

El desarrollo del pensamiento geométrico espacial es un aspecto esencial para asimilar los contenidos matemáticos relacionados con la geometría del espacio, y de esta forma, enfrentarse con éxito a la resolución de problemas geométricos de estereometría. Sin embargo, aún subsisten insuficiencias en esta temática, las cuales fueron constatadas en el estudio exploratorio fáctico y causal desarrollado en carreras técnicas. Es por ello que, el objetivo del presente libro es proponer una metodología contentiva de procedimientos desarrolladores, eslabones, componentes, acciones y orientaciones metodológicas, para elevar los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de las carreras de ingeniería, de la educación universitaria. Dicha metodología es validada a través de un pre-experimento mediante el uso de los conjuntos neutrosóficos de valor único (SVNS) asociados a variables lingüísticas, lo que aumenta la posibilidad de interpretación en los modelos de recomendación y en el empleo de la indeterminación.



**Wilber Ortiz Aguilar**, Doctor en Ciencias Pedagógicas, Máster en Ciencias de la Educación, Especialista en el área de matemáticas. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Coevaluador y par académico en su área. Tutor de varias tesis de grado, tesis de maestría y de proyectos relacionados con la gestión social del conocimiento. Ha participado de manera sistemática en eventos nacionales e internacionales. Ha publicado diversos libros y artículos científicos.

E-mail: [wilber.ortiza@ug.edu.ec](mailto:wilber.ortiza@ug.edu.ec) <https://orcid.org/0000-0002-9373-5983>



**Tatiana Verónica Gutiérrez Quiñónez** Ingeniera Industrial, Máster en Sistemas Integrados de Gestión de Calidad, Seguridad y Medio Ambiente. Doctoranda en Gestión y Planificación Pública y Privada. Docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Tecnológica ECOTEC en Guayaquil, Ecuador. Ha tutorado varias tesis de grado y ha realizado diversas publicaciones de artículos y libros científicos.

E-mail: [tatiguti13@hotmail.com](mailto:tatiguti13@hotmail.com) <https://orcid.org/0000-0002-5216-8222>



**Lenin Stalyn Gómez Romero**, Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, Magíster en Telecomunicaciones. Docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Tecnológica ECOTEC en Guayaquil, Ecuador. Tutor de varias tesis de grado y proyectos tecnológicos. Participa sistemáticamente en eventos científicos nacionales e internacionales. Autor de varios artículos y libros científicos.

Email: [leninsgr2012@gmail.com](mailto:leninsgr2012@gmail.com) <https://orcid.org/0000-0002-7338-8338>



**Daniel Douglas Iturburu Salvador**. Magíster en Estructuras, Especialización Estructurista, Ingeniero Civil. Docente titular de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Tutor de varias tesis de grado y proyectos. Participa sistemáticamente en eventos científicos nacionales e internacionales donde socializa sus resultados como docente universitario y consultor constructor en función del desarrollo de la actividad científica en el área de la construcción.

Email: [douglas.iturburus@ug.edu.ec](mailto:douglas.iturburus@ug.edu.ec) <https://orcid.org/0000-0002-7198-3986>



**Julio Cesar Castro Rosado**. Magíster en Ciencias, Diplomado en Pedagogía Universitaria, Ingeniero Civil. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Tutor de varias tesis de grado y proyectos tecnológicos. Participa sistemáticamente en eventos científicos nacionales e internacionales y es autor de varios artículos científicos.

Email: [julio.castror@ug.edu.ec](mailto:julio.castror@ug.edu.ec) <https://orcid.org/0000-0001-9888-9984>

El desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial: una mirada desde la validación neutrosófica



**Wilber Ortiz Aguilar**  
**Tatiana Verónica Gutiérrez Quiñónez**  
**Lenin Stalyn Gómez Romero**  
**Daniel Douglas Iturburu Salvador**  
**Julio Cesar Castro Rosado**

El desarrollo de las habilidades del pensamiento  
**geométrico espacial**  
una mirada desde la validación neutrosófica





## El desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial: una mirada desde la validación neutrosófica

**Diseño:** Ing. Erik Marino Santos Pérez.

**Traducción:** Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

**Corrección de estilo:** Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

**Diagramación:** Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

**Director de Colección Textos para universidad:** MSc. Dania Acosta Luís.

**Jefe de edición:** Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

**Dirección general:** Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

© Dr. C. Wilber Ortiz Aguilar

MSc. Tatiana Verónica Gutiérrez Quiñónez

Mag. Lenin Stalyn Gómez Romero

Mag. Daniel Douglas Iturburu Salvado

Mag. Julio Cesar Castro Rosado

© **Sobre la presente edición**



Esta obra ha sido evaluada por pares académicos a doble ciegos

**Lectores/Pares académicos/Revisores:** 0001 & 0006

**Editorial Tecnocientífica Americana**

**Domicilio legal:** calle 613nw 15th, en Amarillo, Texas.

**ZIP:** 79104

Estados Unidos de América, 2021

**Teléfono:** 7867769991

**Código IBIC:** PBM

**DOI:** <https://doi.org/10.51736/ETA2021TU1>

**ISBN:** 978-0-3110-0012-8



Sello de calidad 6000/7000

SPI

Scholarly Publishers Indicators

Books in Humanities and Social Sciences



eLibro





## CONTENIDO

---

Capítulo 1. Introducción al estudio de la matemática .....	1
Capítulo 2. Fundamentos teóricos del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial .....	5
2.1. Principales fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la asignatura Matemática, en la Educación Superior .....	5
2.2. El desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial: presupuestos teóricos esenciales .....	10
2.3. Diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, en la enseñanza universitaria .....	19
Capítulo 3. Metodología para la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, en la enseñanza universitaria .....	27
3.1. Fundamentos y referentes teóricos de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes .....	28
3.2. Sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial .....	31
3.3. Metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial .....	41
3.3.1. Procedimientos desarrolladores para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial .....	41
3.3.2. Eslabones y componentes de la metodología .....	45
Capítulo 4. Validación por métodos neutrosóficos de la metodología propuesta .....	68
4.1. Algunos elementos teóricos y prácticos sobre la neutrosofía .....	69
4.2. Valoración de la implementación de la metodología, a través de un pre-experimento con el uso de variables lingüísticas asociadas a SVNS .....	73
4.3. Valoración de la factibilidad de la metodología mediante el método Delphi con selección de expertos por métodos neutrosóficos .....	99
Referencia .....	108

## Capítulo 1. Introducción al estudio de la matemática

A medida que la didáctica de la matemática ha ido evolucionando en sus objetivos, contenidos y métodos, su base teórico-metodológica ha evolucionado desde una didáctica donde el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje fue el profesor hacia una didáctica donde el protagonista y sujeto principal del aprendizaje es el estudiante, y en la que el papel del profesor es de facilitador de ese aprendizaje. El enfoque desarrollador de la enseñanza y el aprendizaje teórico-metodológico ha venido ganando espacio en la educación superior ecuatoriana.

En la actualidad se realizan aportes importantes en cuanto a las propuestas de procedimientos desarrolladores que contribuyan a estimular el pensamiento de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, los cuales precisan ser contextualizados a cada una de las asignaturas que se imparten. En este sentido, se han realizado investigaciones dirigidas a lograr que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática adquiera ese carácter desarrollador, como se demuestra en la enseñanza del álgebra y la aritmética, no así en la geometría.

La geometría como rama de la matemática estudia "... las formas de los objetos geométricos del espacio euclidiano y las relaciones (axiomas, fórmulas, criterios, definiciones y teoremas) que las caracterizan cuantitativamente" (López, 1997, p. 42). La geometría está presente en la producción, el arte, la tecnología, la naturaleza y juega un papel importante en la transformación de la realidad objetiva circundante.

Su enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar favorece que los educandos se formen una concepción científica del mundo. Facilita que adquieran una cultura integral y un pensamiento científico que los prepare para la vida social y laboral, para que mantengan una actitud responsable y comprometida ante los problemas de la sociedad, la ciencia y la tecnología.

En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia en la educación universitaria se encuentran en constante perfeccionamiento. Esto es consecuencia de la introducción y desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación en el contexto escolar, dirigidos a la búsqueda por vías científicas de métodos, técnicas, estrategias y medios de enseñanza-aprendizaje que sitúen al estudiante en el centro

del aprendizaje, que promuevan su participación protagónica en la adquisición y aplicación de nuevos conocimientos, en la formación y desarrollo de hábitos y habilidades matemáticas.

Para ello, es importante que los estudiantes apliquen los conocimientos, hábitos y habilidades que adquieran con la resolución de problemas relacionados con la realidad objetiva y de esta forma, comprendan la utilidad y el carácter instrumental de los contenidos geométricos y puedan, a través de estos, ponerse en contacto con los objetos del mundo real a fin de experimentar con ellos, descubrir propiedades y establecer relaciones. Por las razones anteriores, la enseñanza-aprendizaje de la geometría, ocupa a numerosos investigadores de la didáctica de la matemática, demostrado por los trabajos presentados en los congresos internacionales de matemática educativa (ICME).

Como consecuencia del debate científico, ha emergido como una de las tendencias del quehacer matemático en las instituciones educativas, el desarrollo del pensamiento matemático de los educandos desde edades tempranas (Benítez y Cárdenas, 2008). Esta tendencia tiene como propósito fundamental la reorientación de las prácticas pedagógicas, de las actividades didácticas, metodológicas y de todo lo que acontece en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática hacia una enseñanza que se preocupe más por los procesos de pensamiento propios de esta ciencia y menos por los contenidos (Sánchez y Bonilla, 1998).

Uno de los componentes del pensamiento matemático es el pensamiento geométrico espacial (Benítez y Cárdenas, 2008; Ballester y otros, 2007). Este tipo de pensamiento matemático “... se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, el cual posee una fuerte base senso-perceptual, (...) contribuye a que el alumno se ubique espacialmente en el mundo mediante la identificación de representaciones bidimensionales y tridimensionales, (...) implica un análisis y una síntesis (...); es además una abstracción y una generalización, derivada de ellos. De esta forma, los resultados del pensamiento geométrico espacial (conceptos, definiciones, propiedades, teoremas y fórmulas) se incorporan por sí mismos al proceso del pensar (...), lo cual enriquece y desarrolla, elevándolo a otro

nivel en complejidad. O sea, le permite al alumno llegar a generalizaciones cada vez más complejas a medida que descubre relaciones espaciales y conexiones más profundas” (Rojas, 2009, pp. 88-89).

En relación con el estudio del pensamiento geométrico espacial, investigadores como Frostig (1978), Horne (1978), Hoffer (1967) (citados por Uribe y otros, 2014), Feria y otros (2006) han aportado una serie de habilidades que se pueden desarrollar en contextos geométricos, tales como: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual. A pesar de los aportes realizados por estos autores aún subsisten dificultades en el desarrollo de estas habilidades en los educandos, derivadas de la enseñanza tradicional y poco desarrolladora de la Matemática en las instituciones escolares.

En el ámbito nacional se resaltan los trabajos de didactas de la matemática, tales como Escalona (1994), Ballester (1992, 2007), González D. (2006), García (2002), Campistrous y Rizo (1980-2007), Flores (1991), Barcia (2000), Acuña (2008), Hernández B. (2001) y Rojas (2006, 2007, 2009), entre otros. Las principales aportaciones de los autores mencionados anteriormente han estado dirigidas en las siguientes direcciones.

- Propuestas de estructuración de cursos de geometría del espacio que contribuyen al desarrollo del pensamiento geométrico espacial y lógico deductivo, donde subyacen elementos del método axiomático acorde con la escuela de la época, en los que se presta más atención a la enseñanza de los contenidos geométricos, por parte del profesor, que al papel activo de los estudiantes en su construcción, en detrimento del desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.
- Propuestas didácticas mediante las cuales se articula la enseñanza basada en problemas con el aprendizaje de la geometría del espacio, pero no se presta debida atención al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes.
- Propuestas didácticas para el empleo de medios más activos, mediante la introducción y uso de las tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la geometría,



con un enfoque dinámico, dirigidas a la representación de figuras geométricas espaciales en un plano bidimensional para el desarrollo de la visualización, la percepción, la búsqueda de propiedades y relaciones, que aunque se consideran aspectos esenciales para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial, no se articulan en toda su magnitud con los procedimientos de los que debe apropiarse el estudiante para desarrollar habilidades propias de este tipo de pensamiento.

El análisis anterior corrobora que en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática en Ecuador, subsisten limitaciones didácticas para dirigir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los educandos de la Educación Superior, sin tenerlas aprehendidas. Todo ello se constató en un estudio exploratorio realizado en los grupos de primer año de las carreras Ingeniería de Software, Ingeniería de Sistemas e Ingeniería de Redes y Telecomunicaciones, de la Universidad de Guayaquil.

El estudio exploratorio determinó problemáticas relacionadas con el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, al constatar que los estudiantes tienen dificultades para identificar las figuras planas y cuerpos geométricos, sus propiedades y conceptos, establecer relaciones lógicas entre esas propiedades, reconocer las relaciones existentes entre esas figuras y cuerpos geométricos, así como su representación mediante su esbozo geométrico, calcular el área y volumen de cuerpos, valorar la utilidad y repercusión sociocultural de las representaciones geométricas, aplicar adecuadamente los teoremas de la planimetría y la estereometría, deducir con claridad las consecuencias entre las informaciones que se dan en los datos del ejercicio o problema, y para establecer un ordenamiento lógico de las respuestas.

Al analizar las dificultades señaladas, se puede plantear que se desconoce la existencia de una metodología que oriente cómo dar tratamiento al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes. Además, no se aborda de manera explícita en los programas y orientaciones metodológicas vigentes. Por otro lado, es insuficiente el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes, ya que no constituye una prioridad en las preparaciones metodológicas.

Ello es resultado de la contradicción existente entre la necesidad de resolver problemas relacionados con la geometría del espacio y el insuficiente desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes universitarios. Los argumentos expuestos con anterioridad sirven de base para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación universitaria.

## **Capítulo 2. Fundamentos teóricos del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial**

En este capítulo se realiza un análisis de la evolución histórica de la enseñanza de la geometría, se determinan los fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la asignatura Matemática en la educación superior, desde la mirada del enfoque desarrollador. Dicho enfoque es una de las tendencias didácticas actuales que tiene como propósito fundamental el empleo de métodos de enseñanza productivos que propicien que los estudiantes sean sujetos activos y no pasivos de su propio aprendizaje.

Se precisan, además, los presupuestos teóricos del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Por último, se presentan los resultados del diagnóstico de la situación actual del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en las carreras Ingeniería de Sistemas, Ingeniería de Software e Ingeniería en Redes y Telecomunicaciones, que justifican y argumentan el objetivo de la investigación.

### **2.1. Principales fundamentos teóricos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la asignatura Matemática, en la Educación Superior**

En estudios realizados por prestigiosos investigadores como Klingberg (1972), Danilov y Skatkin (1978), Labarrere (1988), Álvarez (2009), Álvarez de Zayas (1990,1996), Fuentes (1996, 2009), Addine (2002, 2004) y Castellanos (2001, 2007) se precisa el proceso de enseñanza-aprendizaje como objeto de estudio de la didáctica. Del análisis de los trabajos de estos investigadores se destaca la necesidad de la integración de lo cognitivo y lo afectivo en este proceso; así como de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador, aspectos que se consideran esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.



Lo anterior se corresponde con la aspiración de la educación universitaria; es decir, está dirigida a que los estudiantes adquieran conocimientos, habilidades y valores, acordes a los principios de la sociedad que se construye, a partir de actitudes, concepciones y principios éticos alejados del individualismo, el egoísmo y sustentados en el colectivismo, la cooperación, el compromiso individual, colectivo y social.

Los fundamentos filosóficos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en general, y en el de la geometría, en particular, como rama de esta ciencia, están fundamentados en su uso en la vida cotidiana, pues se relacionan con problemas de medidas que a diario ocupan al hombre, como el de diseñar un cantero o una pieza de cerámica, cubrir una superficie o calcular el volumen de un cuerpo (Rojas, 2009).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría contribuye a la preparación de los estudiantes para emplearla en la vida diaria, por las siguientes razones (Rojas, 2009).

- Por su aplicación en las carreras universitarias y técnicas por las que puede optar el estudiante.
- Por su contribución al estudio de los elementos de la naturaleza, como base de la formación de la concepción científica del mundo.
- Por ser una fuente para el desarrollo de valores estéticos y culturales.
- Por su utilidad para el trabajo en las diferentes ramas de la matemática.
- Por potenciar el desarrollo del pensamiento formal y el geométrico espacial, pues permiten pasar de lo concreto a lo abstracto y viceversa, lo que favorece en el estudiante la orientación espacial.
- Por desarrollar procedimientos y habilidades (percepción, deducción, imaginación, intuición, dibujo, representación, construcción de figuras y modelos) que propician la creatividad.
- Por estar presente en múltiples ámbitos de los sistemas productivos y de los servicios en el mundo actual.

En la educación universitaria se observan intenciones de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Sin embargo, aún hay vestigios de una enseñanza tradicional, memorística y repetitiva que no propicia que el estudiante sea

sujeto activo de su propio aprendizaje, debido a que, según Lima (2008), existen algunas limitaciones que dificultan la calidad de este proceso.

- El inadecuado empleo de métodos y medios de enseñanza.
- El tratamiento bastante formal, dirigido en lo esencial al reconocimiento de las figuras geométricas fundamentales y al estudio de sus propiedades de manera mecánica.
- Generalmente el estudiante no participa en la elaboración de conceptos geométricos de forma protagónica y se presentan estos por el docente en su forma terminada.
- El profesor, de manera general, realiza todo el razonamiento en lugar del alumno o señala como hallar la solución.

Lima (2008) también se refiere a otras insuficiencias como el bajo desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial como la visualización, la determinación de propiedades de figuras geométricas a partir de la visualización y percepción de las formas de las figuras geométricas tanto en el plano como en el espacio; así como el tratamiento formal a la terminología propia de esta ciencia y la falta de la exploración experimental que van en detrimento de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la educación universitaria.

En este aspecto, Rojas (2009) refiere que la manera de enfocar actualmente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del espacio, aún no resuelve algunas limitaciones en su tratamiento, relacionadas fundamentalmente con las posibilidades de desarrollar en los alumnos la visión espacial, así como la posibilidad de plantear conjeturas, experimentar, explorar, refutar, reformular, probar, establecer relaciones y realizar demostraciones de teoremas y proposiciones, que les permitan la búsqueda activa del conocimiento, a partir de la dirección del proceso por parte del profesor. Por tales motivos, es deficiente la habilidad que poseen los alumnos para realizar una transferencia del plano al espacio y del espacio al plano al concluir sus estudios.

En relación con lo anterior, Llorente (2016) expresa que esto se debe a la descontextualización de los contenidos matemáticos como conocimientos académicos aislados de la realidad cotidiana del estudiante, a la repetición y monotonía de las actividades de aula, provocadas por la anteposición de los conocimientos



procedimentales, a los aspectos conceptuales del campo matemático, a la poca exigencia en la búsqueda de diferentes vías de solución a las tareas docentes, y al poco énfasis de los profesores en la socialización de las respuestas.

Investigadores como Rico y Silvestre (2004), Castellanos (2001, 2007), Castellano (2001), Zilberstein y Silvestre (1999), Zilberstein y Portela (2002) consideran que estas insuficiencias se revierten al asumir al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en general, y al de la geometría, en particular, desde un enfoque desarrollador, donde el estudiante se considera un ente activo en su aprendizaje que desarrolla al máximo las potencialidades de su personalidad.

El enfoque desarrollador tiene como referente teórico común el enfoque histórico cultural de Vigotsky y seguidores Danilov (1975), Savin (1972), Ushinski (1975), Helmut Klein (1978), Labarrere (1988), Tomaszewski (1966), González (1994), Zankov (1975) y Davidov (1989). Estos autores coinciden en que las relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo son análogas y responden a expectativas sociales y necesidades educativas comunes. Tomando como base estas ideas, Castellanos (2007, p. 46) afirma que “una educación desarrolladora es la que conduce al desarrollo, va delante del mismo, guiando, orientando, estimulando”.

Se asume para el proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría en la educación universitaria, el concepto de zona de desarrollo próximo o potencial (ZDP) definido como “... la distancia entre el nivel que alcanza el estudiante cuando soluciona una tarea de manera independiente (su desarrollo actual), y el nivel que puede alcanzar cuando la realiza con ayuda del docente o de sus compañeros más competentes en este terreno (su desarrollo potencial)” (Castellanos, 2001, p.95).

Al tener en cuenta este concepto, se considera la concepción de enseñanza, aprendizaje y proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría desde un enfoque desarrollador, para que tanto el docente como el estudiante conozcan y comprendan el rol que deben jugar en él, uno como facilitador del proceso (docente) y otro como protagonista esencial (estudiante). Por ello, se asumen los siguientes criterios.

Un aprendizaje desarrollador de la matemática es el que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora del saber y poder matemático, de estrategias de aprendizaje generales y específicas, de los procesos de pensamiento y las formas



de trabajo propias de la matemática, su simbología y terminología, que al ser estructurados en forma de sistema, le permitan comprender y transformar el mundo que le rodea y a su vez transformarse, potenciando el desarrollo de su independencia cognoscitiva en estrecha relación con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social (Suero, 2001, p.11).

Una enseñanza en pos de un aprendizaje desarrollador presupone asumir la enseñanza no solo de estrategias cognitivas sino metacognitivas (...) convirtiéndolas de hecho en contenidos de enseñanza y la elaboración por parte del estudiante de la orientación para la aplicación de procedimientos, la cual es dada o elaborada generalmente por los docentes (Jiménez, 2000, p.6).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde un enfoque desarrollador constituye un sistema en el cual tanto la enseñanza como el aprendizaje son subsistemas que garantizan la apropiación activa, creadora, reflexiva, significativa y motivada del contenido como parte de la cultura general integral, teniendo en cuenta el desarrollo actual, con el propósito de ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo potencial. Ello implica una comunicación afectiva y el desarrollo de actividades intencionales, cuyo accionar didáctico genere estrategias de aprendizaje que permitan aprender a aprender Matemática como expresión del desarrollo constante de una personalidad integral y autodeterminada del estudiante (Gibert, 2012, p. 27).

La precisión de estos conceptos en el escenario del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría contribuirá a que los estudiantes logren la aprehensión de los conocimientos, las habilidades y las capacidades geométricas requeridas para realizar aprendizajes durante toda su vida y aplicarlos en la práctica. Contribuirá además, a que se avance en el tránsito de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, se promueva el desarrollo integral de la personalidad, sin soslayar sus condiciones y experiencias geométricas previas, recordando siempre que uno de los objetivos primordiales de la geometría es precisamente entender su naturaleza.

En este mismo sentido, Sandoval (2005) señala que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (y el de la geometría como rama de esta) se encuentra en una etapa de renovación de sus enfoques, que persigue que los estudiantes adquieran una concepción científica del mundo, una cultura integral y un pensamiento científico que los habitúe a cuantificar, estimar, extraer regularidades, procesar informaciones, buscar causas y vías de solución, incluso de los hechos simples de la vida cotidiana y en consecuencia, los prepare para la actividad laboral.

Sobre la base de estudios realizados por investigadores como Gibert (2009), Jiménez (2000, 2007) y Barrón (1991) es necesario señalar que para lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la Matemática, este debe ser significativo para



el estudiante. Según Ausubel (2000) el aprendizaje significativo se manifiesta cuando nuevas ideas e informaciones pueden ser aprendidas y retenidas en la medida en que conceptos relevantes o adecuados e inclusivos se encuentren apropiadamente claros y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y sirvan, de esta forma, de anclaje a nuevas ideas y conceptos.

Por consiguiente, el aprendizaje significativo debe asumirse como sustento del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador de la geometría en la formación de la personalidad del estudiante, pues este permitirá a los docentes elaborar tareas de aprendizaje en las que el estudiante pueda relacionar de manera no arbitraria y sustancial lo nuevo que aprende con lo ya ha aprendido anteriormente. Esto potencia el establecimiento de relaciones entre aprendizajes, los nuevos contenidos, los conceptos ya adquiridos y los nuevos conceptos que se forman, entre el conocimiento y la vida, la teoría y la práctica.

## **2.2. El desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial: presupuestos teóricos esenciales**

El pensamiento geométrico espacial, no es más que un reflejo generalizado del espacio tridimensional basado en modelos. El mismo se pone de manifiesto cuando los alumnos forman un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, pueden representar mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométrico espaciales (Ballester y otros, 2007, p.32).

Es oportuno precisar que esta definición reduce, en cierta medida, el desarrollo de esta forma de pensamiento matemático a la representación de lo tridimensional en lo bidimensional, pues se obvia la reproducción, la construcción de esa figura espacial visualizada, pensada y creada en lo propiamente tridimensional, que es parte esencial también de este proceso y de vital importancia para comprender ese espacio físico que rodea al estudiante. Por esta razón, se concuerda con Proenza (2002) que expresa que este pensamiento es un reflejo generalizado y mediato del espacio físico tridimensional, que tiene una fuerte base sensoperceptual que se inicia desde las primeras relaciones del individuo con el medio y que se sistematiza y se generaliza a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela.

Sin embargo, esta base sensorial no ha sido suficientemente trabajada en las educaciones que le anteceden a la educación universitaria, pues tiene que reflejarse en las habilidades del pensamiento geométrico espacial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En este sentido, se coincide con Jungk (1982), quien expresa que con el pensamiento geométrico espacial se deben desarrollar tres capacidades íntimamente relacionadas entre sí: la vista espacial, la representación espacial y la imaginación espacial. Se precisa además, de acuerdo a los intereses de esta investigación, las capacidades de imaginación, reproducción y de construcción espacial.

El poco desarrollo de la capacidad de imaginación espacial en los estudiantes conlleva a que presenten serias dificultades para analizar el plano, las relaciones en el espacio y viceversa. Según Proenza (2002), esta se define como la capacidad de estudiar el plano y el espacio a través de sus conceptos, leyes y derivar razonamientos; por lo que va más allá de la geometría para erigirse como un pensamiento dialéctico por excelencia.

Desde esta mirada, resulta significativo señalar que esta forma del pensamiento matemático no se limita a identificar de forma visual figuras geométricas y conocer su nombre. Proenza (2002) precisa que este exige del estudiante la exploración consciente del espacio, la comparación de los elementos observados, el establecimiento de relaciones entre ellos y la expresión verbal de las acciones realizadas y de las propiedades observadas, para de ese modo interiorizar el conocimiento, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas, ideas que son asumidas en esta investigación.

Investigadores como Fera (2006), Frostig (1978), Horne (1978), Hoffer (1967) (citados por Uribe, 2014) han aportado variadas habilidades de percepción espacial: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual, que a opinión de este autor son parte de la base sensorial que deben tener los estudiantes.

La coordinación visomotriz se relaciona con la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La percepción figura-fondo es el acto visual de identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo). Por otra parte, se encuentra la constancia perceptual (constancia figura y tamaño) que es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, como el tamaño y la forma, y la variabilidad de sus impresiones son observadas desde diferentes puntos de vista.

La percepción de la posición en el espacio, que es “la capacidad para determinar la relación de un objeto en relación con otro y al observador” (Feria y otros, 2006, p. 28). Por otro lado, aparece, la percepción de relaciones espaciales, que “se relaciona con la destreza para ver dos o más objetos en relación con uno mismo o entre ellos, y está estrechamente ligada en algunas tareas con la percepción de la posición en el espacio” (Feria y otros, 2006, p. 28). Por último, se encuentra la discriminación visual, que hace referencia a la “disposición para distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos y la memoria visual, que implica la habilidad para recordar con precisión un objeto que no está más a la vista y luego relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no” (Hoffer, 1977) (citado por Uribe, 2014).

Se debe señalar el hecho de que las habilidades presentadas anteriormente no están en términos de “saber hacer”, sino que son expresión de procesos cognoscitivos, como la percepción, la memoria, el pensamiento, entre otros, inherentes a las capacidades (González, 2001), pues no reflejan acciones concretas, realizables y medibles, por tanto, no describen operaciones y procedimientos detallados que orienten al profesor hacia su desarrollo, lo que requiere nuevos aportes teóricos y prácticos concretos en esta dirección.

Uno de los resultados que puede contribuir a la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial es la descripción que realiza McGee (1979) (citado por Fernández, 2011, p. 27) de diez habilidades, distribuidas en los siguientes dos grupos:

#### Habilidades de visualización espacial

- Para imaginar la rotación de un objeto, la representación de un objeto y los cambios relativos de posición de objetos en el espacio.

- Para visualizar una configuración en la cual hay un movimiento entre sus partes.
- Para comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones y para manipular objetos en la imaginación.
- Para manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otra disposición.

#### Habilidades de orientación espacial

- Para determinar relaciones entre diferentes objetos espaciales.
- Para reconocer la identidad de un objeto cuando es visto desde diferentes ángulos o cuando el objeto se mueve.
- Para considerar relaciones espaciales donde la orientación del observador es esencial.
- Para percibir patrones espaciales y para compararlos entre ellos.
- Para permanecer sin confusiones por las diversas orientaciones en la que un objeto puede ser presentado.
- Para percibir patrones espaciales o mantener la orientación respecto de los objetos en el espacio.

Sin embargo, aunque este autor logra un nivel mayor de precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se considera que al igual que las aportadas por otros autores referenciados anteriormente, estas reflejan la etapa sensorial de este pensamiento, pues se obvian las relacionadas con las otras dos etapas de la teoría del conocimiento.

En el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial juegan un papel esencial los procesos de visualización de acuerdo con lo planteado por Clements y Battista (1992), estos integran los procesos a través de los cuales se obtiene conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. Estas valoraciones apuntan a la necesidad de determinar las habilidades que permitan la realización de estos procesos de representación, construcción y manipulación de los



objetos tridimensionales, cuestión que no se esclarece suficientemente en la bibliografía consultada.

Castiblanco y otros (2004) señalan que la construcción geométrica puede ser descrita como un dibujo técnico, en el que la utilización de determinados instrumentos puede asegurar la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. Esta tiene dos propósitos esenciales, asegurar que se cumplan las propiedades geométricas, superando así las limitaciones de la percepción, necesariamente presentes en el dibujo; y realizar una generalización que asegure la reproducción del dibujo, teniendo en cuenta únicamente sus propiedades fundamentales por medio del uso de instrumentos técnicos.

No obstante, se considera que la construcción geométrica no es solo dibujar una figura espacial sobre la hoja por los estudiantes, sino que también es la construcción de esta con sus propias manos o con la ayuda de un asistente matemático, al tomar en cuenta sus propiedades fundamentales. En este aspecto radica la importancia de la construcción geométrica como motor impulsor del pensamiento deductivo.

Se asumen las ideas de Castiblanco y otros (2004), quienes expresan que el estudiante puede descubrir, a través de la construcción geométrica, propiedades que no tuvo en cuenta, lo que le permite detectar que hay una relación de implicación entre las propiedades que tuvo en cuenta y las que descubrió después.

El Modelo de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990) tiene cada vez mayor aceptación a nivel internacional en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Constituye otro de los referentes teóricos que posibilitan la determinación y precisión de habilidades del pensamiento geométrico espacial. En este modelo, Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico.

Nivel 1. Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización o reconocimiento, en el que el estudiante percibe las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Los estudiantes perciben las figuras como objetos individuales, es decir, no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase; se limitan a describir su aspecto físico, las reconocen, las diferencian o las clasifican

sobre la base de las semejanzas o diferencias físicas entre ellas; no suelen reconocer explícitamente las partes que las componen ni sus propiedades matemáticas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

Nivel 2. Es un nivel de análisis, de conocimiento de los componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades se comprenden a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, entre otros. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras y piensan en términos de conjuntos de propiedades que se asocian con estas.

Nivel 3. Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero solo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

Nivel 4. Es de razonamiento deductivo, en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

Nivel 5. Es el del rigor, es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Teniendo en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, la mayoría de los estudiantes de la educación universitaria deberían arribar a esta educación en los niveles cuatro y cinco, pues en las educaciones primaria y secundaria estudian las figuras geométricas planas y espaciales, sus propiedades, las relaciones entre ellas y las han clasificado y

definido formalmente, pero no es así. Lo antes expuesto corrobora la necesidad de precisar las habilidades del pensamiento geométrico espacial para esta educación.

Para la precisión de estas habilidades y el perfeccionamiento de la dirección del proceso de su desarrollo en los estudiantes de la educación universitaria, es necesario asumir otros referentes teóricos relacionados con la teoría de la actividad humana, y con los modelos de desarrollo de habilidades recogidos en la literatura científica. El concepto habilidad, a pesar de las diferentes acepciones que aparecen en la literatura psicológica y pedagógica, generalmente se utiliza como sinónimo de “saber hacer” (González, 2001), es decir, lo que le permite al hombre realizar una determinada tarea.

Para la psicología, “... las habilidades constituyen el dominio de operaciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad” (González, 2001, p.117), y resultan de la sistematización de acciones que están subordinadas a un objetivo consciente. Esta definición, aceptada por la comunidad científica, ha permitido que en el plano de la didáctica general, Álvarez de Zayas (1990) y Fuentes (1998) caractericen las habilidades como acciones que el sujeto realiza. Asimismo, Zilberstein (2002) las considera conocimiento en acción.

En el caso particular de la didáctica de la matemática, las habilidades matemáticas son definidas por Ferrer y Rebollar (2007, p. 5 como “(...) la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos”.

En esta investigación, se asume esta definición de habilidad matemática, pues en ella se reflejan las formas de trabajo y pensamiento matemático, que permiten a los estudiantes familiarizarse con las formas de buscar, descubrir, asimilar y construir nuevos conocimientos matemáticos y aprender con mayor racionalidad, de forma consciente y activa y, de esta manera, ser sujeto de su propio aprendizaje. Esos aspectos son imprescindibles para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Se asume, a su vez, la manera en que estos investigadores orientan la estructuración sistémica de las habilidades matemáticas en habilidad general (la resolución de problemas), habilidades básicas (como las construcciones que realiza el alumno de

métodos de solución o análisis de un determinado problema matemático, las que se constituyen en objetivos parciales en la preparación de los alumnos para resolver problemas) y habilidades elementales (construcciones de procedimientos específicos que se derivan de manera directa del modo de operar con conceptos, teoremas o procedimientos y que a partir del establecimiento de conexiones entre estos se van conformando métodos de solución, que constituyen la base de las habilidades matemáticas básicas. En relación con el proceso de desarrollo de habilidades, de la revisión bibliográfica realizada, se derivan las regularidades siguientes.

- Zilberstein y Silvestre (1999) plantean que la habilidad se desarrolla en la actividad e implica el dominio de las formas de la actividad cognoscitiva, práctica y valorativa.
  - Machado y Montes de Oca (2004) reconocen que se desarrollan y se manifiestan en la actividad y la comunicación, y que este desarrollo es el resultado de la interacción entre las condiciones internas y externas del individuo y de su interacción social con otros individuos.
  - Ferrer y Rebollar (2007) plantean que el proceso de desarrollo de habilidades matemáticas transcurre por tres etapas que responden a los eslabones didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje y su dinámica: etapa de planteamiento, comprensión y análisis de los problemas esenciales y sus subproblemas (orientación del sistema de habilidades matemáticas), etapa de elaboración, ejercitación y sistematización de las habilidades matemáticas básicas y elementales (ejecución del sistema de habilidades) y etapa de aplicación del sistema de conocimientos y habilidades a la resolución de problemas variados (perfeccionamiento de la ejecución del sistema de habilidades).
  - García (2002) por su parte, precisa las habilidades matemáticas que estructuran la habilidad resolver problemas geométricos, las cuales se asumen en la investigación. A continuación se explicitan.
1. Orientarse en el problema. Para ello, se identifica el tipo de problema geométrico que se va a resolver, las condiciones y exigencias presentes en el mismo; se investiga si se resolvieron problemas con condiciones o exigencias análogas o si el problema puede ser reducido a otros problemas ya resueltos o si puede descomponerse en subproblemas más sencillos; se reformula si es necesario el

problema para hacerlo más comprensible; se representan las condiciones y/o exigencias del problema en una figura geométrica de análisis; se precisan los conceptos, teoremas o relaciones presentes..

2. Buscar vías para solucionar el problema. Para ello, se formulan e interpretan los teoremas y definiciones, se interpretan las relaciones geométricas, para extraer de todos ellos nuevas informaciones o deducir nuevas consecuencias y nexos, precisando los más trascendentales para la resolución del problema; se realizan construcciones auxiliares en la figura geométrica de análisis en el caso necesario; se descompone el problema en subproblemas más sencillos; se aplican métodos de reducción: inductivos y no inductivos, así como métodos deductivos; se seleccionan y aplican procedimientos heurísticos de solución; se valoran vías conocidas o vías producidas por la especulación, se emiten hipótesis sobre posible o posibles vías de solución y se valora la posibilidad de su ejecución; se determina si el problema se deriva de otro más general para valorar si la vía de solución utilizada en aquel es posible particularizarla en éste, o si el problema es una generalización de otros problemas particulares para valorar si con las vías o estrategias de solución en ellos aplicadas se puede llegar a una vía o estrategia general que sea posible aplicarla a su solución; se precisa las acciones que se van a ejecutar una vez encontrada la posible vía o estrategia de solución para de esta forma ordenarlas y elaborar un plan de solución.
3. Experimentar las vías para solucionar el problema. Para ello, se desarrolla el plan de solución para comprobar y fundamentar cada paso; se valora si este ha sido correctamente elaborado, si le faltan pasos, si le sobran pasos, si los pasos están lógicamente ordenados, si es necesario perfeccionarlos; se revisa, reconsidera, perfecciona o rechaza la estrategia de trabajo seguida en la solución del problema, y culmina este proceso cuando se llegue a lo exigido en el problema.

Las etapas para el desarrollo de habilidades matemáticas (Ferrer y Rebollar, 2007) y las habilidades contentivas dentro de la habilidad resolver problemas geométricos (García, 2002), son asumidas en esta investigación, pues a partir de ellas se favorece el protagonismo del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría

del espacio y en el proceso de desarrollo de su pensamiento geométrico espacial, pues exigen de este la búsqueda y la construcción del conocimiento, la experimentación, visualización, representación de los objetos geométricos para la deducción de sus propiedades esenciales, la realización de conjeturas y la demostración de la veracidad de las proposiciones que se infieran del análisis y la percepción.

El autor considera que los referentes teóricos asumidos, sirven de sustento para la elaboración de la metodología para conducir por los profesores el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, puesto que los eslabones y componentes que se diseñan parten de la premisa esencial de que el conocimiento se produce cuando el estudiante es capaz de buscar, reactivar, utilizar, aplicar los conocimientos previos que necesita a la resolución de problemas geométricos relacionados con la geometría del espacio y transferirlos a la resolución de problemas nuevos, que favorezcan la búsqueda, la elaboración y construcción de nuevos conocimientos.

En el análisis de los referentes teóricos se constata que es limitada la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, pues las habilidades propuestas responden en gran medida a la etapa sensoperceptual de la adquisición del conocimiento. De la misma manera, son escasas las precisiones de aquellas habilidades que permiten el tránsito del estudiante a lo abstracto y a lo concreto pensado, en correspondencia con los niveles de pensamiento geométrico propuestos por Van Hiele. De este modo, se constata la carencia de una metodología para su desarrollo.

### **2.3. Diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, en la enseñanza universitaria**

Para la realización del diagnóstico del estado actual del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en la Educación Superior, se tomó como población a los estudiantes de primer año de las carreras Ingeniería de Software, Ingeniería de Sistemas e Ingeniería de Redes y Telecomunicaciones, de la Universidad de Guayaquil. Como métodos y técnicas para la valoración de las principales insuficiencias en el proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico

espacial, se realizó el análisis de los programas de las asignaturas de matemáticas, las orientaciones metodológicas, la revisión y análisis de exámenes. Se realizaron además, entrevistas a metodólogos, encuestas a profesores y observaciones a clases.

Como indicadores se precisaron los siguientes: conocimientos de los profesores sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y sobre las vías para la conducción de su desarrollo; preparación de los estudiantes para resolver problemas de geometría del espacio y precisión de orientaciones metodológicas para conducir el proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial. Del análisis de los métodos y técnicas aplicadas, se pudo constatar lo siguiente.

En los programas de Matemática y en las orientaciones metodológicas se pondera el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, con énfasis en los procedimientos lógicos que, si bien son necesarios para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial, no resultan suficientes. Se hace alusión solo a habilidades como observar y comparar para distinguir propiedades de los objetos y se le da más peso a la abstracción, al razonamiento lógico-deductivo riguroso para demostrar teoremas de la geometría del espacio.

Asimismo, se reconoce como lo esencial de la geometría del espacio, que los estudiantes conozcan relaciones fundamentales en el espacio y que sean capaces de demostrar propiedades simples y aplicar sus conocimientos a la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración. Como se puede observar, no se presta una debida atención al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial que forma parte esencial del proceso de resolución de estos ejercicios y problemas.

En el análisis de la tabulación de los resultados de los exámenes, se constató que en las respuestas a las preguntas relacionadas con la geometría del espacio, el 87,7% de los estudiantes de la muestra, no establece relaciones lógicas entre las figuras planas presentes en el cuerpo geométrico; el 65,3% no identifica los conceptos de las figuras planas y de los cuerpos geométricos; el 91,2% no aplica correctamente la definición esos conceptos; el 89,1% no identifica propiedades esenciales de las figuras planas y de los cuerpos geométricos; el 90,3% no establece relaciones lógicas entre esas propiedades; el 89,5% no aplica correctamente los teoremas de la planimetría y la

estereometría; el 95,6% no deduce con claridad las consecuencias entre las informaciones que se dan en los datos del ejercicio o problema y el 97,6% no establece un ordenamiento lógico de las respuestas a los ejercicios y problemas.

La observación a clases corroboró que en el 88,7% los estudiantes presentó serias dificultades para resolver ejercicios, problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio, debido a sus insuficiencias para identificar las propiedades de las figuras planas y espaciales, así como para identificar relaciones entre las propiedades de estas figuras: deducir consecuencias de los datos y esbozar una figura geométrica que les permita comprender mejor las condiciones y exigencias del ejercicio o problema. La guía para la observación fue la siguiente.

#### Guía de observación a clases de Matemática

Objetivo: Constatar a través de la observación a clases, el desempeño de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas de la geometría del espacio y el papel del profesor en la conducción del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, dentro del proceso de resolución de tales problemas.

#### Indicadores

1. Dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.
2. Papel del profesor para contribuir al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en sus estudiantes, a través de la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.

Se pudo constatar en el 85,3% de las clases observadas, que los profesores no prestan atención al desarrollo de habilidades relacionadas con la vista espacial, la representación y la imaginación espacial, pues para ellos, lo más importante es que los estudiantes lleguen a la solución del ejercicio o problema, la mayoría de las veces con su ayuda y mediante la utilización de una conversación que tiende a ser más socrática que heurística, no se atiende a lo interior del proceso de resolución, en el que se manifiestan esas habilidades.



Adicionalmente, se les realizó a los profesores una encuesta con el objetivo de diagnosticar su nivel de conocimientos sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y su tratamiento para desarrollarlas. El cuestionario aplicado fue el siguiente.

Cuestionario de la encuesta aplicada a profesores de Matemática de la Educación Superior

1. A continuación, relacionamos habilidades del pensamiento geométrico espacial recogidas en la literatura científica. ¿Cuáles de ellas usted utiliza en sus clases para contribuir al desarrollo en sus estudiantes de este componente del pensamiento matemático, en correspondencia con sus características como estudiantes universitarios?

- A.  coordinación visomotriz
- B.  percepción figura-fondo
- C.  constancia perceptual
- D.  percepción de posición en el espacio
- E.  percepción de las relaciones espaciales
- F.  identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo)
- G.  reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes
- H.  determinar la relación de un objeto con relación a otro
- I.  distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos
- J.  relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no
- K.  recordar con precisión un objeto que no está más a la vista
- L.  identificar propiedades de figuras planas
- M.  deducir consecuencias de las relaciones entre figuras
- N.  construir manualmente un cuerpo geométrico
- O.  representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo

2. Seleccione las razones por las cuales usted no ha utilizado en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría del espacio las habilidades que no consideró en la pregunta anterior.



- A.  no estoy familiarizado con ellas
- B.  no comprendo en qué consisten
- C.  pienso que el estudiante las debe tener desarrolladas desde enseñanzas anteriores
- D.  no sé si las he utilizado de forma inconsciente
- E.  no las considero necesarias
- F.  no pienso que sean habilidades
3. ¿Cuáles de las siguientes insuficiencias presentan sus estudiantes para resolver problemas de la geometría del espacio?
- A.  identificar figuras planas y cuerpos geométricos
- B.  identificar propiedades de figuras planas
- C.  reconocer las relaciones existentes entre las figuras y los cuerpos geométricos
- D.  representar cuerpos geométricos mediante un esbozo gráfico
- E.  calcular el área y volumen,
- F.  extraer información de los datos que se dan en las condiciones del problema
- G.  relacionar la información que se extraen de los datos
- H.  deducir consecuencias de las relaciones entre las informaciones extraídas de los datos
- I.  determinar las informaciones y consecuencias que resultan imprescindibles para llegar a la exigencia del problema
- J.  elaborar conscientemente un plan de solución
- K.  escribir organizadamente la solución del problema
- L.  fundamentar los pasos en la solución del problema
4. ¿Conoce usted alguna metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial?
- Sí  No
5. ¿Ha recibido usted alguna preparación teórica o metodológica para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial?
- Sí  No

Los resultados para las preguntas 1, 2 y 3 de esta encuesta se muestran en los diagramas de Pareto de las figuras 1, 2 y 3, respectivamente.

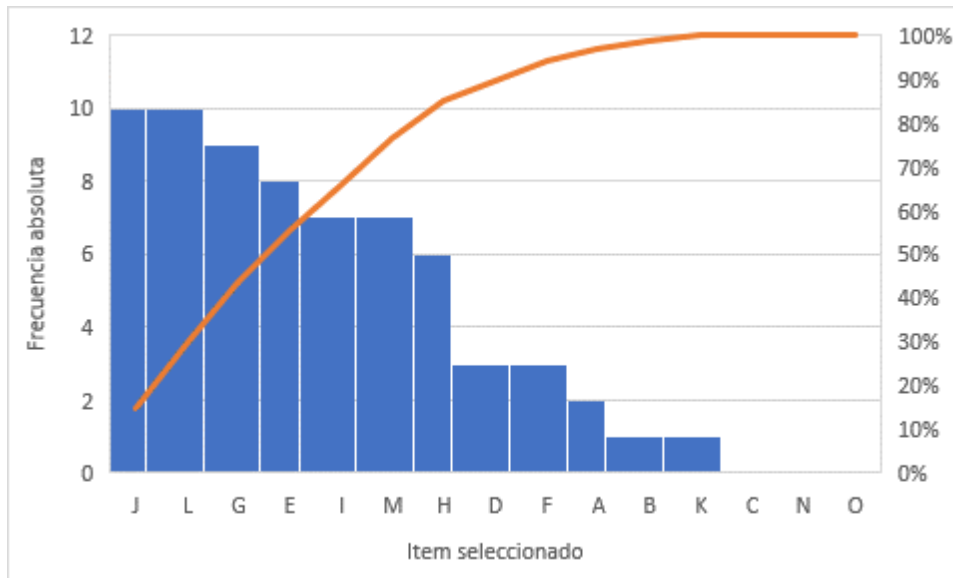


Figura 1. Diagrama de Pareto que muestra las frecuencias de selección los ítems de la pregunta 1.

En la primera pregunta relacionada con las habilidades del pensamiento geométrico espacial, más del 50% reconoce utilizar las habilidades: percepción de las relaciones espaciales, reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, determinar la relación de un objeto con relación a otro, distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos, relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no, determinar la relación de un objeto con relación a otro e identificar propiedades de figuras planas (7 de las 15 habilidades presentadas en la encuesta).

De las restantes 8 habilidades, menos del 50% de los encuestados reconoce utilizarlas. Estas últimas son: coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo.

En la pregunta dos, relacionada con conocer cuáles son las razones por las que no utilizan las habilidades que no fueron seleccionadas en la pregunta uno, el 70% expresó que no está familiarizado con ellas, el 80% no comprende en qué consisten, el ciento por ciento considera que el estudiante las debe tener desarrolladas desde enseñanzas

anteriores; el 70% no sabe si las ha utilizado de forma inconsciente; el 30% no las considera necesarias y el 80% no considera que sean habilidades.

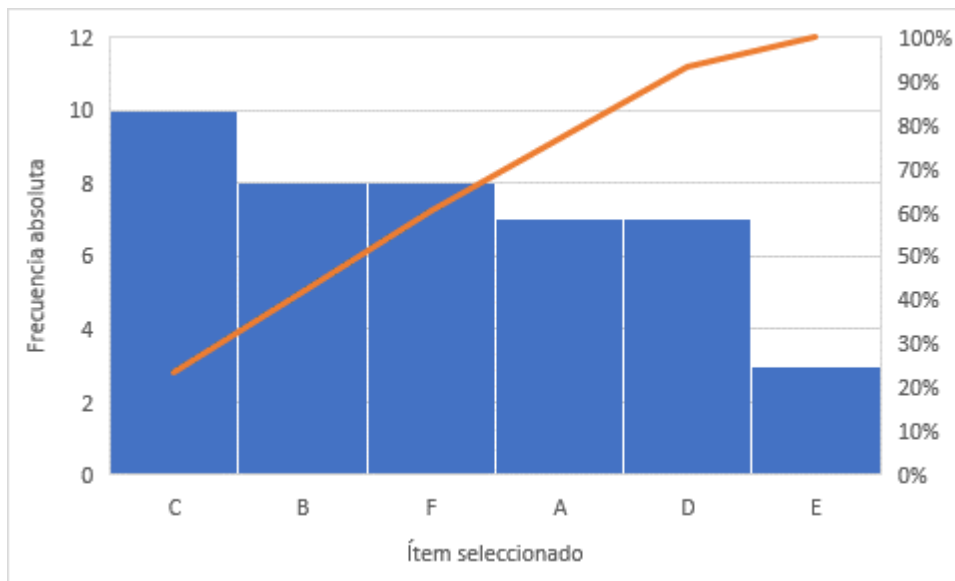


Figura 2. Diagrama de Pareto que muestra las frecuencias de selección los ítems de la pregunta 2.

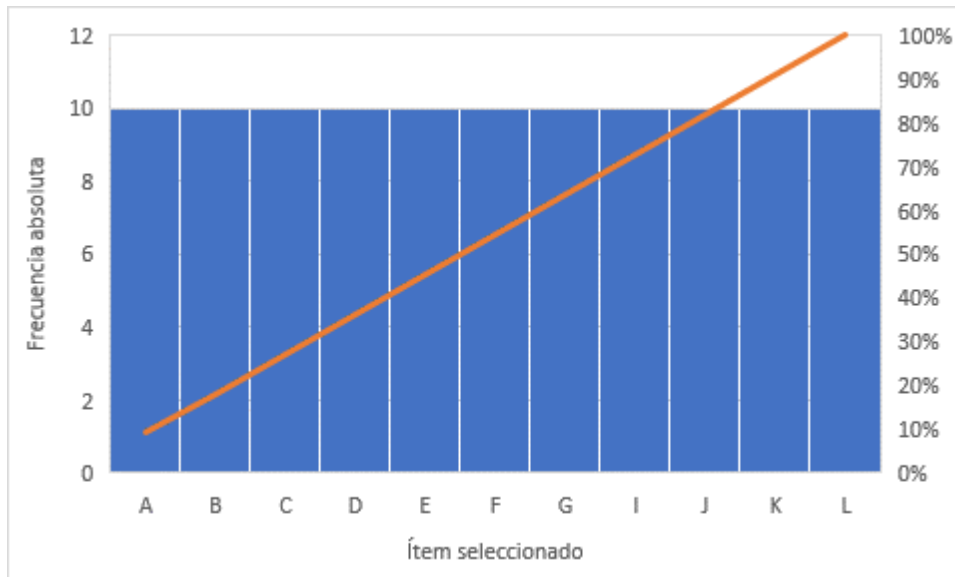


Figura 3. Diagrama de Pareto que muestra las frecuencias de selección los ítems de la pregunta 3.

En el caso de la pregunta tres, el ciento por ciento coincide en que sus estudiantes presentan las siguientes insuficiencias para resolver problemas de la geometría del espacio: identificar figuras planas y cuerpos geométricos, identificar propiedades de figuras planas, reconocer las relaciones existentes entre las figuras y los cuerpos geométricos, representar cuerpos geométricos mediante un esbozo gráfico, calcular el

área y volumen, extraer información de los datos que se dan en las condiciones del problema, relacionar la información que se extraen de los datos, deducir consecuencias de las relaciones entre las informaciones extraídas de los datos, determinar las informaciones y consecuencias que resultan imprescindibles para llegar a la exigencia del problema, elaborar conscientemente un plan de solución, escribir organizadamente la solución del problema y fundamentar los pasos en la solución del problema.

En la pregunta cuatro, el ciento por ciento de los encuestados respondió que no tienen conocimiento de alguna metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial. Por otra parte, en el caso de la pregunta cinco, el 20% ha recibido preparación teórica o metodológica para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, lo que no es así, para el 80%.

También se realizó una entrevista a los metodólogos de Matemática con el objetivo de constatar las limitaciones que, desde el punto de vista metodológico, presentan los profesores de la educación universitaria para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes. Para el desarrollo de la entrevista se les presentó un material a los metodólogos sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial extraídas de la revisión bibliográfica. Estas fueron explicadas detalladamente por el autor para que comprendan en qué consiste cada una de ellas. Una vez terminada esta presentación, se comenzó la entrevista por medio de la guía siguiente.

#### Guía de la entrevista

1. ¿Cuáles de estas habilidades no son frecuentemente utilizadas por usted y los docentes en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática en la Universidad? Argumente su respuesta.
2. ¿Conoce alguna metodología para el desarrollo de estas habilidades?
3. En las preparaciones metodológicas que diseña para los profesores, ¿ha tratado algún tema relacionado con el desarrollo de estas habilidades? ¿Cuál o cuáles?

En la entrevista realizada a los metodólogos de Matemática ambos coincidieron en que las siguientes habilidades no eran frecuentemente utilizadas tanto por ellos como por los docentes en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática. Ponderaron la

coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo.

Las razones que estos emitieron al respecto estuvieron dirigidas esencialmente a la insuficiente preparación teórica y metodológica que tienen y a la poca atención que se ofrece al desarrollo de estas habilidades en los programas y orientaciones metodológicas vigentes. De igual manera, plantean que no conocen una metodología específica para el desarrollo de habilidades y que en las preparaciones metodológicas no se abordan temas relacionados con este aspecto.

De manera general, del análisis de los resultados de los instrumentos aplicados se infiere que es limitada la atención al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial por los profesores de Matemática de la educación universitaria, lo que se evidencia en las insuficiencias de los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de la geometría del espacio. Lo antes expuesto, es consecuencia de la insuficiente preparación teórica y metodológica de los profesores de la muestra, pues no cuentan con una metodología para este propósito.

Por cuanto, este aspecto no es abordado explícitamente en los programas y orientaciones metodológicas vigentes, ni constituye una prioridad de la preparación metodológica que reciben en los diferentes niveles. Estas razones justifican la necesidad de la elaboración de una metodología que fundamente teóricamente el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y oriente a los profesores para su implementación en la práctica pedagógica.

### **Capítulo 3. Metodología para la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, en la enseñanza universitaria**

En este capítulo se presenta la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes. Sirven de base para su elaboración, los fundamentos teóricos que la sustentan, se caracterizan las habilidades del pensamiento geométrico espacial, sus

eslabones, componentes y procedimientos, y se revelan las relaciones que entre ellos se establecen.

### **3.1. Fundamentos y referentes teóricos de la metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes**

La metodología para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial tiene como fundamento teórico base, que "... el conocimiento en su aprehensión de la realidad transcurre de lo sensorialmente concreto a lo abstracto y de este a lo concreto, resultando su movimiento general de lo abstracto a lo concreto" (Sánchez, Guadarrama y Araujo, s.a, p.22).

Lo anterior se materializa en la premisa que posibilita que los estudiantes se enfrenten a la resolución de problemas geométricos de estereometría (lo concreto pensado), primero visualizar las figuras geométricas que se presentan, observarlas atentamente para identificarlas y reconocer sus propiedades, realizar un esbozo o una representación de esas figuras, y construirlas (lo sensorial concreto) para de esta forma, compararlas, relacionar sus propiedades, deducir consecuencias de esas relaciones y comparaciones, y descubrir nuevas propiedades (lo abstracto).

El enfoque histórico-cultural de Vigotski (1982) y sus seguidores, se constituye en el fundamento psicológico de la metodología, pues considera, que las relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo, responden a expectativas sociales y a necesidades educativas. Se asume el concepto de zona de desarrollo próximo o potencial, pues la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, parte del diagnóstico, del nivel de desarrollo que tienen los estudiantes de estas habilidades y desde este, se planifican y organizan los niveles de ayuda por parte del profesor, de otros estudiantes y del grupo, a través de la actividad y la comunicación, hasta lograr su independencia cognoscitiva para enfrentarse con éxito a la resolución de problemas geométricos de la estereometría.

En consecuencia con las ideas de Vigotski (1982) y seguidores, se asume como fundamento didáctico el enfoque desarrollador de la enseñanza y el aprendizaje, al considerarse en la metodología propuesta la utilización de métodos productivos y



procedimientos desarrolladores, que favorezcan que la enseñanza de la geometría del espacio conduzca a los estudiantes, a través de las formas de pensamiento y trabajo matemático, a descubrir y construir procedimientos heurísticos, técnicas, estrategias de trabajo y conocimientos matemáticos y en consecuencia, que desarrollen las habilidades del pensamiento geométrico espacial y puedan resolver problemas geométricos de la estereometría con éxito y calidad.

De la Pedagogía se asumen los principios didácticos para la dirección del proceso pedagógico propuestos por Addine, González y Recarey (2003), particularmente el principio de la unidad entre lo afectivo y lo cognitivo en el proceso de educación de la personalidad, el principio de la unidad entre la actividad, la comunicación y la personalidad, el principio del carácter colectivo e individual de la educación y el respeto a la personalidad del educando y el principio de la unidad del instructivo, lo educativo y lo desarrollador.

En relación con las habilidades del pensamiento geométrico espacial y al proceso de su desarrollo para realizar en la metodología, precisiones de estas habilidades y para estructurar sus eslabones y componentes, se toman en cuenta los siguientes referentes teóricos, ya analizados en el capítulo 2.

- Los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).
- Las habilidades del pensamiento geométrico espacial descritas por McGee (Fernández, 2011).
- La estructuración sistémica de las habilidades matemáticas en habilidad general (resolución de problemas), las habilidades matemáticas básicas y las habilidades elementales, propuestas por Ferrer y Rebollar (2007) y en concordancia con ello, la propuesta de García (2002) sobre las habilidades matemáticas que estructuran a la habilidad resolver problemas geométricos.
- Las etapas por las que transcurre el proceso de desarrollo de habilidades matemáticas, propuestas por Ferrer y Rebollar (2007).

Se asume la definición de metodología como resultado científico de De Armas (2003, p. 35), al plantearla como "...un sistema de métodos, procedimientos y técnicas que



regulados por determinados requerimientos nos permiten ordenar mejor nuestro pensamiento y nuestro modo de actuación para obtener determinados propósitos cognoscitivos”. Desde esta perspectiva, la autora define los siguientes rasgos que la caracterizan.

- Es un resultado relativamente estable que se obtiene en un proceso de investigación científica.
- Responde a un objetivo de la teoría y/o la práctica educativa.
- Se sustenta en un cuerpo teórico (categorial y legal) de la filosofía, las ciencias de la educación, las ciencias pedagógicas y las ramas del conocimiento que se relacionan con el objetivo para el cual se diseña la metodología.
- Es un proceso lógico conformado por “etapas”, “eslabones”, o “pasos” condicionantes y dependientes, que, ordenados de manera particular y flexible, permiten el logro del objetivo propuesto.
- Cada una de las etapas mencionadas incluye un sistema de procedimientos que son condicionantes y dependientes entre sí y que se ordenan lógicamente de una forma específica.
- Tiene un carácter flexible, aunque responde a un ordenamiento lógico.

Como principios en los que se sustenta la metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial se asume los principios didácticos propuestos por Silvestre y Zilberstein (2002), porque sientan las bases para la transformación del proceso de enseñanza–aprendizaje en las clases, como un proceso de interacción dinámica de los sujetos con el objeto de aprendizaje y de los sujetos entre sí, donde se integran acciones dirigidas a la instrucción, al desarrollo y a la educación. Estos principios son los siguientes.

- Diagnóstico integral de la preparación del estudiante para las exigencias del proceso de enseñanza-aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.
- Estructurar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el estudiante, tener en cuenta las acciones que realizará en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad y el uso de medios de

enseñanza que favorezcan la actividad independiente y la búsqueda de la información.

- Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y la exploración del conocimiento por el estudiante, desde posiciones reflexivas, que estimule y propicie el desarrollo del pensamiento y la independencia en el escolar.
- Orientar la motivación hacia el objetivo de la actividad de estudio y mantener su constancia.
- Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo.
- Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento, así como el alcance del nivel teórico, en la medida en que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad para resolver problemas.
- Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan el desarrollo intelectual, para lograr la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje por el estudiante.
- Atender las diferencias individuales en el desarrollo de los escolares, en el tránsito del nivel logrado hacia el que se aspira.
- Vincular el contenido de aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el estudiante en el plano educativo y los procesos de su formación cultural general” (Silvestre y Zilberstein, 2002, p. 35).

Para la elaboración de la metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial se hace necesaria la precisión de estas habilidades para su consecuente desarrollo en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática.

### **3.2. Sistema de habilidades del pensamiento geométrico espacial**

El análisis de los aportes teóricos de diversos investigadores sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial, y el resultado del diagnóstico actual del desarrollo de estas en los estudiantes, apunta a la necesidad de precisar dichas habilidades, lo que

contribuirá a perfeccionar su conducción en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, por parte de los profesores que imparten esta asignatura y, de este modo, elevar la calidad del aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio.

En correspondencia con los referentes teóricos y metodológicos en los que se sustenta la metodología, se asume la habilidad resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría como una de las habilidades generales de la asignatura Matemática, en la educación universitaria. Esta habilidad se debe formar y desarrollar a través del estudio de todos los contenidos matemáticos de la asignatura en este nivel de enseñanza, con mayor incidencia en los relacionados con la geometría.

La habilidad resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría "...es la construcción y dominio, por el alumno, de los modos de actuar y métodos de solución de problemas al utilizar los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos y las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias vías de solución" (Ferrer, 2000, p.58). En todos los años de la educación universitaria, generalmente los problemas geométricos a resolver son los siguientes.

- Problemas de cálculo de magnitudes geométricas tales como longitudes de segmentos, lados, perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas.
- Problemas de demostración de proposiciones geométricas tales como la demostración de la semejanza de triángulos, paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos, entre rectas y planos, la demostración de razones y proporciones que se establecen en figuras geométricas o entre figuras geométricas, entre otros.
- Problemas de determinación geométrica, como la determinación de lugares geométricos, de puntos, de rectas que cumplan determinadas condiciones, de ecuaciones de rectas, curvas de segundo grado, de planos, determinación de los elementos de rectas, planos, curvas de segundo grado dadas sus ecuaciones, determinación de puntos y/o rectas de intersección y relaciones de posición entre rectas, entre planos, entre rectas y planos, entre rectas y curvas de segundo grado y entre curvas de segundo grado (García, 2002).

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la habilidad general resolver problemas geométricos tanto de la planimetría como de la estereometría se sistematizará a través de las habilidades geométricas básicas siguientes.

- Calcular magnitudes geométricas.
- Demostrar proposiciones geométricas.
- Determinar objetos, lugares geométricos, relaciones y posiciones en figuras geométricas y entre figuras geométricas.

Según Ferrer (2000, pp.59-60) estas habilidades geométricas básicas van a expresar la construcción y dominio de los métodos de solución o análisis de problemas geométricos y responden a objetivos parciales en la preparación para resolverlos en un complejo de materia determinado. En ellas, se pueden concretar métodos de solución para uno o varios tipos de problemas.

Estas responden a un nivel de desarrollo parcial de la habilidad geométrica general, indican el nivel de aplicación exigido a conceptos, relaciones y procedimientos geométricos que se sistematizan en un método de solución y expresan el nivel de profundidad con que se deben elaborar (Ferrer, 2000).

Resultan base de dichas habilidades geométricas básicas otras habilidades de un nivel menor de sistematicidad denominadas habilidades geométricas elementales, reflejan las condiciones concretas necesarias en la identificación, comprensión, análisis, búsqueda de relaciones, deducción de consecuencias, realización de conjeturas e inferencias lógicas, relacionadas directamente con el modo de operar con los conceptos, teoremas y procedimientos geométricos. Estas se perfeccionan a medida en que puedan ser utilizadas en la diversidad de condiciones de cada problema geométrico a cuya resolución el estudiante se enfrenta.

En consonancia con Ferrer (2000), la habilidad resolver problemas geométricos, tanto de la planimetría como de la estereometría, se estructura a través de las habilidades geométricas básicas y estas a su vez de las elementales y se perfecciona a medida en que las básicas alcancen un nivel superior de desarrollo. Por ello, las habilidades del pensamiento geométrico espacial son consideradas habilidades geométricas

elementales, que el estudiante de la educación universitaria debe asimilar para resolver con éxito problemas de cálculo, demostración y determinación geométrica.

Es a través de la ejecución de las habilidades que el estudiante realiza una visualización bidimensional y tridimensional del o de los objetos geométricos, sobre el que recae la acción específica, a partir del tipo de problema geométrico a resolver, identifica conceptos, teoremas, fórmulas relacionados con los mismos, realiza esbozos, los imagina en posiciones diferentes, realiza procesos de análisis y síntesis, ordenamiento, clasificación de esos objetos a partir de lo que identifica, observa, establece relaciones e inferencias lógicas, deduce consecuencias, descubre nuevas relaciones, que le permiten encontrar, descubrir una o varias vías de solución al problema en cuestión y determinar la más racional. En ese proceso, el estudiante utiliza conceptos, teoremas, propiedades y desarrolla procedimientos algorítmicos, heurísticos, así como habilidades del pensamiento lógico-deductivo.

Por tanto, se define como habilidades del pensamiento geométrico espacial a aquellas habilidades geométricas elementales, a través de las cuales el estudiante en el proceso de resolución de problemas geométricos opera con los conceptos, teoremas y procedimientos geométricos que le permitan descubrir los medios y métodos para calcular magnitudes geométricas, para demostrar proposiciones geométricas y para determinar objetos, lugares geométricos, relaciones y posiciones en figuras geométricas y entre figuras geométricas. Como habilidades del pensamiento geométrico espacial se proponen las siguientes.

Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Representar un objeto geométrico en diferentes vistas.

- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

Habilidades del nivel de análisis – síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Para desarrollar una habilidad el hombre precisa de la ejecución de un sistema de operaciones, que constituyen aquellas ejecuciones de la actuación que se llevan a cabo como componentes de dicha habilidad, sin que posean un fin consciente por sí mismas. Estas acciones son resultado de la transformación de una habilidad anterior en operación, debido al dominio alcanzado en la misma, lo cual permite una menor participación de la conciencia, al no necesitar la concentración de la atención del hombre en la obtención de un objetivo parcial. Es necesario destacar también, que una misma habilidad puede estar formada por diferentes operaciones y una misma operación puede formar parte de diferentes habilidades (Barreras, 1997).

Teniendo en cuenta lo anterior se precisan las operaciones que el estudiante debe ejecutar para desarrollar cada una de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, precisadas en el epígrafe anterior.

Habilidad: Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.

### Operaciones

- Observar el objeto geométrico en su totalidad.
- Observar cada figura plana y espacial que conforman al objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre cada figura observada con su concepto correspondiente.

Habilidad: Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.

### Operaciones

- Observar el objeto geométrico.
- Elaborar un plan para la descripción, teniendo en cuenta las figuras planas y espaciales que lo conforman, sus definiciones y propiedades.
- Reproducir las características físicas del objeto siguiendo el plan elaborado.

Habilidad: Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.

### Operaciones

- Observar el objeto geométrico a representar.
- Identificar el objeto geométrico a representar.
- Identificar las figuras planas que conforman el objeto geométrico a representar.
- Seleccionar la vista para representar (frontal o lateral).
- Determinar cuáles de las figuras planas identificadas alteran sus formas y cuáles las mantienen, de acuerdo a la vista seleccionada.
- Determinar las partes que estarán visibles y las que no estarán visibles en la representación.
- Realizar un esbozo preliminar del objeto geométrico.
- Comparar el esbozo preliminar con el objeto real.
- Realizar el esbozo definitivo.

Habilidad: Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.

#### Operaciones

- Observar las diferentes vistas en que está representado el objeto.
- Identificar cada una de las figuras planas que conforman el objeto en cada una de las vistas.
- Determinar, a partir de las figuras, los rasgos esenciales del objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre los rasgos esenciales determinados y el concepto del objeto geométrico.

Habilidad: Representar un objeto geométrico en diferentes vistas.

#### Operaciones

- Identificar el objeto geométrico representado en sus diferentes vistas.
- Determinar las partes que estarán visibles y las que no estarán visibles en la representación.
- Realizar un esbozo preliminar del objeto geométrico.
- Comparar el esbozo preliminar con el objeto real.
- Realizar el esbozo definitivo.

Habilidad: Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

#### Operaciones

- Observar el objeto geométrico.
- Identificar el concepto relacionado con el objeto geométrico.
- Identificar los teoremas y fórmulas relacionadas con el concepto de ese objeto geométrico.
- Identificar los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico.





- Identificar los teoremas y fórmulas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico.

Habilidad: Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

#### Operaciones

- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Definir los conceptos relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.
- Formular los teoremas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.
- Escribir las fórmulas relacionadas con los conceptos de las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico y el objeto geométrico en sí.

Habilidad: Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.

#### Operaciones

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman el objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico del objeto geométrico.
- Representar el objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar el objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar el objeto geométrico en diferentes vistas.
- Comparar entre sí cada una de las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Identificar relaciones de paralelismo, perpendicularidad entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.

- Identificar relaciones de igualdad y semejanza entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Exponer ordenadamente las relaciones encontradas.

Habilidad: Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

#### Operaciones

- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con el objeto geométrico.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con el objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los rasgos esenciales de las definiciones de los conceptos asociados al objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre las formulaciones de los teoremas asociados al objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los procedimientos geométricos asociados al objeto geométrico.
- Identificar relaciones lógicas entre los rasgos esenciales de las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados al objeto geométrico.
- Exponer ordenadamente las relaciones encontradas.

Habilidad: Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

#### Operaciones

- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Realizar inferencias lógicas de las relaciones que se establecen entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

- Determinar lo esencial entre las inferencias lógicas realizadas entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Formular las consecuencias que se deducen de lo esencial entre las inferencias lógicas realizadas.

Habilidad: Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Operaciones:

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Inferir nuevas relaciones entre las consecuencias deducidas, entre estas y las relaciones determinadas y establecidas entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociado al objeto geométrico.
- Formular las nuevas relaciones inferidas.

A partir de las operaciones que conforman cada una de las habilidades del pensamiento geométrico espacial definidas anteriormente se demuestra su carácter sistémico, pues se evidencian relaciones de coordinación y subordinación. Las relaciones de coordinación se manifiestan en que estas habilidades no se pueden desarrollar de manera aislada, cada una independiente de la otra, pues unas con otras se complementan, se enriquecen, se profundizan, se sistematizan. Las relaciones de subordinación se manifiestan en que un estudiante no puede lograr el desarrollo de las habilidades del nivel de análisis-síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor, sin antes no tener suficientemente desarrolladas las habilidades del nivel anterior, es decir,

las habilidades del nivel de visualización, identificación y representación de objetos geométricos.

### **3.3. Metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial**

La metodología para la conducción por los profesores del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se concibe como una orientación teórica y metodológica, que sustentada en el enfoque desarrollador, posibilita el establecimiento de procedimientos desarrolladores que se dinamicen a través de eslabones, componentes, acciones y orientaciones metodológicas por eslabones, con el fin de lograr la preparación del profesor de Matemática de la educación universitaria en la conducción del proceso de desarrollo de estas habilidades. En correspondencia con lo anterior, se hace necesario explicar en qué consisten los procedimientos desarrolladores para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

#### **3.3.1. Procedimientos desarrolladores para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial**

Desde el punto de vista didáctico, los procedimientos son definidos en la literatura científica como un sistema de acciones ordenadas para instrumentar vías, alternativas, estrategias, que contribuyan al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Tienen como propósito orientar las etapas didácticas a seguir en este, con un carácter flexible y contextualizado que asegure la construcción del aprendizaje significativo (Rodríguez, 2008).

Estos procedimientos se consideran desarrolladores, pues reflejan los principios planteados para la enseñanza y el aprendizaje desarrollador, de manera que estimulen el desarrollo intelectual, el aprendizaje y ofrezcan vías para que el proceso de búsqueda, construcción y asimilación del conocimiento de la geometría del espacio, lo que le permite al estudiante trazarse estrategias de trabajo para resolver problemas geométricos de la estereometría, sobre la base del desarrollo de su pensamiento geométrico espacial. Al tener como sustento el enfoque desarrollador para la determinación de estos procedimientos, se parte del análisis de la lógica aproximada

que sigue el estudiante para buscar la vía de solución de un problema geométrico de la estereometría.

Primeramente, el alumno debe hacer una lectura analítica del problema para comprender de qué trata, para precisar sus condiciones y exigencias, identificar las figuras planas o cuerpos geométricos explícitos en el texto y/o figura auxiliar (si forma parte del texto), construir cuando sea necesario las figuras planas o cuerpos geométricos dados en las condiciones y exigencias, extraer la información que aportan los datos, en las condiciones y en las exigencias, mediante la definición de conceptos y la formulación de teoremas, propiedades y fórmulas vinculadas a estos.

A continuación, el estudiante, atendiendo a las exigencias del problema, comienza a establecer relaciones lógicas entre los conceptos, propiedades, fórmulas y a deducir consecuencias, que pueden ser el descubrimiento de otros conceptos, propiedades, fórmulas y, por ende, tenga que definirlos, formularlos y establecer nuevas relaciones entre ellos, hasta obtener un conjunto de relaciones necesarias y suficientes que lo conduzcan a cumplir con la exigencia del problema y que le permita elaborar posibles planes de solución. Se ha de destacar que, en la búsqueda de las relaciones, unas se relacionan con otras y de este proceso se deducen otras, es un proceso necesario, que debe ser aprendido por los estudiantes.

Por último, el estudiante debe experimentar y demostrar que el o los planes de solución, por él trazados, conducen de las condiciones a las exigencias del problema. De esa forma, decidir cuál es el plan de solución que asumirá definitivamente para resolver el problema.

En ese proceso de experimentación, puede suceder que el o los planes no conduzcan a la solución del problema. En este caso, se valora si este ha sido correctamente elaborado, si le falta o sobra algún paso, si los pasos están lógicamente ordenados, si es necesario, perfeccionarlos; se revisa, reconsidera, perfecciona o rechaza la estrategia de trabajo, seguida en la solución del problema, culminando este proceso cuando se llegue a lo exigido en el problema. Atendiendo a lo descrito anteriormente se proponen cinco procedimientos, como se muestran en a figura 4.

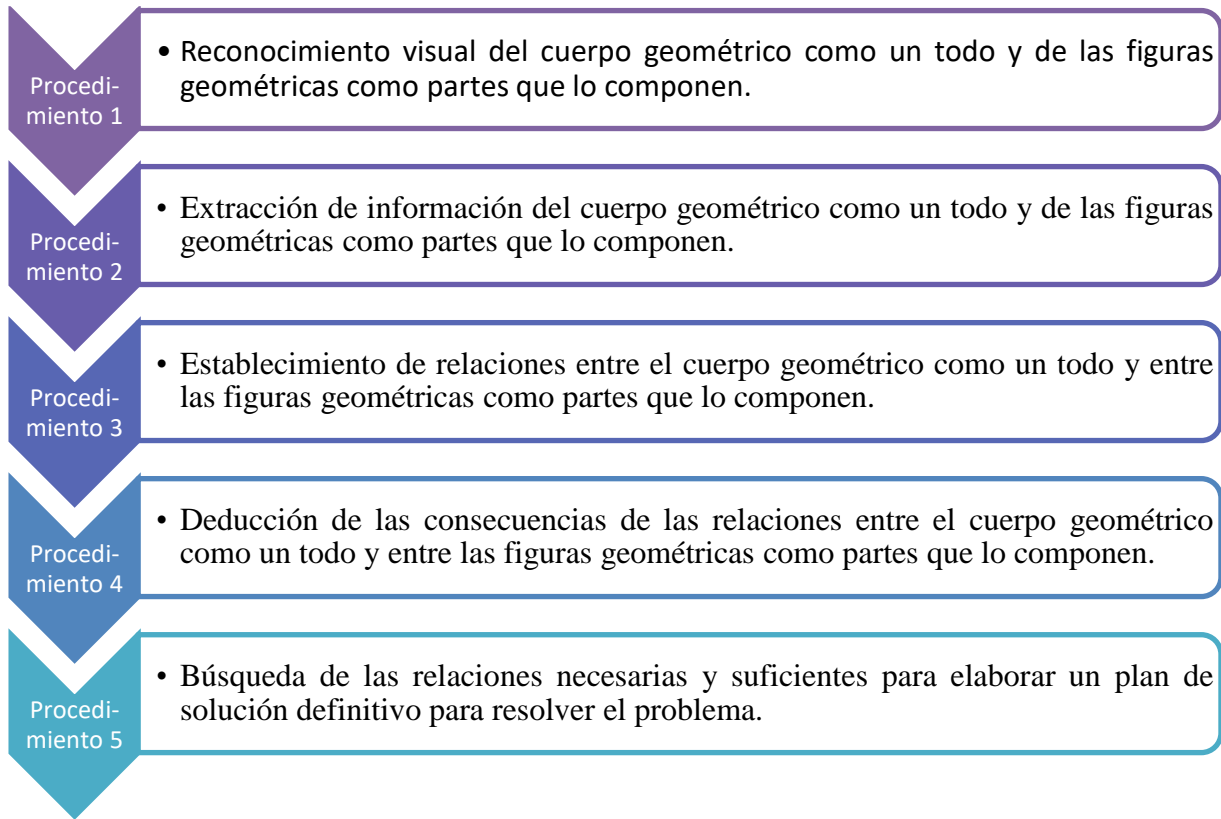


Figura 4. Procedimientos para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial

A continuación, se explica en qué consiste cada uno de estos procedimientos.

**Procedimiento 1.** Reconocimiento visual del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.

Este procedimiento consiste en que a partir de la lectura analítica que realice el estudiante de las condiciones y exigencias del problema geométrico, le permitan:

- observar, describir, identificar el cuerpo geométrico que se da como un todo, así como las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes; y
- representar sobre lo bidimensional el cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos, así como la forma real de las figuras geométricas tanto planas como espaciales que se identifican como partes del mismo, tanto en su superficie, como desde esta hacia el interior o hacia el exterior de este.

Procedimiento 2. Extracción de información del cuerpo geométrico como un todo y de las figuras geométricas como partes que lo componen.

Sobre la base de los resultados de la aplicación del procedimiento anterior, el estudiante puede:

- formular las definiciones de los conceptos asociados al cuerpo geométrico que se da como un todo, así como de las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes;
- formular los teoremas asociados al cuerpo geométrico que se da como un todo, así como a las figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman como sus partes integrantes; y
- precisar las definiciones y teoremas que más se correspondan con las condiciones y exigencias del problema.

Procedimiento 3. Establecimiento de relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.

Una vez se haya realizado un reconocimiento visual y se hayan extraído las informaciones necesarias del cuerpo y de las figuras geométricas que lo conforman, el estudiante deberá:

- relacionar las informaciones extraídas de los conceptos;
- relacionar las informaciones extraídas de los teoremas; y
- relacionar las informaciones extraídas de los conceptos y de los teoremas.

Procedimiento 4. Deducción de las consecuencias de las relaciones entre el cuerpo geométrico como un todo y entre las figuras geométricas como partes que lo componen.

Con la aplicación de este procedimiento el estudiante tiene que:

- buscar, descubrir, de las relaciones extraídas entre los conceptos, entre los teoremas y entre estos, nuevas condiciones o exigencias (un nuevo cuerpo geométrico, una nueva figura plana, un concepto, un teorema, es decir un nuevo

dato) que no se dan explícitamente en el problema, que pueden tener relación estrecha o no con la posible vía de solución; y

- extraer información de estos datos, relacionarlos y deducir otras consecuencias.

Procedimiento 5. Búsqueda de las relaciones necesarias y suficientes para elaborar un plan de solución definitivo para resolver el problema.

Este procedimiento consiste en que el estudiante logre:

- precisar las exigencias del problema;
- pensar en una posible vía de solución o en varias vías posibles para llegar a las exigencias del problema;
- determinar, de todas las informaciones extraídas, las relaciones entre estas y de las consecuencias derivadas, aquellas que se relacionen con cada posible vía de solución pensada y que se consideren sean necesarias y suficientes para su ejecución; y
- elaborar un plan de solución para resolver el problema.

Los procedimientos desarrolladores descritos exigen de la explicación de cómo estos se desarrollan en el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y cuáles son las orientaciones metodológicas concretas para ofrecer al profesor en aras de que pueda adecuarlas a las condiciones específicas del contenido geométrico a tratar y del diagnóstico realizado a sus estudiantes. Ello será explicado a través de los eslabones y componentes en los que se estructura la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación universitaria.

### **3.3.2. Eslabones y componentes de la metodología**

La metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial se estructura en cuatro eslabones y componentes, como se muestra en la figura 5.



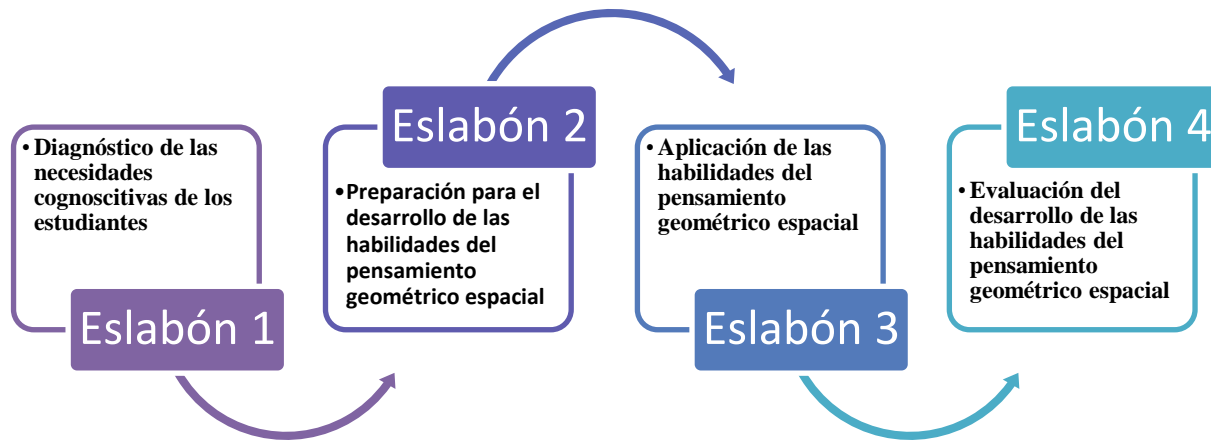


Figura 5. Eslabones que conforman la metodología propuesta para conducir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial

A continuación son detallados estos eslabones, sus objetivos, componentes y orientaciones metodológicas para su implementación.

#### Eslabón de diagnóstico de las necesidades cognitivas de los estudiantes

Este primer eslabón tiene por objetivo diagnosticar el nivel de conocimientos y el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial que poseen los estudiantes para resolver problemas geométricos de la estereometría de forma individual y colectiva. Este se estructura en dos componentes: el diagnóstico de trabajo individual y el diagnóstico de trabajo en colectivo.

El diagnóstico de las necesidades cognitivas de los estudiantes es un eslabón necesario para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, pues del conocimiento de las limitaciones y potencialidades que tengan los estudiantes en la aplicación de estas en la resolución de problemas geométricos de la estereometría, depende en gran medida de la calidad de su aprendizaje, que debe manifestarse en las formas y modos de actuar de estos para planificar, organizar, ejecutar y controlar sus acciones para resolverlos de forma colectiva e individual. A través de este diagnóstico se determina la situación actual de:

- los conocimientos y habilidades del pensamiento geométrico espacial precedentes que cada estudiante debe haber asimilado de enseñanzas o grados anteriores, así como las formas y modos de actuar, estrategias de trabajo que domina para resolver de forma individual estos tipos de problemas y su actitud para resolver problemas y hacia el aprendizaje de la geometría del espacio (componente de diagnóstico de trabajo individual); y
- las limitaciones y potencialidades que manifiestan los estudiantes en el trabajo en colectivo, principalmente en equipos (componente de diagnóstico de trabajo en colectivo).

#### Componente de diagnóstico de trabajo individual

Para aplicar el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas, el colectivo de profesores de Matemática del año, debe seguir las siguientes acciones metodológicas.

- Precisar los conocimientos, habilidades y procederes precedentes que debe dominar el estudiante.
- Aplicar instrumentos de diagnóstico, que permitan no solo diagnosticar contenidos sino también potencialidades y actitudes ante el aprendizaje de la Matemática.
- Procesar la información derivada de los resultados de la aplicación de los instrumentos de diagnóstico.
- Socializar con cada estudiante y con el grupo los resultados del diagnóstico y trazar estrategias para su corrección.

#### Componente de diagnóstico de trabajo en colectivo

Las acciones metodológicas que debe ejecutar el colectivo de profesores de Matemática son las siguientes.

- Organizar a los estudiantes del grupo en equipos.
- Seleccionar los problemas que se presentarán a los estudiantes para su resolución en equipo.

- Preparar la guía de observación para evaluar el trabajo de los estudiantes en equipo.
- Aplicar la guía de observación en la resolución por los equipos del problema planteado.
- Procesar la información derivada de los resultados de la aplicación de la guía de observación.
- Socializar con cada equipo las potencialidades y limitaciones que presentan para trabajar en colectivo.

#### Orientaciones metodológicas del eslabón

Para instrumentar el diagnóstico de trabajo individual se debe realizar un estudio analítico de los programas de enseñanzas y años que anteceden a la enseñanza que cursa el estudiante, con el fin de determinar los conceptos, los teoremas, los procedimientos geométricos de la geometría plana y del espacio y las habilidades del pensamiento geométrico espacial, que debe dominar el estudiante para estar en condiciones de asimilar el contenido de la geometría del espacio.

En este sentido, no se debe perder de vista que con las habilidades del pensamiento geométrico espacial. Están intrínsecamente relacionadas las habilidades del pensamiento lógico, por ello, se hace necesario también, tenerlas en cuenta.

Luego, se debe hacer un inventario de los conceptos, teoremas, procedimientos geométricos de la geometría plana y del espacio, así como de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. Se delimitan aquellos que se consideren esenciales, ya que a través de ellos se pueden diagnosticar los demás. Para realizar el diagnóstico se debe elaborar una prueba pedagógica en la que se tenga en su cuestionario dos tipos de preguntas.

- Preguntas de carácter reproductivo, en la que el estudiante reproduce conocimientos, habilidades y procederes. Para ello, se pueden utilizar ítems o la integración de ítems de base común, de verdadero o falso, de selección simple y múltiple, de selección de la respuesta incorrecta y de completamiento de espacios en blanco para obtener una proposición verdadera.

- Preguntas de carácter productivo, donde el estudiante tenga que resolver un problema geométrico propiamente dicho.

Además, se planifica un encuentro conversatorio con el estudiante, donde este explique cómo procedió para resolver cada una de las preguntas de la prueba pedagógica, con el propósito de conocer por qué motivos o causas no resolvió alguna, algunas o ninguna de ellas. Este momento es importante pues pudo haber preguntas que las resolvió mecánicamente sin reflexionar, sin pensar, por azar y otras que no resolvió, aunque pudo poseer los contenidos necesarios por cuestiones de estado de ánimo, motivación, interés, no comprensión de la tarea, u otra causal.

También en este encuentro, se debe diagnosticar las potencialidades de los estudiantes para planificar, ejecutar y autocontrolar sus acciones, para reconocer, identificar y corregir sus errores en el proceso de solución de las tareas, para conocer su motivación por la matemática, y en especial, por la geometría del espacio.

Para procesar los resultados del diagnóstico se elaboran tablas resumen en las que se recoge de cada estudiante del grupo, los conceptos, teoremas, procedimientos y el nivel de desarrollo de las habilidades evaluadas en el diagnóstico del pensamiento geométrico espacial. Se tendrán en cuenta cuatro niveles: alto, medio, bajo y nulo.

La evaluación de los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se orienta realizarla a través de la operacionalización de esta variable, que se explica a continuación.

En primer lugar, para reconocer el nivel de desarrollo de tales habilidades en los estudiantes se considerarán las siguientes dimensiones, que se determinan a partir de los momentos del desarrollo de cualquier actividad: orientación, ejecución y control de la habilidad. Para cada una de las dimensiones se precisan los siguientes indicadores.

Dimensión 1: Orientación en la habilidad

Indicadores

- Identificación de la habilidad: consiste en reconocer, según la tarea planteada, la habilidad que debe ejecutar a partir de la lectura analítica que realiza de la tarea.

- Conocimiento de la habilidad: consiste en el conocimiento que tenga de las operaciones de la habilidad.
- Disponibilidad para realizar la habilidad: consiste en la necesidad y motivación que sienta por realizar la habilidad y la búsqueda de los medios y recursos que necesita para ello.

## Dimensión 2: Ejecución de la habilidad

### Indicadores

- Ejecución consciente de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en observar si el estudiante es capaz de desplegar las operaciones, de manera consciente, a través de un plan preconcebido para ello.
- Rapidez en la ejecución de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en el tiempo que utiliza el estudiante para la realización de las operaciones.
- Calidad de la ejecución de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en la forma con que realiza las operaciones para el logro exitoso del objetivo o finalidad de la habilidad que ejecuta.

## Dimensión 3: Control de la habilidad

### Indicadores

- Valoración de la realización de cada una de las operaciones que conforman la habilidad: consiste en valorar de manera consciente que la realización de cada operación es correcta y cumple con la finalidad de su ejecución.
- Identificación de los errores en la ejecución de la habilidad: consiste en reconocer los errores que cometió en la realización de las operaciones que conforman la habilidad.
- Corrección de los errores en la ejecución de la habilidad: consiste en saber corregir los errores que cometió en la realización de las operaciones que conforman la habilidad.

Escalas de medición de los indicadores, dimensiones y del nivel de desarrollo de la habilidad. La medición se realizará en el rango de 0 a 3 puntos. A cada indicador se le dará una puntuación dentro de ese rango, 0 significa el nivel nulo del indicador, 1 el

nivel bajo, 2 el nivel medio y 3 el nivel alto. Cada dimensión y la variable se evaluará de la siguiente manera: de 0 a 0,9 es el nivel nulo; de 1 a 1,9 es el nivel bajo; de 2 a 2,8 es el nivel medio y de 2,8 a 3 es el nivel alto.

De las tablas resumen que realicen, se determina los conceptos, teoremas, procedimientos y habilidades en los que con mayor frecuencia presentan dificultades la mayoría de los estudiantes para reactivarlos y tratarlos de manera explícita en las clases, así como aquellas muy puntuales en determinados estudiantes, que serán atendidas en el tratamiento a sus diferencias individuales.

Para organizar a los estudiantes por equipos para la realización del diagnóstico de trabajo en colectivo, se toma en cuenta la entrega pedagógica realizada por enseñanzas o por el grado anterior y los resultados del diagnóstico de trabajo individual. En la composición de los equipos se selecciona como líder a un estudiante de alto rendimiento y como sus demás miembros a estudiantes de medio y bajo rendimiento, es decir, la composición es heterogénea.

Los equipos que se conformen deben oscilar entre cuatro y cinco estudiantes, para lograr un trabajo colectivo de mayor calidad y la composición de los mismos debe ser presentada al colectivo de estudiantes para su conocimiento e informarles la importancia y la necesidad de estos para aprender a resolver problemas en colectivo.

Como parte de la preparación y planificación del diagnóstico, el colectivo de profesores, con la guía del profesor del grupo, selecciona los problemas que se les van a plantear a los equipos, sobre la base de los conocimientos, habilidades y procederes precedentes, precisados para la realización del diagnóstico de trabajo individual. Antes de la aplicación del diagnóstico, se prepara una guía de observación para evaluar el trabajo de los estudiantes en equipo, en la cual deben considerarse los siguientes indicadores.

- Actitud con que el equipo asume la tarea, es decir, si todos los miembros la asumen con el mismo agrado y disposición para realizarla, si se sienten motivados por su realización y si le prestan la debida atención.



- Manera en cómo el equipo organiza la realización de la tarea. En este caso, se observa cómo el líder del equipo distribuye, planifica y organiza el trabajo de sus miembros.
- Forma en cómo el equipo realiza la tarea. En este indicador se pretende observar cómo los estudiantes del equipo muestran responsabilidad en la realización de las tareas asignadas por su líder, la calidad de su ejecución, el control del trabajo del equipo por parte de su líder, constancia y perseverancia en su realización, consenso en la toma de decisiones acerca de la posible vía de solución a la tarea, reconocimiento y corrección de los posibles errores que se comenten en su ejecución y la forma en cómo se discuten las soluciones en su seno.

Esta guía se aplica a continuación del proceso de resolución de los problemas que se plantee a cada uno de los equipos del grupo, con el fin de precisar las limitaciones y potencialidades de los estudiantes para trabajar en colectivo, las que se deben socializar con estos, en un ambiente de confianza, comprensión y respeto mutuo, momento sumamente importante para lograr la compenetración de sus miembros y de esta forma, lograr mayor unidad en el equipo.

Eslabón de preparación para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. El eslabón de preparación tiene el objetivo de preparar y entrenar al estudiante en las acciones que son necesarias ejecutar para desarrollar las habilidades del pensamiento geométrico espacial a través de la resolución de ejercicios y problemas geométricos. Se estructura en dos componentes: preparación motivacional–afectiva y preparación cognitivo-instrumental. Los componentes en los que se estructura este eslabón guardan una estrecha relación, pues no se realizan de manera independiente, aislado uno del otro, ambos se integran y complementan en el proceso de enseñanza–aprendizaje.

En el componente de preparación motivacional-afectiva se realizan las siguientes acciones metodológicas.

- Plantear situaciones problémicas a través de las cuales los estudiantes comprendan la necesidad y utilidad que tienen para ellos, el dominio y asimilación de habilidades

del pensamiento geométrico espacial en la resolución de problemas geométricos de la estereometría de carácter extra e intramatemático.

- Demostrar a los estudiantes, a través de la resolución de problemas, que ellos pueden superar las limitaciones que se detectaron en el diagnóstico sobre sus necesidades cognoscitivas.
- Crear un ambiente de respeto entre los estudiantes, a sus opiniones, a sus ideas, a la posibilidad de cometer errores y de recibir la ayuda necesaria por parte del profesor o de sus compañeros de clase o del equipo en el que está insertado.

En el Componente de preparación cognitivo-instrumental se realizan las siguientes acciones metodológicas.

- Planificar y realizar clases de repaso, consultas colectivas e individuales para trabajar las dificultades detectadas en el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes.
- Reactivar en cada clase los conceptos, teoremas y procedimientos previos esenciales, tanto para el tratamiento de un nuevo contenido, como para su consolidación.
- Entrenar a los estudiantes, a través de la resolución de ejercicios y problemas, en la realización de los procedimientos desarrolladores para el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico en ese proceso, en todas las clases que se planifiquen.

En las clases, para el planteamiento a los estudiantes de la situación o de las situaciones problémicas, como vía de motivación y orientación hacia el objetivo, se deben tomar en cuenta las limitaciones y potencialidades detectadas en el diagnóstico, para no presentar una situación que los estudiantes no puedan analizar y determinar la contradicción entre lo conocido y lo desconocido.

Estas situaciones problémicas pueden ser analizadas por equipos o individualmente, en dependencia de su complejidad. Cuando se planteen por equipos, el profesor va a facilitar un conjunto de orientaciones para que a partir de ellas, se guíen en el análisis. Estas orientaciones ayudan a que el análisis se realice mediante la ejecución de los procedimientos desarrolladores y de esta forma contribuir al tratamiento de las





habilidades del pensamiento geométrico espacial. Luego, en la discusión de la situación problemática el profesor controlará cómo los equipos fueron consecuentes con ellas.

En el caso que estas se analicen de forma individual, el profesor después que el estudiante haya empleado un tiempo al análisis, mediante el método de conversación heurística, guía el pensamiento de los estudiantes en la realización de los procedimientos desarrolladores.

Por ejemplo, en la clase de tratamiento de nuevo contenido, relacionada con perpendicular, oblicua a un plano y el ángulo que forma la oblicua con el plano, después de reactivar la definición de perpendicular a un plano, el teorema que caracteriza cuándo una recta es perpendicular a un plano, así como la definición de triángulo rectángulo, se puede plantear a los estudiantes la siguiente situación problemática.

En un parque de diversiones se quiere construir un local para video juegos que tenga forma de pirámide recta de base rectangular de 30 x 40 m. Si se quiere que las esquinas del local formen un ángulo de 600 con la base, ¿qué altura deberá tener el local?

En esta situación problemática, por su complejidad, el profesor debe solicitar su análisis por equipos, a los cuales facilitará las siguientes orientaciones.

- Lee detenidamente el problema y extrae lo que se da como datos y lo que se pide determinar.
- Haz en tu libreta un esbozo de la figura geométrica que se da en los datos y refleja en ella lo que se da y lo que se pide.
- Representa en tu libreta esta figura vista de frente, de un lado y desde arriba.
- Observa el esbozo de la figura geométrica realizado y la representación realizada desde las diferentes vistas e identifica todas las figuras geométricas que lo componen.
- Representa en tu libreta la forma real de esas figuras geométricas.
- Formula las definiciones de las figuras geométricas identificadas.
- Si conoces teoremas o proposiciones o propiedades asociados a las figuras geométricas identificadas fórmalos.



- Precisa las definiciones y teoremas, proposiciones o propiedades que consideres se ajustan más a lo que se da y lo que se pide en el problema.
- Analiza cuáles son las relaciones que puedes establecer entre esas definiciones, teoremas, proposiciones o propiedades que te den una idea de cómo obtener lo que se te pide en el problema.

Con estas orientaciones se pretende que el estudiante se percate cuándo analiza lo que da y lo que se pide, hay conceptos relacionados con las esquinas y el ángulo que esta forma con la base de la pirámide que desconoce. Esto se puede aprovechar por el profesor para motivar el contenido de la clase y para orientar hacia su objetivo.

Las cinco primeras orientaciones se corresponden con el procedimiento de reconocimiento visual y se contribuye a familiarizar los estudiantes con las habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos. Las cuatro orientaciones restantes, se corresponden con los procedimientos de extracción de la información y establecimiento de relaciones y que contribuyen a la familiarización con las habilidades del nivel de análisis–síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.

En la discusión que realicen los equipos del análisis de la situación problémica, el profesor les demuestra a los estudiantes cómo pueden superar las limitaciones que presentan, mediante los niveles de ayuda que pueda ofrecer a los equipos y mediante la atención a las diferencias individuales. En ello, contribuye a la creación de un ambiente de respeto mutuo entre los integrantes del equipo, de confianza en sus posibilidades, la ayuda mutua que pueden ofrecer los unos a los otros, la perseverancia en la realización de las orientaciones, en la organización del trabajo en el equipo. De esta forma, se preparan desde el punto de vista motivacional-afectivo y cognitivo-instrumental, lo que demuestra la interrelación que existe entre los componentes de este eslabón.

En el caso de que la situación problémica sea analizada de forma individual, en su discusión, las orientaciones anteriores se realizan a través de la aplicación de procedimientos heurísticos, mediante la utilización del método de conversación heurística, es decir, los estudiantes las realizan a través del intercambio profesor–estudiante.

En las clases de repaso, las consultas colectivas e individuales, en las clases de tratamiento al nuevo contenido y en las de ejercitación de cada sistema de clases de una unidad, se debe explicar, ejercitar y sistematizar las orientaciones o los impulsos que se proponen en la tabla 1. Estos se les deben facilitar a los estudiantes durante el proceso de resolución de ejercicios y problemas, a través de los cuales se les prepare y entrene para realizar los procedimientos desarrolladores que llevan consigo el tratamiento de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Procedimiento	Orientaciones para el trabajo en equipo	Habilidades que con mayor importancia se desarrollan
Reconocimiento visual	1.Lee detenidamente el problema y extrae los datos y lo que se pide determinar. 2.Haz en tu libreta un esbozo de la figura geométrica que se da en los datos y refleja en ella lo que se da y lo que se pide. 3.Representa en tu libreta esta figura vista de frente, de un lado y desde arriba. 4.Observa el esbozo de la figura geométrica realizado y la representación realizada desde las diferentes vistas e identifica todas las figuras geométricas que lo componen. 5.Representa en tu libreta la forma real de esas figuras geométricas.	Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos.
Extracción de información	6.Formula las definiciones de las figuras geométricas identificadas. 7.Si conoces teoremas o proposiciones o propiedades asociados a las figuras geométricas identificadas fórmulas. 8.Precisa las definiciones y teoremas, proposiciones o propiedades que consideres se ajustan más a lo que se da y lo que se pide en el problema.	Habilidades del nivel visualización, identificación y representación de objetos geométricos.
Establecimiento de relaciones	9. Analiza cuáles son las relaciones que puedes establecer entre esas definiciones, teoremas, proposiciones o propiedades que te den una idea de cómo obtener lo que se te pide en el problema.	Habilidades del nivel de análisis-síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.
Deducción de consecuencias	10.De las relaciones que se pueden establecer entre el cuerpo geométrico y esas figuras planas y entre ellas, prestando atención a los datos que se dan y a lo que se pide, qué nuevos datos y relaciones entre ellos puedes obtener, que te puedan servir para pasar de lo dado a lo buscado.	Habilidades del nivel de análisis-síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.
Búsqueda de	11. Tomando en cuenta todas las	Habilidades del nivel de

<p>las relaciones necesarias y suficientes</p>	<p>informaciones que te aportan los conceptos y teoremas asociados al cuerpo geométrico y las figuras planas identificadas, así como los nuevos datos obtenidos, las relaciones entre ellos y en correspondencia a lo que se pide, determina aquellas relaciones que consideres necesarias y suficientes para solucionar el problema. 12. Sobre la base de esas relaciones necesarias y suficientes, determina una o varias vías de solución del problema y para cada una de ellas elabora un plan de solución.</p>	<p>análisis–síntesis, de razonamiento deductivo y de rigor.</p>
--	---	---

Tabla 1. Orientaciones y habilidades del pensamiento geométrico espacial en la realización de los procedimientos desarrolladores

En las clases de tratamiento al nuevo contenido, como se analizó anteriormente, se debe entrenar a los estudiantes en la ejecución de tres de estos procedimientos, mediante el análisis de situaciones problemáticas. Este no es el único momento en que se utilizan ni son los únicos que se emplean, pues en la introducción de un nuevo concepto, un nuevo teorema, un nuevo procedimiento geométrico y en la propia resolución del problema presentado en la situación problemática, se deben utilizar los restantes procedimientos. En estos tipos de clases, la ejecución de los procedimientos es guiada por el profesor.

Uno de los aspectos importantes en la preparación de los estudiantes para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico está en la propuesta de tareas de aprendizaje que exijan para su ejecución, de la realización de acciones de los procedimientos desarrolladores a través de la resolución de ejercicios y problemas. Estas tareas se van a clasificar sobre la base de las acciones de un procedimiento o de la integración de las acciones de dos o más procedimientos. Los tipos de tareas son los siguientes.

- Tareas de definición y caracterización de un cuerpo geométrico y de sus figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman. En estos tipos de tareas se requiere de la observación, la descripción, la identificación de todas estas figuras, la formulación de definiciones y teoremas asociados. Se integran, por tanto, acciones del procedimiento de reconocimiento visual y de extracción de información.
- Tareas de construcción de cuerpos geométricos. En estos se requiere de la representación de este sobre lo dimensional visto desde diferentes ángulos y de la

forma real del mismo y de las figuras geométricas que lo componen, de la identificación de estas figuras y formulación de sus definiciones. Se integran acciones del procedimiento de reconocimiento visual y de extracción de información.

- Tareas de deducción de consecuencias, en los que se debe identificar figuras geométricas, formular definiciones y teoremas asociados a estos, representar sobre lo dimensional el cuerpo y la forma real de las figuras que lo constituyen, relacionar informaciones entre conceptos, entre teoremas y entre conceptos y teoremas, así como buscar y descubrir consecuencias que se derivan de estas relaciones. Se realizan acciones de los procedimientos reconocimiento visual, extracción de información, establecimiento de relaciones y deducción de consecuencias.
- Tareas de elaboración de vías de solución a problemas, en las que se integran todas las acciones de todos los procedimientos desarrolladores en la resolución de problemas geométricos de estereometría.

Estas tareas se pueden proponer una independientemente de la otra como la integración de dos o más de ellas. A continuación, se ofrecen dos ejemplos de tales tareas.

Ejemplo 1. Tarea de definición y caracterización de un cuerpo geométrico y de sus figuras geométricas tanto planas como espaciales que lo conforman

Lea el siguiente problema.

En la figura 6 se muestra un paralelepípedo ABCDEFGH en cuyas bases se tiene un cuadrilátero de diagonales iguales y perpendiculares, que se cortan en su punto medio. Las aristas laterales del mismo son perpendiculares a las bases del paralelepípedo. La diagonal  $\overline{AG}$  del paralelepípedo mide 3,0 m. Si las diagonales de las bases de este tienen la misma longitud que sus aristas laterales, calcula el volumen del paralelepípedo.

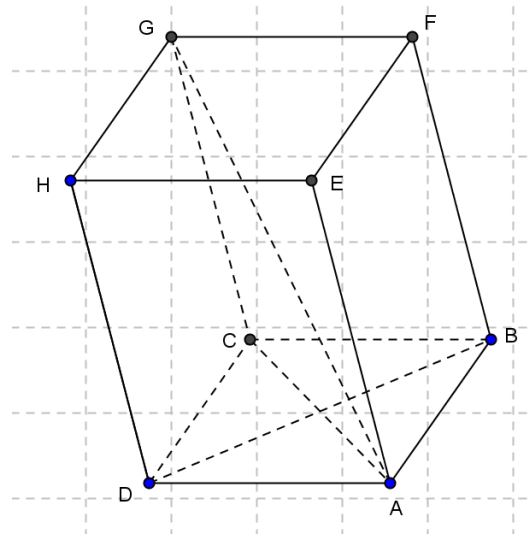


Figura 6. Paralelepípedo ABCDEFGH

Luego de leído detenidamente este problema realice las siguientes acciones.

- Identifica las figuras planas que están en las bases y en las caras de este paralelepípedo. Argumenta cómo lograste identificarlas.
- Identifica el tipo de paralelepípedo que se presenta en la figura. Argumenta cómo lograste identificarlo.
- Identifica las figuras planas que observas en el interior del paralelepípedo. Argumenta cómo lograste identificarlas y representa la forma real de estas, estableciendo la escala de 1,0 cm por 1,0 m.

Ejemplo 2. Tarea de elaboración de vías de solución a problemas

Dado el siguiente problema, determine el área total del cuerpo geométrico cuyas vistas se representan en la figura 7 y conocido que  $\angle EDA = 47,6^\circ$ .

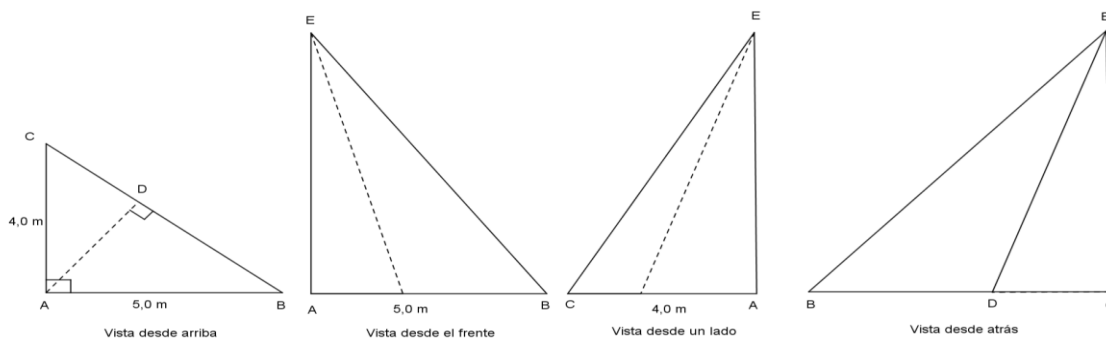


Figura 7. Diferentes vistas de la figura espacial ABCDE



- Representa un esbozo del cuerpo geométrico que se corresponde con las vistas dadas. Identifícalo y argumenta qué hiciste para ello.
- Nota: las líneas discontinuas representan rectas que se observan por detrás de la vista dada.
- Identifica las figuras planas que están en las bases y en las caras de este cuerpo. Argumenta cómo lograste identificarlas.
- Identifica las figuras planas que observas en el interior del cuerpo. Argumenta cómo lograste identificarlas y representa su forma real, establece la escala de 1,0 cm por 1,0 m.
- Formula las definiciones y teoremas relacionados con el cuerpo y con las figuras planas identificadas, en correspondencia con lo que se da y lo que se pide determinar.
- De las relaciones que se pueden establecer entre el cuerpo geométrico y esas figuras planas y entre ellas, presta atención a los datos que se dan y a lo que se pide, qué nuevos datos y relaciones entre ellos puedes obtener, que te puedan servir para pasar de lo dado a lo buscado.
- Ten en cuenta todas las informaciones que te aportan los conceptos y teoremas asociados al cuerpo geométrico y las figuras planas identificadas, así como los nuevos datos obtenidos, las relaciones entre ellos y en correspondencia a lo que se pide, determina aquellas relaciones que consideres necesarias y suficientes para solucionar el problema.
- Sobre la base de esas relaciones necesarias y suficientes, determina una o varias vías de solución del problema y para cada una de ellas, elabora un plan de solución.
- Comprueba cuál es el plan de solución que te permite resolver el problema de una forma más racional.
- Resuelve el problema, siguiendo ese plan de solución.

Eslabón de aplicación de las habilidades del pensamiento geométrico espacial

Este eslabón tiene por objetivo que los estudiantes perfeccionen la ejecución de estas habilidades en la resolución de problemas geométricos de la estereometría. Consta de

los componentes: aplicación a problemas de exigencias determinísticas y aplicación a problemas de exigencias no determinísticas.

Una vez que los estudiantes estén preparados y entrenados en la realización de los procedimientos desarrolladores, mediante los cuales despliegan las habilidades del pensamiento geométrico espacial, se prosigue a su aplicación en la resolución de problemas, donde se minimiza las orientaciones e impulsos dados por el profesor, el trabajo individual y por equipos, convierte lo esencial en el aprendizaje de los estudiantes.

Esto no significa que no se atiendan las diferencias individuales, el trabajo que realiza cada estudiante y cada equipo, ni que en un momento determinado haya que remitirlos a las orientaciones que tienen en sus manos o que el profesor les facilite impulsos para guiar su pensamiento en el proceso de resolución de los problemas.

Componente de aplicación a problemas de exigencias determinísticas.

Se entiende por problema de exigencias determinísticas a aquellos problemas cuyas exigencias responden a la determinación de una magnitud (longitud de un segmento, amplitud de un ángulo, áreas, volúmenes), a la determinación o demostración de una relación de paralelismo, de perpendicularidad entre rectas, entre rectas y planos y entre planos.

Acciones metodológicas

- Seleccionar o elaborar el sistema de problemas de exigencias determinísticas que se van a plantear a los estudiantes en cada sistema de clases.
- Precisar los problemas del sistema que se van a resolver de manera independiente y aquellos que se van a resolver por equipos.
- Planificar en las clases dos momentos, uno en el que los estudiantes trabajen en la solución y el otro de discusión de las soluciones.

Componente de aplicación a problemas de exigencias no determinísticas.

Se entiende por problema de exigencias no determinísticas, a aquellos problemas cuyas exigencias responden a la búsqueda, investigación, descubrimiento de relaciones entre determinadas magnitudes que satisfagan una relación o la obtención de una



magnitud bajo determinadas condiciones. Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente:

En la figura 8 se muestra el prisma recto ABCDEF de base triangular.

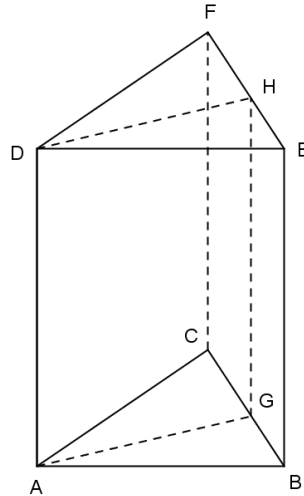


Figura 8. Prisma recto ABCDEF de base triangular

¿En qué posición debe estar el punto G sobre la arista  $\overline{BC}$ , para que el volumen del prisma recto ABGDEH y el volumen del prisma ABCDEF estén en la razón a: b?

#### Acciones metodológicas

- Planificar encuentros de conocimientos en el propio grupo de estudiantes o entre varios grupos de estudiantes.
- Seleccionar o elaborar los problemas de exigencias no determinísticas que se plantearán a los estudiantes en esos encuentros de conocimientos.
- Planificar dos momentos en el encuentro de conocimientos, uno de realización individual y otro de realización colectiva.
- Establecer un tiempo límite para cada momento y de acuerdo al tiempo empleado asignar una puntuación para conocer los equipos del grupo o los grupos que quedan en los tres primeros lugares.

#### Orientaciones metodológicas

En el componente de aplicación a problemas determinísticos el profesor debe seleccionarlos del libro de texto del año o de grados anteriores, de otras fuentes

bibliográficas, de software educativos o de las pruebas de ingreso a la educación superior, los que se organizarán según el contenido de cada sistema de clases. Es decir, para cada sistema de clases se selecciona un sistema de problemas, los que deben ser graduados y ordenados, según su grado de complejidad y dificultad. También algunos de estos problemas pueden ser elaborados por el profesor, los que deben ser revisados y aprobados por el colectivo de profesores del año para evitar errores en su formulación o en su propia concepción.

De estos problemas, el profesor seleccionará aquellos que el estudiante pueda resolver por sí solo y los que se tengan que resolver por equipos, en dependencia de las posibilidades que tengan los para ello, de su preparación y nivel de entrenamiento que hayan logrado, del grado de complejidad y dificultad de los mismos.

Cuando se planteen problemas a los estudiantes tanto para su resolución individual como por equipos, se debe dar un tiempo prudencial para que trabajen de forma independiente, de manera que el profesor pueda controlar el proceder de los estudiantes y brindar orientaciones y niveles de ayuda, en caso de que haya dificultades y de esta forma, incentivarlos en su trabajo o corregir las funciones y el trabajo de ellos dentro del equipo.

Un momento importante, es el de discusión de las soluciones a los problemas, en este se puede emplear la técnica de la ponencia-oponencia. Esto permite que un estudiante o equipo exponga cómo solucionó el problema y otro estudiante u otro equipo o los demás estudiantes o demás equipos, respectivamente, realicen preguntas, revelen y corrijan errores cometidos, den sugerencias sobre las acciones realizadas o sugieran otras vías de solución.

El componente de aplicación a problemas de exigencias no determinísticas es importante para desarrollar el carácter competitivo en los estudiantes, lo que los motiva por la actividad de resolución de problemas y contribuye a elevar la calidad de su aprendizaje. Para ello, es necesaria la planificación de encuentros de conocimientos. Cuando estos se realicen en la propia clase, se ejecutarán entre los estudiantes del propio grupo. En el caso de que se realicen en horarios fuera de clase, se ejecutarán entre dos o más grupos del grado.

En ambos casos los problemas se deben seleccionar y elaborar por el colectivo de profesores del grado, de forma tal que se logre coherencia, claridad tanto en sus condiciones como en sus exigencias y evitar que así que se cometan errores de redacción y de concepción.

En estos encuentros de conocimientos se debe planificar un momento en que a los estudiantes se cuenten con un límite de tiempo para resolver inicialmente por equipos o por grupos, un problema de esta característica y se les asignará una puntuación de acuerdo a la parte de ese tiempo empleada y a la calidad de la solución, que no excederá los 50 puntos. Los restantes 50 puntos serán asignados al momento de elaboración individual, para el cual también se limitará el tiempo; esta puntuación se dosificará tanto para la calidad de la solución como para la parte del tiempo que haya empleado. Por ello, para cada momento, los profesores anotarán en la hoja que se asigne para la resolución del problema, el tiempo empleado.

Por el tiempo empleado se asignará hasta 10 puntos y por la calidad de la resolución hasta 40 puntos. Para cada momento se planteará un problema, el de mayor complejidad se asignará para su solución por equipos y el de menor complejidad para su resolución de forma individual. De la puntuación que se obtenga, el primer lugar se concederá al equipo o grupo de estudiantes que alcance de 90 a 100 puntos, el segundo lugar para el que alcance de 80 a 89,9 puntos y el tercer lugar para el que alcance de 70 a 79,9 puntos.

Eslabón de evaluación del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial

El eslabón de evaluación del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial está presente en todo el proceso de desarrollo de estas habilidades, cuyo objetivo es que el profesor controle el nivel que van alcanzando los estudiantes en este proceso, que le permita brindar los niveles de ayuda necesarios para corregir, orientar y guiar su proceder y, al mismo tiempo, que el estudiante se autoevalúe y evalúe el proceder de sus compañeros con el propósito de reconocer sus limitaciones y las acciones que deben seguir para alcanzar resultados superiores. Son componentes de este eslabón, la evaluación cognitiva y la evaluación metacognitiva.

Se realiza a medida que se ejecutan el resto de los eslabones para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. De manera implícita y explícita se ha hecho referencia a la evaluación tanto del proceso de desarrollo de estas habilidades como al nivel que van alcanzando los estudiantes en el mismo, es decir, al resultado.

A través de este eslabón se valorará el nivel de asimilación de los conocimientos, de las habilidades, los modos de actuar ante las tareas, su constancia y perseverancia en su realización, el colectivismo, la solidaridad, la camaradería, manifestada tanto en el trabajo individual como en el trabajo por equipos. Asimismo, se evaluará la forma en que reconocen sus errores y los corrigen, la forma en que controlan sus acciones para resolver un problema, la forma en que son capaces de saber lo que le falta para alcanzar el objetivo y de buscar los medios para hacerlo. Por ello, este eslabón se estructura en dos componentes: la evaluación cognitiva y la evaluación metacognitiva.

Componente de evaluación cognitiva. Acciones metodológicas

- Realizar valoraciones sistemáticas de los avances, estancamientos y retrocesos de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades, si se toma como punto de partida el diagnóstico de sus necesidades cognoscitivas y el seguimiento a través de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.
- Elaborar estrategias de intervención educativa ante los estancamientos y retrocesos en el desarrollo de las habilidades.
- Realizar encuentros de intercambio correctivo con estudiantes o con equipos de estudiantes que han presentado estancamientos y retrocesos en el desarrollo de sus habilidades.

Componente de evaluación metacognitiva. Acciones metodológicas

- Realizar en todas las clases y fuera de ellas intercambios orales con los estudiantes o con equipos de estudiantes para valorar sistemáticamente las estrategias metacognitivas que utilizan durante el proceso de resolución de problemas.
- Guiar con sistematicidad a los estudiantes en el reconocimiento de sus potencialidades y limitaciones en el desarrollo de sus habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de la resolución de problemas.

- Facilitar vías y estrategias para el autocontrol y corrección de sus proceder en el desarrollo de sus habilidades durante el proceso de resolución de problemas.

### Orientaciones metodológicas

En las orientaciones metodológicas para el eslabón de diagnóstico de las necesidades cognitivas de los estudiantes se precisaron los indicadores para determinar las limitaciones y potencialidades del trabajo de los estudiantes por equipos, los que son válidos para determinar los avances, estancamientos y retrocesos de estos en el desarrollo de sus habilidades tanto desde lo cognitivo como de lo metacognitivo.

También, para medir el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial se establecieron cuatro niveles en ese primer eslabón, teniendo en cuenta las dimensiones e indicadores propuestos para ello. Estos se retoman para las valoraciones sistemáticas que deben realizar el profesor y el colectivo de profesores en la determinación de esos avances, estancamientos y retrocesos.

En los eslabones de preparación y aplicación se dieron orientaciones, niveles de ayudas e impulsos para guiar el pensamiento de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, a través del cual desarrollen sus habilidades del pensamiento geométrico espacial, los cuales se emplean como vías para ayudar a los estudiantes que están estancados o han retrocedidos en ese aspecto.

Se hace necesaria la intervención de todo el colectivo de profesores del año en cuanto a la realización de observaciones sistemáticas a clases, no solo para ayudar a los profesores en la realización de las evaluaciones cognitivas y metacognitivas, sino para corregir dificultades que puedan manifestar en la conducción del desarrollo de las habilidades, con el propósito de ayudarlos desde el punto de vista teórico y metodológico y de esta forma que perfeccionen su accionar didáctico, ya que en ocasiones, un profesor de manera aislada no puede identificar en todos los estudiantes sus limitaciones y potencialidades.

Es importante en el proceso de valoración del aspecto cognitivo de los estudiantes, la realización de intercambios correctivos, para dar a conocer qué les falta para tener éxito, cómo pueden erradicar sus deficiencias, mostrar cómo pueden perfeccionar sus

procederes y cómo pueden erradicar los errores que se comenten en el proceso de resolución de los problemas.

En este sentido, se deben elaborar estrategias de intervención educativa pues se puede encontrar estudiantes que presentan problemas de actitud ante el estudio, de desmotivación hacia la Matemática o hacia la escuela, problemas en el seno familiar, trastornos psicológicos, entre otros, que pueden estar incidiendo en la calidad de su aprendizaje. Entre las posibles acciones que se pueden realizar está la intervención del psicopedagogo de la escuela, de la familia, del colectivo de profesores del grado y de la dirección de la escuela.

Entre las acciones que se pueden realizar dentro de esa estrategia está la de dar participación a la familia en el intercambio correctivo con su hijo o hija, para que conozcan sus limitaciones y potencialidades y puedan ayudar al profesor en ese proceso correctivo. Se puede planificar a su vez escuelas de padres para orientar a la familia en las vías y acciones que pueden utilizar para ayudar a sus hijos en ese sentido.

Otra de las acciones que se puede ejecutar para motivar el estudio por la matemática es la realización de encuentros de conocimientos y la creación de círculos de interés, a través de los cuales el estudiante se comprometa, se solidarice y se responsabilice con el resultado que pueda alcanzar su equipo o grupo en esas actividades.

Los intercambios orales con los estudiantes se realizan con el fin de que estos exterioricen su modo de actuar, los procederes y las estrategias de trabajo que han ejecutado en el proceso de resolución de problemas, lo que permite no solo valorar el nivel de desarrollo de sus habilidades sino también observar el autocontrol que realizan de su aprendizaje.

Un momento importante para realizar estas valoraciones desde lo cognitivo y lo metacognitivo es cuando se realiza la discusión de la resolución de ejercicios y problemas en las clases, con énfasis en las valoraciones que realizan del trabajo de unos y de otros, en un ambiente de respeto, confianza y ayuda mutua, que debe ser propiciado y estimulado por el profesor.

La guía del profesor para que los estudiantes reconozcan sus limitaciones y potencialidades debe ser sistemática y se materializará mediante la facilitación de orientaciones precisas para que estos aprendan a controlar sus acciones, procederes y estrategias de trabajo, en el proceso de resolución de los problemas. Además, incentivar la reflexión que deben realizar los estudiantes sobre la incidencia de sus acciones, procederes y estrategias del trabajo en el éxito o fracaso en la actividad, en cuanto a cuáles de ellas son las más y menos adecuadas para alcanzar el objetivo y así evitar cometer los mismos errores en la resolución de nuevos problemas.

Entre los eslabones de la metodología se establecen relaciones de subordinación y coordinación. La subordinación se manifiesta en el hecho de que la realización de un eslabón depende de la realización del anterior, por ejemplo, no se puede pasar al eslabón de preparación si no se tiene un diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes, puesto que sobre la base de este es que se pueden planificar y ejecutar sus acciones metodológicas. Así mismo sucede con el eslabón de aplicación, pues sus acciones metodológicas dependen de la preparación de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Las relaciones de coordinación se manifiestan en el sentido de que los eslabones se interrelacionan, se complementan y enriquecen unos con otros. Por ejemplo, en los eslabones de diagnóstico, preparación y aplicación se realizan acciones metodológicas que complementan, enriquecen las acciones metodológicas del eslabón de evaluación y viceversa, las acciones de este último eslabón se realizan a través de las acciones de los otros.

#### **Capítulo 4. Validación por métodos neutrosóficos de la metodología propuesta**

En este capítulo se presentan los resultados de la validación por métodos neutrosóficos de la implementación parcial de la metodología para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. Se desarrolló a través de un pre-experimento y se realiza la valoración de su factibilidad y pertinencia mediante el método Delphi de criterio de expertos.

#### 4.1. Algunos elementos teóricos y prácticos sobre la neutrosofía

La neutrosofía es una nueva rama de la filosofía, que abrió un nuevo campo de investigación en la meta-filosofía, y que estudia el origen, naturaleza y alcance de las neutralidades, así como sus interacciones con diferentes espectros ideacionales. Fue creada por el Profesor Florentin Smarandache en 1995.

Etimológicamente neutro-sofía (del francés neutre y del latín neuter que significan neutral y del griego sophia, conocimiento) es el conocimiento de los pensamientos neutrales. Constituye la base para la lógica neutrosófica, los conjuntos neutrosóficos, la probabilidad neutrosófica, y la estadística neutrosófica.

El método de investigación neutrosófico es una generalización de la dialéctica de Hegel que aborda que la ciencia no solo avanzará tomando en consideración las ideas contrarias sino también las neutrales. Su teoría fundamental afirma que toda idea  $\langle A \rangle$  tiende a ser neutralizada, disminuida, balaceada por las ideas, por lo que  $\langle \text{no } A \rangle =$  lo que no es  $\langle A \rangle$ ,  $\langle \text{anti}A \rangle =$  lo opuesto a  $\langle A \rangle$ , y  $\langle \text{neut } A \rangle =$  los que no es ni  $\langle A \rangle$  ni  $\langle \text{anti}A \rangle$ .

La lógica neutrosófica es una generalización de la lógica difusa de Zadeh (1965), y especialmente, de la lógica difusa intuitiva de Atanassov (1986), y de otras lógicas multivaluadas (Leyva-Vázquez, 2018).

La estadística neutrosófica es el análisis de los eventos neutrosóficos y se ocupa de los números neutrosóficos, la distribución de probabilidad neutrosófica, la estimación neutrosófica, la regresión neutrosófica, etc. Se refiere a un conjunto de datos, el cual está formado total o parcialmente por datos con algún grado de indeterminación y a los métodos para analizarlos.

Mientras que la estadística clásica se refiere únicamente al azar, la estadística neutrosófica se refiere tanto al azar como especialmente a la indeterminación. En la estadística clásica se determinan todos los datos; esta es la distinción entre ambas. En muchos casos, cuando la indeterminación es cero, la estadística neutrosófica coincide con la estadística clásica.



Los métodos estadísticos neutrosóficos permiten interpretar y organizar los datos neutrosóficos (datos que pueden ser ambiguos, vagos, imprecisos, incompletos o incluso, desconocidos) para revelar los patrones subyacentes. Con la idea de aplicar los conjuntos neutrosóficos con fines prácticos, surgieron los conjuntos neutrosóficos de valor único (SVNS) con el objetivo de facilitar las aplicaciones en el mundo real de los conjuntos de neutrosóficos y los operadores de conjuntos teóricos.

Un conjunto neutrosófico de valor único (SVNS) se define de la siguiente manera (Leyva-Vázquez y Smarandache, 2018):

Sea  $X$  un universo de discurso, un SVNS  $A$  sobre  $X$  tiene la forma siguiente:

$$A = \{ \langle x, u_a(x), r_a(x), v_a(x) \rangle : x \in X \}$$

Donde:

$$u_a(x): X \rightarrow [0,1], r_a(x): X \rightarrow [0,1] \text{ y } v_a(x): X \rightarrow [0,1]$$

Con

$$0 \leq u_a(x), r_a(x), v_a(x) \leq 3, \quad \forall x \in X$$

Por cuestiones de conveniencia un número neutrosófico de valor único (SVNS) será expresado como  $A = (a, b, c)$ , donde  $a, b, c \in [0,1]$  y satisface  $0 \leq a + b + c \leq 3$ .

Algunas operaciones entre SVNS se expresan a continuación:

1. Dados  $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$  y  $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$  dos SVNS, se tiene que la suma entre  $A_1$  y  $A_2$  se define como:

$$A_1 \oplus A_2 = (a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2)$$

2. Dados  $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$  y  $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$  dos SVNS se tiene que la multiplicación entre  $A_1$  y  $A_2$  se define como:

$$A_1 \otimes A_2 = (a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2, c_1 + c_2 - c_1 c_2)$$

3. El producto por un escalar  $\lambda \in \mathfrak{R}$  positivo con un SVNS,  $A = (a, b, c)$  se define por:

$$\lambda A = (1 - (1 - a)^\lambda, b^\lambda, c^\lambda)$$

4. Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \in \text{SVNS}(x)$ , donde  $A_j = (a_j, b_j, c_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), el Operador de la media ponderada neutrosófica de valor único (SVNWA) propuesto por Ye (2014) está definido de la siguiente forma:

$$P_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = \langle 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_{A_j}(x))^{w_j}, \prod_{j=1}^n (I_{A_j}(x))^{w_j}, \prod_{j=1}^n (F_{A_j}(x))^{w_j} \rangle$$

donde:

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  es vector de  $A_j (j = 1, 2, \dots, n)$  tal que  $w_n \in [0, 1]$  y  $\sum w_j = 1$ .

5. Sea  $A = (a, b, c)$  un número neutrosófico de valor único, la función de puntuación  $S$ , basada en el grado de pertenencia de verdad, indeterminación o falsedad, propuesta por Deli (2015) está definida por:

$$S(A_j) = 2 + T_j - F_j - I_j$$

Adicionalmente se define la función de precisión como:

$$T(A_j) = T_j - F_j$$

Y entonces:

- a. Si  $S(A_j) < S(A_i)$ , entonces  $A_j < A_i$ .
- b. Si  $S(A_j) = S(A_i)$  y  $T(A_j) < T(A_i)$  entonces  $A_j < A_i$
- c. Si  $S(A_j) = S(A_i)$  y  $T(A_j) = T(A_i)$  entonces  $A_j = A_i$

Otra opción es usar la función de puntuación propuesta por Ye (2014):

$$S(A) = \frac{1+a-2b-c}{2}$$

Donde

$$S(A) \in [-1, 1]$$

6. Sea  $A^* = (A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$  un vector SVNS tal que  $A_j^* = (a_1^*, b_2^*, c_2^*)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) y  $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{im})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) y sean  $m$  vectores tal que  $B_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, \dots, c_{ij})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), entonces la distancia entre  $B_i$  y  $A^*$  puede ser calculada con:

$$s_i = \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \left\{ (a_{ij} - a_j^*)^2 + (b_{ij} - b_j^*)^2 + (c_{ij} - c_j^*)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La aplicación más frecuente de las operaciones con SVNS es su asociación con variables lingüísticas para la evaluación cualitativa, clasificación o de manera general, recogida de información con naturaleza imprecisa, indeterminada o subjetiva. Ello se debe a que, por lo general, los expertos se sienten más cómodos proporcionando su conocimiento utilizando términos cercanos a la forma en que los seres humanos usan por medio de las variables lingüísticas (Cabezas y otros, 2017). Una variable lingüística es una variable cuyos valores son palabras o frases en un lenguaje natural o artificial (Romero y otros, 2020).

En los últimos años, se ha aplicado la teoría neutrosófica en áreas tan diversas como la medicina, la agricultura y la meteorología, principalmente para el tratamiento de la incertidumbre. Solo por citar algunos casos, puede mencionarse los siguientes.

Basha, Tharwat, Abdalla, y Hassanien (2019) hicieron un estudio médico para la evaluación de los efectos tóxicos de los medicamentos biotransformados en el hígado utilizando un sistema de clasificación basado en reglas neutrosóficas, el cual genera una buena solución al problema de las clases superpuestas al generar tres componentes diferentes de los cuales dos tratarán con la falsedad e indeterminación de los datos siempre generando mejores resultados que otros modelos convencionales.

Smith (2019) investigó sobre la sostenibilidad del transporte público donde se ilustra un enfoque de toma de decisiones de atributos múltiples (*Multiple Attribute Decision Making*, MADM) para seleccionar sistemas de transporte de sostenibilidad bajo incertidumbre, es decir, con información parcial o incompleta que involucra conjuntos neutrosóficos de valor único.

Abdel-Baset, Chang, Gamal, y Smarandache, (2019) hacen uso de la teoría neutrosófica integrada con la gestión del riesgo en la cadena de suministro a través de una selección de proveedores donde se propone un marco de trabajo que integra ANP (*Analytic Network Process*) con VIKOR (*ViseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje*) en un ambiente neutrosófico al utilizar los números neutrosóficos triangulares

para representar variables lingüísticas que permiten considerar todos los aspectos de una toma de decisiones incluyendo inseguridad y falsedad.

Proenza, Proenza y Hernández (2019) utilizan una hipótesis neutrosófica para demostrar el empleo de programas didácticos en el aprendizaje de operaciones complejas de matemática.

En fin, la lógica neutrosófica, los conjuntos neutrosóficos y las probabilidades y estadísticas neutrosóficas tienen una amplia aplicación en diversos campos investigativos y constituye un novedoso referente de estudio en pleno desarrollo.

#### **4.2. Valoración de la implementación de la metodología, a través de un pre-experimento con el uso de variables lingüísticas asociadas a SVNS**

En este epígrafe se expondrán los resultados de la aplicación de un pre-experimento sobre la aplicación de la metodología propuesta para la conducción del proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en la Universidad de Guayaquil y los principales resultados alcanzados. Se parte de la hipótesis, que tiene como esencia, que la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, desde un enfoque desarrollador contribuirá a elevar el nivel de desarrollo de estas habilidades en los estudiantes, la cual se pudo corroborar en la práctica.

Se utilizaron variables lingüísticas asociadas a conjuntos de números neutrosóficos (SVNS) para la evaluación por los profesores del desarrollo de cada habilidad del pensamiento geométrico espacial en cada estudiante, para un mejor tratamiento de la subjetividad y la imprecisión en dichas evaluaciones. El pre-experimento tuvo tres momentos fundamentales:

- Primer momento, se realizó la constatación inicial con el propósito de determinar el nivel actual de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, a través de los instrumentos descritos más adelante.
- Segundo momento, se realizó la validación con el propósito de valorar si la metodología era viable y si la mayoría de los estudiantes alcanzaban niveles superiores en el desarrollo de las habilidades. Esto se fue comprobando en el

desarrollo de las clases de la subunidad temática. Por último, se realizó una prueba de salida para comparar los resultados finales con los iniciales.

- Tercer momento, se procedió a realizar el análisis y procesamiento estadístico sobre el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes después de aplicada la metodología, atendiendo a las dimensiones e indicadores establecidos.

#### Diseño teórico-metodológico del pre-experimento

Problema: insuficiencias que manifiestan los estudiantes de las carreras de ingenierías en cuanto al desarrollo de sus habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Objetivo: comprobar con la aplicación de la metodología los cambios significativos en el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

Hipótesis de trabajo: la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial contribuye a elevar el nivel de desarrollo de estas en los estudiantes de las carreras de ingenierías, de la Universidad de Guayaquil.

Variable independiente: la metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación universitaria.

Variable dependiente: nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial que alcanzan los estudiantes de las carreras de ingenierías, de la Universidad de Guayaquil.

Entre las variables controladas se encuentra la disposición de los estudiantes para el aprendizaje de los contenidos geométricos de la estereometría y la aplicación del pre-experimento por el propio investigador que es profesor de los grupos seleccionados. El pre-experimento se aplicó tomando como población a todos los estudiantes de las carreras de ingenierías, de la Universidad de Guayaquil y como muestra, los 121 estudiantes que corresponden a la totalidad de los estudiantes matriculados en el primer año de las carreras de Ingeniería de Software, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería en Redes y Telecomunicaciones e Ingeniería Informática, del primer semestre del curso 2019-2020.

## Métodos empleados

Métodos teóricos: análisis y síntesis, para la interpretación de la información recopilada a partir de la aplicación de la metodología.

Métodos empíricos: la observación sistemática del proceso de enseñanza-aprendizaje durante la aplicación de la metodología, así como la prueba pedagógica para identificar las insuficiencias de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Para el desarrollo del pre-experimento se realizaron las siguientes tareas:

1. Confección del diagnóstico inicial y final.
2. Aplicación del diagnóstico inicial.
3. Aplicación de la metodología.
4. Realización de mediciones en las clases, para evaluar el nivel alcanzado por los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
5. Aplicación del diagnóstico de salida.

Para implementar en la práctica la metodología se escogió la Unidad Geometría del Espacio, del programa de la asignatura Matemática, y de esta la subunidad, la temática Geometría sintética del espacio, a la que le antecede la subunidad temática Geometría plana.

Los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta unidad

- Identificar las propiedades que caracterizan y determinan un plano y aplicarlas al reconocimiento de planos y en la demostración de proposiciones sencillas.
- Identificar y fundamentar la posición relativa de dos rectas en el espacio y aplicarla en la formulación y fundamentación de otras proposiciones y en la demostración de proposiciones geométricas sencillas y en el cálculo.
- Reconocer y fundamentar la posición relativa entre una recta y un plano y entre dos planos. Aplicar estas relaciones en formulación y fundamentación de otras proposiciones y en la demostración de proposiciones geométricas sencillas y en el cálculo.

- Identificar los conceptos de perpendicularidad; oblicua y proyección de una oblicua sobre un plano y la relación entre las rectas perpendiculares y las oblicuas a un plano, aplicar estas relaciones al cálculo, la formulación y fundamentación de otras proposiciones geométricas y sus demostraciones.
- Resolver y formular problemas en los que es necesario aplicar, de manera integradora, los conceptos, relaciones y procedimientos de la geometría plana, del espacio y la trigonometría en el cálculo de cuerpos geométricos.

La sub-unidad seleccionada comprende los siguientes conocimientos

- Conceptos primarios de la geometría plana (punto, recta, plano).
- Axioma y teorema: hipótesis o premisas; tesis o conclusión; demostración, recíproco y contrarrecíproco.
- Espacio geométrico. Axiomas básicos de la geometría del espacio.
- Determinación de un plano por dos rectas que se cortan en un punto y su demostración. Determinación de un plano.
- Posición relativa de dos rectas en el espacio.
- Paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano. Definición de la distancia de un punto a un plano.
- Oblicua a un plano y su proyección sobre dicho plano. Ángulos entre rectas y planos y entre planos.
- Teorema de las tres perpendiculares y su recíproco.
- Aplicación de los conceptos, relaciones y procedimientos de la geometría del espacio en la resolución de problemas sobre la demostración de proposiciones y el cálculo geométrico en figuras y cuerpos.

Para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en la subunidad seleccionada, se realizó antes de iniciar la unidad, en la que ella se inserta, el diagnóstico de las necesidades cognoscitivas de los estudiantes para la que se aplicaron los instrumentos que se muestran a continuación, uno dirigido al diagnóstico de entrada y el otro dirigido al diagnóstico de salida.

Instrumento de diagnóstico para medir el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes (prueba pedagógica de entrada en el pre-experimento)

Objetivo: Diagnosticar el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes antes de aplicar la metodología.

### Cuestionario

1. En la figura 9 se muestra un cuerpo geométrico que tiene como base un cuadrilátero convexo. Las diagonales de su base son iguales, se cortan en su punto medio y son perpendiculares. La altura del cuerpo es perpendicular a su base y el pie de esta, coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base;  $\overline{AB} = \overline{BD}$ .
  - a) Identifica las figuras planas que están en las caras y la base de este cuerpo geométrico y al interior del mismo.
  - b) Formula las definiciones de estas figuras planas.
  - c) Formula todas las propiedades y fórmulas que conozcas de estas figuras planas.
  - d) Describe e identifica el cuerpo geométrico dado. Argumenta cómo lo reconociste.
  - e) Formula todas las propiedades y fórmulas relacionadas con este cuerpo geométrico.
  - f) Representa las figuras planas que observas cuando observas el cuerpo desde el frente, desde un lado y desde arriba. Identifica cada una de esas figuras geométricas.

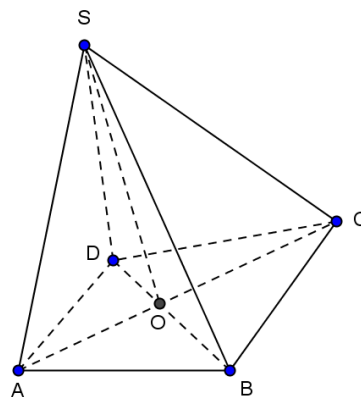


Figura 9. Cuerpo geométrico con base ABCD



En esta pregunta se evalúan las habilidades siguientes.

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

2. En la figura 10 se ha representado un cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos.

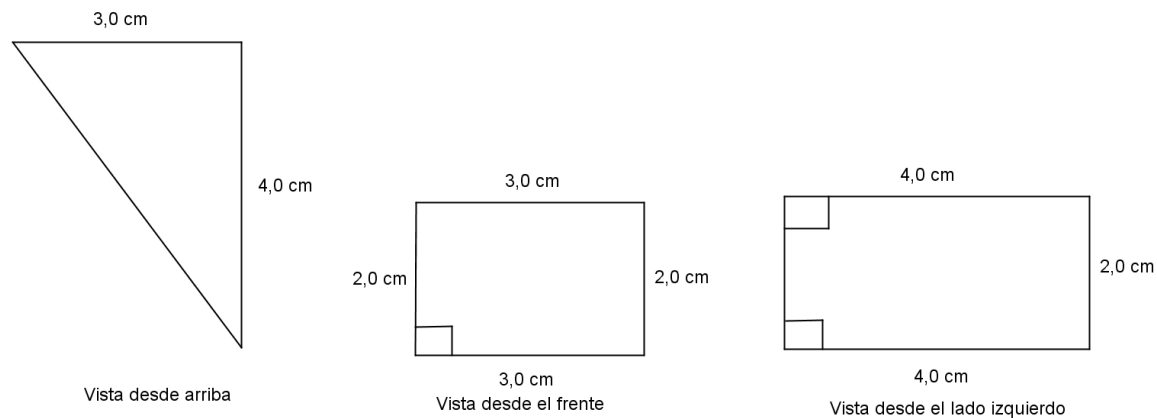


Figura 10. Cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos

- Representa el cuerpo geométrico al que le corresponden estas vistas.
- Identifícalo. Argumenta cómo lo hiciste.
- Identifica las figuras planas que están en la superficie de este cuerpo geométrico. Argumenta cómo las identificaste.

En esta pregunta se evalúan las habilidades siguientes

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.

- Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
3. En la figura 11 se representa una pirámide recta de base triangular; E es el punto medio del lado  $\overline{AC}$ , EB bisectriz del  $\sphericalangle ABC$  y  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ . Calcula el área total y el volumen de la pirámide si se conoce que  $\overline{AC} = \overline{AS} = 5,0$  m y  $\overline{OS}$  es su altura. Descubre una relación entre los volúmenes de las pirámides SAEB y SBEC.

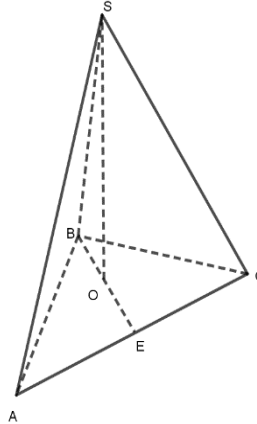


Figura 11. Pirámide recta de base triangular

En esta pregunta intencionalmente se evalúan las habilidades siguientes

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

Instrumento de diagnóstico para medir el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes (prueba pedagógica de salida para el pre-experimento)

Objetivo: diagnosticar el nivel de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial alcanzado por los estudiantes después de aplicada la metodología.

## Cuestionario

1. En la figura 12 se muestra un cuerpo geométrico ABCDS que tiene como base un paralelogramo. Las diagonales de la base son iguales; E, F, G y H son los puntos medios de las aristas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{AD}$ , respectivamente. La altura del cuerpo es perpendicular a su base y el pie de esta, coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base.

- Identifica las figuras planas que están en las caras y la base de este cuerpo geométrico y al interior del mismo.
- Formula las definiciones de estas figuras planas.
- Formula todas las propiedades y fórmulas que conozcas de estas figuras planas.
- Describe e identifica el cuerpo geométrico dado, así como el cuerpo geométrico que se encuentra dentro de este. Argumenta cómo los reconociste.
- Formula todas las propiedades y fórmulas relacionadas con estos cuerpos geométricos.
- Representa las figuras planas que observas del cuerpo, desde el frente, desde un lado y desde arriba. Identifica cada una de esas figuras geométricas.

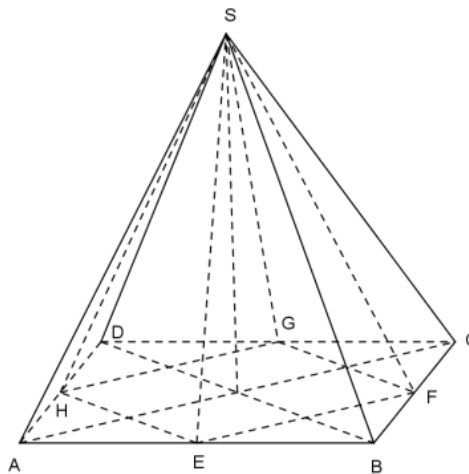


Figura 12. Cuerpo geométrico ABCDS

En esta pregunta se evalúan las habilidades siguientes

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.

- Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
- Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
- Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.

2. En la figura 13 se ha representado un cuerpo geométrico visto desde diferentes ángulos.

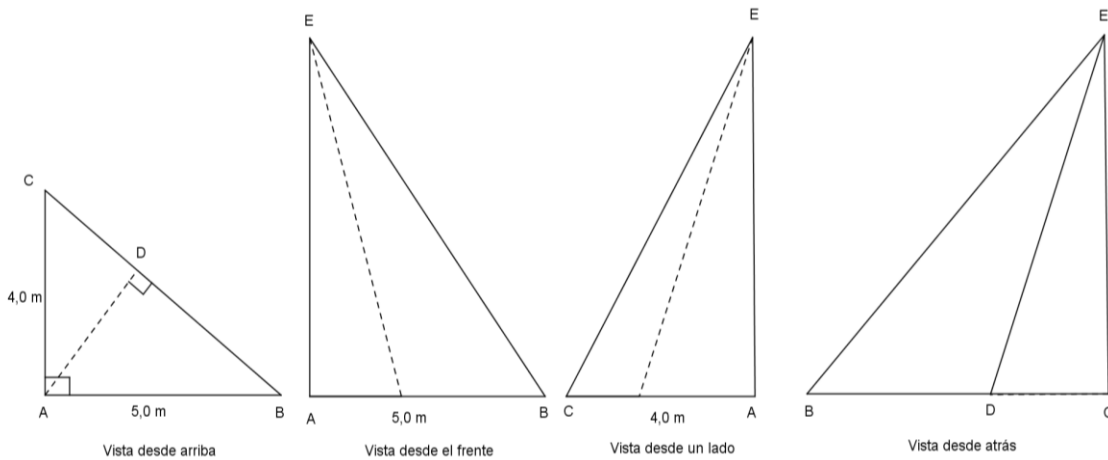


Figura 13. Diferentes vistas del cuerpo geométrico ABCDE

- Representa el cuerpo geométrico al que le corresponden estas vistas.
- Identifícalo. Argumenta cómo lo hiciste.
- Identifica las figuras planas que están en la superficie de este cuerpo geométrico. Argumenta cómo las identificaste.

En esta pregunta se evalúan las habilidades siguientes

- Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
- Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
- Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.

3. La figura 14 muestra un prisma recto ABCDEFGH cuya base inferior es el paralelogramo ABCD situado sobre el plano  $\alpha$ . En su interior se observa la pirámide ABCDH cuya base coincide con la del prisma. La cara ABH de la pirámide es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es HB. Además, de la pirámide se conoce que: el perímetro de su base es 14 cm; el volumen es 12 cm<sup>3</sup>; AD < AB; el ángulo que forma HA con su proyección es de 45°.
- Demuestra que la base de la pirámide es un rectángulo.
  - Calcula el área total del prisma.
  - Descubre una relación entre los volúmenes del prisma y de la pirámide dados.

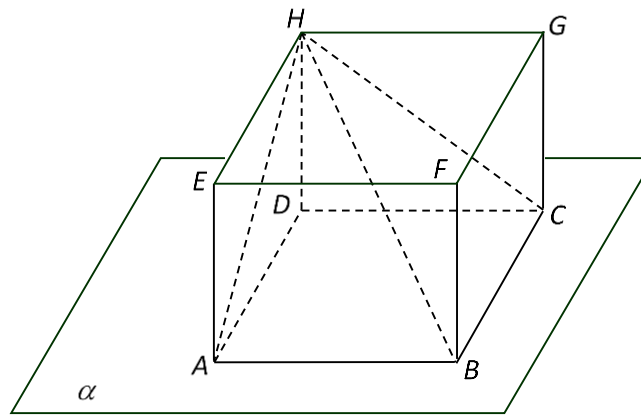


Figura 14. Prisma recto ABCDEFGH

En esta pregunta intencionalmente se evalúan las habilidades siguientes

- Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
- Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
- Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico.

En ambos instrumentos, fueron evaluadas las habilidades del pensamiento geométrico espacial, presentadas en el capítulo anterior.

1. Identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio.
2. Describir el aspecto físico de un objeto geométrico.
3. Identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
4. Representar un objeto geométrico tridimensional en lo bidimensional.
5. Representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas.
6. Identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
7. Reproducir la definición de los conceptos, la formulación de los teoremas y las fórmulas, relacionados con los objetos geométricos.
8. Determinar relaciones espaciales entre las figuras geométricas planas, entre las espaciales y entre las planas y las espaciales que conforman un objeto geométrico.
9. Establecer relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
10. Deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.
11. Descubrir propiedades de las figuras planas y geométricas que conforman un objeto geométrico y del propio objeto geométrico

Para medir la situación del desarrollo actual de estas habilidades se utilizaron los niveles y criterios aportados en la metodología en el eslabón de diagnóstico de las necesidades cognitivas de los estudiantes.

Para la elaboración de los instrumentos se precisaron los siguientes conocimientos y habilidades precedentes que debía dominar el estudiante.

- Conocimientos: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencia y círculo, sus definiciones y propiedades, áreas y perímetros de triángulos, igualdad y semejanza de cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencia y círculo; prisma

recto, ortoedro, cubo, pirámide recta, cilindro circular recto, cono circular recto, esfera, sus definiciones y propiedades, áreas y volúmenes.

- Habilidades: identificar conceptos de figuras planas y de cuerpos geométricos; formular definiciones de conceptos de figuras planas y de cuerpos geométricos; formular teoremas asociados a figuras planas y cuerpos geométricos; calcular áreas y perímetros de figuras planas; calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos; resolver triángulos.

Para el análisis de los resultados obtenidos, el profesor de cada grupo evaluó cualitativamente cada habilidad en cada estudiante. Para ello, se hizo uso de los términos lingüísticos asociados números SVN según se muestran en la tabla 2.

Término lingüístico		Números SVN
Extremadamente Alto	EA	( 1 ; 0 ; 0 )
Muy Muy Alto	MMA	( 0,9 ; 0,1 ; 0,1 )
Muy Alto	MA	( 0,8 ; 0,15 ; 0,15 )
Alto	A	( 0,7 ; 0,25 ; 0,25 )
Medianamente Alto	MEA	( 0,6 ; 0,35 ; 0,35 )
Medio	M	( 0,5 ; 0,5 ; 0,5 )
Medianamente Bajo	MEB	( 0,4 ; 0,65 ; 0,65 )
Bajo	B	( 0,3 ; 0,75 ; 0,75 )
Muy Bajo	MB	( 0,2 ; 0,85 ; 0,85 )
Muy Muy Bajo	MMB	( 0,1 ; 0,9 ; 0,9 )
Extremadamente Bajo	EB	( 0 ; 1 ; 1 )

Tabla 2. Términos lingüísticos utilizados

Después de aplicados los instrumentos se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 3.

Estudiante	Habilidad evaluada										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	MEB	MEA	M	A	MEB	B	A	MEB	M	M	MEB
2	MEB	M	M	M	M	M	MEA	M	MEA	M	MEB
3	MEB	MEA	M	A	MEB	M	M	A	A	A	MEA
4	B	MEB	B	M	B	B	MEA	MEA	M	MEA	MEB
5	MEB	MEB	MEB	MEB	MEB	MEB	MEA	MEB	A	A	MEB
6	MEB	M	B	MEB	M	M	MEA	MEA	M	MEA	MEB
7	B	M	B	M	MEB	MEB	MEA	M	A	MEA	M



8	MB	MEA	B	A	M	MEB	M	A	M	A	MEA
9	MB	A	M	MEA	M	B	A	M	M	M	MEA
10	MB	MEB	M	M	MEB	MEB	MEB	MEB	MEA	MEA	A
11	B	A	B	MEA	B	MEB	A	MEB	M	M	M
12	B	A	MEB	M	MEB	MEB	MEB	M	MEB	A	MEB
13	MB	A	B	MEA	MEB	B	A	MEB	A	MEA	M
14	B	MEB	M	M	M	MEB	MEA	MEB	M	M	M
15	MB	MEA	M	A	M	M	MEB	A	MEA	MEB	M
16	MB	MEA	MEB	M	MEB	B	A	M	M	MEA	M
17	B	M	M	MEB	MEB	MEB	MEA	M	MEB	MEB	A
18	MB	MEB	MEB	MEB	B	M	A	A	MEB	MEB	M
19	B	MEA	M	A	B	M	M	MEB	A	MEA	MEA
20	MB	M	MEB	MEA	MEB	B	A	MEA	A	MEB	M
21	B	MEB	B	MEA	MEB	B	MEB	MEA	A	M	A
22	MB	MEB	M	A	B	MEB	A	M	MEA	A	A
23	B	MEB	M	MEB	B	M	M	MEB	A	MEA	A
24	MEB	MEB	MEB	MEB	B	B	MEB	MEB	A	MEA	M
25	B	M	B	MEB	MEB	MEB	A	MEB	MEB	MEB	MEA
26	MEB	MEA	MEB	M	MEB	B	A	M	MEA	M	M
27	MB	MEB	MEB	A	B	B	MEA	A	M	MEB	M
28	B	MEB	B	A	M	M	A	MEB	MEB	A	M
29	MB	MEA	M	A	MEB	MEB	A	A	M	M	A
30	MEB	MEA	M	M	MEB	M	MEB	MEA	M	MEB	MEB
31	MB	MEA	MEB	MEB	B	B	A	M	A	MEB	MEB
32	MEB	MEB	MEB	M	B	B	A	MEB	A	M	M
33	B	A	M	M	M	M	A	M	A	M	A
34	MB	A	B	MEB	M	B	A	MEA	M	MEA	A
35	MB	A	M	MEB	MEB	M	MEB	A	MEB	MEA	MEB
36	B	MEA	MEB	A	M	M	A	M	MEB	MEA	A
37	B	MEA	M	A	MEB	MEB	M	M	A	MEA	M
38	MB	MEB	M	M	B	M	MEB	A	MEB	M	A
39	MEB	M	M	A	B	M	MEB	MEB	M	MEA	MEB
40	B	MEA	MEB	MEB	MEB	B	A	M	M	A	A
41	MEB	M	B	A	MEB	MEB	M	MEA	A	MEB	A
42	B	MEA	M	M	MEB	B	M	MEA	M	M	A
43	B	A	M	M	B	MEB	MEA	A	M	A	M
44	MB	M	B	MEA	M	M	MEB	A	MEA	MEA	M
45	MEB	MEB	B	M	M	B	MEB	A	MEA	MEA	MEB
46	MEB	MEA	B	A	M	B	MEA	M	M	MEB	MEB





47	MB	MEA	MEB	M	MEB	B	M	MEA	MEB	MEA	MEB
48	MB	A	M	A	MEB	M	MEA	MEA	MEA	A	MEB
49	MB	MEB	M	A	B	M	A	M	MEB	MEB	MEB
50	MEB	MEB	MEB	M	B	MEB	MEB	M	A	MEA	A
51	MEB	A	MEB	MEB	M	B	A	A	MEA	MEA	M
52	MEB	MEA	MEB	M	MEB	B	MEB	A	A	MEB	MEA
53	B	M	M	M	M	MEB	A	A	MEB	MEB	MEB
54	MEB	MEA	M	M	M	B	A	MEA	M	A	M
55	MEB	MEB	M	M	B	B	MEB	MEA	MEB	A	A
56	B	MEA	MEB	A	MEB	MEB	MEB	MEB	A	A	MEB
57	MB	MEA	M	M	B	B	MEA	M	MEA	A	M
58	B	MEB	M	A	M	M	MEB	M	A	M	MEA
59	MB	M	M	MEB	MEB	MEB	A	A	MEB	M	A
60	B	A	MEB	MEB	B	MEB	M	M	MEA	MEA	MEA
61	MB	MEB	B	MEB	B	M	M	MEA	MEA	MEB	M
62	MB	M	MEB	M	MEB	B	A	MEB	MEA	MEB	MEB
63	MB	M	M	A	B	M	MEB	M	A	M	MEB
64	B	A	M	MEB	B	MEB	A	MEB	M	A	MEA
65	MB	MEA	M	M	B	M	MEA	M	MEA	MEB	MEB
66	B	A	B	M	B	M	A	MEA	MEA	MEA	M
67	MB	MEA	M	MEA	M	MEB	MEB	A	MEB	M	M
68	MEB	A	B	MEA	M	B	M	M	MEA	MEB	MEB
69	MEB	MEB	MEB	A	B	M	M	A	M	M	MEB
70	B	MEB	MEB	A	M	M	MEA	MEA	MEA	A	M
71	MEB	MEA	MEB	A	M	M	MEB	MEA	MEB	A	MEA
72	MB	MEA	M	M	B	M	MEB	MEB	MEA	MEB	A
73	MB	A	M	M	B	MEB	M	MEB	MEA	M	A
74	MEB	MEA	M	MEA	MEB	MEB	M	M	M	MEB	M
75	B	MEB	M	A	MEB	B	M	A	M	MEB	MEA
76	B	A	B	M	B	B	A	A	MEB	MEB	M
77	B	A	MEB	M	M	MEB	A	A	MEA	MEB	M
78	B	A	B	A	M	MEB	MEA	M	MEA	M	MEA
79	MEB	A	M	MEB	B	M	A	MEA	A	A	A
80	B	M	MEB	MEA	M	M	A	MEB	A	A	M
81	MB	MEB	M	MEA	MEB	M	A	MEB	MEB	A	A
82	MB	A	M	MEB	M	M	A	MEB	MEB	A	A
83	MEB	A	M	MEB	M	B	M	A	M	MEA	M
84	MB	MEA	B	MEB	M	MEB	MEA	MEB	MEB	A	A
85	MEB	A	MEB	M	M	M	A	MEA	A	MEA	MEA

86	MEB	A	B	MEB	MEB	M	A	A	M	MEB	A
87	B	M	M	MEA	M	M	MEA	A	MEB	MEA	A
88	MB	MEB	MEB	M	B	M	MEB	MEA	MEB	MEB	MEA
89	MEB	MEA	M	MEB	MEB	MEB	MEB	M	MEA	M	A
90	B	MEA	MEB	M	MEB	B	MEB	MEA	MEB	A	M
91	MEB	A	M	M	B	M	M	M	MEA	MEB	MEB
92	MEB	MEA	M	MEA	MEB	MEB	M	M	M	MEB	M
93	B	MEB	M	A	MEB	B	M	A	M	MEB	MEA
94	B	A	B	M	B	B	A	A	MEB	MEB	M
95	B	A	MEB	M	M	MEB	A	A	MEA	MEB	M
96	B	A	B	A	M	MEB	MEA	M	MEA	M	MEA
97	MEB	A	M	MEB	B	M	A	MEA	A	A	A
98	B	M	MEB	MEA	M	M	A	MEB	A	A	M
99	MB	MEB	M	MEA	MEB	M	A	MEB	MEB	A	A
100	MB	A	M	MEB	M	M	A	MEB	MEB	A	A
101	MEB	A	M	MEB	M	B	M	A	M	MEA	M
102	MB	MEA	B	MEB	M	MEB	MEA	MEB	MEB	A	A
103	MEB	A	MEB	M	M	M	A	MEA	A	MEA	MEA
104	MEB	A	B	MEB	MEB	M	A	A	M	MEB	A
105	B	M	M	MEA	M	M	MEA	A	MEB	MEA	A
106	MB	MEB	MEB	M	B	M	MEB	MEA	MEB	MEB	MEA
107	MEB	MEA	M	MEB	MEB	MEB	MEB	M	MEA	M	A
108	B	MEA	MEB	M	MEB	B	MEB	MEA	MEB	A	M
109	MEB	A	M	M	B	M	M	M	MEA	MEB	MEB
110	MB	M	MEB	MEB	B	M	MEB	MEA	MEA	A	M
111	MB	MEB	M	MEA	B	B	M	A	MEB	MEB	MEA
112	MEB	MEA	MEB	MEA	B	M	MEB	A	MEA	M	M
113	MEB	MEB	B	MEB	M	MEB	MEB	MEA	MEA	A	MEB
114	B	MEB	B	M	MEB	MEB	MEB	MEA	M	MEB	MEA
115	B	MEA	B	MEA	M	B	M	A	MEB	M	MEA
116	B	M	M	MEB	B	B	M	MEA	MEB	M	MEB
117	B	M	M	MEB	M	M	MEA	MEB	MEA	M	A
118	MB	A	MEB	MEA	MEB	MEB	MEA	MEB	M	M	MEA
119	MEB	A	B	M	M	MEB	M	A	MEB	A	A
120	MB	M	M	MEB	M	M	A	A	MEB	MEB	MEA
121	B	MEA	B	M	B	B	A	MEB	A	MEB	MEB

Tabla 3. Resultados de la evaluación de cada estudiante en cada habilidad en el diagnóstico inicial

A continuación, se agregaron las evaluaciones aportadas por los profesores de cada estudiante en cada habilidad. Para ello se utilizó el operador de agregación el operador de la media ponderada neutrosófica de valor único (SVNWA) propuesto por Ye (2014) y definido de la siguiente forma.

$$P_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = \langle 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_{A_j}(x))^{w_j}, \prod_{j=1}^n (I_{A_j}(x))^{w_j}, \prod_{j=1}^n (F_{A_j}(x))^{w_j} \rangle$$

Así, al agregar las evaluaciones de todos los estudiantes muestreados, se obtuvieron los resultados en cuanto al nivel de desarrollo de cada habilidad en los estudiantes que se muestran en la tabla 4.

Habilidades	SVNS Agregado Fw(A1,..An)	Puntuación	Evaluación
1	( 0.3; 0.75; 0.75 )	0,859	B
2	( 0.58; 0.39; 0.39 )	1,760	MEA
3	( 0.43; 0.6; 0.6 )	1,258	MEB
4	( 0.55; 0.44; 0.44 )	1,656	MEA
5	( 0.41; 0.62; 0.62 )	1,195	MEB
6	( 0.41; 0.61; 0.61 )	1,218	MEB
7	( 0.58; 0.39; 0.39 )	1,777	MEA
8	( 0.57; 0.4; 0.4 )	1,737	MEA
9	( 0.55; 0.42; 0.42 )	1,686	MEA
10	( 0.56; 0.42; 0.42 )	1,701	MEA
11	( 0.57; 0.41; 0.41 )	1,727	MEA

Tabla 4. Resultados de evaluación del nivel de desarrollo de las habilidades en el diagnóstico inicial

Como puede observarse, el nivel de desarrollo de todas las habilidades fue evaluado entre medianamente bajo y medianamente alto. Por su parte, se agregaron las evaluaciones de todas las habilidades para cada estudiante, con el fin de determinar su nivel de desarrollo de pensamiento geométrico espacial en general. Estos resultados se muestran en la tabla 5.

Estu- diante	Fw(A1,..An)	Puntua- ción	Evalua- ción	Estu- diante	Fw(A1,..An)	Puntua- ción	Evalua- ción
<b>1</b>	( 0,51; 0,49; 0,49 )	1,529	M	<b>62</b>	( 0,45; 0,56; 0,56 )	1,349	MEB
<b>2</b>	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,516	M	<b>63</b>	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,483	M
<b>3</b>	( 0,59; 0,38; 0,38 )	1,794	MEA	<b>64</b>	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,584	M
<b>4</b>	( 0,45; 0,55; 0,55 )	1,349	MEB	<b>65</b>	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,435	M

5	( 0,49; 0,52; 0,52 )	1,464	M	66	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,613	M
6	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,475	M	67	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,499	M
7	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,496	M	68	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,467	M
8	( 0,54; 0,43; 0,43 )	1,654	MEA	69	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,493	M
9	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,609	M	70	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,651	MEA
10	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,440	M	71	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,644	MEA
11	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,488	M	72	( 0,48; 0,51; 0,51 )	1,449	M
12	( 0,48; 0,53; 0,53 )	1,434	M	73	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,519	M
13	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,582	M	74	( 0,49; 0,52; 0,52 )	1,458	M
14	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,399	M	75	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,509	M
15	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,601	M	76	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,481	M
16	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,478	M	77	( 0,54; 0,45; 0,45 )	1,630	M
17	( 0,48; 0,53; 0,53 )	1,421	M	78	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,632	M
18	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,394	M	79	( 0,59; 0,38; 0,38 )	1,788	MEA
19	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,632	M	80	( 0,55; 0,44; 0,44 )	1,655	MEA
20	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,527	M	81	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,587	M
21	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,496	M	82	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,651	MEA
22	( 0,55; 0,43; 0,43 )	1,665	MEA	83	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,584	M
23	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,509	M	84	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,499	M
24	( 0,45; 0,56; 0,56 )	1,337	MEB	85	( 0,58; 0,39; 0,39 )	1,760	MEA
25	( 0,45; 0,56; 0,56 )	1,337	MEB	86	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,641	MEA
26	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,516	M	87	( 0,55; 0,42; 0,42 )	1,676	MEA
27	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,441	M	88	( 0,44; 0,57; 0,57 )	1,303	MEB
28	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,549	M	89	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,508	M
29	( 0,56; 0,41; 0,41 )	1,708	MEA	90	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,438	M
30	( 0,48; 0,53; 0,53 )	1,429	M	91	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,480	M
31	( 0,47; 0,53; 0,53 )	1,411	M	92	( 0,49; 0,52; 0,52 )	1,458	M
32	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,443	M	93	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,509	M
33	( 0,57; 0,4; 0,4 )	1,741	MEA	94	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,481	M
34	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,609	M	95	( 0,54; 0,45; 0,45 )	1,630	M
35	( 0,49; 0,5; 0,5 )	1,483	M	96	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,632	M
36	( 0,55; 0,42; 0,42 )	1,688	MEA	97	( 0,59; 0,38; 0,38 )	1,788	MEA
37	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,618	M	98	( 0,55; 0,44; 0,44 )	1,655	MEA
38	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,454	M	99	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,587	M
39	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,451	M	100	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,651	MEA
40	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,584	M	101	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,584	M
41	( 0,53; 0,46; 0,46 )	1,603	M	102	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,499	M
42	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,524	M	103	( 0,58; 0,39; 0,39 )	1,760	MEA
43	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,637	MEA	104	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,641	MEA
44	( 0,51; 0,47; 0,47 )	1,542	M	105	( 0,55; 0,42; 0,42 )	1,676	MEA

45	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,438	M	106	( 0,44; 0,57; 0,57 )	1,303	MEB
46	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,467	M	107	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,508	M
47	( 0,46; 0,54; 0,54 )	1,375	M	108	( 0,48; 0,52; 0,52 )	1,438	M
48	( 0,56; 0,41; 0,41 )	1,704	MEA	109	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,480	M
49	( 0,48; 0,53; 0,53 )	1,424	M	110	( 0,48; 0,51; 0,51 )	1,449	M
50	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,501	M	111	( 0,47; 0,53; 0,53 )	1,397	M
51	( 0,55; 0,43; 0,43 )	1,662	MEA	112	( 0,51; 0,47; 0,47 )	1,552	M
52	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,537	M	113	( 0,48; 0,53; 0,53 )	1,429	M
53	( 0,5; 0,5; 0,5 )	1,493	M	114	( 0,45; 0,57; 0,57 )	1,323	MEB
54	( 0,54; 0,44; 0,44 )	1,644	MEA	115	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,512	M
55	( 0,49; 0,51; 0,51 )	1,480	M	116	( 0,44; 0,58; 0,58 )	1,290	MEB
56	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,549	M	117	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,544	M
57	( 0,5; 0,48; 0,48 )	1,522	M	118	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,507	M
58	( 0,52; 0,46; 0,46 )	1,584	M	119	( 0,55; 0,43; 0,43 )	1,667	MEA
59	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,552	M	120	( 0,51; 0,48; 0,48 )	1,539	M
60	( 0,5; 0,49; 0,49 )	1,504	M	121	( 0,47; 0,53; 0,53 )	1,408	M
61	( 0,44; 0,57; 0,57 )	1,312	MEB				

Tabla 5. Resultados de evaluación general para cada estudiante en el diagnóstico inicial

La prueba pedagógica de salida permitió constatar el nivel de desarrollo de las habilidades alcanzado por los estudiantes después de aplicado el pre-experimento. Los resultados de este diagnóstico de salida se muestran en la tabla 6.

Estudiante	Habilidad evaluada										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	MMA	A	MEA	A	MEA	MA	MEA	A	MA	A	MEA
2	MEA	A	A	MMA	MA	A	MA	A	MMA	A	MMA
3	A	M	MA	A	A	MA	MA	MA	A	A	MEA
4	MEA	M	MEA	A	MA	MEA	MA	A	MA	A	MEA
5	MMA	A	MEA	MMA	MA	MA	A	MMA	A	MEA	MMA
6	MA	MEA	MEA	MEA	MA	MA	A	MMA	MEA	A	MEA
7	A	A	A	MA	A	MMA	MEA	MEA	A	M	MA
8	MEA	M	MA	MEA	MMA	A	MA	MEA	A	A	A
9	MEA	A	MA	MA	MA	MA	A	A	MMA	MEA	MEA
10	MA	A	MEA	MMA	MEA	A	MEA	MA	MEA	MEA	A
11	MA	M	MMA	MMA	MMA	MEA	MA	MA	MEA	M	MA
12	MMA	M	MEA	MA	MMA	MMA	MEA	MEA	A	M	MA
13	A	M	A	MA	MEA	MMA	MEA	MA	A	MEA	MA
14	MEA	MEA	A	MA	A	A	MMA	MA	A	M	MMA



15	MA	A	A	MA	MA	A	A	MMA	MMA	MEA	MA
16	MMA	M	MEA	A	MMA	MA	A	MA	MEA	MEA	A
17	MMA	M	MA	MA	MEA	MEA	A	A	MEA	A	MA
18	A	M	MMA	MMA	MEA	MMA	MMA	MA	MA	A	A
19	MA	A	MEA	MEA	MA	MA	MA	MEA	MMA	A	MA
20	MMA	A	MA	MMA	MMA	MA	MMA	MA	MMA	MEA	MMA
21	MA	A	MEA	A	MEA	MEA	MA	A	MMA	A	MEA
22	MMA	MEA	A	MMA	MMA	A	MEA	MMA	MMA	A	MMA
23	MA	M	A	MMA	MA	MA	MA	MEA	MA	M	MA
24	A	MEA	A	A	MEA	A	MEA	MMA	MMA	MEA	MMA
25	MA	M	MEA	MMA	MMA	MEA	A	MEA	MMA	A	A
26	MMA	A	MA	MEA	MMA	A	MA	MEA	MMA	MEA	MEA
27	MA	MEA	A	MA	MMA	MMA	A	MMA	MMA	A	A
28	MMA	M	MMA	MA	MEA	MEA	MMA	MEA	MA	M	MEA
29	MMA	M	A	A	MEA	MEA	MA	MEA	MEA	A	MEA
30	MMA	MEA	MA	MMA	MMA	A	MMA	MA	MA	M	MA
31	A	A	MMA	A	MMA	MA	MMA	MEA	A	M	A
32	A	A	A	MEA	MMA	MA	MA	MA	A	A	MMA
33	MEA	MEA	A	MA	MA	MA	MEA	A	MA	A	MA
34	MMA	M	MEA	MA	MA	A	MEA	MEA	A	MEA	A
35	MMA	M	MA	MEA	MMA	MA	MA	A	MMA	M	MMA
36	MMA	MEA	MEA	MEA	MEA	MA	MMA	MA	MA	MEA	MMA
37	A	A	MEA	A	A	MMA	MEA	MA	MMA	A	A
38	A	M	MMA	MMA	MA	A	MMA	MMA	MA	M	MEA
39	MMA	M	MMA	A	MEA	MMA	MMA	A	MMA	A	A
40	MMA	MEA	MEA	MMA	MA	A	MA	A	MMA	A	A
41	MA	MEA	A	A	MMA	MEA	MMA	MA	MEA	M	MMA
42	MA	MEA	MA	A	MEA	MEA	A	A	MA	A	MMA
43	MEA	MEA	MMA	MEA	MMA	MA	A	MA	MMA	A	MMA
44	MA	A	A	MA	A	MMA	MMA	MMA	MEA	M	MEA
45	MMA	M	MMA	MMA	MMA	MA	MEA	MA	MMA	M	MEA
46	A	M	MA	MA	MA	MEA	MEA	MA	MMA	A	A
47	MMA	MEA	MMA	MMA	MEA	MA	MA	MEA	MMA	A	MMA
48	MEA	A	A	MA	MEA	A	MEA	MEA	MMA	MEA	A
49	A	M	MA	MEA	MMA	MMA	MA	MMA	A	A	MEA
50	MEA	A	A	MEA	MEA	A	MMA	MA	MEA	M	MA
51	MEA	A	MA	MEA	MA	MMA	MA	A	MEA	MEA	MA
52	MMA	A	MA	MEA	MA	A	MEA	MMA	MEA	M	MEA
53	A	MEA	MEA	MMA	MA	MMA	MA	MA	MA	A	MMA
54	MA	MEA	MMA	MA	MA	MMA	MA	A	A	A	MEA



55	A	A	MMA	MEA	A	MMA	A	MEA	MA	M	MEA
56	MMA	M	A	MMA	MMA	MEA	MEA	MEA	A	M	MMA
57	A	M	A	MMA	MMA	MEA	MMA	MMA	MEA	A	MEA
58	MEA	M	A	A	MA	MMA	MMA	MA	MMA	MEA	MMA
59	A	M	A	MMA	MMA	MA	MA	MEA	MA	M	A
60	A	A	MEA	A	MA	MA	A	MMA	MEA	M	A
61	MMA	A	A	MMA	MEA	MA	MA	MMA	MA	A	A
62	MMA	MEA	MEA	MA	MA	MEA	MA	MMA	A	MEA	A
63	MEA	M	MA	MA	MMA	A	MEA	MMA	MMA	A	MMA
64	A	MEA	MA	MA	A	MA	MEA	MMA	A	A	MEA
65	MA	MEA	MMA	MMA	MA	MEA	MA	A	A	M	A
66	MEA	M	MMA	MMA	MA	A	MA	MA	MMA	MEA	MMA
67	A	M	MMA	MA	MMA	A	MMA	MEA	A	M	A
68	MA	MEA	A	MA	MA	MA	MEA	MEA	MMA	MEA	MEA
69	MA	M	MEA	MMA	A	A	MA	MEA	MMA	MEA	MEA
70	A	MEA	A	MA	MEA	A	MA	MMA	MEA	A	MEA
71	MA	M	A	MMA	MEA	MMA	MA	MMA	A	M	MEA
72	MEA	M	MMA	MEA	A	MMA	MMA	MA	MMA	A	MA
73	A	MEA	MEA	MMA	MEA	A	MMA	MEA	MMA	A	MA
74	MEA	MEA	A	MMA	MA	MEA	MA	MA	A	A	MA
75	MA	A	MMA	MEA	MEA	MA	A	MMA	A	M	MA
76	MMA	A	MMA	A	MEA	MMA	MEA	MMA	MA	MEA	A
77	A	A	A	A	MMA	MEA	MMA	A	MMA	M	MA
78	MEA	MEA	MMA	MEA	MA	MA	MMA	A	MEA	MEA	A
79	A	MEA	MA	A	A	MA	MMA	MEA	MEA	M	MA
80	MMA	M	MEA	MA	MEA	MMA	MEA	A	MA	MEA	MA
81	MA	A	MEA	MMA	MMA	MMA	MMA	MMA	A	A	MEA
82	MA	M	A	A	A	MEA	MMA	A	MMA	MEA	MMA
83	MEA	A	A	A	MA	MMA	MMA	A	A	MEA	MMA
84	A	M	A	MMA	MMA	MA	MEA	MMA	MA	MEA	MA
85	A	M	A	MEA	MA	MA	A	MA	MMA	MEA	A
86	MEA	A	MA	MEA	MEA	MEA	MMA	A	A	MEA	A
87	MMA	M	A	MA	MEA	MMA	MMA	MA	MA	M	MEA
88	MA	M	MA	A	MA	A	MEA	MA	MEA	M	MMA
89	MMA	M	MMA	MA	MA	MEA	A	MEA	MEA	M	MEA
90	A	M	MMA	MA	MA	MMA	A	A	A	M	MEA
91	MMA	MEA	MMA	MMA	MMA	MMA	MMA	MA	A	M	A
92	MEA	MEA	A	MMA	MA	MEA	MA	MA	A	A	MA
93	MA	A	MMA	MEA	MEA	MA	A	MMA	A	M	MA
94	MMA	A	MMA	A	MEA	MMA	MEA	MMA	MA	MEA	A



95	A	A	A	A	MMA	MEA	MMA	A	MMA	M	MA
96	MEA	MEA	MMA	MEA	MA	MA	MMA	A	MEA	MEA	A
97	A	MEA	MA	A	A	MA	MMA	MEA	MEA	M	MA
98	MMA	M	MEA	MA	MEA	MMA	MEA	A	MA	MEA	MA
99	MA	A	MEA	MMA	MMA	MMA	MMA	MMA	A	A	MEA
100	MA	M	A	A	A	MEA	MMA	A	MMA	MEA	MMA
101	MEA	A	A	A	MA	MMA	MMA	A	A	MEA	MMA
102	A	M	A	MMA	MMA	MA	MEA	MMA	MA	MEA	MA
103	A	M	A	MEA	MA	MA	A	MA	MMA	MEA	A
104	MEA	A	MA	MEA	MEA	MEA	MMA	A	A	MEA	A
105	MMA	M	A	MA	MEA	MMA	MMA	MA	MA	M	MEA
106	MA	M	MA	A	MA	A	MEA	MA	MEA	M	MMA
107	MMA	M	MMA	MA	MA	MEA	A	MEA	MEA	M	MEA
108	A	M	MMA	MA	MA	MMA	A	A	A	M	MEA
109	MMA	MEA	MMA	MMA	MMA	MMA	MMA	MA	A	M	A
110	MA	MEA	MEA	MEA	A	MA	MA	MMA	MMA	MEA	MEA
111	MEA	A	MMA	MEA	MA	MMA	A	MEA	MA	A	A
112	MEA	M	A	MEA	MMA	MEA	MA	MA	MEA	MEA	MA
113	MEA	MEA	MMA	MA	MEA	A	MA	MA	MEA	A	MEA
114	A	A	MEA	MMA	A	MA	MA	MA	A	M	MMA
115	MMA	M	A	MEA	MA	MMA	MEA	MMA	A	MEA	MA
116	A	A	A	MEA	MA	MMA	MMA	MA	MEA	MEA	MA
117	MEA	A	MA	MMA	A	A	A	MA	A	M	MEA
118	MEA	M	MA	A	MMA	A	MA	MMA	A	M	MEA
119	MEA	M	MMA	MMA	A	MA	MMA	A	A	MEA	MA
120	MEA	MEA	A	A	MEA	MEA	A	A	MMA	MEA	MMA
121	MEA	MEA	MEA	MA	A	MMA	MA	MMA	MA	A	MA

Tabla 6. Resultados de la evaluación de cada estudiante en cada habilidad en el diagnóstico de salida

Una vez más, se obtuvieron los resultados de las evaluaciones y fueron agregadas por habilidad y por estudiante, como se muestra en las tablas 7 y 8.

Habilidades	SVNS agregados Fw(A1,..An)	Puntuación	Evaluación
1	( 0.78; 0.19; 0.19 )	2,373	MA
2	( 0.6; 0.36; 0.36 )	1,834	MEA
3	( 0.77; 0.19; 0.19 )	2,356	MA
4	( 0.79; 0.18; 0.18 )	2,399	MA
5	( 0.79; 0.18; 0.18 )	2,397	MA



6	( 0.79; 0.18; 0.18 )	2,404	MA
7	( 0.8; 0.18; 0.18 )	2,416	MA
8	( 0.79; 0.18; 0.18 )	2,387	MA
9	( 0.79; 0.19; 0.19 )	2,387	MA
10	( 0.61; 0.35; 0.35 )	1,862	MEA
11	( 0.77; 0.2; 0.2 )	2,339	MA

Tabla 7. Resultados de evaluación del nivel de desarrollo de las habilidades en el diagnóstico de salida

En este caso, solo dos habilidades fueron evaluadas de medianamente alto, y el resto de muy alto. Las dos habilidades con menor evaluación fueron describir el aspecto físico de un objeto geométrico y deducir consecuencias de las relaciones entre las definiciones de los conceptos, las formulaciones de los teoremas y los procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos.

<i>Estu- dian- te</i>	<b>Fw(A1,..An)</b>	<b>Puntu- ación</b>	<b>Evalua- ción</b>	<i>Estu- dian- te</i>	<b>Fw(A1,..An)</b>	<b>Puntu- ación</b>	<b>Evalua- ción</b>
<b>1</b>	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,203	MA	<b>62</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,303	MA
<b>2</b>	( 0,79; 0,18; 0,18 )	2,393	MA	<b>63</b>	( 0,79; 0,18; 0,18 )	2,403	MA
<b>3</b>	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,215	MA	<b>64</b>	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,255	MA
<b>4</b>	( 0,69; 0,26; 0,26 )	2,113	A	<b>65</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,306	MA
<b>5</b>	( 0,8; 0,17; 0,17 )	2,433	MA	<b>66</b>	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,426	MA
<b>6</b>	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,213	MA	<b>67</b>	( 0,76; 0,22; 0,22 )	2,300	MA
<b>7</b>	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,206	MA	<b>68</b>	( 0,73; 0,22; 0,22 )	2,243	MA
<b>8</b>	( 0,71; 0,24; 0,24 )	2,184	MA	<b>69</b>	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,237	MA
<b>9</b>	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,284	MA	<b>70</b>	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,203	MA
<b>10</b>	( 0,71; 0,24; 0,24 )	2,181	A	<b>71</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,308	MA
<b>11</b>	( 0,78; 0,2; 0,2 )	2,361	MA	<b>72</b>	( 0,79; 0,18; 0,18 )	2,403	MA
<b>12</b>	( 0,75; 0,22; 0,22 )	2,289	MA	<b>73</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,314	MA
<b>13</b>	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,216	MA	<b>74</b>	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,284	MA
<b>14</b>	( 0,75; 0,22; 0,22 )	2,278	MA	<b>75</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,306	MA
<b>15</b>	( 0,78; 0,18; 0,18 )	2,384	MA	<b>76</b>	( 0,79; 0,19; 0,19 )	2,393	MA
<b>16</b>	( 0,74; 0,23; 0,23 )	2,258	MA	<b>77</b>	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,335	MA
<b>17</b>	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,216	MA	<b>78</b>	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,255	MA
<b>18</b>	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,419	MA	<b>79</b>	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,216	MA
<b>19</b>	( 0,76; 0,2; 0,2 )	2,312	MA	<b>80</b>	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,267	MA
<b>20</b>	( 0,85; 0,14; 0,14 )	2,561	MMA	<b>81</b>	( 0,82; 0,17; 0,17 )	2,463	MMA
<b>21</b>	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,203	MA	<b>82</b>	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,316	MA
<b>22</b>	( 0,83; 0,16; 0,16 )	2,492	MMA	<b>83</b>	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,351	MA
<b>23</b>	( 0,75; 0,2; 0,2 )	2,306	MA	<b>84</b>	( 0,78; 0,19; 0,19 )	2,369	MA

24	( 0,75; 0,22; 0,22 )	2,286	MA	85	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,237	MA
25	( 0,76; 0,22; 0,22 )	2,297	MA	86	( 0,7; 0,26; 0,26 )	2,148	A
26	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,341	MA	87	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,335	MA
27	( 0,81; 0,17; 0,17 )	2,448	MA	88	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,228	MA
28	( 0,75; 0,23; 0,23 )	2,269	MA	89	( 0,72; 0,25; 0,25 )	2,197	MA
29	( 0,69; 0,27; 0,27 )	2,103	A	90	( 0,74; 0,23; 0,23 )	2,260	MA
30	( 0,81; 0,16; 0,16 )	2,463	MMA	91	( 0,83; 0,16; 0,16 )	2,499	MMA
31	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,335	MA	92	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,284	MA
32	( 0,77; 0,19; 0,19 )	2,359	MA	93	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,306	MA
33	( 0,73; 0,22; 0,22 )	2,243	MA	94	( 0,79; 0,19; 0,19 )	2,393	MA
34	( 0,71; 0,25; 0,25 )	2,161	A	95	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,335	MA
35	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,412	MA	96	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,255	MA
36	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,349	MA	97	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,216	MA
37	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,286	MA	98	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,267	MA
38	( 0,79; 0,19; 0,19 )	2,388	MA	99	( 0,82; 0,17; 0,17 )	2,463	MMA
39	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,427	MA	100	( 0,76; 0,21; 0,21 )	2,316	MA
40	( 0,78; 0,19; 0,19 )	2,376	MA	101	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,351	MA
41	( 0,77; 0,21; 0,21 )	2,325	MA	102	( 0,78; 0,19; 0,19 )	2,369	MA
42	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,255	MA	103	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,237	MA
43	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,417	MA	104	( 0,7; 0,26; 0,26 )	2,148	A
44	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,343	MA	105	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,335	MA
45	( 0,8; 0,18; 0,18 )	2,428	MA	106	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,228	MA
46	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,267	MA	107	( 0,72; 0,25; 0,25 )	2,197	MA
47	( 0,82; 0,16; 0,16 )	2,469	MMA	108	( 0,74; 0,23; 0,23 )	2,260	MA
48	( 0,7; 0,26; 0,26 )	2,148	A	109	( 0,83; 0,16; 0,16 )	2,499	MMA
49	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,343	MA	110	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,284	MA
50	( 0,71; 0,25; 0,25 )	2,161	A	111	( 0,75; 0,21; 0,21 )	2,295	MA
51	( 0,74; 0,22; 0,22 )	2,264	MA	112	( 0,71; 0,25; 0,25 )	2,171	A
52	( 0,73; 0,23; 0,23 )	2,237	MA	113	( 0,72; 0,23; 0,23 )	2,213	MA
53	( 0,8; 0,17; 0,17 )	2,424	MA	114	( 0,76; 0,2; 0,2 )	2,325	MA
54	( 0,78; 0,19; 0,19 )	2,366	MA	115	( 0,77; 0,21; 0,21 )	2,325	MA
55	( 0,73; 0,24; 0,24 )	2,228	MA	116	( 0,76; 0,2; 0,2 )	2,322	MA
56	( 0,76; 0,22; 0,22 )	2,300	MA	117	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,206	MA
57	( 0,77; 0,21; 0,21 )	2,335	MA	118	( 0,74; 0,23; 0,23 )	2,240	MA
58	( 0,79; 0,18; 0,18 )	2,403	MA	119	( 0,77; 0,2; 0,2 )	2,343	MA
59	( 0,75; 0,22; 0,22 )	2,289	MA	120	( 0,72; 0,25; 0,25 )	2,193	MA
60	( 0,72; 0,24; 0,24 )	2,206	MA	121	( 0,77; 0,19; 0,19 )	2,349	MA
61	( 0,8; 0,17; 0,17 )	2,417	MA				

Tabla 8. Resultados de evaluación general para cada estudiante en el diagnóstico de salida

En estos resultados, sobresale que las evaluaciones promedio de los estudiantes oscilaron entre Alto y Muy muy Alto, notándose una mejoría en todos los casos evaluados. La comparación de los resultados obtenidos por habilidades y estudiantes se muestra en las figuras 15 y 16.

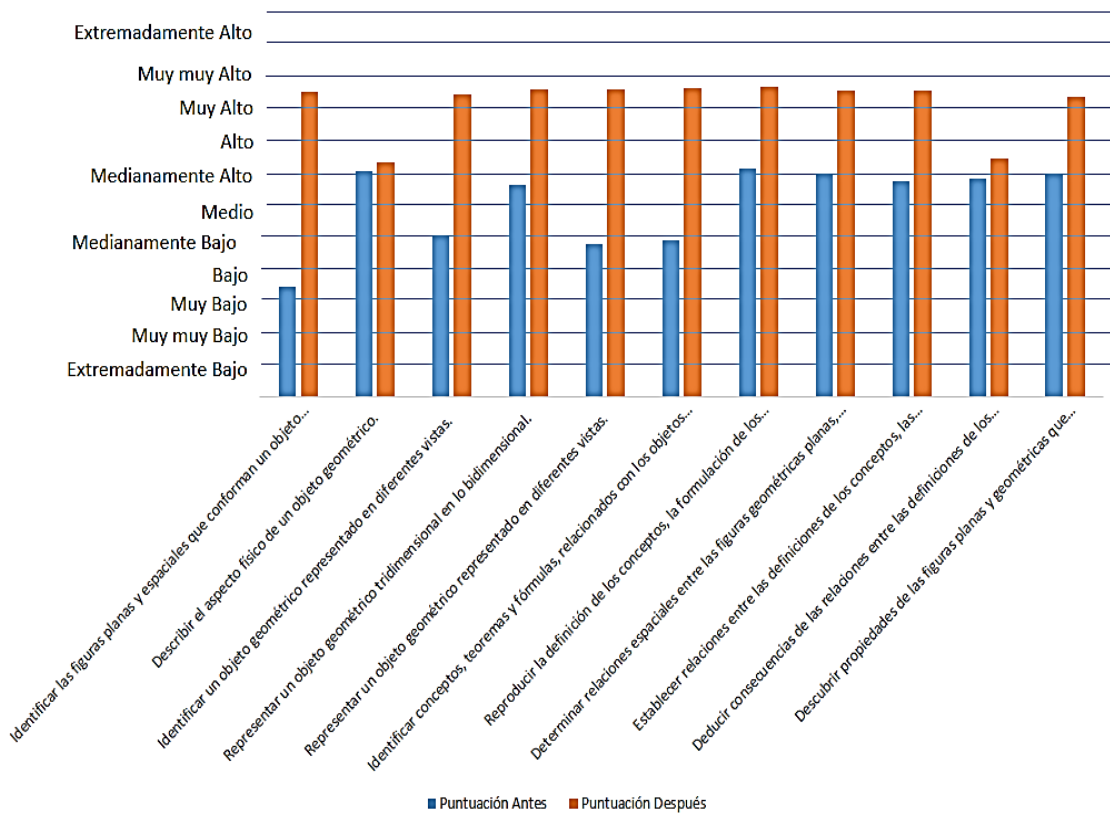


Figura 15. Comparación entre las evaluaciones promedio por habilidades en los diagnósticos inicial y final (antes y después de aplicación de la metodología propuesta)

Se evidenció que los mayores avances alcanzados estuvieron en las habilidades de identificar las figuras planas y espaciales que conforman un objeto geométrico en el espacio (1), identificar un objeto geométrico representado en diferentes vistas (3), representar un objeto geométrico representado en diferentes vistas (5) e identificar conceptos, teoremas y fórmulas, relacionados con los objetos geométricos (6).

En cuanto a las evaluaciones generales de los estudiantes, se observó un cambio en la composición de todo el grupo, de un predominio de evaluaciones iniciales de Medio a una casi totalidad de evaluaciones de Muy alto.

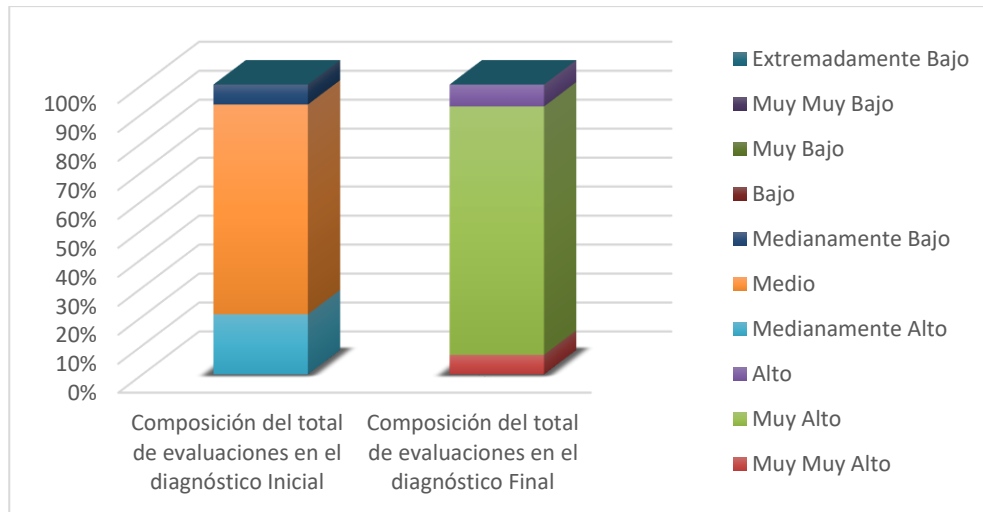


Figura 16. Comparación entre las evaluaciones generales de los estudiantes en los diagnósticos inicial y final (antes y después de aplicación de la metodología propuesta)

Una vez realizadas las tareas definidas en el pre-experimento y obtenido los resultados de los diagnósticos, se procedió a verificar su significación estadística, para validar la metodología propuesta.

#### Procesamiento estadístico de los resultados del pre-experimento

A partir de los valores desneutrosificados mediante la función de puntuación aplicada a los valores agregados de las evaluaciones, se aplicó la prueba de hipótesis de diferencia de medias, con el objetivo de constatar la evolución de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, mediante una comparación de las evaluaciones promedio registradas antes y después de la aplicación parcial de la metodología propuesta. Para ello, se utilizó el software estadístico IBM SPSS Statistic 22, cuyos resultados se muestran en las tablas 9 a la 12. Primeramente, se realizó e análisis individual por estudiantes, con los valores agregados en todas las habilidades evaluadas a cada uno de ellos.

Momento		N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Evaluación	Antes	121	1,53	,111	,0101
	Después	121	2,30	,091	,0083

Tabla 9. Estadísticas de grupo de estudiantes

Se observa una evaluación media inicial de 1,53 con una desviación estándar de 0,111 y un error estándar promedio de solo 0,0101, lo cual indica una baja dispersión en la muestra, mientras que, para las evaluaciones realizadas luego de aplicar la propuesta, el valor medio obtenido es muy superior, con un valor de 2,30 aunque tanto la desviación estándar como el error, resultan solo ligeramente inferiores.

		t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
<b>Evaluación</b>	Se asumen varianzas iguales	-58,962	240,000	0,000	-0,774	0,013	-0,799	-0,748
	No se asumen varianzas iguales	-58,962	230,902	0,000	-0,774	0,013	-0,799	-0,748

Tabla 10. Prueba t para la igualdad de medias por estudiantes

Tanto para varianzas iguales como para varianzas diferentes se obtuvo un p-valor igual a cero, por lo que se rechaza la hipótesis nula de igualdad y se puede decir que los valores promedios de las evaluaciones de los estudiantes, luego de aplicada la metodología, es superior para un nivel de significación de 95%.

Un procedimiento similar se llevó a cabo para evaluar el comportamiento de los valores agregados de las evaluaciones por habilidad. En este caso, el análisis se realizó con los valores agregados de todos los estudiantes para cada una de las 11 habilidades estudiadas.

Momento	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Evaluación	Antes	11	1,506	,3151
	Después	11	2,286	,2181

Tabla 11. Estadísticas de grupo por habilidad

Una vez más se obtuvo una diferencia una evaluación promedio superior para las evaluaciones realizadas después de la aplicación de la metodología ( $2,286 > 1,506$ ) y desviación estándar y valor medio del error estándar ligeramente inferiores para este momento final.

		t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
							Inferior	Superior
<b>Evaluación</b>	Se asumen varianzas iguales	-6,751	20,000	0,000	-0,780	0,116	-1,021	-0,539
	No se asumen varianzas iguales	-6,751	17,793	0,000	-0,780	0,116	-1,023	-0,537

Tabla 12. Prueba t para la igualdad de medias por habilidades

Para la prueba realizada, se obtuvo una significación asintótica bilateral igual a cero, por lo que se puede afirmar que la evaluación agregada por habilidades también muestra resultados superiores para un 95 % de significatividad, ya que se rechazó la hipótesis nula de igualdad de medias para ambas muestras.

Las pruebas paramétricas de comparación de medias realizadas arrojaron que, luego de la aplicación de la metodología, resultó significativa desde el punto de vista estadístico la mejora de los resultados evaluativos de los estudiantes para cada una de las habilidades investigadas, lo cual valida la pertinencia de la propuesta para contribuir al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática, en la educación universitaria.

#### **4.3. Valoración de la factibilidad de la metodología mediante el método Delphi con selección de expertos por métodos neutrosóficos**

Como instrumento para pronosticar la factibilidad de la metodología para la conducción del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación universitaria se utilizó el método de consulta a expertos llamado Delphi. Este método garantiza la realización de cuestionamientos precisos sin

la posibilidad de una doble interpretación, obtener respuestas susceptibles de ser cuantificadas, independientes las unas de las otras o cuyas interdependencias pudieran mostrarse de manera clara al ser tratadas estadísticamente, y que reflejan criterios personales lo más distante posible de la influencia directa de criterios oficialistas e intereses institucionales.

El Delphi es un método prospectivo basado en expertos que se define como un proceso sistemático e iterativo encaminado a la obtención de las opiniones y, si es posible el consenso, de un grupo de expertos considerando a estos como personas que tienen una estrecha relación sobre la cuestión, sector, tecnología u objeto de la investigación (Landeta, 2005).

Su metodología es apropiada para la obtención de información a partir de los expertos en función de los conocimientos del sector y la capacidad y la habilidad para analizar los ítems consultados resultando especialmente adecuada en las áreas de conocimiento complejas, dinámicas, ambiguas y con falta de información por su bajo coste en la obtención de la misma (Ortega, 2008). Además, su uso se ha sido recomendado en aquellos estudios en los que se muestra una baja tasa de información sobre evidencias empíricas previas (García & Lena, 2018).

Para la selección de los expertos se hizo uso de la teoría neutrosófica, a través del empleo de los conjuntos neutrosóficos de valor único (SVNS) asociados a variables lingüísticas, que permitieron evaluar el nivel de conocimiento teórico y práctico de los expertos en el tema objeto de estudio, y su idoneidad para analizarlo, teniendo en cuenta el peso que los propios expertos asignaron a los niveles de conocimientos teóricos y prácticos.

Para la selección de los posibles expertos se tomó una muestra de 28 profesionales, que abarcó profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas, de la Universidad de Guayaquil, sobre la base de su actividad como especialista en la enseñanza de la matemática, su experiencia en la enseñanza universitaria, el nivel autocrítico y sus experiencias investigativas relacionadas con la enseñanza de la geometría.

La preselección estuvo basada en los años de experiencia en la profesión (más de cinco años) y la disposición de participar en el estudio. Se constató que los expertos tienen una significativa experiencia en la educación universitaria, avalado por un promedio de más de 10 años como profesores de Matemática. El 100% de los encuestados ostentan el grado científico de doctor o el grado académico de máster.

A estos profesionales se les explicó la problemática analizada previamente y se les solicitó mediante una encuesta que se autoevaluaran cualitativamente en su nivel de conocimiento teórico y práctico (entendido este como el adquirido a través del ejercicio práctico de su profesión) en el tema analizado, en: extremadamente alto, muy muy alto, muy alto, alto, medianamente alto, medio, medianamente bajo, bajo, muy bajo, muy muy bajo y extremadamente bajo como se muestra en la tabla 13.

Evalúe su nivel de conocimiento en el tema a tratar según las siguientes categorías Extremadamente alto (EH), Muy muy alto (VVH), Muy alto (VH), Alto (H), Medianamente alto (MH), Medio (M), Medianamente bajo (ML), Bajo (L), Muy bajo (VL), Muy muy bajo (VVL) y Extremadamente bajo (EL)	
Nivel de conocimiento teórico	
Nivel de conocimiento práctico (conocimiento adquirido mediante el ejercicio práctico de su profesión)	
Evalúe en una escala del 1 al 100 el peso que concede al conocimiento teórico en relación con el conocimiento práctico, para el análisis del tema en cuestión	
Peso del conocimiento teórico	

Tabla 13. Encuesta para autoevaluación de los expertos

También se les solicitó que evaluaran qué peso concedían, en una escala del 1 al 100, al conocimiento teórico en relación con el práctico, para el análisis del tema en cuestión. A este valor se le dividió entre 100 y se halló la diferencia con 1, para conocer el valor otorgado al conocimiento práctico. O sea, que la suma de los dos pesos resulta igual a





1. De esta forma, se establecieron los promedios de los pesos otorgados como wt (peso del nivel conocimiento teórico) y wp (peso del nivel de conocimiento práctico).

Para el procesamiento de estas autoevaluaciones se propone la asociación de los términos lingüísticos a los números SVN que se muestran en la tabla 4. Para agregar las evaluaciones de los conocimientos teóricos y prácticos dadas por los expertos con el objetivo de determinar su nivel de conocimiento total en el tema objeto de estudios, se utilizó la media ponderada neutrosófica de valor único (SVNWA), al igual que en el epígrafe anterior. Una vez obtenidas las agregaciones se utilizó la función de puntuación para obtener un valor único de evaluación por experto.

Con este valor se obtuvo una evaluación cualitativa de cada experto tomando el rango posible de puntuación (de 0 a 3) y se dividió entre 11 (de acuerdo a la cantidad de términos lingüísticos utilizados con lo que se obtuvieron los intervalos para clasificar las puntuaciones, como se muestra en la tabla 14.

<b>Término lingüístico</b>	<b>Evaluación</b>	<b>Intervalos de puntuación</b>
Extremadamente Bajo	EB	[0 - 0,270)
Muy Muy Bajo	MMB	[0,27 - 0,55)
Muy Bajo	MB	[0,55 - 0,81)
Bajo	B	[0,81 - 1,09)
Medianamente Bajo	MEB	[1,09 - 1,36)
Medio	M	[1,36 - 1,63)
Medianamente Alto	MEA	[1,63 - 1,90)
Alto	A	[1,90 - 2,18)
Muy Alto	MA	[2,18 - 2,45)
Muy Muy Alto	MMA	[2,45 - 2,72)
Extremadamente Alto	EA	[2,72 - 3]

Tabla 14. Intervalos para evaluación del nivel de conocimiento del experto según valor de función de puntuación

Los resultados de las evaluaciones del nivel de conocimiento teórico y práctico de los expertos se muestran en la tabla 15.

EXPERTO	NIVEL DE CONOCIMIENTO TEÓRICO	NIVEL DE CONOCIMIENTO PRÁCTICO
1	MA	MA
2	MMA	MA
3	M	MA
4	MEB	B
5	A	MMA
6	MB	B
7	A	A
8	MA	MA
9	MEB	MEB
10	MA	MEB
11	MA	MEB
12	MEB	M
13	MA	A
14	MA	M
15	MA	MA
16	A	MA
17	MA	MEB
18	MA	MMA
19	B	MB
20	A	MA
21	MA	A
22	MA	M
23	B	MB
24	A	MMA
25	A	A
26	A	MA
27	MEB	A
28	MA	MA

Tabla 15. Autoevaluación de los expertos sobre su nivel de conocimiento teórico y práctico en el tema

A continuación, se determinaron los pesos de los niveles de conocimiento teórico y práctico ( $w_t$  y  $w_p$ ) para el análisis del tema, según la media de los valores otorgados por los expertos. De ello resultó que  $w_t=0,3$  y  $w_p=0,7$ . Como puede observarse, los expertos consideraron que para el análisis del tema en cuestión, tiene mayor peso la experiencia obtenida a través del ejercicio de la profesión. Con estos resultados se procedió a la agregación de las evaluaciones en ambos campos a partir del operador SVNWA (tabla 16).

Experto	Agregación	Puntuación	Evaluación
1	( 0,6; 0,35; 0,35 )	1,85	MEA
2	( 0,74; 0,24; 0,24 )	2,23	MA
3	( 0,57; 0,39; 0,39 )	1,75	MEA
4	( 0,33; 0,72; 0,72 )	0,94	B
5	( 0,86; 0,13; 0,13 )	2,59	MMA
6	( 0,27; 0,78; 0,78 )	0,76	MB
7	( 0,7; 0,25; 0,25 )	2,15	A
8	( 0,6; 0,35; 0,35 )	1,85	MEA
9	( 0,4; 0,65; 0,65 )	1,15	MB
10	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,39	M
11	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,39	M
12	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,40	M
13	( 0,73; 0,21; 0,21 )	2,25	MA
14	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,61	M
15	( 0,6; 0,35; 0,35 )	1,85	MEA
16	( 0,77; 0,17; 0,17 )	2,37	MA
17	( 0,47; 0,54; 0,54 )	1,39	M
18	( 0,88; 0,11; 0,11 )	2,64	MMA
19	( 0,23; 0,82; 0,82 )	0,64	MB
20	( 0,63; 0,32; 0,32 )	1,94	A
21	( 0,67; 0,28; 0,28 )	2,06	A
22	( 0,53; 0,45; 0,45 )	1,61	M
23	( 0,23; 0,82; 0,82 )	0,64	MB
24	( 0,86; 0,13; 0,13 )	2,59	MMA
25	( 0,7; 0,25; 0,25 )	2,15	A
26	( 0,77; 0,17; 0,17 )	2,37	MA
27	( 0,63; 0,33; 0,33 )	1,92	A
28	( 0,75; 0,19; 0,19 )	2,31	MA

Tabla 16. Resultados de la agregación y la puntuación de la autoevaluación de los expertos para su selección

Finalmente, fueron seleccionados los expertos con nivel de conocimiento Muy muy alto y Muy alto, y Alto para un total de trece expertos. A estos expertos seleccionados se les entregó una encuesta para validar la metodología para la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial presentada previamente, y se solicitó que calificara cada indicador de la Metodología para la conducción del proceso de desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, de acuerdo a las siguientes categorías: Muy Adecuado (MA), Adecuado (A), Poco Adecuado (PA) e Inadecuado (I).

Para la valoración sobre los principales elementos de la metodología propuesta se consideraron los siguientes indicadores.

1. Fundamentación teórica de la metodología.
2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.
4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).
5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.
6. Pertinencia de la metodología para el objetivo propuesto.
7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación universitaria.

Una vez obtenidos los resultados de la aplicación del cuestionario 2 se calcularon las frecuencias acumuladas y las frecuencias acumuladas relativas como se muestra en la tabla 17.

Indicadores	Frecuencia Absoluta				Frecuencia Relativa Acumulada			
	<i>I</i>	<i>PA</i>	<i>A</i>	<i>MA</i>	<i>MA</i>	<i>A</i>	<i>PA</i>	<i>I</i>
1. Fundamentación teórica de la metodología.	0	1	5	7	0.00	0.08	0.46	1.00
2. Pertinencia de la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	0	0	4	9	0.00	0.00	0.31	1.00
3. Pertinencia de los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial.	0	0	3	10	0.00	0.00	0.23	1.00
4. Estructura de la metodología (eslabones, componentes).	0	0	2	11	0.00	0.00	0.15	1.00
5. Pertinencia de las orientaciones metodológicas para cada uno de los eslabones de la metodología.	0	0	2	11	0.00	0.00	0.15	1.00
6. Pertinencia de la metodología para el objetivo	0	0	1	12	0.00	0.00	0.08	1.00



propuesto.								
7. Pertinencia de la metodología en el actual perfeccionamiento de los programas de Matemática en la educación universitaria.	0	0	3	10	0.00	0.00	0.23	1.00

Tabla 17. Información recogida sobre la valoración de los expertos a cada uno de los indicadores planteados para la valoración de la factibilidad y pertinencia de la metodología

Mediante estas últimas se procedió al cálculo de los puntos de corte y sus respectivas escalas de indicadores por medio de los valores normales estándar inversos. Para ello se empleó la aproximación al valor más cercano de la curva normal estándar de la probabilidad acumulada. Para los valores de probabilidad acumulada iguales a 1, el valor estándar inverso correspondiente se consideró 3,5 como reducción práctica al mostrarse asintótico a partir del valor 3,49. De igual forma, para valores de probabilidad acumulada iguales a 0, el valor estándar inverso se asumió igual a -3,5.

Se estimaron los puntos de corte, calculados como el promedio de los valores de la función estándar inversa por cada uno de los valores de escala y se determinó el valor de límite N, a través del promedio de los puntos de corte para delimitar los rangos de intervalo a los que pertenece cada categoría. Estos resultados se muestran en la tabla 18.

Indicador	Imagen de las frecuencias acumulativas relativas						
	0	1	2	3	4	<i>Promedio</i>	<i>N-P</i>
1	-3.500	-3.500	-1.426	-0.097	3.500	-1.005	-0.494
2	-3.500	-3.500	-3.500	-0.502	3.500	-1.500	0.002
3	-3.500	-3.500	-3.500	-0.736	3.500	-1.547	0.048
4	-3.500	-3.500	-3.500	-1.020	3.500	-1.604	0.105
5	-3.500	-3.500	-3.500	-1.020	3.500	-1.604	0.105
6	-3.500	-3.500	-3.500	-1.426	3.500	-1.685	0.186
7	-3.500	-3.500	-3.500	-0.736	3.500	-1.547	0.048
<i>Punto de Corte</i>	-3.500	-3.500	-3.204	-0.791	3.500	-1.499	

Tabla 18 Imágenes por la curva normal estándar inversa y puntos de corte

A continuación, se estimó el valor N-P, obtenido como la diferencia del valor límite menos el valor promedio de cada enunciado y se determinó la pertenencia de cada uno de los enunciados a través de la comparación del valor N-P de cada enunciado con los puntos de corte y límites de rango de cada una de las categorías. El análisis de los resultados obtenidos con la aplicación del método criterio de expertos muestra que los siete indicadores puestos a consideración fueron evaluados de Muy Adecuado.

De manera general, los expertos ofrecieron las siguientes consideraciones:

Los presupuestos teóricos que sustentan la metodología son muy adecuados, al mostrar una lógica en la conceptualización y estructuración de los eslabones y componentes para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial.

La metodología posee un adecuado enfoque sistémico, dado en la evidente relación de coordinación y subordinación entre sus eslabones y componentes.

Es pertinente la precisión de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, así como la propuesta de procedimientos desarrolladores, a través de los cuales se contribuye al desarrollo de las habilidades. Además, reconocen que las orientaciones metodológicas dadas para cada eslabón orientan con precisión a los profesores en la aplicación de la metodología en la práctica escolar.

En la metodología se concretan de forma muy adecuada los procedimientos desarrolladores para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial y que es pertinente y viable en el proceso de perfeccionamiento que viene sucediendo en los programas de la educación universitaria.

## Referencia

- Acuña, C. (1995). *La enseñanza de la Deducción y la Demostración en la Geometría del Bachillerato*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP Enrique José Varona. La Habana. Cuba
- Acuña, C. (2008). *Prototypes and learning of geometry a reflection on its pertinence and its causes* / Claudia Acuña Soto, Víctor Larios Osorio. Center for research and advanced studies (CINVESTAV) of the IPN (national polytechnic institute), autonomous university of Querétaro (UAQ). ICMI 2008. Monterrey. México.
- Acuña, C. y Larios, V. (2008). *Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes*. ICMEII. Plenary paper, Topic Study Group 20: Visualization in the teaching and learning of mathematics. Disponible en: <http://tsg.icmeII.org/document/get/193>
- Addine, F. (1998). *Didáctica y optimización del proceso de enseñanza aprendizaje*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Addine, F., Recarey, F. y González, A. M. (2002). Principios para la dirección del proceso pedagógico. García G. En: Compendio de Pedagogía (pp. 80-97). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- . Addine, F., González, A. M. y Recarey, S. (2003). Principios para la dirección del proceso pedagógico. En: Compendio de Pedagogía. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. pp. 80-101.
- Addine, F. (2004). *Didáctica teoría y práctica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Álvarez, M. (2009). *Educación a distancia. ¿Para qué y cómo?* Disponible en: <http://www.sld.cu/libros/distacia/indice.html>
- Álvarez, M. (2009). *Acerca de la resolución de problemas en el área de ciencias*. La Habana: Ministerio de Educación.
- Álvarez de Zayas, C. (1990). *Didáctica La Escuela en la Vida*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Álvarez de Zayas, C. (1996). *Hacia una escuela de excelencia*. La Habana: Editorial Academia.

- Ausubel, D. P. (2000). *Teoría del aprendizaje significativo*. España: Editorial Trillas.
- Ballester, S., Almeida, B., Álvarez, A., Arango, C., Batista, L. C., Cruz, I.,... Villegas, E. (2007). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Holguín: Empresa Poligráfica Holguín.
- Barcia, R. (2000). *La preparación geométrica de los estudiantes en Educación Primaria*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Cienfuegos.
- Barreras, F. (1997). *Modelo pedagógico para la formación y desarrollo de las habilidades, hábitos y capacidades*. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). La Habana. Material digital.
- Barrón, A. (1991). Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos. *Revista Educación*. Enero-Abril. p. 294.
- Benítez, M. L. y Cárdenas O. L. (2008). *La enseñanza de la topología a través de la cartografía*. Disponible en: <http://esrlc.com.ve/ibero2008/iberoamerica/files/CARDENAS%20OSCAR.pdf>
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Castellanos, B. (2001). *Hacia un aprendizaje desarrollador*. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona (ISPEJV). La Habana. Material impreso
- Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. J., y Silverio M. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona (ISPEJV). La Habana. Material impreso.
- Castellanos, D. (2007). *Aprender y Enseñar en la Escuela. Una concepción desarrolladora*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Castellano, D. (2004). *Aprendizaje y Desarrollo. Temas de Introducción a la formación pedagógica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Castiblanco, A. C., Urquina, M., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Instituto Pedagógico Nacional. Bogotá



- Castro, N. V. (2010). *La heurística en la formación del profesional de la educación Secundaria Básica*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Holguín. Cuba.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and espacial reasoning. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 420-464). Macmillan Publishing Co. New York.
- Danilov, M. A. y Skatkin, M. S. (1978). *Didáctica de la Escuela Media. Libros para la Educación*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- De Armas, N. (2011). Aproximación al estudio de la metodología como resultado científico. En De Armas, N. y Valle, A. *Resultados científicos en la investigación educativa* (pp.41-51). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Escalona, D. M. (1944). La enseñanza de la geometría demostrativa. En Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas p. 189-194, no. 6, diciembre 1944.
- Feria, M. A., Espinosa, L. B. y Martínez, N. (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría*. Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia.
- Fernández, M. T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias. Disponible en: [www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Teresa\\_Fernandez\\_tesis.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf)
- Ferrer, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis inédita en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. Disponible en: <http://www.eumed.net/tesis/2010/mfv/index.htm>
- Ferrer, M. y Rebollar, A. (2007). *Cómo dirigir el proceso de formación de habilidades matemáticas*. Ciudad de la Habana: Pedagogía 2007. Memorias.
- Fuentes, H., Cruz, S. y Álvarez, I. B. (1998). *Modelo Holístico Configuracional de la Didáctica*. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran”(CeeS) Material en CD\_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba

- Fuentes, H. (1996). *Dinámica del proceso de enseñanza – aprendizaje*. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran” (CeeS) Material en CD\_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba
- Fuentes, H. (2009). *Pedagogía y Didáctica de la Educación Superior*. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel F. Gran” (CeeS) Material en CD\_ROM Universidad de Oriente, Santiago de Cuba. Cuba
- García, J. E. (2002). *Sistema de habilidades profesionales para la disciplina geometría de la carrera Matemática – Computación en función de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas geométricos de la matemática escolar*. Tesis inédita en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP Frank País García. Santiago de Cuba. Cuba
- Gibert, E.M. (2007). *Aplicación de una propuesta metodológica que propicie un aprendizaje desarrollador de la matemática*. Pedagogía 2007. Evento Internacional, Memorias. La Habana. Cuba
- Gibert, E.M. (2009). *Fases en la aplicación de una estrategia. Alternativa para la estructuración de la clase de Matemática*. En: Memorias del XI Congreso Nacional de Matemática y Computación como número especial del Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. [CD-ROM]: Educación Cubana, La Habana. Cuba
- Gibert, E.M. (2012). *Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP Enrique José Varona (ISPEJV) La Habana. Cuba
- González, E. (2009). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria. De la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de primaria a la enseñanza de esta materia en algunas escuelas mexicanas: estudio de casos. México*. Disponible en: <http://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/GonzalezGuillen09.pdf>
- González, M. C. (2006). *Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de geometría*. Tesis inédita en

opción al grado científico de doctor en Ciencias. ISP Enrique José Varona (ISPEJV) La Habana.

González, M., Castellanos, D., Córdova, D., Rebollar, M., Fernández, A. M., Martínez, M., Pérez, D. (2001). *Psicología para educadores*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

González, M. C. (1999). *Las demostraciones en la Estereometría*. Tesis inédita en opción al título Académico de Máster en Didáctica de la Matemática. ISP Enrique José Varona (ISPEJV) La Habana.

Grenier, D. (2008). *Reasoning and proof in a spatial geometry teaching situation*. Université Joseph Fourier, Grenoble y Université du Québec à Montréal (UQAM). ICMI 2008. Monterrey.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros. *Revista Educación Matemática*. Agosto. (3).

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria*. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.

Gutiérrez, A. (1989). Modelo del Razonamiento Geométrico de Van Hiele. *Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Valencia*. Vol. 7, No. 1, 1989. España.

Gutiérrez, A. (1991). *Proceso y Habilidades en visualización Espacial*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Valencia. Valencia. España. Disponible en: <http://www.sectormatematica.cl/articulos/visualizacion.pdf>

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3- dimensionales en la enseñanza de la Geometría Espacial. *Revista EMA*. 1998, Vol. 3. No. 3, p193-220.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project. Geometry and visualization*. USA.

Jiménez, M. H. (2000). *Una concepción en la enseñanza de la matemática para propiciar el aprendizaje desarrollador*. Resultado de investigación. La Habana. Instituto Superior Enrique José Varona (ISPEJV). La Habana.

Jiménez, M. H. (2007). Aplicación de una propuesta metodológica que propicie un aprendizaje desarrollador de la matemática. En *Memorias Pedagogía 2007, Simposio 14*. La Habana.

- Jungk, W. (1982). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Klingberg, L. (1972). *Introducción a la Didáctica General*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria resolver problemas*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- López, A. y González, V. (2001). *La técnica de Iadov: Una aplicación para el estudio*. Disponible en: <http://www.efdeportes.com/efd32/iadov.htm>
- Llorente, Y. (2016). *La estimulación de la flexibilidad como cualidad de las potencialidades creadoras de los estudiantes mediante el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín.
- Machado, E. y Montes de Oca, N. (2004). *Desarrollo de habilidades*.
- Rebollar, A. y Ferrer, M. (2007). *La enseñanza basada en problemas y ejercicios*. Disponible en: <http://www.eumed.net/libros/2010c/743/index.htm>
- Rico, P. y Silvestre, M. (2004). Proceso de enseñanza-aprendizaje. En Compendio de Pedagogía (pp. 68-79). La Habana: Editorial Pueblo y Educación..
- Rojas, O. (2006). *Alternativa para favorecer el Aprendizaje de la Geometría del espacio en la Escuela*. En el evento II Taller de Atención a la diversidad. Retos y alternativas en el Instituto Pedagógico Conrado Benítez. Ciudad de Cienfuegos.
- Rojas, O. (2007). *Razones para mantener la enseñanza de la geometría en la escuela. Tendencia para la enseñanza de la geometría del espacio*. II Evento Nacional sobre la enseñanza de las Ciencias Exactas, ENCE 2007, Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero. Ciudad de Holguín.
- Rojas, O. (2007). *La enseñanza de la Geometría del espacio en la escuela: una propuesta para su aprendizaje. Tendencia para la enseñanza de la geometría del espacio*. II Evento Nacional sobre la enseñanza de las Ciencias Exactas, ENCE 2007, Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero. Ciudad de Holguín.



- Rojas, O. (2007). Una Concepción Didáctica para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la escuela cubana. *Revista de la Confederación Iberoamericana de Educación Católica, CIEC. EDUCACIÓN HOY. El aprendizaje de las Matemáticas.* Julio-septiembre 2007. Bogotá, D.C.
- Rojas, O. (2007). *La Geometría del espacio: Medios para favorecer su enseñanza aprendizaje mediante una concepción didáctica.* X Congreso Nacional de Matemática y Computación, COMPUMAT 2007, Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero. Ciudad de Holguín. Cuba
- Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador.* Tesis inédita en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas, Holguín.
- Sánchez, F., Guadarrama, P. y Araujo, R. (s/a). *Lecciones de Filosofía Marxista-Leninista.* Tomo II. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Sánchez, N. y Bonilla, M. (1998). *Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el aula.* Módulo 3, Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Bogotá: Universidad Distrital.
- Silvestre, M. y Zilberstein, J. (2000). *¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?* México: Ediciones CEIDE.
- Silvestre, M. (2000). *Enseñanza y aprendizaje desarrollador.* Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) La Habana.
- Silvestre, M. (2002). *Hacia una didáctica desarrolladora.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación. Cuba
- Suero, F. (2001). *Una propuesta metodológica que contribuya al mejoramiento de la enseñanza aprendizaje del Álgebra a través de la formación de conceptos.* Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona (ISPEJV). La Habana.
- Uribe, S. M., Cárdenas, O. L., Becerra, J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Revista Educación Matemática.* (26),2. Agosto. pp. 135-160.



Vigotski, L. S. (1982). *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (1999). *Una didáctica para una enseñanza y un aprendizaje desarrollador*. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). Ciudad de la Habana.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una concepción desarrolladora de la motivación y el aprendizaje de las ciencias*. (s.l.)(s.n.).



*El desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial: una mirada desde la validación neutrosófica*



**©Editorial Tecnocientífica Americana**  
Street 613nw 15th in Amarillo, Texas, ZIP 79104, United States  
Phone: 7867769991

2021



Sello de calidad 6000/7000



Scholarly Publishers Indicators

Books in Humanities and Social Sciences

Copyright © 2011



eLibro



Books in Humanities and Social Sciences

