ésta y comprobando que la expresión es equivalente a la derecha. Desarrollando por completo los paréntesis, llegando a un polinomio de tercer grado que factoriza mediante el método de Ruffini, para obtener las raíces del polinomio, y llegar al lado derecho. El estudiante realiza un procedimiento procedimental. El estudiante 2, realiza el problema de la forma más procedimental posible, ya que desarrolla por completo los polinomios de ambos lados de la igualdad, y comprueba que son iguales. La forma de expresar el ejercicio no es del todo correcta al suponer que ambos lados son iguales. El estudiante 3, utiliza un pensamiento relacional para resolver el problema. El estudiante observa que puede utilizar la herramienta de la propiedad distributiva (factor común) para realizar el ejercicio sin necesidad de desarrollar los polinomios [énfasis añadido].

Sin embargo, los EPS de esta categoría se podrían nuevamente clasificar en dos subcategorías atendiendo al tipo de propiedades identificadas y consideradas por estos como manifestación de pensamiento relacional de los estudiantes de bachillerato en la resolución del problema aritmético (problema 1): los EPS que consideran solo el uso de propiedades algebraicas como manifestación de pensamiento relacional y los EPS que consideran tanto el uso de propiedades numéricas como algebraicas como manifestación de pensamiento relacional.

- *EPS que consideran solo el uso de propiedades algebraicas como manifestación de pensamiento relacional en la resolución de un problema aritmético*

En esta subcategoría se incluyen 16 de los 19 EPS, pertenecientes a los grupos 1, 2, 3 y 5, que interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes en el problema aritmético como relacional en los estudiantes E2 y E3, al usar en la resolución de este problema propiedades fundamentales del algebra: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ y $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (identidades notables). Y procedimental con rasgos de relacional para el estudiante E1, al usar este estudiante, en la resolución del problema aritmético, solo propiedades numéricas y no establecer relaciones con las identidades notables. Las características de estos EPS las evidenciamos en las respuestas del grupo 5 a la tarea profesional.

> El estudiante 1, en el problema 1, demuestra un pensamiento predominantemente procedimental porque se siente más cómodo resolviendo operaciones de manera mecánica. Hace una descomposición aditiva de 1001 en 1000+1 y 999 en 1000 - 1, que es una demostración de pensamiento relacional, pero lo aplica con el objetivo de hacer el algoritmo del producto y luego llevar a cabo la adición. Pensamos que pesa más en su desarrollo la parte procedimental. El estudiante 2 demuestra pensamiento relacional en este problema. Comienza la resolución del problema reconociendo la estructura de la identidad notable y la aplica reconociendo la bidireccionalidad de la igualdad. El alumno 3, también demuestra un pensamiento relacional en este problema pues antes de plasmar y analizar los datos recurre a las entidades notables plasmando con letras la igualdad notable y el desarrollo de la misma. A continuación, prepara la expresión descomponiendo de manera aditiva para poder aplicar las propiedades de las igualdades notables. Para finalizar, agrupa las potencias iguales para facilitar el cálculo a la hora de resolver el ejercicio [énfasis añadido].

- *EPS que consideran tanto el uso de las propiedades numéricas como de las algebraicas como manifestación de pensamiento relacional en la resolución de un problema aritmético*

Los tres EPS restantes, pertenecientes al grupo 6, interpretan como pensamiento relacional el pensamiento matemático manifestado por los tres estudiantes en sus respuestas al problema aritmético (problema 1) al usar en la resolución del problema tanto propiedades numéricas (descomposición de los números y propiedad distributiva) como algebraicas (identidades notables).

> El estudiante 1, en el problema 1, descompone 1001 como 1000 + 1 y el 999 de forma análoga. De esta forma, mediante la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación, resuelve el

> problema correctamente. Podemos decir, que el alumno sigue un procedimiento relacional. El estudiante 2, resuelve de forma correcta el problema 1. Para ello, utiliza la identidad notable llamada como “diferencia de cuadrados”. Es la forma más eficiente y rápida para realizar este ejercicio, y además, dado que se trata de una herramienta matemática, podemos decir que el alumno emplea un pensamiento relacional. El estudiante 3, en el problema 1, utiliza las identidades notables para resolver el ejercicio. En particular, utiliza la identidad notable del cuadrado de una suma. El procedimiento al igual que los otros dos alumnos es relacional [énfasis añadido].

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación ha sido caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor sobre el tipo de pensamiento matemático, procedimental y/o relacional, manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

Los resultados muestran que los estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato como relacional en función del uso que estos hacen, en la resolución de los problemas, de propiedades algebraicas o de propiedades numéricas y algebraicas. Sin embargo, en la tarea profesional que se les facilitó se podían apreciar evidencias de diferentes descriptores de pensamiento relacional en las resoluciones de los problemas realizadas por los estudiantes de bachillerato: formas alternativas de trasformar una expresión numérica (por ejemplo, descomposición, propiedad distributiva) y algebraica (por ejemplo, identidades notables), utilidad de transformaciones numéricas para usar propiedades algebraicas en una expresión (descomposición para hacer uso de una identidad notable), reconocer relaciones (por ejemplo, de igualdad, de ser factor) entre subestructuras.

Diversas investigaciones sobre la mirada profesional en los estudiantes para maestro y profesor de matemáticas (Fernández et al., 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Son, 2013; Zapatera y Callejo, 2013) han mostrado la necesidad de establecer la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, para poder interpretar el pensamiento de estos.

Nuestros resultados han mostrado cómo el hecho de reconocer las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato a problemas aritméticos y algebraicos (conocimiento de matemáticas) no es suficiente para que el estudiante para profesor use dichas propiedades y trasformaciones para interpretar el pensamiento matemático de estos estudiantes. Es decir, no relacionan el conocimiento de matemáticas identificado con el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato (Barnhart y van Es, 2015; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2019), tal y como se evidencia en los estudiantes para profesor que usan el conocimiento de matemáticas de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes para profesor han relacionado el conocimiento de la matemática vinculado a propiedades y transformaciones algebraicas al conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que les ha impedido interpretar el pensamiento matemático de aquellos estudiantes que han usado propiedades y transformaciones aritméticas como manifestaciones de pensamiento relacional. Este hecho puede ser debido, en palabras de Vega-Castro et al. (2012), a que las habilidades que componen el pensamiento relacional son componentes del sentido algebraico que se espera que desarrollen los estudiantes de educación secundaria obligatoria y bachillerato. Para estas autoras, no se trata de un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de “poseer” el conocimiento.

Finalmente, una minoría de estudiantes para profesor han relacionado el conocimiento de la matemática vinculado a propiedades y transformaciones aritméticas y algebraicas al conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que les ha permitido interpretar las diferentes características de pensamiento matemático manifestadas por los estudiantes desde relaciones generales basadas en las propiedades fundamentales de las operaciones numéricas y algebraicas (Jacobs et al., 2007).

Reconocimiento

Esta investigación ha recibido ayuda de los proyectos EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83-93.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37*(1), 53-59.

Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, *19*(2), 67-94.

Empson, S. B., Levi, L. y Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 441-468.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulations skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krâtká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 305-312). Praga, República Checa: PME.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Kızıltoprak, A. y Köse, N. Y. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(1), 131-145.

Mason, J., Stephen, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R.A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*(1), 83-99.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 -508). Baeza, Jaén: SEIEM.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 379-397.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–26.

Son, J-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, 48(1-2), 1-27.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-584). Ciudad Real: SEIEM.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME, 15*(2), 233-258.

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523-550.

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

ESTRUCTURAS Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 2º DE PRIMARIA EN UNA APROXIMACIÓN FUNCIONAL DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO[xliii]

Second graders' structures and representations used in a functional approach of algebraic thinking

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria en España. Nos centramos aquí en identificar las estructuras y explorar el proceso de generalización de los estudiantes. Para ello implementamos tareas de generalización que involucran funciones lineales en un experimento de enseñanza con tres estudiantes de 2º de Educación Primaria (7-8 años). Destacamos que el número de estructuras y la forma de generalizar la relación involucrada dependen de las tareas planteados en cada caso. Las generalizaciones de todos los estudiantes se han expresado mediante representaciones verbales y/o numéricas.

Palabras clave: *estructura, generalización, pensamiento funcional.*

Abstract

This paper is part of a broader research that develops in the field of algebraic thinking of second graders in Spain. We focus here on identifying the structures and exploring the generalization process of the students. In order to do this, we implement generalization tasks that involve linear functions in a teaching experiment with second grade students (7-8 years). We emphasize the number of structures and the way to generalize the relationship involved depend on the tasks proposed in each case. The generalizations of all the students have been expressed through verbal and/or numerical representations.

Keywords: *generalization, structure, functional thinking.*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Promover el pensamiento funcional de los estudiantes más pequeños puede ayudar a desarrollar habilidades para analizar relaciones entre cantidades y deducir la regla general de una regularidad en una situación dada (Kaput, 2008). El pensamiento funcional ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en Educación Secundaria (Doorman y Drijvers, 2011) y fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites, Dougherty y Zbiek, 2011). La capacidad de los estudiantes de Educación Primaria para generalizar y representar las generalizaciones es de interés en el contexto funcional (Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017, Torres, Cañadas y Moreno, 2018). El modo en que los estudiantes son capaces de interpretar la generalidad y representarla aporta información sobre el pensamiento funcional de los alumnos y, por ende, sobre la dirección de la instrucción del álgebra en Educación Primaria.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.

En este trabajo abordamos la generalización de estudiantes de 2º de Educación Primaria, ya que son escasos los estudios que lo hacen. En particular, identificamos las regularidades (estructuras) que evidencian los estudiantes en la relación entre las variables implicadas en diferentes tareas y atendemos a las representaciones empleadas por los estudiantes en el proceso de generalización.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Strother, 2011; Warren, Miller y Cooper, 2013). Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Las tareas de generalización requieren precisamente de la identificación de una regularidad o estructura a partir de unos casos particulares dados (Pólya, 1966). Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas y permiten caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes. Para generalizar, se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. La noción de patrón está más ligada a la idea de recurrencia que a la de estructura (referida al establecimiento de una relación de covariación entre dos cantidades). Por ello, utilizamos la resolución de tareas de generalización. Esta investigación se desarrolla en el contexto de la resolución de problemas porque los alumnos no disponen de estrategias conocidas para su resolución y pueden utilizar diferentes herramientas y razonamientos para su resolución. Para promover la generalización seguimos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) en las preguntas planteadas en los diferentes problemas, que proponen partir de situaciones que involucran casos particulares y, observando regularidades (estructuras), llegar a la generalización. Entre los investigadores que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales, Torres et al. (2018) se centran en las estructuras y la generalización que identifican seis estudiantes de 2º de primaria en una tarea que involucra la función $y = x+3$. Los autores destacan cuatro estructuras diferentes en preguntas que involucraban casos particulares. Los seis estudiantes generalizaron verbalmente la estructura implicada. La mayoría generalizan la estructura correcta y emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes para identificar regularidades entre variables y generalizar. Pinto y Cañadas (2017) concluyen que los alumnos de 3º de primaria emplean 17 estructuras diferentes para una misma regularidad, de las cuales 5 son correctas, y que de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario.

Hablar de generalización en Educación Primaria supone aceptar que estos estudiantes pueden representar dichas relaciones no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (Radford, 2002). Si bien las letras son esenciales, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras. Los tipos de representaciones que pueden utilizar los alumnos de primaria para resolver problemas con funciones lineales incluyen: (a) lenguaje natural - oral; (b) lenguaje natural - escrito; (c) pictórico; (d) numérico; (e) notación algebraica, (f) tabular; y (g) gráfico (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008). Asumimos que la representación verbal es aquella que se hace mediante el lenguaje natural, ya sea oral o escrito. La representación verbal y la pictórica resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). Radford (2003) destaca que la representación verbal en las descripciones de los estudiantes ante casos particulares o el general funciona como una herramienta útil para promover el uso de otros tipos de representaciones.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre la generalización de estudiantes de 2º de Educación Primaria, en un contexto funcional del pensamiento algebraico. Los objetivos de investigación de este trabajo son: (a) Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes, y (b) Describir la generalización de los estudiantes.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo. Llevamos a cabo un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000) compuesto por cuatro sesiones. Tres de los propósitos del experimento de enseñanza fueron: (a) Explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas; b) Identificar y describir estructuras evidenciadas por los estudiantes; y (c) Explorar la generalización de los estudiantes. El contexto de investigación fue la resolución de problemas porque permite a los estudiantes utilizar estrategias espontáneas en un tipo de tareas de generalización que no son familiares para ellos.

Los sujetos del estudio han sido tres estudiantes de 2º curso de Educación Primaria (7-8 años), de un colegio de Granada (España). De entre los que asistieron a todas las sesiones del experimento de enseñanza, la maestra del grupo propuso a estos tres por sus diferentes logros de aprendizaje. Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con y sin llevadas. No habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales, la generalización y tampoco habían hecho uso de diferentes representaciones para manifestar relaciones entre variables.

Recogida de datos

Para cada una de las cuatro sesiones del experimento diseñamos una tarea con base en un problema de generalización que involucraba una función lineal. Cada sesión estaba compuesta de diferentes partes. En la primera introducíamos el contexto de la tarea y planteamos algunas preguntas relativas a casos particulares (entre 4 y 6 cuestiones) hasta ver que los estudiantes entendían la situación y las preguntas. En la segunda, aplicamos un cuestionario con preguntas sobre casos particulares (5 cuestiones) y, siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), incluimos preguntas sobre otros casos particulares hasta llegar a la generalización. La tercera fase constituía el cierre de las sesiones. Los estudiantes podían presentar sus respuestas y explicarlas al gran grupo. Tres miembros del equipo de investigación estuvieron a cargo de la implementación de las sesiones, atendiendo las dudas que pudieran surgir durante la cumplimentación de los cuestionarios y la videograbación de las sesiones. La maestra de los estudiantes estuvo presente pero no intervino. Los estudiantes no recibieron *feedback* para no interferir con nuestros objetivos de investigación y con el carácter exploratorio del trabajo. La información que analizamos aquí proviene de los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes.

Sesiones del experimento de enseñanza

En la Tabla 1 presentamos los contextos de las situaciones planteadas en las sesiones del experimento de enseñanza y las funciones involucradas.

Con base en el análisis de cada una de las sesiones tomamos algunas decisiones para las siguientes. El contexto de las dos primeras sesiones fue el mismo porque resultó motivador para los estudiantes. En las sesiones 3 y 4 la función fue la misma y el contexto diferente ya que el contexto del cumpleaños no funcionó generando interés en los estudiantes. Dependiendo de la respuesta de los alumnos involucramos funciones aditivas y/o multiplicativas.

En las preguntas realizadas sobre los casos particulares hemos evitado números consecutivos para evitar la recursividad como único modo de generalización. Los casos particulares planteados son de dos tipos; casos dados mediante cantidades concretas y casos dados mediante uso de términos "un millón" o "muchos".

Tabla 1. Sesiones de clase

Sesiones	Contexto de la tarea	Función
Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	y=x+3
Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	y =1+2x
Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	y =2x
Paradas de tren	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?	y= 2x

Sesión 1. Parque de atracciones 1

Algunos de los casos particulares y el caso general empleados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 2.

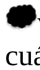
Tabla 2. Sesión 1. Preguntas sobre casos particulares y caso general

Casos particulares	Caso general
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes? ¿Cómo lo sabes?	Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes? ¿Cómo lo sabes? ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes? ¿Cómo lo sabes?	

Sesión 2. Parque de atracciones 2

En esta ocasión se les pregunta por la generalización de dos formas diferentes que hemos distinguido como caso general 1 y caso general 2. El caso general 2 es diferente a los tratados anteriormente, ya que planteamos la pregunta general representando una cantidad indeterminada mediante un dibujo, una mancha, como puede apreciarse en la tercera columna de la Tabla 3. Tanto los casos particulares como los generales fueron planteados como indica la misma tabla.

Tabla 3. Sesión 2. Casos particulares y generales

Casos particulares	Caso general 1	Caso general 2
¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje? Explícame cómo lo haces.	Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.	Isabel paga por el carnet  viajes. Explica cómo sabe cuánto paga
¿Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes? Explícame cómo lo haces		

Sesión 3. Cumpleaños

Los casos particulares en esta sesión son análogos a los de la sesión 1. El caso general está compuesto por una sola pregunta. Algunos de los casos particulares y el caso general aplicados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 4.

Tabla 4. Sesión 3. Casos particulares y caso general

Casos particulares	Caso general
Si hay 2 personas en el cumpleaños, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre Marsian. Les ha dicho (en su idioma) que van a ir Ω extraterrestres a la fiesta. ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan?
Si vamos las 20 personas de la clase ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	

Sesión 4. Paradas de tren.

En esta sesión la forma de presentar los casos particulares fue diferente. Planteamos una forma tabular de representación. En la Figura 1 aparece la secuencia de casos particulares en la manera en la que se lo presentamos a los estudiantes en este cuestionario.

Casos particulares	
1	
3	
13	
Proponen números	
Probar con números cada vez más grandes (dependerá de los que hayan propuesto)	
1 millón	
Muchas paradas	
Infinitas paradas	

Figura 1. Casos particulares, sesión 4

En esta sesión organizamos y relacionamos las variables involucradas en el problema mediante una tabla. Los encabezados están en blanco, ya que pretendíamos explorar el significado que le atribuyen los alumnos a una tabla de dos columnas (si saben usarla, si relacionan valores por filas o por columnas, cómo nombran a las variables involucradas…). En definitiva, explorar la forma en la que identifican la relación entre cantidades variables. Esta actividad sugería además escribir los encabezados para las variables dependientes o independientes. Nosotros dábamos cantidades iniciales y también les pedíamos que dieran algunos números cada vez más grandes para ver si estaban identificando la relación entre variables. Incluimos las expresiones de "muchas paradas" e "infinitas paradas" como cantidades indeterminadas. La pregunta para el caso general viene dada por: ¿Cómo le explicarías a un amigo cuantas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Análisis de datos

Tras analizar las respuestas escritas al cuestionario, realizamos un análisis de datos cualitativo. En este análisis hemos atendido únicamente a la información que provenía de los cuestionarios ya que la de las sesiones videograbadas fue muy escueta. Diseñamos las categorías de análisis relativas a estructuras, generalización y representaciones, atendiendo a los objetivos de investigación. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Consideramos en que estos casos, las respuestas de los estudiantes no son producto de un mero cálculo, sino que responden a un patrón de respuesta para varias cuestiones o la generalizan. Describimos las diferentes representaciones utilizadas en cada sesión atendiendo a la clasificación del marco teórico.

RESULTADOS

Presentamos los resultados sobre estructuras tanto para los casos particulares como para el caso general en cada una de las tareas propuestas. Analizaremos el tipo de generalización expresada y las representaciones utilizadas en las respuestas de los estudiantes.

Estructuras y representaciones

Distinguimos entre los estudiantes que identifican estructuras en el trabajo con casos particulares y aquellos que lo hacen en la generalización. Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 5 en las cuatro sesiones. Expresamos las estructuras que hemos interpretado con notación algebraica, aunque no es la representación empleada por los estudiantes, como se observará en ejemplos posteriores. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 5. Resumen de los resultados

Sesiones	Función	Estudiante	Estructura casos particulares	Estructura caso general 1	Estructura caso general 2
Parque de atracciones 1	y = x+3	E1	y = x + 3	NR[i]	
		E2	y = x + 3	y = x + 3	
		E3	y = x + 3	NE[ii]	
Parque de atracciones 2	y = 1+2x	E1	y = 1 + 2x	NE	NE
		E2	y = 1+ x	y = 1+ x	y = 1+ x
		E3	y = 1+ x	NE	NE
		E1	y = x+x	y = x	
Cumpleaños	y = 2x	E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NR	
Paradas de tren	y = 2x	E1	y = 2x	NE	
		E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NE	

[i] NR= No responde

[ii] NE= No evidencia estructura

En general, todos los estudiantes identifican alguna estructura en el trabajo con casos particulares; no ocurre lo mismo en el caso general. En la sesión 1 (parque de atracciones 1), los tres estudiantes evidencian la estructura x+3 en respuestas a preguntas sobre casos particulares. E1 expresa que son 103 lo que tiene que pagar por hacerse socio del parque y comprar 100 viajes: “junto 100 y 3 más”. E3 escribe que “suma 3 y 100” para obtener la respuesta. Mostramos un ejemplo de la respuesta de E2 en una cuestión sobre casos particulares en la Figura 2.

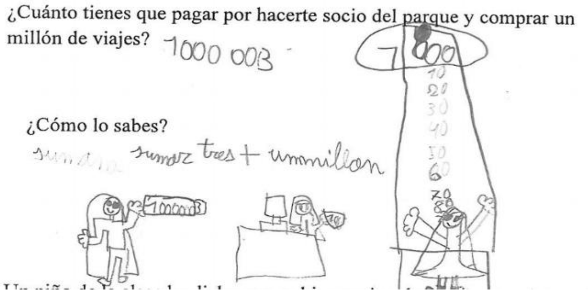


Figura 2. Respuesta de E2 a la pregunta sobre un caso particular (1 millón)

E2 es el único estudiante que generaliza en esta sesión expresando: “porque siempre tengo que sumar 3 + un número”. E1 no responde a esta cuestión y E3 lo hace sin dar evidencia de haber identificado estructura. La respuesta de E3 al caso general fue: “dándole el precio”. En cuanto a las representaciones usadas por estos tres estudiantes podemos identificar dos tipos: verbal y numérica. Ambas pueden observarse en el ejemplo de la Figura 2. La representación verbal viene dada por el lenguaje natural escrito: “sumar tres + un millón”. Dentro de esta representación encontramos el del signo más (+), representando adicción de cantidades.

En la sesión 2 solo E1 evidencia la estructura correcta del problema en los casos particulares. Al preguntarle cuánto paga por el carnet y 20 viajes, E1 escribe: “sumo 20+1 y me salen 21”. Cuando le preguntamos cuánto paga por el carnet más un millón de viajes, E1 contesta: “Sumo 1000000+1 y me salen 2000001”. E2 y E3 contestan a las preguntas sobre los casos particulares evidenciando la misma estructura y = 1+x, incorrecta en este contexto. E2 contesta al caso particular sobre los 20 viajes y de la siguiente forma: “21, porque hay que sumar 1 y 20”. E3 igualmente contesta: “21, sumando 20 y 1”. En cuanto a los casos generales, E2 generaliza mediante la estructura 1+x. En el caso general 1 expresa: “61 porque muchos pueden ser 60 más 1 son 61”. En el caso general 2, E2 expresa: “6 porque puede que haya cinco y 1+5 son 6”. Hace referencia a la cantidad indeterminada representada por una mancha mediante un valor concreto. En la Figura 3 puede verse este ejemplo. E1 y E3 no evidencian estructura en los casos generales. Por ejemplo, E1 al preguntarle por el caso general 1 y 2 escribe 201. Los tres estudiantes utilizan las representaciones numérica y verbal.

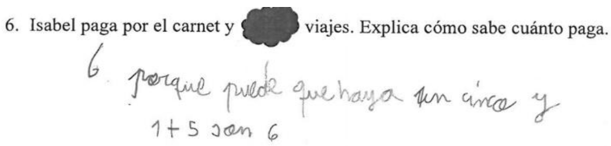


Figura 3. Respuesta de E2 a la pregunta sobre el caso general 2

En la sesión 3, E2 y E3 evidencian la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. E1 evidencia la estructura aditiva y = x+x. E2 es un caso destacable en esta sesión ya que a partir de los casos particulares cambia la estructura y = 2x. Podemos apreciarlo en la Figura 4.

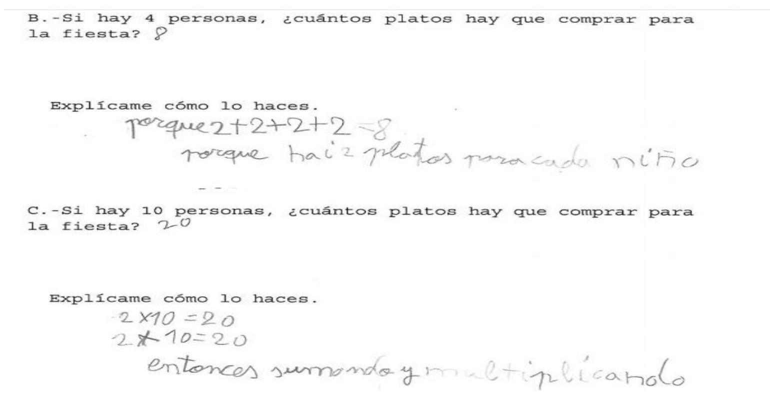
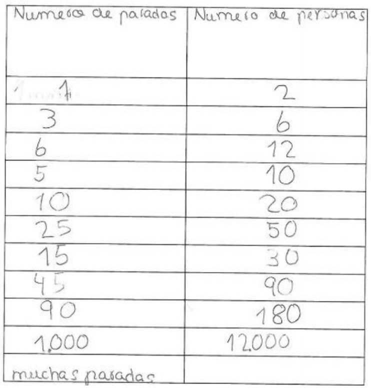


Figura 4. Respuesta de E2 a los casos particulares

En el caso general, E1 evidencia estructura y=x, escribe que necesitarán Ω platos. Expresa "Ω significa que van a venir Ω extraterrestres". E2 no evidencia la estructura en el caso general ya que expresa: "sumas 4 veces el 2 y te sale 8". E3 no responde a esta pregunta. Las representaciones usadas por los alumnos en esta sesión han sido de tipo verbal.

En la sesión 4, los estudiantes evidencian la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. Ejemplo de ello lo vemos con el estudiante E3 en la Figura 5.



Numero de paradas	Numero de personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
45	90
90	180
1.000	12.000
muchas paradas	

Figura 5. Casos particulares por el estudiante E3

De esta manera interpretamos que la estructura evidenciada por los estudiantes ha sido y = 2x. En el caso general, no observamos que los alumnos hayan identificado algún tipo de estructura al preguntarle por cuántas personas llevará el tren tras muchas paradas. En cuanto a las representaciones tenemos que las usadas han sido en este caso, y de nuevo, la numérica y la verbal. Por otro lado, a través de la representación tabular que utilizamos en la tarea, interpretamos que, aunque E1, E2 y E3 no sugieren títulos para los encabezados, reconocen lo que significa cada número de la tabla.

A modo de resumen podemos decir que el análisis de los datos de las cuatro sesiones arroja que en la sesión 1 y 4 todos los estudiantes identificaron correctamente la estructura empleada en cada uno de los contextos, en preguntas sobre casos particulares. Las relaciones implicadas en estos contextos han sido y = x+3, y = 2x. En las sesiones 2 y 3 los estudiantes E2 y E3 han identificado correctamente la estructura de la función. Solo el estudiante E1 ha identificado la estructura correcta en la sesión 2 donde involucramos la función y = 1+2x. En los casos generales la situación es diferente. Tan solo generaliza la relación funcional correctamente el estudiante E2 en la sesión 1. En las demás sesiones los estudiantes de este estudio, en su mayoría, no generalizan ninguna estructura que podamos interpretar salvo en las sesiones 2 y 3 donde E2 y E1 evidencian una estructura que no se corresponde con la relación funcional implicada. En otras sesiones no contestan a la pregunta planteada en el caso general.

CONCLUSIONES

Hemos observado evidencias de pensamiento funcional en estos estudiantes de segundo curso de Educación Primaria cuando atendemos a la forma de expresar las regularidades que encuentran (estructuras) en las situaciones vistas y a la forma de representar las generalizaciones que evidencian. La cantidad de estructuras correctas identificadas por los estudiantes en este estudio (sobre todo en los casos generales) ha sido menor que las encontradas en el estudio previo de Torres et al. (2018). En esta ocasión el análisis de los datos ha provenido únicamente de las respuestas escritas de los estudiantes a los cuestionarios aplicados en cada una de las sesiones. Lo que quiere decir que no ha habido oportunidad de profundizar más en las respuestas de los estudiantes. Encontramos unos resultados que difieren de los del trabajo de Pinto y Cañadas (2017) cuando atendemos a la variedad de estructuras evidenciadas. Nosotros encontramos mayor coherencia en las respuestas dadas debido a que se dan pocas estructuras diferentes para una misma regularidad.

La dificultad para tratar con unas relaciones funcionales y otras parece evidente. La función aditiva x+3 no presenta problema en su identificación en los casos particulares. Tampoco presenta mayor problemática la función y = 2x, función multiplicativa. Sin embargo, la función y = 1 + 2x, aditiva y multiplicativa, ha presentado una mayor dificultad en su identificación en los casos particulares dados. Encontramos que los estudiantes han tendido a evidenciar la estructura y = 1+ x en la mayor parte de los casos estudiados en la sesión 2 (parque de atracciones 2). En cuanto a las sesiones que comparten la misma función (sesión 3 y 4) encontramos que los estudiantes son más reacios a generalizar la estructura en la última sesión, la correspondiente a las paradas de tren. En la sesión del cumpleaños es un estudiante el que expresa la generalización mediante una estructura que no es la correcta. La comparación entre los resultados obtenidos entre las sesiones 1 y 2 durante los casos particulares y el caso general advierten de que la estructura aditiva con la multiplicativa de una misma función dificultan la tarea de generalización en estos estudiantes de segundo de primaria. Igualmente observamos que los contextos involucrados en las sesiones 3 y 4 que han sostenido la misma función nos han permitido apreciar, quizás, una influencia en los resultados obtenidos.

Tanto en la sesión 3 como en la 4 ningún estudiante consigue generalizar. En la sesión 2 hubo dos formas de preguntar sobre la generalización para acercarse a ella. Ambas han obtenido los mismos resultados por parte de los estudiantes; usan un valor concreto sin una lógica determinada para referirse a las cantidades indeterminadas representadas por nosotros mediante "muchos viajes" o "mediante un dibujo que representaba la cantidad de viajes. Sin embargo, en la sesión 3 sobre el cumpleaños ha sido un estudiante el que ha empleado el símbolo **Ω** en su respuesta sin recurrir a un valor concreto. Este uso puede darse por repetición, el estudiante lo ha visto escrito en el enunciado de la tarea. En cuanto a las representaciones empleadas por los estudiantes en las cuatro sesiones han sido en todos los casos representaciones verbales y/o numéricas como apuntaban los trabajos de nuestros antecedentes, Cañadas y Fuentes (2015), en estas edades tempranas. El sistema de representación verbal apareció usualmente vinculado con la representación numérica. En la última sesión presentamos la representación tabular observando que los alumnos han sido capaces de relacionar la variable dependiente e independiente mediante ese medio.

Una apuesta interesante es la de seguir trabajando en cómo los diferentes contextos y las distintas funciones implicadas afectan en la manera en la que los estudiantes se acercan a la generalización. Esta información nos ayudará a caracterizar el pensamiento funcional en los estudiantes en estas edades y nos brindará las herramientas con las que diseñar una instrucción eficaz en el sentido funcional de esta investigación.

Referencias

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College y PME.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, EE. UU.: NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada: Comares.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). *Algebra in function*. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Strother, S. A. (2011). Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Louisville, Louisville, EE. UU.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

[xliii] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

COMPONENTES DEL SENTIDO ESTADÍSTICO IDENTIFICADOS EN UN CICLO DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA DESARROLLADO POR FUTURAS MAESTRAS DE PRIMARIA

Components of statistical sense identified in a statistical investigative cycle developed by pre-service primary school teachers

Ubilla, F.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Esta comunicación tiene como objetivo aproximarnos a la identificación de elementos constituyentes del sentido estadístico presentes en un ciclo de investigación estadística. Partiendo de una revisión de los conceptos alfabetización, pensamiento y razonamiento estadísticos y, desde una visión global, proponemos ampliar el significado de sentido estadístico en el ciclo de investigación estadístico. Analizamos un ciclo de investigación desarrollado por futuras maestras de primaria y caracterizamos las distintas fases que aparecen en sus producciones. Identificar la presencia de elementos del sentido estadístico en dichas fases nos reafirma en la idea de que el sentido estadístico puede considerarse como amalgama de alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico.

Palabras clave: *sentido estadístico, ciclo de investigación estadística, futuras maestras de primaria.*

Abstract

The aim of this communication is to approach the identification of constituent elements of the statistical sense present in a statistical investigative cycle. Starting from a review of the concepts of statistical literacy, thinking and reasoning and, from a global viewpoint, we propose to broaden the meaning of statistical sense in the statistical investigative cycle. We analyze an investigative cycle developed by future primary school teachers and characterize the different phases that appear in their productions. Identifying the presence of elements of statistical sense in these phases reaffirms us in the idea that statistical sense could be considered as an amalgam of statistical literacy, thinking and reasoning.

Keywords: *statistical sense, the investigative cycle, pre-service primary school teachers.*

INTRODUCCIÓN

Hasta el momento, en España se han desarrollado varias investigaciones en torno a los errores cometidos por futuras maestras cuando se enfrentan a problemas que involucran estadística (Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea, 2012; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010; Bruno y Espinel, 2009; Espinel, 2007; Gea, Parraguez y Batanero, 2017). Consideramos que no solo es importante que las futuras maestras sean capaces de utilizar correctamente conceptos y procedimientos, sino también que sean capaces de razonar basándose en datos y ser críticas en cuanto al proceso de resolución de problemas que involucren estadística. Considerando lo anterior, el objetivo de esta comunicación es informar de un estudio que se sitúa en una investigación más amplia en la que se pretende caracterizar el sentido estadístico de las futuras maestras de primaria.

Siguiendo lo propuesto por Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013), proponemos reinterpretar el sentido estadístico desde una visión que considere conjuntamente alfabetización, pensamiento y

Ubilla, F. (2019). Componentes del sentido estadístico identificados en un ciclo de investigación estadística desarrollado por futuras maestras de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 583-592). Valladolid: SEIEM.

razonamiento estadístico. De aquí surge la necesidad de establecer los elementos que permiten la interacción entre estos tres constructos, en particular en el estudio de un ciclo de investigación estadística desarrollado por futuras maestras de primaria. En nuestro estudio partimos de la idea del ciclo de investigación estadística como estructura coherente que permite la interacción de distintos elementos del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Desde este punto de vista, el objetivo de esta comunicación es ver qué elementos de la alfabetización, el pensamiento y el razonamiento estadístico están presentes en cada una de las fases del ciclo de investigación estadística que desarrollan futuras maestras de primaria, con la intención de generar una discusión teórica basada en datos empíricos.

SENTIDO ESTADÍSTICO

Batanero et al. (2013) definen el sentido estadístico como la unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico (p. 8). Por cultura estadística se refieren a la comprensión de ideas estadísticas fundamentales propuestas por Burrill y Biehler (2011) que permiten la comprensión de situaciones donde se ve involucrada la estadística, mientras que el razonamiento estadístico es aquel que permite tomar decisiones y realizar predicciones sobre un conjunto de datos, así como de fenómenos en los que está presente la incertidumbre. Batanero et al. (2013) se basan en las competencias descritas por Gal (2002) para el término *statistical literacy* (alfabetización estadística) para describir el concepto de cultura estadística. En cuanto al razonamiento estadístico, se basan en el modelo propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) para el concepto de *statistical thinking* (pensamiento estadístico). A continuación, revisamos brevemente el origen de estos conceptos, así como del concepto *statistical reasoning* (razonamiento estadístico).

Alfabetización estadística

Batanero (2004) traduce *statistical literacy* como cultura estadística con la finalidad de resaltar el hecho de que la estadística se considera hoy en día como parte del bagaje cultural necesario para el ciudadano educado. Sin embargo, preferimos traducirlo por alfabetización estadística, para ajustarnos al uso del término en inglés.

Al considerar qué involucra la cultura estadística, Batanero et al. (2013) se basan en Gal (2002) quien define el término alfabetización estadística con base en lo que se espera que puedan hacer los adultos que viven en una sociedad industrializada. Se considera que un adulto está alfabetizado estadísticamente si tiene la capacidad de: (1) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, y (2) Discutir o comunicar su reacción a esta información, la comprensión del significado y opiniones sobre las implicaciones de dicha información, así como sus preocupaciones con respecto a la aceptabilidad de las conclusiones dadas (Gal, 2002). El modelo propuesto por este autor incluye elementos relativos al conocimiento y elementos disposicionales. Entre los primeros considera el conocimiento del contexto, destrezas lingüísticas, capacidad de cuestionar y conocimientos matemáticos y estadísticos. Entre los elementos relativos a las disposiciones considera la actitud crítica y las creencias y actitudes.

Es importante notar que, en este caso, la alfabetización estadística se entiende como una competencia necesaria para los consumidores de datos y no para los productores de datos (Schield, 2010). Por otro lado, Garfield, Ben-Zvi, Chance, Medina, Roseth y Zieffler (2008) definen la alfabetización estadística como “la comprensión y uso de lenguaje y herramientas básica de estadística: sabiendo el significado de términos básicos de estadística, comprendiendo el uso de símbolos estadísticos básicos y reconociendo y siendo capaz de interpretar diferentes representaciones de datos” (p. 34).

Entre los investigadores de habla hispana, hasta el momento, se han entendido como sinónimos cultura estadística y alfabetización estadística, siendo utilizado el concepto de cultura estadística como la traducción del término *statistical literacy*. Considerando esto, Contreras y Molina-Portillo

(2019) proponen los elementos claves de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos: (1) Comprensión, interpretación y argumentación de información estadística, (2) Una actitud crítica y de cuestionamiento, (3) Detección de sesgos y errores, (4) Comprensión del contexto, (5) Destrezas matemáticas, y (6) Transnumeración. Este último elemento forma parte de una de las dimensiones que Wild y Pfannkuch (1999) definen para el pensamiento estadístico, como revisamos a continuación.

Pensamiento estadístico

Para definir las dimensiones del pensamiento estadístico, Wild y Pfannkuch (1999) estudian qué hacen los estudiantes de la carrera de estadística cuando resuelven problemas. Definen cuatro dimensiones para caracterizar el pensamiento estadístico, que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999)

D1: El ciclo de investigación estadística	D2: Tipos de pensamiento	D3: El ciclo de interrogación	D4: Disposiciones
Involucra 5 fases: • Plantear un problema • Generar un plan • Recolección, gestión y limpieza de datos • Análisis de datos • Conclusiones	• Pensamientos generales: estrategia, buscar explicaciones, modelar y aplicar técnicas. • Pensamiento estadístico fundamental: reconocer la necesidad de los datos, transnumeración, consideración de la variación, razonar con modelos estadísticos, integración de la estadística y contexto.	Involucra 5 fases: • Generar posibilidades • Buscar información • Interpretar la información • Criticar el proceso • Juzgar los resultados	Algunas actitudes frente a la resolución de problemas estadísticos: • Escepticismo • Imaginación • Curiosidad • Ser lógico • Perseverancia

En el estudio que presentamos ahora nos centramos en una actividad relacionada con la primera de estas dimensiones, el ciclo de investigación estadística (a partir de ahora, CIE) cuya estructura, según estos autores, permite visualizar la interacción de las cuatro dimensiones en su conjunto. En Ubilla, Gorgorió y Prat (en prensa) proponemos un sistema de categorías que permite caracterizar las cinco fases del CIE, con la finalidad de describir el conocimiento inicial de futuras maestras de primaria cuando desarrollan un CIE.

Razonamiento estadístico

Resulta importante diferenciar entre pensamiento y razonamiento estadístico. Del Mas (2004) considera que tanto el pensamiento como el razonamiento estadístico se dan en simultáneo cuando una persona resuelve un problema que involucre estadística. Sin embargo, en función de la naturaleza de la tarea, pueden distinguirse con mayor o menor facilidad. De esta forma, “una persona que sabe cuándo y cómo aplicar conocimiento y procedimiento estadísticos demuestra pensamiento estadístico”, mientras que alguien que puede “explicar por qué se produjeron los resultados o por qué justifica una conclusión demuestra un razonamiento estadístico” (p. 85).

Por otro lado, Garfield (2002) establece tipos de razonamiento que sería deseable que las estudiantes desarrollaran. Algunos de estos son: a) *Razonamiento sobre los datos*, identificando datos cualitativos/cuantitativos y discretos/continuos; b) *Razonamiento sobre la representación de los datos*, identificando la forma en que se debe representar un conjunto de datos; c) *Razonamiento sobre medidas estadísticas*, conociendo el significado de distintos estadísticos, sabiendo cuál es el que mejor representa un conjunto de datos, y d) *Razonamiento sobre la muestra*, conociendo la relación entre población y muestra, qué es posible inferir a partir de una muestra y de qué manera se puede escoger una muestra representativa de la población.

EL SENTIDO ESTADÍSTICO EN UN CICLO DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

En base a lo anterior, en esta comunicación proponemos considerar el sentido estadístico como una visión global de la alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico en el estudio del CIE. Al desarrollar un CIE, las estudiantes actúan como productoras de datos, que luego deben analizar e interpretar para dar respuesta a una pregunta de investigación, con lo que también deben tomar el papel de consumidoras de datos. Es decir, en el desarrollo de un CIE se ponen en juego los tres componentes estadísticos descritos anteriormente.

Desde esta perspectiva, para el estudio de un CIE bajo la mirada del sentido estadístico proponemos una representación que considera conjuntamente alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico.

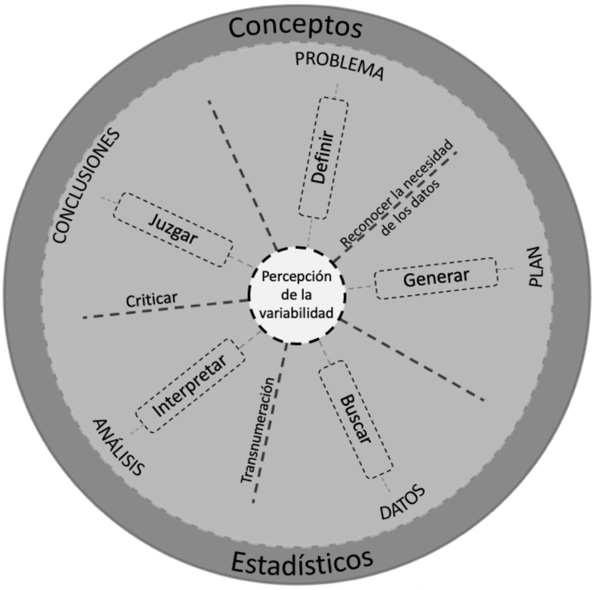


Figura 1. Primera aproximación al sentido estadístico en un CIE

La Figura 1 incorpora las fases del CIE, correspondiente a la dimensión 1 del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999). A partir del estudio de Estepa y del Pino (2013) sobre la enseñanza de la dispersión, consideramos la variabilidad un elemento central en la resolución de problemas de estadística, que puede estar presente en las cinco fases del CIE. Por otro lado, siguiendo a Gal (2002), la comprensión de conceptos estadísticos es la base para poder desarrollar un CIE. Estos conceptos van acompañados de los distintos tipos de razonamientos presentados por Garfield (2002). La discontinuidad de las líneas quiere resaltar que el desarrollo de un CIE no es un proceso lineal, más bien es un proceso en el cual se puede transitar libremente entre las diferentes fases, volviendo al principio de ser necesario, con la finalidad de refinar el problema o la pregunta de investigación que se plantea. Mostrar que hay espacio para avanzar y retroceder pretende reflejar el proceso crítico que siempre debe tenerse presente a la hora de resolver un problema que involucre estadística.

La Figura 1 representa nuestra aproximación a cómo el sentido estadístico puede manifestarse en un CIE. Sin embargo, el análisis de los datos y los resultados del estudio que presentamos nos permitirán refinar esta figura y discutir sus implicaciones.

METODOLOGÍA

Nos posicionamos en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo. Puesto que queremos identificar elementos del sentido estadístico presentes en el CIE desarrollado por un grupo de futuras maestras, les proponemos una actividad que les guía a través de las fases de un CIE. La actividad consta de seis pasos, donde los cinco primeros se relacionan directamente con la dimensión 1 del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) y en el sexto solicitamos que reflexionen sobre la actividad, identificando puntos fuertes y débiles del proceso llevado a cabo. La actividad está redactada de la siguiente forma:

1. *Definid un tema de interés y una pregunta de investigación.*
2. *Justificad la relevancia del tema a investigar, así como la pregunta de investigación.*
3. *Elaborad un instrumento de recogida de datos, justificando su construcción y las preguntas que lo conforman.*
4. *Analizad los datos y exponed los resultados.*
5. *Dad una posible respuesta a la pregunta de investigación y estableced conclusiones.*
6. *Evaluad y reflexionad sobre todo el proceso identificando puntos fuertes y débiles.*

Durante seis sesiones de 90 minutos, 134 estudiantes que acababan de iniciar el grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona desarrollaron la actividad organizadas en 34 grupos de tres o cuatro integrantes. Del total de estudiantes, 91 habían cursado Bachillerato, 72 de los cuales el de Humanidades y Ciencias Sociales, 15 el de Ciencias y Tecnología, y 4 el de Artes. Por ello, asumimos que la única base compartida se corresponde con la estadística presente en el currículum de la Enseñanza Obligatoria.

Nuestros datos son las producciones escritas de los grupos de trabajo que se complementan con las observaciones de aula recogidas por la autora. Se identifican las producciones de cada grupo con un código para dicho grupo (por ejemplo, G3 para el grupo 3).

ANÁLISIS

Hacemos un análisis de contenido en un proceso deductivo, a partir de establecer unidades de significado en las producciones escritas de las estudiantes. Para cada una de las fases del CIE se presentarán ejemplos extraídos de las producciones escritas y se explicitará la conexión que establecemos con los componentes del sentido estadístico, subrayándola.

Análisis fase 1: Problema

Cuando las estudiantes justifican su problema o pregunta de investigación, es posible ver que hay grupos que consideran la relevancia del contexto para plantear su pregunta de investigación: “Creemos que la lectura es esencial como fuente de conocimiento. Como futuras maestras sería importante poder transmitir el placer por la lectura a los alumnos. Por tanto, nos agradaría saber las preferencias literarias de los compañeros y compañeras del grupo” (G1). Aquí identificamos el <u>elemento de conocimiento del contexto</u> propuesto por Gal (2002) para la *alfabetización estadística*.

Algunos grupos plantean preguntas de investigación que relacionan dos variables, en este caso cualitativas: “¿Existe relación entre el sexo y el tipo de extraescolares escogidos?” (G15). De esta forma vemos que se presentan elementos relativos al <u>conocimiento matemático y estadístico</u> de la *alfabetización estadística* (Gal, 2002). Vemos también que hay grupos que presentan un <u>razonamiento sobre la muestra</u> (Garfield, 2002) al plantear su pregunta de investigación: “Nuestro estudio se ha centrado en la población del grupo 21 del Grado en Educación Primaria de la UAB y más concretamente, los alumnos y maestros asistentes a la sesión del día 1 de marzo de 2018 a la asignatura Matemática para maestros. La población es de 61 personas y el rango de esas comprende desde los 17 años hasta los 47 años, aunque la amplia mayoría se sitúa en la franja entre los 18 y 21 años” (G1).

Análisis fase 2: Plan

Durante la fase de generar un plan, algunos grupos plantean una hipótesis previamente a la recogida de datos: “Tenemos la intención de extraer conclusiones de la encuesta en relación con el género, ya que tenemos la hipótesis de que el maquillaje está socialmente vinculado al género femenino" (G8). Esto se relaciona con la fase generar posibilidades del ciclo de interrogación propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) para el *pensamiento estadístico*, así como el reflejo de sus creencias respecto a un tema en particular, el cual corresponde a un elemento de la *alfabetización estadística*.

En algunos instrumentos de recolección de datos, se pueden observar la utilización de conceptos matemáticos y estadísticos, como por ejemplo la utilización de intervalos (Figura 2), siendo estos elementos relativos a la *alfabetización estadística*.

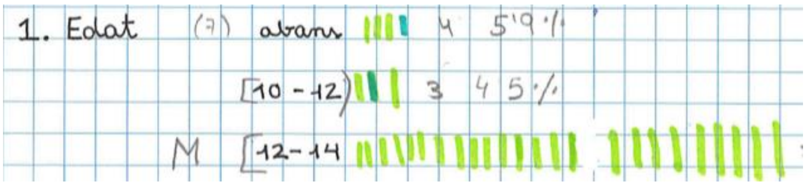


Figura 2. Utilización de intervalos en F2C2 (G8)

Análisis fase 3: Datos

El proceso de recolección de datos, en sí mismo, responde a la fase buscar información del ciclo de interrogación que se corresponde a una de las dimensiones que caracterizan el *pensamiento estadístico*. En este caso, corresponde a una búsqueda externa de información para dar respuesta a la pregunta de investigación.

Por otro lado, hay grupos que llevan a cabo un registro visual de respuestas de individuos que no pertenecen a la muestra. Por ejemplo, en la Figura 3, se observa que, al costado del instrumento de recogida de datos, registran las respuestas de dos personas que han accedido al grado con 17/18 años, pero que sin embargo no cursan el grado de Educación Primaria. Esto refleja un razonamiento sobre los datos y la muestra, correspondiente al *razonamiento estadístico*.

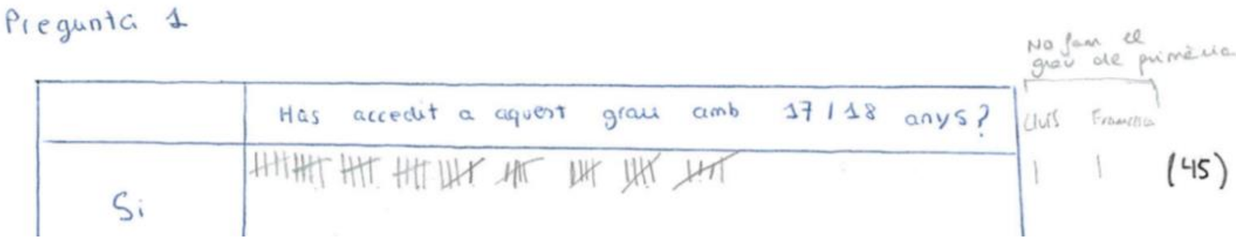


Figura 3. Registro visual de datos que no pertenecen a la muestra F3C2 (G9)

Análisis fase 4: Análisis

Previo a la realización de gráficos y tablas, algunos grupos realizan una limpieza de sus datos. De aquí es posible observar la utilización de frecuencias absoluta y relativa porcentuales, siendo esta una primera aproximación al tratamiento de los datos obtenidos. Esto se puede observar en la Figura 2 (frecuencia relativa porcentual) y en la Figura 3 (frecuencia absoluta). Esto responde a elementos de conocimiento matemático y estadísticos presentes en la *alfabetización estadística*.

El proceso de cambio de formato de los datos, es decir, la transnumeración, corresponde en sí mismo a una de las formas de la dimensión pensamientos estadísticos fundamentales propuestos por Wild y Pfannkuch (1999) para definir el *pensamiento estadístico*. Debido a que la actividad no pide explícitamente la construcción de gráficos ni el cálculo de medidas de centralización, es posible observar que 31 de los 34 grupos utilizan la transnumeración. Junto con esto, es posible observar la presencia de elementos de conocimiento matemático y estadístico propios de la *alfabetización estadística* como son los gráficos (de barras, circular e histograma), así como el uso de medidas de centralización. De esta forma, observamos razonamientos sobre medidas estadísticas como el siguiente: "En el análisis que hemos realizado no hemos podido calcular ni la media ni la mediana, ya que en nuestro trabajo las variables eran los países más visitados y no números. Por este motivo, con nombres de los países no es factible el estudio de la media y mediana. Sin embargo, sí que hemos obtenido la moda, que sería la opción con más respuestas" (G6), así como <u>razonamiento sobre la representación de los datos</u>: "Para que estos resultados se vean de una manera más clara, los mostramos en los siguientes gráficos [gráficos de barra]" (G10).

Análisis fase 5: Conclusiones

Durante la interpretación de resultados algunos grupos consideran el contexto bajo el cual se realiza la investigación para explicar los resultados obtenidos: "El hecho de que se trate de una población joven y estudiantes, en mayor parte, conlleva que el poder adquisitivo sea bajo y que los precios que están dispuestos a pagar sean entre 10 y 20 €" (G1). En este caso, está presente uno de los tipos de *pensamiento estadístico* fundamental, en concreto, la <u>integración de la estadística y el contexto</u>. Del mismo modo, se hace presente el <u>elemento de conocimiento del contexto</u> propio de la *alfabetización estadística*.

Del mismo modo, algunos grupos presentan el pensamiento estadístico fundamental correspondiente al <u>razonamiento con modelos estadísticos</u>, como se observa en la Figura 4, donde el gráfico que se muestra a la izquierda va acompañado con la interpretación de la derecha.

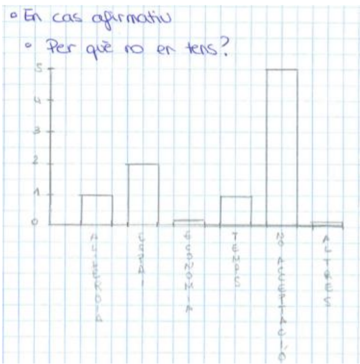
	"Con estos resultados podemos ver que la moda es la no aceptación de la familia, así que vemos que no es una decisión propia. Pensamos que esta respuesta es debido a que la mayoría de los encuestados conviven con sus padres" (G3)

Figura 4. Razonamiento con modelos estadísticos (G3)

Durante la fase final, algunos grupos presentan reflexiones sobre el trabajo desarrollado, entre ellas podemos observar algunos <u>razonamientos sobre la muestra</u> como "No es un análisis representativo, ya que hemos encuestado 50 chicas y no más 9 chicos" (G15), lo que también refleja la fase de <u>criticar el proceso</u> presente en el ciclo de interrogación del *pensamiento estadístico*. Del mismo modo, está presente la utilización del concepto de muestra, por lo que también están presentes elementos de conocimiento matemático y estadístico, lo que forma parte de la *alfabetización estadística*.

Por último, también se hace presente la fase de <u>juzgar los resultados,</u> la cual forma parte del ciclo de interrogación del *pensamiento estadístico*. Esto se refleja en el siguiente ejemplo: "También hay que tener en cuenta que en el grupo que hemos analizado no había la misma cantidad de chicos y chicas, ya que había 33 chicas más. Por tanto, pensamos que puede ser que este estudio estadístico no es del todo fiable, ya que, si estudiáramos el grupo con 33 chicos más, probablemente obtendríamos resultados diferentes" (G35). En este caso, se puede observar que juzgan la confiabilidad de los resultados obtenidos, así como también se observa una <u>postura crítica</u> frente al proceso realizado, lo cual forma parte de los elementos disposicionales de la *alfabetización estadística*.

RESULTADOS

A continuación, se presenta en la Tabla 2 los elementos de los componentes del sentido estadístico identificados en cada una de las fases del CIE.

Tabla 2. Componentes del sentido estadístico identificados en las fases del CIE

	Fase 1: Problema	Fase 2: Plan	Fase 3: Datos	Fase 4: Análisis	Fase 5: Conclusiones
Alfabetización estadística	Elementos de conocimiento: matemáticos, estadísticos y del contexto	Elementos de conocimiento: matemáticos, estadísticos y del contexto Elementos disposicionales: creencias		Elementos de conocimiento: matemáticos, estadísticos y del contexto	Elementos de conocimiento: matemáticos, estadísticos y del contexto Elementos disposicionales: postura crítica
Pensamiento estadístico		Ciclo de interrogación: generar posibilidades	Ciclo de interrogación: buscar información	Pensamiento estadístico fundamental: transnumeración	Pensamiento estadístico fundamental: razonar con modelos estadísticos e integración de la estadística y el contexto Ciclo de interrogación: criticar el proceso y juzgar los resultados
Razonamiento estadístico	Razonamiento sobre la muestra		Razonamiento sobre la muestra y los datos	Razonamiento sobre medidas estadísticas y sobre la representación de los datos	Razonamiento sobre la muestra

Como se observa en la Tabla 2, diferentes elementos de la alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico se observan de manera transversal en las cinco fases del CIE propuesto por Wild y Pfannkuch (1999). La interacción de estos tres conceptos corrobora nuestra idea de entender el sentido estadístico como la amalgama de estos tres constructos.

CONCLUSIONES

Si consideramos que las futuras maestras de primaria deben enseñar a sus alumnos a comprender, aplicar y razonar sobre conceptos estadísticos, es importante que perfeccionen su propio sentido estadístico de forma que les permita ayudar a sus alumnos a desarrollar una investigación estadística. Para comprender en profundidad un concepto estadístico, no basta con ser consumidores de datos que involucren la aplicación de este concepto, sino también es necesario saber qué significa el concepto (alfabetización estadística), por qué y cómo se aplica (razonamiento estadístico) y evaluar y criticar su aplicación (pensamiento estadístico).

El análisis del CIE desarrollado por un grupo de futuras maestras nos ha permitido evidenciar la interacción entre los diferentes componentes del sentido estadístico. Al ser una estructura conformada por fases que guían la resolución de problemas que involucren estadística, permite hacer visibles no tan solo la aplicación de conceptos matemáticos y estadísticos, sino también distintos tipos de razonamientos como los propuestos por Garfield (2002), así como elementos de las dimensiones que describen el pensamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999).

De esta forma, a partir de los resultados obtenidos en nuestro estudio, y considerando los elementos de la Tabla 2, refinamos la Figura 1 generando la Figura 5 en la que se pueden observar los distintos componentes de cada una de las fases del CIE. En azul, se muestra la identificación de diferentes tipos de razonamientos estadísticos presentes en cada una de las fases, ya detallados en la Tabla 2. Los razonamientos identificados corresponden a los propuestos por Garfield (2002). En cuanto a la alfabetización estadística, consideramos los elementos de conocimiento matemático y estadístico como elementos base para el desarrollo de un CIE, así como el conocimiento del contexto bajo el cual se lleva a cabo el CIE. Si bien los elementos disposicionales (Gal, 2002) así como las disposiciones (Wild y Pfannkuch, 1999) los consideramos como elementos transversales a toda resolución de problemas estadísticos, en esta ocasión no eran parte del objetivo de nuestro estudio.

Figura 5. Componentes del sentido estadístico en un ciclo de investigación estadística

La finalidad de esta investigación no ha sido la introducción de nuevos conceptos para la teoría, sino más bien la comprensión de cómo se complementan los conceptos de alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico en la construcción de un sentido estadístico. También es importante destacar que los componentes observados en esta investigación pueden ser ampliados si se cambia el grupo de personas que desarrolla el ciclo de investigación estadística o si la actividad se plantea de otra forma, lo que llevaría a completar y/o cambiar aspectos de la Tabla 2. Esto da paso a futuras investigaciones que permitirían completar la caracterización del sentido estadístico en la resolución de problemas que involucren estadística.

Agradecimientos

Este estudio ha contado con el apoyo de CONICYT PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018 - 72190313, y del proyecto EDU2017-8247-R financiado por la Dirección General de Investigación, Gobierno de España.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa, 14*(2), 279-297.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, *1*(1), 27-37.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Lyon, Francia: ERME.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *NÚMEROS*, *83*, 7–18.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(4), 473-493.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Recuperado de: https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/contreras.pdf

Del Mas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-95). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 99–119). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Estepa, A. y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *NÚMEROS*, *83*, 43-63.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Garfield, J. B. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3). DOI: 10.1080/10691898.2002.11910676

Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C. y Zieffler, A. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Gea, M. M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

Schield, M. (2010). Assessing statistical literacy: Take CARE. En P. Bidgood, N. Hunt y F. Jolliffe (Eds.), *Assessment methods in statistical education: An international perspective* (pp. 133-152). Chichester, Reino Unido: John Wiley & Sons.

Ubilla, F., Gorgorió, N. y Prat, M. (en prensa). The investigative cycle: developing a model to interpret the written statistical reports of pre-service primary school teachers. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

CARACTERIZACIÓN DE LOS ARGUMENTOS DADOS POR PROFESORES EN FORMACIÓN A UNA TAREA SOBRE DERIVADA

Characterization of arguments given by teachers in training to a derivative task

Vargas, M. F.[a,b], Fernández-Plaza, J. A.[b] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[b]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Como parte de una investigación más amplia en la que estudiamos el significado que dan los profesores al concepto de derivada, en este trabajo analizamos los argumentos dados por un grupo de profesores en formación de matemáticas al justificar la veracidad de enunciados referidos al concepto de derivabilidad de una función en un punto. Para ello, empleando el modelo de Toulmin (1958), nos centramos en la garantía o justificación dada y en si se presenta o no un respaldo a la misma. Los resultados revelan que para argumentar los profesores en formación recurren principalmente a resultados, propiedades o reglas ya conocidas; las cuales son utilizadas sin necesidad de respaldo. Además, se identifican algunos errores en los argumentos analizados.

Palabras clave: *argumentación, modelo de Toulmin, derivada, profesores en formación.*

Abstract

As part of a research in which we study the meaning that teachers give to the concept of the derivative, in this paper, we analyse the arguments given by a group of prospective secondary mathematics teachers to justify the veracity of statements referring to the concept of derivability of a function at a point. To do this, by using the model of Toulmin (1958), we focus either on the warranty or the justification given and whether there is a backing for it. The results show that in order to argue, the teachers in training resort mainly to already known results, properties or rules; which are used without backing. In addition, some errors are displayed in the analysed arguments.

Key words: *argumentation, Toulmin model, derivative, teachers in training.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática, particularmente en Didáctica del Análisis, ha evidenciado en reiteradas ocasiones los diversos problemas que presentan los estudiantes para comprender el concepto de derivada (por ejemplo, Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg, 2008; Bingolbali y Monaghan, 2008; Hähkiöniemi, 2008; Orton, 1983). Asimismo, algunas investigaciones se han centrado en el profesorado mostrando que estas dificultades de comprensión no son exclusivas del estudiantado, sino que estas se extienden a los docentes (por ejemplo, Badillo, Azcárate y Font, 2011; Noh y Kang, 2007). Esto requiere especial atención y nos proporciona un primer motivo para el trabajo, ya que se ha constatado que la instrucción está influenciada considerablemente por la concepción y comprensión del profesor respecto al contenido matemático (por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2013).

Es por ello por lo que proponemos un trabajo cuyo objetivo es la descripción de los argumentos que brindan profesores en formación al justificar la veracidad de un enunciado respecto a la derivabilidad de una función en un punto. Consideramos que los profesores deben ser capaces de analizar y validar los argumentos dados por sus estudiantes, ya que para evaluar las soluciones que estos dan es necesario que puedan seguir la argumentación que brindan (Philipp, 2018). Sin

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 593-602). Valladolid: SEIEM.

embargo, tal como aseguran Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014), es una capacidad que pese a su relevancia recibe poca importancia en estudios como el *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M), donde se le considera como un subdominio del conocimiento pedagógico del contenido (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008).

Para el análisis, consideramos los elementos de un argumento según lo planteado en el modelo de Toulmin (1958), centrando nuestra atención en dos de esos elementos: las justificaciones (*warrant*) dadas por los profesores en formación, estudiando su validez; y el respaldo (*backing*), si se presenta, que se da a dichas justificaciones. Además, utilizamos el mismo esquema que Stylianides (2007) al considerar tres componentes en un argumento matemático:

- Elemento matemático empleado: Para esto, identificamos el aspecto o elemento del significado que los profesores en formación involucran en sus justificaciones (Rico, 2012; 2013);
- Modo de representación del argumento: Utilizando la clasificación de argumentos propuesta por Reid y Knipping (2010), y finalmente;
- Modo de argumento: Identificando la implicación lógica que utiliza al redactar su argumento (Solow, 2006).

Una segunda razón para realizar este estudio es el papel crucial que juega la argumentación matemática tanto para el conocimiento como para el razonamiento científico (Koleza, Metaxas y Poli, 2017). Su relevancia se aprecia en aspectos como que *razonar y argumentar* es considerada una competencia matemática fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, destacada en *Programe for International Student Assessment* (PISA) (OECD, 2016). Asimismo, reconocidas actividades académicas sobre investigación en Educación Matemática como el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) cuentan en sus reuniones internacionales con un grupo cuya línea de investigación es precisamente *argumentación y prueba*.

Diversas investigaciones han empezado a abordar el tema de la argumentación, analizándose los argumentos matemáticos dados por profesores y estudiantes (por ejemplo, Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2017; Knipping y Reid, 2013; Metaxas, Potari y Zachariades, 2016; Ortiz-May, 2018; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017). Dichos estudios se han realizado desde distintas perspectivas, siendo las principales herramientas metodológicas para el análisis de estos argumentos el modelo de Toulmin (1958) y los esquemas de argumentación propuestos por Walton, Reed y Macagno (2008).

La importancia de estos estudios radica en que al estudiar los componentes del argumento se tiene una aproximación sobre la comprensión y percepción que se tiene sobre las matemáticas (Koleza et al., 2017), además permiten identificar y categorizar patrones de razonamiento (Metaxas et al., 2016).

MARCO TEÓRICO

Existen grandes discrepancias en cuanto a qué es argumentación. En mucha de la literatura frecuentemente se relaciona este concepto con el de prueba matemática. Sin embargo, hay quienes afirman que son completamente distintos. Por ejemplo, Duval (1990) afirma incluso que eso a lo que le llamamos argumentación no es algo fácil de definir, y que para él un argumento es lo que se usa para justificar o refutar una proposición y para ello puede emplearse una definición, un ejemplo, una regla, entre otros. De forma similar, para Lithner (2008) el argumento es ese sustento o parte del razonamiento que apunta a convencer que un razonamiento es apropiado.

Para analizar los argumentos se han empleado distintos modelos y herramientas. Tal como indicamos anteriormente, en nuestro caso asumimos un modelo ampliamente utilizado: el de Toulmin (1958), en el cual se establece que en un argumento se involucran 6 elementos: afirmación (*claim*), datos (*data*), garantía o justificación (*warrant*), respaldo (*backing*), cualificador modal (*modal qualifier*) y refutación (*rebuttal*). Emplearemos un modelo simplificado expuesto en Reid y Knipping (2010), en el que se contempla únicamente los cuatro primeros elementos, entendiéndolos de la siguiente manera:

- Afirmación: conclusión, tesis o hipótesis que se defiende
- Datos: evidencia, hechos o prueba que apoyan la afirmación
- Garantía (justificación): regla o teoría que da paso de los datos a la afirmación
- Respaldo: apoyo a la garantía o justificación dada, se emplea para dar fuerza a la justificación o clarificarla. Por ejemplo, el argumento dado puede ser un teorema conocido que justifica la afirmación. Pero, además de esto, se puede ejemplificar o bien justificar por qué el teorema es aplicable.

Para este trabajo, la tarea presentada a los profesores en formación representa la afirmación que deben confirmar o refutar; brindando también datos que apoyan la afirmación realizada. Así nuestro objetivo se concreta en analizar la garantía o justificación dada por los profesores en formación que permite el paso a la conclusión (ya sea confirmándola o refutándola), además, si estas justificaciones son respaldadas o no, y de qué modo.

En el análisis también identificaremos el elemento matemático empleado en las justificaciones dadas. Para ello tomamos en consideración parte de uno de los componentes que constituyen el marco del significado de un contenido matemático escolar propuesto por Rico (2012, 2013). De este modo identificaremos qué elemento de la estructura conceptual es utilizado, ya sea un concepto, un resultado, o un procedimiento, entre otros.

Por otra parte, también consideramos la clasificación de argumentos y pruebas dada por Reid y Knipping (2010), la cual se centra en el uso de los sistemas de representación. Los autores consideran cuatro grandes categorías de argumentos: empíricos, genéricos, simbólicos y formales. Estas a su vez derivan en distintas subcategorías. Por cuestión de espacio no detallamos cada una de ellas; pero entre otras están:

- Argumento perceptual: aquí la justificación presentada se limita a un dibujo de un caso particular.
- Un contraejemplo.
- Argumento geométrico: de forma similar al perceptual, aquí el argumento se basa en una figura, sin embargo, aquí se hace de manera general, sin medidas o cuestiones particulares.
- Argumento narrativo: en el cual se presenta una explicación verbal.
- Argumentos simbólicos: aquellos presentados mediante manipulación de símbolos.

Finalmente, Solow (2006) plantea una serie de técnicas empleadas al realizar una demostración matemática, las cuales pueden aplicarse también a argumentos. Él asegura que las demostraciones se fundamentan en un método al que denomina *retroceder-avanzar*, ya que al demostrar una implicación de la forma $A \Rightarrow B$, donde A es la hipótesis y B lo que queremos concluir, tenemos dos opciones:

- Preguntarnos ¿cómo o cuándo puedo demostrar que B es verdadero? Es decir, iniciar de atrás hacia adelante (retroceder), o bien,
- Asumir que A es verdadero y preguntarnos ¿Qué implica que A sea verdadero? Se obtiene de esa forma otra proposición y así sucesivamente hasta obtener B (avanzar).

En ambos casos, Solow (2006) considera que la clave está en la pregunta que nos hacemos y la respuesta que damos a la misma. Además, señala que para responder a esta podemos hacer uso de definiciones o bien de resultados ya establecidos, los cuales pueden utilizarse mediante una implicación lógica. En la Tabla 1 se muestran los tipos de implicaciones que se pueden hallar. Hacemos notar que no todos los enunciados que se utilizan son verdaderos, su uso es ilustrativo.

Tabla 1. Tipos de implicaciones lógicas

Implicación lógica	Escritura	Ejemplo
Directa	$A \Rightarrow B$	Si una función es derivable en un punto, esa función es continua en dicho punto.
Recíproca	$B \Rightarrow A$	El recíproco sería, si una función es continua entonces es derivable en ese punto.
Contraria	$\neg A \Rightarrow \neg B$	Si una función no es derivable entonces no es continua.
Contrarrecíproca	$\neg B \Rightarrow \neg A$	Si la función no es continua, entonces no es derivable.

Así, prestaremos también atención a la implicación lógica empleada al involucrar los elementos matemáticos en la justificación.

METODOLOGÍA

Abordamos una investigación cualitativa de naturaleza descriptiva, la cual se llevó a cabo con estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Granada. Para la recolección de los datos se utilizó un cuestionario semántico compuesto por tres tareas, entre ellas, una de verdadero o falso en la que se incluían dos enunciados referentes a la derivabilidad de una función en un punto, la cual será objeto de análisis en este trabajo.

La finalidad de dichos enunciados era ver qué aspectos del concepto de derivada involucraban los profesores en formación al justificar la derivabilidad o no de una función en un punto. La aplicación del instrumento se desarrolló en dos momentos, uno durante el curso académico 2016/2017 y otro en el 2017/2018. Se cuenta con la participación total de 55 estudiantes para profesor.

Para el análisis de las respuestas obtenidas se empleó el método del *análisis de contenido*, examinando cuidadosamente cada una de ellas; tal como se ha adelantado, además de identificar cuántos habían acertado la veracidad del enunciado y los argumentos dados; procedimos a determinar:

- Si la garantía presentada era o no válida para el enunciado dado
- Si presentaban o no algún respaldo a la justificación dada
- Los elementos matemáticos utilizados en la justificación
- La forma en la que se presenta el argumento, esto identificando tanto el tipo de argumento como la implicación lógica involucrada.

Aclaramos que nuestro foco de estudio es la estructura de la argumentación empleada por los profesores en formación, con independencia de la validez para sostener la veracidad o falsedad de cualquier enunciado, lo cual también queda registrado.

RESULTADOS

Por cuestiones de espacio, presentamos solo los resultados del análisis realizado al primer enunciado de la tarea de verdadero o falso, el cual se muestra en la Figura 1.

1. (   ) Para la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 1

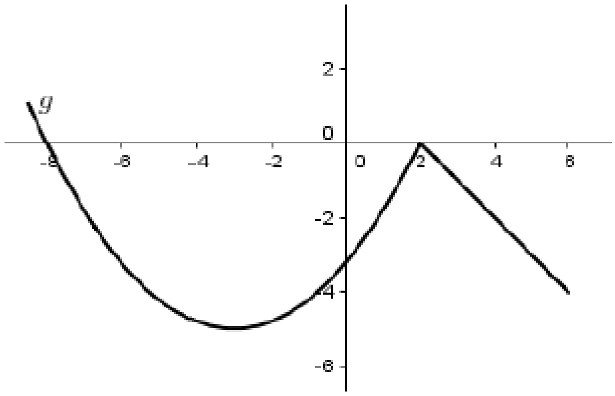


Figura 1. Gráfica de g

Se puede afirmar que como g tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

Figura 1. Tarea propuesta en el cuestionario

En la Figura 2 se aprecia una de las justificaciones dada por uno de los participantes quien afirmó que el enunciado era verdadero. A continuación, presentamos a modo ilustrativo el análisis realizado a este. Posteriormente mostramos los resultados obtenidos tras analizar los 55 argumentos.

Jutificación

Si, porque los máximos y mínimos de la función lo obtenemos igualando a 0 la primera derivada. Esto es porque la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0 porque es una recta horizontal.

Figura 2. Justificación dada por uno de los estudiantes para profesor

Lo primero que hacemos es identificar que, pese a que la afirmación es correcta en muchos casos (en efecto ese es el procedimiento conocido para determinar máximos y mínimos), no es una garantía o justificación válida para el contexto del enunciado dado. Consideramos además que el futuro profesor intenta respaldar su justificación al escribir que dicho procedimiento puede emplearse "*porque la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0 porque es una recta horizontal*".

Posteriormente identificamos el elemento matemático en el que se basa la justificación: el procedimiento algebraico para hallar extremos locales o puntos críticos en general. Seguidamente analizamos qué implicación lógica empleó. Aunque no sea explícito, pareciera que el razonar del futuro profesor fue: *"si para hallar máximos y mínimos igualamos la primera derivada a cero, entonces si hay un máximo o mínimo es porque la derivada es cero"*. Es decir, toma la implicación recíproca como verdadera. Finalmente, el tipo de argumento es claramente narrativo.

De forma similar analizamos los restantes argumentos. De los 55 participantes, 11 de ellos consideraron el enunciado como verdadero, 42 señalaron que era falso y dos no contestaron nada. Analizamos en total 50 respuestas pues además de los 2 participantes que no contestaron, hubo 3 más que no dieron justificación alguna. Las justificaciones dadas fueron variadas. Entre otros, y escritos de manera sintética, los argumentos fueron:

- *La función presenta un "pico" por lo tanto no es derivable en el punto.*
- *La función tiene un cambio brusco en la monotonía, por lo tanto, no es derivable.*
- *Las derivadas laterales no son iguales, por lo tanto, no es derivable.*
- *Al ser un máximo la derivada debe ser cero.*
- *Al ser una función a trozos su derivada también, por lo tanto, no es derivable (derivada no continua).*
- *La función no es derivable en el punto.*

Validez y respaldo de los argumentos

En cuanto a la validez del argumento consideramos que la mayoría de ellos, 40 para ser exactos, presentaron un argumento válido; sin embargo, no con el suficiente respaldo. De hecho, 21 de esos argumentos no presentaron respaldo alguno a la justificación presentada, limitándose a indicar que la función no es derivable en el punto mientras otros aseguraron que, dado que la función presenta un "pico", esta no es derivable en ese punto.

En el caso de los 10 argumentos no válidos, la mayoría de ellos se trataron principalmente de justificaciones que, aunque basadas en aspectos matemáticos verdaderos (procedimiento para hallar máximos y mínimos, por ejemplo), son utilizados en un contexto inadecuado. Sin embargo, debemos destacar que de ellos solo uno no presentaba respaldo alguno. Por otra parte, entre estos argumentos se hallaron casos de justificaciones sin fundamento matemático; por ejemplo, uno de los participantes señala que *en el punto no ocurre un máximo*; o bien que *no podemos asegurar nada porque no conocemos el criterio de la función.*

Aspecto matemático

Otro aspecto que analizamos de los argumentos presentados fue el elemento matemático en el que se basó cada uno de ellos, los cuales se resumen en la Tabla 2. El aspecto gráfico fue lo más empleado, particularmente el punto anguloso, seguido del hecho que las derivadas laterales no coinciden, aspecto también relevante, pues algunos participantes se vieron en la necesidad de determinar las expresiones algebraicas que definen la función para así comprobar que esto era cierto.

Tabla 2. Aspecto matemático utilizado en los argumentos

Aspecto		Frecuencia
Gráfico	Posición de la recta tangente	4
	Presencia de "pico"	11
	Cambio brusco de monotonía	2
Concepto	Derivadas laterales	9
	Función a trozos	3
	Punto silla	1
Resultado	Proposición: Dada una función derivable en *a*, si *f* alcanza un extremo relativo en *a*, entonces $f'(a) = 0$.	6
Procedimiento	Para hallar máximos y mínimos de una función, se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.	3

A la lista anterior debe agregarse los 11 profesores en formación que solo indicaron que era falso ya que la función no era derivable en el punto dado, aunque podría suponerse que el elemento matemático que emplean es el teorema y que se refieren a que las condiciones necesarias no se satisfacen. Dado que no dan mayor explicación, no podemos asegurarlo.

Respecto al aspecto grafico *posición de la recta tangente*, se refiere a argumentos de tipo *“según la gráfica no sería posible trazar una recta tangente”, “por la posición de la recta, la pendiente es infinita, y por lo tanto no derivable”.* Llama la atención el hecho de que varios de los participantes asumen este y otros aspectos gráficos como un resultado verídico sin necesidad respaldar tal afirmación o explicar por qué esto hace a la función no derivable en el punto.

Ahora bien, la mayoría de los participantes que afirmaron que el enunciado era verdadero se basaron tanto en la proposición mencionada en la Tabla 2, como en el hecho de que *“para hallar máximos y mínimos hacemos* $f'(x) = 0$*, por lo tanto, si en x hay un máximo, la derivada se anula en ese punto”.* Aunque claramente este último argumento es basado también en un resultado conocido, decidimos separarlo, pues la forma en la que el futuro profesor lo presenta no es la misma, en esta los participantes se están basando principalmente en un procedimiento que recuerdan. En ambos casos, vemos que el error en el argumento es no considerar las condiciones necesarias para que la proposición se cumpla o bien para poder aplicar el procedimiento.

Un argumento interesante que se presentó fue uno en el que el participante intenta explicar que el enunciado no es cierto “*pues el recíproco del teorema no siempre es verdadero”*. Aquí el futuro profesor alega que “*el hecho de que* $f'(x) = 0$ *no implica necesariamente que haya un máximo o mínimo, pues puede tratarse de un punto de inflexión”.* El argumento nos muestra que el futuro profesor es consciente de que el ejemplo mostrado es un caso en el que hay un máximo o mínimo pero la derivada no se anula, pero no se da cuenta de que no se trata de que el recíproco sea o no verdadero, sino de que hay una condición necesaria que no está siendo tomada en cuenta.

Finalmente, los profesores en formación que intentaron respaldar su justificación no siempre lograban enlazar las ideas que presentaba. De este modo hay un elemento matemático adicional que 8 de los participantes consideraron: la función es continua en el punto dado; no obstante, no lo enlazan con el resto de su justificación.

Forma de presentar el argumento

Al tratarse de argumentos tan específicos y puntuales, la mayoría de ellos se presentaron de forma narrativa empleando complementariamente alguna notación. Aunque identificamos que 5 de los argumentos se presentaron principalmente de manera simbólica, determinando los criterios de la función de manera que pudieran corroborar que las derivadas laterales no coincidían. Así, se trató de argumentos creados a partir de una manipulación algebraica.

Por otra parte, pese a que los argumentos presentados consistieron en una justificación breve, esta no siempre estaba respaldada. En ellas podía detectarse el uso de alguna implicación lógica, la cual daba paso de la afirmación a la conclusión. Seguidamente ejemplificamos las implicaciones lógicas utilizadas:

- Implicación directa: agrupamos aquí los argumentos que surgen tras la aplicación directa, incluso errónea, de algún resultado o propiedad; por ejemplo: *la presencia de un “pico” implica no derivabilidad en el punto*; o, *si hay un máximo, la derivada se anula en el punto*. Aquí el resultado no necesariamente es cierto, o bien son una consecuencia gráfica, pero los participantes lo aplican como si fuera un resultado y esto les resulta suficiente.
- Más de una aplicación directa (silogismo): se hallaron argumentos que emplearon esta regla; aunque debe señalarse que no se trataba necesariamente de argumentos válidos. Por ejemplo, *“el punto dado es un punto silla, por lo tanto, no es un máximo, por lo que su derivada no es cero”*.
- Implicación recíproca: este tipo de implicación fue utilizada por quienes emplearon el recíproco del procedimiento para hallar puntos críticos como una implicación cierta.

- Implicación contrarrecíproca: en una ocasión el argumento empleado fue "*el teorema es cierto si la función es derivable, pero como no es derivable no es cierto que la derivada se anule".* Otro participante afirmó *"para que sea derivable es necesario que no tenga picos. Dado que en el punto hay un pico, la función no es derivable".*

En la Tabla 3, se aprecia que la implicación lógica más empleada fue la directa. Llama la atención que la mayoría prefiere "aplicar" de manera directa algún resultado que les justifique de forma inmediata la validez o falsedad del enunciado. Esto nos muestra dos cosas: (a) los resultados y aspectos gráficos tienen mucha importancia para los profesores en formación, (b) estos resultados y aspectos básicos no son recordados de manera correcta. Este hecho les llevó a emplear teoremas o resultados en un contexto inadecuado.

Tabla 3. Implicación lógica utilizada en los argumentos

Implicación	Frecuencia
Directa	37
Más de una implicación directa (silogismo)	8
Recíproca	3
Contrarrecíproca	2

CONCLUSIONES

Al inicio del trabajo nos propusimos estudiar cómo son los argumentos que profesores en formación brindan ante una tarea sobre la derivabilidad de una función en un punto, partiendo del hecho de que los argumentos permiten de alguna manera entender la forma en la que razonamos sobre las matemáticas. Tras el análisis nos damos cuenta de que los profesores en formación optan por dar argumentos breves, sencillos y con poco o ningún respaldo de la garantía dada. Al igual que concluye Ortiz-May (2018) nos damos cuenta de que, de la misma manera que los estudiantes, los profesores en formación también tienden a simplificar mucho sus argumentos, reduciéndolos prácticamente a una única sentencia.

Somos conscientes de que la tarea a la que se enfrentaron los participantes se trataba de un enunciado rutinario, por lo que de alguna manera podían esperarse argumentos basados en aspectos básicos; sin embargo, al tratarse de futuros profesores consideramos que serían un poco más extensos en sus respuestas, dando más respaldo e involucrando un mayor número de elementos, pues, tal como señala Steele (2005), la densidad de un argumento puede verse como un indicador de la capacidad para articular juicios e ideas de la mejor manera.

Por otra parte, el análisis nos permitió darnos cuenta de que algunos resultados básicos sobre la derivada son recordados, pero de manera inadecuada. Una causa de esto puede ser que se esté razonando sin tener una verdadera comprensión del tema. Coincidimos con Boesen, Lithner y Palm (2010) en que las principales dificultades se deben a que los individuos se enfocan en propiedades superficiales; por ejemplo, al pensar en el máximo de una función, recuerdan que hay un teorema que habla sobre ello y lo "aplican" sin detenerse a pensar si el contexto en el que se plantea es válido. Son relativamente pocos los profesores en formación que recurren a la definición de derivada para verificar si de verdad es o no derivable en el punto dado, prefiriendo reglas que puedan aplicar de manera más mecánica. Y tal como señalan Selden y Selden (1987), esta visión de la matemática, basada en la simple reproducción y aplicación de propiedades, repercute negativamente en las habilidades de razonamiento informal.

En términos generales, llama la atención los fallos y errores detectados en la argumentación por parte de profesores en formación en una tarea tan básica, así como el poco respaldo dado a las justificaciones o garantías realizadas. Por ello, vale la pena seguir profundizando y analizando las justificaciones dadas a tareas matemáticas, en este y otros temas, de forma que podamos entender mejor cómo los profesores en formación comprenden las matemáticas y el significado que dan a estas.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del Proyecto Nacional I+D+I EDU2015-70565-P, titulado "Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares" y el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). También agradecemos a la Universidad de Costa Rica por la beca otorgada a la autora Vargas, lo que le permitió trabajar en esta investigación

Referencias

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. S. y Presmeg, N. (2008). Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 2* (pp. 97-104). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(a) y f´(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19–35.

Boesen, J., Lithner, J. y Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l`argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3*, 195-221.

Gómez, P., y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.

Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge – the case of the derivative concept. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 3* (pp. 113–120). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Knipping, C. y Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. En A. Aberdein y I. J. Dove (Eds.), *The Argument of Mathematics* (pp. 119-146). Londres, Reino Unido: Springer.

Koleza, E., Metaxas, N. y Poli, K. (2017). Primary and secondary students' argumentation competence: A case study. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 179-186). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 383-397.

Noh, J. y Kang, O-K. (2007). Exploring the idea of curriculum materials supporting teacher knowledge. En J-H. Woo, H-C. Lew, K-S. Park y D-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 17–23). Seúl, Corea del Sur: PME.

OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy.* París, Francia: OECD Publishing.

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235–250.

Philipp, K. (2018). Diagnostic competences of mathematics teachers with a view to processes and knowledge resources. En T. Leuders, K. Philipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers* (pp. 109-127). Cham, Suiza: Springer.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM, 1*, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema, 27*(45), 281–302.

Selden, A. y Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. En J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III* (pp. 456–470). Ithaca, EE. UU.: Cornell University.

Solow, D. (2006). *Introducción al razonamiento matemático (2a ed.)*. México, D.F., México: Limusa.

Steele, M. D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4), 291–328.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, EE.UU.: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Walton, D., Reed, C. y Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

PÓSTERES

IMPLEMENTANDO ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DEL CÁLCULO TÁCTICO EN PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Implementing strategies to develop tactical calculation in first stage of Primary Education

Adamuz-Povedano, N.[a], Fernández-Ahumada, E.[a], Bracho-López, R.[a] y García-Pérez, M. T.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]CEIP Al-Andalus

En este trabajo presentamos un análisis preliminar de operaciones aritméticas empleadas por 23 niños y niñas de segundo curso de Educación Primaria. La modalidad de cálculo empleada es la que denominamos *cálculo táctico*. Esta forma de cálculo implica que el estudiante tenga que elegir la táctica más adecuada en cada caso, para ello es necesario que tome conciencia de los números que toman parte de la operación, y debe establecer un camino que permita poner en práctica aquello que ya conoce (Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2019).

Lógicamente, es un modo de calcular que requiere un cambio metodológico en todo lo relativo a la aritmética escolar, abordando un profundo aprendizaje del sistema de numeración decimal, de las operaciones y de las relaciones entre ellas. En definitiva, implica un trabajo diario en el aula en pro del desarrollo del sentido numérico del alumnado, entendido este como la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (McIntosh, Reys y Reys, 1992). El trabajo en clase va acompañado de unos recursos manipulativos que nos proporcionan visualizaciones muy ventajosas para presentar, conocer y materializar tanto los números como las operaciones. A las propiedades visuales de los recursos hay que añadir sus propiedades sensoriales y motrices, pues invitan a la manipulación y al movimiento.

En el póster se mostrará el análisis realizado, así como algunos ejemplos de las producciones de los estudiantes. En función de estas producciones se ha podido generar una categorización de estrategias (trasvase, quitar peso, pasar por la primera fila, descomposición conveniente, complementos a la decena o centena siguiente). En función del dominio mostrado, se ha encontrado que 16 de los 23 estudiantes muestran un dominio alto de estrategias sin cometer errores en el cálculo, 5 presentan un buen dominio aunque cometen algunos errores y tan solo 2 estudiantes presentan un repertorio más limitado de estrategias.

También se ha podido observar que 5 de los estudiantes aplican las estrategias realizando los cálculos sin hacer anotaciones parciales, lo que implica un nivel de destreza más avanzado. El resto de los estudiantes hacen uso de anotaciones intermedias que les permiten hacer el cálculo con mayor o menor solvencia.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. y Bracho-López, R. (2019). Desarrollo del sentido numérico. En T. García-Pérez y N. Adamuz-Povedano (Eds.), *Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico* (pp. 13-44). Barcelona: Octaedro.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8.

Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Bracho-López, R. y García-Pérez, M. T. (2019). Implementando estrategias para el desarrollo del cálculo táctico en primer ciclo de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 605). Valladolid: SEIEM.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE MAESTROS EN FORMACIÓN CUANDO CREAN Y RESUELVEN UNA TAREA DE PROBABILIDAD

Prospective primary teachers' mathematical knowledge when creating and solving a probability task

Alonso-Castaño, M.[a], Alonso, P.[a], Mellone, M.[b] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Università degli Studi di Napoli "Federico II"

La enseñanza de la probabilidad está condicionada por el conocimiento del profesor que la imparte. Para caracterizarlo, en este trabajo utilizaremos el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), que analiza la naturaleza del conocimiento matemático que los profesores necesitan para poder impartir la asignatura de matemáticas.

Se ha llevado a cabo una investigación experimental con alumnado del grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo, cuyo objetivo ha sido analizar el conocimiento matemático de nuestros futuros maestros cuando diseñan y resuelven una tarea de probabilidad. La actividad, que fue propuesta a través del Campus Virtual universitario, debía estar adaptada al nivel de 6.º de Primaria. Teniendo en cuenta que el significado clásico de la probabilidad es uno de los más estudiados en Educación Primaria (Gómez-Torres, Batanero, Díaz y Contreras, 2016), se ha planteado una tarea que requería el uso de la regla de Laplace.

En primer lugar, se ha realizado un análisis del contenido de las 111 respuestas obtenidas durante la experiencia, con el fin de identificar distintos tipos o perfiles de respuestas. A continuación, se ha llevado a cabo un análisis de los subdominios *Common Content Knowledge* (CCK), *Specialized Content Knowledge* (SCK) y *Knowledge of Curriculum* (KC) en las producciones de los futuros maestros. Los resultados obtenidos muestran escasos indicios explícitos del KC. Por otro lado, se observan altos niveles de CCK y SCK en los problemas matemáticamente correctos y adaptados al nivel. Se evidencia también un alto CCK, pero un bajo SCK, cuando el problema es correcto pero no está adaptado al nivel. También se han encontrado problemas que presentan bajos niveles de CCK y SCK. En el estudio se presentan algunos de los ejemplos más relevantes de los resultados obtenidos, analizando las posibles causas de estos comportamientos. Finalmente, se concluye que, dado que muchos maestros en formación presentan un conocimiento didáctico-matemático insuficiente, como también se evidencia en otros trabajos como el de Vásquez y Alsina (2015), es de vital importancia trabajar en reforzar estas destrezas.

Agradecimientos: Proyecto TIN2017-87600-P del Gobierno de España.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 197-215.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *AIEM, 7*, 27-48.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). Conocimiento matemático de maestros en formación cuando crean y resuelven una tarea de probabilidad. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 606). Valladolid: SEIEM.

RENOVACIÓN METODOLÓGICA EN ESTADÍSTICA BASADA EN LA CREACIÓN DE PROBLEMAS

Methodological renewal in statistics based on the problem posing

Alvarado, H. y Retamal, L.

Universidad Católica de la Santísima Concepción

Las experiencias de innovación metodológica de Ciencias Básicas son escasas en las Escuelas de Ingeniería. En cursos de estadística orientada a las ingenierías civiles, la estadística descriptiva es la primera fase de exploración de los datos, no obstante, las investigaciones reportan una comprensión superficial de conceptos estadísticos básicos (Alvarado, Galindo y Retamal, 2018).

El marco metodológico del estudio es la creación de problemas, concebida como un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido o a partir de una situación dada (Ellerton, 2013; Malaspina, 2017). La metodología involucra a los estudiantes en la indagación científica estimulando la capacidad de identificar problemas, plantear las preguntas adecuadas, seleccionar convenientemente la información, hacer preguntas innovadoras, buscar soluciones óptimas y replantear los problemas. Consideramos que esta metodología activa aporta con mayor énfasis al razonamiento estadístico en cohesión con ideas iniciales de planteamiento de objetivos e hipótesis estadísticas necesarias en el desarrollo de la inferencia estadística.

Las preguntas que orientan la investigación son: ¿Los estudiantes aplican los elementos metodológicos de la estadística descriptiva en una y dos variables en la descripción e interpretación de datos mediante la creación de problemas relacionada con la ciencia de la ingeniería? ¿Los estudiantes utilizan los recursos informáticos en el análisis de información estadística basada en la estrategia de creación de problemas? El propósito de este trabajo fue evaluar el aprendizaje orientado a la creación de problemas sobre estadística descriptiva por 101 de estudiantes de ingeniería civil (Proyecto Fondecyt 1181525). El proceso investigativo consignó tres etapas: a) En la enseñanza contribuyó a proponer por el equipo docente un problema que sea cercano a las motivaciones de los estudiantes y al contexto de las ciencias de la ingeniería, y fue desarrollado en conjunto con los estudiantes. b) En el aprendizaje contribuyó a presentar 50 problemas creados por grupos de estudiantes de cinco especialidades de la ingeniería, desarrollando el proceso investigativo de identificar problemas y de investigar, enunciar preguntas y ampliar el sentido estadístico y su desarrollo. c) En la iniciación científica contribuyó a estimular la capacidad de formularse preguntas y modelos estadísticos, y desarrollar la creatividad; habilidades que forman parte de las competencias del futuro ingeniero. Hubo dificultades en la declaración de objetivos e hipótesis en los problemas, también en el análisis de relaciones de dos variables estadísticas. Sin embargo, la metodología aumentó el interés, autonomía y aplicación de recursos informáticos.

Referencias

Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, *30*(3), 151-183.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87-101.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Alvarado, H. y Retamal, L. (2019). Renovación metodológica en estadística basada en la creación de problemas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 607). Valladolid: SEIEM.

PERFILES DE APRENDIZAJE DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA EN BASE A SU DESARROLLO COMPETENCIAL ESTADÍSTICO Y SU ACTITUD HACIA LA ESTADÍSTICA

Learning profiles of future Primary teachers on the basis of their statistical competence development and their attitude towards statistics

Anasagasti, J., Subinas, A. y Berciano, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

En este póster se presenta parte del trabajo de una investigación marco que compara el desarrollo competencial estadístico y la evolución de la actitud hacia la estadística del futuro profesorado de Educación Primaria en función de la metodología docente implementada. Más en concreto, en este trabajo se pretende mostrar los diferentes perfiles de aprendizaje que tiene el alumnado y analizar las posibles diferencias entre los grupos en función de la metodología implementada.

Para tal fin, se ha realizado una investigación cuasi-experimental, con dos grupos, en donde en uno de ellos se ha trabajado con una metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (acorde a Batanero y Díaz, 2004), y en el otro, mediante una metodología tradicional en donde predominan las explicaciones teóricas y los ejercicios descontextualizados. La muestra ha estado compuesta por un total de 132 estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria. Para medir la competencia estadística se ha utilizado el Test de Competencia Estadística (Anasagasti y Berciano, 2012), y para medir la actitud hacia la estadística el test *Survey of Attitudes Towards Statistics* (Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio, 1995). Para obtener el desarrollo o la evolución experimentada durante la implementación, los cuestionarios se han pasado antes y después de la misma. Una vez obtenidas estas medidas, se ha realizado un análisis de conglomerados en función de las dos variables mencionadas, utilizando el algoritmo de las K-medias, formando una única partición sin jerarquizar ni relacionar los conglomerados entre sí (Pérez, 2004).

Entre los resultados obtenidos, destacamos la existencia de tres perfiles diferenciados: Perfil 1, que empeora su competencia pero mejora su actitud; Perfil 2, que mejora competencia y actitud y Perfil 3, que mejora su competencia pero empeora su actitud. Además, en la comparativa entre los grupos según la metodología implementada, podemos concluir que en aquel grupo en donde se incluye el Aprendizaje Basado en Proyectos la proporción de estudiantes con un Perfil 2 es considerablemente mayor que en el grupo de metodología más tradicional.

Referencias

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2012). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de primaria: conocimiento de conceptos básicos de estadística. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 113-121). Baeza, Jaén: SEIEM.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. P. Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Pérez, C. (2004). *Técnicas de análisis multivariante de datos: Aplicaciones con SPSS*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement, 55*(5), 868–875.

Anasagasti, J., Subinas, A. y Berciano, A. (2019). Perfiles de aprendizaje de futuros docentes de primaria en base a su desarrollo competencial estadístico y su actitud hacia la estadística. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 608). Valladolid: SEIEM.

PERCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DEL RESTO DE LA DIVISIÓN

Pre-service teachers' perceptions of the remainder of the division

Ariza-Ruiz, D. y Gómez, B.

Universitat de València

Los trabajos de Bell, Fischbein y Greer (1984), Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) y Greer (1992) apuntaron a la necesidad de enseñar las operaciones en diferentes contextos y modelos, prestando atención a los malentendidos que tienen los estudiantes. Por lo que respecta a la multiplicación y división señalaron que la manera de presentar estas operaciones a los niños tiene defectos de procedimiento y conceptuales, porque se basa en modelos restrictivos que limitan los resultados de la enseñanza.

La palabra modelo se usa en matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas de modo recíproco: ya sea para referirse a objetos matemáticos que reproducen en forma simbólica características esenciales de una situación del mundo real; o, para referirse a situaciones del mundo real que crean condiciones para que de su observación y manipulación surja el conocimiento del objeto matemático que representan. Por su intencionalidad de enseñanza-aprendizaje a estas situaciones se las considera modelos didácticos. En las operaciones matemáticas que se enseñan en la escuela elemental se usan ambos modelos: los matemáticos, para representar simbólicamente las operaciones, y, los didácticos, para representar externamente las situaciones con objetos tridimensionales, manipulables o pictóricos.

De acuerdo con Fischbein et al. (1985), el modelo primitivo que desarrollan los niños para la división está basado inicialmente en la "partición" y después en la "cuotición". En este trabajo estamos interesados en estudiar las percepciones que tienen los estudiantes de la relación entre el modelo simbólico ($D=dq+r$) y los modelos didácticos de la división y su efecto en la comprensión que manifiestan de los términos cociente y resto.

En este póster se expondrá un análisis de las respuestas de 43 alumnos de magisterio a dos cuestionarios implementados en una sola sesión de dos horas, la cual se dividió en tres fases. En la primera, de diagnóstico, los alumnos contestaron al cuestionario donde se presentan representaciones pictóricas de los dos modelos para una división exacta concreta. En la segunda fase, de enseñanza, se interpretaron las representaciones pictóricas de estos modelos. En la tercera fase, los alumnos respondieron al segundo cuestionario, de evaluación, donde tenían que transferir esas representaciones pictóricas de los modelos a una división con resto distinto de cero.

Entre los resultados más destacables se observó que los estudiantes ignoran que el cociente y resto no son únicos, ignoran el cociente y resto por exceso, y dan una respuesta arbitraria a cuál es el resto cuando el cociente es decimal periódico.

Referencias

Bell, A., Fischbein, E. y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129–147.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295), New York, EE.UU.: Macmillan.

Ariza-Ruiz, D. y Gómez, B. (2019). Percepciones de los estudiantes para maestro del resto de la división. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 609). Valladolid: SEIEM.

FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA EN EL USO DEL TEOREMA DE PICK POR LOS ALUMNOS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Mathematical flexibility to use Pick’s Theorem by students in the graduate degree in Primary Education

Arnal-Palacián, M.

Universidad Rey Juan Carlos

En este trabajo se presentan los primeros resultados del análisis de dos actividades de cálculo de áreas, que pretenden estimular el razonamiento flexivo en la resolución de problemas. La muestra la forman 63 alumnos de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III del Grado de Educación Primaria. En ella se establece que los alumnos deben adquirir los conceptos y procedimientos relacionados con las magnitudes y su medida, entre ellos el Teorema de Pick.

En primer lugar se introdujeron diferentes tipos de geoplano: isométrico, ortométrico y de trama circular. Ante la imposibilidad de disponer de suficientes geoplanos, y debido a su dinamismo, se decidió utilizar el geoplano ortométrico digital y gratuito de *Math Learning Center*. Posteriormente, se propuso a los alumnos el cálculo de las áreas de diferentes polígonos, siempre sobre tramas cuadradas. Muchos de estos alumnos proponían una única manera de resolución, replicando un mismo procedimiento una y otra vez, posiblemente por la ausencia de razonamiento matemático flexivo durante su etapa escolar (Joglar-Prieto, Abánades-Astudillo y Star, 2018).

En las diferentes actividades de cálculo de áreas sobre una trama cuadrada, tal y como ya recogieron Jiménez-Gestal y Blanco (2017), surgieron procedimientos de descomposición, complementación y uso de la fórmula del área del triángulo. Inmediatamente después se introdujo el Teorema de Pick como estrategia adicional para el cálculo de áreas.

En la evaluación final de la asignatura, escrita e individual, se propusieron dos problemas de cálculo de áreas sobre un geoplano. En el primero de ellos se situaba un polígono cóncavo sobre la captura del geoplano digital utilizado en el aula, mientras que en el segundo se presentaba un problema del XX Concurso Primavera (nivel 1) (Martínez et al., 2016) donde había una cuadrícula y un polígono convexo coloreado que imposibilitaba observar los cuadrados interiores.

Las resoluciones de ambos fueron considerablemente diferentes. El primero fue resuelto por 32 de los 63 alumnos, de 3 modos distintos: aplicación del Teorema de Pick (26 estudiantes), cálculo del área de los triángulos complementarios (5) y descomposición del polígono convexo en triángulos rectángulos (1). El segundo problema fue resuelto por 40 estudiantes, de 6 formas diferentes (es decir, con mayor flexibilidad matemática). Al no observar de forma inmediata el geoplano bajo el polígono, solo 11 utilizaron el Teorema de Pick. Este hecho promueve la reflexión sobre cómo los enunciados condicionan las estrategias de resolución y pueden inhibir el razonamiento flexivo.

Referencias

Martínez, A., Serrano, E., López, F., Fernández, H., Benito, I., Soler, J., … y Sánchez, V. M. (2016). *XX Concurso de Primavera de Matemáticas 2016.* Madrid: Comunidad de Madrid.

Jiménez-Gestal, C. y Blanco, L. J. (2017). El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la Geometría con estudiantes para maestro. *NÚMEROS*, *94*, 7-21.

Joglar-Prieto, N. J., Abánades-Astudillo, M. A. y Star, J. R. (2018). Flexibilidad matemática y resolución de ecuaciones lineales. *UNO, 80*, 51-57.

Arnal-Palacián, M. (2019). Flexibilidad matemática en el uso del Teorema de Pick por los alumnos del Grado de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 610). Valladolid: SEIEM.

LA SUMA DE LAS AMPLITUDES DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PRETENDIDO *VERSUS* MOVILIZADO

The sum of the amplitudes of the interior angles of a triangle: the specialized knowledge pretended *versus* mobilized

Barrera-Castarnado, V. J.[a, b], Liñán-García, M. M.,[a, b] Muñoz-Catalán, M. C.[a] y Contreras, L. C.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Cardenal Spínola CEU, [c]Universidad de Huelva

En la formación inicial de profesores no es fácil tener la opción de observar escenarios reales en los que profesores y estudiantes están inmersos en procesos de enseñanza-aprendizaje, por lo que resulta complejo que los estudiantes para profesor (EPP) adquieran conocimiento especializado desde la práctica. Partiendo de una situación real de aula previamente analizada desde el MTSK (Carrillo et al, 2018), y, teniendo presente la necesidad de promover la competencia “mirar con sentido” (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018), elaboramos un caso que ejemplifica la práctica educativa. Sobre el mismo planteamos actividades diseñadas considerando el conocimiento especializado que se pretende movilizar, completando de esta forma una tarea formativa (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado, 2019). La investigación se corresponde con un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) en el que las tareas son planteadas a un total de 50 estudiantes del grado en Educación Primaria. Las producciones de los EPP por escrito (resolución individual de las diferentes actividades, unas 10 por tarea formativa) y videograbadas (reflexión en gran grupo de tales producciones individuales), son analizadas utilizando MTSK (Carrillo et al., 2018) para evaluar los conocimientos adquiridos y mejorar la propia tarea formativa. Presentamos la comparación del análisis con MTSK de las producciones de los EPP al resolver una tarea formativa, con el conocimiento especializado que se pretendía movilizar en el diseño de la misma. La tarea elegida versa sobre un episodio de una clase de Geometría en 5º de Educación Primaria en la que se trata el resultado *“La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180º”*. Los resultados de este análisis comparativo han resultado sorprendentes, pues se ha constatado que la reflexión de los EPP ante las tareas ha hecho emerger aspectos del conocimiento especializado tanto previstos como inesperados, que superaron las expectativas iniciales que como formadores teníamos de estos alumnos por sus respuestas en tareas previas. Todos los datos recogidos sobre el conocimiento especializado que los EPP movilizan nos permiten mejorar la tarea formativa diseñada para una nueva implementación.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students’ mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *AIEM, 13*, 39-61.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Barrera-Castarnado, V. J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2019). La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo: El conocimiento especializado pretendido *versus* movilizado. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 611). Valladolid: SEIEM.

DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA COMPRENSIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Students' difficulties in understanding the sampling distribution

Begué, N.[a] y Gea, M. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Granada

La distribución muestral es base de la comprensión de la inferencia y su estudio se incluye en el actual diseño curricular español (MECD, 2015), en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Sin embargo, la investigación previa ha descrito numerosas dificultades en su comprensión. El objetivo de este trabajo es presentar un resumen de las principales investigaciones relacionadas con el tema, de modo que se oriente al profesor en su labor docente. En primer lugar, los estudiantes confunden la distribución muestral con otras dos distribuciones que intervienen en el muestreo (Harradine, Batanero y Rossman, 2011): a) La distribución teórica de probabilidad, que modela los valores de una variable aleatoria en una población y depende de algún parámetro o característica estadística en dicha población; y b) La distribución de datos en una muestra, cuyos estadísticos se utilizan para estimar los parámetros. La distribución muestral es la distribución del estadístico cuando se considera como variable aleatoria, esto es, variando en las diferentes muestras posibles de la población.

Aunque los estudiantes perciben correctamente el valor esperado de la distribución muestral, encontramos grandes dificultades para comprender su variabilidad y relacionarla con el tamaño de la muestra, lo que se atribuye a la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1974). El razonamiento de los estudiantes sobre las muestras puede clasificarse en tres niveles: 1) Nivel aditivo (el más frecuente), que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población; 2) Nivel proporcional, en el que se utilizan proporciones al realizar estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) Nivel distribucional, donde se integran las ideas de valor esperado y de variabilidad al realizar estimaciones (Saldanha y Thompson 2002). Estas dificultades se confirman en estudiantes españoles de Bachillerato (Begué, Gea, Batanero y Beltrán-Pellicer, 2018) que, de hecho, comprenden mejor la variabilidad en las muestras pequeñas que en las grandes y también aparecen sesgos como la equiprobabilidad.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Begué, N., Gea, M. M., Batanero, C. y Beltrán-Pellicer, P. (2018) Do high school students understand the sampling distribution of a proportion? En M. A. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10)*. Kyoto, Japón: IASE. Recuperado de: https://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_6C1.pdf

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235-246). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Saldanha, L. y Thompson, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 257-270.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science*, *185*(4157), 1124-1131.

Begué, N. y Gea, M. M. (2019). Dificultades de los estudiantes en la comprensión de la distribución muestral. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 612). Valladolid: SEIEM.

ANÁLISIS DEL EFECTO DE UN PROGRAMA DE ESTÍMULO MATEMÁTICO EN ADOLESCENTES EN RIESGO DE EXCLUSIÓN SOCIAL

Analysis of the effect of a program of mathematical stimulus on adolescents at risk of social exclusion

Blanco T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., Salgado, M., Salinas-Portugal, M. J., González-Sequeiros, P. y González-Roel, V.

Universidad de Santiago de Compostela

En este trabajo se presenta un análisis de los resultados de un programa socioeducativo de incentivo del estímulo matemático, dirigido a adolescentes en riesgo de exclusión social. El objetivo de nuestra investigación es la identificación de variaciones sobre el rendimiento académico en matemáticas de este tipo de alumnado, una vez que ha participado en dicho programa (Blanco, Gorgal, Salgado y Diego-Mantecón, 2017).

Dentro del marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), se han utilizado como herramientas teóricas, para la valoración de los cambios del rendimiento académico del alumnado, los indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2013). En concreto, en este trabajo se han aplicado los indicadores relacionados con las dimensiones afectiva y mediacional, que nos ayudarán a describir lo que siente el alumnado cuando se enfrenta a este tipo de actividades y cómo les afecta la intervención de otro profesorado y otra metodología diferente al de las aulas ordinarias. La muestra está conformada por un total de 30 adolescentes de 1º de la ESO, de tres centros educativos distintos, con necesidades específicas de apoyo educativo por sus condiciones contextuales y sociales. Los instrumentos de recogida de datos empleados en este estudio han sido la grabación en vídeo de las sesiones, el cuaderno de los investigadores como observadores participantes y las entrevistas semiestructuradas a profesores y alumnos. Asimismo, se han pasado cuestionarios de creencias y actitudes hacia las matemáticas al alumnado participante a modo de pretest y postest. Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes que participaron en el programa experimentaron cambios positivos, tanto en lo referido a su rendimiento académico en matemáticas como en su actitud hacia ellas; por un lado, favorecida por la buena relación entre docente-discente (idoneidad mediacional); y, por otro lado, también al planteamiento del programa de actividades centrado en las características emocionales y en los intereses del alumnado participante (idoneidad afectiva).

Agradecimientos

Investigación financiada por FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ proyecto EDU2017_84979-R.

Referencias

Blanco, T. F., Gorgal, A., Salgado, M. y Diego-Mantecón, J. M. (2017). Proyecto piloto basado en actividades STEAM para adolescentes en riesgo de exclusión social. En V. Martínez, N. Melero, E. Ibáñez y M. C. Sánchez (Coords.), *Derribando Muros. El compromiso de la Universidad con la justicia social y el desarrollo sostenible* (pp. 109-110). Sevilla: Comunicación Social.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., Salgado, M., Salinas-Portugal, M. J., González-Sequeiros, P. y González-Roel, V. (2019). Análisis del efecto de un programa de estímulo matemático en adolescentes en riesgo de exclusión social. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 613). Valladolid: SEIEM.

PROYECTOS STEAM CON FORMATO KIKS PARA LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS LOMCE

STEAM projects with KIKS format for the acquisition of LOMCE competences

Blanco, T, F.[a], Ortiz-Laso, Z.[b] y Diego-Mantecón, J. M.[b]

[a]Universidad de Santiago de Compostela, [b]Universidad de Cantabria

La mayoría de los países europeos han enfocado sus currículos hacia la adquisición de competencias (Halász y Michel, 2011). Esto implica que el estudiante ha de ser capaz de aplicar los conocimientos para resolver una situación problemática, siendo a su vez responsable del proceso de resolución de la misma. En España, este aprendizaje se regula por Orden 65/2015, de 21 de enero. Para impulsar la formación del estudiante de secundaria en materias STEAM (*Science, Technology, Engineering, Art, Maths*) han surgido diferentes iniciativas como el proyecto nacional EAMARE-STEAM (https://www.inclusivemathsthroughsteam.unican.es/), y los proyectos internacionales KIKS (https://www.kiks.unican.es/) y STEMforYouth (https://stemforyouth.unican.es/). Estos proyectos se centran principalmente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en relación a otras materias científico-tecnológicas y al arte.

En particular, 2056 estudiantes de secundaria de seis países (Polonia, Italia, Grecia, Eslovenia, República Checa y España) elaboraron proyectos STEAM dentro de la iniciativa STEMforYouth. Los estudiantes de 68 centros educativos trabajaron en grupos de 3-4 miembros supervisados por al menos un profesor de las áreas STEAM. Los proyectos, diseñados por expertos del ámbito universitario, involucraban conocimientos de al menos dos áreas STEAM, con el objetivo de fomentar las competencias clave. Siguiendo el formato de trabajo KIKS (Diego-Mantecón et al., 2017), los estudiantes realizaron, tras la elaboración de los proyectos, un vídeo explicativo de los mismos, y un documento de texto que recogía la parte analítica de los trabajos en lengua inglesa. Posteriormente, los proyectos fueron presentados por sus autores a la comunidad científica y a la ciudadanía a través de eventos presenciales o videoconferencias. Dichas presentaciones se realizaron en general en lengua inglesa, dado el carácter internacional de varios de los eventos.

Para evaluar el impacto del experimento en el desarrollo de las competencias LOMCE, y la eficiencia del formato de trabajo KIKS, se realizaron entrevistas a estudiantes y profesores después de la elaboración y presentación de los proyectos en los diferentes eventos. Los resultados sugieren que los estudiantes desarrollaron a diferentes niveles las siete competencias clave establecidas en la LOMCE: comunicación lingüística, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, competencia digital, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, y conciencia y expresiones culturales.

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos STEMforYouth (Programa Horizon 2020 de Unión Europea con contrato nº 710577) y EAMARE-STEAM (FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ _Proyecto EDU2017-84979-R).

Referencias

Diego-Mantecón, J. M., González-Ruiz, I., Blanco, T. F., Istúriz, M. P., Gorgal-Romarís, A., Búa, J. B. y Recio, T. (2017). Interacción y difusión de los productos KIKS. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 67-71). Madrid: FESPM.

Halász, G. y Michel, A. (2011). Key Competences in Europe: interpretation, policy formulation and implementation. *European Journal of Education, 46*(3), 289-306.

Blanco, T F., Ortiz-Laso, Z. y Diego-Mantecón, J. M. (2019). Proyectos STEAM con formato KIKS para la adquisición de competencias LOMCE. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 614). Valladolid: SEIEM.

IMPLICACIÓN DE LA REFLEXIÓN DURANTE EL PRÁCTICUM: UN CASO CON PROFESORES COLOMBIANOS

Implication of the reflection during the practice: a case with Colombian teachers

Castellanos-Sánchez, M. T.[a], Flores, P.[b] y Moreno, A.[b]

[a] Universidad de los Llanos, [b] Universidad de Granada

Este trabajo presenta los resultados de una investigación sobre la formación inicial de profesores de matemáticas cuyo objetivo es analizar el conocimiento profesional que futuros profesores de matemáticas (en adelante, FPM) ponen de manifiesto cuando se involucran en procesos de reflexión durante el prácticum otorgando sentido a la teoría para entender la complejidad de la práctica.

Varios estudios en formación de profesores conciben la reflexión como un proceso de pensamiento sistemático y responsable, que surge de una situación de la práctica que requiere ser analizada, con el propósito de significar el conocimiento profesional para comprender y afrontar la complejidad de la práctica (Castellanos, Flores y Moreno, 2017). Esta investigación entiende al profesor de matemáticas como profesional práctico reflexivo (Flores, 2007) y considera la reflexión como un elemento fundamental en su desarrollo profesional (Climent y Carrillo, 2003).

Partiendo del aprendizaje realista en la formación de profesores (Korthagen, 2001) y utilizando la investigación de diseño, se configuró un experimento de enseñanza con 12 FPM que cursaban el prácticum del programa de Licenciatura en Matemáticas de Unillanos-Colombia (Castellanos, Flores y Moreno, 2018). El diseño de la intervención formativa se cubrió en cuatro módulos formativos durante seis meses y cuatro ciclos de reflexivos orientados bajo el modelo reflexivo ALaCT. El experimento se tomó como “caso” a investigar mediante una metodología cualitativa de estudio de casos. Se interpretaron y triangularon los registros de las producciones de los participantes (Unidades didácticas), el diario de campo del investigador y el vídeo de sesiones. El análisis se ha realizado en dos dimensiones: el conocimiento profesional y la reflexión.

Los resultados revelan que: 1) El FPM adquiere nuevo conocimiento profesional a partir de la acción, en tanto que esta le sea útil para abordar problemas de la práctica; 2) El análisis secuencial realizado al experimento muestra que el modelo de reflexión incorporado en el diseño del prácticum puede conducir a los FPM en la comprensión de la práctica desde la re-significación del conocimiento profesional. Concluimos que los FPM, a través de procesos de reflexión promovidos en el prácticum, pueden percibir problemas profesionales de la enseñanza o el aprendizaje, lo que implica re-significar su conocimiento profesional y otorgar sentido a su práctica docente.

Referencias

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *Bolema, 31*(57), 408-429.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Reflexión en el Practicum: un experimento de enseñanza con profesores colombianos. *Profesorado, 22*(1), 413-439.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 387-404.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA, 1*(4), 139-159.

Korthagen, F. A. J. (2001*). Linking Practice and Theory: The Pedagogy of Realistic Teacher Education*. Londres, Reino Unido: Lawrence Erlbaum Associates.

Castellanos-Sánchez, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2019). Implicación de la reflexión durante el prácticum: un caso con profesores colombianos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 615). Valladolid: SEIEM.

IDEAS PREVIAS A UN CURSO DE CÁLCULO: CONCEPCIONES DEL ALUMNADO SOBRE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Previous ideas in a course of Calculus: conceptions of students on continuity of a function

Cox-Figueroa, E.[a], Maz-Machado, A.[b] y Jiménez-Fanjul, N.[b]

[a]Escuela Superior Politécnica Agropecuaria de Manabí "Manuel Félix López", [b]Universidad de Córdoba

El Cálculo es considerado como una herramienta matemática que ayuda al ingeniero a resolver problemas de su profesión. El concepto de función es sumamente importante en la matemática y, entre los diversos tipos de funciones, las funciones reales de variable real continuas y discontinuas son parte esencial del análisis matemático. Aprender pruebas y contraejemplos dentro del dominio de funciones continuas es importante porque los estudiantes encuentran las funciones continuas en muchos cursos de matemáticas (Ko y Knuth, 2009). En los libros de cálculo diferencial siempre se muestran funciones continuas y funciones discontinuas; es usual mostrar las funciones discontinuas a partir de gráficos de funciones que presentan "saltos" o "vacíos", de modo que no pueden trazarse "sin levantar el lápiz del papel". Dane, Çetin, Baş y Sağırl (2016) hallaron que más del 70% de los estudiantes manifestaban opiniones incorrectas sobre la continuidad para justificar la no solución de problemas que involucraban límites. El problema de nuestro estudio es ¿Cuáles son las ideas previas que tienen los estudiantes sobre continuidad cuando inician un primer curso de cálculo en la universidad en carreras técnicas?

El objetivo de este estudio es identificar ideas, concepciones y dificultades acerca de la continuidad de funciones en estudiantes universitarios de primer curso de la provincia de Manabí en Ecuador.

Se planteó una investigación con 68 estudiantes de primer curso de ingeniería en dos universidades ecuatorianas durante el primer semestre de 2019. Se les aplicó un cuestionario tomado de Jayakody (2015), el cual tiene 5 ítems, algunos con sub-apartados. Los ítems indagan sobre las ideas de continuidad, el reconocimiento de funciones continuas a partir de gráficas y sobre su representación algebraica.

Se ha constatado que, mayoritariamente, los estudiantes asocian la continuidad de una función solamente a su representación gráfica y obvian los aspectos matemáticos asociados. Algunos alumnos fundamentan erróneamente su idea de continuidad en el aspecto no acotado de la función. Un tercer grupo solo consideran el dominio de la función, asumiendo que si la variable puede tomar cualquier valor es continua, olvidando por ejemplo las funciones escalonadas. Finalmente hay respuestas un tanto absurdas asociadas al "sentido común".

Referencias

Dane, A., Çetin, Ö. F., Bas, F. y Sağırlı, M. Ö. (2016). A Conceptual and procedural research on the hierarchical structure of mathematics emerging in the minds of university students: An example of limit-continuity-integral-derivative. *International Journal of Higher Education*, *5*(2), 82-91.

Jayakody, G. N. (2015). *University first year students' discourse on continuous functions: A commognitive interpretation* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Simon Fraser, Burnaby, Canadá.

Ko, Y-Y. y Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Cox-Figueroa, E., Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2019). Ideas previas a un curso de cálculo: concepciones de los alumnos sobre continuidad de una función. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 616). Valladolid: SEIEM.

UN ANÁLISIS DE LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN MEDIA EN COLOMBIA

An analysis of attitudes towards mathematics in middle education Colombian preservice teachers

Franco-Buriticá, E.[a], León-Mantero, C.[b], Maz-Machado, A.[b] y Casas-Rosal, J. C.[b]

[a]Institución Educativa Técnica Félix Tiberio Guzmán, [b]Universidad de Córdoba

Desde mediados del siglo pasado, se ha venido evidenciando que afectos, sentimientos, creencias y actitudes se ponen de manifiesto en los estudiantes cuando manipulan objetos matemáticos (McLeod, 1992), es decir, que deben tenerse en cuenta todos estos factores afectivos durante la clase de matemáticas como elementos clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación y, en general, en la construcción exitosa de nuevos conocimientos matemáticos.

En Colombia se han venido dando bajos resultados en pruebas tanto internas (SABER) como externas (TIMMS y PISA) que evalúan competencias en matemáticas (OECD, 2016), siendo las actitudes negativas hacia las matemáticas generadas en los estudiantes durante la experiencia en sus cursos de matemáticas uno de los factores de influencia en su rendimiento matemático. Es por ello por lo que es de interés analizar las actitudes de estudiantes de educación media que están próximos a presentar su prueba SABER y que adicionalmente, en un futuro cercano, tienen la intención de ser maestros del nivel de básica primaria, orientando la asignatura de matemáticas entre otras áreas.

En este estudio de carácter descriptivo-exploratorio, se tomó una muestra intencional y por conveniencia de 235 estudiantes del nivel de educación media pertenecientes a Normales Superiores (formadoras de maestros y maestras) del departamento del Tolima en Colombia. Para ello, se utilizó la escala de actitudes hacia las matemáticas tipo Likert, diseñada y validada por Auzmendi (1992), que consta de 25 ítems. Adicionalmente, se preguntó a los estudiantes sobre aspectos como: edad, grado, género, tipo de entorno (rural o urbano), tenencia de libros de matemáticas en casa, tenencia de biblioteca, intención de estudiar matemáticas a futuro, reprobación del área de matemáticas en algún año escolar, saber cómo estudiar matemáticas y haber recibido clases extraescolares de matemáticas.

Los resultados del estudio indican que el factor ansiedad es mayor en estudiantes del género masculino que del femenino. Asimismo, tanto la utilidad como la motivación es mayor en las chicas que en los chicos, evidenciándose la diferencia entre géneros. Por otro lado, la confianza con respecto a la mayoría de los ítems es la más positiva, no obstante, se evidencia que el componente agrado es el menos positivo con valores cercanos al neutral.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias: características y medición*. Bilbao: Mensajero.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Nueva York, EE.UU.: Macmillan.

OECD (2016). *Educación en Colombia*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Franco-Buriticá, E., León-Mantero, C., Maz-Machado, A y Casas-Rosal, J. C. (2019). Un análisis de las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes para maestro de educación media en Colombia. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 617). Valladolid: SEIEM.

EXPERIENCIA DE EVALUACIÓN FORMATIVA EN MATEMÁTICAS PARA FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

A formative assessment experience in mathematics for prospective primary teachers

García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. N.

Universidad de La Laguna

Los procesos de enseñanza y aprendizaje y, en particular, el sistema de evaluación en Educación Superior, han sido objeto de estudio y debate durante las últimas décadas, debido al proceso de convergencia hacia el EEES. En contraposición a un sistema de evaluación tradicional mediante un único examen, se plantean y desarrollan otros tipos de evaluación orientados al aprendizaje. En concreto, aparece la evaluación formativa, que según Fraile, López, Castejón y Romero (2013) se define como aquella que "debe guiar y ayudar a aprender, debe ser comprensiva y adaptada a las necesidades de la persona que aprende y debe estar integrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje" (p. 24). Por su parte, Nicol y Macfarlane-Dick (2006) indican que "la evaluación formativa y la retroalimentación deberían ser utilizadas para crear estudiantes que sean capaces de autorregular su aprendizaje" (p. 199), y añaden que debe hacerse "buscando que los estudiantes construyan activamente la comprensión acerca de los mensajes de retroalimentación derivados de fuentes externas" (p. 201). Paralelamente, las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) irrumpen en la enseñanza y la evaluación las recoge como elemento que ofrece gran versatilidad y utilidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Siguiendo los pasos de Fraile et al. (2013), hemos desarrollado una experiencia con 103 alumnos durante el curso 2018-19 en la que analizamos la influencia de la realización de una evaluación continua y formativa en los resultados de aprendizaje de los alumnos de la asignatura de Matemáticas del grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna, en la cual se han utilizado las TIC. En ella, los estudiantes autorregulan su aprendizaje y lo observamos mediante el seguimiento de su asistencia y mediante la realización de cuestionarios periódicos sobre los temas trabajados.

El objetivo de este póster es analizar cómo la evaluación formativa y, en concreto, el conocimiento del estado de su aprendizaje, influye en los resultados obtenidos por los estudiantes en esta materia. En esta experiencia, los estudiantes del grupo experimental han tenido resultados mejores en dos pruebas escritas sobre los contenidos de la materia que los del resto de grupos de la misma, lo que nos hace pensar que esta propuesta de evaluación formativa contribuye a la mejora de la formación matemática de los futuros profesores de Educación Primaria, además de hacerlos protagonistas de su aprendizaje.

Agradecimiento: Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación EDU2017-84276-R.

Referencias

Fraile, A., López-Pastor, V. M., Castejón, F. J. y Romero, R. (2013). La evaluación formativa en docencia universitaria y el rendimiento académico del alumnado. *Aula Abierta*, *41*(2), 23-34.

Nicol, D. J. y Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, *31*(2), 199-218.

García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. N. (2019). Experiencia de evaluación formativa en matemáticas para futuros maestros de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 618). Valladolid: SEIEM.

PROPUESTA DE UNA TAREA PROFESIONAL PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Proposal of a professional learning task for primary school teachers

García-Honrado, I., Alonso-Castaño, M., Lorenzo, E. y Muñiz-Rodríguez, L.

Universidad de Oviedo

Este trabajo tiene como objeto mostrar el diseño de una tarea profesional (Smith, 2001) para trabajar el conocimiento interpretativo (Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014) con maestros en formación del segundo curso del grado en Maestro en Educación Primaria. Según el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008), podemos ubicar el conocimiento interpretativo dentro del conocimiento especializado del contenido, ya que el maestro necesita conocer la materia de estudio para poder realizar interpretaciones de las producciones del alumnado que permitan realizar una correcta evaluación y proveer retroalimentación.

Hemos seguido dos pasos en el diseño de la propuesta. En primer lugar, hemos realizado una tarea de generalización de patrones geométricos basándonos en los tres estadios recogidos en el trabajo de Zapatera y Callejo (2015), haciendo una leve adaptación de la tarea propuesta en García-Honrado, Clemente, Vanegas, Badillo y Fortuny (2018) para trabajar con alumnado de 6.º curso de Primaria. Tras la puesta en práctica de la tarea, se han obtenido 47 producciones que se han categorizado por las estrategias seguidas y estadios conseguidos. Esto nos permite seleccionar cinco casos de alumnos que consideramos representativos de la variabilidad de resoluciones encontradas.

En segundo lugar, se han analizado las producciones del alumnado con los maestros en formación. Para ello, se ha llevado a cabo una discusión en gran grupo alrededor de las posibles estrategias puestas en práctica por el alumnado del 6.º de Primaria para realizar la tarea, reforzando su espacio de soluciones, lo que fortalecerá la calidad de las interpretaciones. Las interpretaciones de las producciones gráficas, numéricas y de lenguaje natural de los cinco alumnos que se han seleccionado han de apoyarse, además, en la consecución de los tres estadios que definen la tarea.

Agradecimientos

El trabajo se ha realizado bajo los proyectos EDU2015-65378-P y FC-GRUPIN-IDI/2018/000199.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135–150.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* Reston, EE.UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2015). Caracterización de la "mirada profesional" de los estudiantes para maestro sobre la comprensión de la generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521-528). Alicante: SEIEM.

García-Honrado, I., Alonso-Castaño, M., Lorenzo, E. y Muñiz-Rodríguez, L. (2019). Propuesta de una tarea profesional para maestros de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 619). Valladolid: SEIEM.

COMPARACIÓN DE ESQUEMAS GRÁFICOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO PARA ANALIZAR UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS COMPLEJAS

Comparison of didactic suitability graphic schemes of the onto-semiotic approach to analyse a didactic sequence of complex geometric constructions

García-Mora, E.[a, b] y Díez-Palomar, J.[a]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Knotion México

El currículo de geometría para estudiantes mexicanos entre 12 y 16 años contempla el uso de instrumentos para la construcción en papel de figuras geométricas y algunos de sus elementos (Secretaría de Educación Pública, 2011). Para dar cumplimiento a los contenidos curriculares, se diseñó una secuencia didáctica por la primera autora en su etapa como profesora de secundaria. Con esta tarea se pretendió lograr el interés del grupo y presentar una alternativa estéticamente atractiva a la vez de hacer uso del lenguaje propio de la geometría para referirse a las figuras geométricas a construir. La metodología empleada fue la presentación de una hoja de instrucciones donde se indicaba en 35 enunciados una secuencia de construcción de elementos y/o figuras geométricas que llevaran al estudiante hacia un dibujo geométrico complejo a color producido por la superposición y reiteración de figuras simples.

La respuesta dada por los estudiantes a este ejercicio cumplió parcialmente las expectativas de la profesora. En una etapa posterior, se analizó la *idoneidad didáctica* de la secuencia para verificar el cumplimiento de los componentes epistémicos, cognitivos, interaccionales, mediacionales, afectivos y ecológicos de dicho constructo (Godino, 2013). Al generar un par de esquemas para visualizar los indicadores de los seis componentes de la *idoneidad didáctica*, se identificaron algunos de los aspectos que incidieron en la respuesta de los estudiantes. Además, tales gráficos ofrecen orientaciones para el rediseño de la tarea por parte del profesor. De tal análisis, se concluyó que, para mejorar las facetas, se puede: contextualizar el ejercicio, relacionarlo con otros conceptos, adaptar los contenidos curriculares, promover la interacción entre los estudiantes, buscar el interés de todos o de la mayoría del grupo, promover la interacción con el docente, usar modelos concretos, dar tiempo de repaso para los contenidos de mayor dificultad y realizar conexiones inter e intra-disciplinares. El modelo de análisis desarrollado por el Enfoque Onto-Semiótico ha servido para orientar la reflexión del docente sobre su propia práctica y permite rediseñar la actividad para el desarrollo de una *buena clase* de matemáticas (Font, Planas y Godino, 2010).

Agradecimiento: Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México D. F., México: Autor.

García-Mora, E. y Díez-Palomar, J. (2019). Comparación de esquemas gráficos de idoneidad didáctica del enfoque onto-semiótico para analizar una secuencia didáctica de construcciones geométricas complejas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 620). Valladolid: SEIEM.

DIFICULTADES EN LOS PROCESOS DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS

Difficulties in the analysis-synthesis processes in arithmetic problem solving

García-Moreno, M. A.[a], Arnau, D.[a], González-Calero, J. A.[b] y Arevalillo-Herráez, M.[a]

[a]Universitat de València - Estudi General, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

El método de análisis-síntesis proporciona un plan válido para la resolución aritmética de un problema verbal (Puig y Cerdán, 1988). En los procesos analíticos se conectan cantidades yendo de lo desconocido a lo conocido. En el proceso de síntesis el recorrido desde lo conocido hacia lo desconocido nos llevará a la resolución del problema. En el trabajo de Kalmykova (1975) se presentan resultados del uso del método de análisis y síntesis en niveles de primaria cuando los estudiantes llevaban a cabo un análisis completo previo a la síntesis. En este trabajo, además, se concluye que un análisis previo completo es muy complejo para estudiantes de los niveles de primaria.

Hemos desarrollado una investigación con una metodología mixta que tenía la intención de describir las actuaciones de 73 estudiantes de tres grupos naturales de quinto curso de primaria cuando resolvían de manera aritmética problemas multietapa. Nuestro propósito era identificar las dificultades que encuentran cuando deben realizar procedimientos de análisis-síntesis y, más concretamente, determinar si son capaces de realizar procesos de análisis completo. Con este fin hemos enfrentado a parejas de estudiantes a la resolución de problemas verbales con la intención de acceder a sus razonamientos partiendo de la información intercambiada en los diálogos. Además, los estudiantes resolvían los problemas en un entorno informático capaz de determinar la validez de las acciones, lo que les permitía obtener retroalimentación de la idoneidad de sus decisiones.

En concreto en este póster presentamos episodios donde se ponen de manifiesto dos tipos de actuaciones. Por un lado, y para el caso de estudiantes de un buen nivel académico, un análisis completo previo exige una fuerte demanda de la memoria de trabajo y produce la aparición de deformaciones de las relaciones y las cantidades en los niveles más profundos de análisis. Por otro, se observan casos de estudiantes con bajo rendimiento académico en los que el análisis no se construye desde la cantidad o cantidades desconocidas por las que se pregunta en el enunciado. En estos casos los estudiantes parten de las cantidades conocidas y las combinan con la esperanza de determinar alguna cantidad desconocida que reduzca el número de relaciones necesarias para dar respuesta al problema.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto de investigación PGC2018-096463-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España.

Referencias

Kalmykova, Z. I. (1975). Analysis and synthesis as problem solving methods. En J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. G. Begle, J. W. Wilson, y M. G. Kantowski (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. XI* (pp. 1–171). Stanford, EE.UU.: School Mathematics Study Group Stanford University and Survey of Recent East Europe Mathematical Literature.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

García-Moreno, M. A., Arnau, D., González-Calero, J. A. y Arevalillo-Herráez, M. (2019). Dificultades en los procesos de análisis-síntesis en la resolución aritmética de problemas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 621). Valladolid: SEIEM.

PRESENCIA DE LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA ENSEÑANZA DE GRADO EN ESPAÑA

Presence of Graph Theory on Spanish undergraduate education

González, A.[a], Muñoz-Escolano, J. M.[b] y Oller-Marcén, A. M.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

La Matemática Discreta debería ser, tanto por su importancia empírica como por su importancia pedagógica, un elemento esencial en los currículos escolares en el siglo XXI (Hart y Martin, 2018). En particular, la Teoría de Grafos resulta una herramienta interesante para el diseño de tareas relacionadas con la modelización y los procesos de matematización asociados (Martín-Morales, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2009). En España, pese a la existencia de trabajos ya clásicos como el de Coriat, Sancho, Gonzalvo y Marín (1989), la Teoría de Grafos está ausente en los currículos de Secundaria y Bachillerato y solo es abordada a nivel universitario.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en obtener un panorama general de la presencia de la Teoría de Grafos en la enseñanza de grado española. En particular, nos centramos en analizar las principales titulaciones y asignaturas en las que esta disciplina se aborda de forma sistemática y, especialmente, en determinar los contenidos que se presentan en ellas. El estudio realizado es de tipo descriptivo y tiene un enfoque puramente cuantitativo. Tras una fase de búsqueda inicial, se han analizado los temarios recogidos en 231 guías docentes provenientes de 47 universidades públicas españolas y correspondientes a 142 titulaciones de carácter científico-técnico, entre las que se distinguen los Grados de Matemáticas y de Ingeniería Informática (o similares, como Ingeniería del Software y del Desarrollo de videojuegos) como las que tienen una mayor presencia.

Respecto de las asignaturas en las que hemos detectado presencia de la Teoría de Grafos las más frecuentes son las relacionadas con la Matemática Discreta (87 asignaturas). También existe un buen número de asignaturas que contienen el término 'datos' en su nombre (46 asignaturas). Llama la atención que únicamente 8 asignaturas de las 231 analizadas contienen el término 'grafo' explícitamente en su nombre (casi todas ellas correspondientes a grados de Matemáticas). Los contenidos descritos en las guías docentes se han categorizado según un esquema deductivo. Así, se han identificado una serie de categorías temáticas, siendo las más frecuentes las relacionadas con generalidades (148 apariciones) y con aspectos algorítmicos (146 apariciones). Los árboles son tratados en 141 asignaturas y los grafos ponderados en 91.

El análisis de los temarios de las guías docentes nos permite tener una visión global que sienta las bases para abordar un estudio detallado de los currículos programado e implementado (Mullis, 2018) en relación con los grafos en la enseñanza de grado española.

Referencias

Coriat, M., Sancho, J. M., Gonzalvo, P. y Marín, A. (1989). *Nudos y nexos: redes en la escuela*. Madrid: Síntesis.

Hart, E. W. y Martin, W. G. (2018). Discrete mathematics is essential mathematics in a 21st century School Curriculum. En E. W. Hart y J. Sandefur (Eds.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research* (pp. 3-19). Cham, Suiza: Springer.

Martín-Morales, J., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos*, *12*, 137-164.

Mullis, I. V. S. (2018). Introducción. En I.V.S. Mullis y M. O. Martin (Eds.), *TIMSS 2019. Marcos de la evaluación* (pp. 3-11). Madrid: Ministerio de Educación y Formación Profesional.

González, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Presencia de la teoría de grafos en la enseñanza de grado en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 622). Valladolid: SEIEM.

ORIENTACIÓN COGNITIVA DE TAREAS SOBRE INTERVALOS DE CONFIANZA EN LIBROS DE BIOESTADÍSTICA

Cognitive orientation of tasks on confidence intervals in biostatistics textbooks

González-Ruiz, I.[a], Estrella, S.[b], González, M. J.[a] y González-Astudillo, M. T.[c]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Pontificia Univ. Católica de Valparaíso, [c]Universidad de Salamanca

En este trabajo se identifica la orientación cognitiva de las tareas sobre construcción de intervalos de confianza que aparecen en libros de Bioestadística del Grado en Medicina. White y Mesa (2014) introducen el constructo *orientación cognitiva* de una tarea para referirse a las operaciones hipotéticas que se utilizan para producir una respuesta. La orientación cognitiva se refiere a la demanda cognitiva potencial de la tarea, idea que *a priori* difiere de la noción de demanda cognitiva desarrollada por otros autores (por ejemplo, Stein y Smith, 1998), que toma en cuenta las operaciones que los estudiantes realmente llevarían a cabo.

White y Mesa (2014) distinguen tres niveles de orientación cognitiva: (1) *Procedimientos simples*, si se ajustan a la descripción de las categorías *recordar* y *rememorar y aplicar procedimiento*; (2) *Procedimientos complejos*, si se ajustan a la descripción de la categoría *reconocer y aplicar procedimiento*; y (3) *Tareas ricas*, si se ajustan a las categorías *comprender*, *comprender para aplicar*, *analizar*, *evaluar* y *crear*. La descripción original de las ocho categorías mencionadas se muestra en el siguiente enlace. Para llevar a efecto el estudio, se tomó el total de las 124 tareas incluidas en los tres libros de Bioestadística más citados en veintiocho planes de estudio del título de grado en Medicina en España. De las tareas que abordan la construcción de intervalos de confianza, 69 son para la media y 55 son para la proporción. Se ha analizado cada tarea considerando el número de subtareas que la conforman y asignando a cada una de ellas una de las ocho categorías mencionadas. Para determinar la orientación cognitiva de una tarea se ha considerado la mayor orientación cognitiva de las subtareas.

De las 124 tareas, los resultados muestran que la orientación cognitiva de 67 de ellas (54%) corresponde a procedimientos simples, categorizándose 62 de las tareas como rememorar y aplicar procedimiento; 17 tareas (14%) corresponden a procedimientos complejos; y las 40 tareas restantes (32%) corresponden a tareas ricas, categorizándose 16 como comprender y 18 como comprender para aplicar. De las 69 tareas propuesta para la media, 41 (59%) corresponden a procedimientos simples, 11 (16%) a procedimientos complejos y 17 (25%) a tareas ricas. En el caso de las 55 tareas propuestas para la proporción, 26 (47%) corresponden a procedimientos simples, 6 (11%) a procedimientos complejos y 23 (42%) corresponden a tareas ricas.

Finalmente, se concluye que el nivel de orientación cognitiva *tareas ricas* se presenta en el 42% de las tareas asociadas a la proporción y sólo en el 25% de las tareas asociadas a la media. Como línea de trabajo futura, se ampliará el alcance del estudio considerando una muestra de mayor tamaño y se comparará la orientación cognitiva en los dos grupos de tareas mencionadas.

Agradecimiento: Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019 bajo el proyecto SA050G19.

Referencias

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

White, N. y Mesa, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. *ZDM, 46*(4), 675-690.

González-Ruiz, I, Estrella, S., González, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2019). Orientación cognitiva de tareas sobre intervalos de confianza en libros de bioestadística. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 623). Valladolid: SEIEM.

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA FORMATIVA SOBRE VARIACIÓN LINEAL CON FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA

Assessment of the didactical suitability of a training experience on linear variation with prospective secondary teachers

Herrera-García, K. J.[a], Dávila-Araiza, T.[a], Giacomone, B.[b] y Beltrán-Pellicer, P.[c]

[a]Universidad de Sonora, [b]Università di San Marino, [c]Universidad de Zaragoza

La *idoneidad didáctica* es una herramienta que nace en el seno del Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) para evaluar el grado de adecuación de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Permite la reflexión sistemática sobre el diseño e implementación de secuencias didácticas, identificando sus potencialidades y debilidades, y así, dar juicios razonados para la innovación y la mejora progresiva de la práctica.

En este póster se presenta la valoración de una experiencia formativa llevada a cabo con un grupo de futuros profesores de matemática de educación secundaria en México, utilizando dicho constructo teórico y considerando las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Se trata de una investigación de diseño con el objetivo de desarrollar, en futuros profesores, conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (tal como sugieren Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) utilizando como contexto formativo la variación lineal. Como es propio de este tipo de metodologías, la acción formativa está basada en el desarrollo de cuatro fases: el análisis preliminar sobre el tópico de estudio, el diseño de actividades, la implementación y el análisis retrospectivo. En el diseño y la implementación de la experiencia de enseñanza se han tenido en cuenta las orientaciones curriculares y las restricciones del contexto.

Los resultados de la idoneidad del ciclo formativo diseñado e implementado revelan una alta idoneidad epistémica-ecológica, al plantearse un diseño que se adecúa a las directrices curriculares propuestas en México y una variedad de situaciones-problemas que promueven la emergencia de objetos matemáticos. La idoneidad mediacional se puede considerar media, ya que un aspecto importante a mejorar es la determinación del tiempo empleado. Este difirió con el tiempo planificado, siendo idóneo disponer de una sesión más para la discusión de la penúltima actividad didáctica. Con respecto a la idoneidad interaccional, se considera alta puesto que la confrontación de las respuestas fue un recurso muy útil para manifestar y compartir sus ideas. La idoneidad cognitiva-afectiva alcanza un nivel medio, ya que algunas tareas no resultaron fáciles para los futuros profesores. Sin embargo, la idoneidad cognitiva se ve influenciada positivamente por los aspectos afectivos y los recursos tecnológicos utilizados. Se concluye la factibilidad de implementar guías que incluyan componentes e indicadores, al resultar un instrumento útil para poder valorar este tipo de acciones formativas.

Reconocimiento: Esta investigación fue realizada en el marco del proyecto de investigación PGC2018-098603-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España) y en el grupo S36_17D Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Herrera-García, K. J., Dávila-Araiza, T., Giacomone, B. y Beltrán-Pellicer, P. (2019). Valoración de la idoneidad didáctica de una experiencia formativa sobre variación lineal con futuros profesores de secundaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 624). Valladolid: SEIEM.

EL TRATAMIENTO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XVIII: LOS *ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS* DE BENITO BAILS

The treatment of Infinitesimal Calculus in the 18th century: Benito Bails´s textbook "Elementos de Matemáticas"

León-Mantero, C.[a], Gutiérrez-Rubio, D.[a], Madrid, M. J.[b], Jiménez-Fanjul, N.[a] y Maz-Machado, A.[a]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

Entre las distintas temáticas que se engloban en la línea de investigación de Historia de la educación matemática, el análisis de los libros de texto usados para la instrucción de la materia a lo largo de la historia ha cobrado especial interés en las últimas décadas. Los libros de texto nos informan sobre el desarrollo y la evolución de los conceptos y métodos matemáticos, sobre los avances científicos alcanzados, sobre la incorporación de estos en la instrucción de la materia, y sobre la influencia del contexto histórico en el sistema de enseñanza de la época (Maz-Machado y Rico, 2015). Podemos afirmar que constituyen elementos curriculares, que establecen qué contenido se estudia o no, cómo se estructura ese contenido y qué tipo de problemas se trabaja en cada época (González y Sierra, 2004).

Los protagonistas de la introducción del cálculo infinitesimal en España durante el siglo XVIII fueron militares, desde su labor de instrucción a ingenieros en las Academias, como es el caso de Pedro Padilla o Jorge Juan, y jesuitas desde las escuelas religiosas, como el Padre Tomás Cerdá (Garma, 1988). Sin embargo, sus obras, de enfoque mucho más newtoniano, representan una introducción limitada de esta rama de conocimiento en la enseñanza de las matemáticas en España. La primera obra de amplia extensión, difusión y contenido es *Elementos de Matemáticas*, del catalán Benito Bails (Ausejo y Medrano, 2010). Por ello, el objetivo de este trabajo es identificar la estructura conceptual que Bails implementó en su exposición sobre el cálculo infinitesimal incluida en el Tomo III de su gran obra *Elementos de Matemáticas* publicada en Madrid en 1779.

Se trata de un estudio descriptivo que se enmarca en el enfoque de investigación de tipo histórico y que usa el método del análisis de contenido para interpretar los datos. Los resultados muestran que este tomo tiene una estructura y estilo coherente con los textos de la época, que no presenta innovaciones teóricas ni aplicaciones prácticas en la parte dedicada al cálculo infinitesimal, aunque el autor sí las incluye en los tomos siguientes dedicados a astronomía o mecánica, y centrado en aplicaciones de la teoría en un ámbito puramente matemático.

Agradecimientos: Esta comunicación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

Referencias

Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2010). Construyendo la modernidad: Nuevos datos y enfoques sobre la introducción del Cálculo Infinitesimal en España (1717-1787). *Llull*, *33*(71), 25-56.

Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En J. M. Sánchez-Ron (Ed.), *Ciencia y sociedad en España* (pp. 93-127). Madrid: Ediciones El Arquero y CSIC.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME*, *18*(1), 49-76.

León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D., Madrid, M. J., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2019). El tratamiento del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII: Los *Elementos de Matemáticas* de Benito Bails. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 625). Valladolid: SEIEM.

ANÁLITICA DE DATOS DE APRENDIZAJE EN UN CURSO UNIVERSITARIO DE ESTADÍSTICA CON *READ AND LEARN*

Learning Analytics in a Statistics university course using *Read and Learn*

López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E.

Universitat de València

En la actualidad, resulta muy habitual el empleo en distintos niveles educativos de sistemas de enseñanza asistida por ordenador o Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA), no solo como repositorio de documentos, ejercicios u otro tipos de recursos al que puede acceder el estudiantado, sino como herramienta para generar y almacenar grandes cantidades de datos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje (Romero, Ventura y García, 2008), registrando la interacción estudiante-computador y conformando la denominada traza digital del alumno.

De esta manera, en los últimos años ha surgido un área de estudio conocida como Analítica de datos de aprendizaje (*Learning Analytics*, LA), que tal y como señalan Calvet-Liñán y Juan-Pérez (2015) tiene como objeto mejorar la calidad de la educación mediante el análisis de los datos recogidos para extraer información útil para profesores, estudiantes o instituciones educativas, entre otros.

En este trabajo se presenta el uso del entorno tecnológico *Read & Learn* (R&L) en un contexto relacionado con la Educación Matemática en la resolución de problemas. Se trata de una aplicación informática para la investigación con la que se puede analizar cómo los estudiantes interactúan con un determinado enunciado mientras resuelven problemas.

R&L permite diseñar y realizar experimentos en los que los estudiantes leen textos, realizan tareas (p.ej., contestar preguntas) y reciben retroalimentación sobre su ejecución. Por otro lado, es posible configurar una serie de opciones tales como el formato de las preguntas, el acceso al texto durante la prueba, el enmascaramiento de partes del texto o la definición de distintos tipos de retroalimentación tras la contestación de las preguntas, entre otras posibilidades.

De esta forma, *Read & Learn* registra minuciosamente la secuencia de acciones del estudiante durante la ejecución de una prueba y las transforma en variables (p.ej., tiempo de lectura en general, el tiempo de consulta de segmento de información enmascarado o cambio de opción al responder después de recibir retroalimentación) que ayudan a analizar las estrategias del estudiantado cuando se enfrentan a situaciones de lectura orientada a tareas como la resolución de problemas.

En particular, se exponen los resultados preliminares de un experimento empleando R&L con un grupo de 22 estudiantes universitarios de primer curso en la asignatura Estadística. El objetivo principal es evaluar el rendimiento el alumnado en función del tipo de retroalimentación recibido después de contestar preguntas de opción múltiple.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España y por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) bajo el proyecto RTI2018-095820-B-I00.

Referencias

Calvet-Liñán, L. y Juan-Pérez, Á. A. (2015). Educational Data Mining and Learning Analytics: differences, similarities, and time evolution. *International Journal of Educational Technology in Higher Education, 12*(3), 98-112.

Romero, C., Ventura, S. y García, E. (2008). Data mining in course management systems: Moodle case study and tutorial. *Computers & Education, 51*(1), 368-384.

López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. (2019). Analítica de datos de aprendizaje en un curso universitario de estadística con *Read and Learn*. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 626). Valladolid: SEIEM.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA EN EL SIGLO XVIII: LA OBRA DE JUAN JUSTO GARCÍA

Teaching mathematics at the University of Salamanca in the 18th century: Juan Justo García's book

Madrid, M. J.[a], León-Mantero, C.[b], Gutiérrez-Rubio, D.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

La historia de las matemáticas y la educación matemática tiene entre sus propósitos dar a conocer a figuras relevantes en estos campos. Teniendo esto en cuenta, el objetivo de este trabajo es presentar una breve semblanza del segundo catedrático de algebra de la Universidad de Salamanca, Juan Justo García, y de su obra *Elementos de Aritmetica, Álgebra y Geometría* (Cuesta-Dutari, 1974). Para ello se ha realizado una investigación de tipo histórico matemático centrada en el análisis de libros de texto del pasado a través del análisis de contenido siguiendo las directrices de Maz (2009).

Juan Justo García nació en Zafra (Badajoz) en 1752 y murió en Salamanca en 1830. Estudió en la Universidad de Salamanca aunque no consta que asistiera a clases de matemáticas. En 1773 opositó a la cátedra de Álgebra de esta universidad; esta oposición fue accidentada y el rey Carlos III tuvo que intervenir decidiendo que se le otorgase la cátedra a Juan Justo. Pero no solo esto, Juan Justo fue creador del Colegio de Filosofía de esta Universidad en 1792, fue diputado e incluso actuó como vicerrector por un breve periodo de tiempo (Cuesta-Dutari, 1974).

Escribió este autor varias obras, entre ellas los *Elementos de Aritmetica, Álgebra y Geometría* que se publicaron en 1782 en Madrid y tuvieron varias reimpresiones (Cuesta-Dutari, 1974). En el prólogo al lector indica el autor el objetivo de su obra: "Luego que el deseo de desempeñar debidamente la asignatura de mi Cátedra, me puso en la precision de instruir con exâctitud á mis discípulos en los elementos de Aritmética, Algebra y Geometría, determiné formar un compendio de estas tres Ciencias" (García, 1782, p. I).

Tras el prólogo inicial al lector, comienza el autor con un resumen histórico del origen, progresos y actual estado de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. Pasa después a los contenidos de la obra entre los que se encuentran los elementos de Aritmética, los principios del Álgebra y los elementos de Geometría. A su vez incluye trigonometría, la aplicación del álgebra a la geometría o las secciones cónicas. Y finalmente contiene los principios del cálculo infinitesimal, del cálculo diferencial y del cálculo integral. Y es precisamente la inclusión del análisis infinitesimal una muestra del interés renovador de Juan Justo, pues ni Torres Villarroel, el anterior catedrático de matemáticas de la Universidad de Salamanca, ni su sobrino, que regentó dicha cátedra, lo habían introducido en sus lecciones (Cuesta-Dutari, 1974).

Agradecimientos: Esta comunicación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

Referencias

Cuesta-Dutari, N. (1974). *El maestro Juan Justo Garcia I*. Salamanca: Universidad de Salamanca.

García, J. J. (1782). *Elementos de Aritmetica, Álgebra y Geometría*. Madrid: Joachîn Ibarra.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Madrid M. J., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Maz-Machado, A. (2019). La enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Salamanca en el siglo XVIII: la obra de Juan Justo García. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 627). Valladolid: SEIEM.

IDONEIDAD DIDÁCTICA: ¿UNA HERRAMIENTA PARA REFLEXIONAR SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN CONDICIONES DE MASIVIDAD?

Didactic suitability: a tool to reflect on the teaching of mathematics in massive conditions?

Malet, O.[a], Giacomone, B.[b] y Repetto, A.[c]

[a]Universidad Nacional de Tres de Febrero, [b]Università di San Marino, [c]Universidad Nacional de Cuyo

Matemática y metodología para su estudio es una de las asignaturas del Ingreso a los Estudios Universitarios en la Universidad Nacional de Tres de Febrero (Argentina). Se trata de una asignatura cuatrimestral en la que se aborda el estudio de distintos tipos de funciones, en condiciones de masividad: en 2019, dos mil cuatrocientos doce inscriptos que aspiran a ingresar a nueve carreras distintas, cuarenta y cuatro comisiones, dos turnos (matutino y vespertino), un equipo docente de treinta y cuatro profesores y un equipo coordinador de tres miembros.

La pregunta acerca de cómo valorar la calidad de la enseñanza en esas condiciones para prever acciones efectivas de mejora nos llevó a diseñar un proyecto de investigación cuyo propósito es construir y aplicar un dispositivo que permita hacerlo. Para ello, recurrimos al constructo *idoneidad didáctica* (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013), procedente del Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2012). La idoneidad didáctica de un proceso de estudio es el criterio global de pertinencia de dicho proceso; su principal indicador empírico es el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, considerando las circunstancias locales (las acciones de los agentes educativos, los conocimientos en juego, los recursos); y supone la articulación coherente y sistémica de seis dimensiones: epistémica, cognitiva, interaccional, afectiva, mediacional y ecológica.

Ahora bien, la noción de idoneidad didáctica y el sistema de dimensiones, componentes e indicadores que la desarrollan, ¿son adaptables y efectivamente instrumentables para valorar el proceso de estudio en una asignatura universitaria cuatrimestral que contempla múltiples bloques temáticos y que es cursada en condiciones de masividad? ¿Es posible valorar simultáneamente la idoneidad de dicho proceso en las seis dimensiones del constructo? ¿Mediante qué estrategias?

El propósito de este póster es someter a discusión los primeros avances de la investigación, que sugieren que la herramienta idoneidad didáctica y sus adecuaciones son útiles para orientar la reflexión profesional sobre la práctica y proponer acciones de mejora en asignaturas masivas.

Reconocimiento: Esta investigación fue realizada en el marco del proyecto de investigación PGC2018-098603-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España).

Referencias

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Baeza, Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. (2019). Idoneidad didáctica: ¿Una herramienta para reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en condiciones de masividad? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 628). Valladolid: SEIEM.

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN TORNO AL CONCEPTO DE LOGARITMO

Mistakes of secondary school students about the logarithm concept

Martín-Barcala, A. y González-Astudillo, M. T.

Universidad de Salamanca

El concepto de logaritmo destaca por su reputación de concepto difícil e inaccesible (Weber, 2016). Así, en un gran número de libros de texto este tema parece quedar relegado a un segundo plano dentro de una misma unidad didáctica con otros muchos conceptos matemáticos.

Además, la aparición de las calculadoras electrónicas y su fácil acceso podría suponer que el uso de los logaritmos pierda sentido y parte del alumnado los vea como “un simple botón en la calculadora” (Weber, 2016). Este mismo autor señala que los problemas de comprensión que se ocasionan vienen dados por la ya estandarizada definición propuesta por Euler como la inversa de la exponencial, que más que una definición psicológica y cercana a la experiencia del alumnado, refleja la visión lógica de un experto que ha llegado a ella tras un proceso de cosificación. Son estas dificultades las que plantean un punto de partida para una investigación en profundidad sobre líneas metodológicas alternativas para un mejor aprendizaje conceptual del logaritmo.

Autores como Aziz, Pramudiani y Purnomo (2017), Ganesan y Dindyal (2014) y Hoon, Singh y Ayop (2010) han estudiado y clasificado previamente el trabajo realizado por alumnos en el cálculo y manipulación de logaritmos. Con el objetivo de identificar los obstáculos que se muestran más resistentes en torno a este concepto, se han analizado los errores cometidos por alumnos de Educación Secundaria en 60 pruebas consistentes de 10 preguntas sobre: i) cálculo de logaritmos, ii) simplificación y expansión de expresiones logarítmicas y iii) ecuaciones logarítmicas.

Los resultados muestran con claridad que los errores más frecuentes vienen dados por el mal uso o por una generalización incorrecta de las propiedades de los logaritmos. Una definición distorsionada, la falta de comprensión del concepto de logaritmo, y los problemas surgidos por una falsa interpretación de la notación utilizada son otros de los motivos más comunes. Sería también interesante destacar e indagar en las causas que llevan al alumno a cometer errores como: (1) confundir el valor de un logaritmo con el logaritmo de dicho valor, (2) el uso correcto de las propiedades al simplificar, pero incorrecto al expandir una expresión logarítmica, y (3) transformar el producto de logaritmos en la suma de sus valores.

Agradecimiento: Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019 bajo el proyecto SA050G19.

Referencias

Aziz, T. A., Pramudiani, P. y Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *1*(1), 25-40.

Ganesan, R. y Dindyal, J. (2014). An investigation of students’ errors in logarithms. En J. Anderson, M. Cavanagh y A. Prescott (Eds.), *Curriculum in focus: Research guided practice (Proceedings of the 37th annual conference of the MERGA)* (pp. 231–238). Sydney, Australia: MERGA.

Hoon, T. S., Singh, P. y Ayop, S. K. (2010). Working with Logarithms. *Malaysian Education Dean’s Council Journal, 6*(6), 121-129.

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible - Operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(Supplement 1), 69-98.

Martín-Barcala, A. y Gonzalez-Astudillo, M. T. (2019). Errores de los estudiantes de secundaria en torno al concepto de logaritmo. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 629). Valladolid: SEIEM.

DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO EN ALUMNADO DE EDADES TEMPRANAS Y MAESTRAS/OS (ACTIVO Y EN FORMACIÓN)

Design of a research on stochastic reasoning in early-age students and teachers (active and in training)

Martínez-Romero, M.[a], Huerta, M. P.[b] y Andrés, L.[a]

[a]Florida Universitària, [b]Universitat de València

Internacionalmente se reconoce un creciente interés por la investigación educativa desde los primeros años de escolarización (Salinas, 2016) a la par que crece el interés por acercar el razonamiento estocástico (Schupp, 1989) al alumnado de edades tempranas. Pero, para ello, es necesario que las maestras y maestros estén preparados para abordarlo con estudiantes de estas edades. Por todo ello, en esta investigación se pretende abordar el reto de observar, describir y analizar aquel razonamiento durante el proceso de resolución de un problema de probabilidad en dos clases con niñas y niños de 5 a 7 años. Al mismo tiempo se observa cómo es y qué características describen el razonamiento de las maestras/os implicados en la investigación y cómo lo usan durante el proceso de gestión de la resolución del problema por las niñas y niños de estas edades. En la investigación participan 3 maestras en activo, 10 maestras/os en su último curso de formación y 33 alumnas/os de entre 5 y 7 años, quienes organizados en pequeños grupos de 4 miembros abordan la resolución por simulación de un problema de probabilidad (Huerta, 2015).

La investigación puede describirse metafóricamente mediante un tetraedro con la investigadora situada en un vértice y en cada uno de los tres vértices restantes los tres grupos de participantes mencionados con anterioridad y que son objeto de observación. Cada arista, bidireccionalmente, describe la relación entre los participantes y entre éstos con la investigadora. En el interior de la pirámide se sitúa el razonamiento estocástico implicado durante la resolución del problema y durante el proceso de gestión que llevan a cabo las maestras/os con el fin de aproximar dicho razonamiento al alumnado. Las actuaciones del alumnado son videograbadas y se transcriben a protocolos escritos para su posterior análisis, con la pretensión de identificar y describir en ellos rasgos de dicho razonamiento Los datos obtenidos de las maestras/os se analizan con el fin de extraer un modelo explicativo y descriptivo de los procesos metacognitivos y neurolingüísticos utilizando para ello la metodología cualitativa *Grounded Theory*, que permite, a través del análisis del discurso narrativo (Sparkes y Smith, 2013) de las maestras/os, describir la consistencia y relación entre la tipología discursiva y los rasgos de razonamiento de las niñas y niños.

Referencias

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad *con intención didáctica* en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Salinas, M. J. (2016). Investigación en Educación Matemática Infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 17-18). Málaga: SEIEM.

Schupp, H. (1989). Appropriate teaching and learning of stochastics in the middle grades (5-10). En M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics, Vol. 7* (pp. 101-120). París, Francia: UNESCO.

Sparkes, A. C. y Smith, B. (2013) *Qualitative research methods in sport, exercise and health: From process to product*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Martínez-Romero, M., Huerta, M. P. y Andrés, L. (2019). Diseño de una investigación sobre el razonamiento estocástico en alumnado de edades tempranas y maestras/os (activo y en formación). En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 630). Valladolid: SEIEM.

CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UNA PAUTA DE OBSERVACIÓN DE CLASES DE MATEMÁTICAS

Construction and validation of a mathematics class observation protocol

Martínez-Videla, M. V.[a] y Perdomo-Díaz, J.[b]

[a]Universidad de O'Higgins, [b]Universidad de La Laguna

La observación de clases se ha convertido en un elemento clave en las prácticas profesionales que se realizan durante la formación inicial, como una actividad que promueve la reflexión docente y permite el desarrollo de capacidades para el trabajo en aula. A partir de esta situación surgen algunos interrogantes, como: ¿qué se debe observar o analizar en una clase? ¿Debe observarse lo mismo en una clase de lenguaje que en una de matemáticas o de ciencias naturales? ¿Se debe observar lo mismo si estoy evaluando que si estoy formando docentes? ¿Qué uso se puede o debe hacer de esas observaciones?

Tratando de dar respuesta a esos cuestionamientos, en las últimas décadas han surgido diversas investigaciones que buscan capturar ciertas características del quehacer docente. Es así como se han desarrollado numerosos instrumentos que permiten describir el trabajo en el aula, como CLASS (Pianta, La Paro y Hamre, 2008) o MQI (Hill et al., 2008).

El objetivo de este póster es presentar un instrumento, al que hemos denominado *Pauta Promate*, que permite observar y analizar el aula de matemáticas. Mostraremos el proceso de construcción y validación y cómo el propio diseño define una estructura básica que permite tanto la formación como el acompañamiento docente. Este proceso de construcción y validación pasó por una serie de etapas, que van desde la revisión de diversos instrumentos, paneles de expertos y la codificación de clases hasta llegar al análisis estadístico de dichos resultados empleando la teoría de generalizabilidad (Martínez-Videla, 2018).

Como resultado se obtiene la *Pauta Promate* que consta de 11 dimensiones, agrupadas en dos dominios principales, Gestión general de la clase y Gestión de la enseñanza de las matemáticas, y una sección para información complementaria como los recursos empleados para presentar el contenido matemático, la organización del trabajo matemático o las conexiones que se establecen. Para cada dimensión se definen tres niveles de desempeño: incipiente, medio y competente, los cuales están definidos en formato de rúbrica. Es de nuestro interés compartir la estructura general de la *Pauta Promate*, así como su proceso de diseño y validación, lo que puede ser de interés para el desarrollo de instrumentos tanto para la formación docente como para la investigación en el área.

Agradecimiento: Trabajo financiado por el Proyecto "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de Profesores", del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad. Madrid. España. EDU2017-84276-R.

Referencias

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An exploratory study, *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.

Martínez-Videla, M. V. (2018). Class observation to enrich student thinking on mathematics inside the classroom. En Gómez, D. M. (Eds.). *Proceedings of the first PME Regional Conference South America 2018* (pp. 17-30). Rancagua, Chile: PME.

Pianta, R. C., La Paro, K. M. y Hamre, B. K. (2008). *Classroom Assessment Scoring System™ (CLASS™): Manual K-3*. Baltimore, EE. UU.: Paul H. Brookes Publishing.

Martínez-Videla, M. V. y Perdomo-Díaz, J. (2019). Construcción y validación de una pauta de observación de clases de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 631). Valladolid: SEIEM.

DIFICULTADES CON PORCENTAJES EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Difficulties with percentages in prospective primary teachers

Maz-Machado, A., Valverde, C., Piedra, R. y Jiménez-Fanjul, N.

Universidad de Córdoba

Los porcentajes son descriptores de muchas situaciones siendo un concepto que los futuros profesores de Educación Primaria deben conocer y dominar. La importancia en primaria se evidencia en los trabajos de Streefland y Van den Heuvel-Panhuizen (1992) y Van Den Heuvel-Panhuizen (2003), quienes han analizado el conocimiento informal que los estudiantes tienen sobre los porcentajes y han planteado estrategias de enseñanza. Su tratamiento en secundaria también está señalado por Davis (1988), quien indica que el porcentaje puede ser entendido como una función lineal. En el *Informe Cockcroft* (Cockcroft, 1985) ya se ponía el foco de atención en la falta de pericia de los alumnos para comprender los porcentajes. Dole (2000) utilizó escalas numéricas duales para representar los tres tipos de situaciones de porcentaje que pueden producirse, denominándolas Tipo I, Tipo II y Tipo III, según donde se ubique el valor desconocido que se debe hallar.

Se planteó una investigación con 52 estudiantes de segundo año del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba durante el curso 2018/19 para determinar cuáles son los tipos de situaciones que les generan mayor dificultad. Se les aplicó un test inicial de conocimientos. Para ello se utilizó una batería de ejercicios de los tres tipos antes indicados y tres problemas que implican porcentajes. Los ejercicios y problemas fueron tomados de Autor (Maz-Machado y Gutiérrez, 2008).

Se halló que los ejercicios del Tipo II, aquellos en los que son conocidos la cantidad y el tanto por ciento de esa cantidad, y se pretende conocer el porcentaje aplicado, son los que presentan más dificultades a los alumnos para su resolución. El 34,62% respondió incorrectamente a los ejercicios Tipo II, mientras que los de Tipo I resultaron ser los de menor dificultad (10,9%).

En los problemas se evidenciaron errores tanto en los planteamientos como en las operaciones. Así mismo se hallaron como errores principales los denominados como *Incremento ordinal* y *Suma nominal* (Maz-Machado y Gutiérrez, 2008). En ocasiones los estudiantes intentan transformar el tipo de situación en otro para obtener la respuesta correcta, pero incurren en errores en esa transformación.

Referencias

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: MEC.

Davis, R. B. (1988). Is “percent” a number? *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 299-302.

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, *100*(7), 380-389.

Maz-Machado, A. y Gutiérrez, M. P. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación, 17*(1), 59-69.

Streefland, L. y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1992) Evoking pupils’ informal knowledge on percents. En W. Geslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th Psychology of Mathematics Education Conference (PME-16), Vol. 3* (pp. 51-57). Durham, EE.UU.: PME.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35.

Maz-Machado, A., Valverde, C., Piedra, R. y Jiménez-Fanjul, N. (2019). Dificultades con porcentajes en maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 632). Valladolid: SEIEM.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA AL COMPARAR RAZONES

Prospective mathematic teachers' knowledge when they compare ratios

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

En los programas centrados en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, el análisis de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos constituye una importante línea de investigación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018), aunque no hay muchos estudios centrados en la relación entre el conocimiento matemático de los docentes y cómo interpretan la comprensión matemática de los estudiantes (Buforn, 2017). Nuestro trabajo es un aporte en esta línea, al centrarnos en el conocimiento matemático de un grupo de futuros profesores (de ahora en adelante, FP) cuando abordan una tarea matemática de secundaria. Así, es una tarea que los alumnos de secundaria pueden resolver y cuyas respuestas los FP deben ser capaces de mirar profesionalmente. Además, el hecho de trabajar con profesores de secundaria es un aspecto innovador, ya que las investigaciones sobre el desarrollo de la mirada profesional se han centrado, sobre todo, en el nivel de educación primaria (Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson, 2017). En este estudio, en particular, nos centramos en el dominio del razonamiento proporcional, concretamente en la comparación de razones. Lo hacemos proponiendo un problema que presenta las razones con distintas normalizaciones, lo que implica que el resolutor las tenga que unificar para poder compararlas, transformando alguna de ellas a otro tipo de representación. Este hecho provoca la existencia de numerosas rutas de resolución (que el profesor debiera manejar para ser capaz de interpretarlas en las respuestas de sus alumnos). Estas rutas, ya establecidas en Monje (2017), nos van a permitir catalogar el conocimiento que muestran los FP cuando resuelven el problema. Los resultados muestran que 5 FP no fueron capaces de resolver con éxito el problema. Uno de ellos establece comparaciones no relativas y el resto presentan dificultades con la unidad de referencia del descuento o con la elección de ítems y/o precios. Los 13 FP restantes sí resolvieron con éxito el problema aunque sólo dos de ellos utilizaron más de una ruta válida. Los resultados indican una preferencia por la relación interna a la funcional, predominando como técnica de normalización el uso del cociente y el algoritmo del producto cruzado. Aquellos que establecen relaciones escalares en su resolución utilizan un razonamiento parte-todo, no apareciendo el esquema parte-parte. Entre quienes emplean razones externas en sus producciones, existe una ligera preferencia por el uso de la técnica del cociente para establecer el valor unitario frente al uso del método del común múltiplo o construcción progresiva. La relación entre cantidades presentada por estos sujetos es pago/compro.

Agradecimiento: Proyectos EDU2017-87411-R, Prometeo/2017/135 y GV/2018//066.

Referencias

Buforn, Á. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional* (Tesis doctoral no publicada). Univ. de Alicante, Alicante.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *AIEM*, *13*, 39-61.

Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-72). Cham, Suiza: Springer.

Monje, J. (2017). *La re-constitución del objeto mental "relativamente" en futuros maestros* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Fernández, C. (2019). Conocimiento matemático de futuros profesores de secundaria al comparar razones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 633). Valladolid: SEIEM.

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO

A teaching experiment with pre-service teachers

Montero, E.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]Escuni Centro Universitario de Magisterio, [b]Universidad de Alicante

Los experimentos de enseñanza se enmarcan dentro del paradigma metodológico de la investigación de diseño. El proceso de investigación comprende varios ciclos. Cada ciclo contempla tres fases: 1) Diseño y planificación de la instrucción, 2) Implementación, y 3) Análisis retrospectivo (Gravemeijer, 2004; Simon, 1995).

Del análisis retrospectivo se obtienen dos resultados: i) Una secuencia de tareas y la forma de llevarla a cabo, y ii) Un nuevo conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción.

En este trabajo presentamos el tercer ciclo de un experimento de enseñanza con estudiantes para maestro de Primaria (de ahora en adelante, EPM), cuyo objetivo era apoyar el inicio del desarrollo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes. En particular, se busca apoyar el desarrollo de las competencias de anticipar, describir e interpretar respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división con fracciones, y proponer nuevos problemas en base a la interpretación inferida (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

El experimento constó de 9 sesiones de 2 horas. En la primera sesión se exploraron las ideas previas de los EPM sobre cómo resuelven los niños de Educación Primaria problemas de división con fracciones. En las siguientes sesiones, los EPM trabajaron una progresión de estrategias de problemas de división con fracciones (Empson y Levi, 2011) adoptando una mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los niños. En la última sesión compartieron y debatieron de forma argumentada sus respuestas a la tarea realizada en la sesión precedente relacionada con las competencias de la mirada profesional.

El análisis retrospectivo ha mostrado que la mayor parte de los EPM alcanzó el objetivo previsto en cuanto a la anticipación, descripción e interpretación de estrategias de los niños de Primaria, y que su mayor dificultad fue diferenciar entre la estrategia aditiva de combinación y agrupamiento y las multiplicativas.

Agradecimiento: La participación de M. Luz Callejo en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

Referencias

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals. Innovation in Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Un experimento de enseñanza con estudiantes para maestro. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 634). Valladolid: SEIEM.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE DOS ETAPAS EN LOS LIBROS DE CUARTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Two-step problems analysis in fourth grade primary education books

Ngonde-Ernesto, L. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Los libros de texto son un recurso muy utilizado por los profesores y los alumnos, como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumnado y como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver para afianzar los conocimientos explicados (González y Sierra, 2004). En Educación Primaria, los docentes los utilizan como un instrumento básico para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje, delimitando los objetivos de aprendizaje. Un aspecto clave en el aprendizaje viene dado por la resolución de los problemas matemáticos, y de manera específica en el campo del aprendizaje de la aritmética. El objetivo que nos planteamos es analizar los problemas aritméticos de dos etapas, que se resuelven mediante dos operaciones aritméticas, de dos de las editoriales más utilizadas por los docentes.

Encontramos referencias anteriores en el trabajo de Castro y Frías (2004) que se centra en las dificultades que encuentran los alumnos en los problemas dependiendo del número de nodos que hay en ellos. Para el análisis de los problemas aritméticos escolares de dos etapas utilizaremos dos variables, la primera se centrará en el esquema subyacente de los problemas: jerárquico, compartir la parte y compartir el todo (Nesher y Hershkovitz, 1994), y la segunda variable irá más enfocada a cada una de las etapas del problema, en las que identificaremos las componentes semánticas: aditiva (Puig y Cerdán, 1998), simétrica y asimétrica (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999).

Los resultados muestran que en ambas editoriales hay presencia de problemas de los tres tipos, pero su presencia es muy desigual, predominan con gran diferencia respecto a los otros dos tipos los problemas con un esquema subyacente de tipo jerárquico, ya que es la más fácil de reconocer y de resolver debido al orden descendente de sus operaciones. En cuanto a la componente semántica hay una gran diversidad de combinaciones, no obstante, destacan los problemas multiplicativos con grupos múltiples-multiplicación y los problemas aditivos de combinar 1 o cambio 2. En conclusión, las dificultades de los estudiantes podrían explicarse por el desequilibrio en la presencia de los distintos tipos de problemas, que pensamos que deben estar presentes de manera equitativa desde el principio e ir aumentando la dificultad de los problemas mediante las componentes semánticas.

Referencias

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognively guided instruction.* Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Frías, A. y Castro, E. (2004). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. En E. Castro y E. De La Torre (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Octavo simposio de la SEIEM*. A Coruña: SEIEM. Recuperado de: http://www.seiem.es/docs/actas/08/Frias_Castro.pdf

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26*(1), 1-23.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Ngonde-Ernesto, L. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Análisis de los problemas de dos etapas en los libros de cuarto de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 635). Valladolid: SEIEM.

GÉNERO Y ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD

Gender and attitudes towards mathematics in university

Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Casas-Rosal, J. C. y Gutiérrez-Rubio, D.

Universidad de Córdoba

Son numerosos los estudios que aportan evidencias sobre la influencia de los factores afectivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que nos muestran la importancia de indagar cómo interaccionan el aprendizaje y el afecto (Gómez-Chacón, 2000). En particular, el género se postula como una de las variables de influencia en las actitudes hacia las matemáticas más discutida y estudiada. Los resultados de diversas investigaciones señalan que estudiantes de género femenino presentan actitudes más negativas que los de género masculino (Else-Quest, Hyde y Linn, 2010).

Por otro lado, se han encontrado evidencias de la influencia que tiene la variable género en la elección por los estudiantes de su titulación universitaria. Las participantes femeninas eligen titulaciones de Ciencias de la Salud, Educación o Psicología, mientras que los chicos señalan Grados de Ingeniería, Economía o Derecho (Martínez-Martínez, Zurita-Ortega, Castro-Sánchez, Chacón-Cuberos, Hinojo-Lucena y Espejo-Garcés, 2016). Por ello, la finalidad de este trabajo es analizar la influencia del género en las actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes de las diferentes titulaciones de la Universidad de Córdoba.

Se trata de un trabajo descriptivo y exploratorio, en el que se seleccionó una muestra de 1293 estudiantes universitarios, 453 de género masculino y 830 de género femenino, a los que se les aplicó la escala de actitudes hacia las matemáticas diseñada y validada por Auzmendi (1992). Esta escala consta de 25 ítems con cinco niveles de elección (de 1 a 5) agrupados en factores dimensionales relativos a la utilidad de las matemáticas, la ansiedad, agrado, motivación y confianza hacia las matemáticas.

Los resultados evidencian el predominio de las participantes de género femenino en los grados universitarios relacionados con Ciencias Sociales y de la Salud, mientras que los de género masculino prefieren las Ingenierías. Asimismo, estos están en consonancia con estudios previos en los que las mujeres presentan actitudes más negativas que los hombres. Sin embargo, se demuestra que la presunción a priori de que en los grados en los que el número de asignaturas de matemáticas es mayor, los estudiantes pueden sentir mayor agrado hacia la materia y percibir su interés académico y aplicaciones en sus futuras profesiones puede resultar errónea.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias: características y medición*. Bilbao: Mensajero.

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., y Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 136*(1), 103-127.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Martínez-Martínez, A., Zurita-Ortega, F., Castro-Sánchez, M., Chacón-Cuberos, R.., Hinojo-Lucena, M. A. y Espejo-Garcés, T. (2016). La elección de estudios superiores universitarios en estudiantes de último curso de bachillerato y ciclos formativos. *Revista Electrónica Educare, 20*(1), 1-18.

Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A, Casas-Rosal, J. C. y Gutiérrez-Rubio, D. (2019). Género y actitudes hacia las matemáticas en la universidad. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 636). Valladolid: SEIEM.

ESTIMACIONES NUMÉRICAS APOYADAS EN REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN ALUMNADO DE SECUNDARIA

Numerical estimations on graphic representations in middle school students

Perdomo-Díaz, J., Almeida, R. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Las representaciones gráficas juegan un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas, y en particular, en el aprendizaje numérico. Los currículos de diferentes países y la investigación educativa explicitan y analizan su uso como parte del conocimiento matemático y como herramienta de apoyo a la resolución de problemas (Tunç-Pekkan, 2015). Por otra parte, en el aprendizaje numérico, realizar estimaciones es un procedimiento esencial que debe desarrollarse a lo largo de la escolaridad obligatoria, el cual presenta ciertas dificultades al alumnado de secundaria (Akkaya, 2016; Siegler y Booth, 2005).

En este trabajo se presenta un estudio con alumnado de 2.º y 4.º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en el que se abordan las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuál es el éxito del alumnado en tareas de estimación numérica apoyadas en representaciones gráficas? ¿Depende ese éxito de la representación o del tipo de número implicados en las tareas? ¿Existen diferencias significativas en cuanto al éxito entre 2.º y 4.º?

Se sigue una metodología cuantitativa a partir de un cuestionario escrito que contestaron 248 alumnos de 2.º de ESO (13-14 años) y 199 de 4.º de ESO (15-16 años) de seis centros públicos de Tenerife (España). El cuestionario contiene 10 ítems de estimación de números naturales, decimales y fracciones, a partir de las siguientes representaciones: elementos discretos, recta numérica, diagrama de barra rectangular, y diagrama de áreas circular y cuadrado. Se analiza el porcentaje de éxito global en cada ítem y se utiliza el test χ^2 para estudiar la dependencia entre las variables de éxito y de curso.

Los resultados muestran que el éxito en las tareas está condicionado por las características de la representación y la tipología de los números. Los ítems con mayor éxito son aquellos en los que se realiza una estimación: de números naturales a través de una representación de elementos discretos, y de un porcentaje a través de un diagrama de barras rectangular. Dificultad media tuvieron las representaciones de números decimales en la recta numérica y en diagramas de barra rectangulares. Por último, los peores resultados corresponden a las estimaciones a partir de las áreas circulares o cuadradas, en las que están implicadas tareas con operaciones con fracciones. En todos los ítems, el porcentaje de éxito es mayor en 4.º de ESO, siendo las diferencias estadísticamente significativas en todos los casos, excepto en aquellos ítems con mejor y peor resultado.

Agradecimiento: Trabajo financiado por el Proyecto "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de Profesores", del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad. Madrid. España. EDU2017-84276-R.

Referencias

Akkaya, R. (2016). An investigation into the number sense performance of secondary school students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies*, *4*(2), 113-123.

Siegler, R. S. y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 197-212). Nueva York, EE.UU.: Psychology Press.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419-441.

Perdomo-Díaz, J., Almeida, R. y Bruno, A. (2019). Estimaciones numéricas apoyadas en representaciones gráficas en alumnado de secundaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 637). Valladolid: SEIEM.

ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS EN PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

Multiplicative structure in kinematics problems

Pérez-Bueno, B.[a], de las Heras, M. A.[b] y Jiménez-Pérez, R.[b]

[a]Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, [b]Universidad de Huelva

Las Matemáticas están claramente integradas en el aprendizaje de la Física, sin embargo, numerosas investigaciones, como la de Redish y Kuo (2015), muestran las dificultades que encuentran los alumnos en utilizar representaciones semióticas de los fenómenos naturales. La atomización en la enseñanza de dichas disciplinas junto con las distintas formas de interpretar las expresiones algebraicas no ayuda a superar dichos obstáculos. Otra de las causas, tal y como señalan Romero y Rodríguez (2003), es la concepción que se tiene en muchos casos de las Matemáticas, entendidas un simple adiestramiento en el uso de algoritmos aplicables a las Ciencias. Es necesario dar un nuevo enfoque considerando que, más que una relación de aplicación, existe una relación de constitución. Es decir, matematizar un fenómeno requiere construir las magnitudes y sus relaciones para poder representarlo y cuantificarlo.

El objetivo fue, por tanto, comprobar en qué medida 50 estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM) aprovechan los formalismos matemáticos aprendidos, en particular las estructuras multiplicativas, para describir, comprender y cuantificar fenómenos físicos relacionados con la cinemática.

Se recurrió a un cuestionario compuesto por tres problemas de estructura multiplicativa de una sola etapa de multiplicación, división reparto y división medida. Otros dos de proporcionalidad, uno directo y otro inverso, caracterizados por ser de dos etapas utilizando las estructuras multiplicativas anteriores. Y, por último, dos problemas de cinemática, uno multiplicativo de división medida y el otro de proporcionalidad directa.

Analizando únicamente cuatro de los siete problemas propuestos, un 97% de los EPM participantes fueron capaces de contestar tanto al problema de división medida como al de proporcionalidad directa. Si comparamos estos datos con el porcentaje de alumnos que sí dieron respuesta a los problemas análogos, pero con magnitudes relacionadas con la cinemática, vemos un descenso al 68% ante el problema similar al primero y a un 58% con el otro. Por otro lado, el 100% de los alumnos que contestaron al primero lo ha hecho mediante una división medida y/o con registros de representación pictográfico. Sin embargo, en los otros tres problemas, aproximadamente el 50% de los alumnos ha hecho uso de reglas de tres. Como conclusión, se puede observar que una gran parte de los EPM son capaces de resolver problemas de forma intuitiva, pero cuando se les plantea bajo el marco de la cinemática se produce un descenso en las producciones y recurren a estrategias de resolución claramente procedimentales como es la regla de tres.

Referencias

Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, *24*(5-6), 561-590.

Romero, A. E. y Rodríguez, L. D. (2003) La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 57-67.

Pérez-Bueno, B., de las Heras, M. A. y Jiménez-Pérez, R. (2019). Estructuras multiplicativas en problemas de cinemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 638). Valladolid: SEIEM.

REACCIONES DE LOS PROFESORES A LOS ERRORES Y ESTRATEGIAS NO PREVISTAS DE LOS ESTUDIANTES

Teachers' responses to student's errors and unexpected strategies

Pinzón, A.[a], Gómez, P.[a] y González, M. J.[b]

[a]Universidad de los Andes, [b]Universidad de Cantabria

Diversos estudios resaltan la importancia de que los formadores de profesores de matemáticas consideren cómo ayudar a los futuros profesores a interpretar y responder a los errores de los estudiantes (Son y Sinclair, 2010) y a las diferentes estrategias de solución de tareas (Son y Crespo, 2009).

El problema que abordamos en este estudio consiste en identificar y caracterizar las reacciones de profesores de matemáticas en ejercicio a los errores y estrategias no previstas de sus estudiantes, y en identificar los patrones comunes en estas reacciones. Los participantes eran 94 profesores en ejercicio de secundaria que iniciaban un programa de formación a nivel de posgrado en una universidad colombiana. La información se recolectó a través de autoinformes de una de sus clases más recientes.

Encontramos que las dos grandes categorías en las que las reacciones a los errores se organizan fueron centradas en el estudiante (33,1%) y centradas en el profesor (66,9%). En la primera de estas categorías, encontramos dos grandes grupos de reacciones, aquellas relacionadas con hacer preguntas a los estudiantes (8,9%) y aquellas en las que se le propone realizar algo (24,2%). Las reacciones a los errores centradas en el profesor son de orden conceptual (46,8%), de orden procedimental (18,5%) y relacionadas con la evaluación (1,6%). En las reacciones a las estrategias no previstas, el 33,3% están centradas en los estudiantes y el 66,7% en el profesor. De estas últimas, 15,9% son de orden conceptual, 7,2% de orden procedimental, 13% relacionadas con la evaluación, 11,6% de aceptación, 1,4% de corrección y 17,4% de validación.

Al comparar las reacciones a los errores y a las estrategias no previstas, destaca la igualdad de proporciones en las reacciones centradas en el estudiante (33,1% y 33,3%, respectivamente) y en las reacciones centradas en el profesor (66,9% y 66,7%, respectivamente). En las reacciones centradas en el profesor, observamos que el porcentaje de reacciones del orden conceptual (46,8% —errores— y 15,9% —estrategias—, respectivamente) son un poco más del doble de las reacciones de orden procedimental (18,5% y 7,2%, respectivamente) en ambos estímulos.

Estos resultados evidencian una tendencia en este grupo de profesores a reaccionar a los errores y estrategias no previstas de un modo centrado en el profesor. En particular, este grupo de profesores centraron sus respuestas en las explicaciones y justificaciones del profesor y limitaron las oportunidades para que los estudiantes discutieran sus errores y estrategias. Un aporte de este estudio consiste en poner en evidencia que, al contrario de lo argumentado por Son y Crespo (2009), estas reacciones de los profesores a errores y estrategias no previstas no difieren si se trata de profesores en formación o de profesores en ejercicio.

Referencias

Son, J-W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 235-261.

Son, J-W. y Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics, 110*(1), 31-46.

Pinzón, A., Gómez, P. y González, M. J. (2019). Reacciones de los profesores a los errores y estrategias no previstas de los estudiantes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 639). Valladolid: SEIEM.

TENSIONES EN LAS CONCEPCIONES DE PROFESORES CHILENOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO SELECCIONAN PROBLEMAS

Tensions in Chilean primary teachers conceptions' when selecting problems

Piñeiro, J. L.[a] y Vásquez, C.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Pontificia Universidad Católica de Chile

La resolución de problemas (de ahora en adelante, RP) es considerada central en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares (Castro, 2008). No obstante, su enseñanza resulta un desafío para los profesores de Educación Primaria. Uno de los factores señalados como responsables han sido las concepciones que manifiestan estos profesores sobre el proceso de resolución de problemas, en las que la RP se valora y se relaciona con el desarrollo del pensamiento, pero al mismo tiempo se procedimentaliza en su enseñanza. Una causa de esto puede deberse a las tensiones que se generan cuando se enfrenta a actividades de RP (Perdomo-Díaz, Rojas y Felmer, 2018). Esto sugiere que también emergen tensiones en la selección que los profesores realicen de las tareas planteadas como problemas. En este contexto, desde las perspectivas teóricas propuestas por Chapman (2009), sobre las concepciones, y por Berry (2007), sobre las tensiones en el actuar docente, este trabajo explora las concepciones en los criterios de selección de problemas de 22 profesores de primaria y las tensiones presentes en ellas. Los resultados permiten dar cuenta de tensiones en las concepciones de problemas y relacionar éstas con sus criterios para seleccionar problemas. Un primer hallazgo tiene relación con que los participantes muestran concepciones objetivistas, utilitaristas y humanísticas sobre los problemas, en el sentido de Chapman (2009). Respecto a las tensiones en sus concepciones, detectamos que en las concepciones existen tensiones en las dualidades Decir/Crecer y Seguridad/Desafío planteadas por Berry (2007). Concretamente, la primera se hace evidente cuando responden que los problemas deben ser desafiantes y al mismo tiempo plantean que los problemas deben ser claros, tener toda la información necesaria y ser solucionables siguiendo pasos procedimentalizados. Respecto a la segunda, se relaciona con la idea de que los problemas son tareas complejas donde el estudiante debe poner en juego más que un procedimiento o construir el procedimiento. Sin embargo, al mismo tiempo se evidencian ideas relativas a tareas procedimentales (lenguaje claro, aplicación de un algoritmo). Además detectamos dos tensiones que no se ajustan al marco de Berry (2007). Una se refiere al papel que otorgan a la RP como algo importante para desempeñarse en la sociedad, pero al mismo tiempo solo seleccionan problemas en los que se deban aplicar algoritmos. La segunda surge entre su idea de que la RP promueve el pensamiento y la selección realizada ajustándose al currículo. Concluimos que estos resultados ponen de manifiesto los conflictos de los profesores chilenos, que pueden iluminar programas de formación continua.

Referencias

Berry, A. (2007). *Tensions in Teaching about Teaching: Understanding Practice as a Teacher Educator*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.

Chapman, O. (2009). Teachers' conceptions and use of mathematical contextual problems in Canada. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.) *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 227-244). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Perdomo-Díaz, J., Rojas, C. y Felmer, P. L. (2018). La resolución de problemas como estrategia de desarrollo profesional docente: tensiones que se generan en el profesor. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 101-122.

Piñeiro, J. L. y Vásquez, C. (2019). Tensiones en las concepciones de profesores chilenos de Educación Primaria cuando seleccionan problemas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 640). Valladolid: SEIEM.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI EN 3 DIMENSIONES

Fermi's problem solving strategies in 3 dimensions

Pla-Castells, M. y Segura, C.

Universitat de València

Los problemas de Fermi son un ejemplo de tareas de modelización en las que el punto de partida para obtener el resultado de dicha tarea es una estimación que requiere de la creación de un modelo matemático que simplifique la situación planteada (Albarracín, Ferrando y Boliart, 2017). Se considera, por tanto, que este tipo de tareas son actividades que promueven el proceso de modelización matemática ya que los alumnos deben estudiar un fenómeno real utilizando conceptos y procedimientos matemáticos. Al analizar el proceso de resolución de los problemas de Fermi, se observa que los alumnos utilizan estrategias que se pueden aplicar a la realidad o a contextos dados y que, además, estos modelos y las soluciones que se extraen de ellos se pueden generalizar e interpretar en otros contextos (Doerr y English, 2003).

Siguiendo esta idea, en este trabajo se expone un estudio exploratorio basado en el análisis cualitativo de las estrategias producidas por estudiantes de tercer curso del grado de Maestro de Educación Primaria al resolver diferentes problemas de Fermi consistentes en estimar el número de elementos en un volumen determinado. Basándonos en los trabajos anteriores de Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió (2017), donde se analizan y clasifican las estrategias identificadas en la resolución de problemas de Fermi en superficies acotadas, el presente trabajo pretende analizar si esta clasificación es extrapolable a problemas donde se trabaja con medidas de volumen. Además, se realiza un análisis descriptivo de los diferentes modelos y estrategias producidos dependiendo de la forma de los elementos y el tamaño relativo de los elementos en relación con el tamaño del volumen (no tendremos en cuenta la forma del sólido que contiene a los elementos, ya que se trata de un estudio exploratorio y por ello hemos decidido fijar esa variable). Por otro lado, se realiza un análisis comparativo con los resultados obtenidos en la resolución de problemas de Fermi en superficies acotadas.

Los resultados muestran que las estrategias de los estudiantes en problemas tridimensionales se corresponden con las encontradas en la literatura cuando se trabajan problemas bidimensionales y que, además, la forma de los elementos y su tamaño relativo también condiciona dichas estrategias tal y como pasa cuando se trata de superficies acotadas.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE)

Referencias

Albarracín, L., Ferrando I. y Boliart, J. (2017). Estudio de los modelos matemáticos producidos por alumnos de enseñanza obligatoria al resolver un problema de Fermi. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 109-118). Zaragoza: SEIEM.

Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema, 31*(57), 220-242.

Pla-Castells, M. y Segura, C. (2019). Estrategias de resolución de problemas de Fermi en 3 dimensiones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 641). Valladolid: SEIEM.

ESTRATEGIAS DE GENERALIZACIÓN CERCANA Y LEJANA EN NIÑOS DE 6 Y 7 AÑOS

Near and far generalization strategies in 6- and 7-year-old children

Polo-Blanco, I. y Goni-Cervera, J.

Universidad de Cantabria

La propuesta *early algebra* apuesta por introducir el pensamiento algebraico en los primeros años de escolarización obligatoria (Cañadas y Molina, 2016). En particular, la generalización de patrones y regularidades para describir relaciones funcionales es una manera en la que los estudiantes desarrollan su pensamiento funcional. Este es uno de los contenidos fundamentales en las orientaciones curriculares de matemáticas, por lo que es especialmente importante proporcionar a los estudiantes oportunidades para desarrollar este tipo de pensamiento desde edades tempranas.

Teniendo como referencia el contexto anterior, esta investigación tiene como objetivo estudiar las estrategias de generalización que manifiestan seis niños de 6 y 7 años de un colegio público de Inglaterra durante la resolución de una tarea de un patrón geométrico. Dicha tarea involucra una relación funcional del tipo $P = 4+3\cdot N$ donde P es el número de paredes y N el número de clases de una escuela. Se ha adaptado la clasificación de estrategias de generalización cercana y lejana de los trabajos de Barbosa (2010) y Lannin, Barker y Townsend (2006). En particular, se distinguen las estrategias: (1) *recursiva R1* (si cuentan los elementos apoyándose en el patrón), (2) *recursiva R2* (si continúan la secuencia añadiendo la diferencia entre términos consecutivos), (3) *recursiva R3* (si explicitan la relación recursiva entre términos consecutivos en una regla general), (4) *múltiplo de la diferencia D* (si emplean la diferencia entre términos consecutivos como factor multiplicativo), (5) *multiplicativa M* (si aplican un razonamiento proporcional) y (6) *correspondencia C* (si expresan una relación entre cantidades variables para términos lejanos).

La estrategia más frecuente en generalización cercana fue la recursiva *R2*, seguida de la estrategia *R1*, manifestándose en una ocasión una estrategia de tipo múltiplo de la diferencia *D*. En las preguntas de generalización lejana la estrategia más frecuente fue también la *R2* aunque aparecen nuevas estrategias más avanzadas de tipo múltiplo de la diferencia *D* y correspondencia *C*. Los resultados aportan información sobre la manera en que niños de 6 y 7 años se aproximan a la generalización, y coinciden con resultados de trabajos anteriores en que desde edades tempranas son capaces de usar una variedad de estrategias para resolver problemas que involucran relaciones funcionales.

Agradecimientos: Trabajo financiado por el Proyecto: "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores". Ministerio Economía, Industria y Competitividad (EDU2017-84276-R).

Referencias

Barbosa, A. C. C. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico* (Tesis doctoral no publicada). Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada: Comares.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Polo-Blanco, I. y Goni-Cervera, J. (2019). Estrategias de generalización cercana y lejana en niños de 6 y 7 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 642). Valladolid: SEIEM.

ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS NUMÉRICAS TEMPRANAS POR UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

Acquisition of early numerical competencies by a student with autism spectrum disorder

Polo-Blanco, I. y González, E. M.

Universidad de Cantabria

Diversos estudios ponen de manifiesto la importancia que las competencias numéricas tempranas tienen en el aprendizaje posterior de las matemáticas (Ortiz-Padilla, 2009). En el caso de estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA), distintos trabajos han mostrado deficiencias en la adquisición de estas competencias, en particular, en el conteo, comparación de cantidades, estimación y operaciones aritméticas (Titeca, Roeyers, Ceulemans y Desoete, 2015).

Se presenta un estudio de caso en torno a la enseñanza de competencias numéricas tempranas a un estudiante diagnosticado con TEA de 10 años de edad con dificultades en matemáticas. En particular, se plantea: (1) Identificar las estrategias de comparación entre magnitudes y de suma, así como los errores de conteo que manifiesta en la representación de cantidades; y (2) Determinar en qué medida una instrucción basada en el uso de material manipulativo y lenguaje aumentativo ayuda en la adquisición de estas competencias.

Se ha llevado a cabo un estudio de caso único mediante un enfoque microgenético con el fin de establecer una relación funcional entre la instrucción y la adquisición de competencias numéricas. Los datos fueron recogidos a través de tres pretests, nueve sesiones de instrucción y un postest. El estudiante manifestó al comienzo diferentes errores de conteo en la representación de las cantidades. Durante la instrucción, se observó un incremento notable de aciertos en la comparación de cantidades, que el estudiante llevó a cabo mediante distintas estrategias (comparación simbólica, emparejamiento y percepción directa). Además, el estudiante adquirió la estrategia "sumar desde el sumando mayor" durante la instrucción y la mantuvo hasta el final de la experiencia.

Los resultados muestran una mejora en el estudiante en la ejecución de las estrategias de conteo, comparación y suma, y arrojan información sobre cómo fomentar la adquisición de estas competencias numéricas tempranas en niños con TEA, con el fin de ayudarles a avanzar en el aprendizaje de posteriores conceptos matemáticos.

Agradecimientos: Trabajo financiado por el Proyecto: "Resolución de problemas matemáticos en población TEA: un estudio de casos y controles" financiado por la Universidad de Cantabria, la Sociedad para el Desarrollo Regional de Cantabria (SODERCAN) y el Programa Operativo FEDER.

Referencias

Ortiz-Padilla, M. E. (2009) Competencia matemática en niños en edad prescolar. *Psicogente, 12*(22), 390-406.

Titeca, D., Roeyers, H., Ceulemans, A. y Desoete, A. (2015). Early numerical competencies in 5- and 6-year-old children with autism spectrum disorder, *Early Education and Development, 26*(7), 1012-1034.

Polo-Blanco, I. y González, E. M. (2019). Adquisición de competencias numéricas tempranas por un estudiante con trastorno del espectro autista. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 643). Valladolid: SEIEM.

INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS DE CAMBIO EN UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

Schema-based instruction in the resolution of additive change problems by a student with autism spectrum disorder

Polo-Blanco, I.[a], Van Vaerenbergh, S.[a], Bruno, A.[b] y González, M. J.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna

Recientemente ha crecido el interés por la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje, poniendo algunos de ellos el foco en estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA). Entre las metodologías de enseñanza seguidas destaca la Instrucción Basada en Esquemas (SBI, por sus siglas en inglés), que utiliza esquemas visuales para la enseñanza de problemas aritméticos verbales (Rockwell, Griffin y Jones, 2011).

En esta investigación se aborda la resolución de problemas de cambio de suma y resta de un estudiante con TEA de 13 años. Teniendo como marco de referencia el modelo de la situación propuesto por Verschaffel, Greer y De Corte (2000), y siguiendo una instrucción SBI, se plantean las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿En qué medida ayuda la instrucción SBI en la resolución de problemas de suma y resta en un estudiante con TEA?, (2) ¿Cómo afecta esta instrucción al tipo de estrategias (asociadas al modelo de la situación o al matemático) que el estudiante utiliza?, y (3) ¿Generaliza el estudiante lo aprendido a problemas de dos etapas? y (4) ¿Se mantiene lo adquirido en el tiempo?

En el estudio se ha seguido una metodología de caso único y diseño de línea base múltiple para establecer una relación funcional entre la instrucción y el rendimiento en la resolución de problemas de estructura aditiva de cambio. Los resultados indican que la metodología SBI ha sido efectiva en la resolución de este tipo de problemas, y se observa una clara evolución de estrategias hacia el modelo matemático (Verschaffel et al., 2000). Se plantea la necesidad de profundizar en el aprendizaje de otras operaciones siguiendo una metodología similar en estudiantes con este trastorno.

Agradecimientos

Trabajo financiado parcialmente por la Universidad de Cantabria, la Sociedad para el Desarrollo Regional de Cantabria (SODERCAN) y el Programa Operativo FEDER y por el Ministerio Economía, Industria y Competitividad (proyecto EDU2017-84276-R).

Referencias

Rockwell, S. B., Griffin, C. C. y Jones, H. A. (2011). Schema-Based strategy instruction in mathematics and the word problem-solving performance of a student with autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *26*(2), 87-95.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Países Bajos: Swets & Zeitlinger.

Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A. y González, M. J. (2019). Instrucción basada en esquemas en la resolución de problemas aditivos de cambio en un estudiante con trastorno del espectro autista. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 644). Valladolid: SEIEM.

INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN CONJUNTA DE PROBLEMAS AUTÉNTICOS

Teacher-student interaction in joint authentic problem solving

Ramos, M., Muñoz, N. y Sánchez-Barbero, B.

Universidad de Salamanca

La Educación Matemática se ha interesado por la interacción que se genera en el aula cuando maestro y alumnos resuelven conjuntamente problemas rutinarios y no rutinarios en aulas de Primaria. Los estudios concluyen un escaso razonamiento en la resolución de problemas tanto rutinarios como no rutinarios (Rosales, Vicente, Chamoso, Muñez y Orrantia, 2012; Sánchez, Ramos, Chamoso, Vicente y Rosales, 2016). Sin embargo, poco se sabe de qué es lo que ocurre cuando profesor y alumnos resuelven problemas auténticos, entendidos como problemas que "representan alguna situación de la vida real de manera que aspectos importantes de esa situación se simulan en un grado razonable" (Palm, 2008, p. 40).

Este estudio pretende analizar la interacción cuando un profesor y sus alumnos resuelven de manera conjunta un problema rutinario y uno auténtico. Para ello, se seleccionó un maestro de sexto de Educación Primaria que aceptó ser grabado en audio durante la resolución de los problemas. Se transcribieron las interacciones, se dividieron en ciclos (Wells, 1999) y se categorizaron según los procesos promovidos en la interacción, considerando únicamente selección e integración (más detalle en Sánchez-Barbero, Ramos, Chamoso, Vicente, Rosales y Rodríguez, 2017).

Los resultados obtenidos muestran que existe un porcentaje de ciclos superior de selección en el problema rutinario que en el auténtico (80% vs. 57,14%, respectivamente), mientras que la integración en el problema rutinario es inexistente a diferencia que en el problema auténtico (0% vs. 42,86%, respectivamente). A pesar de ser un estudio de caso, este trabajo abre futuras líneas de investigación como la resolución conjunta de problemas auténticos en diferentes niveles educativos. Además, sería recomendable ampliar la muestra pues si estos datos se corroboran, podría tener implicaciones educativas si lo que se quiere es promover el razonamiento en las aulas.

Agradecimiento: Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019 bajo el proyecto SA050G19.

Referencias

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*(8), 1185-1195.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2016). Interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente un problema de diferentes dominios cognitivos en aulas de Primaria: procesos que se promueven. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 637). Málaga: SEIEM.

Sánchez-Barbero, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S., Rosales, J. y Rodríguez M. M. (2017). Una herramienta para analizar los procesos que se promueven entre el profesor y los alumnos al resolver tareas matemáticas en el aula. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 217-221). Madrid: CIBEM.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

DESARROLLO DE LA ARGUMENTACIÓN DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Development of the argumentation of probabilistic reasoning in secondary students

Retamal, L. y Alvarado, H.

Universidad Católica de la Santísima Concepción

Por lo general, los estudiantes de secundaria no han sido confrontados a una enseñanza de la probabilidad que valore e integre creativamente las intuiciones probabilísticas. Esta falta de atención contradice el papel potencialmente influyente del significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018). Algunos investigadores aconsejan que, para el aprendizaje de este tema, los sujetos deben tener la oportunidad de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). El marco conceptual considera los significados de la probabilidad en la enseñanza y el razonamiento probabilístico. El objetivo de trabajo fue evaluar y desarrollar el razonamiento probabilístico en estudiantes de secundaria, mediante la argumentación que hacen cuando realizan un ciclo formativo de probabilidades, al incorporar elementos mediacionales en el proceso inicial de aprendizaje estocástico. Intentamos indagar en ¿Cómo los estudiantes asignan valores a situaciones de incertidumbre desde sus intuiciones probabilísticas? y ¿Qué argumentos utilizan respecto a sus intuiciones y heurísticas después del taller? (Proyecto Ciede 032017).

Participaron 51 estudiantes de dos niveles de secundaria, de entre 16 y 17 años, destacados en su establecimiento con habilidades en matemática y pertenecientes a 10 establecimientos educacionales. El diseño de la secuencia de aprendizaje consideró cinco sesiones, cada una de cuatro horas, con planteamiento de situaciones cotidianas, manipulación de generadores aleatorios típicos y uso de la simulación mediante Excel. Se aplicó un cuestionario de 11 ítems cerrados al inicio del taller y diez ítems abiertos al final del ciclo. Los ítems evaluaban intuiciones, heurísticas y conocimientos de probabilidad. En los primeros se propuso a los estudiantes evaluar en escala ordinal de 10 en 10 para estimar su grado de creencias sobre probabilidades, dentro de un rango de 0 a 100, ítems elaborados por los autores y de Tversky y Kahneman (1972). Los ítems abiertos demandaron resolución y argumentación, indagando en la heurística de la representatividad, probabilidad condicional y el modelo binomial. Los resultados indican que las intuiciones son variadas y mejoran tras participar en el taller, siendo mejor en estudiantes de 17 años. También mejoraron en los conocimientos de probabilidad, aunque hubo confusión entre la probabilidad condicional y regla de la multiplicación, y errores en el desarrollo del modelo binomial. Convenimos incluir en la enseñanza los distintos significados de la probabilidad con comprensión, y desarrollar un pensamiento probabilístico útil al ciudadano.

Referencias

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *RELIME*, *21*(2), 131-156.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 15-37). Nueva York, EE.UU.: Springer.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*(3), 430-454.

Retamal, L. y Alvarado, H. (2019). Desarrollo de la argumentación del razonamiento probabilístico en estudiantes de secundaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 646). Valladolid: SEIEM.

VÍDEOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ALUMNADO DE ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

Problem solving videos to gifted students

Ribera, J. M. y Rotger, L.

Universidad de La Rioja

Los estudiantes con altas capacidades matemáticas no solo muestran interés por el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos, sino que también suelen participar en diferentes competiciones matemáticas. La deslocalización del estudiantado con altas capacidades hace necesaria la creación de materiales accesibles desde sus hogares como pueden ser los vídeos educativos. El uso de los vídeos cortos con intereses instructivos por parte del estudiantado ha aumentado en los últimos años (Howard, Meehan y Parnell, 2017). Son los propios estudiantes quienes consideran muy valioso el contenido en vídeo online como material complementario para el aprendizaje en matemáticas (Trenholm, Alcock y Robinson, 2012). Pero, como recientemente han analizado Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos (2018), existe un gran número de errores de procedimiento en los vídeos educativos de matemáticas. Es por ello por lo que consideramos necesaria la creación de contenido educativo en vídeo para la docencia en matemáticas revisado y analizado.

Con el objetivo de poner a disposición de estos estudiantes un material para la preparación en la resolución de problemas matemáticos, cada uno de los docentes del proyecto hemos creado una secuencia de vídeos formativos. Cada una de estas secuencias muestra una destreza clásica de resolución de problemas olímpicos en matemáticas, a saber: principio del palomar, inducción matemática, aritmética modular, polinomios, ecuaciones funcionales, potencia de un punto, teoremas de Ceva y Menelao, entre otras. La planificación, grabación, edición y distribución de las secuencias de vídeo la hemos realizado siguiendo las recomendaciones expuestas en Rotger y Ribera (2019).

En este póster presentamos un análisis de las diferentes estrategias metodológicas para la creación de contenido docente en vídeo seguidas por los docentes del proyecto, que forma parte de una investigación más amplia que contempla, entre otros objetivos, estudiar las relaciones, reglas y argumentos usados por los integrantes del proyecto en sus grabaciones. Realizamos el estudio a partir de un total de diez secuencias de un mínimo de cuatro vídeos cortos en los que se utilizan diferentes estrategias para la grabación de contenido como el uso de pizarra, materiales manipulativos o la grabación de pantalla. Como resultado, encontramos, por parte de los docentes, una clara preferencia de creación de material educativo en vídeo similar a su docencia presencial.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics / Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación*, *30*(4), 633–662.

Howard, E., Meehan, M. y Parnell, A. (2017). Live lectures or online videos: students' resource choices in a first-year university mathematics module. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(4), 530–553.

Rotger L. y Ribera J. M. (2019). Designing a video course. The case of the online course of mathematical olympiads. En L. Uden, D. Liberona, G. Sanchez y S. Rodríguez-González (Eds.), *Learning Technology for Education Challenges. 8th International Workshop LTEC 2019* (pp. 79-89). Cham, Suiza: Springer.

Trenholm, S., Alcock, L. y Robinson, C. L. (2012). Mathematics lecturing in the digital age. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(6), 703–716.

Ribera, J. M. y Rotger, L. (2019). Vídeos de resolución de problemas para alumnado de altas capacidades matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 647). Valladolid: SEIEM.

DEFINICIÓN Y VALIDACIÓN EMPÍRICA DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR LAS CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Definition and empirical validation of an instrument for measuring conceptions about teaching and learning mathematics

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, A.

Universidad de Oviedo

Las concepciones acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje han sido señaladas a menudo en la literatura como un elemento de gran influencia en la caracterización del conocimiento del profesorado de matemáticas. Algunos autores asumen una distinción explícita entre conocimiento y creencias (Thompson, 1984), aunque también se señala la dificultad de separar creencias y concepciones (Contreras, 1999). El instrumento CEAM (*Concepciones sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*) fue desarrollado por Climent (2005) con el fin de evaluar estas concepciones en futuro profesorado de Primaria, respetando la identificación de cuatro perfiles dominantes: tradicional, tecnológico, espontaneísta e investigativo.

El objetivo de este trabajo es medir estas concepciones en alumnado universitario. Algunos de estos alumnos pueden llegar a convertirse en profesores de matemáticas, pero no tienen por qué tener, a priori, un perfil docente. Por ello, se modificó el instrumento CEAM, ya que no era aplicable en su formato original a sujetos que no se corresponden con este perfil. En consecuencia, nuestro trabajo ha consistido en definir una adaptación del CEAM para que pueda ser utilizado en la evaluación de las concepciones de alumnado universitario en general.

Los resultados que presentamos son el fruto de la validación de este cuestionario en una muestra intencional no aleatoria de estudiantes universitarios distribuidos en tres grados: Educación Primaria, Matemáticas (incluyendo el doble grado de Física y Matemáticas) y Psicología. Se realizó un análisis descriptivo, un análisis de componentes principales y un análisis de conglomerados. El análisis descriptivo reveló que algunos de los ítems tienen respuestas que se distribuyen de manera bastante sesgada, concitando una gran cantidad de respuestas similares. Los resultados del análisis de componentes principales no han sido concluyentes: no es posible identificar un número reducido de factores para interpretar las respuestas. Sin embargo, la irresolución de este análisis es un hecho positivo en el sentido manifestado por Carrillo (1998) de que los perfiles no deben ser entendidos como caracterizaciones extremas, sino que cada persona responde a una combinación diferente de estos cuatro perfiles dominantes. El análisis de conglomerados respalda esta postura.

Agradecimientos: Proyecto TIN2017-87600-P del Gobierno de España.

Referencias

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Climent, N. (2005). *The professional development of the Primary teacher regarding the teaching of mathematics. A case study.* Michigan, EE.UU.: Proquest Michigan University.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problema.* Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 105-127.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, A. (2019). Definición y validación empírica de un instrumento para evaluar las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 648). Valladolid: SEIEM.

EVIDENCIA DE LAS CONCEPCIONES DE FUTUROS PROFESORES SOBRE EL CONCEPTO DERIVADA

Evidence of the conceptions of future teachers about the derivative concept

Rodríguez-Nieto, C. y Rodríguez-Vásquez, F. M.

Universidad Autónoma de Guerrero

El estudio de las concepciones es esencial tanto en profesores en servicio como en futuros profesores, debido a su influencia en su formación y su práctica (Zapata y Blanco, 2007). El concepto de derivada es fundamental por su aporte al Cálculo y su uso en otras áreas del conocimiento (Dolores, 2013). En los estudiantes la dificultad para comprender conceptos de Cálculo se debe a la resolución mecánica de problemas (Artigue, 1995) y usan algoritmos que no les permiten establecer relaciones en el razonamiento (Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros y Cárcamo, 2019). Badillo (2003) menciona que a los profesores se les dificulta comprender aspectos gráficos de $f(x)$, $f(a)$ y $f'(x)$, confundiendo la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$. Pino-Fan, Godino y Font (2018) aseguran que algunos futuros maestros presentan inconvenientes para conectar definiciones de la derivada, y no pueden asociarla con significados como la tasa de cambio cuando la recta tangente es paralela al eje x. Con base en la literatura, esta investigación reporta las evidencias de las concepciones de futuros profesores sobre el concepto derivada y su influencia en la resolución de problemas.

En este trabajo entendemos a las concepciones como las "ideas, opiniones o juicios que forman parte del pensamiento. Son una estructura mental general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares" (Thompson, 1992, p. 130). Las concepciones alternativas son inconsistentes con lo que la comunidad matemática acepta como correcto y socialmente compartido (García-García, 2018). Los datos se obtuvieron por medio de una entrevista basada en tareas y un instrumento con cinco tareas aplicado a dos futuros profesores de matemáticas. Los resultados muestran que los futuros profesores conciben la derivada como la pendiente de la recta tangente y como el límite del cociente incremental. Sin embargo, al momento de resolver problemas, un profesor presenta dificultades para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función, por sus concepciones alternativas asociadas a la derivada.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México, D. F., México: Díaz de Santos.

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Cárcamo, A. (2019). The understanding of the derivative concept in higher education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1-15.

García-García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario* (Tesis doctoral no publicada). UAGro, Chilpancingo, México.

Pino-Fan, L., Godino, J, D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nueva York, EE.UU.: MacMillan.

Zapata, M. y Blanco, L. J. (2007). Las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje de los profesores de matemáticas en formación. *Campo Abierto, 26*(2), 83-108.

Rodríguez-Nieto, C. y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2019). Evidencia de las concepciones de futuros profesores sobre el concepto derivada. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 649). Valladolid: SEIEM.

INTRODUCCIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL MEDIANTE ACTIVIDADES DESENCHUFADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Introduction of Computational Thinking through unplugged activities in mathematical problem-solving

Ros-Esteve, M.[a], López-Iñesta, E.[b] y Diago, P. D.[b]

[a]Colegio La Encarnación (València), [b]Universitat de València

Desde una perspectiva curricular, la resolución de problemas ha de constituir uno de los elementos centrales de la enseñanza de las matemáticas a adquirir durante la etapa de Educación Secundaria, tal y como establece el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Muchas de las estrategias asociadas a la resolución de problemas como la descomposición, el razonamiento lógico o el diseño de algoritmos están presentes en el denominado Pensamiento Computacional (PC): el proceso mental utilizado para formular problemas y sus soluciones llevadas a cabo por un agente que procese información ya sea este un humano o un ordenador (Wing, 2006). Así pues, es posible encontrar en el PC un punto de partida con el que potenciar la competencia en resolución de problemas matemáticos. De hecho, en los últimos años han surgido numerosos estudios mostrando que el PC puede tener importantes repercusiones en el desarrollo de competencias de razonamiento lógico y de resolución de problemas en distintas etapas educativas (Diago, Arnau y González-Calero, 2018; Moreno-León, Robles y Román-González, 2017).

Es por ello, que en el presente trabajo se exponen los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con 56 estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria que indaga en las bondades de una metodología de enseñanza basada en la introducción del PC como herramienta para la resolución de problemas de matemáticas empleando exclusivamente actividades desenchufadas (Brackmann, Román-González, Robles, Moreno-León, Casali y Barone, 2017), es decir, desvinculadas de cualquier entorno tecnológico.

El análisis preliminar de los datos indica que la integración del PC contribuye positivamente en la motivación hacia el aprendizaje y estudio de las Matemáticas. Asimismo, la inclusión de actividades desenchufadas mejora la efectividad del alumnado en el proceso de adquisición de competencias de resolución de problemas y desarrollo del razonamiento lógico.

Agradecimientos: Investigación financiada por el proyecto de innovación educativa UV-SFPIE_GER18-848319 y por el proyecto GV/2019/146.

Referencias

Brackmann, C. P., Román-González, M., Robles, G., Moreno-León, J., Casali, A. y Barone, D. (2017). Development of computational thinking skills through unplugged activities in Primary School. En E. Barendsen y P. Hubwieser (Eds.), *Proceedings of the 12th Workshop in Primary and Secondary Computing Education* (pp. 65–72). Nimega, Países Bajos: ACM.

Diago, P. D., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Elementos de resolución de problemas en primeras edades escolares con Bee-bot. *Edma 0-6, 7*(1), 12-41.

Moreno-León, J., Robles, G. y Román-Gonzalez, M. (2017). Programar para aprender en Educación Primaria y Secundaria: ¿Qué indica la evidencia empírica sobre este enfoque? *ReVisión, 10*(2), 45-51.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35.

Ros-Esteve, M., López-Iñesta, E. y Diago, P. D. (2019). Introducción de pensamiento computacional mediante actividades desenchufadas en la resolución de problemas de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 650). Valladolid: SEIEM.

TAREAS DE REPRESENTACIÓN ESPACIAL EN EL AULA DE TRES AÑOS: DETECCIÓN DE DIFICULTADES

Spatial representation tasks in the three-year classroom: detecting difficulties

Salgado, M.[a], Berciano, A.[b] y Jiménez-Gestal, C.[c]

[a]Universidad de Santiago de Compostela, [b]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [c]Universidad de La Rioja

La orientación espacial y la capacidad para comunicar la posición de los objetos en el entorno son dos de los aspectos de la competencia matemática que se deben favorecer desde las primeras etapas escolares y, en particular, en el aula de Educación Infantil.

El problema de investigación vinculado a este planteamiento es, por un lado, ver cómo realizar una primera aproximación a la representación plana del espacio por medio del uso de planos y mapas en el aula de 3 años de Educación Infantil de modo significativo y, por otro, ver las dificultades y el tipo de representación espacial que niños y niñas en estas edades pueden realizar cuando se implementan actividades dirigidas a trabajar la orientación espacial en el aula.

Así, para poder responder al primer interrogante, es claro que desde el enfoque de la educación matemática realista (Freudenthal, 1991), las actividades que planteemos en el aula deben estar contextualizadas en un entorno cercano a la persona de modo que resulten significativas y motivadoras. Así, la experiencia diseñada e implementada es el trabajo previo a una actividad de representación de mapas en el macroespacio (Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado-Somoza, 2016).

Con el fin de aproximarnos al uso de los mapas, la actividad se realiza en el mesoespacio (aula) y consta de 3 fases: 1) Representación de un lugar de la clase en un plano con objetos característicos del aula ya dibujados (cada infante marca con una cruz el lugar del aula en el que la maestra ubica un tesoro); 2) Interpretación y ubicación en el aula de objetos representados en planos; 3) Representación de recorridos del aula en el plano.

Para poder dar respuesta al segundo interrogante, se ha hecho un estudio cualitativo de las dificultades que los niños y niñas tienen en las tres fases anteriormente descritas y del tipo de representación que son capaces de hacer en cada una de ellas.

Un análisis preliminar de los resultados muestra que, en general, las dificultades más frecuentes surgen cuando se pasa del espacio a su representación plana, mientras que en el proceso inverso, esto es, de la representación simbólica al espacio, no se observan dificultades destacables.

De hecho, en una primera fase las dificultades surgen porque los niños y niñas no establecen una relación correcta entre los objetos del mesoespacio y sus representaciones planas en el mapa, mientras que en la tercera fase, a pesar de ser capaces de representar trayectorias simples (en línea recta o en forma de L), no son capaces de ubicar correctamente puntos de referencia en el plano que les ayuden a determinar con mayor precisión el recorrido descrito.

Referencias

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado-Somoza, M. (2016). Tratamiento de la orientación espacial en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. *NÚMEROS, 93*, 31-44.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Salgado, M., Berciano, A. y Jiménez-Gestal, C. (2019). Tareas de representación espacial en el aula de tres años: detección de dificultades. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 651). Valladolid: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS CUANDO RESUELVEN CONJUNTAMENTE PROBLEMAS REALISTAS EN AULAS DE SECUNDARIA

Analysis of the interaction teacher-students when solving realistic problems in secondary school classrooms

Sánchez-Barbero, B., Ciudad, J. C., Galán, E., Chamoso, J. Mª., Vicente, S., Rodríguez, Mª. M., Cáceres, Mª. J. y Salomón, Mª. S.

Universidad de Salamanca

La investigación sobre la interacción que tiene lugar cuando maestro y alumnos resuelven de forma conjunta problemas rutinarios y no rutinarios en aulas de Primaria ha mostrado que existe un escaso razonamiento y participación de los alumnos, aunque tanto el razonamiento como la participación aumentan cuando se enfrentan a problemas no rutinarios (por ejemplo, Sánchez, Ramos, Chamoso, Vicente y Rosales, 2016). Pero hay escaso conocimiento de qué ocurre cuando se resuelven problemas en aulas de Secundaria.

Este estudio pretende analizar la interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas realistas en aulas de Secundaria. Para ello, se seleccionaron dos profesores de matemáticas de Secundaria, que aceptaron ser grabados en audio mientras resolvían problemas realistas con sus alumnos en sus aulas habituales. Transcritas las interacciones, se organizaron en ciclos (Wells, 1999) y se categorizaron atendiendo a los procesos cognitivos promovidos en la interacción (Selección, S; Integración, I) y al grado de participación (Grado Alto, GA; Grado Bajo, GB; más detalle en Rosales, Vicente, Chamoso, Muñez y Orrantia, 2012).

Los resultados muestran que dos tercios del total de ciclos fueron dirigidos a procesos cognitivos de Integración (67,00%) y que hubo una mayor participación de los alumnos en ciclos de Integración (GA, 75,02%; GB, 24,98%). Estos resultados muestran que, tanto el razonamiento promovido como el grado de participación en dicho razonamiento, fue superior a los de trabajos previos en Primaria. A pesar de la escasez de la muestra y ante la escasez de trabajos previos en aulas de Secundaria en este sentido, estos resultados abren caminos para futuras investigaciones que, por ejemplo, analicen la influencia de utilizar problemas realistas en la resolución o resolver otro tipo de problemas como no rutinarios o abiertos. Si se desea que exista mayor razonamiento y participación de los alumnos en la construcción del conocimiento, estos resultados podrían tener implicaciones educativas.

Agradecimiento: Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019 bajo el proyecto SA050G19.

Referencias

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*(8), 1185-1195.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2016). Interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente un problema de diferentes dominios cognitivos en aulas de Primaria: procesos que se promueven. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 637). Málaga: SEIEM.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Sánchez-Barbero, B., Ciudad, J. C., Galán, E., Chamoso, J. Mª., Vicente, S., Rodríguez, Mª. M., Cáceres, Mª. J. y Salomón, Mª. S. (2019). Análisis de la interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas realistas en aulas de Secundaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 652). Valladolid: SEIEM.

ESTUDIO SOBRE COMPLEJIDAD-DIFICULTAD EN TAREAS CON PATRONES DE REPETICIÓN CON NIÑOS CON TEA-1

Study on complexity-difficulty in repeating pattern tasks with ASD-1 childs

Santágueda-Villanueva, M.[a], Yáñez, D. F.[b] y Diago, P. D.[b]

[a] Universitat Jaume I, [b]Universitat de València

Las tareas con patrones lineales de repetición son utilizadas en edades tempranas como actividades pre-algebraicas que permiten al estudiante desarrollar el razonamiento lógico (Kamii, Rummelsburg y Kari, 2005; Morales, Cañadas y Castro, 2017). La riqueza de las tareas radica en la combinación de las variables que se pueden introducir, lo que permite graduar la dificultad. En este sentido, se han realizado diversos estudios relacionando la dificultad introducida por el maestro y la complejidad presentada por el estudiante en 4, 5 y 6 años (Yáñez, Diago y Arnau, 2018).

Con el fin de ampliar este estudio extendiéndolo a personas con discapacidad se plantea una experiencia que forma parte de un programa de Aprendizaje Servicio en la modalidad de servicio directo. Con la aplicación de este servicio el alumnado universitario tratará de potenciar el desarrollo y aprendizaje motor de los niños y niñas con Autismo de Alto Funcionamiento (TEA-1), así como las competencias social, emocional y matemática, proporcionándoles una experiencia lúdica y divertida. El TEA-1 implica una alteración neurobiológica y conlleva una serie de dificultades, especialmente a escala social, conductual y comunicacional, cuyo grado de afectación varía entre cada persona. La competencia matemática es difícil de adquirir dado que tiene que ver con la manera en la que el niño o niña procesa la información, por lo que hay que realizar una adecuación correcta del material y de la metodología de enseñanza según las carencias detectadas. En esta línea, existen autores que defienden que la adquisición del conocimiento matemático tiene que ver con las emociones, las experiencias y las aplicaciones prácticas (Grandin y Johnson, 2006), por lo que parece interesante entender cómo las personas que presentan diversidad en la adquisición de aprendizajes, en nuestro caso el colectivo de niños/as con Autismo de Alto Funcionamiento, pueden ser objeto de nuevas formas de adquisición de la competencia matemática (Lozano, Castilla y Gómez, 2002).

En este trabajo hemos estudiado la problemática presentada por los estudiantes con TEA-1 a la hora de resolver tareas de continuación e identificación de patrones. Hemos establecido una comparativa con el estudio presentado por Yáñez, Diago y Arnau (2018) y hemos diseñado una secuencia graduada de patrones dependiendo de las características del alumno.

Referencias

Grandin, T. y Johnson, C. (2006). *Interpretar a los animales.* Barcelona: RBA Libros.

Kamii, C., Rummelsburg, J. y Kari, A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 39–50.

Lozano, M. T., Castilla, M. y Gómez, A. (2002). *Hacia el habla: Análisis de la trayectoria seguida por un niño autista en una escuela infantil*. Málaga: Aljibe.

Morales, R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, *11*(4), 233–252.

Yáñez, D., Diago, P. D. y Arnau, D. (2018). Relación entre complejidad y dificultad en tareas con patrones lineales reiterativos en estudiantes de 5 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 25,* 299-318.

Santágueda-Villanueva, M., Yáñez, D. F. y Diago, P. D. (2019). Estudio sobre complejidad-dificultad en tareas con patrones de repetición con niños con TEA-1. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 653). Valladolid: SEIEM.

“DE LO QUE QUEDA”, HACIA UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE

“What remains”, towards an Intelligent Tutorial System

Sanz, M. T.[a], Valenzuela, C.[b] y Figueras, O.[c]

[a]Universidad de Valencia, [b]Universidad de Anáhuac, [c]Cinvestav

Según Kieren (1976), las interpretaciones sobre las fracciones son diversas y producen serias dificultades en la enseñanza desde los primeros niveles educativos. Abordar estas afirmaciones sigue presente en áreas como la psicología cognitiva y la matemática educativa (ver el monográfico de *Learning and Instruction*, editado por Van Dooren, Lehtinen, y Verschaffel, 2015).

En la actualidad, existe una tendencia curricular hacia la estructuración de la enseñanza por medio de la resolución de problemas, por ser esta una herramienta cognitiva para construir conocimiento y una habilidad importante a desarrollar. En nuestro caso se apuesta por este método didáctico desde las nuevas tecnologías, en particular haciendo uso de un Sistema Tutorial Inteligente (STI) (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014).

Los autores de este documento están llevando a cabo un proyecto que versa sobre los problemas verbales con fracciones, en particular, en este póster se centra la atención en los problemas del tipo: *De una jarra se saca un tercio de agua y, después, 2/5 de lo que quedaba. Si quedan 600 litros. ¿Cuánta agua había al inicio?*

Para poder construir un STI que apoye la resolución de estos problemas, se debe llevar a cabo un análisis desde diferentes perspectivas. Tras hacer el análisis se extrajeron dos conocimientos matemáticos acerca de las fracciones que deben tener los resolutores al resolver ese tipo de problemas con lápiz y papel: la sustracción y la fracción como operador. Al trasladarlo al STI, la necesidad de ambos conocimientos varía. Para el caso de la sustracción, únicamente se debe reconocer la operación como relación entre cantidades. Pero la fracción como operador debe traducirse a la operación asociada, la multiplicación. Cabe notar que, de dichos análisis, se plantea la posible necesidad de un entorno gráfico que le permita al resolutor visualizar la situación.

Para resolver estas cuestiones se ha llevado a cabo un estudio cuantitativo, a través de una muestra de 180 estudiantes de la Ciudad de México de edades comprendidas entre 15 y 16 años. Se ha determinado que existe una relación estadísticamente significativa entre el éxito en la resolución del problema y el conocimiento matemático de la fracción como operador, pero no así con las representaciones gráficas.

Agradecimientos: El estudio descrito se ha realizado en el marco del proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2017-84377-R.

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an Intelligent Tutoring System for arithmetical problem solving. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, *7*(2), 155-164.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh y D. A. Bradbard (Eds.), *Number and Measurement. Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, EE.UU.: ERIC/SMEAC.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (Eds.) (2015). Mind the gap! Studies on the development of rational number concept, *Learning and Instruction*, *37*, 1-62.

Sanz, M. T., Valenzuela, C. y Figueras, O. (2019). “De lo que queda”, hacia un sistema tutorial inteligente. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 654). Valladolid: SEIEM.

DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA METACOGNITIVA: HACIA LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL

Developing a metacognitive tool: towards the non-linear orientation base

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J.

Universidad Autónoma de Barcelona

La base de orientación es un instrumento desarrollado por Jorba y Sanmartí (1996) en el que se sintetizan de manera lineal y subjetiva las acciones a realizar para explicar un constructo teórico, o bien, un procedimiento científico. A medida que se producen nuevos aprendizajes, la base de orientación se amplía o reestructura adaptándose al proceso de autorregulación de quien la elabora. Este instrumento se pensó inicialmente para procedimientos – teóricos y prácticos – que siguen de manera general una estructura lineal. Villalonga y Deulofeu (2017) aplicaron la base de orientación en la resolución de problemas matemáticos. Uno de los resultados de su estudio enfatizó la dificultad que supone aplicar un instrumento en formato listado a problemas matemáticos en los que se combinan y entrelazan gran diversidad de estrategias y herramientas de un modo muy subjetivo.

El objetivo del presente estudio es crear y aplicar una base de orientación en la resolución de problemas matemáticos y hallar situaciones en las que la linealidad de la base dificulte el proceso de resolución de un problema. El estudio se llevó a cabo con tres grupos de 25 alumnos de sexto de primaria, pertenecientes a tres centros del área metropolitana de Barcelona. Se seleccionaron un total de dos problemas relacionados con la numeración, el cálculo, la lógica y los patrones matemáticos. Se elaboró una rúbrica de autoevaluación que el alumnado respondió una vez finalizado cada problema, rúbrica que se guiaba por las directrices de Villalonga y Deulofeu (2015). En la primera sesión, cada grupo de alumnos creaba una base de orientación distinta a partir de la pregunta: "¿Qué pasos seguimos al resolver un problema matemático?". Una vez elaborada la base de orientación, se aplicaba al primer problema matemático y los alumnos autoevaluaban su desempeño a partir de la rúbrica. Posteriormente, se modificaba la base de orientación a partir de las aportaciones y reflexiones del alumnado y se aplicaba al segundo problema.

Nuestros resultados enfatizan que el alumnado tenía dificultades para usar la base de orientación dado su formato secuencial. Percibimos que los alumnos seguían los pasos consecutivamente y no retrocedían si encontraban alguna incorrección o incoherencia en su método. A su vez, observamos que había pasos que el alumnado realizaba en más de una ocasión, como por ejemplo releer el enunciado, y que sólo aparecía en la base a su inicio. También encontramos pasos que podían formar parte de varias fases de resolución, como por ejemplo "dibujar para comprender" o "dibujar para revisar". Así pues, nuestro estudio concluyó creando un nuevo formato de base de orientación llamada base de orientación no lineal (BONL, por sus siglas), que se adapta en mayor grado a las dificultades halladas y que continúa cumpliendo con la función autorreguladora del aprendizaje.

Referencias

Jorba, J. y Sanmartí, N. (1996*). Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación continua. Propuesta didáctica para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. Madrid: MEC.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación, una herramienta para ayudar al alumnado a resolver problemas. En FESPM (Eds.), *Actas de las 17JAEM* (p. 36). Cartagena, Murcia: SPMRM. Recuperado de: http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n68.pdf

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco." *REDIMAT, 6(3)*, 256-282.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2019). Desarrollo de una herramienta metacognitiva: hacia la base de orientación no lineal. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 655). Valladolid: SEIEM.

CREENCIAS DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Pre-service Primary Teachers' Beliefs about Mathematical Problem Solving

Van Vaerenbergh, S.

Universidad de Cantabria

Desde la década de los ochenta se vienen publicando diversos estudios sobre las creencias y concepciones de los profesores, en particular de los profesores de matemáticas (Bohórquez, 2014). Según Gilbert (1991), las creencias son proposiciones cuyo significado es representado, codificado y simbolizado en el sistema mental, y es tratado como cierto. Además, ayudan al individuo a atribuirle cierta relevancia como miembro de un grupo social. Siguiendo a Díaz, Martínez, Roa y Sanhueza (2010), las creencias pueden entenderse como un sistema en el cual subyacen constructos que el docente usa cuando piensa, evalúa, clasifica y guía su actuación pedagógica. Estas tienen gran importancia en la actuación de los docentes; y no son necesariamente coherentes, sino que más bien se consideran como dinámicas y sujetas al cambio y a la reformulación gradual.

En este trabajo nos centramos en evaluar las creencias de un grupo de 105 futuros profesores de Educación Primaria que cursan el segundo curso en el grado de magisterio de la Universidad de Cantabria. Los estudiantes que formaron parte del estudio tenían edades comprendidas entre los 19 y 42 años, siendo 61 de ellos mujeres y 44 hombres. Para identificar sus creencias sobre las matemáticas se utilizó una versión adaptada del cuestionario de Caballero (2013), que evalúa cuatro dimensiones: 1) creencias acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos y de su enseñanza y aprendizaje, 2) creencias acerca de uno mismo como resolutor de problemas matemáticos, 3) actitudes y reacciones emocionales hacia la resolución de problemas matemáticos (de ahora en adelante, RPM), y 4) valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación con la RPM.

Los resultados obtenidos muestran, en primer lugar, una gran concordancia con los resultados de Caballero (2013). Por lo tanto, nos adherimos a las conclusiones del estudio original que sugiere que la mayoría de los estudiantes ven la RPM como un proceso mecánico y memorístico, apreciándose emociones disfuncionales a la hora de enfrentarse a los mismos. En segundo lugar, la recogida de datos ha permitido llevar a cabo unos análisis de contrastes detallados. En este estudio tanto la prueba de Levene como la prueba t de Student para comparar grupos independientes desvelaron diferencias significativas respecto a la variable sexo en cuanto a aspectos como autoconfianza y ansiedad a la hora enfrentarse a la RPM.

Referencias

Bohórquez, L. Á. (2014). Las creencias vs. las concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios. En J. Asenjo, Ó. Macías y J. C. Toscano (Eds.), *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires, Argentina: OEI. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/16memorias2014.php

Caballero, A. (2013). *Diseño, aplicación y evaluación de un programa de intervención en control emocional y resolución de problemas matemáticos para maestros en formación inicial* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Extremadura, Badajoz.

Díaz, C., Martínez, P., Roa, I. y Sanhueza, M. G. (2010). Los docentes en la sociedad actual: sus creencias y cogniciones pedagógicas respecto al proceso didáctico. *Polis, 9*(25), 421-436.

Gilbert, D. T. (1991). How mental systems believe. *American Psychologist, 46*(2), 107-119.

Van Vaerenbergh, S. (2019). Creencias de los futuros maestros de Educación Primaria sobre la resolución de problemas matemáticos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 656). Valladolid: SEIEM.

LA INFLUENCIA DE LA ORGANIZACIÓN TEMPORAL DE LA INFORMACIÓN EN LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS DE CAMBIO

The influence of the temporal organization of information on the difficulty of change problems

Yáñez, D. F.[a], Diago, P. D.[a], Arnau, D.[a], Arevalillo-Herráez, M.[a] y González-Calero, J. A.[b]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

Según Puig y Cerdán (1988), el análisis global de los enunciados de los problemas verbales aditivos de una etapa ha demostrado ser un buen predictor de su dificultad. Sin embargo, una revisión de los problemas utilizados en las investigaciones que tenían este objetivo revela la existencia de otras posibles variables explicativas. Así, por ejemplo, en Riley, Greeno y Heller (1983) se emplean problemas de cambio en los que los enunciados describen la relación de sucesos en un orden temporal pasado-presente. Esta estructura temporal daba a los enunciados de los problemas de cambio 5 y 6 una sintaxis más compleja que el resto pues la primera cantidad ofrecida era, en ambos tipos de problema, desconocida. En estos tipos de problemas se conocen la cantidad final y el cambio, que se corresponde con incremento en cambio 5 y con un decremento en cambio 6, y la cantidad inicial es desconocida. Así, un ejemplo de problema de cambio 6 se enunciaría como "Joe tenía algunas canicas. Dio 5 canicas a Tom. Ahora Joe tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Joe al principio?" (p. 160). Nótese la diferencia con, por ejemplo, un problema de cambio 2, donde la primera cantidad es conocida: "Joe tenía 8 canicas. Dio 5 canicas a Tom. ¿Cuántas canicas tiene ahora Joe?" (p. 160). Esta investigación tiene, entre otros objetivos, determinar el efecto en la dificultad percibida por los estudiantes de un orden temporal distinto del enunciado. Por ejemplo, en una configuración presente-pasado para un problema de cambio 2, la primera cantidad ofrecida sería desconocida: "Joe tiene algunas canicas. Esta mañana le ha dado 5 canicas a Tom. Ayer Joe tenía 8 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Joe?". Para abordar el objetivo hemos diseñado un montaje experimental en el que estudiantes de primer y segundo curso de primaria resolverán problemas de cambio con las organizaciones temporales pasado-presente y presente-pasado. En concreto, 12 problemas de cambio (6 tipos por 2 organizaciones temporales) y 6 problemas de comparación aditiva para evitar una excesiva repetición de problemas del mismo tipo. Las colecciones de problemas se administrarán en cuatro sesiones no necesariamente consecutivas para evitar el cansancio. Para obtener una medida más fina de la dificultad del problema respecto a la conseguida cuando se resuelve en lápiz y papel, los estudiantes resolverán los problemas usando un sistema inteligente (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014).

Agradecimientos: Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto de investigación PGC2018-096463-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España.

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an Intelligent Tutoring System for arithmetical problem solving. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, *7*(2), 155-164.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking*, (pp. 153-196). Nueva York, EE.UU.: Academic Press.

Yáñez, D. F., Diago, P. D., Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. (2019). La influencia de la organización temporal de la información en la dificultad de los problemas de cambio. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 657). Valladolid: SEIEM.

ESTRATEGIAS Y DIFICULTADES EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA CON NATURALES Y FRACCIONES

Strategies and difficulties in multiplicative structure problems with natural numbers and fractions

Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

La propuesta curricular conocida con el nombre de *Early-Algebra* promueve introducir en las aulas, desde edades tempranas, la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar un pensamiento que atienda a la estructura que subyace en las matemáticas (Molina, 2009). Nuestro interés en el Early-Algebra se particulariza en el uso de un pensamiento relacional por parte de los estudiantes. Esta forma de pensar implica adquirir una comprensión del signo igual como relación de equivalencia y utilizar de forma flexible los números, las operaciones y las propiedades (Empson y Levi, 2011). La mayoría de los estudios sobre el pensamiento relacional se han centrado en el uso de igualdades numéricas (Castro y Molina, 2007), siendo escasas las investigaciones centradas en la resolución de problemas. Centrándonos en los problemas de isomorfismo de medida (multiplicación, división-medida y división-partitiva), estudios previos han identificado que el tipo de conjunto numérico utilizado puede generar dificultades a los estudiantes (De Corte, Verschaffel y Van Coillie, 1988). Sin embargo, propuestas de resolución de problemas centradas en identificar la estructura del problema y razonar sobre las relaciones establecidas entre las cantidades podrían evitar las dificultades asociadas a la no identificación del tipo de problema por el conjunto numérico utilizado.

Este estudio está centrado en analizar cómo estudiantes de 5.º y 6.º de educación primaria y 1.º y 2.º de educación secundaria resuelven problemas de isomorfismo de medidas, examinando si el nivel de éxito y las estrategias utilizadas pueden estar influenciadas por el conjunto numérico (naturales o racionales). En general, los resultados muestran que los problemas con números naturales tuvieron más éxito que los problemas del mismo tipo con fracciones unitarias o propias, obteniendo un porcentaje de éxito muy bajo, en 2.º de la ESO, en los problemas con fracciones unitarias y propias. También se muestran diferencias en el uso de estrategias atendiendo al tipo de problema.

Agradecimientos: Esta investigación ha recibido el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y de la Ayuda para Estudios de Máster Oficial e Iniciación a la Investigación con referencia AII2018-25 de la Universidad de Alicante.

Referencias

Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2), 67-94.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *7*(3), 197-216.

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals. Innovation in Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2019). Estrategias y dificultades en problemas de estructura multiplicativa con naturales y fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 658). Valladolid: SEIEM.

ÍNDICE DE AUTORES

A

Abaurrea, J. 143
Acosta, Y. 153
Adamuz-Povedano, N. 605
Aguiar-Isaia, S. M. 193
Aguilar-González, A. 648
Albarracín, L. 655
Almeida, R. 637
Alonso, P. 606
Alonso-Castaño, M. 606, 619
Alsina, Á. 153
Alvarado, H. 607, 646
Anasagasti, J. 608
Andrés, L. 630
Arce, M. 163
Arceo-Luna, A. R. 173
Arevalillo-Herráez, M. 621, 657
Ariza-Ruiz, D. 609
Arnal-Palacián, M. 610
Arnau, D. 621, 657
Arteaga, P. 263
Ayala-Altamirano, C. 183

B

Badillo, E. 233, 493
Barbosa-Bemme, L. S. 193
Barquero, B. 19, 533
Barrera-Castarnado, V. J. 611
Barreras, Á. 203
Batanero, C. 263, 423
Begué, N. 612
Beltrán-Pellicer, P. 503, 624
Berciano, A. 608, 651
Bernabeu, M. 213
Blanco, T. F. 613, 614
Bracho-López, R. 605
Breda, A. 173, 393, 543
Bruno, A. 313, 637, 644
Burgos, M. 223

C

Cáceres, Mª. J. 652
Callejo, M. L. 433, 634
Camacho-Machín, M. 323
Cañadas, M. C. 573
Caro-Torró, I. 303
Carrasco, G. 553
Carreira, S. 65
Carrillo, J. 463
Casas-Rosal, J. C. 617, 636
Castellanos-Sánchez, M. T. 615
Castillo, F. J. 353
Castro, E. 483
Castro-Rodríguez, E. 293, 483
Caviedes, S. 233
Chamoso, J. Mª. 652
Chico, J. 493
Ciudad, J. C. 652
Codes, M. 463
Conejo, L. 163
Contreras, L. C. 473, 611
Cox-Figueroa, E. 616

D

Dávila-Araiza, T. 624
De Castro, C. 243
De Gamboa, G. 233
De Las Heras, M. A. 638
Delgado-Rebolledo, R. 253
Deulofeu, J. 655
Diago, P. D. 650, 653, 657
Díaz-Levicoy, D. 263
Diego-Mantecón, J. M. 614
Díez-Palomar, J. 620

E

Espinoza-Vásquez, G. 253
Estrada, A. 503
Estrella, S. 623

F

Fernández, C. 363, 633, 658
Fernández-Ahumada, E. 273, 605
Fernández-Cézar, R. 333
Fernández-León, A. 283, 373
Fernández-Plaza, J. A. 293, 593
Ferrando, I. 43
Figueras, O. 654
Filloy, E. 513
Flores, P. 293, 615
Font, V. 173, 533, 543

Franco-Buriticá, E. 617
Franco-Guijar, M. 343

G

Galán, E. 652
Gallego-Sánchez, I. 303
García-Alonso, I. 313, 323, 618
García-Costa, D. 626
García-Díaz, A. 323
García-Honrado, I. 619
García-Mora, E. 620
García-Moreno, M. A. 621
García-Moya, M. 333
García-Olivares, A. 443
García-Pérez, M. T. 605
Garrido-Martos, R. 343
Gavilán-Izquierdo, J. M. 283, 303, 373, 635
Gea, M. M. 423, 612
Giacomone, B. 624, 628
Gil, E. 353
Godino, J. D. 223
Gómez, B. 513, 609
Gómez, P. 639
Gómezescobar, A. 333
Goni-Cervera, J. 642
González, A. 553
González, A. 622
González, E. M. 643
González, M. J. 623, 639, 644
González-Astudillo, M. T. 443, 623, 629
González-Calero, J. A. 621, 657
González-Calvín, C. 343
González-Forte, J. M. 363
González-Regaña, A. 373
González-Roel, V. 613
González-Ruiz, I. 623
González-Sequeiros, P. 613
Gorgal-Romarís, A. 613
Greefrath, G. 23
Grimaldo, F. 626
Gutiérrez-Rubio, D. 625, 627, 636

H

Hau-Yon, F. 383
Herrera-García, K. J. 624
Huerta, M. P. 630
Hummes, V. B. 393

I

Ivars, P. 658

J

Jiménez-Fanjul, N. 616, 625, 632
Jiménez-Gestal, C. 651
Jiménez-Pérez, R. 638

L

Lasa, A. 143
León-Mantero, C. 403, 617, 625, 627, 636
Liñán-García, M. M. 611
Llinares, S. 193, 213
López-Esteban, C. 95, 403
López-Iñesta, E. 626, 650
Lorenzo, E. 619
Lupiáñez, J. L. 293

M

Madrid, M. J. 403, 625, 627
Malet, O. 628
Martín, J. P. 463
Martín-Barcala, A. 629
Martín-Molina, V. 373
Martínez-Juste, S. 413
Martínez-Romero, M. 630
Martínez-Videla, M. V. 631
Maz-Machado, A. 91, 403, 616, 617, 625, 627, 632, 636
Mellone, M. 606
Molero, A. 423
Molina, M. 183
Monje, J. 633
Montejo-Gámez, J. 273
Montero, E. 433, 634
Monterrubio-Pérez, M. C. 443
Montes, M. 473
Montoro, A. B. 353
Morand, Z. C. 343
Moreno, A. 573, 615
Moreno, M. 213, 563
Muñiz-Rodríguez, L. 619, 648
Muñoz, N. 645
Muñoz-Catalán, M. C. 611
Muñoz-Escolano, J. M. 413, 622

N

Ngonde-Ernesto, L. 635
Nortes-Checa, A. 453
Nortes-Martínez-Artero, R. 453
Núñez-García, C. 613

O

Oller-Marcén, A. M. 203, 413, 622
Ortiz-Laso, Z. 614

P

Páez, D. A. 173
Palop, B. 243
Pascual, M. I. 463, 473
Pedrosa-Jesús, C. 636
Perdomo-Díaz, J. 523, 631, 637
Pérez-Bueno, B. 638
Pérez-Tyteca, P. 633
Piedra, R. 632
Pinzón A. 639
Piñeiro, J. L. 483, 640
Pla-Castells, M. 641
Planas, N. 493
Polo-Blanco, I. 642, 643, 644
Puig, L. 117

R

Ramos, M. 645
Repetto, A. 628
Retamal, L. 607, 646
Ribera, J. M. 647
Ricart, M. 503
Rico, L. 293
Rodríguez, M. L. 513
Rodríguez, Mª. M. 652
Rodríguez-Barrueco, M. J. 443
Rodríguez-Cisneros, L. 523
Rodríguez-Cornejo, P. 443
Rodríguez-Muñiz, L. J. 606, 648
Rodríguez-Nieto, C. 649
Rodríguez-Vásquez, F. M. 649
Ros-Esteve, M. 650
Rotger, L. 647
Ruiz-Hidalgo, J. F. 293, 593
Ruiz-Rodríguez, L. 343

S

Sala, G. 583
Salgado, M. 613, 651
Salinas-Portugal, M. J. 613
Salomón, Mª. S. 652
Sánchez, A. 543
Sánchez, E. 553
Sánchez, M. 553
Sánchez-Barbero, B. 645, 652
Sánchez-Matamoros, G. 563
Santágueda-Villanueva, M. 653
Sanz, M. T. 654
Schubring, G. 131
Scremin, G. 193
Seckel, M. J. 393
Segovia, I. 293
Segura, C. 641
Sosa-Martín, D. N. 618
Subinas, A. 608

T

Torregrosa, A. 655
Torres, M. D. 573
Toscano, R. 373

U

Ubilla, F. 583

V

Valenzuela, C. 654
Valls, J. 193, 563
Valverde, C. 632
Van Dooren, W. 363
Van Hoof, J. 363
Van Vaerenbergh, S. 644, 656
Vargas, M. F. 593
Vásquez, C. 640
Vicente, S. 652
Vidal-Abarca, E. 626

W

Wilhelmi, M. R. 143

Y

Yáñez, D. F. 653, 657

Z

Zapata, M. 383
Zorrilla, C. 658