TESIS DOCTORAL

Una teoría de obstrucción para la extensión y clasificación de aplicaciones propias

José Ignacio Extremiana Aldana

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Una teoría de obstrucción para la extensión y clasificación de aplicaciones propias

José Ignacio Extremiana Aldana

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2010

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Luis Javier Hernández Paricio, fue leída el 30 de septiembre de 1986, y obtuvo la calificación de Apto Cum Laude.

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-693-4549-8

"UNA TEORIA DE OBSTRUCCION PARA LA EXTENSION Y CLASIFICACION DE APLICACIONES PROPIAS"

Por

José Ignacio Extremiana Aldana

Memoria presentada para optar
al grado de Doctor en Ciencias
(Sección de Matemáticas) bajo
la dirección del Dr. D. Luis
Javier Hernández Paricio .
(Septiembre 1986)

SECCION DE MATEMATICAS

Para la realización de este trabajo el autor ha contado con una ayuda del Instituto de Estudios Riojanos (I. E. R.), organismo al que quiero expresar mi agradecimiento.

Son muchas las personas a las que tengo que agradecer su ayuda, apoyo y comprensión .

En primer lugar, al director de esta memoria, Luis Javier Hernández, en quién, además de una excelente preparación matemática, he encontrado siempre una gran predisposición, un trato afectivo y unas condiciones humanas inmejorables.

A mi compañera y amiga María Teresa Rivas, con quien he compartido muchas horas de estudio y conoce todos los problemas que han surgido en la realización de este trabajo.

A María Dolores Extremiana, María Lourdes Rivas y José Manuel Gil, por el gran cuidado, dedicación y cariño que han puesto en la mecanografía y presentación de este volumen.

Quiero, asimismo, hacer extensivo mi agradecimiento a todas aquellas personas, entre las que se encuentran compañeros del Colegio Universitario de la Rioja, sin cuyo aliento y comprensión no hubiera alcanzado la meta deseada.

INDICE

INTRODUCCION

N. E. Steenrod en el año 1.972 [St 3] escribe :

> "Gran número de los teoremas básicos de la Topología, y algunas de sus más afortunadas aplicaciones en otras áreas de las matemáticas son soluciones de problemas de extensión particulares. .... Muchos problemas de extensión permanecen sin resolver, y gran parte del actual desarrollo de la Topología algebraica está inspirado por la esperanza de encontrar una solución general".

Anteriormente, S.T. Hu en el prólogo de su libro Homotopy theory [Hu 4] escribe:

> "El principal problema en teoría de homotopía es el problema de la extensión".

Este problema está planteado del modo siguiente:

Sean X e Y dos espacios topológicos, A un subespacio de X y $f: A \longrightarrow Y$ una aplicación continua. ¿Cuándo existe una aplicación continua $g: X \longrightarrow Y$ de tal manera que la restricción de g a A coincide con f ?

Si A tiene la propiedad de extensión de homotopía en X respecto de Y, este problema sólo depende de la clase de homotopía de f y, por lo tanto, es equivalente plantearlo de una forma más general:

Dada una aplicación continua $f: A \longrightarrow Y$ ¿Cuando existe

una aplicación continua $g: X \longrightarrow Y$ tal que $f \circ h \simeq g$?
(h denota la aplicación inclusión de A en X)

Otros importantes problemas de la Topología algebraica son casos particulares del problema de extensión. Por ejemplo :

1) El problema de la retracción: Es el anterior problema cuando $Y = A$ y f es la aplicación identidad en A.

2) El problema de la homotopía: Dadas dos aplicaciones continuas $f, g: X \longrightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$ ¿Cuando existe una aplicación continua $F: X \times I \longrightarrow Y$ de tal modo que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$ y $F(a,t) = f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$ y cada $t \in I$?

3) El problema de la clasificación: Dados dos espacios topológicos X e Y, se trata de enumerar las clases de homotopía de aplicaciones continuas $f: X \longrightarrow Y$, y de discernir cuando dos aplicaciones dadas son homótopas o no. Notemos la íntima relación de este problema con el de la homotopía.

La discusión del problema de la clasificación cuando X es la n-esfera S^n e Y un poliedro condujo a Hurewicz a definir los grupos de homotopía $\pi_n(Y, y_0)$ en 1935 [Hw], grupos de gran importancia en el desarrollo de la Topología algebraica. Conviene recordar que el grupo fundamental ($\pi_1(Y, y_0)$ en la notación de Hurewicz) había sido definido en el año 1895 por Poincaré [Po]

El concepto de grado de Brouwer condujo a la enumeración de las clases de homotopía de aplicaciones de una esfera en sí misma [Bru]. Además dos de tales aplicaciones son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado. Más tarde, Hopf en un artículo de 1933 [Ho.1], que Withney en [W.2] sitúa como el punto de partida de la teoría moderna de clasificación y extensión de aplicaciones, clasifica las aplicaciones de un complejo n-dimensional en una n-esfera S^n. Hurewicz [Hw III] en 1936 estudió el teorema de Hopf reemplazando la esfera S^n por un espacio cuyos grupos de homotopía de dimensión menor que n son triviales.

Si X es un complejo de celdas finito e Y la circunferencia S^1, el problema fué resuelto por Bruschlinsky [Brs]. La enumeración de las clases de homotopía de aplicaciones de S^3 en S^2 es debida a Hopf [Ho 3]. Estas clases forman un grupo cíclico infinito. Freudenthal [F.H. 2] y Pontrjagin [Pn 1] extienden el resultado demostrando que el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de S^{n+1} en S^n ($\pi_{n+1}(S^n)$ en notación de Hurewicz) es cíclico de orden 2 para n > 2. Más tarde, Pontrjagin [Pn 2] obtiene una enumeración de clases de homotopía de aplicaciones de un 3-complejo en S^2.

Whitney en 1937 [Wi 1], demuestra el teorema de clasificación de Hopf, basándose en un teorema de extensión, y utilizando por primera vez argumentos de cohomología (palabra que él es el primero en utilizar). El teorema de Hopf en términos de Whitney queda así :

"Las clases de aplicaciones de K^n en S^n están en correspondencia (1-1) con los elementos del n-ésimo grupo de cohomología de K con coeficientes enteros La correspondencia está dada por deformación de la aplicación f en una normal y tomando la clase de cohomología del cociclo resultante. En particular f es homótopa a cero si y sólo si, la clase de cohomología correspondiente es cero"

(Una aplicacion $f : K \longrightarrow S^n$ es normal si $f(p) = P_0$ para cada punto p de K que esté en el (n-1) esqueleto de K. P_0 es un punto fijo de S^n)

En el mismo articulo Whitney da una nueva versión del teorema de Hurewicz, y añade :

> "Los teoremas anteriores siguen siendo ciertos si reemplazamos S^n por un espacio Y localmente contráctil cuyos r-ésimos grupos de homotopía son 0 para $r < n$ y reemplazamos el grupo de los enteros por el n-ésimo grupo de homotopía de Y como grupo de coeficientes en las cadenas y clases de cohomología".

Fué Samuel Eilenberg en su articulo de 1940 "Cohomology and continuous maps" [E.2] quien desarrolló los elementos fundamentales de la teoría de obstrucción para el estudio de los problemas de extensión y clasificación de aplicaciones continuas.

Considera en dicho artículo aplicaciones continuas $f: K^n \longrightarrow Y$, donde K^n es el n-esqueleto de un complejo de celdas geométrico arbitrario K e Y un espacio n-simple, y estudia cuándo existe una extensión continua de f a K^{n+1}; para ello asigna a f una cocadena con coeficientes en $\pi_n(Y)$, y demuestra que es un cociclo (cociclo obstrucción). Cuando este cociclo es cero la aplicación puede extenderse. Define también la cocadena diferencia y generaliza los teoremas de Hopf y los de Hurewicz-Whitney.

Más tarde en otro articulo del año 1.941 [E.3] traslada los resultados obtenidos en términos de cohomologia a términos de homologia.

N.E. Steenrod estudia y resuelve el problema de clasificación para una aplicación $f: X^{n+1} \longrightarrow S^n$, donde X^{n+1} es el (n+1)-esqueleto de un complejo, como consecuencia de un teorema de extensión, introduciendo nuevos productos de cociclos

S.T. Hu [Hu.2] en 1.948, utiliza la (co)-homologia de Čech para tratar los problemas anteriores en el estudio de aplicaciones continuas de un complejo cualquiera X en un espacio Y Es también Hu [Hu.3] quien estudia la "obstrucción" a extender una homotopía e introduce los conjuntos obstrucción.

La Teoría de obstrucción ha sido desarrollada por muchos matemáticos, que la estudiaron en diferentes contextos (complejos de celdas, CW-conplejos etc..) y con diferentes hipótesis bajo las que se prueban los teoremas, (simple conexión, n-simplicidad etc..). Es un intento de encontrar una solución general al problema de la extensión y clasificación de aplicaciones. Entre los matemáticos que más han contribuido a su desarrollo podemos mencionar , al margen de los citados, a Postnikov [Ps], P. Olum [O.1], Mc Lane [E.M.1] etc...

En el año 1.977 Yu T. Lisitsa [Li], en el marco de la Teoría Shape, para obtener algunos teoremas de clasificación de clases de homotopía fundamental de sucesiones fundamentales, desarrolla una Teoría de obstrucción en la que utiliza invariantes de Teoría Shape: los grupos de homología y cohomología de Aleksandrov-Čech, [Al] [C], los grupos fundamentales de Borsuk [Bo] y los grupos de cohomotopía.

T. Porter en [P.1], desarrolla una teoría de obstrucción en pro-categorías. Utilizando una teoría de cohomología con coeficientes en un pro-grupo abeliano por él construida, obtiene obstrucciones para extensiones simples en la categoría pro-Kan_0, donde Kan_0 es la categoría de los complejos conexos punteados de Kan y aplicaciones simpliciales punteadas. No hace cálculos por no poseer la maquinaria adecuada.

L.J. Hernández [He.2] en 1.985 ha desarrollado una Teoría de obstrucción para aplicaciones propias en el marco de las pro-categorías, utilizando una cohomología con coeficientes en un morfismo de pro-grupos. Se restringe al estudio de aplicaciones propias de un complejo de celdas [St.2, pag 100], localmente compacto y segundo numerable, en un espacio arco-conexo Y con un final de Freudenthal [F.H.1].

Los cálculos de clases de homotopía propia en esta teoría son extraordinariamente complicados y sólo consigue efectuarlos en algún caso.

Nuestro propósito en este trabajo es construir una Teoría de obstrucción en una categoria adecuada que nos permita deducir cuando una aplicación propia tiene una extensión propia o no.

Nos restringiremos a espacios con un número finito de finales propios [Dm-He] y que puedan ser construidos con un número finito de celdas no compactas (espacio homeomorfo a $I^n \times J$) de manera análoga a como se contruyen los CW-complejos [Wh 2] pero con aplicaciones de pegada propias.

Para cumplir este propósito necesitamos las herramientas y métodos adecuados. Invariantes de homotopía propia que jueguen aquí el papel que los grupos de homotopía de Hurewicz π_n y la homología singular H_* [E.4] juegan en la teoría clásica de obstrucción.

Todos los invariantes que se utilizan en esta memoria, están estudiados en profundidad en la memoria "Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones" [Ri] realizada por nuestra compañera del Colegio Universitario de la Rioja, M. T. Rivas. Allí se desarrollan las propiedades de los grupos de homotopía propia $\underline{\pi}_n$ [Če], $\underline{J}_n$ [He.1] y su relación con los de homotopía de Hurewicz. También se desarrollan Teorías de homología propia y se estudian las relaciones entre estas homologías y homotopías mediante unos Teoremas de tipo Hurewicz. Asímismo está definida allí la categoría a la que nos restringiremos para lograr el propósito fijado.

El capítulo I de la presente memoria es un resumen del trabajo mencionado.

La categoría que consideraremos es la de los complejos cúbico propios finitos [E-H-R], que resulta ser adecuada para el estudio de las homologías propias definidas por L.J. Hernández, M.T. Rivas, y el autor. Estos complejos estan construidos de manera análoga a los complejos simpliciales, pero con cubos compactos (I^n) y no compactos ($I^r \times J^s$) ($I = [0,1]$, $J = [0,\infty)$).

Estudiamos aplicaciones propias definidas en un subcomplejo A de un complejo cúbico propio finito X en un espacio topológico Y arco-conexo, con un sólo final propio y que verifique ciertas condiciones de simplicidad en sus grupos de homotopía clásicos y en los de homotopía propia. Para tratar la extensión propia de estas aplicaciones a todo el complejo,si se estudian la parte compacta (la correspondiente a los cubos compactos), y la no compacta (correspondiente a los cubos no compactos) por separado, (una aplicación continua f de un compacto en un espacio topológico es siempre propia) es suficiente con los invariantes de homotopía propia estudiados en [Ri] y los de homotopía clásicos. Sin embargo, las extensiones obtenidas (cuando se obtienen) pueden no ser compatibles. Es por tanto necesario estudiar ambas partes del complejo a la vez y para ello es preciso construir una (co)homología con coeficientes en un morfismo de grupos abelianos (el que nos es válido es el que liga los grupos de homotopía de Hurewicz con los de homotopía propia definidos por L.J.Hernández). A la construcción de esta cohomología dedicamos el capítulo II. Estudiamos en primer lugar la categoría cuyos objetos son los morfismos de grupos abelianos, y demostramos que es una categoria de módulos sobre un anillo de matrices que determinamos. A continuación se estudian los epimorfismos y objetos proyectivos en esta categoria, con vistas a demostrar más adelante un Teorema de Coeficientes Universales, que sólo en buenas condiciones es análogo al clásico. A continuación se definen estas nuevas homologías, que se construyen generalizando las teorias de homologia propia tratadas ya en [Ri] y definidas en [E-H-R].

El capítulo III lo dedicamos a estudiar diferentes maneras de inducir morfismos en la cohomologia definida en el capítulo anterior por una aplicación propia, dependiendo de las propiedades que ésta verifique.

En los capítulo siguientes IV ,V, y VI se desarrolla la teoría de obstrucción para aplicaciones propias. Seguimos los pasos de los tratados clásicos [Hu.4], [G.W.1 y 2], y en muchos casos los Teoremas quedan con enunciados análogos a los que en ellos se demuestran.

En el capítulo IV definimos un cociclo obstrucción, que denotamos $SC^{n+1}(f)$ para una aplicación propia $f: K^n \longrightarrow Y$. Este cociclo tiene propiedades análogas para aplicaciones propias a las que tiene el cociclo de Eilenberg para aplicaciones continuas: f puede extenderse propiamente a K^{n+1} si y sólo si $SC^{n+1}(f) = 0$.

En el capítulo V, planteamos el problema de la homotopía propia y definimos la cocadena diferencia propia $(\Delta^n(F))$. Estudiando las propiedades de esta cocadena, obtenemos un

Teorema de extensión análogo al de Eilenberg: $f|_{K^{n-1}}$ puede extenderse propiamente a K^{n+1} si y sólo si $SC^{n+1}(f) \sim 0$. Definimos conjuntos obstrucción propia para extensión y homotopía y se resuelven estos problemas para buenas hipótesis sobre el espacio Y. Acabamos este capítulo dando una caracterización de los complejos cúbicos propios finitos que son homotópicamente equivalentes de manera propia a J.

En el capítulo VI nos planteamos el problema de clasificar las clases de homotopía propia de aplicaciones propias y concretamente el problema de enumerar los n-clases de homotopía propia que hay en una (n-1)-clase, este problema se resuelve pero no de una manera muy efectiva. A continuación nos restringimos al caso en el que los grupos de homotopía y homotopía propia del espacio Y son triviales hasta una determinada dimensión. En este caso, con los resultados obtenidos anteriormente y definiendo unas obstrucciones propias primarias análogas a las clásicas, obtenemos unos buenos resultados que resuelven los problemas de extensión, homotopía y clasificación propia planteados. Terminamos la memoria calculando algunos conjuntos de clases de homotopía propia.

*   *   *

La memoria está ordenada por capítulos y estos a su vez por párrafos. En cada párrafo se han numerado conjuntamente definiciones, lemas, teoremas, etc.. por orden de aparición. Las referencias que se hacen a otros lugares de la misma memoria pueden tener uno, dos o tres guarismos Si tienen uno sólo (p ej. 3) significa que lo referido está en el mismo capítulo y párrafo en que no encontramos, si tienen 2 (p ej.2.3) lo referido se encuentra en el mismo capítulo, pero en distinto párrafo, si tiene tres (p. ej. II.2.3) se encuentra en distinto capítulo y párrafo.

El simbolo # indica final de demostración.

La bibliografía está ordenada alfabéticamente, dando prioridad en cada letra a los artículos o libros de un sólo autor. Dentro de cada autor los trabajos van ordenados por orden cronológico.

CAPITULO I

NOTAS SOBRE INVARIANTES DE HOMOTOPIA PROPIA

Hablaremos en este capítulo de los invariantes de homotopía propia que se utilizarán en capítulos posteriores. Todos ellos han sido tratados en la memoria "Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones" cuya autora es María Teresa Rivas. Aquí simplemente los definiremos y recordaremos las propiedades más interesantes que verifican y las que con más profusión se utilizan en capítulos posteriores.

En el párrafo 1, se introducen los conceptos fundamentales de teoría de homotopía propia, así como las categorías en las que trabajaremos.

En el párrafo 2, trataremos de algunos grupos de homotopía propia, de las formas que hay definirlos, y de la relación que tienen con los grupos de homotopía clásicos π_n.

En el párrafo 3, hablaremos de las Teorías de (co)homología singular propia y final propia definidas en [E-H-R].

En el párrafo 4, recordaremos los homomorfismos de tipo Hurewicz que hay entre las Teorías de homotopía y homología tratadas en los párrafos anteriores, así como los Teoremas de tipo Hurewicz que pueden obtenerse.

Este capítulo es un resumen de la memoria mencionada. No hemos pretendido hacerlo exhaustivo, ni hemos seguido el mismo orden Nuestro objetivo es, simplemente, enumerar los conceptos y resultados que son necesarios en el desarrollo posterior de la presente memoria.

1.- Notación y preliminares

A lo largo de toda la memoria utilizaremos las siguientes notaciones

I es el intervalo cerrado $[0,1]$; $I^n = I\times \overset{n}{\ldots} \times I$

J es el intervalo semiabierto $[0,\infty)$; $J^n = J\times \overset{n}{\ldots} \times J$

$\mathbb{R}$ es la recta real ; $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{R}$

$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$;

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

$e^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$;

$\varepsilon^{n+1} = e^n \times J - (e^n \times \{0\})$ $n \geq 0$;

$\varepsilon^0 = e^0 = E^0 = \{0\}$.

Un n-cubo propio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de la forma $K_1\times\ldots\times K_n$ donde $K_i = I$ ó $K_i = J$. El n-cubo se dice compacto si $K_i = I$ para cada $i = 1,\ldots\ldots,n$. En otro caso el n-cubo se dice no compacto.

Llamaremos borde del n-cubo propio y lo denotaremos $\partial(K_1\times\ldots\times K_n)$ al siguiente subconjunto de $K_1\times\ldots\times K_n$

$\{(t_1\ldots t_n) \in K_1\times\ldots\times K_n \mid \exists i \in \{1,\ldots n\}$ tal que, $t_i = 0$ ó 1 si $K_i = I$ ó bien $t_i = 0$ si $K_i = J\}$

Llamaremos $\mathrm{int}(K_1\times\ldots\times K_n)$ a $(K_1\times\ldots\times K_n)\setminus\partial(K_1\times\ldots\times K_n)$

Definición 1.- Dados dos espacios topológicos X e Y, diremos que una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ es propia sii f es continua y además $f^{-1}(K)$ es compacto para cada compacto-cerrado K de Y.

Definición 2.- Diremos que dos aplicaciones propias $f,g: X \longrightarrow Y$ son homótopas propiamente y denotaremos $f \simeq_p g$ sii existe una aplicación propia $H: X \times I \longrightarrow Y$ verificando que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$. También diremos que H es una homotopía propia entre f y g.

Definición 3.- Dado un espacio topológico X y un subespacio A de X, A es un subespacio propio de X, sii la aplicación inclusión $i: A \longrightarrow X$ es una aplicación propia. En tal caso diremos que (X,A) es un par propio de espacios topológicos.

Dadas dos aplicaciones propias $f,g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, donde (X,A) e (Y,B) son dos pares propios, diremos que son homótopas relativas a (A,B) (ó simplemente relativas a A), sii existe una homotopía propia H entre f y g que además verifique que $H(A \times I) \subset B$. Lo indicaremos así: $f \simeq_p g$ ($\mathrm{rel}\{A,B\}$ ó $\mathrm{rel}\{A\}$).

Definición 4.- Llamaremos rayo en un espacio topológico X a un aplicación propia $\alpha : J \longrightarrow X$. La pareja (X,α) se dice que es un espacio con rayo base.

Definición 5.- Sean (X,α) e (Y,β) dos espacios con rayo base. Una aplicación propia basada $f : (X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$ es una aplicación propia que además verifica: $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ para cada $t \in J$.

Dadas dos aplicaciones propias basadas $f,g : (X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$. Una homotopía propia basada entre ellas es una homotopía propia entre f y g que además verifica $H(\alpha(t),s) = \beta(t)$ para cada $t \in J$ y $s \in I$.

Un par propio con rayo base es una terna (X,A,α) donde X es un espacio topológico, A un subespacio propio de X y α un rayo base en A Las aplicaciones propias entre pares propios basados son aplicaciones propias de pares propios a las que pedimos que sean basadas en el sentido de la definición 5. Las homotopías entre dos aplicaciones propias de pares propios basados son igualmente homotopías propias de pares propios basadas.

Análogamente puede hablarse de triples propios, triples propios basados, etc, . .

<u>Definición 6</u>.- Sea (X,A) un par propio. Diremos que A es un retracto propio de X, sii existe una aplicación propia $r: X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i = id_A$, donde i es la aplicación inclusión de A en X e id_A es la aplicación identidad en A.

A es un retracto por deformación propia de X si además $i \circ r \simeq_p id_X$.

Si además la homotopía propia $H : X \times I \longrightarrow X$ entre $i \circ r$ e id_X verifica que $H(a,t) = a$ para cada $a \in A$, diremos que A es un retracto por deformación propia fuerte de X.

Diremos que dos espacios X e Y son homotópicamente equivalentes de manera propia sii existen dos aplicaciones propias $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow X$ de tal manera que $f\circ g \simeq_p id_Y$ y $g\circ f \simeq_p id_X$. A f y g les llamaremos equivalencias de homotopia propia.

Recordaremos a continuación algunos resultados sobre aplicaciones propias que se utilizarán en el desarrollo posterior de esta memoria.

Proposición 7.- Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones propias. Entonces

i) Si f y g son propias entonces $g\circ f$ es propia

ii) Si f es suprayectiva y $g\circ f$ propia entonces g es propia

iii) Si g es inyectiva y $g\circ f$ propia entonces f es propia

Proposición 8.- Sean A y B subespacios propios cerrados de X tales que $X = A \cup B$ y sean $f_1\colon A \longrightarrow Y$ y $f_2\colon B \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias que verifican $f_1|_{A\cap B} = f_2|_{A\cap B}$. Entonces la aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ definida por $f|_A = f_1$ y $f|_B = f_2$ es propia.

Proposición 9.- Sean $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in \mathcal{A}$, una familia de aplicaciones entre dos familias de espacios. Entonces $\Pi f_i : \Pi X_i \longrightarrow \Pi Y_i$ es propia si y sólo si f_i es propia para cada $i \in \mathcal{A}$.

Definición 10.- Un final propio en un espacio topológico X es un clase de homotopía propia de aplicaciones propias $\alpha: J \longrightarrow X$ El conjunto de los finales propios de un espacio X se denotará por F(X) [Dm-He].

Definición 11.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia y A un subespacio propio de X. Una aplicación propia $H: A \times I \longrightarrow Y$ se dice homotopía parcial de f si $H(a,0) = f(a)$ para cada $a \in A$.

Definición 12.- Sea (X,A) un par propio. Diremos que A tiene la propiedad de extensión de homotopía propia en X respecto de Y, sii toda homotopía propia parcial $H: A \times I \longrightarrow Y$ de una aplicación propia arbitraria $f: X \longrightarrow Y$ se extiende a una homotopía propia $F: X \times I \longrightarrow Y$ de f.

Si A posee la anterior propiedad respecto de cualquier espacio Y, diremos que tiene la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia en X.

Una categoria importante en el desarrollo de esta memoria es la de los complejos cúbicos finitos propios y aplicaciones propias.

Sea $a^n = K_1 \times \ldots \times K_n$ un n-cubo propio (notar que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$). Si g es un isomorfismo lineal y t una traslación en $\mathbb{R}^q$ $(q \geq n)$ al subespacio de $\mathbb{R}^q$ que es de la forma $t \circ g(a^n)$ lo llamaremos también n-cubo propio y lo denotaremos σ_n. Los 0-cubos son los puntos.

Una (n-1)-cara de a^n es un subespacio de la forma :

$K_1 \times \ldots \times K_{i-1} \times l \times K_{i+1} \times \ldots \times K_n$ donde $l = 0$ ó 1 si $K_i = I$ y $l = 0$ si $K_i = J$. Una (n-1)-cara es también un (n-1)-cubo.

Los subespacios de σ_n de la forma $t \circ g(a^{n-1})$ se llamarán (n-1)-caras de σ_n. Iterando este proceso pueden definirse todas las caras de menor dimensión. A la unión de todas las caras de σ_n la llamaremos borde de σ_n y lo denotaremos por $\partial\sigma$ o por $\dot{\sigma}_n$.

<u>**Definición 13**</u>.- Un complejo cúbico propio finito X, es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ junto con una familia finita de subespacios $\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i=1}^{p}$ verificando :

(i) σ_i es un n-cubo propio para algún n con $0 \leq n \leq m$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{p} \sigma_i = X$

(iii) Si σ_i es una cara de σ_j y σ_j pertenece a $\mathcal{S}$, entonces σ_i pertenece $\mathcal{S}$.

(iv) Si σ_i y σ_j pertenecen a $\mathcal{S}$ entonces $\sigma_i \cap \sigma_j$ es vacio ó es una cara común.

Un subcomplejo cúbico propio de X es un subespacio A de X junto con una subfamilia $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ que satisface la condición (iii) y además que $\bigcup_{\sigma_i \in \mathcal{S}'} \sigma_i = A$ (es evidente que se satisfacen las condiciones (i) y (iv)).

Al par (X,A) lo llamaremos par cúbico propio finito.

Al subcomplejo de X formado por todos los cubos de dimensión menor o igual que r, lo llamaremos r-esqueleto de X y lo denotaremos por X_r. (En el trabajo que sirve de referencia a este capitulo los r-esqueletos son denotados por X^r).

Llamaremos dimensión de X y denotaremos dim X al máximo de las dimensiones de sus cubos.

Llamaremos tambien complejo cúbico propio finito a todo espacio homeomorfo a uno de los definidos anteriormente.

Una categoria que engloba a la anterior y que es más general es la de los CW-complejos propios y aplicaciones propias.

Definición 14.- Un CW-complejo propio es un espacio de Haussdorff X, junto con dos conjuntos de indices A_n y B_n para cada entero $n \geq 0$, tales que $A_0 = B_0$ y $A_n \cap B_n = \emptyset$ para $n > 0$ y aplicaciones propias :

$$\phi_\alpha^n : E^n \longrightarrow X \quad \text{para cada } n \geq 0 \text{ y } \alpha \in A_n$$

$$\phi_\beta^n : E^{n-1} \times J \longrightarrow X \quad \text{para cada } n > 0 \text{ y } \beta \in B_n$$

verificando las siguientes propiedades :

i) $\bigcup_{n,\gamma} \phi_\gamma^n(c^n) = X$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

donde $c^n = e^n$ si $\gamma \in A_n$ y $c^n = \varepsilon^n$ si $\gamma \in B_n$

ii) $\phi_\gamma^n(c^n) \cap \phi_\delta^m(c^m) = \emptyset$ salvo para $n = m$ y $\gamma = \delta$

iii) $\phi_\gamma^n|_{c^n}$ es (1-1) para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

iv) Sea $X_n = \bigcup_{m,\gamma} \phi_\gamma^m(c^m)$ para todo m tal que $0 \leq m \leq n$ y todo $\gamma \in A_m \cup B_m$

Entonces :

$\phi_\alpha^n(S^{n-1}) \subset X_{n-1}$ para cada $n \geq 1$ y $\alpha \in A_n$

$\phi_\beta^n(E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J) \subset X_{n-1}$ para cada $n \geq 2$ y $\beta \in B_n$

$\phi_\beta^1(E^o) \subset X_o$

v) Un subconjunto F de X es cerrado en X si y sólo si para cada $n \geq 0$ y cada $\gamma \in A_n \cup B_n$ $(\phi_\gamma^n)^{-1}(F)$ es cerrado en E^n si $\gamma \in A_n$ ó en $E^{n-1} \times J$ si $\gamma \in B_n$ $(n > 0)$.

vi) Para cada $n \geq 0$ se verifica

a) $\phi_\alpha^n(E^n)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\delta^m(c^m)$, para cada $\alpha \in A_n$

b) $\phi_\beta^n(E^{n-1} \times J)$ $(n > 0)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\delta{}^m(c^m)$ para cada $\beta \in B_n$

Las aplicaciones $\phi_\gamma{}^n$ se llaman aplicaciones características, los subespacios $\phi_\alpha{}^n(E^n)$ n-celdas compactas de X y los subespacios $\phi_\beta{}^n(E^{n-1} \times J)$ n-celdas no compactas de X. La unión de las celdas de dimensión menor o igual que n, se llama n-esqueleto de X y se denota X_n. Si $X_n = X$ para algún n, se dice que X es de dimensión finita. El menor n para el que esto ocurre se llama dimensión de X. Si no existe ningún n tal que $X_n = X$ diremos que X es de dimensión infinita. Si X tiene sólo un número finito de celdas se dice que es finito.

Definición 15.- Un CW-complejo propio X diremos que es regular si para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$ $\phi_\gamma{}^n: \Sigma^n \longrightarrow X$ es inyectiva, donde Σ^n es E^n si $\gamma \in A_n$ o bién $E^{n-1} \times J$ si $\gamma \in B_n$ $(n > 0)$

Notemos que $\phi_\gamma{}^n: \Sigma^n \longrightarrow \phi_\gamma{}^n(\Sigma^n)$ es un homeomorfismo.

Todo complejo cúbico propio finito es un CW-complejo regular finito.

Recordaremos algunas de las propiedades más importantes de los CW-complejos propios.

Proposición 16.- Sea X un CW complejo propio e Y un espacio topológico y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces:

i) f es continua si y sólo si $f \circ \phi_\gamma{}^n$ es continua para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

ii) Si X es finito, f es propia si y sólo si $f \circ \phi_\gamma^n$ es propia para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

Un subcomplejo de un CW-complejo propio X es un subespacio L de X junto con dos subconjuntos A'_n y B'_n de A_n y B_n respectivamente para cada $n \geq 0$ $(A'_0 = B'_0)$, tales que:

a) $L = \bigcup_{n,\gamma} \phi_\gamma^n(\sigma^n)$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A'_n \cup B'_n$

b) $\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \subset L$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A'_n \cup B'_n$

Las uniones e intersecciones arbitrarias de subcomplejos son subcomplejos

Todo subcomplejo es de nuevo un CW-complejo propio

Si L es un subcomplejo del CW-complejo X, L es un subespacio propio de X Por lo tanto, todo subcomplejo de un complejo cúbico propio finito es un subespacio propio

Teorema 17 - Si X es un CW-complejo propio finito y L es un subcomplejo de X, entonces L posee la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia

Un CW-complejo propio puede describirse como un espacio celular (pegando celdas con aplicaciones de pegado propias)

Definición 18 - Sean X e Y CW-complejos propios Una aplicación $g : X \longrightarrow Y$ se dice que es celular sii $g(X_n) \subset Y_n$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 19 - (Teorema de aproximación celular propia)

Sea X un CW-complejo propio finito e Y un complejo cúbico propio finito o bién un CW-complejo propio regular finito de dimensión menor o igual que 3.

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia tal que $f|_M$ es celular para algún subcomplejo M de X (M puede ser $\emptyset$). Entonces, existe una aplicación celular y propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que $g|_M = f|_M$ y $g \simeq_p f$ mediante una homotopía propia estacionaria en M.

Este resultado puede generalizarse a una aplicación propia $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ donde A es un subcomplejo de X y B un subcomplejo de Y, utilizando la propiedad de extensión de homotopía propia y el Teorema 19.

2.- Grupos de Homotopía propia.

Sea (X,A) un par propio de espacios topológicos y $\alpha: J \longrightarrow A$ un rayo base en A.

Sean los triples propios $(\underline{\underline{D}}^n, \underline{\underline{S}}^{n-1}, \underline{\underline{*}})$ y $(\underline{\underline{D}}^n_0, \underline{\underline{S}}^{n-1}_0, \underline{\underline{*}})$ donde $\underline{\underline{D}}^n = D^n \times J$; $\underline{\underline{S}}^{n-1} = S^{n-1} \times J$; $\underline{\underline{*}} = * \times J$, ($*$ es el punto base de S^{n-1}), $\underline{\underline{D}}^n_0 = D^n \times J / D^n \times 0$ y $\underline{\underline{S}}^{n-1}_0 = S^{n-1} \times J / S^{n-1} \times 0$

Z. Čerin define en [Če] $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ como el conjunto de clases de aplicaciones propias basadas $f:(\underline{\underline{S}}^n, \underline{\underline{*}}) \longrightarrow (X,\alpha)$ bajo la relación de homotopía propia basada, y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ como el conjunto de clases de homotopía propia de pares propios basados del tipo $f:(\underline{\underline{D}}^n,\underline{\underline{S}}^{n-1},\pm) \longrightarrow (X,A,\alpha)$ bajo la relación de homotopía propia de pares propios basada.

L.J. Hernández define en [He.1] $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ de manera análoga pero utilizando para el primer caso aplicaciones propias del tipo $f:(\underline{\underline{S}}^n_0,\pm) \longrightarrow (X,\alpha)$ y para el segundo aplicaciones propias del tipo $f:(\underline{\underline{D}}^n_0,\underline{\underline{S}}^{n-1}_0,\pm) \longrightarrow (X,A,\alpha)$

Pueden darse definiciones alternativas de estos conjuntos de la siguiente manera:

Si $n > 0$, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias $f: (I^n\times J,\partial I^n\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in \partial I^n \times J$, bajo la siguiente relación: dos aplicaciones f y g están relacionadas, si existe una homotopía propia

$$H:(I^n\times J\times I\ ,\partial I^n\times J\times I,\ I^n\times 0\times I) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H(x,t,0) = f(x,t)$, $H(x,t,1) = g(x,t)$ para $(x,t) \in I^n\times J$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial I^n\times J\times I$. Denotaremos $f \simeq_p g \quad (\mathrm{rel}(\partial I^n\times J,\ I^n\times 0))$

Estos conjuntos admiten estructura de grupo para $n \geq 1$ (son abelianos para $n \geq 2$) respecto de la siguiente operación:

Sean f,g representantes de ξ y $\eta \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ respectivamente, $\xi+\eta$ es el elemento de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ representado por la aplicación propia h definida por

$$h(t_1,t_2,\ldots,t_n,t) = \begin{cases} f(2t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n,t) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ \\ g(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n,t) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Para n =1 se utiliza la notación multiplicativa $\xi\cdot\eta$.

$\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ es el conjunto de clases de homotopia propia (rel$\{0\}$) de aplicaciones propias del tipo $f:(J,0) \longrightarrow (X,\alpha(0))$

Para $n \geq 1$ $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f: (I^n\times J,\ I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in T^{n-1}\times J$, bajo la siguiente relación: dos aplicaciones f y g del tipo anterior estan relacionadas si existe una homotopía propia

$$H: (I^n\times J\times I,\ I^{n-1}\times J\times I,\ T^{n-1}\times J\times I,\ I^n\times 0\times I) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H(x,t,0) = f(x,t)$ y $H(x,t,1) = g(x,t)$ para $(x,t)\in I^n\times J$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in T^{n-1}\times J\times I$. Denotaremos $f \simeq_p g$ (rel$(I^{n-1}\times J,\ T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0)$). ($I^{n-1}$ denota la (n-1) cara de I^n correspondiente a $x_n = 0$ y T^{n-1} denota la unión del resto de las (n-1) caras de I^n).

Con la operación anteriormente definida estos conjuntos son grupos para $n \geq 2$ (abelianos para $n \geq 3$). Para $n = 2$ utilizamos notación multiplicativa y conviene notar que un elemento η de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ representado por una aplicación propia f tal que $f(I^n\times J) \subset A$ es el elemento neutro.

Para definir $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ podemos considerar aplicaciones propias del tipo

$f: (I^n\times J, \partial I^n\times J, \partial I^n\times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ con $f(x,t) = \alpha(t)$ si $(x,t) \in \partial I^n\times J$

$f: (I^n \times J, I^{n-1} \times J, T^{n-1} \times J, T^{n-1} \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$ con $f(x,t) = \alpha(t)$ si $(x,t) \in T^{n-1} \times J$

bajo las mismas relaciones que para $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ respectivamente.

Con operaciones como la definida anteriormente $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ es grupo para $n \geq 1$ (abeliano si $n \geq 2$) y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ es grupo para $n \geq 2$ (abeliano para $n \geq 3$).

$\underline{\underline{\pi}}_0(X,\alpha)$ es el conjunto de los finales propios de X. Denotamos por 0 el final propio representado por α.

Los grupos $\underline{\underline{I}}_n$ pueden definirse de una manera menos "rigida" como sigue.

Sea E un espacio homeomorfo a $I^n \times J$, $i: I^n \times J \longrightarrow E$ un homeomorfismo, $\partial E = i(\partial(I^n \times J))$ y $e = i(v \times J)$ donde $v = (1,\dots,0) \in I^n$. Entonces $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ puede definirse como el conjunto de clases de homotopia propia (rel(∂E)) basadas, de aplicaciones propias del tipo

$$f: (E, \partial E, e) \longrightarrow (X, A, \alpha)$$

$\underline{\underline{I}}_{n-1}(X,\alpha)$ es el conjunto de clases de homotopia propia basada de aplicaciones propias del tipo

$$f: (\partial E, e) \longrightarrow (X, \alpha)$$

Dado un par propio (X,A,α), existen sucesiones exactas asociadas a él, tanto en $\underline{\underline{I}}$ como en $\underline{\underline{\pi}}$:

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n+1}(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_n(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_0(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$$

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_{n+1}(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{\pi}}_n(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(X,A,\alpha) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_1(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{\pi}}_0(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{\pi}}_0(X,\alpha)$$

i_* y j_* están inducidas por las aplicaciones inclusión y ∂ está definida de la manera natural

$\underline{\underline{\pi}}_n$ y $\underline{\underline{I}}_n$ para $n \geq 1$ son funtores de la categoría de los espacios con rayo base y aplicaciones propias en la de los grupos (abelianos si $n \geq 2$). Para $n \geq 2$ son también funtores de la categoría de los pares propios con rayo base y aplicaciones propias en la de los grupos (abelianos si $n \geq 3$).

Además las sucesiones exactas de homotopía propia son funtoriales respecto a aplicaciones propias entre triples propios del tipo (X,A,α)

Estos grupos de homotopía propia están relacionadas con los grupos de homotopía de Hurewicz π_n de la siguiente manera

Dado un espacio topológico X que admite una aplicación propia $\alpha : J \longrightarrow X$, existe una aplicación

$$\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$$

que es homomorfismo para $n \geq 1$, definida de la siguiente manera

Sea η un elemento de $\pi_{n+1}(X,\alpha(0))$ representado por $f : (I^{n+1},\partial I^{n+1}) \longrightarrow (X,\alpha(0))$ [Hu 4.IV]

Consideremos la aplicación propia :

$G : I^n \times I \times 0 \cup I^n \times 0 \times J \cup \partial I^n \times I \times J \longrightarrow X$ dada por

$$G(x,t,0) = f(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in I^n \times I$$

$$G(x,0,s) = \alpha(s) \qquad \text{si } (x,t) \in I^n \times J$$

$$G(y,t,s) = \alpha(s) \qquad \text{si } (y,t,s) \in \partial I^n \times I \times J$$

Utilizando la propiedad de extensión de homotopia propia, podemos encontrar

$$F: I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

que es una extensión propia de G. Entonces

$$F_1: I^n \times J \longrightarrow X$$

definida por $F_1(x,s) = F(x,1,s)$, representa un elemento $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$. Definimos $\varphi_\alpha(\eta) = \xi$. φ_α es una transformación natural entre los funtores π_{n+1} y $\underline{\underline{I}}_n$.

Notemos que si $f: (I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ es una aplicación propia que representa un elemento $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$, es también del tipo $(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ y representa por tanto un elemento $\xi' \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$.

La aplicación $\psi: \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ definida por $\psi(\xi) = \xi'$ (es homomorfismo para $n \geq 1$) da lugar a una transformación natural entre los funtores $\underline{\underline{I}}_n$ y $\underline{\underline{\pi}}_n$.

Puede definirse otra transformación natural $\partial: \underline{\underline{\pi}}_n \longrightarrow \pi_n$ como sigue. Sea $f: (I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ que representa a un elemento ξ de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. La aplicación $\partial_0 f: (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,\alpha(0))$ definida por $\partial_0 f(x) = f(x,0)$, representa un elemento ξ' de $\pi_n(X,\alpha(0))$.

Entonces $\partial: \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \pi_n(X,\alpha)$ se define por: $\partial(\xi) = \xi'$

Con todo lo anterior se obtiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \underline{\underline{\mathrm{I}}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{\Psi} \underline{\underline{\Pi}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X,\alpha(0)) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{I}}}_0(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_0(X,\alpha) \longrightarrow \pi_0(X,\alpha)$$

Una sucesión exacta análoga puede obtenerse para el caso relativo Además el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\partial"] & \underline{\underline{\mathrm{I}}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\partial"] & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial"] & \pi_n(X,A,\alpha(0)) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & {} \\
\pi_n(A,\alpha(0)) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & \underline{\underline{\mathrm{I}}}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[r, "\Psi"] & \underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(A,\alpha(0)) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ∂ es el operador borde de las respectivas sucesiones exacta asociadas al par

El homomorfismo φ_α jugará un importante papel en el desarrolo de esta memoria.

Definición 1 - Un espacio X se dice ($\underline{\underline{\mathrm{I}}}$) n-conexo sii los grupos $\underline{\underline{\mathrm{I}}}_q(X,\alpha)$ son triviales para todo $q \le n$ y todo rayo α en X.

X se dice ($\underline{\underline{\Pi}}$)-n-conexo sii los grupos $\underline{\underline{\Pi}}_q(X,\alpha)$ son triviales para todo $q \le n$ y todo rayo α en X.

Igualmente se define que un par propio es ($\underline{\underline{\Pi}}$)n-conexo ó ($\underline{\underline{\mathrm{I}}}$)n-conexo

El grupo $\underline{\underline{\Pi}}_1(X,\alpha)$ actúa como grupo de operadores en la sucesión exacta que relaciona los grupos $\pi, \underline{\underline{\Pi}}$ y $\underline{\underline{\mathrm{I}}}$ en el caso absoluto En el caso relativo es $\underline{\underline{\Pi}}_1(A,\alpha)$ el que actúa en la sucesión exacta (La acción de $\underline{\underline{\Pi}}_1(X,\alpha)$ en $\pi_n(X,\alpha(0))$ es la de

$\partial(\underline{\underline{\Pi}}_1(X,\alpha))$ que es un subgrupo de $\pi_1(X,\alpha(0))$

Definición 2 - Un espacio X se dice $(\underline{\underline{I}})$n-simple sii para todo rayo α en X $\underline{\underline{\Pi}}_1(X,\alpha)$ actua trivialmente en $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$

Análogamente se define el concepto de $(\underline{\underline{\Pi}})$n-simplicidad

Un espacio X se dice (π) n-simple sii para todo $x_0 \in X$ $\pi_1(X,x_0)$ actúa trivialmente en $\pi_n(X,x_0)$

Para el caso relativo las definiciones son análogas

Es interesante observar que dados dos rayos α y β en un espacio X, si existe una homotopía propia entre ellos, los grupos de homotopía propia $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X,\beta)$ son isomorfos. Por lo tanto si X posee un solo final propio podemos asociarle un grupo que denotaremos $\underline{\underline{I}}_n(X)$ tal que $\underline{\underline{I}}_n(X) \cong \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ para cada rayo α en X

Por la misma razón, si A tiene un sólo final propio, para cualesquiera dos rayos en A, α y β, $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \cong \underline{\underline{I}}_n(X,A,\beta)$ y podemos asociar al par un grupo que denotaremos $\underline{\underline{I}}_n(X,A)$

Definición 3 - Para cada $n \geq 1$, denotamos por $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,\alpha)$ al subgrupo de $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u\,\xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$, $u \in \underline{\underline{\Pi}}_1(X,\alpha)$ y $u\,\xi$ es la acción de u en ξ

Para $n \geq 2$, denotamos $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$ al subgrupo de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u\,\xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, $u \in \underline{\underline{\Pi}}_1(A,\alpha)$ y $u\,\xi$ es la acción de u en ξ

$\Omega_{\underline{I}}^{n}(X,\alpha)$ y $\Omega_{\underline{I}}^{n}(X,A,\alpha)$ son subgrupos normales de $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ respectivamente $\Omega_{\underline{I}}^{1}(X,\alpha)$ contiene al subgrupo conmutador de $\underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$ y $\Omega_{\underline{I}}^{2}(X,A,\alpha)$ contine al subgrupo conmutador de $\underline{\underline{I}}_2(X,A,\alpha)$ Entonces definimos los grupos abelianos:

$$\underline{\underline{I}}_n^{*}(X,\alpha) = \frac{\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)}{\Omega_{\underline{I}}^{n}(X,\alpha)} \qquad \text{y} \qquad \underline{\underline{I}}_n^{*}(X,A,\alpha) = \frac{\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)}{\Omega_{\underline{I}}^{n}(X,A,\alpha)}$$

En el sentido menos "rigido" de la definicion de los grupos $\underline{\underline{I}}_n$, (a través de un espacio E homeomorfo a $I^{n+1}\times J$), el grupo $\underline{\underline{I}}_n^{\star}(X,\alpha)$ (cuando E es el mismo $I^{n+1}\times J$), tiene la siguiente interpretación geométrica .

$\underline{\underline{I}}_n^{\star}(X,\alpha)$ es el conjunto de clases de aplicaciones propias del tipo $(\partial(I^{n+1}\times J),\ v\times J) \longrightarrow (X,\alpha)$ $(v = (1,0,..,0) \in I^{n+1})$

Análogamente ocurre con $\underline{\underline{I}}_n^{\star}(X,A,\alpha)$, para el que las aplicaciones son propias del tipo :

$$(I^n\times J,\ \partial(I^n\times J),\ v\times J) \longrightarrow (X,A,\alpha)$$

y la relación es la siguiente . f y g pertenecen a la misma clase sii existe una homotopía propia de pares entre ellas. [Ri III.3].

Si X tiene un sólo final propio, definimos $\underline{\underline{I}}_n^{*}(X)$ como el conjunto de clases de homotopía propia de aplicaciones propias del tipo

$$\partial(I^{n+1}\times J) \longrightarrow X.$$

Si A tiene un solo final propio, definimos $\underline{\underline{I}}_n^{*}(X,A)$ como el conjunto de clases de homotopía propia (de pares) de aplicaciones propias del tipo

$$(I^n \times J),\ \partial(I^n \times J) \longrightarrow (X,A)$$

Para cada rayo base en X, la aplicación inclusión induce una biyección natural entre los grupos $\underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_n^*(X)$, a través de la cual podemos dotar a $\underline{\underline{I}}_n^*(X)$ de una estructura de grupo abeliano que no depende del rayo α elegido

Cuando X es $(\underline{\underline{I}})$n-simple, como $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,\alpha) = 0$, se sigue que

$$\underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha) = \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$$

Como consecuencia, si X es un espacio $(\underline{\underline{I}})$n-simple y tiene un solo final propio $\underline{\underline{I}}_n^*(X)$ es una interpretación geométrica de $\underline{\underline{I}}_n(X)$

Análogamente ocurre con $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X,A)$ cuando A tiene un solo final propio y el par (X,A) es $(\underline{\underline{I}})$n-simple

Recordemos [W G 1 2 2] que si un espacio es arco-conexo y $(\pi)(n+1)$-simple, el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas del tipo $\partial(I^{n+2}) \longrightarrow X$ es biyectivo de una manera natural con $\pi_{n+1}(X,x_0)$ para todo punto $x_0 \in X$ A través de esta biyección se induce en este conjunto, que se denota $\pi_{n+1}(X)$, una estructura de grupo abeliano que no depende del punto x_0 elegido $(n \geq 0)$

Análogamente con los grupos de homotopía relativos Cuando A es arco-conexo y el par (X,A) es (π)-n-simple, $\pi_n(X,A)$ es el conjunto de clases de homotopía (de pares) de aplicaciones del tipo

$$(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X,A)$$

Si X es un espacio arco-conexo, $(\underline{\underline{I}})$ n-simple, (π) (n+1)-simple y tiene un solo final propio, el homomorfismo $\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ induce un homomorfismo $\varphi_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X)$ que no depende del representante del final de X a través del que es inducido.

Igualmente sucede en el caso relativo. Cuando A es arco-conexo y tiene un solo final propio y el par (X,A) es $(\pi)(n+1)$-simple y $(\underline{\underline{I}})$n-simple.

3.- Grupos de homología propia.

Definición 1.- Un n-cubo singular propio en un espacio topológico X es una aplicación propia $T : K_1 \times \ldots \times K_n \longrightarrow X$ donde $K_1 \times \ldots \times K_n$ es un n-cubo propio. Se dice degenerado si existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ no depende de x_i (en este caso $K_i = I$ pues T es propia).

Llamamos $Q_n(X)$, al grupo abeliano libre generado por todos los n-cubos singulares propios de X y $D_n(X)$ al generado por los n-cubos singulares propios degenerados de X. Denotamos $C_n(X)$ al grupo cociente $Q_n(X) / D_n(X)$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$ consideramos las inclusiones $\alpha_i^l : K_1 \times \ldots \times K_{i-1} \times K_{i+1} \times \ldots \times K_n \longrightarrow K_1 \times \ldots \times K_n$ definida por

$$\alpha_i^l(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

donde $l = 0$ ó 1 si $K_i = I$ y $l = 0$ si $K_i = J$.

Estas inclusiones inducen homomorfismos

$$(\alpha_i^1)^*: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X)$$

para el caso $K_i = J$ se considera $(\alpha_i^1)^* = 0$

Definimos $\partial_n : Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X)$ por

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i((\alpha_i^0)^*T-(\alpha_i^1)^*T)$$

Como $\partial_{n-1}\,\partial_n = 0$ y $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$ queda inducido

$$\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

Con lo que obtenemos un complejo de cadenas que denotamos $C_*(X)$

Definición 2.- Llamaremos n-ésimo grupo de homologia singular propia de X y lo denotaremos por $J_n(X)$ a

$$H_n(C_*(X)).$$

Dado un par propio (X,A), denotamos $C_*(X,A)$ al complejo cociente $C_*(X)/C_*(A)$ y llamaremos n-ésimo grupo de homologia singular propia del par (X,A) y lo denotaremos $J_n(X,A)$ a

$$H_n(C_*(X,A))$$

Sea G un grupo abeliano. Aplicamos a $C_*(X,A)$ el functor aditivo contravariante Hom(-;G). Al complejo de cocadenas que obtenemos lo denotamos $C^*(X,A;G)$. Llamaremos n-ésimo grupo de cohomologia singular propia del par (X,A) con coeficientes en G y lo denotaremos por $J^n(X,A)$ a

$$H^n(C^*(X,A;G)).$$

Sea $S_*(X)$ el complejo de cadenas de los cubos singulares de X [M] ($S_*(X)$ es un subcomplejo de $C_*(X)$) $C_*(X)/S_*(X)$ es un complejo de cadenas.

Definición 3 - Llamaremos n-ésimo grupo de homologia final propia de X y lo denotaremos por $E_n(X)$ a $H_n(C_*(X)/S_*(X))$

Igualmente pueden definirse $E_n(X,A)$ y $E^n(X,A;G)$ para un par propio (X,A) y un grupo abeliano G

Dada una aplicación propia $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ induce, de la manera habitual, homomorfismos

$$J_n(f) = f_* : J_n(X,A) \longrightarrow J_n(Y,B)$$
$$E_n(f) = f_* : E_n(X,A) \longrightarrow E_n(Y,B)$$

de esta manera, J_* y E_* son functores covariantes de la categoría de los pares propios (ó espacios topológicos en el caso absoluto) y aplicaciones propias, en la categoría de los grupos abelianos y homomorfismos. J^* y E^* son functores contravariantes

Dado un par propio, existe una sucesión exacta asociada al par

$$\cdots \longrightarrow J_{n+1}(X,A) \longrightarrow J_n(A) \longrightarrow J_n(X) \longrightarrow J_n(X,A) \longrightarrow J_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

análogamente para E.

Las homologías singular, singular propia y final propia están relacionadas mediante la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow J_n(X,A) \longrightarrow E_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots$$

Análogamente para el caso absoluto

De igual manera que en homología singular, pueden definirse las homologías E_* y J_* con coeficientes en un grupo abeliano G

Las (co)homologías propias E_* J_* (E^*, J^*) satisfacen un teorema de los coeficientes universales análogo al que verifica la (co)-homología singular H_* (H^*)

Un algoritmo de cálculo puede darse para las (co)homologias H_* E_* J_* en la categoría de los complejos cubicos propios finitos y aplicaciones propias El teorema clave para tal algoritmo es el siguiente :

Teorema 4 - Si X es un complejo cúbico propio finito

i) $J_n(X_n, X_{n-1})$ es un grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x)\}$ donde x es un generador del grupo ciclico infinito $J_n((\sigma_n, \partial\sigma_n)$ e $i : (\sigma_n, \partial\sigma_n) \longrightarrow (X_n, X_{n-1})$ es la aplicación inclusión de un n-cubo propio σ_n en X

Si $q \neq n$ $J_q(X_n, X_{n-1}) = 0$

ii) $E_n(X_n, X_{n-1})$ es un grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x)\}$ donde x es un generador del grupo ciclico infinito $E_n(\sigma_n, \partial\sigma_n)$ y σ_n un n-cubo propio no compacto de X

Si $q \neq n$ $E_q(X_n, X_{n-1}) = 0$

Los generadores de $E_n(X_n, X_{n-1})$ y de $J_n(X_n, X_{n-1})$ los denotamos tambien σ_n

iii) Para todo $q > n$ (1) $J_q(X_n) = 0$

(2) $E_q(X_n) = 0$

Consideramos las aplicaciones :

$$d_J : J_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X_{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

$$d_E : E_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X_{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

y de manera análoga a la homología singular obtenemos que $\{J_q(X_q, X_{q-1}), d_J\}$ y $\{E_q(X_q, X_{q-1}), d_E\}$ son complejos de cadenas de grupos abelianos libres cuya homología es precisamente $J_*(X)$ y $E_*(X)$, respectivamente

Para calcular la homología J_* (E_*) de un par de complejos cúbicos propios finitos (X,A) consideramos el complejo de cadenas $\{J_q(\overline{X}_q,\overline{X}_{q-1}),\ d_J\}$ ($\{E_q(\overline{X}_q,\overline{X}_{q-1}),\ d_E\}$) donde $\overline{X}_q = X_q \cup A$ y $J_q(\overline{X}_q,\overline{X}_{q-1})$ está generado por los n-cubos propios de X que no están en A ($E_q(\overline{X}_q,\overline{X}_{q-1})$ sólo por los no compactos)

Este algoritmo de cálculo puede extenderse a CW complejos propios finitos de dimensión menor o igual que 3.

Sea σ_n un n-cubo propio de X correspondiente a $K_1 \times \ldots \times K_n$ con $K_{i_1} = \ldots = K_{is} = J$ y $K_{is+1} = \ldots = K_{in} = I$. Llamamos M_{n-1} al subespacio de σ_n dado por $t_{i_1} + \ldots + t_{is} = 1$ (si $s = 0$, $M_{n-1} = \emptyset$)

En cualquier otro caso M_{n-1} es un (n-1)-simple o un (n-1)-cubo compacto)

Sea L_{n-1} el siguiente subespacio de X, $L_{n-1} = \cup M_{n-1}$ (unión extendida a todos los n-cubos propios de X) L_{n-1} es un complejo de bolas clásico ([Bu-R-S]I.1), con tantas (n-1)-bolas (son (n-1)-cubos compactos o (n-1)-simples) como n-cubos propios no compactos tiene X_n .

Teorema 5 - (i) $J_q(X_n) \cong H_q(X_n, L_{n-1} \times J)$

(ii) $E_q(X_n) \cong H_{q-1}(L_{n-1})$

El interés de estas homologías es para el estudio de espacios no compactos, pues si X es un espacio compacto se verifica

$J_q(X) = H_q(X)$ para todo q

$E_q(X) = 0$ para todo q

Conviene hacer notar que $E_1(X)$ es el grupo abelino libre sobre el conjunto de finales propios de X

Estas homologías (J_* y E_*) pueden obtenerse utilizando solamente n-cubos propios de la forma I^n e $I^{n-1} \times J$ [He 1]

4.- Teoremas de Tipo Hurewicz.

Sea (X, A) un par propio y α un rayo base en A Para $n \geq 1$ vamos a definir una aplicación (si $n > 1$, homomorfismo) de tipo Hurewicz que denotaremos $\rho_{\underline{\underline{I}}}$

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X, A, \alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X, A)$$

del siguiente modo

Sea ξ un elemento de $\underline{\underline{I}}_n(X, A, \alpha)$ representado por una aplicación propia

$$f : (I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0)).$$

Esta aplicación es también del tipo

$$(I^n \times J,\ \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X, A)$$

y por tanto induce:

$$f_* : J_{n+1}(I^n \times J,\ \partial(I^n \times J)) \longrightarrow J_{n+1}(X, A)$$

$J_{n+1}(I^n \times J,\ \partial(I^n \times J))$ es un grupo cíclico infinito Llamamos ω_{n+1} al generador cuyo representante es la aplicación identidad $i_{n+1} : I^n \times J \longrightarrow I^n \times J$ Definimos

$$\rho_{\underline{\underline{I}}}(\xi) = f_*(\omega_{n+1})$$

Análogamente podemos definir $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ para el caso absoluto y $n \geq 1$

Si $g : (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ es una aplicación propia, el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] & \underline{\underline{I}}_n(Y,B,\beta) \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] \\
J_{n+1}(X,A) \arrow[r, "g_*"] & J_{n+1}(Y,B)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo

El siguiente diagrama es también conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{I}}_n(A,\alpha) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] & \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] \\
J_{n+1}(A) \arrow[r, "i_*"] & J_{n+1}(X) \arrow[r, "j_*"] & J_{n+1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

Relaciona parte de las sucesiones exactas asociadas al par en homotopía y en homología. Sin embargo $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ no conmuta exactamente con las dos sucesiones exactas.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\rho"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[d, "\rho"] \\
J_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] & J_{n+1}(A)
\end{tikzcd}$$

en este cuadro se verifica : $\rho . \partial = (-1)^n \partial . \rho$

Análogamente a como hemos definido $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ puede definirse $\rho_{\underline{\underline{\Pi}}}$

$$\rho_{\underline{\underline{\Pi}}} : \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(X,A)$$

Denotamos por ρ_π el homomorfismo "clásico" de Hurewicz. Estos tres homomorfismos ρ_π , $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ y $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ relacionan las sucesiones exactas de los grupos de homotopía propia π, $\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\pi}}$ y de los grupos de homología propia H, J y E de la manera siguiente :

El diagrama :

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) & \xrightarrow{\Psi} & \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\underline{\underline{I}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\underline{\underline{\pi}}}} \\
H_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{1} & J_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{p} & E_{n+1}(X,A)
\end{array}$$

es conmutativo. En la parte en que intervienen los homomorfismos borde es "casi" conmutativo Exactamente :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) & \xrightarrow{\vartheta} & \pi_n(X,A,\alpha(0)) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_{\underline{\underline{\pi}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_\pi} \\
E_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_n(X,A)
\end{array}$$

$\partial \circ \rho_{\underline{\underline{\pi}}} = (-1)^{n+1} \rho_\pi \circ \vartheta$.

Análogamente en el caso absoluto.

Para $n \geq 2$ se obtiene :

Teorema 1 - Sea (X,A) un par propio con $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$, $\underline{\underline{I}}_0(X)$ y $\underline{\underline{I}}_0(A)$ triviales. Dada una aplicación $\alpha : J \longrightarrow A$

propia, si (X,A,α) es (π)n-conexo y $(\underline{\underline{I}})$(n-1)-conexo, entonces

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A)$$

es un isomorfismo.

En el caso absoluto obtenemos:

<u>Teorema 2</u>.- Para $n \geq 1$. Sea $\alpha : J \longrightarrow X$ propia con $\pi_0(X)$ y $\underline{\underline{I}}_0(X)$ triviales. Si (X,α) es (π)-n-conexo y $(\underline{\underline{I}})$(n-1)-conexo, entonces

$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ es isomorfismo para $n \geq 1$

$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ es isomorfismo para $n = 1$

CAPITULO II

(CO) HOMOLOGIA (G^*) G_*

A lo largo del presente capítulo trabajaremos en la categoría Mof Ab cuyos objetos son homomorfismos de grupos abelianos. Dados dos de tales objetos $f: A_1 \longrightarrow A_2$, y $h: B_1 \longrightarrow B_2$, un morfismo $g = (g_1, g_2)$, entre f y h, es un par de homomorfismos de grupos abelianos $g_1: A_1 \longrightarrow B_1$ y $g_2: A_2 \longrightarrow B_2$ tales que $g_2 \circ f = h \circ g_1$.

Morf Ab es una categoría abeliana. Es más, en el párrafo 1 demostraremos que se trata de una categoría de módulos sobre un anillo de matrices R que determinaremos.

En el párrafo 2, estudiaremos como son algunos objetos proyectivos en Morf Ab.

En los párrafos 3 y 4 introducimos una Teoría de (co)homología con coeficientes en un homomorfismo de grupos abelianos, que jugará un papel muy importante en el desarrollo posterior de esta memoria. En el párrafo 5 daremos para esta (co)homología un algoritmo de cálculo en la categoría de los complejos cúbicos propios finitos basado en los que ya conocemos de las homologías singular H_*, singular propia J_*, y final propia E_*.

En el párrafo 6 se prueba un Teorema de coeficientes universales para esta nueva Teoría

Ab denotará la categoría de los grupos abelianos y M_R la categoría de los R-módulos a derecha.

En alguna ocasión denotaremos $f: A \longrightarrow B$ como $f(A,B)$

1.- Categoria Morf Ab

El objetivo de este párrafo es demostrar que Morf Ab es una categoria de módulos a derecha sobre un anillo de matrices R, para ello se define un funtor S de Morf Ab en M_R y se demuestra que es fiel, lleno y representativo, por lo cual es una equivalencia de categorias. Por consiguiente ambas categorias son esencialmente la misma. [M.II.4]

Teorema 1 : La categoria Morf Ab es una categoria de módulos sobre el siguiente anillo no conmutativo R

$$R = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ 0 & c \end{matrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$$

Demostración.- Definimos el functor covariante

$$S: \text{Morf Ab} \longrightarrow M_R \text{ del modo siguiente.}$$

Sea $f. A \longrightarrow B$ un objeto de Morf Ab. S(f) es el grupo abeliano $A \oplus B$ junto con la siguiente operación exterior de R

$$(.).\ (A \oplus B) \times R \longrightarrow A \oplus B.$$

$$(x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (x.a,\ f(x).b + y.c)$$

Se comprueba inmediatamente que $S(f)$ es un R-módulo a derecha.

Sea $h = (h_1, h_2)$ un morfismo entre dos objetos de Morf Ab f y g.

$$S(h) : S(f) \longrightarrow S(g)$$

es el R-homomorfismo definido por.

$S(h)\ (x,y) = (h_1(x),\ h_2(y))$ para todo $(x,y) \in S(f)$.

Vamos a estudiar las propiedades de S. Se demuestra trivialmente que S es fiel.

Veamos a continuación que es lleno.

Sean $f.\ A_1 \longrightarrow A_2$ y $g:\ B_1 \longrightarrow B_2$ dos objetos de Morf Ab y sea $\beta \in \mathrm{Morf}_R\ (S(f),\ S(g))$.

Si en $S(f) = A_1 \oplus A_2$ y $S(g) = B_1 \oplus B_2$ consideramos sus estructuras de grupo abeliano, podemos garantizar la existencia de los siguientes homomorfismos de grupos.

$$\begin{array}{llll} i_j\ . & A_j \longrightarrow & A_1 \oplus A_2 & j = 1,2 \\ p_j\ . & A_1 \oplus A_2 \longrightarrow & A_j & j = 1,2 \\ i'_j\ . & B_j \longrightarrow & B_1 \oplus B_2 & j = 1,2 \\ p'_j\ . & B_1 \oplus B_2 \longrightarrow & B_j & j = 1,2 \end{array}$$

verificando

$$\begin{array}{lll} p_j \circ i_j = id_{A_j} & & j = 1,2 \\ p_j \circ i_k = 0 & \text{si } j \neq k & k = 1,2 \\ i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_{A_1 \oplus A_2} & & \end{array}$$

análogamente con i'_j y p'_j.

Definimos.

$$\beta_1 = p'_1 \circ \beta \circ i_1 :\ A_1 \longrightarrow B_1$$

$$\beta_2 = p'_2 \circ \beta \circ i_2 : A_2 \longrightarrow B_2$$

Se comprueba inmediatamente que $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathrm{Mor}\,(f,g)$ y además $S(\overline{\beta}) = \beta$.

Por último comprobaremos que S es representativo Sea M un R-módulo. Consideramos los siguientes subgrupos de M·

$$A_1 = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es claro que $M = A_1 \oplus A_2$

Sea $f : A_1 \longrightarrow A_2$ el homomorfismo de grupos definido por :

$$f(a) = a . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{para cada } a \in A_1$$

entonces $f \in \mathrm{Morf}\ \mathcal{A}b$ y además $S(f) = M$. #

De lo anterior deducimos que dado un R-módulo M, para recuperar los subespacios de los que es suma directa basta con multiplicar M por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; para recuperar el homomorfismo del que proviene, basta con multiplicar M por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

pues

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_1$$

$$x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.-Objetos proyectivos en Morf Ab

Sea $f(A,B)$ un objeto de Morf Ab, estudiaremos en este párrafo cuándo f es un objeto proyectivo en función de A y B Lo haremos con lenguage de homomorfismos en lugar del lenguage de R-módulos por ser aquél más natural en el desarrollo de esta memoria. Comenzamos estudiando cómo son los epimorfismos en Morf Ab y caracterizamos los monomorfismos de Ab que son objetos proyectivos en Morf Ab.

Lema 1.- Sea $p = (p_1, p_2)$ un morfismo de la categoria Morf Ab entre dos objetos $f(A_1,A_2)$ y $g(B_1,B_2)$ p es un epimorfismo en Morf Ab si y solo si p_1 y p_2 son epimorfismos en Ab.

Demostración.- Suponemos que p es epimorfismo, por lo tanto si $h: g \longrightarrow l$ es un morfismo tal que $h \circ p = 0$, necesariamente $h = 0$.

Veamos en primer lugar, que p_1 es epimorfismo en Ab:

Sea $h_1: B_1 \longrightarrow C$ un homomorfismo de grupos abelianos tal que $h_1 \circ p_1 = 0$.

Consideramos en Morf Ab $l: C \longrightarrow 0$

y $\qquad h\colon g \longrightarrow l \qquad$ con $h = (h_1, 0)$,

trivialmente $h \circ p = 0$, de aquí se sigue que $h = 0$, luego $h_1 = 0$ y por lo tanto p_1 es un epimorfismo.

Comprobemos ahora que p_2 es también epimorfismo:

Como antes, sea $h_2\colon B_2 \longrightarrow C$ un homomorfismo de grupos abelianos tal que $h_2 \circ p_2 = 0$

Consideramos ahora:

$$C_1 = \operatorname{Coker} p_1$$

y los homomorfismos

$h_1\colon B_1 \longrightarrow C_1$ la proyección natural, y

$l\colon C_1 \longrightarrow C$ definida por

$l(c) = h_2\, g(b)$ donde $b \in B_1$ y es tal que $h_1(b) = c$

Se sigue que $(h_1, h_2)(p_1, p_2) = (0,0)$, luego $(h_1, h_2) = (0,0)$ y por lo tanto $h_2 = 0$, luego p_2 epimorfismo

Si p_1 y p_2 son epimorfismos, es evidente que p es epimorfismo. #

Proposición 2.- Si un monomorfismo de Ab $p(P_1, P_2)$ verifica:

i) P_1 y P_2 son objetos proyectivos en Ab

ii) P_0 = Cocker p es un objeto proyectivo en Ab,

entonces p es un objeto proyectivo en Morf Ab.

Demostración : En orden a probar que p es objeto proyectivo, sean $\qquad g\colon b(B_1; B_2) \longrightarrow a(A_1; A_2)$ un epimorfismo y

$\qquad f\colon p(P_1; P_2) \longrightarrow a(A_1; A_2)$ un morfismo.

Debemos encontrar un morfismo $\tilde{f}\colon p \longrightarrow b$ de tal manera que $g \circ \tilde{f} = f$ Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g_1"'] & B_2 \arrow[d, "g_2"] & \\
 & A_1 \arrow[r, "a"] & A_2 & \\
P_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "p"] & P_2 \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[r, "\bar{p}"] & \text{Cocker } P = P_0 &
\end{tikzcd}$$

Por ser P_1 un objeto proyectivo en Ab y g_1 un epimorfismo, existe $\tilde{f}_1 : P_1 \longrightarrow B_1$ tal que $f_1 = g_1 \circ \tilde{f}_1$

La sucesión $P_1 \xrightarrow{p} P_2 \xrightarrow{\bar{p}} P_0$ es exacta corta y P_0 un objeto proyectivo en Ab, por lo tanto existen

$$r : P_0 \longrightarrow P_2 \quad \text{y}$$

$$q : P_2 \longrightarrow P_1 \quad \text{verificando:}$$

a) $\bar{p} \circ r = id_{P_0}$

b) $q \circ p = id_{P_1}$

c) $q \circ r = 0$

d) $p \circ q + r \circ \bar{p} = id_{P_2}$

e) $\bar{p} \circ p = 0$

Consideramos $f_2 \circ r : P_0 \longrightarrow A_2$ y el epimorfismo $g_2 : B_2 \longrightarrow A_2$.

Como P_0 es un objeto proyectivo existe

$$\tilde{f}_0 : P_0 \longrightarrow B_2 \qquad \text{verificando}$$

$$g_2 \circ \tilde{f}_0 = f_2 \circ r$$

Con todo lo anterior vamos a construir

$$\tilde{f}_2 : P_2 \longrightarrow B_2 \qquad \text{de la siguiente manera:}$$

$$\tilde{f}_2 = b\, \tilde{f}_1\, q + \tilde{f}_0\, p.$$

Entonces, $\quad \widetilde{f}_2 \circ p = b \circ \widetilde{f}_1 \circ q \circ p + \widetilde{f} \circ \overline{p} \circ q = b \circ \widetilde{f}_1$.

Luego el par $(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2) = \widetilde{f}$ es un morfismo en Morf Ab y por otra parte $g_2 \circ \widetilde{f}_2 = g_2 \circ b \circ \widetilde{f}_1 \circ q + g_2 \circ \widetilde{f}_0 \circ \overline{p} = a \circ g_1 \circ \widetilde{f}_1 \circ q + f_2 \circ r \circ \overline{p} = f_2 \circ p \circ q + f_2 \circ r \circ \overline{p} = f_2\,(p \circ q + r \circ \overline{p}) = f_2$

Como $\quad g_1 \circ \widetilde{f}_1 = f$,

obtenemos $\quad g \circ \widetilde{f} = f \quad$ #

Proposición 3.- Sea $p(P_1, P_2)$ un objeto proyectivo en Morf Ab. Entonces P_1, P_2 y Cocker $p = P_0$ son objetos proyectivos en Ab

<u>Demostración</u> - P_1 proyectivo:

Sea $f_1 \colon P_1 \longrightarrow A$ un homomorfismo y $g \colon B \longrightarrow A$ un epimorfismo

Consideramos $b(B,0)$ y $a(A,0)$. Claramente $g = (g,0)$ es un epimorfismo en Morf Ab. Estamos entonces en la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
 & A \arrow[r, "a"] & 0 \\
P_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "p"] & P_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

luego existe una elevación de $f = (f_1, 0)$, $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, 0)$, $\widetilde{f}_1$ resuelve el problema

P_2 proyectivo:

Sea $f_2 \colon P \longrightarrow A$ un homomorfismo de grupos y $g\colon B \longrightarrow A$ un epimorfismo. Como antes podemos formar:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "g"] \\
& 0 \arrow[r] & B \\
P_1 \arrow[ur] \arrow[r, "p"] & P_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$(0,g)$ es un epimorfismo, $(0,f_2)$ un morfismo, luego existe una elevación $\tilde{f} = (0,\tilde{f}_2)$, $\tilde{f}_2$ resuelve el problema.

P_0 proyectivo:

Sea $f\colon P_0 \longrightarrow B$ un homomorfismo y $g\colon A \longrightarrow B$ epimorfismo, $\bar{p}\colon P_2 \longrightarrow P_0$ la proyección natural. Entonces $f_1 = f \circ \bar{p}$ es un homomorfismo de $P_2 \longrightarrow B$. Estamos ahora como en la situación anterior, luego existe una elevación $\tilde{f}_1$ de f_1, tal que $g \circ \tilde{f}_1 = f \circ \bar{p}$

Por otra parte $\tilde{f}_1 \circ p = 0$; como $P_0 = \text{Cocker } P$, existe $\tilde{f}_0 \colon P_0 \longrightarrow A$ de tal manera que $\tilde{f}_0 \circ \bar{p} = \tilde{f}_1$.

Veamos que $\tilde{f}_0$ es la elevación buscada de f.

Sólo queda por ver que $\quad g \circ \tilde{f}_0 = f$.

Sabemos que $\quad g \circ \tilde{f}_1 = f \circ \bar{p}$,

luego $\quad g \circ \tilde{f}_0 \circ \bar{p} = f \circ \bar{p}$,

como $\bar{p}$ es un epimorfismo se sigue que

$$g \circ \tilde{f}_0 = f \qquad \#$$

Por lo tanto un monomorfismo $p: P_1 \longrightarrow P_2$ es un objeto proyectivo en Morf Ab si y sólo si P_1, P_2, y Cocker p son proyectivos en Ab

Recordemos también que en una categoría abeliana la suma directa de objetos proyectivos, es un objeto proyectivo

3.- HOMOLOGIA G_*

Dado un espacio topológico X, podemos asociarle el complejo de cadenas de los cubos singulares $S_*(X)$ [M]. Igualmente podemos asociarle el complejo de los cubos singulares propios $C_*(X)$ [E-H-R]

Observemos que para cada n, $S_n(X) \subset C_n(X)$, y podemos considerar por tanto una inclusión $i_n: S_n(X) \longrightarrow C_n(X)$, $(i_n = SC_n(X))$ que es un objeto en la categoría Morf Ab. Además el par de homomorfismos de grupos (∂_s, ∂_c) donde ∂_s es el operador borde en el complejo $S_*(X)$ y ∂_c el operador borde en el complejo $C_*(X)$ forman un morfismo en la categoria Morf Ab.

Si denotamos $\partial = (\partial_s, \partial_c)$ y consideramos $(SC_n(X),\partial)$, es inmediato comprobar que se trata de un complejo de cadenas en la categoria Morf Ab, que denotaremos $SC_*(X)$.

Recordemos que tanto $S_n(X)$ como $C_n(X)$ son grupos abelianos libres para todo n, por lo tanto son objetos proyectivos en la categoría Ab. Además, para cada n, $C_n(X) / S_n(X)$ es el grupo abeliano libre de los n-cubos singulares propios no compactos, que también es un objeto proyectivo en la categoría Ab. Se sigue de la proposición 1.2, que $SC_*(X)$ es un complejo de cadenas de objetos proyectivos.

Vamos a calcular la homología del complejo de cadenas que acabamos de introducir. Por el teorema 1.1 sabemos que Morf Ab es una categoría de módulos, podríamos utilizar aquí el lenguaje de módulos y luego recuperar información a través del funtor S, sin embargo utilizaremos el lenguaje de Morf Ab que es más natural para los objetivos de esta memoria.

El subcomplejo de los ciclos de $SC_*(X)$, que denotaremos $Z_{SC*}(X)$ o simplemente por $Z_*(X)$ si no hay lugar a confusión, es el formado por $1|_{ZS*} : Z_{S*}(X) \longrightarrow Z_{C*}(X)$, donde $Z_{S*}(X)$ es el subcomplejo de los ciclos de $S_*(X)$ y $Z_{C*}(X)$ el de los ciclos de $C_*(X)$

Igual ocurre con el subcomplejo de los bordes que es,

$$1|_{BS*}: B_{S*}(X) \longrightarrow B_{C*}(X)$$

donde $B_{S*}(X)$ es el subcompejo de los bordes de $S_*(X)$ y $B_{C*}(X)$ el de los bordes de $C_*(X)$. Como antes, lo denotaremos $B_{SC*}(X)$ o simplemente $B_*(X)$

Definición 1.- Llamaremos n-ésimo grupo de homología propia de un espacio X y lo denotaremos por $G_n(X)$ a

$$G_n(X) = H_n(SC_*(X)).$$

Se comprueba inmediatamente que $G_n(X) = (1_n)_*: H_n(X) \longrightarrow J_n(X)$, donde $(1_n)_*$ es la aplicación inducida por la aplicación inclusión i_n Recordemos otra vez, que, como consecuencia de 1.1, $G_n(X)$ puede interpretarse como un módulo sobre R.

De manera natural pueden definirse los grupos de homología relativa:

$$G_n(X,A) = H_n(SC_*(X,A))$$

donde $SC_n(X,A)$ es la inclusión $i_n: S_n(X,A) \longrightarrow C_n(X,A)$

Asociado al par propio (X,A) existe el siguiente diagrama de filas exactas y columnas semiexactas.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & SC_{n+1}(A) & \longrightarrow & SC_{n+1}(X) & \longrightarrow & SC_{n+1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & SC_n(A) & \longrightarrow & SC_n(X) & \longrightarrow & SC_n(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & SC_{n-1}(A) & \longrightarrow & SC_{n-1}(X) & \longrightarrow & SC_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Aplicando el lema de la serpiente obtenemos la sucesión exacta de homología asociada a (X,A).

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1}(X,A) \longrightarrow G_n(A) \longrightarrow G_n(X) \longrightarrow G_n(X,A) \longrightarrow G_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Asimismo dada una aplicación propia $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ queda inducida $f_* : G_n(X,A) \longrightarrow G_n(Y,B)$

siendo $f_* = (f_{1*} ; f_{2*})$

donde, $f_{1*} : H_n(X,A) \longrightarrow H_n(Y,B)$

es el homomorfismo inducido por f entre los grupos de homología singular y

$$f_{2*} : J_n(X,A) \longrightarrow J_n(Y,B)$$

es el homomorfismo inducido por f entre los grupos de homología singular propia.

Se deduce inmediatamente que dos aplicaciones propias $f,g: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ homótopas propiamente inducen el mismo homomorfismo en la homología G_*.

Esta homología G_* verifica una propiedad de escisión débil, con las mismas hipótesis que se necesitaban para la propiedad de escisión de la homología singular propia J_*

4.- Cohomología G^*

Sea $f: G_1 \longrightarrow G_2$ un objeto de Morf Ab. Si aplicamos al complejo de cadenas $SC_*(X)$ el functor aditivo contravariante $Hom(-;f)$

$$Hom(-;f): \text{ Morf Ab} \longrightarrow \text{Ab}$$

obtenemos el complejo de cocadenas $(Hom(1_n;f);\delta)$ $(\delta = Hom(\partial;f))$, que denotaremos $Hom(SC_*(X);f)$ o simplemente $(SC^*(X;f))$ y cuando no haya lugar a confusión $SC^*(X)$

Definición 1.- Llamaremos n-ésimo grupo de cohomología propia de X con coeficientes en f y denotaremos por $G^n(X;f)$ a

$$H_n\ (Hom(SC_*(X);f)).$$

Naturalmente pueden definirse grupos de cohomología relativa aplicando el functor $Hom(-;f)$ al complejo de cadenas $SC_*(X,A)$ y computando homología, es decir

$$G^n(X,A;f) = H_n\,(\mathrm{Hom}(SC_*(X,A);f))$$

En el párrafo anterior hemos observado que asociada al par propio (X,A) obtenemos una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow SC_*(A) \longrightarrow SC_*(X) \longrightarrow SC_*(X,A) \longrightarrow 0$$

Notemos que $S_n(X,A)$ y $C_n(X,A)$ son grupos abelianos libres y Cocker $l_n = C_n(X,A) / S_n(X,A)$ ([E-H-R]) es también un grupo abeliano libre, por lo tanto los tres son objetos proyectivos en la categoría Ab, como $l_n : S_n(X,A) \longrightarrow C_n(X,A)$ es un monomorfismo, se sigue que $SC_n(X,A)$ es un objeto proyectivo en Morf Ab para cada n (proposición 2.2), luego la sucesión exacta anterior es escindible. Aplicándole el functor $\mathrm{Hom}(-;f)$ obtenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(SC_*(X,A);f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(SC_*(X);f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(SC_*(A);f) \longrightarrow 0$$

Es inmediato notar que da lugar a una sucesión exacta larga de cohomología asociada al par propio (X,A):

$$\longrightarrow G^n(X,A;f) \longrightarrow G^n(X;f) \longrightarrow G^n(A;f) \longrightarrow G^{n+1}(X,A;f) \longrightarrow$$

Ejemplo

Cohomología de $X = \{P\}$ con coeficientes en un homomorfismo $f: G_1 \longrightarrow G_2$

Notemos que $S_n(X) = 0 = C_n(X)$ para $n \geq 1$,

por lo tanto $H_n(X) = 0 = J_n(X)$ para $n \geq 1$,

luego $G_n(X) = 0 : 0 \longrightarrow 0$,

de donde $G^n(X;f) = 0$

Si $n = 0$ $\qquad S_0(P) \equiv \mathbb{Z} \equiv C_0(P)$

tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 = S_1(P) \arrow[r] \arrow[d] & C_1(P) = 0 \arrow[d] & \\
\mathbb{Z} \equiv S_0(P) \arrow[r, "1_0"] \arrow[dr, "h_1"] & C_0(P) \equiv \mathbb{Z} \arrow[dr, "h_2"] & \\
& G_1 \arrow[r, "f"] & G_2
\end{tikzcd}$$

$$G^0(P) = \{(h_1, h_2) \mid h_2 \circ 1_0 = f \circ h_1\}$$

Existen tantos pares como $\{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \mid f(g_1) = g_2\}$ es decir $G^0(P) \equiv$ Grafo f. Notar que si $G_1 = 0$ se sigue que $G^0(P) = 0$ Si $G_2 = 0$ entonces $G^0(P) \equiv G_1$.

5.– Cálculo de la (co)homología (G^*) G_* en complejos cúbicos propios finitos .

En el párrafo 3 del capítulo I, hemos recordado brevemente la definición, para un espacio X, de los grupos de homología singular propia $J_n(X)$ y de los de homología final propia $E_n(X)$. Estos grupos de homología, así como los grupos de homología singular de X $(H_n(X))$, pueden calcularse en la categoría de los complejos cúbicos propios finitos computando la homología de los siguientes complejos de cadenas :

$\{J_q(X_q, X_{q-1}), d_J\}$, $\{E_q(X_q, X_{q-1}), d_E\}$ y $\{H_q(X_q, X_{q-1}), d_H\}$

$J_q(X_q, X_{q-1})$ es el grupo abeliano libre generado por los q-cubos de X. $\{E_q(X_q, X_{q-1}), d_E\}$ es el grupo abeliano libre generado por los q-cubos no compactos. $\{H_q(X_q, X_{q-1}), d_H\}$ es el grupo abeliano libre generado por los q-cubos compactos

Si σ_q es un q-cubo propio de X e $i : (\sigma_q, \partial\sigma_q) \longrightarrow (X_q, X_{q-1})$ la aplicación inclusión. Un q-cubo de X es un elemento de $J_q(X_q, X_{q-1})$ de la forma $i_*(x)$ donde x es un generador de $J_q(\sigma_q, \partial\sigma_q) \cong \mathbb{Z}$ e i_* es el homomorfismo inducido por i entre $J_q(\sigma_q, \partial\sigma_q)$ y $J_q(X_q, X_{q-1})$

Si σ_q es compacto $J_q(\sigma_q, \partial\sigma_q) = H_q(\sigma_q, \partial\sigma_q)$ y $E_q(\sigma_q, \partial\sigma_q) = 0$.

Si σ_q es no compacto $J_q(\sigma_q, \partial\sigma_q) = E_q(\sigma_q, \partial\sigma_q)$ y $H_q(\sigma_q, \partial\sigma_q) = 0$.

Sea: $\quad d_J : J_q(X_q, X_{q-1}) \longrightarrow J_{q-1}(X_{q-1}) \longrightarrow J_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2})$

d_E y d_H se definen idénticamente, sin más que cambiar J por E y H respectivamente.

También diremos que $i_*(x)$ es un cubo de la estructura esqueletal de X.

Veremos que la (co)homología G_* puede calcularse con la estructura esqueletal de X

Denotaremos a $J_q(X_q, X_{q-1})$ por $C_q(|X|)$ y a $H_q(X_q, X_{q-1})$ por $S_q(|X|)$ a los correspondientes complejos los denotamos por $C_*(|X|)$ y $S_*(|X|)$. Notemos que $S_*(|X|) \subset C_*(|X|)$. [E-H-R]

Para el desarrollo de este párrafo necesitamos tener caracterizadas las equivalencias de homotopía de cadenas en Morf Ab en función de la homología de las mismas

En [Hi-S] IV-4 se propone el siguiente ejercicio: Sean C y D dos complejos de cadenas con C_n y D_n módulos sobre un anillo

R unitario para cada $n \geq 0$ y $C_n = 0 = D_n$ para cada $n < 0$. Si C y D son de objetos proyectivos y $\varphi: C \longrightarrow D$ es un morfismo de cadenas, entonces φ es una equivalencia de homotopía si y sólo si los homomorfismos inducidos por φ en la homología:

$$\varphi_*: H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$$

son todos isomorfismos.

Este resultado sigue siendo valido cuando C y D son complejos de cadenas en una categoría abeliana cualquiera, la generalización es fácil de hacer utilizando técnicas análogas a las utilizadas por Hilton y Stammbach en el cápitulo anteriormente referido y siguiendo la indicación que dan para resolver el ejercicio.

Recordemos que Morf Ab es una categoría abeliana y más concretamente de módulos sobre un anillo de matrices unitario R, (Teorema 1.1). Por lo tanto el anterior resultado es válido en Morf Ab

Sea X un complejo cúbico propio finito. Podemos asociarle como en el párrafo 3 del presente cápitulo, el complejo de cadenas de objetos proyectivos de la categoría Morf Ab, $SC_*(X)$. Asimismo, utilizando los conceptos y la notación señalados anteriormente, también podemos asociar a X el complejo de cadenas de Morf Ab que denotaremos $SC_*(|X|)$ y que esta formado como sigue: $SC_n(|X|)$ es el homomorfismo inclusión $|1_n|: S_n(|X|) \longrightarrow C_n(|X|)$ y el operador borde que se considera es el par formado por (d_H, d_J).

Notemos que $SC_*(|X|)$ es también un complejo de cadenas de objetos poryectivos en Morf Ab pues: $S_n(|X|)$, $C_n(|X|)$ y $C_n(|X|)/S_n(|X|) = E_n(X_n, X_{n-1})$ son objetos proyectivos en la categoria Ab.

Sabemos por [M] y [E-H-R] que las aplicaciones inclusión:

$$i_S: S_*(|X|) \longrightarrow S_*(X)$$
$$i_C: C_*(|X|) \longrightarrow C_*(X)$$

producen isomorfismos en las respectivas homologias H_* y J_*, además $i = (i_S, i_C): SC_*(|X|) \longrightarrow SC_*(X)$ es un morfismo de cadenas en Mof Ab, y es inmediato comprobar que produce isomorfismo en los homologías correspondientes

$$G_*(|X|) \longrightarrow G_*(X).$$

Por consiguiente, aplicando el resultado del comienzo del párrafo, i es un equivalencia de homotopia.

Recordando que un funtor aditivo transforma una equivalencia de homotopía en una de equivalencia de homotopía, y teniendo en cuenta que Hom(-;ƒ) es un funtor aditivo, concluimos que para calcular la homología y cohomología G_n y G^n de un complejo cúbico propio finito basta utilizar la estructura esqueletal.

Recordemos que para CW complejos propios de dimensión menor o igual que tres el algoritmo de cálculo para los homologías H_*, J_*, y E_* sigue siendo válido. Por lo tanto para estos espacios, repitiendo el proceso anterior, también puede extenderse el algoritmo de cálculo de la (co)-homología G_*

Siguiendo un proceso análogo, se demuestra que para calcular la homología relativa de un par (X,A) $(G_*(X,A))$ puede utilizarse el complejo de cadenas $SC_*(|X,A|)$, donde

$SC_n(|X,A|) = |1_n| : H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1}) \longrightarrow J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$, $\overline{X}_n = X_n \cup A$ y $H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por los n-cubos propios compactos de X que no están en A. $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por todo los n-cubos propios de X que no están en A.

6.- Coeficientes Universales

Hemos demostrado en el párrafo 1 que Morf Ab es una categoría de módulos sobre un anillo R que hemos determinado como un anillo de matrices, si R fuese un anillo hereditario, C un R-complejo libre y t un funtor aditivo covariante de la categoría Morf Ab en la categoría Ab obtendríamos, como en VI-4-2 [Do] la siguiente sucesión exacta escindible para cada n

$$0 \longrightarrow t_0\, H_n C \xrightarrow{\alpha} H_n tC \xrightarrow{\beta} t_1\, H_{n-1} C \longrightarrow 0$$

donde t_0 y t_1 son los primeros funtores derivados del funtor aditivo t y H_n la homología en el lugar n-ésimo del complejo C. Por desgracia el anillo R no es hereditario como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1

Sea M el grupo abeliano libre con tres generadores

$M = \langle X, Y, Z \rangle$.

Definimos $\qquad M \times R \longrightarrow M \qquad$ como sigue:

$$(mx + ny + pz)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = amx + (bm+cn)y + cpz$$

Se comprueba inmediatamente que con esta operación M es un R-módulo a derecha que además es libre, pues los elementos (X,0,0) (0,0,Z) son una base para el R-módulo M.

Sin embargo, el subgrupo de M generado por 2X e Y $M_1 = \langle 2X, Y \rangle$ no es proyectivo.

Observando con cuidado la demostración del teorema de los coeficientes universales [Do], se comprueba que para obtener una sucesión exacta corta escindible en una dimensión determinada n_0, es suficiente que C sea un R-complejo libre, t un funtor aditivo, que los submódulos formados por los bordes de dimensión n_0-1 y n_0-2 sean libres, y que el subcomplejo de los ciclos sea libre.

Por lo tanto, generalizando todo esto a una categoría abeliana cualquiera puede obtenerse el siguiente teorema

Teorema 2.- Sea C un complejo de cadenas de objetos proyectivos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ tal que el subcomplejo formado por los ciclos es de objetos proyectivos y los subobjetos de C_{n-1} y C_{n-2} formados por los bordes en estas dimensiones B_{n-1} y B_{n-2} son objetos proyectivos, y sea t un funtor aditivo t: $\mathcal{A} \longrightarrow$ Ab. Entonces, si t es covariante, la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow t_0H_nC \xrightarrow{\alpha} H_n(tC) \xrightarrow{\beta} t_1H_{n-1}C \longrightarrow 0$$

es exacta y escindible, donde t_0 y t_1 son los primeros functores derivados del functor t y α y β aplicaciones inducidas por ti y $t\partial$ siendo i la inclusión de $Z_n(C) \longrightarrow C_n$ y ∂ la aplicación borde ∂: $C_n \longrightarrow B_{n-1}$. Si t es contravariante la sucesión que se obtiene es:

$$0 \longrightarrow t_1H_{n-1}C \xrightarrow{\beta} H_n(tC) \xrightarrow{\alpha} t_0H_nC \longrightarrow 0$$

Vamos a estudiar qué ocurre en la categoría Morf Ab con los complejos $SC_*(X)$ y $SC_*(|X|)$. Sabemos, por párrafos anteriores, que ambos son complejos de cadenas de objetos proyectivos

Demostraremos que los subcomplejos formados por los ciclos $Z_{SC*}(X)$ y $Z_{SC*}(|X|)$ son también de objetos proyectivos.

<u>**Proposición 3**</u>.- El monomorfismo inclusión

$$1_n|_{Z_{Sn}} : Z_{Sn}(X) \longrightarrow Z_{Cn}(X)$$

es un objeto proyectivo en Morf Ab.

<u>Demostración</u> - Después de la proposición 2.2, es suficiente probar que $Z_{S_n}(X)$, $Z_{C_n}(X)$ y $Z_{C_n}(X) / Z_{S_n}(X)$ son objetos proyectivos en Ab.

$Z_{S_n}(X)$, $Z_{C_n}(X)$ son subgrupos de los grupos abelianos libres $S_n(X)$ y $C_n(X)$ respectivamente, por lo tanto son grupos abelianos libres.

Notemos que $Z_{S_n}(X) = Z_{C_n}(X) \cap S_n(X)$ por lo tanto

$$\frac{Z_{C_n}(X)}{Z_{S_n}(X)} = \frac{Z_{C_n}(X)}{Z_{C_n}(X) \cap S_n(X)} \cong \frac{Z_{C_n}(X) + S_n(X)}{S_n(X)}$$

Notemos que $\dfrac{Z_{C_n}(X) + S_n(X)}{S_n(X)}$ es un subgrupo del grupo abeliano libre $C_n(X) / S_n(X)$ y es por lo tanto un grupo libre. #

Análogamente ocurre con $Z_{(C/S)_*}(|X|)$.

Considerando el funtor aditivo contravariante

$$\mathrm{Hom}(-,f) : \mathrm{Morf\ Ab} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

donde f es un homomorfismo de grupos abelianos, obtenemos el siguiente teorema restringido de los coeficientes universales.

Teorema 4.- Si en el complejo $SC_*(X)$ los bordes de dimensión $n-1$ y $n-2$ son objetos proyectivos, se obtiene en dimensión n la siguiente sucesión exacta corta escindible:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}\ (G_{n-1}(X), f) \longrightarrow G^n(X:f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_n(X), f) \longrightarrow 0$$

Vamos ahora a estudiar alguna condición para que los bordes de dimensión n en el complejo de cadenas $SC_*(X)$ sea un objeto proyectivo en Morf Ab.

$$B_{SC_n}(X) = 1_n|_{B_{S_n}} : B_{S_n}(X) \longrightarrow B_{C_n}(X)$$

donde $B_{S_n}(X)$ y $B_{C_n}(X)$ son los sub-$\mathbb{Z}$-módulos bordes n-ésimos de $S_n(X)$ y $C_n(X)$ respectivamente, 1_n es la aplicación inclusión $1_n: S_n(X) \longrightarrow C_n(X)$.

$B_{S_n}(X)$ y $B_{C_n}(X)$ son objetos proyectivos en Ab, pues son subgrupos de los grupos abelianos libres $S_n(X)$ y $C_n(X)$. Vamos a estudiar qué ocurre con $B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X)$.

Denotaremos por $B_{(C/S)_n}$ al $\mathbb{Z}$ módulo bordes n-ésimos de $C_n(X) / S_n(X)$.

Podemos formar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1"] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_2"] & C_{n+1}(X) / S_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_3"] & 0 \\
 & B_{S_n}(X) \arrow[r] & B_{C_n}(X) \arrow[r] & B_{(C/S)_n}(X) &
\end{tikzcd}$$

donde ∂_1, ∂_2 y ∂_3 denotan los operadores borde de los correspondientes complejos de cadenas y f_{n+1} es la proyección natural que, evidentemente induce

$$\bar{f}: B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X) \longrightarrow B_{(C/S)_n}(X)$$

Sea $T = \operatorname{Im} \bar{f}$. Notemos que T es un objeto proyectivo en Ab, pues es un subgrupo del grupo abeliano libre $C_n(X) / S_n(X)$ Como consecuencia la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar{f} \longrightarrow B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

escinde, luego

$$B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X) \equiv \operatorname{Ker} \bar{f} \oplus T \qquad (1)$$

Como T es libre $B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X)$ será libre cuando lo sea $\operatorname{Ker} \bar{f}$. Estudiaremos, por tanto, $\operatorname{Ker} \bar{f}$

Sea $[x]$ un elemento de $B_{C_n}(X) / B_{S_n}(X)$ tal que $\bar{f}([x]) = 0$. $[x] = x + B_{S_n}$ con $x \in B_{C_n}$, luego existe una cadena y en $C_{n+1}(X)$

tal que $\partial_2(y) = x$. Sea $y = \sum z_i T_i$ donde z_i son números enteros y T_i son (n+1)-cubos propios. Llamamos y_1 a $\sum z_j T_j$ donde T_j son los (n+1)-cubos propios compactos de y e y_2 a $\sum z_k T_k$ donde T_k son los (n+1)-cubos propios no compactos de y, entonces $y = y_1 + y_2$. Notemos que podemos considerar $y_1 \in S_{n+1}(X)$ y $j_{n+1}(y) = y_2$. Como $\bar{f}([x]) = 0$

se sigue que $\partial_3(y_2) = 0 \in B_{(C/S)_n}(X)$,

luego $x \in S_n(X)$,

además $\partial_1(x) = \partial_2(x) = \partial_2(\partial_2(y)) = 0$,

por lo tanto $x \in Z_{S_n}(X)$.

Entonces $x \in Z_{S_n}(X) \cap B_{C_n}(X)$

Por otra parte es trivial que si $x \in Z_{S_n}(X) \cap B_{C_n}(X)$ entonces

$$\bar{f}([x]) = 0$$

Como consecuencia de todo lo anterior

$$\operatorname{Ker} \bar{f} = \frac{Z_{S_n}(X) \cap B_{C_n}(X)}{B_{S_n}(X)}$$

que es un subgrupo de $H_n(X)$.

Vamos a expresar ahora Ker $\bar{f}$ en términos de la sucesión exacta que conecta los grupos de homología H_*, J_* y E_*.

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1}(X) \xrightarrow{g_1} H_n(X) \xrightarrow{g_2} J_n(X) \xrightarrow{g_3} E_n(X) \longrightarrow H_{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Proposición 5.- Ker $\bar{f}$ = Ker g_2 = Im g_1 $\equiv$ Cocker g_3

Demostración.- Sea $[x] \in H_n(X)$ tal que $[x] \in \operatorname{Ker} \bar{f}$

Como $x \in Z_{S_n}(X) \cap B_{C_n}(X)$ entonces $g_2([x]) = 0$ luego

$$\operatorname{Ker} \bar{f} \subset \operatorname{Ker} g_2$$

Si $[x] \in \operatorname{Ker} g_2$ se sigue que $x \in Z_{S_n}$ y además $g_2[x] = 0 \in J_n(X)$, como $g_2([x]) = [x]_J$ se sigue que $[x] \in B_{C_n}(X)$ y por tanto

$$\operatorname{Ker} g_2 \subset \operatorname{Ker} \bar{f} \qquad \#$$

Como consecuencia de todo lo anterior obtenemos :

Proposición 6.- $B_{SC_n}(X)$ es un objeto proyectivo en Morf Ab si y sólo si Ker g_2 es un grupo abeliano libre.

Corolario 7.- Si $H_n(X)$ es un grupo abeliano libre, entonces $B_{SC_n}(X)$ es un objeto proyectivo en Morf Ab.

Vamos ahora a demostrar un teorema de los coeficientes universales en las condiciones generales que nos encontramos en el complejo de cadenas $SC_*(X)$. Lo haremos para el funtor aditivo contravariante Hom $(-,f)$, donde f es un objeto de Morf Ab.

Teorema 8.- Sea K_* un complejo de cadenas de objetos proyectivos en Morf Ab de tal manera que el subcomplejo de los ciclos, que denotaremos Z_*, es de objetos proyectivos. Entonces para cada n obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H_n(\operatorname{Hom}(K_*;f)) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde M es un subgrupo de $\operatorname{Hom}(H_n(K_*);f)$, y N es un grupo del que $Ext(H_{n-1}(K_*);f)$ es un cociente.

Si los bordes de dimensión (n-1), B_{n-1}, es un objeto proyectivo en Morf Ab, entonces $M = Hom\ (H_n(K_*);f)$. Si B_{n-2} es un objeto proyectivo, entonces $N = Ext(H_{n-1}(K_*);f)$.

Además si B_{n-1} es un objeto proyectivo la, sucesión exacta corta anterior escinde.

<u>Demostración</u>.- Por comodidad t denotará el funtor Hom(-;f) Utilizaremos ambas notaciones a la vez. ∂ denotará el operador borde de K_*.

Notemos que los complejos (Z_*,∂) y (B_*,∂) son tales que $\partial = 0$ y por lo tanto $H_q(Z_*) = Z_q$ y $H_q(B_*) = B_q$ para cada q.

Consideremos la sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{j} K_* \xrightarrow{\partial} B_{*-1} \longrightarrow 0$$

donde j es una inclusión y ∂ el operador borde.

En general esta sucesión no es escindible pues B_{*-1} (bordes de una dimensión menor a la de K_*), no son objetos proyectivos.

Aplicamos el functor t = Hom (-;f) y obtenemos:

$$0 \longrightarrow Hom(\ B_{*-1};f) \xrightarrow{t\partial} Hom\ (K_*;f) \xrightarrow{tj} Hom\ (Z_*;f)$$

para convertir esta sucesión en exacta nos restringimos a Im(tj) y tenemos la sucesión :

$$0 \longrightarrow Hom(\ B_{*-1};f) \xrightarrow{t\partial} Hom\ (K_*;f) \xrightarrow{tj} Im\ (tj) \longrightarrow 0$$

que induce la siguiente sucesión exacta larga en los grupos de homologia :

$$\cdots \longrightarrow H_{n-1}((Im\ tj)_*) \xrightarrow{\Delta_{n-1}} H_{n-1}(Hom(B_*;f)) \xrightarrow{(t\partial)_*} H_n(Hom(K_*;f)) \xrightarrow{(tj)_*}$$
$$\longrightarrow H_n\ ((Im\ tj)_*) \xrightarrow{\Delta n} H_n\ (Hom(B_*;f)) \longrightarrow \cdots$$

donde Δ_n denota el morfismo de conexión.

Como $H_n((\mathrm{Im}\, tj)_*) = \mathrm{Im}\, tj_n$ y $H_n(\mathrm{Hom}(B_*;f)) = \mathrm{Hom}(B_n;f)$, la sucesión queda :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Im}\,(tj_{n-1}) \xrightarrow{\Delta_{n-1}} \mathrm{Hom}(B_{n-1};f) \xrightarrow{(t\partial)_*} H_n(\mathrm{Hom}(K_*;f)) \xrightarrow{(tj)_*}$$
$$\longrightarrow \mathrm{Im}(tj_n) \xrightarrow{\Delta n} \mathrm{Hom}(B_n;f) \longrightarrow \cdots$$

de donde obtenemos la sucesión exacta corta :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cocker}\ \Delta_{n-1} \longrightarrow H_n(\mathrm{Hom}(K_*;f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \Delta_n \longrightarrow 0$$

Repitiendo un proceso análogo al utilizado en la construcción del homomorfismo de conexión (lema de la serpiente) se comprueba sin dificultad que Δ_n es la restricción a $\mathrm{Im}(tj_n)$ de ti_n ,siendo i_n la aplicación inclusión $i_n : B_n \longrightarrow Z_n$.

Vamos a calcular $\mathrm{Ker}\ \Delta_n$:

Sea $x \in \mathrm{Ker}\ \Delta_n$. $\mathrm{Ker}\ \Delta_n \subset \mathrm{Im}\,(tj_n) \subset \mathrm{Hom}(Z_n;f)$. Entonces $x : Z_n \longrightarrow f$ y por pertenecer a $\mathrm{Im}\,(tj_n)$ es tal que existe $\bar{x} : K_n \longrightarrow f$ verificando $t_{jn}(\bar{x}) = x$ es decir: $\bar{x} \circ j_n = x$ además $\Delta_n\,(x) = 0$, luego $t_{in}(x) = 0$, por tanto

$$0 = x \circ i_n : B_n \longrightarrow f$$

Por consiguiente x está en $\mathrm{Ker}\ \Delta_n$ si y sólo si es un morfismo de Z_n en f que se extiende a las cadenas K_n y se anula en los bordes B_n.

Como $H_n\,(K_*) = Z_n / B_n$, $\mathrm{Ker}\ \Delta_n$ puede interpretarse como un subgrupo de $\mathrm{Hom}\,(H_n(K_*);f)$.

Suponemos ahora que B_{n-1} es un objeto proyectivo en Morf Ab. Entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{j} K_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

escinde y por lo tanto

$$0 \longrightarrow Hom(B_{n-1}, f) \xrightarrow{t\partial} Hom(K_n;f) \xrightarrow{tj} Hom(Z_n;f) \longrightarrow 0$$

es exacta corta. De aquí se sigue que todo morfismo de Z_n en f extiende a un morfismo de K_n en f, luego en este caso

$$Ker\ \Delta_n = Hom(H_n(K_*);f).$$

Calculemos ahora Cocker Δ_{n-1}:

$$Cocker\ \Delta_{n-1} = \frac{Hom\ (B_{n-1};f)}{\Delta_{n-1}\ (Im(t_{j_{n-1}}))}$$

es decir está formado por todos los morfismos $x: B_{n-1} \longrightarrow f$, módulo aquellos que extienden a K_{n-1}.

Por otra parte, como Z_{n-1} es un objeto proyectivo se obtiene:

$$Ext\ (H_{n-1}(K_*);f) = \frac{Hom\ (B_{n-1};f)}{(ti_{n-1})(Hom(Z_{n-1};f))} \quad (1)$$

En efecto, consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{\eta} H_{n-1}(K_*) \longrightarrow 0$$

y obtenemos la sucesión exacta larga de los functores derivados.

$$0 \longrightarrow Hom(H_{n-1}(K_*), f) \longrightarrow Hom(Z_{n-1};f) \xrightarrow{ti_{n-1}} Hom(B_{n-1};f) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Ext\ (H_{n-1}(K_*);f) \longrightarrow Ext\ (Z_{n-1};f) \longrightarrow$$

Como Z_{n-1} es proyectivo $Ext\ (Z_{n-1};f) = 0$ y de aquí se sigue (1).

Además

$$\frac{\operatorname{Hom}(B_{n-1};f)}{ti_{n-1}(\operatorname{Hom}(Z_{n-1};f))} \cong \frac{\dfrac{\operatorname{Hom}(B_{n-1};f)}{ti_{n-1}(\operatorname{Im}(tj_{n-1}))}}{\dfrac{ti_{n-1}(\operatorname{Hom}(Z_{n-1};f))}{ti_{n-1}(\operatorname{Im}(tj_{n-1})}}$$

luego $\quad \operatorname{Ext}(H_{n-1}(K_*);f) \cong \dfrac{\operatorname{Cocker} \Delta_{n-1}}{\dfrac{ti_{n-1}(\operatorname{Hom}(Z_{n-1};f)}{ti_{n-1}(\operatorname{Im}(tj_{n-1})}}$

es decir $\operatorname{Ext}(H_{n-1}(K_*);f)$ es el cociente de Cocker Δ_{n-1} por el subgrupo de los morfismos de B_{n-1} en f que extienden a Z_{n-1} módulo aquellos que extienden a K_{n-1}.

Ahora, si B_{n-2} es un objeto proyectivo, repitiendo el mismo proceso que antes con

$$0 \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

obtenemos : $\quad \operatorname{Cocker} \Delta_{n-1} = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(K_*);f)$.

Sólo nos queda por comprobar que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Cocker} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\beta} H_n(\operatorname{Hom}(K_*;f) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Ker} \Delta_n \longrightarrow 0$$

escinde cuando B_{n-1} es proyectivo. Para ello basta con encontrar un morfismo $g : \operatorname{Ker} \Delta_n \longrightarrow H_n(\operatorname{Hom}(K_*;f)$ tal que $\alpha \circ g = id_{\operatorname{Ker} \Delta n}$. [Pp 2.7.4]

Como B_{n-1} es proyectivo la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{j} K_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

escinde, en particular existe $r : K_n \longrightarrow Z_n$ tal que $r \circ j = id_{Z_n}$.

Sea $\eta : Z_n \longrightarrow H_n(K_*)$ la proyección natural y sea

$$\gamma = \eta\, r : K_n \longrightarrow H_n(K_*)$$

notemos que $\gamma j = \eta$. Como η es epimorfismo,

$$t\eta : \mathrm{Hom}(H_n\ (K_*);f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z_n;f)$$

es monomorfismo.

Como además $\mathrm{Hom}(H_*(K_*);f)$ y $\mathrm{Hom}\ (Z_*);f))$ son complejos cuyo operador borde es cero, $H_n(\mathrm{Hom}(H_*(K_*);f)) = \mathrm{Hom}(H_n(K_*);f)$ y lo mismo ocurre con $\mathrm{Hom}(Z_n;f)$.

Por tanto $(t\eta)_* = t\eta : \mathrm{Hom}(H_n(K_*);f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z_n;f)$ es un monomorfismo. Como $\gamma j = \eta$, $t\eta = t(\gamma j) = tj\ t\gamma$ luego

$$(t\eta)_* = (tj)_* \cdot (t\gamma)_*$$

$$(tj)_* : H_n(\mathrm{Hom}(K_*);f) \longrightarrow H_n(\mathrm{Hom}(Z_n;f) = \mathrm{Hom}(Z_n;f)$$

$$\begin{array}{l} (t\gamma)_* : H_n(\mathrm{Hom}(H_n(K_*);f) \longrightarrow H_n(\mathrm{Hom}(K_*;f)) \\ \qquad\qquad \| \\ \qquad \mathrm{Hom}(H_n(K_*);f) \end{array}$$

Recordando la sucesión exacta larga que da lugar a la sucesión exacta corta del enunciado del teorema

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathrm{Hom}(K_*;f)) \xrightarrow{(tj)_*} \mathrm{Im}\ tj_n \xrightarrow{\Delta_n} \mathrm{Hom}(B_n;f) \longrightarrow \cdots$$

Como B_{n-1} es proyectivo $\mathrm{Im}\ tj_n = \mathrm{Hom}(Z_n;f)$ y obtenemos :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathrm{Hom}(K_*;f)) \arrow[r, "(tj)_*"] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}(Z_n;f) \arrow[r, "\Delta_n"] & \mathrm{Hom}(B_n;f) \arrow[r] & \cdots \\
& \mathrm{Ker}\ \Delta_n = \mathrm{Hom}(H_n(K_n);f) \arrow[u, "(t\eta)_*"] & &
\end{tikzcd}$$

$(tj)_* = (t\eta)_*\ \alpha$.

$(t\eta)_* = (tj)_*\ (t\gamma)_* = (t\eta)_*\ \alpha\ (t\gamma)_*$

como $t\eta_*$ es monomorfismo se sigue que

$$id_{\mathrm{Ker}\ \Delta n} = \alpha\ (t\gamma)_*$$

luego el morfismo g que buscabamos es $(t\gamma)_*$ y la sucesión escinde #

Particularizando a $SC_*(X)$ para un espacio X obtenemos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G^n(X;f) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

si $B_{SC_{n-1}}$ y $B_{SC_{n-2}}$ son proyectivos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(G_{n-1}(X);f) \longrightarrow G^n(X;f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_n(X);f) \longrightarrow 0$$

escinde Si $B_{SC_{n-1}}$ es proyectivo

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G^n(X;f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_n(X);f) \longrightarrow 0$$

escinde

Ejemplos

A continuación daremos 2 ejemplos de cálculo de grupos de cohomología $G^n(X;f)$ En ambos ejemplos consideraremos el mismo espacio X y cambiaremos el homomorfismo de grupos f En el primero de los dos ejemplos no se verifican las hipótesis del teorema 6 4 (teorema "clásico" de los coeficientes universales) y tampoco la tesis del mismo Sin embargo en el segundo, aún no cumpliéndose la hipótesis, si se verifica la tesis

Para efectuar los cálculos utilizaremos los resultados del párrafo 5 y los algoritmos de cálculo de las homologías H_* y J_* allí recordados.

El espacio X que utilizaremos es el CW complejo propio finito que tiene la siguiente estructura esqueletal:

una	2-celda no compacta	ω'
una	2-celda compacta	ω
una	1-celda compacta	k

una 1-celda no compacta a

una 0-celda v

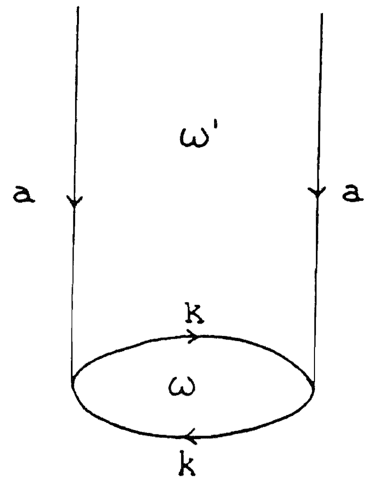
verificando :

$\partial\omega' = a + k - a = k$

$\partial\omega = 2k$

$\partial k = 0$

$\partial a = v$



Es éste un CW complejo propio finito que no es regular, sin embargo no es difícil comprobar que para este caso los algoritmos de cálculo siguen siendo válidos. Por otra parte, resulta sencillo dotar a X de una estructura regular. Para ello necesitamos dos 2-celdas compactas, dos 1-celdas no compactas, cuatro 1-celdas compactas y tres 0-celdas. Lógicamente los cálculos con la estructura regular son similares, pero más pesados y por ello preferimos hacerlos con la estructura ya descrita.

En lo que sigue $\langle a_1 \cdots a_q \mid R_1 \cdots R_s \rangle$ denotará el grupo generado por $a_1 \cdots a_q$ con relaciones $R_1 \cdots R_s$.

Calcularemos en primer lugar las homologías $H_*(X)$, $J_*(X)$

y $G_*(X)$ Para ello calculamos el complejo de cadenas $SC_*(|X|)$. A los generadores de los grupos de homología $H_q(X_q,X_{q-1})$ y $J_q(X_q,X_{q-1})$ los denotaremos con las mismas letras utilizadas para las celdas correspondientes.

$$SC_n(|X|) = 0 \;:\; 0 \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } n \geq 3$$
$$SC_2(|X|) = 1_2 \;:\; <\omega> \longrightarrow <\omega,\omega'>$$
$$SC_1(|X|) = 1_1 \;:\; <k> \longrightarrow <k,a>$$
$$SC_0(|X|) = 1_0 \;:\; <v> \longrightarrow <v>$$

1_i son todas aplicaciones inclusión

Calculamos ahora ciclos y bordes de este complejo de cadenas

$$Z_{sc_n}(|X|) = 0 \;:\; 0 \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } n \geq 3$$
$$Z_{sc_2}(|X|) = 0 \;:\; 0 \longrightarrow <\omega-2\omega'>$$
$$Z_{sc_1}(|X|) = 1_{Z_1} \;:\; <k> \longrightarrow <k>$$
$$Z_{sc_0}(|X|) = 1_{Z_0} \;:\; <v> \longrightarrow <v>$$

$$B_{sc_n}(|X|) = 0 \;:\; 0 \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } n \geq 2$$
$$B_{sc_1}(|X|) = 1_{B_1} \;:\; <2k> \longrightarrow <k>$$
$$B_{sc_0}(|X|) = 1_{B_0} \;:\; 0 \longrightarrow <v>$$

Entonces las homologías $H_*(X)$, $J_*(X)$ de X son :

$$H_n(X) = 0 \qquad J_n(X) = 0 \qquad \text{para cada } n \geq 3$$
$$H_2(X) = 0 \qquad J_2(X) = <\omega-2\omega'> \cong \mathbb{Z}$$
$$H_1(X) = <k|2k> \cong \mathbb{Z}_2 \qquad J_1(X) = 0$$
$$H_0(X) = <v> \cong \mathbb{Z} \qquad J_0(X) = 0$$

Como $G_* = 1_* : H_* \longrightarrow J_*$ obtenemos

$$
\begin{array}{llcl}
G_n(X) = 0: & 0 & \longrightarrow & 0 \quad \text{para todo } n \geq 3 \\
G_2(X) = 0: & 0 & \longrightarrow & \langle \omega - 2\omega' \rangle \\
G_1(X) = 0: & \langle k \mid 2k \rangle & \longrightarrow & 0 \\
G_0(X) = 0: & \langle v \rangle & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Sea ahora $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(r) = 2r$ para cada $r \in \mathbb{Z}$

Vamos a calcular $G^2(X;f)$. Lo hacemos directamente. Aplicamos $\mathrm{Hom}(-,f)$ a $SC_*(|X|)$ y obtenemos :

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
\mathrm{Hom}\ (l_0;f) \\
\downarrow \delta_0 \\
\mathrm{Hom}\ (l_1;f) \\
\downarrow \delta_1 \\
\mathrm{Hom}\ (l_2;f) \\
\downarrow \delta_2 \\
\mathrm{Hom}\ (l_3;f) = 0
\end{array}
$$

$$G^2(X \cdot f) = \mathrm{Ker}\ \delta_2 / \mathrm{Im}(\delta_1)$$

<u>$\mathrm{Ker}\ \delta_2$</u> $= \mathrm{Hom}\ (l_2;f) = \langle h, h' \rangle$

donde $h = (h_1,h_2)$ es el morfismo de Morf Ab tal que

$h_1: \langle \omega \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $h_1(\omega) = 1$

$h_2: \langle \omega, \omega' \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $h_2(\omega) = 2$, $h_2(\omega') = 0$

y $h' = (h_1', h_2')$ es el homomorfismo de Morf Ab tal que

$h_1': \langle \omega \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $h_1'(\omega) = 0$

$$h'_2 : <\omega> \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad h'_2(\omega) = 0 \text{ y } h'_2(\omega') = 1$$

<u>$\mathrm{Im}\,\delta_1$</u> $\bar{g} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2) \in \mathrm{Im}\,\delta_1$, si existe $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Hom}\,(1_1, f)$ tal que $g \circ \partial = \bar{g}$ Entonces $g_1(k) = r$ y $g_2(k) = 2r$

$$\bar{g}_1(\omega) = g_1 \circ \partial(\omega) = g_1(2k) = 2g_1(k) = 2r$$

$$\bar{g}_2(\omega) = g_2 \circ \partial(\omega) = g_2(2k) = 2g_2(k) = 4r$$

$$\bar{g}_2(\omega') = g_2 \circ \partial(\omega') = g_2(k) = 2r$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}\,\delta_1 = < \alpha >$, donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y

$$\alpha_1(\omega) = 2$$

$$\alpha_2(\omega) = 4$$

$$\alpha_2(\omega') = 2$$

Notemos que $\alpha = 2(h + h')$

$$\text{luego } G^2(X, f) = \frac{< h, h' >}{< 2(h+h') >} = < h, h' \mid 2(h+h') >$$

Por tanto $\quad G^2(X, f) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

Notemos que en este ejemplo $B_{SC_1}(X)$ no es un objeto proyectivo en Morf Ab, pues $B_{SC_1}(X) = 1_{B_1} \cdot < 2k > \longrightarrow < k >$, y Cocker $1_{B_1} \cdot < k|2k > \cong \mathbb{Z}_2$ que no es un objeto proyectivo en Ab. Sin embargo, $B_{SC_0} = 1_{B_0} \cdot 0 \longrightarrow < v >$ sí que es un objeto proyectivo en Morf Ab. Por lo tanto no se verifican las hipótesis del teorema 6.4, aunque del teorema 6.8 podemos concluir que

$$\text{Cocker } \Delta_1 = \mathrm{Ext}\,(G_1(X), f)$$

Vamos a comprobar que no se verifica la tesis del teorema 6.4, para ello calculamos en primer lugar Hom $(G_2(X);f)$

$$\mathrm{Hom}\ (G_2(X);f) = <\varphi>$$

donde $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ con

$\varphi_1 : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\varphi_2 : <\omega-2\omega'> \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $\varphi_2(\omega-2\omega') = r \in \mathbb{Z}$

por tanto

$$\mathrm{Hom}\ (G_2(X);f) \cong \mathbb{Z}.$$

Calculamos ahora $\mathrm{Ext}\ (G_1(X);f) = \dfrac{\mathrm{Hom}\ (B_{SC_1}(X);f)}{ti_1(\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f))}$

Computamos Hom $(B_{SC_1}(X);f)$

Si $\Psi = (\Psi_1,\Psi_2) \in \mathrm{Hom}\ (B_{SC_1}(X),f)$, debe verificar las siguientes relaciones

$$\Psi_1(2k) = r \in \mathbb{Z}$$

$$\Psi_2(2k) = 2\Psi_2(k)$$

por otra parte $f \circ \Psi_1(2k) = 2r,$

luego $\Psi_2(k) = r.$

Por tanto $\mathrm{Hom}\ (B_{SC_1}(X);f) = <\Psi> \cong \mathbb{Z}$

donde $\Psi_1 : <2k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\Psi_1(2k) = 1$

$\Psi_2 : <k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\Psi_2(k) = 1$

ti_1 (Hom $(Z_{SC_1}(X),f))$.

$$\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X),f) = <\eta>$$

donde $\eta_1 : <k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\eta_1(k) = 1$

$\eta_2 : <k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\eta_2(k) = 2$

Ahora bien $g = (g_1, g_2) \in t_{i_1}(\mathrm{Hom}\,(Z_{sc1}(X);f)) \subset \langle\psi\rangle$ si existe $\bar{g} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2) \in (\mathrm{Hom}(Z_{sc1}(X);f))$ verificando $g = \bar{g} \circ i$

como
$$g_1(2k) = \bar{g}_1(i_1(2k)) = \bar{g}_1(2k) = 2\bar{g}_1(k) = 2c \in 2\mathbb{Z}$$
$$g_2(k) = \bar{g}_2(i_1(k)) = \bar{g}_2(k) = 2\bar{g}_1(k) = 2c$$
$$g_2(2k) = 4c$$

Por otra parte debe ocurrir que
$$g_2(2k) = f \circ g_1(2k) = 2g_1(2k) = 4c$$

Entonces $\quad t_{i_1}(\mathrm{Hom}(Z_{sc_1}(X);f)) = \langle 2\psi \rangle$

de donde $\quad \mathrm{Ext}(G_1(X);f)) \cong \mathbb{Z}_2$

La conclusión del teorema 6.4 es que la sucesión:
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(G_1(X);f)) \longrightarrow G^2(X;f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_2(X);f)) \longrightarrow 0$$
es exacta y escindible

Como $\quad \mathrm{Ext}\,(G_1(X);f)) \cong \mathbb{Z}_2$

$\quad G^2(X;f) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$

y $\quad \mathrm{Hom}(G_2(X);f)) \cong \mathbb{Z}$

obtenemos $\quad \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

y en un principio parece que la tesis de 6.4 se verifica. Sin embargo, examinando con más profundidad la aplicación
$$\beta : G^2(X;f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_2(X);f)$$
veremos que no es sobre

Esta aplicación β proviene de tj en la sucesión exacta larga:
$$\xrightarrow{\Delta_1} \mathrm{Hom}\,(B_{sc_1}(X);f) \xrightarrow{(t\partial)_*} G^2(X;f) \xrightarrow{(tj_2)_*} \mathrm{Im}(tj_2) \xrightarrow{\Delta_2} \mathrm{Hom}\,(B_{sc_2}(X);f) \longrightarrow \cdots$$

En este ejemplo $\quad B_{sc_2}(X) = 0\ ;\ 0 \longrightarrow 0$

luego $\quad \mathrm{Ker}\,\Delta_2 = \mathrm{Im}(tj_2) \subset \mathrm{Hom}(Z_{sc_2}(X);f)$

y en este ejemplo $\quad \mathrm{Hom}(Z_{sc_2}(X);f) = \mathrm{Hom}\,(G_2(X);f) = \langle \varphi \rangle$

Veamos que $\quad \mathrm{Im}(tj_2) \cong \mathrm{Hom}(Z_{sc_2}(X);f)$.

$g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Im}(tj_2)$ si existe $\bar{g} \in \mathrm{Hom}(l_2;f)$ tal que

$$g = \bar{g} \circ j$$

Como $\quad \mathrm{Hom}(l_2;f) = \langle h, h' \rangle$

debe ocurrir $\quad \bar{g}_1(\omega) = r \in \mathbb{Z} \quad \bar{g}_2(\omega) = 2r \quad g_2(\omega') = r'$

entonces como

$g_1(0) = 0$

y $\quad g_2(\omega - 2\omega') = \bar{g}_2 \circ j_2(\omega - 2\omega') = \bar{g}_2(\omega - 2\omega') = \bar{g}_2(\omega) - 2\bar{g}_2(\omega') = 2r - 2r' =$

$= 2(r - r') \in 2\,\mathbb{Z}$

luego $\quad \mathrm{Ker}\,\Delta_2 = \langle 2\varphi \rangle$

y por lo tanto $\quad \beta\,(G^2(X;f)) = \langle 2\varphi \rangle \cong \langle \varphi \rangle = \mathrm{Hom}\,(G_2(X);f)$

Observemos que si se verifica el teorema 6.8

$$0 \longrightarrow \langle \psi \mid 2\psi \rangle \longrightarrow \langle h, h' \mid 2(h + h') \rangle \longrightarrow \langle 2\varphi \rangle \longrightarrow 0$$

En este caso además esta sucesión es escindible pues $\langle 2\varphi \rangle$ es un grupo libre

Ejemplo 2.-

Siendo X el mismo espacio que en el ejemplo anterior. Consideramos $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo identidad. Pretendemos calcular $G^2(X;f)$

Como en el ejemplo anterior

$$G^2(X;f) = \ker\delta_2 / \mathrm{Im}\,\delta_1 = \mathrm{Hom}(l_2;f) / \mathrm{Im}\,\delta_1$$

En este caso

$$\mathrm{Hom}(l_2;f) = \langle h, h' \rangle$$

donde $h = (h_1, h_2)$ está definida por:

$$h_1 : \langle \omega \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad h_1(\omega) = 1$$

$h_2 : <\omega,\omega'> \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $h_1(\omega) = 1$ $h_2(\omega') = 0$

y $h' = (h'_1, h'_2)$ está definida por :

$h'_1 : <\omega> \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $h'_1(\omega) = 0$

$h'_2 : <\omega,\omega'> \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $h'_2(\omega) = 0$ $h'_2(\omega') = 1$

Calculamos $\operatorname{Im}\delta_1$

$\bar{g} \in \operatorname{Im}\delta_1$ si existe $g \in \operatorname{Hom}(l_1; f)$ tal que $g \circ \partial = \bar{g}$

$g_1(k) = r$ $\qquad$ $g_2(k) = r$

$\bar{g}_1(\omega) = g_1\partial(\omega) = g_1(2k) = 2r \in 2\mathbb{Z}$

$\bar{g}_2(\omega) = g_2\partial(\omega) = g_2(2k) = 2r \in 2\mathbb{Z}$

$\bar{g}_2(\omega') = g_2\partial(\omega') = g_2(k) = r$

luego $\operatorname{Im}\delta_1 = <\alpha>$ donde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ y estas verifican

$\alpha_1(\omega) = 2$ $\qquad$ $\alpha_2(\omega) = 2$ $\qquad$ $\alpha_1(\omega') = 0$

es inmediato que $\alpha = 2h+h'$

Por consiguiente $G^2(X;f) = <h,\ h' \mid 2h+h'> =$

$= <h,\ h+h' \mid h+h+h'> = <h> \cong \mathbb{Z}$

Vamos a calcular ahora $\operatorname{Coker}\Delta_1$:

Como en el ejemplo anterior, $\operatorname{Coker}\Delta_1 = \operatorname{Ext}(G_1(X);f)$

$\operatorname{Ext}(G_1(X);f) = \operatorname{Hom}(B_{sc_1}(X),f) \,/\, ti_1(\operatorname{Hom}(Z_{sc_1}(X);f))$

Calculamos $\operatorname{Hom}(B_{sc_1}(X);f)$

Si $\psi \in \operatorname{Hom}(B_{sc_1}(X);f)$ debe verificar

$\psi_1(2k) = r \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\psi_2(2k) = r \in \mathbb{Z}$

por otra parte $\psi_2(2k) = 2\psi_2(k)$ luego $r \in 2\mathbb{Z}$

entonces $\operatorname{Hom}(B_{sc_1}(X);f) = <\psi>$

donde $\psi_1 : <2k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\psi_1(2k) = 2$

$\psi_2 : <k> \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\psi_2(2k) = 1$

Calculamos ahora $ti_1(\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f))$

$$\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f) = \langle \eta \rangle$$

donde $\eta_1 \cdot \langle k \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\eta_1(k) = 1$

$\eta_2 \cdot \langle k \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\eta_2(k) = 1$

como antes $g \in ti_1(\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f)) \subset \langle \psi \rangle$

si existe $\overline{g} \in (\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f))$ verificando $g = \overline{g} \circ i$

Como

$$g_1(2k) = \overline{g}_1(i_1(2k)) = \overline{g}_1(2k) = 2\overline{g}_1(k) = 2c \in 2\mathbb{Z}$$

$$g_2(k) = \overline{g}_2(i_1(k)) = \overline{g}_2(k) = \overline{g}_1(k) = 2c$$

$$g_2(2k) = 2c$$

Entonces $ti_1(\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_1}(X);f)) = \langle \psi \rangle$

luego $\mathrm{Ext}(G_1(X);f) = 0$

Calculamos ahora $\mathrm{Ker}\ \Delta_2$

Por la misma razón que antes, $\mathrm{Ker}\ \Delta_2 = \mathrm{Im}(tj_2) \subset \mathrm{Hom}\ (Z_{SC_2}(X);f)$

y $\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_2}(X);f) = \mathrm{Hom}\ (G_2(X);f)$

$$\mathrm{Hom}\ (Z_{SC_2}(X);f) = \langle \alpha \rangle \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

y $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2(\omega - 2\omega') = 1$

$g \in \mathrm{Im}(tj_2)$ si existe $\overline{g} \in \mathrm{Hom}\ (l_2, f)$ tal que $g = \overline{g} \circ j$

$\overline{g} \in \langle h, h' \rangle$

luego $\overline{g}_1(\omega) = r = \overline{g}_2(\omega)$ y $g_2(\omega') = r$

como $g_1(0) = 0$

$$g_2(\omega - 2\omega') = \overline{g}_2 j_2(\omega - 2\omega') = \overline{g}_2(\omega) - 2\overline{g}_2(\omega') = r - 2r' \in \mathbb{Z}$$

luego $\mathrm{Im}(tj_2) = \langle \alpha \rangle = \mathrm{Hom}\ (G_2(X);f)$

y se verifica:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Cocker } \Delta_1 & \longrightarrow & G^2(X, f) & \longrightarrow & \ker \Delta_2 & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \langle h \rangle & \longrightarrow & \langle \alpha \rangle & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

CAPITULO III

HOMOMORFISMOS INDUCIDOS

A lo largo del presente capítulo (X,A) y (X',A') denotarán pares propios de complejos cúbicos propios finitos.

Sea $\phi: (X,A) \longrightarrow (X',A')$ una aplicación propia. Estudiaremos diferentes maneras que tiene ϕ de inducir homomorfismos en (co) homología dependiendo de las propiedades que verifique. Estudiaremos cuándo estas formas coinciden.

1.-Portadores

<u>**Definición 1**</u>.- Un portador para una aplicación continua $\phi: X \longrightarrow X'$ es una correspondencia que asigna a cada cubo σ de X un subcomplejo E_σ de X' verificando las dos condiciones siguientes:

i) Si σ es un cubo de X, entonces $\phi(\sigma) \subset E_\sigma$.

ii) Si σ es una cara del cubo τ, entonces $E_\sigma \subset E_\tau$.

Puede definirse portador para una aplicación continua $\phi: (X,A) \longrightarrow (X',A')$ de la misma manera pero exigiendo la siguiente condición adicional :

iii) Si σ es un cubo de A, entonces $E_\sigma \subset A'$

A menudo denotaremos un portador por la familia de subcomplejos $\{E_\sigma\}$ de X' que tiene asociada y llamaremos a E_σ subcomplejo portador del cubo σ.

Si la aplicación ϕ es propia, el subcomplejo portador de un cubo no compacto debe ser no compacto. En efecto, sea σ un cubo no compacto de X y $h: J \longrightarrow \sigma$ una aplicación propia, como σ es cerrado en X, la aplicación $g = \phi|_\sigma \circ h: J \longrightarrow X'$ es propia. Si E_σ fuese compacto, por ser g propia, se seguiría que J es compacto, lo cual es absurdo.

Puede definirse la "intersección" de dos portadores $\{E_\sigma\}$ y $\{F_\sigma\}$ como la correspondencia que asocia a un cubo σ de X el subcomplejo $E_\sigma \cap F_\sigma$ de X'. Obviamente obtenemos un nuevo portador.

Definición 2.- Llamaremos portador mínimal de la aplicación ϕ al que asocia a cada cubo σ de X, el mínimo subcomplejo de X' que contiene a $\phi(\sigma)$.

Notemos que este portador está "contenido" en cualquier otro portador de la aplicación ϕ

Definición 3.- Sea ϕ una aplicación propia. Un portador $\{E_\sigma\}$ de ϕ se dice lleno si :

i) Para cada cubo compacto σ de X, E_σ es del tipo de homotopía de un punto.

ii) Para cada cubo no compacto τ de X, E_τ es del tipo de homotopía propia de J.

Teorema 4.- Dada una aplicación propia $\phi: X \longrightarrow X'$ y un portador lleno $\{E_\sigma\}$ de ϕ, podemos asociarles un morfismo de complejos de cadenas de Morf Ab.

$$\phi_\# : SC_*(|X|) \longrightarrow SC_*(|X'|)$$

de tal manera que:

Si $\sigma \in S_*(|X|)$ $\qquad \phi_\#^1(\sigma) \in S_*(|E_\sigma|)$

Si $\sigma \in C_*(|X|)$ $\qquad \phi_\#^2(\sigma) \in C_*(|E_\sigma|)$

Demostración.- $\phi_\#^1$ y $\phi_\#^2$ se construyen por inducción. $\phi_\#^1$ se construye con técnicas análogas a las utilizadas en 31.6 de [St. 3]

Vamos a continuación a construir $\phi_\#^2$.

Sea σ un generador "compacto" de $C_n(|X|)$ definimos:

$$\phi_\#^2(\sigma) = 1'_n \circ \phi_\#^1 \circ 1_n^{-1}(\sigma)$$

donde $\qquad 1_n: S_n(|X|) \longrightarrow C_n(|X|)$

$$1'_n: S_n(|X'|) \longrightarrow C_n(|X'|)$$

son las aplicaciones inclusión.

Obviamente, si v es un vértice de X:

$$\phi_\#^2(v) = \phi_\#^1(v)$$

Sea ahora σ un 1-cubo no compacto de X, sea v el vértice de σ, entonces:

$$\phi_\#^2(\partial\sigma) = \phi_\#^2(v) = \phi_\#^1(v) \subset E_v \subset E_\sigma$$

E_σ tiene el mismo tipo de homotopía que J, por lo tanto:

$$J_0(E_\sigma) = 0$$

como $\partial\phi_\#^2(v) = \partial\phi_\#^1(v) = \phi_\#^1(\partial v) = 0$, $\phi_\#(v)$ es un ciclo de dimensión cero de E_σ, luego es borde de una 1-celda c_1 de E_σ

Definimos $\qquad \phi_\#^2(\sigma) = c_1$.

Es evidente que $\partial \phi_{\#}^2(\sigma) = \phi_{\#}^2(\partial\sigma)$.

Suponemos $\phi_{\#}^2$ definida en $C_n(|X|)$ para cada $n < p$ Sea σ un generador de $C_p(|X|)$, $\partial\sigma \in C_{p-1}(|X|)$.

Como $\partial \phi_{\#}^2(\partial\sigma) = \phi_{\#}^2(\partial\partial\sigma) = 0$, $\phi_{\#}^2(\partial\sigma)$ es un (p-1) ciclo de E_σ, teniendo en cuenta que $J_{p-1}(E_\sigma) = 0$ se sigue que $\phi_{\#}^2(\partial\sigma)$ es un (p-1) borde de E_σ , luego existe una p-cadena c_p en E_σ tal que $\partial(c_p) = \phi_{\#}^2(\partial\sigma)$.

Definimos $$\phi_{\#}^2(\partial\sigma) = c_p.$$

Se comprueba inmediatamente que $\phi_{\#} = (\phi_{\#}^1, \phi_{\#}^2)$ verifica todas las condiciones requeridas en el enunciado

Notemos que, en principio, la elección de $\phi_{\#}$ no es única En el siguiente teorema estudiamos la relación existente entre dos posibles elecciones

Teorema 5.- Sea $\phi: X \longrightarrow X'$ una aplicación propia y sea $\{E_\sigma\}$ un portador lleno asociado a ϕ, entonces dos elecciones cualesquiera del morfismo definido en el teorema anterior, $\phi_{\#}$ y $\Psi_{\#}$ son homótopas.

Demostración.- Vamos a construir una homotopía de cadenas $D_{\#} = (D_{\#}^1, D_{\#}^2)$

$$D_{\#}: SC_*(|X|) \longrightarrow SC_{*+1}(|X'|)$$

por inducción

dimensión cero

$$
\begin{tikzcd}
 & SC_0(|X|) \arrow[r] \arrow[dl, "D_0^1"'] \arrow[d, shift right, "\Phi_\#"'] \arrow[d, shift left, "\Psi_\#"] & 0 \arrow[dl, "D_{-1}^1"] \\
SC_1(|X'|) \arrow[r, "\partial"] & SC_0(|X'|) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Definimos $D_{-1} = (D_{-1}^1, D_{-1}^2)$ como el par $(0,0)$

Sea v un vertice de X . $\Phi_\#^1(v)$ y $\Psi_\#^1(v)$ es una 0-cadena y por consiguiente un 0-ciclo de E_v, como $H_0(E_v) = 0$, existe una 1-cadena en E_v, c_1, tal que :

$$\partial(c_1) = \Phi_\#^1(v) - \Psi_\#^1(v)$$

definimos $\qquad D_0^1(v) = c_1$

y por lo tanto $\qquad \partial(D_0^1(v)) = \Phi_\#^1(v) - \Psi_\#^1(v)$, $\qquad$ luego

$$\partial D_0^1(v) - D_{-1}^1(v) = \Phi_\#^1(v) - \Psi_\#^1(v)$$

$$D_0^2(v) = l'_0 \circ D_0^1(l_0^{-1}(v))$$

donde $\qquad l_0 : S_0(|X'|) \longrightarrow C_0(|X'|)$

$$l_0 : S_0(|X|) \longrightarrow C_0(|X|)$$

son aplicaciones inclusión.

Es claro que $D_0 = (D_0^1, D_0^2)$ es un morfismo de $SC_0(|X|)$ en $SC_0(|X'|)$.

<u>dimensión p</u>

Suponemos construida D_q para cada $q < p$ y $p \geq 1$.

$$
\begin{tikzcd}
 & SC_p(|X|) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "D_p"'] \arrow[d, shift right, "\Phi_\#"'] \arrow[d, shift left, "\Psi_\#"] & SC_{p-1}(|X|) \arrow[dl, "D_{p-1}"] \\
SC_{p+1}(|X'|) \arrow[r, "\partial"] & SC_p(|X'|) &
\end{tikzcd}
$$

Sea σ un generador de $S_p(|X|)$. Consideramos en $S_p(|E_\sigma|)$ la siguiente cadena:

$$\phi_\#^1(\sigma) - \psi_\#^1(\sigma) - D^1_{p-1}(\partial\sigma)$$

Vamos a comprobar que se trata de un ciclo. En efecto:

$$\partial(\phi_\#^1(\sigma) - \psi_\#^1(\sigma) - D^1_{p-1}(\partial\sigma)) = \partial\phi_\#^1(\sigma) - \partial\psi_\#^1(\sigma) - \partial D^1_{p-1}(\partial\sigma) =$$
$$= \phi_\#^1(\partial\sigma) - \psi_\#^1(\partial\sigma) - \partial D^1_{p-1}(\partial\sigma)$$

Notemos que por construcción para cada (p-1) cadena z de $S_{p-1}(|X|)$:
$$\partial D^1_{p-1}(z) + D^1_{p-2}(z) = \phi_\#^1(z) - \psi_\#^1(z)$$

en nuestro caso $z = \partial\sigma$

luego
$$\partial D^1_{p-1}(\partial\sigma) = \phi_\#^1(\partial\sigma) - \psi_\#^1(\partial\sigma) - D^1_{p-2}(\partial\partial\sigma) =$$
$$= \phi_\#^1(\partial\sigma) - \psi_\#^1(\partial\sigma)$$

por lo tanto $\phi_\#^1(\sigma) - \psi_\#^1(\sigma) - D^1_{p-2}(\partial\sigma)$ es un p-ciclo; como $H_p(|E_\sigma|) = 0$ se sigue que podemos elegir una (p+1)-cadena c_{p+1} de $S_{p+1}(|E_\sigma|)$ verificando:

$$\partial(c_{p+1}) = \phi_\#^1(\sigma) - \psi_\#^1(\sigma) - D^1_{p-1}(\partial\sigma)$$

Naturalmente definimos $D_p^1(\sigma) = c_{p+1}$.

Vamos a definir ahora $D_p^2 : C_p(|X|) \longrightarrow C_{p+1}(|X'|)$. Naturalmente si σ es un generador compacto de $C_p(|X|)$ definimos:

$$D_p^2(\sigma) = 1'_p \cdot D_p^1 \cdot 1_p^{-1}(\sigma)$$

donde, como antes,

$$1_p : S_p(|X|) \longrightarrow C_p(|X|) \quad \text{y}$$
$$1'_p : S_p(|X'|) \longrightarrow C_p(|X'|)$$

son las aplicaciones inclusión

Sea ahora σ un generador no compacto de $C_p(|X|)$, consideramos la p-cadena de $C_p(|E_\sigma|)$

$$\phi_\#^2(\sigma) - \psi_\#^2(\sigma) - D^2_{p-1}(\partial\sigma)$$

y se comprueba como antes que es un p-ciclo. Como $J_p(|E_\sigma|)=0$ podemos elegir una (p+1) cadena c_{p+1} en $C_{p+1}(|E_\sigma|)$ tal que:

$$\partial(c_{p+1}) = \Phi_\#^2(\sigma) - \Psi_\#^2(\sigma) - D_{p-1}^2(\partial\sigma)$$

Igual que antes definimos

$$D_p^2(\sigma) = c_{p+1}.$$

Es claro que $D_\# = (D_\#^1, D_\#^2)$ es una homotopía de cadenas.

Notemos que $D_\#^1$ es una homotopía de cadenas entre $\Phi_\#^1$ y $\Psi_\#^1$ y que $D_\#^2$ es una homotopía de cadenas entre $\Phi_\#^2$ y $\Psi_\#^2$. #

Sea $f: G_1 \longrightarrow G_2$ un morfismo de grupos abelianos. Aplicando a las construcciones anteriores el funtor $Hom(-;f)$: Morf Ab $\longrightarrow$ Ab obtenemos

$$Hom(\Phi_\#;f) = \Phi^\#: Hom(SC_*(|X|);f) \longrightarrow Hom(SC_*(|X|);f)$$

Es inmediato comprobar que $\delta\circ\Phi^\# = \Phi^\# \circ \delta$

de donde sigue que Φ induce

$$\Phi^*: G^*(|X'|;f) \longrightarrow G^*(X;f)$$

Notemos que Φ^* depende del portador lleno elegido para Φ, y no de la construcción de $\Phi_\#$ una vez fijado el portador.

Por otra parte, si dos aplicaciones propias $\Phi, \Psi: X \longrightarrow X'$ tienen asociado el mismo portador lleno $\{E_\sigma\}$ inducen a través de él los mismos morfismos en cohomología.

Supongamos ahora que dada la aplicación propia Φ le asociamos dos portadores llenos $\{E_\sigma\}$ y $\{E'_\sigma\}$ de tal manera que uno está "contenido" en otro (por ejemplo, $E_\sigma \subset E'_\sigma$ para todo σ). Es claro que toda aplicación inducida a través de $\{E_\sigma\}$ está tambien inducida a través de $\{E'_\sigma\}$ y por lo tanto las aplicaciones inducidas en cohomología por ϕ a través de ambas portadores coinciden $(\phi_E^* = \phi_{E'}^*)$

Como consecuencia de todo lo anterior si el portador minimal asociado a una aplicación propia ϕ es lleno, podemos concluir que el morfismo inducido en cohomología es único, debido a que todo portador lleno contiene al portador minimal.

Definición 7 - Una aplicación propia $\phi: X \longrightarrow X'$ se dice solvente si su portador minimal es lleno.

Teorema 9.- Sea $\phi: X \longrightarrow X'$ propia, solvente y celular y sea $\{E_\sigma\}$ el portador minimal de ϕ. Entonces existe un único morfismo

$$\phi_\#: SC_*(|X|) \longrightarrow SC_*(|X'|)$$

asociado al portador minimal $\{E_\sigma\}$.

Demostración - Recordaremos la construcción inductiva de $\phi_\#$ y veremos que la elección de las imágenes es única.

Si σ es un 0-cubo (vértice), como ϕ es celular, $\phi(\sigma)$ es un vértice, luego su portador minimal es $\phi(\sigma)$. Por lo tanto la elección de $\phi_\#^1(\sigma)$ y $\phi_\#^2(\sigma)$ es única.

Sea ahora σ un generador de $C_q(|X|)$. Notemos que E_σ, subcomplejo portador de σ, es un subcomplejo de X'_q. Por lo tanto en E_σ no hay $(q+1)$-cubos, de aquí se sigue que $C_{q+1}(|E_\sigma|) = 0$.

$\phi_\#^2(\partial\sigma)$ es un $(q-1)$ ciclo de $C_{q-1}(|E_\sigma|)$. Como $J_{q-1}(|E_\sigma|) = 0$, se sigue que $\phi_\#^2(\partial\sigma)$ es un borde, por lo tanto existe una p-cadena c_p de $C_q(|E_\sigma|)$ tal que $\partial c_p = \phi_\#^2(\partial\sigma)$

Ahora bien, $$\partial : C_q(|E_\sigma|) \longrightarrow C_{q-1}(|E_\sigma|)$$

es inyectiva. En efecto, basta recordar la sucesión semiexacta :

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1}(|E_\sigma|) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(|E_\sigma|) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(|E_\sigma|) \longrightarrow \cdots$$

$$0 = \mathrm{Im}\ \partial_{q+1} = \ker \partial.$$

Como ∂ es inyectiva, sólo existe una cadena c_p de tal manera que $$\partial c_p = \phi_\#^2(\partial\sigma)$$

Repitiendo un razonamiento análogo, cambiando simplemente S por C y H por J se obtiene la unicidad de $\phi_\#^1$, y por lo tanto $\phi_\#$ es única #

Ejemplos

1) Si (X,A) y (X',A') son dos pares propios de complejos cúbicos propios finitos tales que A es subcomplejo de X y A' es subcomplejo X', la aplicación inclusión :

$$i: (X,A) \longrightarrow (X',A')$$

es propia, celular y solvente. Notemos que el mínimo subcomplejo portador de un cubo σ de X es el subcomplejo formado por σ y todas sus caras.

2) Si $\phi: X \longrightarrow X'$ es una aplicación propia y "simplicial" (envia vértices a vértices y cubos a cubos), entonces ϕ es solvente.

2 - Subdivisión

Definición 1.- Sea (X,A) un par propio de complejos cúbicos propios finitos. Diremos que el par de complejos cúbicos propios finitos (X',A') es una subdivisión de (X,A) sii:

1) El espacio topológico subyacente de ambos complejos es el mismo.
2) Cada cubo de X (A) es unión de cubos de X' (A') que están contenidos en él.

Proposición 2.- Sea (X',A') una subdivisión de (X,A), entonces las aplicaciones identidad :

$$\phi\colon (X,A) \longrightarrow (X',A')$$
$$\phi'\colon (X',A') \longrightarrow (X,A)$$

son solventes

Demostración - ϕ: Dado un cubo σ de X, el mínimo subcomplejo de X' que contiene a $\phi(\sigma)$ es la subdivisión del complejo de X formado por σ y sus caras. Este complejo es trivialmente contráctil y si es no compacto, del tipo de homotopía propia de J.

ϕ': Dado un cubo σ' de X', el interior de σ' está contenido en el interior de un solo cubo de X, σ. El mínimo subcomplejo $E_{\sigma'}$ de X que contiene a $\phi'(\sigma')$es el formado por σ y todas sus caras. Se sigue inmediatamente que $\{E_{\sigma'}\}$ es un portador lleno

Usando los portadores de la proposición anterior asociamos a ϕ y a ϕ':

$$\phi_{\#}: SC_*(|X|) \longrightarrow SC_*(|X'|)$$

$$\phi'_{\#}: SC_*(|X'|) \longrightarrow SC_*(|X|)$$

Consideramos la aplicación identidad :

$$id : (X,A) \longrightarrow (X,A)$$

que, trivialmente, es propia, celular y solvente. Sean $id_{\#}$ e $id^{\#}$ los morfismos inducidos asociados al portador minimal.

Notemos que las aplicaciones id y $\phi' \circ \phi$ tienen el mismo portador minimal , por consiguiente:

$$id_{\#} = \phi'_{\#} \circ \phi_{\#}$$

luego $$id^{*} = \phi^{*} \circ \phi'^{*}$$

Considerando ahora la aplicación identidad:

$$id' : (X',A') \longrightarrow (X',A')$$

también es propia, celular y solvente.

Repitiendo el razonamiento anterior, como id' y $\phi \circ \phi'$ tienen el mismo portador minimal, se sigue que:

$$(id')^{*} = (\phi')^{*} \circ (\phi)^{*}.$$

Entonces obtenemos:

Teorema 3.- Si (X',A') es una subdivisión de (X,A) las aplicaciones inclusión ϕ y ϕ' definidas anteriormente son propias y solventes e inducen isomorfismos en cohomología.

3.- Morfismos inducidos en cohomología

Dada una aplicación propia $\phi: X \longrightarrow X'$ dependiendo de las propiedades adicionales que verifique, existen al menos tres formas de inducir morfismos en la cohomología G^n

1- si ϕ es simplemente una aplicación propia, a través de ϕ podemos definir :

$$\phi_\#^1: S_n(X) \longrightarrow S_n(X') \quad \text{con} \quad \phi_\#^1(T) = \phi\circ T$$

$$\phi_\#^2: C_n(X) \longrightarrow C_n(X') \quad \text{con} \quad \phi_\#^2(T) = \phi\circ T$$

además, $\phi_\# = (\phi_\#^1, \phi_\#^2): SC_*(X) \longrightarrow SC_*(X')$ es un morfismo de cadenas.

Si $f: G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos abelianos, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-;f)$ obtenemos el morfismo de cocadenas:

$$\phi^\#: SC^*(X';f) \longrightarrow SC_*(X;f)$$

y a través de $\phi^\#$ podemos definir :

$$\phi^* : G^q(X';f) \longrightarrow G^q(X;f)$$

haciendo $\qquad \phi^*([h]) = [\phi^\#(h)]$.

Igualmente puede repetirse el proceso para pares propios y cohomología relativa.

Conviene notar que no entra en juego la estructura esqueletal de X ni la de X'.

2 - Sea ahora $\Psi: X \longrightarrow X'$ una aplicación propia y celular. Para cada n, podemos definir la siguiente aplicación propia de pares propios:

$$\Psi_n : (X_n, X_{n-1}) \longrightarrow (X_n', X_{n-1}')$$

restringiendo el dominio de Ψ al n-esqueleto de X.

Repitiendo el proceso de (1) con Ψ_n obtenemos:

$$(\Psi_n)_*^1 : H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow H_n(X_n', X_{n-1}')$$

$$(\Psi_n)_*^2 : J_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow J_n(X_n', X_{n-1}')$$

Denotando $\Psi_\#^1$ a $(\Psi_n)_*^1$ y $\Psi_\#^2$ a $(\Psi_n)_*^2$ es inmediato comprobar que $\Psi_\# = (\Psi_\#^1, \Psi_\#^2) : SC_*(|X|) \longrightarrow SC_*(|X'|)$ es un morfismo de cadenas.

Aplicando ahora el functor $Hom(-;f)$ obtenemos el morfismo de cocadenas:

$$\Psi^\# = Hom(\Psi_\#;f) : SC^*(|X'|;f) \longrightarrow SC^*(|X|;f)$$

y a través de él:

$$\Psi^* : G^n(X';f) \longrightarrow G^n(X;f)$$

En este caso, todo lo anterior plantea el siguiente problema:

Dada una aplicación $\psi : X \longrightarrow X'$ propia y celular, si denotamos ψ^* a la aplicación inducida por ψ en la cohomologia G cuando se considera en X y X' su estructura celular (2) y ϕ^* a la inducida cuando X y X' se consideran solamente como espacios topológicos (1). ¿Cuándo $\phi^* = \psi^*$? ó más precisamente ¿Cuando es conmutativo el siguiente diagrama?

$$\begin{array}{ccc} G^n(|X|;f) & \equiv & G^n(X;f) \\ \uparrow \psi^* & & \uparrow \phi^* \\ G^n(|X'|;f) & \equiv & G^n(X';f) \end{array} \qquad (1)$$

$G^n(|X|;f)$ denotá el grupo de cohomología G inducido a través de la estructura esqueletal.

La respuesta es:

Proposición 1.- El diagrama (1) es conmutativo.

Demostración.- Podemos formar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S(|X|) \arrow[rr, "|1|"] \arrow[dr, "\Psi^1_\#"] \arrow[dd, "I_1"'] & & C(|X|) \arrow[dr, "\Psi^2_*"] \arrow[dd, "I_2"'] & \\
& S(|X'|) \arrow[rr, "|1'|"] \arrow[dd, "I'_1"] & & C(|X'|) \arrow[dd, "I'_2"] \\
S(|X|) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\Phi^1_\#"'] & & C(|X|) \arrow[dr, "\Phi^2_\#"'] & \\
& S(|X'|) \arrow[rr, "1'"] & & C(|X'|)
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
S(|X|) \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi_\#^1"'] & & C(|X|) \arrow[dr, "\Psi_\#^2"] & \\
& S(|X'|) \arrow[rr] & & C(|X'|)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
S(|X|) \arrow[r] \arrow[dr, "\phi_*^1"'] & C(|X|) \arrow[dr, "\phi_*^2"] & \\
& S(|X'|) \arrow[r] & C(|X'|)
\end{tikzcd}$$

son conmutativos, pues $\Psi_* = (\Psi_*^1, \Psi_*^2)$ y $\phi_* = (\phi_*^1, \phi_*^2)$ son morfismos de cadenas.

Los morfismos $I = (I_1, I_2)$ e $I' = (I_1', I_2')$

$$I: SC(|X|) \longrightarrow SC(|X|)$$

$$I': SC(|X'|) \longrightarrow SC(|X'|)$$

son equivalencias de homotopía. (cápitulo II, párrafo 5).

Además [M] [W.G.2], el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía.

$$\begin{tikzcd}
S(|X|) \arrow[r, "\Psi_\#^1"] \arrow[d, "I_1"] & S(|X'|) \arrow[d, "I_1'"] \\
S(X) \arrow[r, "\phi_\#^1"] & S(X')
\end{tikzcd}$$

Por [E-H-R] el siguiente cuadrado es asímismo conmutativo salvo homotopía

$$\begin{tikzcd}
C(|X|) \arrow[r, "\Psi_\#^2"] \arrow[d, "I_2"] & C(|X'|) \arrow[d, "I_2'"] \\
C(X) \arrow[r, "\phi_*^2"] & C(X')
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el cubo del principio de la demostración es conmutativo salvo homotopía y de ello se sigue el resultado buscado $\#$

3.- Consideramos ahora ψ celular, propia y solvente. Además de las dos anteriores maneras de inducir morfismos en cohomología consideramos la inducida a través del portador minimal $\{E_\sigma\}$ de ψ.

Se observa fácilmente que la manera de inducir $\psi_\#$ (considerando sólo a ψ como aplicación propia y celular) está asociada al portador minimal.

En efecto, sea σ un generador "no compacto" de $C_n(|X|)$ y $h: I^{n-1} \times J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo. Recordemos que $\psi(\sigma) \subset E_\sigma$ y notemos que $C_n(|E_\sigma|) \longrightarrow C_n(|X|)$ es el monomorfismo inclusión. Como $C_n(|\sigma|) = J_n(\sigma, \partial\sigma)$ es un sumando directo de $C_n(|X|)$ podemos formar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(|X|) & \xrightarrow{\psi_\#^2} & C_n(|X'|) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_n(|\sigma|) & \xrightarrow{(\psi|_\sigma)_\#^2} & C_n(|E_\sigma|) \end{array}$$

luego $\psi_\#^2(\sigma) = \sum t_i \eta_i$, donde η_i son generadores de $C_n(|E_\sigma|)$ y t_i son números enteros.

Análogamente si σ es generador de $S_n(|X|)$.

Se sigue de lo anterior que $\psi_\# = \eta_\#$, siendo $\eta_\#$ el morfismo inducido en las cadenas cuando se considera ψ como una aplicación propia, celular y solvente.

<u>Conclusión</u>.- Si X y X' son complejos cúbicos propios finitos y $\phi: X \longrightarrow X'$ una aplicación celular, propia y solvente, los morfismos inducidos por ϕ en cohomología G^* de cualquiera de las formas descritas en este capítulo son el mismo.

CAPITULO IV

EXTENSION DE APLICACIONES PROPIAS

En este capítulo y en los siguientes (X,A) denotará un par de complejos cúbicos propios finitos X_n denotará el n-esqueleto de X y $\overline{X}_n$ denotará $A \cup X_n$. Y será un espacio topológico arco-conexo con un único final propio.

El problema que nos planteamos es el siguiente: Dada una aplicación propia $f: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ $(n \geq 2)$ ¿Bajo qué condiciones puede extenderse f propiamente a $\overline{X}_{n+1}$?. Para resolverlo, asociaremos a f una cocadena de $\mathrm{Hom}(SC_{n+1}(|X,A|); \varphi_n(Y))$ (donde $\varphi_n(Y)$ es el elemento de Morf Ab, $\varphi_n(Y): \pi_n(Y) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y))$ y demostraremos que cuando esta cocadena es 0, f puede extenderse.

En el párrafo 1, demostramos que toda aplicación propia $g: A \longrightarrow Y$ admite una extensión hasta $\overline{X}_1$, y si $\pi_1(Y) = 0$ la admite hasta $\overline{X}_2$

En el párrafo 2, definimos la cocadena mencionada y nos dedicamos a estudiar sus propiedades. Demostramos que es un cociclo.

En el párrafo 3 estudiamos la acción de una aplicación propia, celular y solvente sobre el cociclo definido en el párrafo anterior.

Como consecuencia, dada una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$, si puede extenderse propiamente a $\overline{X}_2$, tenemos un método para saber si puede hacerlo a todo X, se trata de estudiar las cocadenas (obstrucciones) que se pueden asociar a las sucesivas extensiones de f.

Utilizaremos el funtor aditivo contravariante Hom(-;G) en dos categorías, a saber: Ab y Morf Ab. En el primer caso G será $\pi_n(Y)$ o bien $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$, en el segundo G será el homomorfismo $\varphi_n(Y)$.

1.- Indice de extensión propia

__**Definición 1**__.- Dado $n \in \mathbb{Z}$, una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$ se dice n-extensible propiamente sobre X, sii existe una aplicación propia $g: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ de tal manera que f es la restricción de g a A.

Diremos que g es una n-extensión propia de f y la denotaremos f_n.

__**Proposición 2**__.- Toda aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$ es 1-extensible propiamente sobre X.

__Demostración__.- Sea $\alpha: J \longrightarrow Y$ un representante del final de Y e $y_0 = \alpha(0)$.

Para cada $x \in A$ definimos $g(x) = f(x)$.

Para cada vértice v de $X \setminus A$ definimos $g(v) = y_0$.

Sea σ un 1-cubo compacto que no esté en A, $h: I \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo, v_1 y v_2 los vértices de σ y $\beta: I \longrightarrow Y$ un camino que une $g(v_1)$ y $g(v_2)$ Para un punto cualquiera x de σ definimos

$$g(x) = \beta \circ h^{-1}(x)$$

Sea ahora σ un 1-cubo no compacto, $h: J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo , v el vértice de σ y $\beta: I \longrightarrow Y$ el camino que une $g(v)$ con $\alpha(0)$.

Definimos la aplicación propia:

$$\varphi: J \longrightarrow Y \quad \text{por}$$

$$\varphi(t) = \beta(t) \qquad \text{si } 0 \le t \le 1$$

$$\varphi(t) = \alpha(t-1) \qquad \text{si } t \ge 1$$

Para un punto cualquiera x de σ definimos

$$g(x) = \varphi \circ h^{-1}(x)$$

Entonces g es una aplicación propia definida en todo $\overline{X}_1$.#

Definición 3.- Llamaremos índice de extensión propia de una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$ al supremo de los $n \in \mathbb{N}$ para los que f es n-extensible propiamente.

Es claro que el índice de extensión propia siempre existe.

Proposición 4.- Dos aplicaciones propias $f,g: A \longrightarrow Y$ homótopas propiamente, tienen el mismo índice de extensión propia.

<u>Demostración</u>.- Sea $\varphi: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ una n-extensión propia de f y $F: A \times I \longrightarrow Y$ una homotopía propia entre f y g. Por ser

A un subcomplejo del complejo cúbico propio finito $\bar{X}_n$, tiene la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia (Teorema I-1-17), y por lo tanto F se extiende a una homotopía propia

$$H: \bar{X} \times I \longrightarrow Y$$

tal que $\quad H|_{A\times I} = F \quad$ y $\quad H|_{\bar{X}_n\times 0} = \varphi$

Definiendo $\quad \psi: X_n \longrightarrow Y$

por $\quad \psi(x) = H(x,1) \quad$ para cada $x \in \bar{X}_n$

obtenemos una n-extensión propia de g. #

Proposición 5.- Sea Y e Y' dos espacio topológicos arco-conexos y con un sólo final propio, (X',A') y (X,A) dos pares de complejos cúbicos propios finitos, $h: Y \longrightarrow Y'$ una aplicación propia y $g: (X',A') \longrightarrow (X,A)$ una aplicación celular propia. Si $f: A \longrightarrow Y$ es una aplicación propia n-extensible propiamente sobre X, entonces la aplicación propia $f' = h \circ f \circ g: A' \longrightarrow Y'$ es también n-extensible propiamente sobre X'.

Demostración : Sea $\varphi: \bar{X}_n \longrightarrow Y$ una n-extensión propia de f, por ser g celular, $g(\bar{X}_n') \subset \bar{X}_n$.

La aplicación $\quad \psi = h \circ \varphi \circ g|_{\bar{X}_n'}: \bar{X}_n' \longrightarrow Y$

nos proporciona una n-extensión propia de f'. #

Corolario 6.- Si (X,A) es un par de complejos cúbicos propios finitos, el índice de extensión propia del par no depende de la estructura del complejo cúbico propio finito del par.

La demostración es inmediata aplicanco el Teorema de aproximación celular [I.1.19] y las proposiciones 4 y 5

<u>Proposición 7</u>.- Sea $f\colon A \longrightarrow Y$ una aplicación propia. Si $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$ entonces f es 2-extensible propiamente.

<u>Demostración</u> - Sea f_1 una 1-extensión propia de f, σ un 2-cubo no compacto de X y $h\colon I\times J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo. Notemos que las aplicaciones propias:

$$h_0 = f_1\circ h \,|_{I\times\{0\}\cup\{0\}\times J}\colon I\times\{0\}\cup\{0\}\times J \longrightarrow Y$$

y $$h_1 = f_1\circ h \,|_{\{1\}\times J}\colon \{1\}\times J \longrightarrow Y$$

son dos representantes del final propio de Y; es más, podemos considerar ambos como representantes de dos elementos x_0 y x_1 de $\underline{\underline{I}}_0(Y)$.

De la sucesión exacta que conecta los grupos de homotopía propia π_*, $\underline{\underline{I}}_*$ y $\underline{\underline{\Pi}}_*$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(Y) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_0(Y) \longrightarrow$$

como $\pi_1(Y) = 0$ y $\underline{\underline{\Pi}}_0(Y) = 0$ (Y tiene un único final propio), se sigue que $\underline{\underline{I}}_0(Y) = 0$, luego $x_0 = x_1$ y por lo tanto $f_1\circ h|_{\partial(I\times J)}$ se extiende propiamente a una aplicación

$$H\colon I\times J \longrightarrow X$$

Definimos para cada $x \in \sigma$

$$f_2(x) = H\circ h^{-1}(x)$$

Sea ahora σ un 2-cubo compacto y $h: I^2 \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo

La aplicación $h_1 = f_1 \circ h \mid_{\partial I^2}: \partial I^2 \longrightarrow Y$ representa un elemento $x_1 \in \pi_1(Y) = 0$, por tanto existe una aplicación $H: I^2 \longrightarrow Y$ tal que $H|_{\partial I^2} = h_1$

Para cada $x \in \sigma$ definimos

$$f_2(x) = H \circ h^{-1}(x)$$

Con lo anterior hemos obtenido una extensión propia de f a $\overline{X}_2$. #

Notemos que por tener Y un sólo final propio, f es siempre 2-extensible al subcomplejo U de X determinado por todos los cubos no compactos. En efecto, sea σ un 2-cubo no compacto y $h: I \times J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo.

Las aplicaciones propias

$$h_0 = f_1 \circ h|_{\{0\} \times J}: \{0\} \times J \longrightarrow Y$$

y

$$h_1 = f_1 \circ h|_{\{1\} \times J}: \{1\} \times J \longrightarrow Y$$

son dos representantes del final propio de Y, luego existe una homotopía propia $H: I \times J \longrightarrow Y$ de tal manera que $H(0,t) = h_0(t)$ y $H(1,t) = h_1(t)$ para cada $t \in J$.

Definiendo ahora $f_2(x) = H \circ h^{-1}(x)$ para cada $x \in \sigma$ obtenemos una 2-extensión al subcomplejo U.

Esta aplicación puede no ser compatible con $f_1: \overline{X}_1 \longrightarrow Y$ pues $f_1|_{h(I \times 0)}$ puede no coincidir con $f_2|_{\dot{h}(I \times 0)}$. Ahora bien la aplicación $\beta: I \longrightarrow Y$ definida por

$$\beta(t) = f_1 \circ h|_{I\times\{0\}}\ (2t) \qquad \text{si } 0 \le t \le 1/2$$
$$\beta(t) = f_2 \circ h|_{I\times\{0\}}\ (2-2t) \qquad \text{si } 1/2 \le t \le 1$$

representa un elemento de $\pi_1(Y)$. Si este elemento no es 0 las aplicaciones no son compatibles, si es cero sí lo son. Cuando $\pi_1(Y) = 0$ garantizamos la compatibilidad y la 2-extensibilidad de f.

2.- Cociclo Obstrución

En este párrafo y en los siguientes Y es un espacio topólogico que además de tener un sólo final propio y ser arco-conexo es (π)n-simple y $(\tau)(n-1)$ simple. $(n\geq 2)$

Estas condiciones para Y garantizan (ver [Hu.4.IV.16] y [I.2.3]) que

$$\pi_n(Y, y_0) \cong \pi_n(Y) \qquad \text{para cada } y_0 \in Y$$

y $\qquad \tau_{n-1}(Y,\alpha) \cong \underline{\tau}_{n-1}(Y) \qquad$ para cada representate α

del final propio de Y.

$\pi_n(Y)$ denota las n-esferas libres de Y salvo homotopía y $\underline{\tau}_{n-1}(Y)$ es el conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones propias

$$g: \partial(I^n \times J) \longrightarrow Y$$

bajo la relación de homotopía propia [I.2]

Consideramos la teoría de cohomología definida en [II.4] con coeficientes en el homomorfismo de grupos.

$$\varphi_n: \pi_n(Y) \longrightarrow \underline{\tau}_{n-1}(Y) \quad [I.2].$$

A este objeto de Morf Ab lo denotamos por $\varphi_n(Y)$ o simplemente por φ_n.

Notemos que las hipotesis sobre Y garantizan que $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$ es abeliano incluso para $n = 2$.

En II.5 garantizamos que los complejos de cadenas $SC_*(|X,A|)$ y $SC_*(X,A)$ son homotópicamente equivalentes. Como $Hom(-;\varphi_n(Y))$ es un fuctor aditivo, $Hom(SC_*(|X,A|);\varphi_n(Y))$ y $Hom(SC_*(X,A);\varphi_n(Y))$ son homotópicamente equivalentes.

Por otra parte, recordemos que

$$SC_n(|X,A|) = 1_n: H_n(\bar{X}_n,\bar{X}_{n-1}) \longrightarrow J_n(\bar{X}_n,\bar{X}_{n-1})$$

$J_n(\bar{X}_n,\bar{X}_{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por todos los n-cubos de X que no están en A, $H_n(\bar{X}_n,\bar{X}_{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por los n-cubos compactos de X que no están en A y 1_n es el monomorfismo inclusión.

Consideramos la aplicación propia

$$f: \bar{X}_n \longrightarrow Y$$

Esta aplicación determina una (n+1)-cadena $SC^{n+1}(f) = (S^{n+1}(f), C^{n+1}(f))$ de $Hom(SC_{n+1}(|X,A|);\varphi_n(Y))$ del modo siguiente:

$$S^{n+1}(f): H_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\bar{X}_n) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

esta definida por $S^{n+1}(f)(\sigma) = (f|_{\dot{\sigma}})_* \circ \partial \circ \rho_\pi^{-1}(\sigma)$

donde 1) $\rho_\pi^{-1}: H_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \longrightarrow \pi_n(\sigma,\dot{\sigma},*)$ es el inverso del isomorfismo de Hurewicz

2) $\partial : \pi_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma},*) \longrightarrow \pi_n(\dot{\sigma},*)$ es el operador borde

de la sucesión exacta de grupos de homotopía π asociada al par $(\sigma,\dot{\sigma})$.

3) $(f|_{\dot{\sigma}})_*: \pi_n(\dot{\sigma},*) \longrightarrow \pi_n(Y,f(*)) \equiv \pi_n(Y)$

es el homomorfismo inducido por $f|_{\dot{\sigma}}$ en los grupos de homotopía π_n.

Notemos que aunque elijamos otro punto $*' \in \dot{\sigma}$, el elemento $S^{n+1}(f)(\sigma)$ que obtenemos en $\pi_n(Y)$ es el mismo, pues Y es (π)n-simple.

$$C^{n+1}(f): J_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\bar{X}_n) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$$

está definida por:

si σ es un n-cubo compacto $C^{n+1}(f)(\sigma) = \varphi_n(S^{n+1}(f)(\sigma))$

si σ es un n-cubo no compacto $C^{n+1}(f)(\sigma) = (f|_{\dot{\sigma}})_* \circ \partial \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}^{-1}(\sigma)$

donde 1) $\rho_{\underline{\underline{I}}}^{-1}: J_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(\sigma,\dot{\sigma},\alpha)$ es el inverso del isomorfismo de tipo Hurewicz [ver I.4].(α es un rayo base en σ)

2) $\partial : \underline{\underline{I}}_n(\sigma,\dot{\sigma},\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma},\alpha)$ es el operador borde de la sucesión exacta de grupos de homotopía $\underline{\underline{I}}$ asociada al par propio $(\sigma,\dot{\sigma})$.

3) $(f|_{\dot{\sigma}})_*: \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma},\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y,f\circ\alpha) \equiv \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$

es el homomorfismo inducido por $(f|_{\dot{\sigma}})$ en los grupos de homotopía propia $\underline{\underline{I}}$.

Notemos que, como antes, aunque elijamos otro rayo α' en $\dot{\sigma}$, el elemento $C^{n+1}(f)(\sigma)$ que obtenemos en $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$ es el mismo, pues Y es $(\underline{\underline{I}})$(n-1)-simple.

Definición 1.- Llamaremos cocadena obstrucción propia (n+1)-dimensional de f a la cocadena $SC^{n+1}(f)$.

Suponemos ahora $f: \overline{X}_1 \longrightarrow Y$. Si Y es (π)1-simple, entonces $\pi_1(Y)$ es un grupo abeliano, como además $\underline{\underline{\pi}}_0(Y) = 0$, de la sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_1(Y) \longrightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{\varphi} \underline{\underline{I}}_0(Y) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_0(Y) = 0$$

se sigue que $\underline{\underline{I}}_0(Y)$ es biyectivo con un grupo abeliano. Entonces $\pi_1(Y)$ y $\underline{\underline{I}}_0(Y)$ son grupos abelianos y, si Y es $(\underline{\underline{I}})$0-simple, podemos definir $SC^2(f)$.

Para $n \geq 2$, si los conjuntos $\pi_0(\overline{X}_{n+1})$, $\pi_0(\overline{X}_n)$, $\underline{\underline{I}}_0(\overline{X}_{n+1})$ y $\underline{\underline{I}}_0(\overline{X}_n)$ son triviales y además el par propio $(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$ es (π) n-conexo y $(\underline{\underline{I}})$(n-1) conexo, podemos definir "globlalmente" la cocadena obstrucción como sigue:

Notemos, en primer lugar, que las condiciones sobre $\overline{X}_{n+1}$, y $\overline{X}_n$ garantizan [Teorema I.4.1.] la existencia de los epimorfismos de tipo Hurewicz:

$$\rho_\pi: \pi_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n, \alpha(0)) \longrightarrow H_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$$

$$\rho_{\underline{\underline{I}}}: \underline{\underline{I}}_n(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n, \alpha) \longrightarrow J_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$$

donde α es un rayo base cualquiera en $\overline{X}_n$.

Entonces definimos

$$S: H_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n) \xleftarrow{\rho_\pi} \pi_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n, \alpha(0)) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\overline{X}_n, \alpha(0)) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y)$$

$$C: J_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n) \xleftarrow{\rho_{\underline{\underline{I}}}} \underline{\underline{I}}_n(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_{n-1}(\overline{X}_n, \alpha) \xrightarrow{f_*} \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$$

$$S = f_* \circ \partial \circ \rho_\pi^{-1} \quad \text{y} \quad C = f_* \circ \partial \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}^{-1}$$

C está bien definida pues $f_* \circ \partial$ anula $\ker \rho_{\underline{\underline{I}}}$. En efecto, sea b un generador de $\ker \rho_{\underline{\underline{I}}}$, $b = x - gx$ donde $x \in \underline{\underline{I}}_n(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$, $g \in \underline{\underline{\pi}}_1(\overline{X}_n)$ y $g.x$ indica la acción de g en x (Teorema I.4.1.).

Entonces

$$f_* \circ \partial(b) = f_* \circ \partial(x-gx) = f_*(\partial x-\partial(gx)) = f_*(\partial x-g(\partial x)) =$$
$$= f_*(\partial x) - f_*\, g(\partial x)) = f_*(\partial x) - f_*(g) \cdot f_*(\partial x).$$

Como $f_*(g) \in \underline{\underline{\pi}}_1(Y)$ y éste actúa trivialmente en $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$ se sigue que $f_* \circ \partial(b) = 0$

Análogamente se comprueba que S está bien definida.

Proposición 2.- Si los conjuntos $\pi_0(\overline{X}_{n+1})$, $\pi_0(\overline{X}_n)$, $\underline{\underline{I}}_0(\overline{X}_{n+1})$, $\underline{\underline{I}}_0(\overline{X}_n)$ son triviales, y el par propio $(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$ es (π) n-conexo y $(\underline{\underline{I}})$ (n-1)-conexo, entonces, para $n \geq 2$

$$C^{n+1}(f) = C \qquad \text{y} \qquad S^{n+1}(f) = S$$

Demostración.- C, $C^{n+1}(f) : J_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$

Vamos a comprobar que $C(\sigma) = C^{n+1}(f)(\sigma)$ para cada (n+1)-cubo de $J_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$.

En primer lugar suponemos que σ es no compacto. Consideramos entonces el diagrama conmutativo [ver I.4]

$$\begin{tikzcd}
C: \; J_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n) & \underline{\underline{I}}_n(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n,\alpha) \arrow[l, "p_{\underline{\underline{I}}}"'] \arrow[r, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\overline{X}_n,\alpha) \arrow[r, "f_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) \\
C^{n+1}(f)(\sigma): J_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \arrow[u] & \underline{\underline{I}}_n(\sigma,\dot{\sigma},\alpha) \arrow[l, "p_{\underline{\underline{I}}}"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[u] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma},\alpha) \arrow[u] \arrow[ur, "(f|_{\dot{\sigma}})_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$J_{n+1}(\sigma,\sigma)$ es un sumando directo de $J_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n)$ luego $C(\sigma) = C^{n+1}(f)(\sigma)$.

Suponemos ahora que σ es compacto. Ahora consideramos el siguiente diagrama conmutativo [ver I.4]:

$$\begin{tikzcd}
C: J_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n) & \underline{\underline{I}}_n(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n,\alpha) \arrow[l, "p_I"'] \arrow[r, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\overline{X}_n,\alpha) \arrow[r, "f_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) \\
S: H_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n) \arrow[u] & \pi_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n,\alpha(0)) \arrow[l, "p_\pi"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "\varphi_\alpha"'] & \pi_n(\overline{X}_n,\alpha(0)) \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "\varphi_\alpha"'] & \pi_n(Y) \arrow[u, "\varphi"'] \\
S^{n+1}(f)(\sigma): H_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \arrow[u] & \pi_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma},\alpha(0)) \arrow[l, "p_\pi"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[u] & \pi_n(\dot{\sigma},\alpha(0)) \arrow[u] \arrow[ur, "(f|_{\dot{\sigma}})_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$H_{n+1}(\sigma,\sigma)$ es un sumando sumando directo de $J_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n)$, luego

$$C(\sigma) = \varphi\, S(\sigma) = \varphi\, S^{n+1}(f)(\sigma) = C^{n+1}(f)(\sigma).$$

Como consecuencia $(S.C) = SC^{n+1}(f)$. #

Optamos por la definición cubo a cubo (local) de la cocadena obstrucción para evitar restringir la categoría de los complejos cúbicos propios finitos a la de aquellos que sólo tienen un final propio. En efecto, de la sucesión exacta que conecta los grupos de homotopía propia π, $\underline{\underline{\pi}}$ y $\underline{\underline{I}}$.

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\overline{X}_n) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(\overline{X}_n) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_0(\overline{X}_n) \longrightarrow \pi_0(\overline{X}_n)$$

se sigue que $\underline{\underline{\pi}}_0(\overline{X}_n) = 0$, luego $\overline{X}_n$ sólo tiene un final propio y como $n \geq 2$, X sólo tiene un final propio.

No obstante, tendremos en cuenta que, en las hipótesis de la proposición es posible definir "globlamente" la cocadena obstrucción, y lo utilizaremos más adelante.

Volvemos al caso general $(f:\overline{X}_n \longrightarrow Y)$. Sea σ un $(n-1)$-cubo no compacto que no está en A y sea $h:(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (\sigma, \partial\sigma)$ un homeomorfismo.

Podemos considerar la aplicación propia:

$$g = (f|_{\partial\sigma}) \circ h|_{\partial(I^n \times J)} : \partial(I^n \times J) \longrightarrow Y$$

g representa un elemento de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$ [I.2], precisamente $C^{n+1}(f)(\sigma)$. Es decir $C^{n+1}(f)(\sigma) = [f|_{\partial\sigma}]$.

Notemos que si g representa el elemento 0 de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$, existe una extensión propia de g a $I^n \times J$, g_1 [Ri IV.3.9]. Considerando $g_1 \circ h^{-1}$ obtenemos una extensión propia de f a σ. Igualmente ocurre con los (n+1)-cubos compactos, pero estos ahora determinan elementos de $\pi_n(Y)$, y también

$$S^{n+1}(f)(\sigma) = [f|_{\partial\sigma}]$$

y si $f|_{\partial\sigma}$ representa al elemento cero de $\pi_n(Y)$, f puede extenderse propiamente a σ. Por lo tanto:

Teorema 3.- La aplicación propia $f: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ tiene una extensión propia sobre $\overline{X}_{n+1}$, si y sólo si $SC^{n+1}(f) = 0$.

Si $\overline{X}_{n+1}$ tuviese infinitos cubos, no podríamos garantizar que la extensión fuese propia.

Teorema 3.- $SC^{n+1}(f)$ es un cociclo de $SC^{n+1}(|X,A|; \varphi_n(Y))$. Lo llamaremos cociclo obstrucción propia (n+1)-dimensional de f.

Demostración.- $\delta(SC^{n+1}(f)) = (\delta(S^{n+1}(f)), \delta C^{n+1}(f))$

$$\delta S^{n+1}(f) = 0$$

(La demostración es análoga a la efectuada en [Hu 4,VI.3.1])

Comprobaremos ahora que $\delta C^{n+1}(f) = 0$.

Sea σ un generador "compacto" de $J_{n+2}(\overline{X}_{n+2}, \overline{X}_{n+1})$

$\delta(C^{n+1}(f)(\sigma)) = C^{n+1}(f)(\partial\sigma) = \varphi S^{n+1}(f)(\partial\sigma) = \varphi(\delta S^{n+1}(f)(\sigma)) =$
$= \varphi(0) = 0$.

Sea ahora σ un generador no compacto de $J_{n+2}(\overline{X}_{n+2}, \overline{X}_{n+1})$. Podemos considerar σ como un complejo cúbico propio finito $(n+2)$-dimensional. $\dot{\sigma}$ denotará el $(n+1)$-esqueleto de σ y $\ddot{\sigma}$ el n-esqueleto. Consideramos el diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
J_{n+2}(\sigma, \dot{\sigma}) \arrow[d, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n+1}(\sigma, \dot{\sigma}, \alpha) \arrow[l, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"'] \arrow[d, "\partial"] & & \\
J_{n+1}(\dot{\sigma}) \arrow[d, "j_*"] & \underline{\underline{I}}_n(\dot{\sigma}) \arrow[l, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"'] \arrow[d, "j_*"] \arrow[dr, "0"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(1)"] & & \\
H : J_{n+1}(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) & \underline{\underline{I}}_n(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \alpha) \arrow[l, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"'] \arrow[r, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\ddot{\sigma}, \alpha) \arrow[r, "f_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

α es un rayo base en σ, $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ denotan homomorfismos de tipo Hurewicz. j_* son homomorfismos inducidos por la inclusión en las sucesiones exactas del par $(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$.

En (1) $\partial \circ j_* = 0$, pues son dos homomorfismos seguidos de la ($\underline{\underline{I}}$) sucesión exacta asociada al par propio $(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$.

El homomorfismo de grupos :

$$H = f_* \circ \partial \circ \rho^{-1} : J_{n+1}(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$$

está bien definido. (Estamos en las condiciones de la proposición 2). Además $H(\eta) = C^{n+1}(f)(\eta)$ para cada $(n+1)$-cubo η de $\dot{\sigma}$.

Notemos que dado $x \in J_{n+2}(\sigma, \dot{\sigma})$ se verifica

$$H \circ j_* \circ \partial(x) = f_* \circ \partial \circ j_* \circ \partial \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}^{-1}(x) = 0$$

Además $\quad H \circ j_* \circ \partial(x) = \delta H(x) = \delta C^{n+1}(f)(x) \qquad \#$

Teorema 4.- Si $g_0, g_1 : \overline{X}_n \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones propias, homótopas propiamente. Entonces

$$SC^{n+1}(g_0) = SC^{n+1}(g_1)$$

Demostración .- Sea, σ un generador no compacto de $J_{n+1}(\overline{X}_{n+1}, \overline{X}_n)$

$$C^{n+1}(g_0)(\sigma) = (g_{0|\dot{\sigma}})_* \circ \partial \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}(\sigma)$$

$$C^{n+1}(g_1)(\sigma) = (g_{1|\dot{\sigma}})_* \circ \partial \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}(\sigma)$$

Vamos a comprobar que $(g_{0|\dot{\sigma}})_* = (g_{1|\dot{\sigma}})_*$

$$(g_{0|\dot{\sigma}})_* : \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma}, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y, g_0(\alpha))$$

$$(g_{1|\dot{\sigma}})_* : \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma}, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y, g_1(\alpha))$$

Como Y solo tiene un final propio $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y, g_0(\alpha)) \equiv \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y, g_1(\alpha))$. Además $\underline{\underline{\pi}}_1(Y, \beta)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y, \beta)$ para todo β rayo en Y, por lo tanto en $\underline{\underline{I}}_n(Y)$. Las aplicaciones

$$f_0 \text{ y } f_1 : \partial(I^n \times J) \longrightarrow Y$$

representan el mismo elemento si son homótopas propiamente (sin necesidad de ser relativa la homotopía). Como g_0 y g_1 son homótopas propiamente, $g_0|_{\dot{\sigma}}$ y $g_1|_{\dot{\sigma}}$ también lo son, luego

$$(g_0|_{\dot{\sigma}})_* = (g_1|_{\dot{\sigma}})_* : \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma}) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y).$$

Recordando que $\pi_1(Y, y_0)$ actúa trivialmente en $\pi_n(Y, y_0)$ para todo $y_0 \in Y$ y repitiendo el mismo proceso con los grupos de homotopía π_n, obtenemos

$$SC^{n+1}(g_0) = SC^{n+1}(g_1)$$

3.- Acción de una aplicación propia celular y solvente en $SC^{n+1}(f)$.

En este párrafo vamos a considerar la siguiente situación
ϕ: $(X,A) \longrightarrow (X',A')$ es una aplicación propia, celular y solvente entre dos pares de complejos cúbicos propios finitos.
$f': A' \longrightarrow Y$ una aplicación propia que posee una n-extensión propia $f_n': \overline{X}_n \longrightarrow Y$. De aqui se sigue que la aplicación $f = f' \circ \phi|_A$ es también n-extensible propiamente, y una n-extensión propia viene dada por $f_n = f_n' \circ \phi|_{\overline{X}_n}$. Podemos construir $SC^{n+1}(f_n')$ y $SC^{n+1}(f_n)$. Vamos a estudiar como están relacionadas estos dos cociclos.

Por ser ϕ solvente, su portador minimal es lleno y por lo tanto ϕ induce un único homomorfismo de cadenas definido a través de este portador, además es el mismo que el que se induce considerando a ϕ como aplicación celular [Cap.III]. Por lo tanto, existe un único morfismo de cocadenas
$\phi^{\#}$: Hom $(SC_*(|X',A'|); \varphi_n(Y)) \longrightarrow$ Hom $(SC_*(|X,A|); \varphi_n(Y))$.
En estas circunstancias, se verifica

__Teorema 1__.- $SC^{n+1}(f_n) = \phi^{\#}(SC^{n+1}(f_n'))$

Demostración.-
$\phi^{\#}(SC^{n+1}(f_n')) = SC^{n+1}(f_n') \circ \phi_{\#} = (S^{n+1}(f_n') \circ \phi_{\#}^1, C^{n+1}(f_n') \circ \phi_{\#}^2)$
bastará demostrar que se verifica:

1.- $S^{n+1}(f_n') \circ \phi_{\#}^1 = S^{n+1}(f_n)$

y $\qquad$ 2.- $C^{n+1}(f_n') \circ \phi_*^2 = C^{n+1}(f_n)$

1.- Sea σ un generador de $H_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n)$. El subcomplejo correspondiente a σ en el portador minimal $\{E_\sigma\}$ de ϕ es de dimensión $(n+1)$ (pues ϕ es celular).

Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
S^{n+1}(f_n)(\sigma): H_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \arrow[r, "\rho_n^{-1}"] \arrow[d, "\phi_*^1"] & \pi_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma},\sigma_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi_*^1"] & \pi_n(\dot{\sigma},\sigma_0) \arrow[r, "(f_n|\dot{\sigma})_*"] \arrow[d, "\phi_*^1"] & \pi_n(Y) \\
K: H_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^n) \arrow[r, "\rho_n^{-1}"] & \pi_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^n,\phi(\sigma_0)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(E_\sigma^n,\phi(\sigma_0)) \arrow[ur, "(f_n'|E_\sigma^n)_*"] & \\
S^{n+1}(f_n)(\eta_i): H_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i) \arrow[r, "\rho_n^{-1}"] \arrow[u, "i_*"] & \pi_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i,\eta_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "i_*"] & \pi_n(\dot{\eta}_i,\eta_0) \arrow[u, "i_*"] \arrow[uur, "(f_n'|\dot{\eta}_i)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

σ_0 y η_0 son puntos de σ y η_i respectivamente.

η_i es un $(n+1)$-cubo compacto del subcomplejo portador de σ, E_σ.

Luego $H_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i)$ es un sumando directo de $H_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^n)$.

$$\phi_*^1 : H_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \longrightarrow H_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^n)$$

es una aplicación inducida en las homologías (es en realidad una ϕ_*) $\quad \phi_*^1(\sigma) = \Sigma\, \eta_i \quad$ (suma finita)

Sea $k = (f'|_{E_\sigma^n})_* \circ \partial \circ \rho_n^{-1} : H_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^n) \longrightarrow \pi_n(Y)$

Entonces:

$$S^{n+1}(f_n)(\sigma) = k \circ \phi_*^1(\sigma) = k(\Sigma\,\eta_i) = \Sigma\, k(\eta_i) = \Sigma\, \delta^{n+1}(f_n')(\eta_i) =$$
$$= S^{n+1}(f_n')(\Sigma\,\eta_i) = S^{n+1}(f_n')(\phi_*^1(\sigma))$$

luego $S^{n+1}(f_n)(\sigma) = S^{n+1}(f_n') \circ \phi_*^1$

2.- a) Sea σ un "generador compacto" de $J_{n+1}(\overline{X}_{n+1},\overline{X}_n)$. Debido a la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\bar{X}_n) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\Phi^1_\#"] & & J_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\bar{X}_n) \arrow[dr, "\Phi^2_\#"] & \\
& H_{n+1}(\bar{X}'_{n+1},\bar{X}_n') \arrow[rr, "1'"] & & J_{n+1}(\bar{X}'_{n+1},\bar{X}_n')
\end{tikzcd}$$

obtenemos

$$C^{n+1}(f_n')\circ\phi_\#^2(\sigma)=\varphi(S^{n+1}(f_n'))\circ\phi_\#^1(1^{-1}(\sigma))=\varphi\circ S^{n+1}(f_n)(1^{-1}(\sigma)) =$$
$$= C^{n+1}(f_n)(\sigma)$$

b) Sea σ un generador no compacto de $J_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\bar{X}_n)$.
El subcomplejo portador de σ, E_σ es del mismo tipo de homotopía que J, y tiene por lo tanto un solo final propio que denotaremos por b, además el par propio $(E_\sigma^{n+1}, E_\sigma^{n})$ verifica las hipótesis del Teorema de tipo Hurewicz [I.4.1] y por lo tanto existe

$$\rho_{\underline{\underline{I}}}:\underline{\underline{I}}_{n-1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \longrightarrow J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n})$$

y se obtiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
C^{n+1}(f_n):J_{n+1}(\sigma,\dot{\sigma}) \arrow[r, "\rho_I^{-1}"] \arrow[d, "\phi_\#^2"] & \underline{\underline{I}}_n(\sigma,\dot{\sigma},a_\sigma) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\sigma},a_\sigma) \arrow[r, "(f_n|\dot{\sigma})_*"] \arrow[d, "\phi_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) \\
k:J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \arrow[r, "\rho_I^{-1}"] & \underline{\underline{I}}_n(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n},b) \arrow[r, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(E_\sigma^{n},b) \arrow[ur, "(f_n'|E_\sigma^n)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Como antes llamamos :

$$k=(f_n'|E^n)_*\circ\partial\circ\rho_I^{-1}: J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$$

$$\phi_\#^2(\sigma) = \Sigma\,\eta_i \quad \text{(finito)}$$

η_i son (n+1)-cubos del subcomplejo portador de σ, E_σ.

Vamos a ver a continuación como lleva k a cada uno de los cubos η_i según sean estos compactos o no.

i) Si η_i es un cubo no compacto, $J_{n+1}(\eta_i,\eta_i)$ es un sumando directo de $J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n})$, y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
k: J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \arrow[r] & \underline{\underline{I}}_n(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n},b) \arrow[r] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(E_\sigma^{n},b) \arrow[r, "(f'_n|E_\sigma^n)_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) \\
C^{n+1}(f_n')(\eta_i): J_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i) \arrow[r] \arrow[u, "i_*"'] & \underline{\underline{I}}_n(\eta_i,\dot{\eta}_i,\alpha) \arrow[r] \arrow[u, "i_*"'] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(\dot{\eta}_i,\alpha) \arrow[u, "i_*"'] \arrow[ur, "(f'_n|\eta_i)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

i_* son las aplicaciones inducidas por la inclusión $i: \eta_i \longrightarrow E_\sigma$, es inmediato que $k(\eta_i) = C^{n+1}(f_n')(\eta_i)$

ii) Si η_i es un cubo compacto, entonces $J_{n+1}(\eta_i,\eta_i) = H_{n+1}(\eta_i,\eta_i)$ y se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K: J_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \arrow[r, "\rho_t^{-1}"] & \underline{\underline{I}}_n(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n},b) \arrow[r, "\partial"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(E_\sigma^{n},b) \arrow[r, "(f'_n|E_\sigma^n)_*"] & \underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) \\
H_{n+1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n}) \arrow[r, "\rho_n^{-1}"] \arrow[u, "l"'] & \pi_{n-1}(E_\sigma^{n+1},E_\sigma^{n},b(0)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "\varphi"'] & \pi_n(E_\sigma^{n},b(0)) \arrow[r, "(f'_n|E_\sigma^n)_*"] \arrow[u, "\varphi"'] & \pi_n(Y) \arrow[u, "\varphi"'] \\
H_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i) \arrow[r, "p_n^{-1}"] \arrow[u, "l_*"'] & \pi_{n+1}(\eta_i,\dot{\eta}_i,t_0) \arrow[r] \arrow[u, "l_*"'] & \pi_n(\dot{\eta}_i,t_0) \arrow[u, "l_*"'] \arrow[ur, "(f'_n|\eta_i)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

donde l_* son homomorfismos inducidos por la inclusión $i: \eta_i \longrightarrow E_\sigma$, φ son los homomorfismos que conectan π y $\underline{\underline{I}}$ en la sucesión exacta que relaciona los grupos de homotopía π, $\underline{\underline{\pi}}$ y $\underline{\underline{I}}$ y l el homomorfismo inclusión.

Entonces

$$k(\eta_i) = \varphi(S^{n+1}(f_n')(\eta_i)) = C^{n+1}(f_n')(\eta_i).$$

De todo lo anterior se deduce:

$$C^{n+1}(f_n)(\sigma) = k \circ \phi_*^2(\sigma) = k(\Sigma\, \eta_i) = \Sigma\; k(\eta_i) =$$
$$= \Sigma\; C^{n+1}(f_n')(\eta_i) = C^{n+1}(f_n')\; (\Sigma\, \eta_i) = C^{n+1}(f') \circ \phi_*^2(\sigma),$$

luego $\quad SC^{n+1}(f_n' \circ \phi) = \phi^{\#}(SC^{n+1}(f_n')).$ #

CAPITULO V

EXTENSION DE HOMOTOPIAS PROPIAS

En este capítulo, como en el anterior, (X,A) denotará un par de complejos cúbicos propios finitos e Y será un espacio topológico arco-conexo, con un sólo final propio, (π) n-simple y $(\underline{\underline{\pi}})$ (n-1)-simple.

Nos planteamos el siguiente problema: Sea $n \geq 2$, dadas dos aplicaciones propias

$$f_0,\ f_1 : \overline{X}_n \longrightarrow Y$$

tales que existe una homotopía propia G entre $f_0|_{\overline{X}_{n-1}}$ y $f_1|_{\overline{X}_{n-1}}$. ¿Cuándo es posible encontrar una extensión propia de G a todo $\overline{X}_n \times I$?. Para abordarlo, construimos el siguiente par de complejos cúbicos propios finitos $(\widehat{X},\widehat{A})$, con

$$\widehat{X} = I \times X, \quad \widehat{A} = I \times A$$

donde I es el 1-cubo $[0,1]$, considerado con la siguiente estructura de complejo cúbico propio finito: dos 0-cubos $\{0\}$ y $\{1\}$ y un 1-cubo compacto i. Notemos que

$$\widehat{X}_n = 0 \times X_n \cup I \times X_{n-1} \cup 1 \times X_n$$

Entonces $\quad \overline{\widehat{X}}_n = \widehat{X}_n \cup \widehat{A} = 0 \times \overline{X}_n \cup I \times \overline{X}_{n-1} \cup 1 \times \overline{X}_n$

A $\overline{\widehat{X}}_n$ lo denotaremos por $\hat{X}_n$

Podemos también, basándonos en f_0, f_1 y G, definir la aplicación propia

$$F = (f_0, G, f_1) : \hat{X}_n \longrightarrow Y \qquad \text{como}$$

$$F|_{0 \times \bar{X}_n} = f_0 \;; \qquad F|_{I \times \bar{X}_{n-1}} = G \;; \qquad F|_{1 \times \bar{X}_n} = f_1.$$

Estudiaremos la obstrucción a extender propiamente F a $\hat{X}_{n+1}$, $SC^{n+1}(F)$, y con ello la obstrucción a extender G propiamente a $I \times \bar{X}_n$. Veremos qué propiedades verifican estas obstrucciones y como consecuencia, volviendo al problema de la extensión de una aplicación propia, obtendremos un teorema de extensión para aplicaciones propias análogo al teorema de extensión de Eilenberg para aplicaciones continuas.

En párrafos posteriores generalizaremos el problema hasta aquí planteado tratando de saber cuando dos aplicaciones propias $f,g\colon X \longrightarrow Y$ son homótopas propiamente relativas a A. Con los métodos introducidos, resolveremos el problema cuando Y verifica algunas hipótesis adicionales, así como los grupos de cohomología G^* del par (X,A) con coeficientes en $\varphi_n(Y)$. Como consecuencia obtendremos una caracterización de los complejos cúbicos que son homotópicamente equivalentes de manera propia a J.

1.-Cocadena diferencia

Sean $f_0, f_1\colon \bar{X}_n \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias tales que $f_0|_{\bar{X}_{n-1}}$ y $f_1|_{\bar{X}_{n-1}}$ son homótopas propiamente, a través de la homotopía propia G.

Como hemos indicado anteriormente tenemos definida

$$F = (f_0, G, f_1) : \widehat{X}_n \longrightarrow Y.$$

y asociada a F podemos considerar

$$SC^{n+1}(F) \in \mathrm{Hom}(SC_{n+1}(|\widehat{X},\widehat{A}|) ; \varphi_n(Y)).$$

Sea σ un n-cubo de X que no está en A, podemos considerar σ como un generador del grupo de homología $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$. (si σ es compacto, también es generador del grupo de homología $H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$). $i \times \sigma$ es un (n+1)-cubo de $\widehat{X}_{n+1}$ que no está en $\widehat{A}$, por lo tanto $i \times \sigma$ es un generador de $J_{n+1}(\widehat{X}_{n+1}, \widehat{X}_n)$ ($H_{n+1}(\widehat{X}_{n+1}, \widehat{X}_n)$ si σ es compacto).

Entonces $k : SC_n(|X,A|) \longrightarrow SC_{n+1}(|\widehat{X},\widehat{A}|)$

donde $k = (k_1, k_2)$ con $k_2(\sigma) = i \times \sigma$

y $k_1(\sigma) = i \times \sigma$ si σ es compacto,

es un monomorfismo.

Notemos que $k : SC_*(|X,A|) \longrightarrow SC_{*+1}(|\widehat{X},\widehat{A}|)$

no conmuta con el operador borde.

Definición 1.- Llamaremos cocadena diferencia n-ésima ($n \geq 2$) de f_0 y f_1, y la denotaremos por $\Delta^n(F)$ ó $\Delta^n(f_0, G, f_1)$ a la siguiente cocadena de $\mathrm{Hom}(SC_n(|X,A|) ; \varphi_n(Y))$.

$$\Delta^n(F) = SC^{n+1}(F) \circ k$$

$$\Delta^n(F) = (d^n(F), D^n(F)) = (S^{n+1}(F) \circ k_1, C^{n+1}(F) \circ k_2).$$

Notemos que :

$$d^n(F) : H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1}) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

y está definida de modo análogo a la cocadena obstrucción clásica [VI. 4 Hu 6].

$$d^n(F)(\sigma) = S^{n+1}(F) \; (i \times \sigma)$$

$$D^n(F) : J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1}) \longrightarrow \underline{\underline{J}}_{n-1}(Y)$$

se define del siguiente modo

$$D^n(F)\ (\sigma) = C^{n+1}(F)\ (i \times \sigma)$$

En el capítulo IV, veíamos que cuando $\pi_1(Y)$ es un grupo abeliano podíamos definir $SC^2(f)$. Por lo tanto, en las mismas circunstancias, podemos definir $SC^2(f) \circ k$ o lo que es lo mismo $\Delta^1(F)$.

<u>Nota</u> - Cuando $f_0|\overline{X}_{n-1} = f_1|\overline{X}_{n-1}$ y G sea la homotopía "constante" denotaremos $\Delta^n(F)$ por $\Delta^n(f_0, f_1)$ y $F = (f_0, f_1)$.

Como consecuencia inmediata del Teorema IV.2.2 obtenemos:

<u>Teorema 2</u> .- Existe una homotopía propia entre f_0 y f_1 extendiendo G si y solo si $\Delta^n(F) = 0$.

Como consecuencia del Teorema IV.2.4 obtenemos:

<u>Teorema 3</u> .- Si F y $F' : \hat{X}_n \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones propias tales que son homótopas propiamente entonces

$$\Delta^n(F) = \Delta^n(F').$$

En el capítulo anterior hemos demostrado que $SC^{n+1}(f)$ es un cociclo cuando $f: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ es una aplicación propia. Veamos que ocurre con $\Delta^n(F)$.

<u>Teorema 4</u> .- $\delta\, \Delta^n(F) = SC^{n+1}(f_1) - SC^{n+1}(f_0)$.

<u>Demostración</u> : Vamos a medir la conmutatividad del siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & SC_{n+1}(|X,A|) \arrow[rr, "k"] \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[ddr] & & SC_{n+2}(|\hat{X},\hat{A}|) \arrow[dr, "\hat{\partial}"] \arrow[ddl, "0"'] & \\
SC_n(|X,A|) \arrow[rrrr, "\kappa"] \arrow[drr, "\Delta^n(F)"'] & & & & SC_{n+1}(|\hat{X},\hat{A}|) \arrow[dll, "SC^{n+1}(F)"] \\
 & & \varphi_n(Y) & &
\end{tikzcd}
$$

$$\delta\Delta^n(F) = \delta(d^n(F),\ D^n(F)) = (\delta d^n(F),\ \delta D^n(F))$$

Sea σ un generador de $J_{n+1}(\bar{X}_{n+1},\ \bar{X}_n)$.

$$\delta D^n(F)\ (\sigma) = D^n(F)\ (\partial(\sigma)) = C^{n+1}(F)\ (i\times\partial\sigma) \quad (1)$$

Por otra parte $i\times\sigma$ es un generador de $J_{n+2}(\hat{X}_{n+2},\ \hat{X}_{n+1})$,

luego $\quad 0 = \hat{\delta}(C^{n+1}(F))\ (i\times\sigma) = C^{n+1}(F)\ (\hat{\partial}(i\times\sigma)) =$

$$C^{n+1}(F)\ (\{1\}\times\sigma - \{0\}\times\sigma - i\times\partial(\sigma)) =$$

$$= C^{n+1}(F)\,(\{1\}\times\sigma) - C^{n+1}(F)(\{0\}\times\sigma) - C^{n+1}(F)(i\times\partial(\sigma)) =$$

$$= C^{n+1}(f_1)(\sigma) - C^{n+1}(f_0)(\sigma) - C^{n+1}(F)(i\times\partial(\sigma))$$

luego $\quad C^{n+1}(F)(i\times\partial(\sigma)) = C^{n+1}(f_1)(\sigma) - C^{n+1}(f_0)(\sigma)$

y después de (1)

$$\delta D^n(F)(\sigma) = C^{n+1}(f_1)(\sigma) - C^{n+1}(f_0)(\sigma).$$

Con la otra parte del par se sigue un proceso análogo y obtenemos:

$$\delta d^n(F)(\sigma) = S^{n+1}(f_1)(\sigma) - S^{n+1}(f_0)(\sigma)$$

y por fin, $\quad \delta\Delta^n(F) = S^{n+1}(f_1)(\sigma) - S^{n+1}(f_0)(\sigma).$ #

Vamos a analizar ahora, como en el capítulo anterior, cómo actúa una aplicación propia celular y solvente entre pares de complejos cúbicos propios finitos sobre la cocadena diferencia.

Nos encontramos ahora con la siguiente situación:

$\phi: (X,A) \longrightarrow (X',A')$ es una aplicación celular, propia y solvente, $f_0', f_1' : \overline{X}_n' \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias, homótopas propiamente en $\overline{X}'_{n-1}$ a través de una homotopía propia G'. Entonces $f_0 = f_0' \circ \phi$ y $f_1 = f_1' \circ \phi$ son homótopas propiamente en $\overline{X}_{n-1}$ a través de una homotopía propia $G = G' \circ (id_I \times \phi)$.

Notemos que $id_I \times \phi$ es también celular, propia y solvente, por lo tanto:

$$(id_I \times \phi)_\# = id \times \phi_\#$$

Denotando $k' = (k_1', k_2'): SC_n(|X',A'|) \longrightarrow SC_{n+1}(|\hat{X}',\hat{A}'|)$, ϕ' a la restricción de $id_I \times \phi$ a $\hat{X}_n$, $F = (f_0, G, f_1)$ y $F' = (f_0, G, f_1)$ (Notar que $F = F' \circ \phi'$), obtenemos:

Teorema 5.- $$\Delta^n(F) = \phi^\#(\Delta^n(F'))$$

Demostración .-

$$\begin{tikzcd}
 & SC_n(|X',A'|) \arrow[rr, "k'"] \arrow[ddr, "\Delta^n(F')"] & & SC_{n+1}(|X',A'|) \arrow[ddl, "SC^{n+1}(F')"'] & \\
SC_n(|X',A'|) \arrow[ur, "\phi_\#"] \arrow[rrrr] \arrow[drr, "\Delta^n(F)"'] & & & & SC_{n+1}(|X',A'|) \arrow[ul, "id \times \phi_\#"'] \arrow[dll, "SC^{n+1}(F)"] \\
 & & \varphi_n(Y) & &
\end{tikzcd}$$

$$\phi^\#(\Delta^n(F')) = \Delta^n(F') \circ \phi_\# = SC^{n+1}(F') \circ k' \circ \phi_\# =$$
$$= SC^{n+1}(F') \circ (id \times \phi_\#) \circ k = (id \times \phi^\#) \circ SC^{n+1}(F') \circ k =$$

$$= (\mathrm{id} \times \phi)^{\#} \circ SC^{n+1}(F') \circ k$$

que por el Teorema IV.3.1 es igual a $SC^{n+1}(F') \circ k = \Delta^n(F)$

2.- Teorema de extensión propia

En este párrafo demostraremos un teorema de extensión para aplicaciones propias análogo al teorema de extensión de Eilenberg para aplicaciones continuas, para ello desarrollaremos previamente los lemas previos necesarios.

Sea $n \geq 2$, consideramos $I^n \times J$, llamaremos K a $\partial(I^n \times J)$ considerado como complejo cúbico finito, E_0 al subcomplejo de K, $\{1\} \times I^{n-1} \times J$, y E_1 al subcomplejo de K formado por la unión de los restantes n-caras de K. Notemos que E_0 y E_1 son del tipo de homotopía propia de J. Llamaremos α al 1-cubo de K $\{1\} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times J$, que está en $E_0 \cap E_1$.

<u>Lema 1</u>.- Dada una aplicación propia $f\colon (E_1, \alpha) \longrightarrow (Y, \gamma)$ y un elemento x de $\underline{\underline{\mathrm{I}}}_{n-1}(Y, \gamma)$, existe una extensión propia g de f a K que representa a x.

<u>Demostración</u>.- Sea $g_0\colon (K, \alpha) \longrightarrow (Y, \gamma)$ un representante de x. Como E_1 retracta propiamente a α, $g_0|_{E_1}$ y f son homótopas propiamente a la aplicación "constante" rayo γ de E_1 en Y, luego existe una homotopía propia

$$F\colon E_1 \times I \longrightarrow Y$$

tal que $\qquad F(x,0) = g_0|_{E_1}(x), \qquad F(x,1) = f(x)$

y $\qquad F|_{\alpha\times I}(x,t) = g_0(x) = f(x)$

para cada $x \in E_1$, y cada $t \in I$.

Llamamos θ a $F|_{\dot{E}_1\times I}$ $\quad (= F|_{\dot{E}_0\times I})$

$\dot{E}_0$ es un subcomplejo de E_0, luego tiene la propiedad de extensión de homotopía propia en E_0 [Teorema I.1.17]. Entonces si definimos

$$h:(E_0\times\{0\})\cup(\dot{E}_0\times I) \longrightarrow Y$$

como $\qquad h|_{E_0\times\{0\}} = g_0|_{E_0} \qquad$ y $\qquad h|_{\dot{E}_0\times I} = \theta$

h se extiende a una homotopía propia

$$\bar{\theta}: E_0\times I \longrightarrow Y$$

Definimos ahora la aplicación propia

$$g: K \longrightarrow Y$$

como $\quad g|_{E_1} = f \qquad$ y $\qquad g|_{E_0} = \bar{\theta}|_{E_0\times\{1\}}$.

Entonces $g \simeq_p g_0$ (rel α). En efecto, construimos la homotopía

$$G: K\times I \longrightarrow Y$$

haciendo

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } x \in E_1 \\ \\ \bar{\theta}(x,t) & \text{si } x \in E_0 \end{cases}$$

y g es una extensión de f que representa a x. #

En términos análogos puede enunciarse un lema para cubos compactos y $\pi_n(Y)$. En efecto K denotará el complejo ∂I^n, E_0 será el subcomplejo $\{1\}\times I^{n-1}$, E_1 el subcomplejo formado por la unión de los restantes (n-1) caras de K y $k_0 = (1,0\ldots0)$. Notemos que E_0 y E_1 son del mismo tipo de homotopía que un punto y que toda aplicación $f: (K,k_0) \longrightarrow (Y,y_0)$, representa un elemento de π_n (Y, y_0). Esto permite demostrar, de manera análoga al lema anterior, el siguiente lema.

Lema 1'.- Dada una aplicación continua $f\colon (E_1, k_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ y un elemento $x \in \pi_n$ (Y, y_0), existe una extensión propia g de f a K que representa a x.

Lema 2.- Dada una aplicación propia

$$F_0\colon (0 \times \overline{X}_n) \cup (I \times \overline{X}_{n-1}) \longrightarrow Y$$

y un elemento c de $\mathrm{Hom}\ (SC_n(|X, A|);\ \varphi_n(Y))$, existe una extensión propia F de F_0 a $\widehat{X}_n$ de tal manera que $\Delta^n(F) = c$

Demostración.- $c = (c_1, c_2)$

Sea σ un generador no compacto de $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ y $h\colon I^{n-1} \times J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo. Consideramos

$$id_I \times h\colon I \times (I^{n-1} \times J) \longrightarrow \widehat{X}$$

y llamamos $E_1 = 0 \times (I^{n-1} \times J) \cup I \times \partial(I^{n-1} \times J)$

y $E_0 = 1 \times I^{n-1} \times J$

por el Lema 1, la aplicación propia

$$G_0 = F_0 \circ (id_I \times h)|_{E_1}\colon E_1 \longrightarrow Y$$

tiene una extensión propia $G\colon \partial(I \times I^{n-1} \times J) \longrightarrow Y$, que representa al elemento $c_2(\sigma) \in \underline{\pi}_{n-1}(Y)$.

Definimos $F_\sigma = G \circ (id_I \times h)^{-1}|_{\partial(I \times \sigma)} : \partial(I \times \sigma) \longrightarrow Y$

Sea σ un generador compacto de $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$, (es también generador de $H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$) y $h\colon I^n \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo.

Consideramos ahora $id_I \times h\colon I \times I^n \longrightarrow \widehat{X}$, llamamos

$E_0 = \{1\} \times I^n$, $E_1 = \{0\} \times I^n \cup I \times \dot{I}^n$ y aplicamos el Lema 1' a

$$G_0 = F_0 \circ (id_I \times h)|_{E_1} : E_1 \longrightarrow Y$$

y obtenemos $G: \partial(I \times I^n) \longrightarrow Y$ que representa a $c_1(\sigma) \in \pi_n(Y)$

Llamamos F_σ a la aplicación propia.

$$F_\sigma = G \circ (id_I \times h)^{-1}|_{\partial(I \times \sigma)} : \partial(I \times \sigma) \longrightarrow Y$$

Definimos ahora $F: \widehat{X}_n \longrightarrow Y$ haciéndola coincidir con F_σ en $\partial(I \times \sigma)$. F es propia pues $\partial(I \times \sigma)$ es cerrado en $\widehat{X}_n$ y hay sólo un número finito de cubos. Además

$$d^n(F)(\sigma) = S^{n+1}(F)(i \times \sigma) = [F|_{\partial(i \times \sigma)}] = [F_\sigma] = c_1(\sigma)$$

$$D^n(F)(\sigma) = C^{n+1}(F)(i \times \sigma) = [F|_{\partial(i \times \sigma)}] = [F_\sigma] = c_2(\sigma)$$

luego $\Delta^n(F) = c$ #

Corolario 3 : Sea $b \in Hom(SC_{n+1}(|X,A|); \varphi_n(Y))$ un cociclo y sea $g: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ una aplicación propia tal que $SC^{n+1}(g)$ es cohomólogo a b. Entonces, existe una aplicación propia $g_1: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ tal que $SC_{n+1}(g_1) = b$ y además $g_1|_{\overline{X}_{n-1}} = g|_{\overline{X}_{n-1}}$

Demostración.- Como $b \sim SC^{n+1}(g)$ podemos elegir una cocadena $c \in Hom(SC_n(|X,A|); \varphi_n(Y))$ tal que $b - SC^{n+1}(g) = \delta c$.

Definimos $F_0: \{0\} \times \overline{X}_n \cup I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$

como $F_0(t,x) = g(x)$ para cada $x \in \overline{X}_n$ y cada $t \in I$, por el Lema 2, existe una extensión propia de F_0, $F: \widehat{X}_n \longrightarrow Y$ tal que $\Delta^n(F) = c$

Sea $g: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ la aplicación propia dada por

$$g_1(x) = F(1,x) \text{ para cada } x \in \overline{X}_n.$$

Entonces por [1.4] $\delta(\Delta^n(F)) = SC^{n+1}(g_1) - SC^{n+1}(g)$

como $\delta(\Delta^n(F)) = \delta c = b - SC^{n+1}(g)$ se sigue que $SC^{n+1}(g_1) = b$. #

Seguimos considerando $n \geq 2$, construimos el complejo cúbico propio finito $L=\partial(I^n \times J) \cup (1/2 \times I^{n-1} \times J)$

Llamamos $E_0 = 1/2 \times I^{n-1} \times J$, $E_1 = \partial([0,1/2] \times I^{n-1} \times J) \setminus \operatorname{int} E_0$, $E_2 = \partial([1/2,1] \times I^{n-1} \times J) \setminus \operatorname{int} E_0$, y $\alpha = 1/2 \times 0 \times \ldots \times 0 \times J$. Notemos que α está en E_0, E_1 y E_2 y que los tres son del mismo tipo de homotopía propia que J.

Sean $K_0 = E_1 \cup E_2$, $K_1 = E_0 \cup E_2$, $K_2 = E_0 \cup E_1$

Lema 4 - El complejo cúbico propio finito L es $(\underline{\underline{I}})(n-2)$-conexo.

Demostración.- L es un espacio contráctil, luego $\pi_r(L) = 0$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

De la sucesión exacta que conecta los grupos de homotopía π, $\underline{\underline{\pi}}$ y $\underline{\underline{I}}$

$$\cdots \longrightarrow \pi_{r+1}(L) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_r(L) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_r(L) \longrightarrow \pi_r(L) \longrightarrow \cdots$$

se obtiene que $\underline{\underline{I}}_r(L) \cong \underline{\underline{\pi}}_r(L)$ para cada $r \in \mathbb{N}$.

Vamos a calcular $\underline{\underline{\pi}}_k(L)$:

Por [Če], sabemos que $\underline{\underline{\pi}}_r(L) = \pi_r(T(\hat{L},\infty);\, \rho_\alpha)$ donde $\hat{L}$ es la compactificación de Alexandroff de L, $(\hat{L} = L \cup \{\infty\})$

$T(\hat{L},\infty) = \{h\colon I \longrightarrow \hat{L} \mid h(t) = \infty$ si y sólo si $t = 1\}$

y $\rho_\alpha\colon (I,1) \longrightarrow (\hat{L},\infty)$ es el camino dado por $\rho_\alpha(t)=(1/2,0\ldots0,t/1-t)$ para cada t de I tal que $0 \leq t < 1$ y $\rho_\alpha(1) = \infty$

$\hat{L}$ es una n-esfera junto con un (n-1)-disco cuyo borde es el ecuador de la esfera, además tiene una estructura simplicial heredada de L. En estas circunstancias, según el Corolario

14.6 de [Hu.3]

$$\pi_r(T(L,\infty);\ \rho_\alpha) = \pi_r(F) \qquad \text{para cada } r \geq 1$$

donde F es la frontera de la estrella de ∞ en $\hat{L}$. Notemos que F es la unión de dos (n-1)-esferas unidas por un hemisferio, por lo tanto

$$\pi_r(F) = 0 \qquad \text{si} \quad 1 \leq r < n-1 \qquad \text{y}$$

$$\pi_{n-1}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

luego $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_r(L) = 0$ para cada r tal que $1 \leq r \leq n-2$.

Como $\pi_1(L) = 0 = \pi_0(L)$, se sigue que $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_0(L) \cong \underline{\underline{\pi}}_0(L)$ y $\underline{\underline{\pi}}_0(L)$ es 0 pues es claro que L tiene un solo final propio. #

Lema 5.- Sea $f: (L,\alpha) \longrightarrow (Y,\gamma)$ una aplicación propia y sean x_i los elementos de $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{n-1}(Y,\gamma)$ representados por $f|_{K_i}$, entonces

$$x_0 = x_1 + x_2$$

Demostración : L es $(\pi)(n-1)$-conexo y $(\underline{\underline{\mathcal{I}}})(n-2)$-conexo, entonces el homomorfismo de tipo Hurewicz:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathcal{I}}}}: \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{n-1}(L,\alpha) \longrightarrow J_n(L)$$

es un isomorfismo.

Consideramos la sucesión exacta de homología J asociada al par (L_n, L_{n-1}) $(L_n = L)$

$$\cdots \longrightarrow J_n(L_{n-1}) \longrightarrow J_n(L_n) \xrightarrow{j_*} J_n(L_n, L_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

como $J_n(L_{n-1}) = 0$ se sigue que j_* es un monomorfismo luego

$$j_* \circ \rho_{\underline{\underline{\mathcal{I}}}}: \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{n-1}(L,\alpha) \longrightarrow J_n(L_n, L_{n-1})$$

es un monomorfismo.

Consideremos ahora el caso particular en el que $f = id_L$, entonces x_i está representado por la aplicación inclusión

$T_i : K_i \longrightarrow L \qquad i = 0,1,2$

Llamamos S_i al elemento de $J_n(L_n, L_{n-1})$, $j_* \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}(x_i)$. Notemos que también está representaado por la aplicación $T_i : K_i \longrightarrow L$.

Como $j_* \circ \rho_{\underline{\underline{I}}}$ es un monomorfismo y $S_0 = S_1 + S_2$ deducimos que $x_0 = x_1 + x_2$

El resultado puede generalizarse inmediatamente a las condiciones del lema. #.

Si llamamos ahora $L = \partial I^n \cup (1/2 \times I^{n-1})$, $E_0 = 1/2 \times I^{n-1}$ $E_1 = \partial([0,1/2] \times I^{n-1} \times J) \setminus \mathrm{int} E_0$, $E_2 = \partial([1/2,1] \times I^{n-1}) \setminus \mathrm{int} E_0$, $\alpha_0 = (1/2, \ldots, 0)$, $K_0 = E_1 \cup E_2$, $K_1 = E_0 \cup E_2$ y $K_2 = E_0 \cup E_1$, procediendo de manera análoga obtenemos el siguiente lema

Lema 5'.- Dada una aplicación continua $f : (L, \alpha_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ si x_i son los elementos de $\pi_n(Y, y_0)$ representados por $f|_{K_i}$, Entonces

$$x_0 = x_1 + x_2$$

Lema 6.- Sean $F', F'' : \hat{X}_n \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias tales que $F'(1,x) = F''(0,x)$ para cada $x \in \overline{X}_{n-1}$. Definimos

$F : \hat{X}_n \longrightarrow Y$ como sigue

$$F(t,x) = \begin{cases} F'(2t,x) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ F''(2t-1,x) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $\Delta^n(F) = \Delta^n(F') + \Delta^n(F'')$

Demostración: Veamos primero que $D^n(F) = D^n(F') + D^n(F'')$.

Sea σ un generador no compacto de $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ y $h: I^{n-1} \times J \longrightarrow \sigma$ un homeomorfismo.

Sean L, E_0, E_1 y E_2 como en el lema 5.

Definimos la aplicación propia

$$G : \hat{X}_n \cup (1/2 \times \overline{X}_n) \longrightarrow Y \qquad \text{haciendo}$$

$G|_{X_n} = F$ y $G(1/2,x) = F'(1,x) = F''(0,x)$ para todo $x \in \overline{X}_n$.

Consideramos $id_I \times h: I \times I^{n-1} \times J \longrightarrow I \times X$ y definimos la aplicación propia

$$M = G \circ (id_I \times h)|_L : L \longrightarrow Y$$

Sean x_0, x_1 y x_2 como en el Lema 5. Entonces,

$$D^n(F)(\sigma) = C^{n+1}(F)(i \times \sigma) = [F \circ (id_I \times h)|_{\partial(I \times I^{n-1} \times J)}] =$$
$$= [G \circ (id_I \times h)|_{E_1 \cup E_2}] = x_0$$

$$D^n(F')(\sigma) = C^{n+1}(F')(i \times \sigma) = [F' \circ (id_I \times h)|_{\partial(I \times I^{n-1} \times J)}] =$$
$$= [G \circ (id_I \times h)|_{E_0 \cup E_2}] = x_1$$

$$D^n(F'')(\sigma) = C^{n+1}(F'')(i \times \sigma) = [F'' \circ (id_I \times h)|_{\partial(I \times I^{n-1} \times J)}] =$$
$$= [G \circ (id_I \times h)|_{E_0 \cup E_1}] = x_2$$

Ahora bien, por el Lema 5, $x_0 = x_1 + x_2$

luego $$D^n(F)(\sigma) = D^n(F')(\sigma) + D^n(F'')(\sigma)$$

De manera análoga, pero utilizando el Lema 5' para los generadores de $H_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ (también son generadores de $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ obtendríamos

$$d^n(F)(\sigma) = d^n(F')(\sigma) + d^n(F'')(\sigma)$$

Para los generadores compactos de $J_n(\overline{X}_n, \overline{X}_{n-1})$ se hace como en demostraciones anteriores, por lo tanto:

$$\Delta^n(F) = \Delta^n(F') + \Delta^n(F'').\quad \#$$

Teorema 7.- (Teorema de extensión de Eilenberg)

Sea $f: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ una aplicación propia. Entonces, $f|\overline{X}_{n-1}$ puede extenderse propiamente a $\overline{X}_{n+1}$ si y sólo si $SC^{n+1}(F) \sim 0$

Demostración.- Sea $g: \overline{X}_{n+1} \longrightarrow Y$ una extensión propia de $f|\overline{X}_{n-1}$. Definimos

$$F: \widehat{X}_{n+1} \longrightarrow Y \quad \text{como sigue:}$$

$$F(0,x) = g(x) \qquad \text{para cada } x \in \overline{X}_n$$

$$F(1,x) = f(x) \qquad \text{para cada } x \in \overline{X}_n$$

$$F(t,x) = f(x) = g(x) \qquad \text{para cada } t \in I \quad y \quad x \in \overline{X}_n$$

Por [1 4] $\qquad \delta(\Delta^n(F)) = SC^{n+1}(F) - SC^{n+1}(g|\overline{X}_n)$

como $g|\overline{X}_n$ se extiende a g, $SC^{n+1}(g|\overline{X}_n) = 0$.

luego $\qquad SC^{n+1}(f) = \delta\, \Delta^n(F)$

Inversamente, suponemos que $SC^{n+1}(F) \sim 0$, luego podemos elegir una cocadena c en $Hom(SC_n(|X,A|); \varphi(Y))$ tal que $\delta c = SC^{n+1}(f)$

Por el corolario 3, existe una aplicación propia

$$g_1: \overline{X}_n \longrightarrow Y$$

tal que $g_1|\overline{X}_{n-1} = f|\overline{X}_{n-1}$ y además $SC^{n+1}(g_1) = 0$

entonces [Teorema IV.2.3] g_1 se extiende propiamente a $\overline{X}_{n+1}$ #

Por consiguiente sucede como en teoría de obstrucción clásica. Para ir extendiendo propiamente una aplicación propia vamos estudiando las obstruciones que se nos presentan, si todas van siendo cero podemos seguir extendiendo la aplicación. Si en algún lugar la obstrucción no es cero pero es homóloga a cero, para extender propiamente la aplicación bastará cambiar convenientemente los valores de la misma sobre los cubos de mayor dimensión del último esqueleto al que habíamos extendido.

3.- Conjuntos obstrucción

Sea $f: A \longrightarrow Y$ una aplicación propia.

Definición 1.- Llamaremos conjunto obstrución propia (n+1)-dimensional de f y lo denotaremos $\theta^{n+1}(f)$ a

$$\theta^{n+1}(f) = \{SC^{n+1}(f_n) \mid f_n \text{ es una extensión propia de } f \text{ a } \overline{X}_n\}$$

Si f no es n-extensible propiamente, entonces $\theta^{n+1}(f)$ es el conjunto vacio.

Notemos que $\theta^{n+1}(f) \subset \mathrm{Hom}(SC_{n+1}(|X,A|); \varphi_n(Y))$, sin embargo como toda cocadena cohomóloga a una obstrucción es ella misma una obstrucción, [Corolario 2.3] $\theta^{n+1}(f)$ es unión de clases de cohomología. Podemos por tanto, definir $\theta^{n+1}(f)$ como el siguiente subconjunto de $G^{n+1}(X,A; \varphi_n(Y))$:

$$\theta^{n+1}(f) = \{[SC^{n+1}(f_n)] \mid f_n \text{ es una extensión propia de } f \text{ a } \overline{X}_n\}$$

donde $[SC^{n+1}(f_n)]$ es la clase de cohomología de $SC^{n+1}(f_n)$.

Obviamente f es (n+1)-extensible propiamente si y solo si el elemento cero de $G^{n+1}(X,A; \varphi_n(Y))$ pertenece a $\theta^{n+1}(f)$.

Proposición 2.- Dos aplicaciones propias $f, f': A \longrightarrow Y$ homótopas propiamente, tienen los mismos conjuntos obstrucción $(n+1)$-dimensionales.

Demostración.- Si ninguna de las dos aplicaciones extiende propiamente a $\overline{X}_n$ la proposición es obvia.

Suponemos que f se extiende propiamente a $\overline{X}_n$. Sea f_n una extensión propia de f y sea $F: A \bar{\times} I \longrightarrow Y$ una homotopía propia entre f y f'. Como F es una homotopía propia parcial de f_n en A y A es un subcomplejo de $\overline{X}_n$, existe

$G: \overline{X}_n \times I \longrightarrow Y$ tal que G es propia, $G(x,0) = f_n(x,0)$ y $G(a,t) = F(a,t)$ para todo $a \in A$.

Es claro que $G_1: \overline{X}_n \longrightarrow Y$, definida como $G_1(x) = G(x,1)$, es una extensión propia de f', luego $f_n \simeq_p G_1$, lo que implica que

$$SC^{n+1}(f) = SC^{n+1}(f') \quad \#$$

Sea (X',A') un par de complejos cúbicos propios finitos y sea $\phi: (X,A) \longrightarrow (X',A')$ una aplicación propia, celular y solvente. Si $f': A' \longrightarrow Y$ es una aplicación propia que puede extenderse propiamente a $\overline{X}_n'$, $f = f' \circ \phi|_A$ es una aplicación propia que puede extenderse propiamente a $\overline{X}_n$.

Sea $\phi^*: G^{n+1}(X',A'; \varphi_n(\varphi)) \longrightarrow G^{n+1}(X,A; \varphi_n(Y))$ el homomorfismo inducido por ϕ en cohomologías. Entonces

Proposición 3.- $\phi^*(\theta^{n+1}(f')) \subset \theta^{n+1}(f)$

Demostración .- Sea $z \in \theta^{n+1}(f')$, luego $z = [SC^{n+1}(f_n')]$ donde f_n' es una n-extensión propia de f'.

$\phi^*(z) = \phi^*([SC^{n+1}(f_n')]) = [\phi^\#(SC^{n+1}(f_n'))] = [SC^{n+1}(f_n' \circ \phi)]) =$
$= [SC^{n+1}(f_n)] \in \theta^{n+1}(f)$. #

Proposición 5.- Si Y es (π) r-simple, $(\underline{1})$ (r-1)-simple y además $G^{r+1}(X,A;\ \varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n \le r < m$, entonces la n-extensibilidad propia de f implica la m-extensibilidad propia de f.

Demostración.- Como f es n-extensible, $\theta^{n+1}(f) \neq \emptyset$; además como $G^{n+1}(X,A;\ \varphi_n(Y)) = 0$, se sigue que $\theta^{n+1}(f) = 0$, y por lo tanto f se extiende propiamente a $\overline{X}_{n+1}$. De aquí se sigue que $\theta^{n+2}(f) \neq \emptyset$ y como $G^{n+2}(X,A;\varphi_n(Y)) = 0$ obtenemos $\theta^{n+2}(f) = 0$ Por consiguiente f se extiende propiamente a $\overline{X}_{n+2}$.

Continuando el proceso obtenemos que f se extiende propiamente a $\overline{X}_m$. #

Corolario 6.- Si Y es (π)r-simple y $(\underline{1})$(r-1)-simple y además $G^{r+1}(X,A;\ \varphi_r(Y)) = 0$ para cada $r \ge 1$. Entonces toda aplicación propia $f\colon A \longrightarrow Y$ tiene una extensión propia sobre X.

Demostración.- Notemos que en este caso $\pi_1(Y)$ es abeliano y tiene sentido $SC^2(f)$, que es 0, y se puede continuar el proceso. #

4.- Indice de extensión para homotopía.

Trataremos en este párrafo el siguiente problema:

Dadas dos aplicaciones propias $f, g: X \longrightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$ ¿Bajo qué condiciones podremos garantizar la existencia de una homotopía propia $G: I \times X \longrightarrow Y$ tal que $G(0,x) = f(x)$, $G(1,x) = g(x)$ para cada $x \in X$, y $G(t,a) = f(a) = g(a)$ para cada $t \in I$ y cada $a \in A$? Cuando esto ocurra diremos que f y g son homótopas propiamente relativas a A y lo indicaremos $f \simeq_p g\,(\text{rel } A)$.

Si $A = \phi$ el problema se traduce en determinar cuando f y g son homótopas propiamente.

Notemos que este es un caso particular del problema de extensión. Podemos, por tanto aplicarle el método de obstrucción.

Definición 1.- Dos aplicaciones propias $f, g: X \longrightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$ se dicen n-homótopas propiamente relativas a A, sii

$$f|_{\bar{X}_n} \text{ y } g|_{\bar{X}_n}: \bar{X}_n \longrightarrow Y$$

son homótopas propiamente relativas a A.

Debido a que Y es arco-conexo, es inmediato que todo par de aplicaciones propias $f, g: X \longrightarrow Y$, que coinciden en A, son 0-homótopas propiamente relativas a A.

Definición 2.- Llamaremos índice de homotopía propia del par (f,g) relativo a A al supremo de los $n \in \mathbb{N}$ para los que

f y g son n-homótopas propiamente relativas a A.

Sean $f, g, f', g' : X \longrightarrow Y$ aplicaciones propias tales que $f|_A = g|_A = f'|_A = g'|_A$

Proposición 3.- Si f y g son homótopas propiamente (rel A) a f' y g' respectivamente , entonces los pares (f,g) y (f',g') tienen el mismo índice de homotopía propia relativa a A.

Demostración.- Sea F una homotopía propia entre f' y f, G entre g y g' y H entre $f|_{\overline{X}_k}$ y $g|_{\overline{X}_k}$.
Definimos $H' : \overline{X}_k \times I \longrightarrow Y$ haciendo para cada $x \in \overline{X}_k$:

$$H'(x,t) = \begin{cases} F(x,3t) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/3 \\ H(x,3t-1) & \text{si} \quad 1/3 \le t \le 2/3 \\ G(x,3t-2) & \text{si} \quad 2/3 \le t \le 1 \end{cases}$$

H' es una homotopía propia relativa a A entre f' y g'.#

Supongamos ahora que f y g son (n-1)-homótopas propiamente relativas a A. Sea H una homotopía propia entre $f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y $g|_{\overline{X}_{n-1}}$. Consideramos como al principio de capítulo

$$F = (f,H,g) : \hat{X}_n \longrightarrow Y.$$

Asociada a F está la cocadena diferencia $\Delta^n(F)$. Por el teorema 1.4 sabemos que

$$\delta\Delta^n(F) = SC^{n+1}(g) - SC^{n+1}(f)$$

ahora bien, como en este caso f y g están definidas en todo X, se sigue que

$$SC^{n+1}(f) = SC^{n+1}(g) = 0, \quad \text{luego}$$

$$\delta\Delta^n(F) = 0$$

por lo tanto $\delta\Delta^n(F)$ es un cociclo y representa una clase de cohomología de $G^n(X,A;\varphi(Y))$ que representaremos por $\Lambda^n(F)$.

Como en 1.2 podemos asegurar :

Lema 4.- $\Delta^n(F) = 0$ si y solo si existe una homotopía propia H' entre $f|_{\overline{X}_n}$ y $g|_{\overline{X}_n}$ que es una extensión propia de H.

En el párrafo 1, para definir la cocadena diferencia, hemos utilizado el par de complejos cúbicos propios finitos $(\widehat{X},\widehat{A})$ y el morfismo $k\colon SC_*(|X,A|) \longrightarrow SC_{*+1}(|\widehat{X},\widehat{A}|)$. Recordemos que k es un monomorfismo, pero no un isomorfismo. Podemos convertir k en un isomorfismo construyendo un nuevo par propio de complejos cúbicos propios finitos que demotaremos (X^*,A^*) donde

$$X^* = \widehat{X} = I\times X \qquad\qquad A^* = I\times A\cup(\partial I\times X)$$

Notemos que $\overline{X}^*_{n+1} = I\times X_n\cup 0\times X_{n+1}\cup 1\times X_{n+1}\cup I\times A\cup(\partial I\times X)$

y $\qquad\overline{X}^*_n = I\times X_{n-1}\cup 0\times X_n\cup 1\times X_n\cup I\times A\cup(\partial I\times X)$

por lo tanto $J_{n+1}(\overline{X}^*_{n-1},\overline{X}^*_n)(H_{n+1}(\overline{X}^*_{n-1},\overline{X}^*_n))$ está generado por los $(n+1)$-cubos ($(n+1)$-cubos compactos) de X^* que son de la forma $i\times\sigma$, siendo σ un n-cubo (n-cubo compacto) de X.

Como consecuencia $k\colon SC(|X,A|) \longrightarrow SC_{*+1}(|X^*,A^*|)$ es un isomorfismo de grado +1 de complejos de cadenas.

Aplicando el functor $\mathrm{Hom}(-;\varphi_n(Y))$ obtenemos que

$\overline{k}: Hom(k;\varphi_n(y)): SC^*(|X^*,A^*|;\varphi_n(y)) \longrightarrow SC^{*-1}(|X,A|;\varphi_n(y))$

es un isomorfismo de cocadenas de grado -1

Es claro que en este contexto, $\Delta^n(F)$ es la imagen por $\overline{k}$ de $SC^{n+1}(F)$.

Teorema 5.- $\Delta^n(F) \sim 0$ si y solo si existe una homotopía propia H' entre $f|_{\overline{X}_n}$ y $g|_{\overline{X}_n}$ que coincide con H sobre $\overline{X}_{n-2}$.

Demostración.- $\overline{k}\ (SC^{n+1}(F)) = \Delta^n(F)$

luego $SC^{n+1}(F) \circ k = \Delta^n(F)$.

Aplicando el teorema 3.7 y teniendo en cuenta que k es un isomorfismo se sigue el resultado buscado. #

5.- Conjuntos obstrucción para homotopía

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia dada, y sea $\Omega(X,A;f)$ el conjunto de todas las aplicaciones propias H de siguiente tipo

$$H : I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$$

tales que $H(0,x) = H(1,x) = f(x)$ para cada $x \in \overline{X}_{n-1}$

$H(t,a) = f(a)$ para cada $a \in A$ y $t \in I$

En este conjunto damos la relación de homotopía propia relativa a $(\partial I \times \overline{X}_{n-1} \cup I \times A)$. Al conjuto cociente resultante lo denotamos por $R^n(X,A;f)$. En él definimos la siguiente operación:

Si α_1 y α_2 son dos elementos de $R^n(X,A;f)$ representados respectivamente, por H_1 y H_2, $\alpha = \alpha_1 . \alpha_2$ es el elemento de $R^n(X,A;f)$ representado por la aplicación propia

$$H: I\times\overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y \qquad \text{definida por}$$

$$H(t,x) = \begin{cases} H_1(2t,x) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ H_2(2t-1,x) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que esta operación dota a $R^n(X,A;f)$ de estructura de grupo.

Lema 1.- La aplicación ξ_n: $R^n(X,A;f) \longrightarrow G^n(X,A;\varphi_n(Y))$ que asigna a cada elemento $\alpha \in R^n(X,A;f)$ representado por H, el elemento de $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$ representado por $\Delta^n(f,H,f)$, es un homomorfismo .

La demostración es consecuencia inmediata del Lema 2.6.

Cuando pueda haber lugar a confusión denotaremos el homomorfismo ξ_n por ξ_{fn} .

Teorema 2.- Sean f,g: $X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias tales que $f|\overline{X}_{n-1}$ y $g|\overline{X}_{n-1}$ son homótopas propiamente relativas a A. Entonces

$$\xi_{fn}(R^n(X,A\ ;f)) = \xi_{gn}(R^n(X,A\ ;f))$$

Demostración.- Sea K: $I\times\overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ una homotopía propia tal que $K(0,x) = f(x)$, $K(1,x) = g(x)$ y $K(t,a) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $t \in I$.

Sea $\alpha \in R^n(X,A\ ;f)$ representado por H. Consideramos

$$H^* : I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$$

definida por:

$$H^*(t,x) = \begin{cases} K(1-3t,x) & \text{si } 0 \le t \le 1/3 \\ H(3t-1,x) & \text{si } 1/3 \le t \le 2/3 \\ K(3t-2,x) & \text{si } 2/3 \le t \le 1 \end{cases}$$

Notemos que $H^*(0,x) = H^*(1,x) = g(x)$ para cada $x \in \overline{X}_{n-1}$ y que $H^*(t,a) = g(a)$ para cada $a \in A$ y cada $t \in I$, por lo tanto H^* representa un elemento β de $R^n(X,A\,;g)$.

Además $\xi_{fn}(\alpha)$ está representado por $\Delta^n(f,H,f)$ y

$\xi_{gn}(\beta)$ está representado por $\Delta^n(g,H^*,g)$

Aplicando el Lema 2.6 obtenemos :

$\Delta^n(g,H^*,g) = -\Delta^n(f,K,g) + \Delta_n(f,H,f) + \Delta_n(f,K,g) = \Delta^n(f,H,f)$

Por consiguiente, $\xi_{fn}(\alpha) = \xi_{gn}(\beta)$.

Luego $\xi_{fn}(R^n(X,A\,;f)) \subset \xi_{gn}(R^n(X,A\,;g))$

El otro contenido es similar. #

Después del teorema anterior podemos concluir que el subgrupo $\xi_{fn}(R^n(X,A\,;f))$ de $G^n(X,A\,;\varphi_n(y))$ depende únicamente de la (n-1)-clase de homotopía propia relativa a A de f.

Definición 3.- Sean f y $g: X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias tales que $f|_A = g|_A$. Llamaremos conjunto obstrucción propia n-dimensional del par (f,g) y lo denotaremos $\theta^n(f,g)$ al subconjunto de $G^n(X,A\,;\varphi_n(y))$ cuyos elementos son las clases de cohomologia que tienen por representante $\Delta^n(f,H,g)$, donde H es una homotopía propia relativa a A entre $f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y $g|_{\overline{X}_{n-1}}$.

Si f y g no son $(n-1)$-homótopas propiamente relativas a A $\theta^n(f,g)$ es el conjunto vacío.

Proposición 4.- Sean $f',g': X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias homótopas propiamente (relativas a A) a f y g respectivamente. Entonces $\theta^n(f,g) = \theta^n(f',g')$.

Demostración.- Sean F_1 y F_2 homotopías propias relativas a A entre f y f' y entre g y g' respectivamente. Sea z un elemento de $\theta^n(f,g)$ representado por $\Delta^n(f,H,g)$.

Construimos $F: I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ como sigue

$$F(t,x) = \begin{cases} F_1(1-3t,x) & 0 \le t \le 1/3 \\ H(3t-1,x) & 1/3 \le t \le 2/3 \\ F_2(3t-2,x) & 2/3 \le t \le 1 \end{cases}$$

F es una homotopía propia relativa a A entre f' y g'.

Por el Lema 2.6,

$$\Delta^n(f',F,g') = -\Delta^n(f,F_1,f') + \Delta^n(f,H,g) + \Delta^n(g,F_2,g')$$

Como $\Delta^n(f,F_1,f') = \Delta^n(g,F_2,g') = 0$,

$$\theta^n(f,g) \subset \theta^n(f',g').$$

El otro contenido es análogo. #

Sea (X',A') un par de complejos cúbicos propios finitos y sea $\phi: (X,A) \longrightarrow (X',A')$ una aplicación propia, celular y solvente. Dadas dos aplicaciones propias $f',g': X' \longrightarrow Y$ tales que $f'(a') = g'(a')$ para cada $a' \in A'$ obtenemos $f = f' \circ \phi$

y $g=g'\circ\phi$, $(f,g\colon X \longrightarrow Y)$ tales que $f(a) = g(a)$ para cada $a\in A$.

Si $\qquad \phi^*\colon G^{n+1}(X',A' ;\varphi_n(Y)) \longrightarrow G^{n+1}(X,A ;\varphi_n(Y))$

es el homomorfismo inducido por ϕ en cohomología, como en 3.3 obtenemos

<u>Proposición 5</u>.- $\quad \phi^*(\theta^{n+1}(f',g')) \subset \theta^{n+1}(f,g)$

<u>Lema 7</u>.- Dos aplicaciones propias $f,g\colon X \longrightarrow Y$, son (n-1)-homótopas propiamente relativas a A, si y solo si $\theta^n(f,g)$ es una coclase del subgrupo $\xi_{fn}(R^n(X,A;f))$ en el grupo de cohomología $G^n(X,A ;\varphi_n(Y))$.

<u>Demostración</u>.- Sean H y H' dos homotopías propias relativas a A entre $f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y $g|_{\overline{X}_{n-1}}$.

Definimos $\qquad K\colon I\times\overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y \qquad$ como sigue:

$$K(t,x) = \begin{cases} H(2t,x) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \\ H'(2-2t,x) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Notemos que $\quad K(0,x) = K(1,x) = f|_{\overline{X}_{n-1}}(x) \quad$ para cada $x \in \overline{X}_{n-1}$ y además $K(t,a) = f(a)$ para cada $a \in A$ y cada $t \in I$. Por tanto K representa un elemento α de $R^n(X,A;f)$. Entonces $\xi_{fn}(\alpha)$ está representado por $\Delta^n(f,K,f)$.

Por el Lema 2.6

$$\Delta^n(f,K,f) = \Delta^n(f,H,g) - \Delta^n(f,H',g)$$

luego $\qquad [\Delta^n(f,H',g)] = [\Delta^n(f,H,g)] - \xi_{fn}(\alpha)$

y por tanto $\quad \theta^n(f,g) \subset [\Delta^n(f,H,g)] + \xi_{fn}(R^n(X,A;f)$

Sea ahora β un elemento cualquiera de $R^n(X,A;f)$ representado por una homotopía propia K. Entonces $\xi_{fn}(\beta) = [\Delta^n(f,K,f)]$

Definimos $H': I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ por:

$$H'(t,x) = \begin{cases} K(2t,x) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ H(2t-1,x) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que $\quad H'(0,x) = f|_{\overline{X}_{n-1}}(x)$, $H'(1,x) = g|_{\overline{X}_{n-1}}(x)$

y que $\quad H'(t,a) = f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$.

Entonces, aplicando otra vez el Lema 2.6, obtenemos

$$\Delta^n(f,H',g) = \Delta^n(f,K,f) + \Delta^n(f,H,g)$$

por tanto $\quad \Delta^n(f,H',g)] = \xi_{fn}(\beta) + [\Delta^n(f,H,g)]$

de donde se deduce que $\quad [\Delta^n(f,H,g)] + \xi_{fn}(R^n(X,A;f)) \subset \theta^n(f,g)$

La otra implicación es trivial . #

Lema 8.- Dos aplicaciones propias $f,g: X \longrightarrow Y$ son n-homótopas propiamente relativas a A si y sólo si $\theta^n(f,g) = \xi_{fn}(R^n(X,A;f))$.

Demostración .- Sea $H: I \times \overline{X}_n \longrightarrow Y$ una homotopía propia relativa a A entre f y g.

Sea $H' = H|_{I \times \overline{X}_{n-1}}$. Por el Lema 4.4, $\Delta^n(f,H',g) = 0$ por tanto $0 \in \theta^n(f,g)$ y por el lema anterior

$$\theta^n(f,g) = \xi_{fn}(R^n(X,A;f)).$$

Supongamos ahora que $\theta^n(f,g) = \xi_{fn}(R^n(X,A;f))$, entonces $0 \in \theta^n(f,g)$ y por tanto existe una homotopía propia $H: I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ verificando $H(0,x) = f|_{\overline{X}_{n-1}}(x)$,

$H(1,x) = g|_{\overline{X}_{n-1}}(x)$ y $H(t,a) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y tal que $[\Delta^n(f,H,g)] = 0$, luego $\Delta^n(f,H,g) \sim 0$.

Del Teorema 4.5 se sigue que f y g son n-homótopas propiamente. #

Teorema 9.- Dos aplicaciones propias $f, g: X \longrightarrow Y$ tales que coniciden en A y son (n-1)-homótopas propiamente relativas a A, determinan un único elemento de Cocker ξ_{fn}, que denotaremos $\chi^n(f,g)$. Además, f y g son n-homótopas propiamente relativas a A si y solo si $\chi^n(f,g) = 0$.

Demostración.- Del Lema 7 se sigue que $\theta^n(f,g)$ es una coclase de subgrupo $\xi_{fn}(R^n(X,A;f))$ en el grupo $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$, luego determina un único elemento del cociente

$$G^n(X,A;\varphi_n(Y)) / \xi_{fn}(R^n(X,A;f)).$$

Este elemento es $\chi^n(f,g)$.

La segunda afirmación del Teorema se deduce del Lema 8. #

Llamaremos a $\chi^n(f,g)$ elemento característico n-dimensional del par (f,g).

Denotaremos a Coker ξ_{fn} por $Q_{fn}(X,A;\ \varphi_n(Y))$.

Aplicando repetidamente el Teorema 9, obtenemos:

Proposición 10.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia dada. Suponemos que Y es un espacio (π)r-simple y $(\underline{\underline{\pi}})$(r-1)-simple y además $Q_{fr}(X,A;\ \varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r \leq m$.

Sea $g: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia tal que $f|_A = g|_A$. Entonces, si f y g son n-homótopas propiamente relativas a A, también son m-homótopas propiamente relativas a A.

Corolario 11.- Sea Y un espacio (π)r-simple, $(\underline{\underline{I}})$(r-1)-simple y además $G^r(X,A;\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $1 \leq r \leq \dim(X \setminus A)$. Entonces, dos aplicaciones propias $f,g: X \longrightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$ son homótopas propiamente relativas a A.

Como consecuencia de todo lo anterior obtenemos:

Proposición 12.- Suponemos X arco-conexo, con un sólo final propio. Entonces, son equivalentes:

i) X es homotópicamente equivalente de manera propia a J.

ii) $\pi_r(X) = 0$ y $\underline{\underline{I}}_{r-1}(X) = 0$ para cada $r \geq 1$.

iii) X es (π)r-simple y $(\underline{\underline{I}})$(r-1)-simple y $G^r(X;\varphi_r(X)) = 0$ para cada r tal que $1 \leq r \leq \dim X$.

iv) X es (π)r-simple y $(\underline{\underline{I}})$(r-1)-simple y $O_{ir}(X;\varphi_r(X)) = 0$ para cada r tal que $1 \leq r \leq \dim X$, donde $i: X \longrightarrow X$ es la aplicación identidad.

Demostración.- Se hace una demostración circular. Sólo señalaremos alguna implicación que no es inmediata.

ii) $\Rightarrow$ iii) Como $\pi_1(X) = 0$, X es (π)r-simple para todo r.

De la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_2(X) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(X) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)$$

como $\pi_0(X)$ y $\underline{\underline{I}}_1(X)$ son triviales se sigue que $\underline{\underline{\Pi}}_1(X) = 0$. Por lo tanto X es $(\mathrm{I})(r-1)$-simple para todo r

Además $\varphi_r : \pi_r(X) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{r-1}(X)$ es el homomorfismo 0, entre los grupos 0, luego $G^r(X;\ \varphi_r(X)) = 0$

iv) $\Rightarrow$ i) Vamos a construir, esqueleto a esqueleto, una homotopía propia $F: I \times X \longrightarrow X$

tal que 1) $F(0,x) = x$ para cada $x \in X$

y 2) $F|_{1 \times X}$ factorice por J

Notemos que dado un rayo base en X ($\alpha : J \longrightarrow X$) podemos definir una aplicación propia, que llamaremos "constante rayo α", que envia todos los cubos compactos a $\alpha(0)$ y los cubos no compactos según α

Como X tiene un final propio, debe tener al menos un 1-cubo no compacto σ_1. Sea $h_{\sigma_1} : J \longrightarrow \sigma_1$ un homeomorfismo

Consideramos $\theta_{h\sigma_1}$

Pasamos a definir F:

Si v es un vertice de X, como X es arco-conexo, podemos elegir un camino β en X que une v con $h_{\sigma_1}(0)$ Definimos ahora

$$F_0(t,v) = \beta(t) \qquad \text{para cada } t \in I.$$

Notemos que $\theta_{h\sigma_1}$ es 0-homótopa propiamente a $i: X \longrightarrow X$ mediante F_0.

Consideramos

$$\hat{F} = (i, F_0, \theta_{h\sigma_1}) : (0 \times X_1) \cup (I \times X_0) \cup (1 \times X_1) \longrightarrow X$$

Como $\pi_1(X)$ es abeliano y X $(\underline{I})$0-simple, $\Delta^1(\hat{F})$ tiene sentido y además representa un elemento de $Q_{i1}(X;\varphi_1(X)) = 0$, luego podemos extender F al 1-esqueleto de X.

Repitiendo el proceso obtenemos F en las condiciones requeridas.

Llamamos $\varphi: X \longrightarrow J$ a la aplicación que verifica $\theta_{h\sigma_1} = h \circ \varphi$. Como toda aplicación propia $\psi: J \longrightarrow J$ es homótopa propiamente a la aplicación identidad de J, $\varphi \circ h: J \longrightarrow J$ es homótopa propiamente a la aplicación identidad de J.

Por otra parte $h \circ \varphi$ es homótopa propiamente a i, luego X y J son homotópicamente equivalentes de manera propia. #

CAPITULO VI

CLASIFICACION

Como en capitulos precedentes, (X,A) denotará un par propio de complejos cúbicos propios finitos e Y será un espacio topológico arco-conexo, con un solo final propio, (π)n-simple y $(\underline{\pi})(n-1)$-simple

Dada una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$, queremos estudiar el conjunto E de todas las aplicaciones propias $g: X \longrightarrow Y$ que son extensiones de f. E está dividido en clases de homotopía propia relativa a A. El problema que nos planteamos es enumerar estas clases mediante invariantes apropiados del tipo de homotopía propia. Resolveremos el problema cuando X e Y verifiquen hipótesis adicionales a las exigidas hasta ahora

Seguiremos un proceso análogo al seguido hasta el momento y en principio restringimos el problema a calcular las clases de n-homotopía propia que hay en una clase de (n-1)-homotopía propia. Abordaremos este problema en el párrafo 1

En el párrafo 2 exigiremos a Y condiciones más fuertes y, en estas circunstancias, introduciremos nuevos invariantes del tipo de homotopía propia que llamaremos, como en teoría clásica, obstrucciones primarias. En función de estas obstrucciones resolveremos en párrafos posteriores, siempre en las nuevas condiciones para Y, los problemas de extensión, y clasificación

1.-El problema de la clasificación.

Sea θ una (n-1)-clase de homotopía propia relativa a A. θ determina de manera única un grupo cociente de $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$ [Teorema V 5 2], que denotaremos por $Q_\theta n(X,A;\varphi_n(Y))$.

Elegimos una aplicación propia $f\colon X \longrightarrow Y$ como representante de θ. A cada aplicación propia $g \in \theta$ podemos hacerle corresponder el elemento característico $\chi^n(f,g)$ en el grupo $Q_\theta n\ (X,A;\varphi_n(Y))$ [Teorema V.5.9]. Esto da origen a la siguiente definición

__Definición 1__.- Un elemento α de $Q_\theta n(X,A;\varphi_n(Y))$ se dice f-admisible sii existe una aplicación propia g de θ tal que $\chi^n(f,g) = \alpha$

Denotaremos por $A_f n$ el conjunto de los elementos de $Q_\theta n(X,A;\varphi_n(Y))$ que son f-admisibles

__**Proposición 2**__.- Si f y g son dos aplicaciones propias de θ. Entonces el conjuto $A_f n$ es la imagen de $A_g n$ por la traslación en $Q_\theta n\ (X,A;\varphi_n(Y))$ determinada por el elemento caractarístico del par (f,g). En símbolos

$$A_{fn} = \chi^n(f,g) + A_{gn}$$

Demostración - Sea α un elemento de A_{fn}, por tanto, existe una aplicación propia $h \in \theta$ tal que $\chi^n(f,h) = \alpha$.

Sean $K,H: I\times\overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ dos $(n-1)$-homotopías propias relativas a A, entre f y g y f y h, respectivamente.

Construimos $H^*: I\times\overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ como sigue:

$$H^*(t,x) = \begin{cases} K(1-2t,x) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ H(2t-1,x) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

obviamente H^* es una homotopía propia entre g y h relativa a A.

Aplicando el Lema V.2.6, obtenemos

$$\Delta^n(g,H^*,h) = -\Delta^n(f,K,g) + \Delta^n(f,H,h), \text{luego}$$

$$[\Delta^n(f,H,h)] = [\Delta^n(g,H^*,h)] + [\Delta^n(f,K,g)]$$

Por el Lema V.5.7, sabemos que

$$\alpha = \chi^n(f,h) = [\Delta^n(f,H,h)] + \xi_{fn}(R^n(X,A;f)); \qquad \text{luego}$$

$$\chi^n(f,h) = ([\Delta^n(g,H^*,h)] + [\Delta^n(f,K,g)]) + \xi_{fn}(R^n(X,A;f)) =$$

$$=([\Delta^n(g,H^*,h)]+ \xi_{fn}(R^n(X,A;f)))+([\Delta^n(f,K,g)])+(\xi_{fn}(R^n(X,A;f)))$$

Por el teorema V.5.2,

$$\xi_{fn}(R^n(X,A;f)) = \xi_{gn}(R^n(X,A;g)) = \xi_{hn}(R^n(X,A;h))$$

luego $\chi^n(f,h) = \chi^n(g,h) + \chi^n(f,g)$

como $\chi^n(g,h) \in A_{gn}$ se sigue que

$$A_{fn} \subset \chi^n(f,g) + A_{gn}$$

La demostración del otro contenido se hace de manera análoga.

Teorema 3 - El conjunto Ω de las n-clases de homotopía propia relativa a A contenidas en θ, está en correspondencia (1-1) con el conjunto $A_f n$, siendo f un representante de θ

<u>Demostración</u> - El Teorema V.5.9 garantiza que cada elemento $g \in \theta$, determina un elemento $\chi^n(f,g)$ de $A_f n$. Además $\chi^n(f,g)$ únicamente depende de la n-clase de homotopía propia relativa a A de g. En efecto, supongamos que $g, h \in \theta$ son n-homótopas propiamente relativas a A; por el teorema anterior, sabemos que

$$\chi^n(f,h) = \chi^n(f,g) + \chi^n(g,h)$$

Del Teorema V.5.9 se sigue que $\chi^n(g,h) = 0$,

luego $\chi^n(f,h) = \chi^n(f,g)$.

Denotamos por θ_i los elementos de Ω. De lo anterior se deduce que la aplicación

$$\chi^n(f,-): \Omega \longrightarrow A_f n$$

definida por $\chi^n(f,-)(\theta_i) = \chi^n(f,g)$

donde g es un representante de θ_i está bien definida. Además es trivialmente sobre.

Suponemos que existen θ_i y θ_j, representados por g y h respectivamente, tales que $\chi^n(f,-)\theta_i = \chi^n(f,-)\,\theta_j$

entonces $\chi^n(g,h) = \chi^n(f,h) - \chi^n(f,g) = 0$

luego g y h son n-homótopas propiamente relativas a A y $\theta_i = \theta_j$ por tanto $\chi(f,-)$ es biyectiva #

2. Obstrucciones primarias

En este párrafo y en los siguientes Y además de ser arco-conexo y tener un sólo final propio, será un espacio $(\pi)(n-1)$-conexo y $(\underline{\underline{I}})(n-2)$-conexo $(n \geq 2)$

Además si $n = 2$ $\underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha)$ será un grupo abeliano para cada aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow Y$ representante del final de Y

Notemos que, para $n > 2$, $\pi_1(Y,y_0) = 0$ para cada $y_0 \in Y$, $\underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha) = 0$ para cada aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow Y$, por tanto $\underline{\underline{\Pi}}_1(Y,\alpha) = 0$ Como consecuencia Y es $(\pi)(n)$-simple, $(\underline{\underline{I}})(n-1)$-simple y tiene sentido hablar de $\pi_n(Y)$ y de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$

En el caso $n = 2$, $\pi_1(Y,y_0) = 0$ para cada $y_0 \in Y$ y por tanto Y es $(\pi)(n)$-simple

De la sucesión exacta

$$\longrightarrow \pi_2(Y,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_1(Y,\alpha) \longrightarrow \pi_1(Y,\alpha(0)) \longrightarrow$$

se sigue que la aplicación

$$i_*: \underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_1(Y,\alpha)$$

es suprayectiva De [Ri I 5.4] sabemos que $\underline{\underline{\Pi}}_1(Y,\alpha)$ actua en $\underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha)$ por "conjugación"; como $\underline{\underline{I}}_1(Y,\alpha)$ es abeliano, la acción es trivial y por lo tanto Y es tambien $(\underline{\underline{I}})1$-simple.

Sea ahora $f: A \longrightarrow Y$ una aplicación propia. De la Proposición IV 1 2, se sigue que f puede extenderse de manera propia a $\overline{X}_1$; como además $\pi_1(Y) = 0$, f puede extenderse propiamente a $\overline{X}_2$ (Proposición IV,1.8) De la Proposición V 3.5 se deduce que f puede extenderse propiamente a $\overline{X}_n$.

El primer conjunto obstrucción no trivial con que nos encontramos es $\theta^{n+1}(f)$, vamos a estudiarlo a continuación.

Sea $\beta : J \longrightarrow Y$ un representante del final propio de Y y $\theta_\beta : A \longrightarrow Y$ la aplicación "constante rayo β" definida en V.5.12; del Teorema V.5.10 se sigue que θ_β y f son $(n-1)$-homótopas propiamente (A juega aquí el papel que allí jugaba X y el conjunto vacío el que allí jugaba A). Podemos suponer que $f|_{A_{n-1}} = \theta_\beta|_{A_{n-1}}$ pues por la Proposición V.3.2, dos aplicaciones homótopas propiamente, tienen los mismos conjuntos obstrucción. La homotopía que consideramos entre $\theta_\beta|_{A_{n-1}}$ y $f|_{A_{n-1}}$ es la "constante".

Para estudiar la extensión a A_n de esta homotopía, formamos la cocadena diferencia $\Delta^n(\theta_\beta, f)$ que ahora es un elemento de $\mathrm{Hom}(SC_n(|A|); \varphi_n(Y))$. Es obvio que $\Delta^n(\theta_\beta, f)$ es un cociclo, luego representa una clase de cohomología de $G^n(A; \varphi_n(Y))$.

Vamos a estudiar $\Delta^n(\theta_\beta, f) = (d^n(\theta_\beta, f), D^n(\theta_\beta, f))$ más detenidamente.

Sea σ un n-cubo compacto de A,

$$d^n(\theta_\beta, f)(s) = S^{n+1}(F)(i \times \sigma) \qquad (F = (\theta_\beta, f))$$

$S^{n+1}(F)(i \times \sigma)$ es el elemento de $\pi_n(Y)$ representado por $F|_{\partial(i\times\sigma)}$, ahora bien, $F|_{i \times \partial\sigma}(x) = \beta(0)$ para cada $x \in i \times \partial\sigma$

y $F|_{0 \times \sigma}(x) = \beta(0)$ para cada $x \in 0 \times \sigma$.

Como además $F|_{i \times \partial\sigma}(x) = \beta(0)$, $S^{n+1}(F)(i \times \sigma)$ es el elemento de $\pi_n(Y)$ representado por $f|_\sigma : (\sigma, \partial\sigma) \longrightarrow (Y, \beta(0))$.

De la misma manera puede verse que si σ es un n-cubo no compacto, $D^n(F)(\sigma) = C^{n+1}(F)(i \times \sigma)$ es el elemento de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y)$ representado por $f|_\sigma: (\sigma, \partial\sigma) \longrightarrow (Y, \beta)$

Definición 1 - A la clase de cohomología de $G^n(A;\varphi_n(Y))$ representada por $\Delta^n(\theta_\beta, f)$ la denotaremos por $\chi^n(f)$ y la llamaremos elemento característico de f

Notemos que $\chi^n(f)$ no depende del rayo base elegido

Recordemos que un par propio (X,A) tiene asociada una sucesión exacta de cohomología

$$\cdots \to G^n(X;\varphi_n(Y)) \xrightarrow{i^*} G^n(A;\varphi_n(Y)) \xrightarrow{\delta^*} G^{n+1}(X,A;\varphi_n(Y)) \xrightarrow{j^*} G^{n+1}(X;\varphi_n(Y)) \to \cdots$$

Definición 2 - Llamaremos obstrucción primaria a extender f propiamente sobre X y la denotaremos por $\omega^{n+1}(f)$ al elemento de $G^{n+1}(X,A;\varphi_n(Y))$

$$\omega^{n+1}(f) = \delta^* \chi^n(f)$$

Proposición 3 - $\theta^{n+1}(f)$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es precisamente $\omega^{n+1}(f)$

Demostración - En primer lugar demostraremos que $\omega^{n+1}(f)$ es un elemento de $\theta^{n+1}(f)$. Para ello, consideramos las dos siguientes aplicaciones:

$$f_n,\ \theta_{\beta^n}: \overline{X}_n \longrightarrow Y$$

$\theta_{\beta^n}: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ es la aplicación "constante rayo β" definida en (V 5 12) y f_n es la extensión propia de f definida en $X_n \setminus A$

como la aplicación constante rayo β. $f_n|_{\overline{X}_{n-1}} = \theta_{\beta^n}|_{\overline{X}_{n-1}}$ luego son homótopas propiamente a través de la homotopía "constante" Entonces, $\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n) \in \mathrm{Hom}(SC_n(|X|);\varphi_n(Y))$, es la extensión trivial de $\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n)$

luego $$i^{\#}(\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n)) = [\Delta^n(\theta_\beta, f_n)]$$

Entonces $$(\omega)^{n+1}(f) = \delta^*\chi^n(f) = \delta^*([\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n)])$$

está representado por $$\delta(\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n)) = SC^{n+1}(f_n) - SC^{n+1}(\theta_{\beta^n})$$

como $$SC^{n+1}(\theta_{\beta^n}) = 0$$

deducimos que $$\delta(\Delta^n(\theta_{\beta^n}, f_n)) = SC^{n+1}(f_n)$$

luego $\delta^*\chi^n(f) = \omega^{n+1}(f)$ está representado por $SC^{n+1}(f_n)$ y por lo tanto $\delta^*\chi^n(f) \in \theta^{n+1}(f)$.

Sea ahora γ un elemento cualquiera de $\theta^{n+1}(f)$, γ está representado por una obstrucción $SC^{n+1}(g)$ donde $g: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ es una extensión propia de f De la proposición V.5.10 se sigue que g y f_n son (n-1)-homótopas propiamente relativas a A Suponemos entonces que $g|_{\overline{X}_{n-1}} = f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y consideramos $\Delta^n(f_n, g)$

$$\delta\Delta^n(f_n, g) = SC^{n+1}(g) - SC^{n+1}(f_n)$$

entonces $$SC^{n+1}(g) = SC^{n+1}(f_n) + \delta\Delta^n(f_n, g)$$

luego $$[SC^{n+1}(g)] = [SC^{n+1}(f_n)] = \delta\chi^n(f) \quad \#$$

Volvemos de nuevo al problema de la homotopía propia Sean ahora $f, g: X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones propias tales que $f|_A = g|_A$ De la proposición V.5.10 se sigue que f y g son (n-1)-homótopas propiamente (relativas a A) a la aplicación "constante rayo β" θ_β, podemos suponer que $f|_{\overline{X}_{n-1}} = g|_{\overline{X}_{n-1}} = \theta_\beta|_{\overline{X}_{n-1}}$ y definir como antes $\chi^n(f)$ y $\chi^n(g)$, que ahora son elementos de $G^n(X, \varphi_n(Y))$

Sean ahora H y H' : $I \times \overline{X}_{n-1} \longrightarrow Y$ dos homotopías propias entre $f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y $g|_{\overline{X}_{n-1}}$ $F = (f,H,g)$ y $F'=(f,H',g)$ son dos aplicaciones propias $F, F' : \widehat{X}_n \longrightarrow Y$, tales que $F|_{\widehat{A}} = F'|_{\widehat{A}}$ De la Proposición V.5.10 se sigue que F y F' son (n-1)-homótopas propiamente relativas a A, a la aplicación "constante rayo β". $(\theta_\beta : \widehat{X} \longrightarrow Y)$

Consideramos $\Delta^n(F,F') \in \mathrm{Hom}(SC_n(|\widehat{X},\widehat{A}|; \varphi_n(Y))$

Entonces,	$\delta(\Delta^n(F,F') = SC^{n+1}(F') - SC^{n+1}(F)$,
luego	$[SC^{n+1}(F')] = [SC^{n+1}(F)]$
Como	$\Delta^n(f,H,g) = SC^{n+1}(F) \circ k$
y	$\Delta^n(f,H',g) = SC^{n+1}(F') \circ k$,
concluimos que	$[\Delta^n(f,H,g)] = [\Delta^n(f,H',g)]$

De todo esto deducimos la siguiente proposición

Proposición 4.- El conjunto obstrucción propia n-dimensional $\theta^n(f,g)$ es unitario, a su único elemento lo denotaremos $\omega^n(f,g)$ y lo llamaremos obstrucción primaria de homotopía propia relativa a A. Además, se verifica $j^* \omega^n(f,g) = \chi^n(f) - \chi^n(g)$

Demostración.- La primera afirmación está ya demostrada.

Por ser	$f|_{\overline{X}_{n-1}} = g|_{\overline{X}_{n-1}} = \theta_\beta|_{\overline{X}_{n-1}}$
consideramos	$\Delta^n(f,g) = \Delta^n(f,\theta_\beta) - \Delta^n(g,\theta_\beta)$

$j^*(\omega^n(f,g)) = [\Delta^n(f,g)] = [\Delta^n(f,\theta_\beta)] - [\Delta^n(g,\theta_\beta)] = \chi^n(f) - \chi^n(g)$ #

Del Lema V 5 7 y de la proposición anterior obtenemos

Corolario 5 - $\xi_{fn}(R^n(X,A,f)) = 0$

y $\quad O_f n(X,A;\, \varphi_n(Y)) = G^n(X,A;\, \varphi_n(Y))$

3.- Teorema de extensión propia primaria

En este párrafo, mediante las obstrucciones primarias y los resultados de capítulos precedentes, daremos solución al problema de la extensión propia para el caso en que $\dim(X\setminus A) \leq n+1$

Definición 1 - Un elemento del grupo de cohomología $G^n(A;\, \varphi_n(Y))$ es extensible sobre X si pertenece a Im i^*, donde

$$i^*\colon G^n(X;\, \varphi_n(Y)) \longrightarrow G^n(A;\, \varphi_n(Y))$$

es el homomorfismo inducido en cohomología por la inclusión propia $i\colon A \longrightarrow X$

Teorema 2 - Dada una aplicación propia $f\colon A \longrightarrow Y$, las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

i) f puede extenderse propiamente a $\overline{X}_{n+1}$

ii) $\omega^{n+1}(f) = 0$

iii) $\chi^n(f)$ es extensible sobre X

Demostración - f puede extenderse propiamente a $\overline{X}_{n+1}$ si y solo si el conjunto obstrucción $\theta^{n+1}(f)$ contiene al elemento 0 de

$G^{n+1}(X,A\,;\,\varphi_n(Y))$ En las actuales condiciones para Y, $\theta^{n+1}(f)$ sólo contiene al elemento $\omega^{n+1}(f)$ (Proposición 2.3), luego las afirmaciones i) e ii) son equivalentes.

$\omega^{n+1}(f) = \delta^*\chi^n(f)$ donde δ^* es el operador de conexión de la sucesión exacta de cohomología asociada al par (X,A)

$$\longrightarrow G^n(X;\varphi_n(Y)) \xrightarrow{i^*} G^n(A;\varphi_n(Y)) \xrightarrow{\delta^*} G^{n+1}(X,A;\varphi_n(Y)) \longrightarrow$$

$\omega^{n+1}(f) = 0$ si y solo si $\chi^n(f) \in \operatorname{Ker} \delta^* = \operatorname{im} i^*$

luego ii) y iii) son equivalentes

<u>**Corolario 3**</u> - Si $\dim(X\setminus A) \leq n+1$. Una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$ se extiende propiamente a todo X, si y sólo si su elemento característico $\chi^n(f)$ es extensible sobre X

La siguiente generalización del Corolario 3, es una consecuencia inmediata de V.3.5.

<u>**Teorema 4**</u> - Si Y es (π)r-simple, $(\underline{\underline{I}})$(r-1)-simple y además $G^{r+1}(X,A;\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r < \dim(X\setminus A)$, entonces una aplicación propia $f: A \longrightarrow Y$ puede extenderse de una manera propia a X, si y sólo si el elemento característico de f, $\chi^n(f)$, es extensible sobre X.

Notemos que si $n > 2$, como Y es (π)(n-1) conexo y $(\underline{\underline{I}})$(n-2)-conexo, es trivialmente (π)r-simple y $(\underline{\underline{I}})$(r-1)-simple para cualquier r. En este caso pueden obviarse del enunciado estas dos condiciones.

Si n = 2, Y sigue siendo (π)r-simple para cualquier r, y puede obviarse esta condición del enunciado, sin embargo debemos seguir exigiendo que Y sea $(\underline{\underline{1}})(r-1)$-simple.

Observemos que en particular las hipóteis del Teorema 4 se cumplen siempre que $\pi_r(Y) = 0 = \underline{\underline{I}}_{r-1}(Y)$ para cada $n < r < \dim(X\setminus A)$. Cuando esto ocurra, lo indicaremos diciendo que $\varphi_r = 0$ para cada r tal que $n < r < \dim(X\setminus A)$. No será suficiente que φ_r sea la aplicación 0 entre dos grupos distintos del grupo 0, ni siquiera que únicamente $\pi_r(Y) = 0$ para cada r tal que $n < r < \dim(X\setminus A)$.

4.- Teoremas de Homotopía propia primarios

Teorema 1 - Dos aplicaciones propias $f,g: X \longrightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$ son n-homótopas relativas a A, si y sólo si $\omega^n(f,g) = 0$

Demostración - Sabemos que f y g son homótopas propiamente relativas a A si y sólo si $\theta^n(f,g) = \xi_{fn}(R^n(X,A;f))$ [Lema V 5 8]

En las actuales condiciones para Y, $\xi_{fn}(R^n(X,A;f)) = 0$ [Corolario 2 5] Además $\theta^n(f,g)$ consta de un sólo elemento $\omega^n(f,g)$ [Proposición 2 4] Inmediatamente se deduce la afirmación del teorema #

Para $A = \emptyset$ Obtenemos inmediatamente el siguiente corolario

Corolario 2.- Son equivalentes:

i) f y g son n-homótopas propiamente.

ii) $\omega^n(f,g) = 0$

iii) $\chi^n(f) = \chi^n(g)$

Si $\dim X = n$ es inmediato:

Corolario 3.- f y g son homótopas propiamente si y sólo si $\chi^n(f) = \chi^n(g)$

Como consecuencia del Corolario 3 y de la Proposición V.5.10, obtenemos inmediatamente:

Teorema 4.- Si Y es $(\pi)r$-simple. $(\underline{\underline{I}})(r-1)$-simple y además $G^r(X,A;\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r \leq \dim X$, entonces dos aplicaciones propias $f,g\colon X \longrightarrow Y$ son homótopas propiamente si y sólo si $\chi^n(f) = \chi^n(g)$.

Los comentarios posteriores al Teorema 3.4 son válidos también aquí, con la salvedad que ahora es suficiente para que se verifique el Teorema que $\pi_r(Y) = 0 = \underline{\underline{I}}_{r-1}(Y)$ para cada r tal que $n < r \leq \dim X$.

5.-Teoremas de clasificación propia primaria.

Lema 1.- Si Y es $(\pi)r$-simple, $(\underline{I})(r-1)$-simple y $G^{r+1}(X,A;\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r \leq \dim (X\setminus A)$, entonces, para cada aplicación propia $f: X \longrightarrow Y$ y para cada elemento c de $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$, existe una aplicación propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que $f|_A = g|_A$ y $\omega^n(f,g) = c$.

Demostración.- Sea z un cociclo de $\mathrm{Hom}(SC_n(|X,A|);\varphi_n(Y))$ que representa a c. Del Lema V.5.2. deducimos que existe una aplicación propia $h: \overline{X}_n \longrightarrow Y$ tal que $h|_{\overline{X}_{n-1}} = f|_{\overline{X}_{n-1}}$ y además $\Delta^n(f,h) = z$. Entonces:

$$0 = \delta z = \delta(\Delta^n(f,h)) = SC^{n+1}(h) - SC^{n+1}(f) .$$

Como $SC^{n+1}(f) = 0$, $SC^{n+1}(h) = 0$ y por lo tanto h puede extenderse propiamente a $\overline{X}_{n+1}$. De la Proposición V.3.5 se sigue que h puede extenderse a una aplicación propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que $f|_A = g|_A$. Además, $\omega^n(f,g) = [\Delta^n(f,g)] = [\Delta^n(f,h)] = [z] = c$.

Si $A = \emptyset$, podemos enunciar el Lema 1 de la siguiente manera.

Lema 2.- Si Y es $(\pi)r$-simple, $(\underline{I})(r-1)$-simple y $G^{r+1}(X;\varphi_r(Y))= 0$ para cada r tal que $n < r < \dim X$, entonces, para cada elemento c de $G^n(X;\varphi_n(Y))$, existe una aplicación propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que $\chi^n(g) = c$.

Como en el párrafo anterior, los comentarios posteriores al Teorema 3.4 son también válidos aquí.

Consideramos una aplicación propia $f: X \longrightarrow Y$. Sea E el conjunto de todas las aplicaciones propias $g: X \longrightarrow Y$ tales que $g|_A = f|_A$. Como para cada $q < n$, $\pi_q(Y) = 0$ y $\underline{\underline{\pi}}_{q-1}(Y) = 0$, existe una sola $(n-1)$-clase de homotopía propia relativa A. Vamos a calcular cuantas n-clases hay en E.

Teorema 3 - Si Y es $(\pi)r$-simple $(\underline{\underline{\pi}})(r-1)$-simple y $G^{r+1}(X,A;\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r < \dim (X\setminus A)$, entonces las clases de n-homotopía propia relativa a A de E están en correspondencia (1-1) con los elementos del grupo $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$. La correspondencia viene dada asignando a cada clase θ_n de E representada por la aplicación propia g, el elemento $\omega^n(f,g)$ de $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$.

Demostración - Del Corolario 2.5 sabemos que

$$O_{fn}(X,A;\varphi_n(Y)) = G^n(X,A;\varphi_n(Y))$$

Por tanto, del Lema 1, se sigue que todo elemento de $O_{fn}(X,A;\varphi_n(Y))$ es f-admisible, luego

$$A_{fn} = G^n(X,A;\varphi_n(Y))$$

La conclusión de este Teorema se sigue de 1.3.

Si $A = \emptyset$ el Teorema 3 puede enunciarse como sigue:

Corolario 4 - Si Y es $(\pi)r$-simple, $(\underline{\underline{\pi}})(r-1)$-simple y $G^{r+1}(X,\varphi_r(Y)) = 0$ para cada r tal que $n < r < \dim X$, las n-clases de homotopía propia de aplicaciones propias $f: X \longrightarrow Y$ están en correspondencia (1-1) con los elementos del grupo $G^n(X;\varphi_n(Y))$. La correspondencia viene dada asignando a cada clase θ_n representada por la aplicación propia g, el elemento $\chi^n(g)$ de $G^n(X;\varphi_n(Y))$.

Si dim X = n, obtenemos:

Corolario 5.- Las clases de homotopía propia de aplicaciones propias $f: X \longrightarrow Y$ están en correspondencia (1-1) con los elementos del grupo $G^n(X;\varphi_n(Y))$

De los Teoremas 3 y 4.4 y del corolario anterior se obtienen inmediatamente el siguiente teorema

Teorema 6 - Si Y es (π)r-simple, $(\underline{\mathrm{I}})$(r-1)-simple y además

$$G^{r+1}(X,A;\varphi_r(Y)) = 0 = G^r(X,A;\varphi_r(Y))$$

para cada r tal que $n < r \leq \dim (X\setminus A)$, entonces las clases de homotopía propia relativa a A de E, están en correspondencia (1-1) con los elementos del grupo de cohomología $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$. La correspondencia viene dada asignando a cada clase θ_n, representada por g, el elemento de $\omega^n(f,g)$ de $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$

En particular las hipótesis del Teorema 6 se cumplen siempre que $\pi_r(Y) = 0 = \underline{\mathrm{I}}_{r-1}(Y)$ para cada r tal que $n < r \leq \dim (X\setminus A)$.

6.-Ejemplos

En este párrafo vamos a calcular algunos conjuntos de clases de homotopía propia de aplicaciones propias $f: X \longrightarrow Y$, haciendo uso de los teoremas de clasificación primaria del párrafo 5 del Capítulo VI. Estos teoremas expresan dichos conjuntos en términos de los grupos de cohomología propia $G^n(X,A;\varphi_n(Y))$. Tendremos que calcular estos grupos. Podemos hacerlo directamente ó utilizando el Teorema de los coeficientes universales del Capítulo II. Los cálculos pueden ser largos. Sin embargo cuando $\pi_n(Y) = 0$ y $\underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(Y) \cong G$, ó cuando $\pi_n(Y) \cong G$ y $\underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(Y) = 0$, estos cálculos se simplifican. Como en los ejemplos que desarrollaremos nos encontramos en este caso, vamos a estudiarlo.

<u>Proposición 1</u> - Sea X un complejo cúbico propio finito e Y un espacio topológico tal que $\pi_n(Y) = 0$ y $\underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(Y) \cong G$. Entonces

$$G^n(X;\varphi_n(Y)) \cong E^n(X;G)$$

donde $E^n(X;G)$ es el n-ésimo grupo de cohomología final propia definido en [E-H-R].

<u>Demostración</u> - $G^n(X;\varphi_n(Y)) = H_n(\mathrm{Hom}(SC_*(|X|);\ \varphi_n(Y)))$

En este caso $(\varphi_n : 0 \longrightarrow G)$.

Podemos definir un morfismo de cocadenas,

$$\theta: \mathrm{Hom}_{Ab}(SC_*(|X|);\ \varphi_n(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_*(|X|)/S_*(|X|);\ G),$$

donde Hom_{Ab} es el funtor Hom en la categoría Morf Ab y Hom el mismo funtor en la categoría Ab, de la siguiente manera:

Dado $(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}(SC_q(|X|);\ \varphi_n(Y))$

$$\begin{tikzcd}
S_q(|X|) \arrow[r] \arrow[dr, "f_1"] & C_q(|X|) \arrow[rr] \arrow[dr, "f_2"] & & C_q(|X|) / S_q(|X|) \arrow[dl, dashed] \\
& 0 \arrow[r] & G &
\end{tikzcd}$$

induce de manera única $f: C_q(|X|) / S_q(|X|) \longrightarrow G$

Dada f define inmediatamente f_1 y f_2, luego θ es un isomorfismo

Por lo tanto

$$H_n(\mathrm{Hom}(SC_*(|X|);\ \varphi_n(Y))) \cong H_n(\mathrm{Hom}((C / S)_*(|X|);\ G))$$

luego $$G^n(X;\varphi_n(Y)) \cong E^n(X;G) \qquad \#$$

Efectuando un proceso análogo obtenemos:

Proposición 2 - Sea X un complejo cúbico propio finito e Y un espacio topológico tal que $\pi_n(Y) \cong G$ y $\underline{\underline{I}}_{n-1}(Y) = 0$ Entonces

$$G^n(X;\varphi_n(Y)) \cong H^n(X;G)$$

donde $H^n(X;G)$ es el n-ésimo grupo de cohomología singular de X con coeficientes en G.

Ejemplo 1.- Sea X un complejo cúbico propio finito. Vamos a calcular el conjunto de clases de homotopía propia de aplicaciones propias $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $([X;\mathbb{R}^2]_p)$

$\mathbb{R}^2$ es un espacio contráctil, luego $\pi_r(\mathbb{R}^2) = 0$ para todo r

Además por la Proposición 5.3 III [Ri] $\underline{\underline{I}}_0(\mathbb{R}^2) = 0$, $\underline{\underline{I}}_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{Z}$ y $\underline{\underline{I}}_q(\mathbb{R}^2) = 0$ para todo $q > 1$

Entonces del Teorema VI.5.6 se sigue que

$$[X, \mathbb{R}^2]_p \cong G^2(X; \varphi_2(\mathbb{R}^2))$$

Como $\pi_2(\mathbb{R}^2) = 0$ y $\underline{\underline{I}}_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{Z}$, de la Proposición 1 obtenemos.

$$G^2(X; \varphi_2(\mathbb{R}^2)) \cong E^2(X; \mathbb{Z})$$

Para la cohomología E^* existe un teorema de los coeficientes universales, luego tenemos la sucesión exacta escindible

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(E_1(X); \mathbb{Z}) \longrightarrow E^2(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_2(X); \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

luego $\qquad E^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(E_1(X); \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(E_2(X); \mathbb{Z})$

Como $E_1(X)$ es el grupo abeliano libre de rango el número de finales propios de X, se sigue que $\mathrm{Ext}(E_1(X); \mathbb{Z}) = 0$

por lo tanto $\qquad E^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(E_2(X); \mathbb{Z})$

Ejemplo 2 - Sea ahora X una superficie de género finito a la que se ha quitado el número finito q de puntos. Como antes calculamos $[X, \mathbb{R}^2]_p$

No es difícil ver que una superficie de este tipo admite una estructura de complejo cúbico propio finito. Por lo tanto (ejemplo 1)

$$[X, \mathbb{R}^2]_p \cong \mathrm{Hom}(E_2(X); \mathbb{Z}).$$

Además [Teorema I.3.5] sabemos que $E_2(X) \cong H_1(L_1)$.

En este caso L_1 consta de q circunferencias,

luego $\qquad H_1(L_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \overset{q}{\widehat{\cdots}} \oplus \mathbb{Z}$

y por consiguiente

$$[X, \mathbb{R}^2]_p \cong \mathbb{Z} \oplus \overset{q}{\widehat{\cdots}} \oplus \mathbb{Z}$$

Ejemplo 3.- Vamos a calcular $[X,\mathbb{R}^3]_p$ donde X es el mismo espacio que en el ejemplo 2.

Como $\mathbb{R}^3$ es un espacio contráctil $\pi_r(\mathbb{R}^3) = 0$ para todo r

Además [Ri 5 3 III] $\underline{\underline{I}}_0(\mathbb{R}^3) = \underline{\underline{I}}_1(\mathbb{R}^3) = 0$ y $\underline{\underline{I}}_2(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{Z}$

Como antes $[X,\mathbb{R}^3]_p \cong G^2(X;\varphi_2(\mathbb{R}^3))$

como $\varphi_2(\mathbb{R}^3)$ es $\varphi: 0 \longrightarrow 0$,

se sigue que $[X,\mathbb{R}^3]_p = 0$

Evidentemente, este resultado puede generalizarse a $\mathbb{R}^n$ y se obtiene

$$[X,\mathbb{R}^n]_p = 0 \quad \text{para cada } n \geq 3.$$

Ejemplo 4.- X es ahora el interior de una P.L variedad compacta M con borde no vacío. Vamos a calcular $[X,\mathbb{R}^2]_p$.

Como en el ejemplo 1, aplicando el Teorema VI.5.6, se obtiene:

$$[X,\mathbb{R}^2]_p \cong G^2(X;\varphi_2(\mathbb{R}^2))$$

por las mismas razones que el el ejemplo 1

$$G^2(X;\varphi_2(\mathbb{R}^2)) \cong E^2(X;\mathbb{Z})$$

Volviendo a aplicar el teorema de los coeficientes universales obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(E_1(X);\mathbb{Z}) \longrightarrow E^2(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_2(X);\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Como $E_1(X)$ es un grupo abeliano libre $\mathrm{Ext}(E_1(X);\mathbb{Z}) = 0$

luego $E^2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(E_2(X);\mathbb{Z})$.

Vamos a calcular $E_2(X)$. Por el Teorema del collar para variedades PL, sabemos que todo entorno del borde de M (∂M) es de la forma $\partial M \times [0,1]$, en X serán $\partial M \times [0,1)$

Aplicando otra vez el Teorema I.3.5

$$E_2(X) \cong H_1(\partial M)$$

Por los Teoremas de estructura de grupos abelianos $H_1(\partial M)$ es suma directa de grupos abelianos libres y grupos cíclicos

$$H_1(\partial M) = \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbb{Z}}^{q} \oplus \mathbb{Z}_{p1} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbb{Z}_{pr}$$

Entonces $$\mathrm{Hom}(E_2(X);\mathbb{Z}) \cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbb{Z}}^{q}$$

Por lo tanto, el conjunto de clases de homotopía propia de aplicaciones propias del interior de una PL variedad compacta con borde no vacío en $\mathbb{R}^2$ es isomorfo al grupo abeliano libre de rango el primer número de Betti del borde de la variedad

Ejemplo 5 - Sea X un complejo cúbico propio finito de dimensión n, queremos calcular $[X,\mathbb{R}^n]_p$

$\pi_r(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo r y $\underline{\underline{I}}_r(\mathbb{R}^n) = 0$ para cada r tal que $0 \leq r < n-1$

Por el Corolario VI.5.5

$$[X,\mathbb{R}^n]_p \cong G^n(X;\varphi_n(\mathbb{R}^n))$$

como $\pi_n(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\underline{\underline{I}}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$, de la Proposición 1 obtenemos

$$G^n(X;\varphi_n(\mathbb{R}^n)) \cong E^n(X;\mathbb{Z})$$

y por el Teorema de los coeficientes universales

$$E^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(E_{n-1}(X);\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(E_n(X);\mathbb{Z})$$

Ejemplo 6 - Sea X el interior de una 3-variedad compacta orientable con borde no vacío M^3. Calculamos $[X,\mathbb{R}^3]_p$

Del ejemplo anterior se sigue

$$[X,\mathbb{R}^3]_p \cong \mathrm{Ext}(E_2(X);\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(E_3(X);\mathbb{Z})$$

Como antes $E_2(X) \cong H_1(L_2)$

En este caso L_2 es una unión de superficies orientables, por lo tanto $H_1(L_2)$ es un grupo abeliano libre luego, $\mathrm{Ext}(E_2(X), \mathbb{Z}) = 0$

Asimismo $E_3(X) \cong H_2(L_2)$

y $H_2(L_2)$ es el grupo abeliano libre de rango el número de finales de X

Por lo tanto $[X, \mathbb{R}^3]_p \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAFIA

[Al] **ALEXANDROFF P**. "Untersuchungen uber Gestalt und lage abgeschlossener Mengen beliebiger dimension" Ann. of Math. 30 101-187 (1928)

[Bl] **BLAKERS A**.L."Some relations between homology and homotopy groups" Ann of Maths (2) 49 428-461 (1948)

[Ba] **BAUES H**.J. "Obstruccion theory" L.N.M. 628 Springer (1977)

[Bo] **BORSUK K**. "Concerning homotopy properties of compacta" Fund. Math. 62 223-254 (1968)

[Bru] **BROUWER L.E.J.** "Uber Abbildungen von Mannigfalkeiten" Math. Annln. 71, 97-115 (1912)

[Brw 1] **BROWN E**.**M**. "On the proper homotopy type of simplicial complexes" L.N.M. nº 375 Springer (1975)

[Brw 2] **BROWN E**.**M**. "Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity" Trans. Amer. Math Soc.245 503-514 (1978)

[Brs] **BRUSCHLINSKY M.** "Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3" Math. Ann. 109 (1934) 525-537

[Bl-M] **BLAKERS A**.L. and **MASSEY W**.S. "The homotopy groups of a triad" Ann. of Math. (2) 53 161-205 (1951)

[B-T] **BRIN M**.G. and **THICKSTUN T**.L. "On the proper Steenrod homotopy groups and proper embeddings of planes into 3-manifolds"

[Brw-M] **BROWN E**.**M**. and **MESSER R**. "The classification of two dimensional manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 255 377-402 (1979)

[Brw-T] **BROWN E.M.** and **TUCKER T.W.** "On proper homotopy theory for non compact 3-manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 188 105-126 (1974)

[Bu-R-S] **BUONCRISTIANO S. ROURKE C.P.** and **SANDERSON B.J.** "A geometric approach to homology theory" London Mathematical Society. Lecture Note Series 18. Cambridge University Press.

[Č] **ČECH E.** "Theorie générale de l' homologie dans un space quelconque" Fundam. Math. 19 149-183 (1932)

[Če] **ČERIN Z.** "On various relative proper homotopy groups" Tsukuba J. Math. Vol 4 nº2 177-202 (1980)

[Do] **DOLD.A.** "Lectures on algebraic Topology" Springer Verlag (1972)

[Dm-He 1] **DOMINGUEZ E.** y **HERNANDEZ L.J.** "Some relationships between proper ends and Freudenthal's ends" Por aparecer.

[Dm-He 2] **DOMINGUEZ E.** y **HERNANDEZ L.J.** "Groupes d'homotopie prope associés a una categorie de prebordisme " C.R. Acad. Sc. Paris 295 161-166 (1982)

[E. 1] **EILENBERG S.** "On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups" Fund. Math. 32 167-175 (1939)

[E. 2] **EILENBERG S.** "Cohomology and continuous mappings" Ann. of Math. vol. 41 nº1 231-251 (1940)

[E. 3] **EILENBERG S.** "Continuous mappings of infinite polyhedra" Ann. of Math. (2) 42 459-468 (1941)

[E. 4] **EILENBERG S.** "Singular homology theory" Ann.

of Math. (2) 45 407-447 (1944)

[Ed-Hs] **EDWARDS D.** and **HASTING H.** "Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology" L.N.M. 542 Springer (1976)

[E-M] **EILENBERG S.** and **MC LANE S.** "Relations between homology and homotopy group of spaces" Ann. of Math. (2) 46. 480-505 (1945)

[E-H-R] **EXTREMIANA J.I., HERNANDEZ L.J.** y **RIVAS M.T.** "Una (co) homologia propia" Actas X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Murcia (1985).

[F.H.1] **FREUDENTHAL H.** "Über die enden topologischer raume und gruppen" Math. Z. 33 692-713 (1931)

[F.H 2] **FREUDENTHAL H.** "Über die klassen der Sphärenabbildungen I" Compositio Math. 5 (1937) 299-314

[F] **FREYD P.** "Abelian categories" Harper International (1964)

[G.B.] **GRAY B.** "Homotopy theory" Academic Press (1975)

[G-M-M] **GARCIA-MARGALEF-OLANO-OUTERELO-PINILLA.** "Topología" Tomo I , Alhambra (1975)

[He. 1] **HERNANDEZ L.J.** "A note on proper invariants" Publicaciones del Sem. Mat. García de Galdeano. Serie II, sección 1 nº 12 (1984)

[He. 2] **HERNANDEZ L.J.** "About the extension problem for proper maps" Publicaciones Sem. Mat. García de Galdeano. Sección 1 nº 58 (1985)

[Ho.1] **HOPF H.** "Die klassen der Abbildungen der n-dimensionalen polyeder auf die n-dimensionalen sphäre" Comentarii Mathematici Helveciti vol.5 39-54 (1933)

[Ho.2] **HOPF H.** "Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrieger Dimension" Fund. Math. 25 (1935) 427-440

[Ho.3] **HOPF H.** "Über die Abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die Kugelflache" Math. Ann. 104 (1939) 639-665

[Hu 1] **HU S.T.** "Mappings of a normal space into an absolute neighborhood retract" Trans. Amer. Math Soc. 64 336-358 (1948)

[Hu 2] **HU S.T.** "On a general homotopy problem of Eilenberg" Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser A 5 267-272 (1949)

[Hu.3] **HU S.T.** "Algebraic Local invariants of topological spaces" Compositio Math. 13 173-218 (1958)

[Hu 4] **HU S.T.** "Homotopy theory" Academic Press (1959)

[Hw] **HUREWICZ W.** "Beiträge Zur topologie der deformationen I-IV" Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 38 112-119,521-528 (1935); 39 117-126, 215-224 (1936)

[Hi-S] **HILTON P.J.** and **STAMMBACH U.** "A course in Homological Algebra" G.T.M. 4 Springer(1971)

[L] **LEFSCHETZ S.** "Sur les transformations des complexes en spheres" Fund. Math. vol 27 94-115 (1936)

[Li] **LISITSA YU. T.** "A Hopf clasification theorem in shape theory" Siberian Math. J. 18 107-119 (1977)

[Lu-W] **LUNDELL A.T.** and **WEINGRAM S.** "The topology of cw-complexes" The University series in Higher Matematics. Van Nostrad Reinold Company (1969)

[M] **MASSEY W.S.** "Singular homology theory" GTM 70 Springer (1980)

[Mi] **MITCHELL B.** "Theory of Categories" Academic Press (1965)

[O.1] **OLUM P.** "Obstructions to extensions and homotopies" Ann. of Math. (2) 52. 1-50 (1950)

[Po] **POINCARE H.** "Analysis situs" J. Ecole Polytech. (2) 1 1-121 (1895)

[Pn 1] **PONTRJAGIN L.** "A classification of continuous trasformations lo a complex into a sphere. 1,2" C.R. Akad. nauk. U.R.S.S. 19 (1938) 147-149, 361-363

[Pn 2] **PONTRJAGIN L.** "A classification of mappings of the 3-dimensional complex into the 2-dimensonal sphere" Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 9(51) (1941) 361-363

[Pp] **POPESCU N.**"Abelian categories with applications to Rings and Modules" Academic Pres (1973)

[Pr 1] **PORTER T.** "Coherent prohomotopy theory" Cahier. Top. Geom. Diff. 19 3-46 (1978)

[Pr 2] **PORTER T.** "Čech and Steenrod homotopy and the Quigley exact couple in strong shape and proper homotopy theory" J. Pure. Appl. Alg. 24 303-312 (1983)

[Pr 3] **PORTER T.** "Homotopy groups for strong shape and proper homotopy theory" Convegno di Topologia Serie II nº4 (1984)

[Ps] **POSTNIKOV M.M.** "Investigations in homotopy theory of continuous mappings" I.II.III Am. Math. Soc. Trans. Serie 2 Vol 7 1-134 (1957) Serie 2 Vol 11 115-153 (1959)

[Ri] **RIVAS M.T.** "Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones" Colegio Universitario de La Rioja (1986)

[Si] **SIEBENMANN L.C.**"Infinite simple homotopy tipes" Indag. Math. 32 479-495 (1970)

[St 1] **STEENROD N.E.**"Product of cocycles and extensions of mappings" Annals of Math. 48 290-320 (1947)

[St 2] **STEENROD N.E.** "The topology of fibre bundles" Princeton University Press (1951)

[St 3] **STEENROD N.E.** "Cohomology operations and obstructions to extendeng continuons functions" Adv.Math.8 (1972) 371-416

[W.G. 1] **WHITEHEAD G.W.** "Homotopy theory" Massachusetts Institute of Technology (1966)

[W.G. 2] **WHITEHEAD G.W.** "Elements of homotopy theory" G.T.M. 61 Springer (1978)

[Wh] **WHITEHEAD J.H.C.** "Combinatorial homotopy I" Bull. Am. Math. Soc. 55 213-245 (1949)

[Wi 1] **WHITNEY H.** "The maps of an n-complex into an n-sphere" Duke Math. J. 3 51-55 (1937)

[Wi 2] **WHITNEY H.** "An extension theorem for mappinngs into simply connected spaces" Ann.of Math. 2 285-296. (1949)