

TESIS DOCTORAL

Sobre la estabilidad de sistemas
hamiltonianos de dos grados de
libertad bajo resonancias

Ana Isabel Pascual Lería



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

**Sobre la estabilidad de sistemas
hamiltonianos de dos grados de
libertad bajo resonancias**

Ana Isabel Pascual Lería

**Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2005**

Esta tesis doctoral, dirigida por los doctores D. Victor Lanchares Barrasa y D. José Pablo Salas Ilarraza, fue leída el 25 de febrero de 2005, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude por Unanimidad.

© Ana Isabel Pascual Lería

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-689-3642-1

**Sobre la estabilidad
de sistemas hamiltonianos
de dos grados de libertad
bajo resonancias**

Ana Isabel Pascual Lería



Departamento de Matemáticas y Computación

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Sobre la estabilidad de sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad bajo resonancias

Ana Isabel Pascual Lería

Memoria presentada para optar al
Título de Doctora

Directores: Dr. D. Víctor Lanchares Barrasa
Dr. D. José Pablo Salas Ilarraza



Departamento de Matemáticas y Computación

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

A Rafa, a mi familia y amigos.

Aprovecho estas líneas para agradecer a todas las personas que, de un modo u otro, han contribuído a la realización del presente trabajo.

En primer lugar, a mis directores de tesis, Víctor Lanchares y José Pablo Salas, que no sólo han llevado la dirección de esta memoria, sino que han colaborado activamente en la obtención de los resultados que en ella aparecen, aportando en todo momento sus ideas y sus valiosos conocimientos.

También quiero agradecer a Antonio Elipe, Manuel Iñarrea, Jesús Palacián, Juan Félix San Juan y Patricia Yanguas la ayuda que me han prestado, permitiéndome que me adentrara en la labor científica que ellos han puesto en marcha.

A todo el departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja por confiar en mí y prestarme, no sólo los medios adecuados, sino también el ánimo necesario para la consecución de este trabajo. A Blanca, José Antonio, Juan Carlos y Óscar, con los que tantos ratos he compartido, siempre animando y ayudando. A César, compañero de carrera, de despacho y de autobús, que siempre ha estado dispuesto a escuchar y a ofrecer su ayuda.

No menos importante han sido a lo largo de estos años, la comprensión y continuo apoyo de mi familia y amigos. A mis padres, Enrique y Feli, y a mi hermana, Sara, que han compartido conmigo la ilusión de este y otros proyectos. A mis tíos, Alejandro y Miguela, que siempre me han acogido en su casa con cariño y han permitido que mi estancia en Logroño fuera más agradable. Y finalmente, y de forma especial, a mi marido, Rafa, por su paciencia, por su humor y por la ayuda y ánimo que me ha dado siempre.

A todos ellos, gracias.

Introducción

La cuestión de la estabilidad de sistemas hamiltonianos es una pieza fundamental en el estudio de problemas, tanto en Mecánica Clásica como en Mecánica Celeste (véase por ejemplo [11, 19, 53]). Además, es un tema de gran interés matemático. No obstante, el problema es difícil de abordar, incluso para sistemas de dos grados de libertad donde, a pesar de ser el caso más simple y donde más estudios hay realizados, todavía quedan situaciones especiales sin resolver.

En este trabajo nos centraremos en el caso de un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad definido por una función analítica $\mathcal{H}(q_1, q_2, P_1, P_2)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el origen es un equilibrio aislado del mismo. Para determinar su estabilidad en ocasiones es suficiente conocer la estabilidad del mismo como equilibrio del sistema lineal asociado. Más concretamente, si alguno de los valores propios tiene parte real positiva, entonces el equilibrio es inestable en el sistema lineal y también en el no lineal. Sin embargo, no es tan fácil deducir la estabilidad no lineal, o también llamada estabilidad en el sentido de Lyapunov [31], cuando alguno de los valores propios es igual a cero o cuando todos ellos son imaginarios puros. Puesto que en un sistema hamiltoniano los valores propios aparecen en cuaternas $\pm a \pm bi$, para que el equilibrio sea estable es condición necesaria que $a = 0$.

El caso que nosotros estudiaremos es aquel en el que los valores propios del sistema lineal asociado son imaginarios puros, esto es, de la forma $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ con $\omega_1, \omega_2 > 0$. Cuando los valores propios o frecuencias son distintos, el origen es linealmente estable, y lo mismo ocurre cuando las frecuencias son iguales y la matriz asociada a la forma lineal es diagonalizable. Nuestro objetivo es conocer si en un sistema de estas características la estabilidad lineal del origen se conserva o no en el sistema no lineal. En determinadas situaciones basta examinar \mathcal{H}_2 , la parte cuadrática del hamiltoniano \mathcal{H} , cuando éste se desarrolla en serie de potencias en torno al punto de equilibrio.

Tras una transformación lineal adecuada, \mathcal{H}_2 puede ser expresada como

una suma o una resta de osciladores armónicos con frecuencias ω_1, ω_2 . Si la forma cuadrática es definida, es decir, aparece como una suma de osciladores, la estabilidad no lineal del origen se sigue directamente del *teorema de Dirichlet* (también del *lema de Morse* y de los *teoremas de Lyapunov*) [13, 31, 51, 84, 92]. Por contra, cuando la forma cuadrática es una resta de osciladores, ésta es indefinida y entonces la estabilidad no lineal no se sigue de manera directa y su estudio exige nuevos resultados. En este supuesto, se dice que el origen es un equilibrio de *tipo lagrangiano* ya que esta misma situación aparece en el *problema restringido de tres cuerpos* [5, 14, 64, 84] para los equilibrios lagrangianos L_4 y L_5 , descubiertos por Lagrange en 1772 [42]. Estos puntos fueron calculados como un caso particular del *problema de tres cuerpos no restringido*, pero fueron considerados una curiosidad puramente matemática, sin encontrarse ningún ejemplo entre los cuerpos del sistema solar. Más tarde, en 1906, Max Wolf descubre un asteroide, *Achilles*, que se mueve muy próximo al punto L_4 del sistema Sol-Júpiter. A *Achilles* le han seguido más de medio millar de asteroides que orbitan en las proximidades de los puntos lagrangianos L_4 y L_5 y que reciben el nombre de *asteroides troyanos*.

La investigación de la estabilidad no lineal de estos puntos (L_4 y L_5) ha motivado la aparición de diferentes resultados a lo largo de la historia. Algunos de éstos, aunque pensados inicialmente para resolver el problema restringido de tres cuerpos, logran dar soluciones generales aplicables a otros problemas.

En 1961, Arnold [6] enuncia el principal resultado sobre estabilidad para equilibrios en sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad, válido en ausencia de resonancias entre las frecuencias del sistema ω_1 y ω_2 . Aquí se exige la llamada *condición general de irracionalidad*, esto es, $n\omega_1 - m\omega_2 \neq 0$ para cualesquiera n y m números enteros. Considerando la *forma normal* [5, 12] hasta orden 4 del hamiltoniano, la estabilidad del origen se deduce si se verifica cierta condición de no degeneración. Ésta puede expresarse en términos de un *determinante*, \mathcal{D}_4 , que se calcula a partir del término \mathcal{H}_4 de la forma normal. Así, si $\mathcal{D}_4 \neq 0$, el origen es estable.

En 1962, Leontovich [54] presenta una aplicación del teorema de Arnold referida al problema restringido de tres cuerpos. En este artículo, deduce la estabilidad de los equilibrios lagrangianos para cualquier valor del parámetro de masas que verifique la condición de estabilidad lineal, con la posible excepción de un conjunto con medida de Lebesgue nula.

En el mismo año, Moser [66] demuestra que el teorema de Arnold es también válido bajo condiciones más débiles para las frecuencias del sistema

que las dadas por Arnold. Más concretamente, el teorema es igualmente válido cuando ω_1, ω_2 satisfacen que $n\omega_1 - m\omega_2 \neq 0$ para cualesquiera n, m números enteros con $0 < |n| + |m| \leq 4$, es decir, cuando las frecuencias del sistema no verifican una condición de resonancia de orden menor o igual que 4 (las llamadas *condiciones restringidas de irracionalidad*), siempre que $\mathcal{D}_4 \neq 0$.

Con esta nueva versión del teorema de Arnold, en 1967, Deprit y Deprit–Bartholomé [19] completan el estudio de Leontovich realizando, de forma manual y durante 6 meses, todos los cálculos de la normalización hasta orden 4. Prueban que el conjunto de medida nula, cuya existencia adelantó Leontovich, está formado por tres valores. Dos de ellos se corresponden con las resonancias 1:2 y 1:3, y el tercero con un caso degenerado del teorema de Arnold, cuando $\mathcal{D}_4 = 0$.

El problema de las resonancias 1:2 y 1:3 es abordado de forma general por Markeev [59] en 1968. Mediante *transformaciones de Birkhoff* [12] y el *teorema de Chetaev* [51, 63] establece dos criterios generales de estabilidad, uno para cada una de las resonancias anteriores, dados en función de los coeficientes del hamiltoniano. Más tarde, en 1969, Markeev [58] aplica el resultado conseguido en [59] al problema restringido de tres cuerpos, determinando así la inestabilidad de los puntos lagrangianos en presencia de las resonancias 1:2 y 1:3. Además de estudiar los casos resonantes, estudia qué ocurre cuando $\mathcal{D}_4 = 0$. Así, presenta una generalización del teorema de Arnold, aplicable cuando las frecuencias ω_1, ω_2 satisfacen que $n\omega_1 - m\omega_2 \neq 0$ para $0 < |n| + |m| \leq 2k$ para algún valor de k . En esta versión del teorema de Arnold, las condiciones sobre las resonancias son más débiles que en el teorema proporcionado por Moser por lo que el resultado permite estudiar la estabilidad del origen en casos donde los teoremas anteriores no son aplicables. Con este resultado más general, Markeev estudia el único caso en el que $\mathcal{D}_4 = 0$ en el problema restringido de tres cuerpos, concluyendo que los puntos lagrangianos son estables.

En 1970–71, Alfried [2, 3] aborda las cuestiones de estabilidad en los casos resonantes del problema restringido de tres cuerpos pero de modo diferente a Markeev, llegando a las mismas conclusiones que éste. Al mismo tiempo, obtiene una primera aproximación de las órbitas periódicas alrededor de L_4 e investiga el movimiento alrededor de L_4 cuando ω_1 y ω_2 están próximas a las resonancias 1:2 y 1:3. También Nayfeh y Kamel [41, 67, 68, 69] estudian estas dos resonancias, lo que da una idea del interés que suscita el problema en estos años.

En 1974, Sokolsky [85] trata el problema general de la estabilidad cuando

las frecuencias del sistema son iguales, es decir, para una resonancia 1:1. Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, los valores propios son de la forma $\pm i\omega$ y con multiplicidad igual a 2 cada uno. Caben entonces dos posibilidades; o bien la matriz del sistema lineal es diagonalizable y tenemos estabilidad lineal, o bien no lo es, en cuyo caso tenemos inestabilidad lineal. Tratando estos dos casos de forma separada y trabajando en la misma línea que Markeev [59], Sokolsky da condiciones sobre los coeficientes del hamiltoniano que permiten caracterizar la estabilidad en el sentido de Lyapunov tanto en el caso linealmente estable como en el linealmente inestable. En este sentido, basándose en [85], Sokolsky deduce que, en presencia de una resonancia 1:1, los puntos lagrangianos del problema restringido de tres cuerpos son estables [87]. Es interesante hacer notar que la resonancia 1:1 marca el límite entre la estabilidad lineal y no lineal, y en general, el límite de la estabilidad no lineal. Por tanto, cuando esto ocurre tiene lugar una bifurcación, que es la denominada *Hamiltonian Hopf* [64, 91], que en [1] se denomina *troyana* por su relación con el problema restringido de tres cuerpos. Aunque el caso de la resonancia 1:1 no va a ser tratado en esta memoria, cabe señalar que es muy interesante debido a que, aunque no haya estabilidad lineal, la presencia de términos de mayor orden en el hamiltoniano puede llevar tanto a la inestabilidad como a la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En 1977, también Sokolsky estudia de modo general el caso en el que alguna de las frecuencias del sistema es nula (resonancia de orden 1) [86]. De nuevo lo hace distinguiendo si la matriz del sistema lineal es diagonalizable o no y aplica el resultado al problema restringido de tres cuerpos. Así, demuestra que entonces los puntos lagrangianos son inestables, tanto linealmente como en el sentido de Lyapunov.

Con todas estas contribuciones, la estabilidad de los equilibrios en el problema restringido de tres cuerpos queda resuelta, a la vez que se obtienen resultados que pueden aplicarse a otros problemas similares. Sin embargo, la aplicación de estos criterios, y más concretamente, el teorema de Arnold, puede requerir el cálculo de la forma normal del hamiltoniano hasta un orden elevado. Esto implica, la mayoría de las veces, muchos cálculos, por lo que algunos autores tratan de encontrar teoremas generales que eviten el cálculo de la forma normal para decidir la estabilidad. Así, Russman [75] en 1976 enuncia un resultado afirmando que, en ausencia de resonancias, siempre se tiene garantizada la estabilidad de los equilibrios en la superficie $\mathcal{H} = 0$. Nótese que en el problema restringido de tres cuerpos ya ocurre esto, el único valor del parámetro de masas que obliga a llevar a cabo una normalización de más grado no corresponde a ninguna resonancia y ya Markeev demuestra la estabilidad del punto lagrangiano para ese valor. Lamentablemente Russman

no da ninguna indicación sobre su demostración.

En 1986, Meyer y Schmidt [65] dan una versión nueva de la demostración del teorema de Arnold que simplifica la original. Dicha prueba se basa en el *teorema de la curva invariante de Moser* [66, 84] y utiliza variables complejas [35]. En 1989, Schmidt [81] vuelve a retomar el problema de la estabilidad de los puntos lagrangianos en el problema restringido de tres cuerpos. Con la ayuda de un ordenador, obtiene la forma normal del hamiltoniano hasta orden 6. De este modo no sólo corrobora los resultados numéricos obtenidos por Deprit y Deprit–Bartholomé para el problema restringido de tres cuerpos, sino que además consigue dar una expresión de \mathcal{D}_6 en términos de las frecuencias ω_1, ω_2 tomadas como parámetros.

En la literatura aparecen otros muchos problemas [10, 33, 34, 36, 40, 62, 76, 83, 90] en los que se emplean los resultados de Arnold, Markeev y Sokolsky. Mencionamos, por ser en cierto modo precursores de esta memoria, el problema del satélite geostacionario, que López–Moratalla analiza en su tesis en 1997 [20, 56], y el problema de un cuerpo celeste de forma irregular, que Riaguas estudia en la suya en 1999 [73, 74]. Ambos problemas aparecen analizados de forma similar al problema restringido de tres cuerpos.

La mayoría de estos problemas dependen de parámetros externos que hacen que, con una elección apropiada, podamos encontrar situaciones que escapen a las hipótesis de los resultados citados. Si el problema es uniparamétrico, como el problema restringido de tres cuerpos, los teoremas de Arnold, Markeev y Sokolsky son suficientes para estudiar la estabilidad. Sin embargo, cuando el número de parámetros es mayor, podemos encontrarnos con situaciones de resonancias de orden mayor que 4 ó de degeneraciones, tanto en presencia de resonancias como en ausencia de ellas. Lanchares et al. en [47, 48] ya dan cuenta de este hecho en el problema de una partícula de polvo orbitando en torno a un planeta bajo presión de radiación y un campo magnético uniforme. Los equilibrios de este problema son similares a los del problema restringido de tres cuerpos y resultan de interés en otros campos de aplicación [10, 52, 53]. Salas et al. [76] determinan la región de estabilidad lineal del problema y posteriormente en [48] estudian la estabilidad no lineal, quedando garantizada en todos los puntos del espacio de parámetros donde existe estabilidad lineal salvo en aquellos para los cuales $\mathcal{D}_4 = 0$. Algunos de estos puntos corresponden a resonancias de orden mayor o igual que 5, como se pone de manifiesto en [47].

Pese a la existencia de numerosos problemas de aplicación y de resultados para algunos casos particulares, hasta 1999 no se enuncia ningún teorema que intente generalizar los resultados de Markeev y Sokolsky para resonancias de

orden mayor que 4. En esta fecha, Cabral y Meyer [15] establecen un criterio general para resolver la estabilidad del origen en un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad que engloba los teoremas de Arnold, Markeev y Alfriend. La demostración es una extensión, en cuanto al método, del teorema de Arnold y se basa en la utilización del teorema de la curva invariante de Moser y en el teorema de Chetaev.

Independientemente, en 2001, Elipe et al. [26, 27] se basan en consideraciones geométricas para determinar la estabilidad en el problema restringido de tres cuerpos, verificando los resultados de Markeev y Alfriend para las resonancias 1:2 y 1:3. La novedad de este trabajo radica en la introducción de las *variables de Lissajous* [18, 21, 22, 23] para el estudio de las resonancias, así como un conjunto de invariantes que permite obtener el flujo fásico de la forma normal sobre el espacio reducido. A partir de la estructura de las órbitas en un entorno del origen se puede deducir la estabilidad, lo que constituye un *criterio geométrico*.

Tomando como punto inicial este trabajo, el objetivo principal de esta memoria es proporcionar una prueba de la validez del criterio geométrico y mostrar la relación con el teorema de Cabral y Meyer. Para ello estructuramos esta memoria en tres capítulos.

En el capítulo 1 se hace un resumen de los resultados básicos sobre estabilidad, a la vez que se establece una relación entre la estabilidad del origen como equilibrio de un sistema hamiltoniano y el carácter del mismo como punto crítico del potencial efectivo.

En el capítulo 2 se estudia la estabilidad en casos resonantes mediante un criterio geométrico. En dicho criterio, a partir de la variedad invariante a la que pertenece el equilibrio y, una vez expresado el hamiltoniano en forma normal, la estabilidad del equilibrio queda caracterizada por la existencia de órbitas acotadas alrededor del origen en el nuevo espacio fásico que surge tras la normalización. También se analiza su relación con el teorema de Cabral y Meyer y otros resultados de Markeev y Alfriend.

Finalmente, en el capítulo 3 se analizan las bifurcaciones y el flujo fásico para la resonancia 1:3.

Completa la memoria un apéndice con algunos resultados que son necesarios para las demostraciones que aparecen en el capítulo 3.

Índice general

Introducción	VII
1. Estabilidad de sistemas autónomos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Definiciones de estabilidad	2
1.3. Sistemas lineales	4
1.4. Sistemas no lineales. Linealización	4
1.5. Segundo método de Lyapunov	6
1.6. Hamiltoniano y potencial efectivo	8
1.7. Puntos críticos del potencial efectivo	9
1.8. Estabilidad lineal	10
1.9. Estabilidad no lineal en el hamiltoniano	15
1.10. Forma normal de la parte cuadrática	17
2. Estabilidad no lineal en casos resonantes	21
2.1. Introducción	21
2.2. Teorema de Arnold	23
2.3. Teoremas de Alfriend y Markeev	24
2.4. El teorema de Cabral y Meyer	25
2.5. Variables extendidas de Lissajous	28
2.6. Interpretación geométrica	36
2.6.1. Invariantes reales	39
2.6.2. Espacio fásico reducido	41
2.6.3. Criterio geométrico	44
3. Bifurcaciones y flujo fásico en la resonancia 1:3	59
3.1. Introducción	59
3.2. Ecuaciones del movimiento y equilibrios	60
3.3. Raíces múltiples	65
3.4. Resultado fundamental	72
3.5. Bifurcaciones paramétricas y flujo fásico	78

Conclusiones	87
A. Algunos resultados sobre polinomios	89

Capítulo 1

Estabilidad de sistemas autónomos

1.1. Introducción

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo con n grados de libertad

$$z' = f(z), \quad (1.1)$$

con $z \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1(D)$.

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales garantiza que dado $(t_0, \eta) \in \mathbb{R} \times D$, existe una única solución ϕ de (1.1) que satisface la condición inicial $\phi(t_0) = \eta$. Esta solución existe en algún intervalo I y es una función continua de (t, t_0, η) con $t, t_0 \in I$ y $\eta \in D$.

Un sistema autónomo goza de una serie de propiedades importantes que lo distinguen de un sistema no autónomo $z' = f(z, t)$. Algunas de estas propiedades son las siguientes:

Proposición 1.1.1. (*Propiedad de invariancia por traslación*) Si $\phi(t)$ es solución del sistema (1.1), entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\phi(t+a)$ es también solución de (1.1).

Como t no aparece explícitamente en el sistema autónomo, se puede disminuir el “orden” del sistema considerando una nueva variable independiente. De este modo, si $\phi(t, \eta)$ es la solución de (1.1) que toma el valor $\eta \in D$ para $t = t_0$, entonces esta solución puede interpretarse como la parametrización, mediante el parámetro t , de una curva en D que viene definida por

$$C \equiv \{z = \phi(t, \eta), t \in \mathbb{R}\}.$$

Al conjunto D se le llama *espacio de fases* y a la curva C *curva integral*, *órbita* o *trayectoria*. El parámetro t no sólo sirve para parametrizar la curva C sino también para dotarla de una orientación, ya que ésta debe ser recorrida en la dirección en la que se incrementa t . Obsérvese que C no es otra cosa que la proyección de $\phi(t, \eta)$ sobre el espacio de fases D .

Como el sistema (1.1) es invariante por traslaciones, las soluciones $\phi(t, \eta)$ y $\phi(t + a, \eta)$ están representadas por la misma curva C . Por lo tanto, cada órbita C representa una familia uniparamétrica de soluciones de (1.1) que difieren una de otra en una constante, a , denominada *fase*.

Proposición 1.1.2. (*Caracterización de las soluciones periódicas*) Sea $\phi(t)$ una solución del sistema (1.1). Si existen t_1, t_2 con $t_1 \neq t_2$ y $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, entonces:

1. o bien, $\phi(t) = z_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con $z_0 \in D$.
2. o bien, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t + T) = \phi(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, es decir, $\phi(t)$ es una función periódica de período T .

Definición 1.1.1. Un punto $z_0 \in D$ se dice *punto de equilibrio del sistema* (1.1) si y sólo si $\phi(t) = z_0$ es solución del sistema (1.1). Equivalentemente, $z_0 \in D$ se dice *punto de equilibrio del sistema* (1.1) si y sólo si $f(z_0) = 0$.

La órbita correspondiente a la solución $\phi(t) = z_0$ en el espacio de fases es el punto de equilibrio $z_0 \in D$. Desde un punto de vista físico, los puntos de equilibrio corresponden a soluciones estacionarias o estados de equilibrio.

La consecuencia inmediata de la proposición 1.1.2 es que en un sistema autónomo existen tres tipos fundamentales de soluciones: soluciones de equilibrio, soluciones periódicas y soluciones no periódicas. En el caso plano, estos tres tipos de soluciones se corresponden con tres tipos de órbitas en el diagrama de fases, respectivamente, puntos, curvas cerradas y curvas abiertas que no pueden cortarse.

1.2. Definiciones de estabilidad

En general, no es posible calcular de forma explícita las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, puede obtenerse información sobre las propiedades de las soluciones mediante la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Esta forma de estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales tiene su origen en los trabajos de Lyapunov y Poincaré de finales del siglo XIX, cuyas ideas continúan estimulando la investigación hoy en día.

La noción más importante para el estudio cualitativo es la de estabilidad de las soluciones de equilibrio de un sistema, ya que el conocimiento del comportamiento de los puntos de equilibrio puede bastar para tener una idea del comportamiento del resto de soluciones del sistema. Debido a que el concepto de estabilidad en Matemáticas es utilizado frecuentemente en distintas situaciones y debido a que son muchas las acepciones de estabilidad para sistemas de ecuaciones diferenciales, conviene que describamos las que nosotros vamos a usar. Tanto las definiciones como los resultados sobre estabilidad que se presentan a continuación pueden ser encontrados en muchos libros, entre los cuales citamos [4, 13, 29, 31, 51, 63, 64, 92].

Sea z_0 un punto de equilibrio del sistema (1.1).

Definición 1.2.1. Se dice que z_0 es *estable en el sentido de Lyapunov* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, dependiente de ϵ , tal que si $\psi(t)$ es una solución de (1.1) con $\|\psi(t_0) - z_0\| < \delta$, entonces la solución $\psi(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y $\|\psi(t) - z_0\| < \epsilon$ para $t \geq t_0$.

Definición 1.2.2. Se dice que z_0 es *inestable* si no es estable en el sentido de Lyapunov.

Una definición más fuerte en cuanto a la estabilidad de un equilibrio es la de estabilidad asintótica.

Definición 1.2.3. Se dice que z_0 es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Lyapunov y además se verifica que existe un $\delta_0 > 0$ tal que si $\psi(t)$ es una solución de (1.1) con $\|\psi(t_0) - z_0\| < \delta_0$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = z_0$.

Hagamos las siguientes observaciones,

1. La estabilidad en el sentido de Lyapunov, tal y como se ha definido aquí, es una estabilidad “a derecha”. Podríamos definir de forma análoga una estabilidad “a izquierda” considerando en las definiciones anteriores $t \leq t_0$ y límite cuando $t \rightarrow -\infty$. Normalmente, interesa estudiar la estabilidad “a la derecha” como parte del análisis del comportamiento de las soluciones del sistema a largo plazo, es decir, en el sentido de los tiempos crecientes. Es por ello que el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov lo referiremos a estabilidad “a la derecha”.
2. La condición $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = z_0$ no es suficiente para tener estabilidad asintótica, ya que además se necesita que z_0 sea estable en el sentido de Lyapunov. Un ejemplo de la necesidad de que se cumplan las dos condiciones puede verse en [71].

3. Como el sistema (1.1) es invariante por traslaciones, los números δ y δ_0 de las definiciones 1.2.1 y 1.2.3 son independientes del valor de t_0 . Es decir, la estabilidad y la estabilidad asintótica para sistemas autónomos es uniforme.

1.3. Sistemas lineales

El sistema de ecuaciones diferenciales más sencillo para estudiar cuestiones de estabilidad es un sistema lineal autónomo

$$z' = Az, \quad (1.2)$$

donde $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$. Nótese que el origen $z = 0$ es siempre una solución de equilibrio para el sistema (1.2). Es más, si A es regular, $z = 0$ es el único equilibrio del mismo.

La estabilidad del origen puede caracterizarse a partir de los valores propios de la matriz A , ya que las soluciones del sistema (1.2) son de la forma $z(t) = z_0 e^{At}$, con $z_0 = z(0)$ y están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Para más detalle, ver [31].

Teorema 1.3.1. *El origen es un equilibrio estable del sistema (1.2) si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes*

1. para cualquier λ valor propio de A , $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$,
2. si existe λ valor propio de A con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, entonces la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio coincide con la multiplicidad del valor propio.

Teorema 1.3.2. *El origen es un equilibrio asintóticamente estable del sistema (1.2) si y sólo si para cualquier λ valor propio de A , $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.*

Corolario 1.3.1. *Si al menos uno de los valores propios de A tiene parte real positiva, entonces el origen es un equilibrio inestable del sistema (1.2).*

1.4. Sistemas no lineales. Linealización

Supongamos que z_0 es un punto de equilibrio del sistema autónomo no lineal

$$z' = f(z), \quad (1.3)$$

donde $f \in C^1(D)$. Para saber si este punto de equilibrio es estable o no, consideremos una solución del sistema, $\psi(t)$ y llamemos $v(t)$ a

$$v(t) = \psi(t) - z_0.$$

Como $\psi(t)$ es solución del sistema (1.3), tenemos que

$$v'(t) = f(z_0 + v(t)),$$

y al ser z_0 un equilibrio, $f(z_0) = 0$. Por tanto,

$$v'(t) = f(z_0 + v(t)) = f(z_0 + v(t)) - f(z_0).$$

Aplicando el teorema del valor medio tenemos que

$$v'(t) = Av(t) + g(v(t)), \quad (1.4)$$

donde $A = f_z(z_0) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n)$ es el jacobiano de f en el punto z_0 , y $g(v(t))$ es una función continua que verifica

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|g(v)\|}{\|v\|} = 0,$$

y por tanto, $g(0) = 0$. Además, si $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias en torno al punto z_0 , entonces $g(v)$ es una serie de potencias que empieza con términos cuadráticos en la variable v , es decir, $g(v) = O(v^2)$.

El estudio de la estabilidad de z_0 como solución de equilibrio del sistema (1.3) es equivalente al estudio de la estabilidad del origen $v = 0$ como solución de equilibrio del sistema (1.4). Este sistema puede verse como un sistema perturbado del sistema lineal

$$v'(t) = Av(t), \quad (1.5)$$

al que se le denomina *primera variación*.

Dado que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} g(v) = 0,$$

parece razonable estudiar primero el comportamiento de $v = 0$ como equilibrio del sistema (1.5), que es lineal, y por tanto ya caracterizado, y después tratar de ver si las propiedades de estabilidad que se obtengan para el sistema lineal se conservan en el sistema no lineal. En este sentido, podemos enunciar un resultado conocido como *método de la primera variación* o *primer método de Lyapunov*, cuya demostración puede verse en [31, 38, 92].

Teorema 1.4.1. *Si $Re(\lambda) < 0$ para cualquier λ valor propio de A , entonces el origen es un equilibrio asintóticamente estable de (1.4). Si existe λ valor propio de A tal que $Re(\lambda) > 0$, entonces el origen es un equilibrio inestable de (1.4).*

Comparando lo estudiado en sistemas lineales con el resultado que da el teorema anterior, podemos decir que la condición de que todos los valores propios de A tengan parte real negativa permite asegurar que el origen es asintóticamente estable tanto en el sistema lineal como en el sistema no lineal. Sin embargo, hay una diferencia importante, mientras que en los sistemas lineales, dicha condición es necesaria y suficiente, en el caso de los sistemas no lineales esa condición tan sólo es suficiente, no necesaria.

Aunque la propiedad de la estabilidad asintótica se transfiere del sistema lineal al sistema no lineal, no es cierto que la propiedad de estabilidad (simple, no asintótica) se comporte igual. Esta propiedad no es lo suficientemente fuerte como para resistir perturbaciones no lineales, incluso cuando éstas son pequeñas. Ejemplos que ilustren esto último pueden encontrarse en [13, 29, 71, 77].

Por lo tanto, existen casos para los que el estudio de la estabilidad en el sistema lineal no es suficiente para analizar la estabilidad en el sistema no lineal. Se hacen necesarias otras técnicas, entre las cuales destacamos el *segundo método de Lyapunov*.

1.5. Segundo método de Lyapunov

Este método desarrollado por Lyapunov a finales del siglo XIX, es también denominado *método directo de Lyapunov*, en el sentido de que puede ser aplicado directamente sobre la ecuación diferencial, sin tener que conocer las soluciones de la misma. No es un método sencillo de utilizar puesto que supone construir unas funciones auxiliares, que en general, no son fáciles de encontrar.

La idea en la que se basa el método podemos encontrarla en un resultado enunciado en 1800 por Lagrange y probado más tarde por Dirichlet (ver [13, 84]), y que dice lo siguiente:

“En un sistema conservativo, un punto con energía potencial mínima, corresponde a un equilibrio estable”.

Consideremos un sistema diferencial

$$z' = f(z), \tag{1.6}$$

con $f \in C^1(D)$, y sea z_0 un punto de equilibrio aislado del mismo, que supondremos el origen de coordenadas, es decir, $z_0 = 0$. Esto no supone pérdida de generalidad puesto que ya hemos visto previamente, en la sección 1.4, que el problema de investigar la estabilidad de un punto crítico $z = z_0$ puede trasladarse a la investigación en el origen.

Lyapunov formuló dos teoremas de estabilidad, uno para la estabilidad asintótica y otro para la estabilidad (no asintótica). Empecemos por este último.

Teorema 1.5.1. *Si existe una función escalar $V(z)$ y un entorno del origen Ω , tal que $V(z)$ es definida positiva y $\dot{V}(z) \leq 0$ en Ω , siendo*

$$\dot{V}(z) = \nabla V(z) \cdot f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial z_i} f_i(z),$$

la derivada de V respecto al sistema $z' = f(z)$, entonces el origen es un equilibrio estable del sistema (1.6). A una función $V(z)$ como la anterior se le denomina función de Lyapunov del sistema (1.6).

Nótese que $\dot{V}(z)$ puede ser calculado directamente desde el sistema diferencial sin necesidad de conocer las soluciones del mismo. Aquí radica la potencia del método directo de Lyapunov. Si $\phi(t)$ es una solución cualquiera de (1.6), entonces

$$\dot{V}(\phi(t)) = \nabla V(\phi(t)) \cdot f(\phi(t)) = \nabla V(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \frac{dV(\phi(t))}{dt}.$$

En otras palabras, a lo largo de una solución $\phi(t)$ la derivada total de $V(\phi(t))$ respecto de t coincide con la derivada de V con respecto al sistema evaluado en $z = \phi(t)$.

El siguiente teorema da un resultado para la estabilidad asintótica, condición más fuerte que la de estabilidad.

Teorema 1.5.2. *Si existe una función escalar $V(z)$ y un entorno del origen Ω , tal que $V(z)$ es definida positiva y $\dot{V}(z) < 0$ en $\Omega \setminus \{0\}$, entonces el origen es un equilibrio asintóticamente estable del sistema (1.6).*

Existen otros teoremas, como el de la invariancia de La Salle [31, 51], que rebajan las condiciones de este último. Además de éstos, Lyapunov formuló dos teoremas de inestabilidad [13, 51].

Alrededor de 1930, Chetaev generalizó estos teoremas y demostró un resultado del cual son consecuencia los dos teoremas de inestabilidad de Lyapunov (véase [51, 63]). Enunciaremos el de Chetaev.

Teorema 1.5.3. *Sea Ω un entorno del origen y $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Si existe $V(z)$ tal que*

1. $V(z) \in C^1(\Omega_1)$,
2. $V(z)$ y $\dot{V}(z)$ son definidas positivas en Ω_1 ,
3. En la frontera de Ω_1 contenida en Ω , $V(z) = 0$,
4. El origen es un punto de la frontera de Ω_1 .

Entonces, el origen es inestable.

Todos estos teoremas dependen de la construcción de una función escalar con ciertas propiedades. La principal limitación de este método es que no hay procedimientos generales para calcular dichas funciones. Por otro lado, otra dificultad que surge es que las condiciones que se dan de estabilidad y de inestabilidad son suficientes pero no tienen por qué ser necesarias.

1.6. Hamiltoniano y potencial efectivo

Consideremos ahora la estabilidad de las soluciones de equilibrio de una clase especial de sistemas de ecuaciones diferenciales: sistemas hamiltonianos definidos a partir de la función

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \omega(xP_y - yP_x) + \Phi(x, y), \quad (1.7)$$

donde $\Phi(x, y)$ es una función suficientemente buena, en general, analítica. Aquí, (x, y) son las coordenadas, y (P_x, P_y) los momentos o velocidades generalizadas.

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan el movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} = P_x + \omega y, & \dot{P}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \omega P_y - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_y} = P_y - \omega x, & \dot{P}_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\omega P_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por lo tanto, un punto $z_0 = (x_0, y_0, P_{x_0}, P_{y_0})$ es un equilibrio del sistema si y sólo si

$$\begin{aligned} P_{x_0} + \omega y_0 &= 0, & \omega^2 x_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} &= 0, \\ P_{y_0} - \omega x_0 &= 0, & \omega^2 y_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

No es difícil ver que si $(x_0, y_0, P_{x_0}, P_{y_0})$ es un punto de equilibrio, entonces también es un punto crítico de una función $\Phi_{ef}(x, y)$, denominada *potencial efectivo* que se define como

$$\Phi_{ef}(x, y) = \mathcal{H} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (1.10)$$

En efecto, teniendo en cuenta (1.8), el potencial efectivo puede expresarse como

$$\Phi_{ef}(x, y) = \Phi(x, y) - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2),$$

y entonces

$$\frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \omega^2 x, \quad \frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \omega^2 y.$$

De esta forma, si $(x_0, y_0, P_{x_0}, P_{y_0})$ es un equilibrio del sistema (1.7), entonces se verifica (1.9), y por lo tanto

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} - \omega^2 x_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} - \omega^2 y_0 = 0,$$

lo que significa que

$$\left. \frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0,$$

con lo cual, (x_0, y_0) es un punto crítico del potencial efectivo.

Habitualmente $z = \Phi_{ef}(x, y)$ recibe el nombre de *superficie de velocidad cero*, ya que fijado un valor de \mathcal{H} , sobre $\Phi_{ef}(x, y) = \mathcal{H}$ se verifica $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

1.7. Puntos críticos del potencial efectivo

La naturaleza de un punto crítico del potencial efectivo está determinada por la matriz hessiana asociada al mismo. Ésta viene dada por

$$H_{\Phi_{ef}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \left. \frac{\partial^2 \Phi_{ef}}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} - \omega^2, \\
b &= \left. \frac{\partial^2 \Phi_{ef}}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} - \omega^2, \\
c &= \left. \frac{\partial^2 \Phi_{ef}}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Supondremos de aquí en adelante que $a \neq 0$ y $ab - c^2 \neq 0$. Entonces se verifica que

- (x_0, y_0) es un mínimo de Φ_{ef} si y sólo si $a > 0$ y $ab - c^2 > 0$. Nótese que entonces $b > 0$.
- (x_0, y_0) es un máximo de Φ_{ef} si y sólo si $a < 0$ y $ab - c^2 > 0$. Nótese que entonces $b < 0$.
- (x_0, y_0) es un punto de silla de Φ_{ef} si y sólo si $ab - c^2 < 0$.

1.8. Estabilidad lineal

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el origen de coordenadas es un punto de equilibrio del sistema no lineal (1.8) y consideremos el desarrollo en serie de Taylor de \mathcal{H} en un entorno del mismo, es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \cdots,$$

donde \mathcal{H}_k ($k \geq 2$) es un polinomio homogéneo de grado k en las variables x, y, P_x, P_y . Puesto que el origen es un punto de equilibrio, $\mathcal{H}_1 = 0$ mientras que \mathcal{H}_0 es constante ya que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(0)$.

Prescindiendo del término constante \mathcal{H}_0 , el hamiltoniano \mathcal{H} se escribe como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \cdots,$$

siendo, \mathcal{H}_2 la parte cuadrática, que es de la forma

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \omega(xP_y - yP_x) + \frac{1}{2}[(a + \omega^2)x^2 + 2cxy + (b + \omega^2)y^2], \tag{1.12}$$

donde a, b y c vienen dadas por (1.11).

Para investigar la estabilidad del origen es habitual estudiar primero su estabilidad lineal, ya que según se ha visto en la sección 1.4 para que éste

sea estable es necesario que no haya valores propios con parte real positiva. En este sentido, es preciso caracterizar los valores propios de la matriz del sistema diferencial lineal asociado. Dicha matriz se obtiene a partir de la parte cuadrática del hamiltoniano.

Como el sistema es hamiltoniano, se verifica que si $r + si$ es valor propio, entonces también lo son $r - si$, $-r + si$ y $-r - si$ (ver por ejemplo [37]). Por tanto, a partir de los teoremas 1.3.1, 1.3.2 y del corolario 1.3.1, es evidente que

- El origen no puede ser nunca un equilibrio linealmente asintóticamente estable puesto que no todos los valores propios pueden tener parte real negativa.
- Si $r \neq 0$, entonces el origen es linealmente inestable ya que entonces hay valores propios con parte real positiva. Es más, en este caso, según el teorema 1.4.1, también es inestable en el sentido de Lyapunov.
- Si $r = 0$, entonces el origen es linealmente estable siempre que la matriz asociada sea diagonalizable. Distinguiremos dos casos,
 1. los valores propios son simples cuando $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer $\omega_1, \omega_2 > 0$) y $\omega_1 \neq \omega_2$. Entonces, se verifica la segunda condición del teorema 1.3.1 y podemos concluir que el origen es linealmente estable.
 2. aparece algún valor propio múltiple cuando $\omega_1 = 0$ ó $\omega_2 = 0$ ó $\omega_1 = \omega_2 \neq 0$. La estabilidad lineal no se sigue de forma inmediata y exige un estudio particular para cada problema.

Cabe señalar que para que el origen sea linealmente estable es condición necesaria que los valores propios sean imaginarios puros (incluyendo al 0 entre estos). La condición anterior no es suficiente.

El sistema diferencial lineal asociado al sistema (1.8) es el correspondiente a la parte cuadrática \mathcal{H}_2 dada por (1.12). En este caso,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_x + \omega y, & \dot{P}_x &= \omega P_y - (a + \omega^2)x - cy, \\ \dot{y} &= P_y - \omega x, & \dot{P}_y &= -\omega P_x - cx - (b + \omega^2)y, \end{aligned} \tag{1.13}$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ -(a + \omega^2) & -c & 0 & \omega \\ -c & -(b + \omega^2) & -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son las raíces de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

que resulta ser,

$$\lambda^4 + (a + b + 4\omega^2)\lambda^2 + (ab - c^2) = 0.$$

Sea $\Delta = (a + b + 4\omega^2)^2 - 4(ab - c^2)$, entonces

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2}(-(a + b + 4\omega^2) + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(-(a + b + 4\omega^2) - \sqrt{\Delta}).$$

Teorema 1.8.1. *El origen es linealmente estable si y sólo si $ab - c^2 > 0$ y*

$$a + b + 4\omega^2 > 2\sqrt{ab - c^2}.$$

Demostración.

\Leftarrow) Nótese que las condiciones

$$ab - c^2 > 0 \quad \text{y} \quad a + b + 4\omega^2 > 2\sqrt{ab - c^2},$$

implican que $\Delta > 0$, al tiempo que

$$\Delta < (a + b + 4\omega^2)^2,$$

por lo que $\lambda_{1,2}^2 \in \mathbb{R}^-$. Puesto que $\Delta \neq 0$, tenemos que $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$, y entonces los cuatro valores propios son imaginarios puros. Por el teorema 1.3.1, el origen es linealmente estable.

\Rightarrow) Procederemos por reducción al absurdo. Como $ab - c^2 \neq 0$, distinguimos los siguientes casos,

1. Si $ab - c^2 < 0$, entonces $\Delta > (a + b + 4\omega^2)^2 \geq 0$. Por lo tanto, $\lambda_1^2 > 0$ y $\lambda_2^2 < 0$, de donde deducimos que los valores propios son de la forma $\pm r$ y $\pm si$ con $r, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. En este caso existe un valor propio real positivo, por lo que el origen no puede ser estable.
2. Si $ab - c^2 > 0$ y $a + b + 4\omega^2 < 2\sqrt{ab - c^2}$, debemos considerar dos casos. En primer lugar, cuando

$$|a + b + 4\omega^2| < 2\sqrt{ab - c^2},$$

entonces $\Delta < 0$ y los valores propios son de la forma $\pm r \pm si$, con $r \neq 0$, por lo que hay inestabilidad.

En segundo lugar, cuando $a + b + 4\omega^2 < 0$ y

$$|a + b + 4\omega^2| \geq 2\sqrt{ab - c^2},$$

entonces

$$|a + b + 4\omega^2| \geq \sqrt{\Delta} > 0,$$

por lo que $\lambda_{1,2}^2 \in \mathbb{R}^+$ y entonces, el origen es inestable.

3. Si $ab - c^2 > 0$ y $a + b + 4\omega^2 = 2\sqrt{ab - c^2}$, entonces

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}(a + b + 4\omega^2) < 0,$$

es decir, los valores propios son imaginarios puros y dobles, de la forma $\pm si$ con $s \neq 0$. Para investigar la estabilidad debemos ver si la matriz es diagonalizable, es decir, si $\dim(S(\pm si)) = \text{multiplicidad}(\pm si) = 2$. Puesto que

$$\text{rg}(A \pm siI) = \dim(A) - \dim(S(\mp si)),$$

para que A sea diagonalizable debe cumplirse que $\text{rg}(A \pm siI) = 2$. Consideremos el siguiente menor de orden 3 de $A - siI$,

$$\begin{vmatrix} \omega & 1 & 0 \\ -si & 0 & 1 \\ -c & -si & \omega \end{vmatrix} = -c + 2\omega si.$$

Puesto que c , ω y s son reales, el menor se anula si y sólo si $c = 0$ y $s = 0$, lo que está en contra de la hipótesis de que $s \neq 0$. Por lo tanto, $\text{rg}(A - siI) = 3$. Análogamente, $\text{rg}(A + siI) = 3$. En consecuencia, la matriz A no es diagonalizable y, por tanto, el origen es inestable. ■

Nótese que en el teorema anterior en ningún caso aparecen valores propios iguales a 0. Esto sucede si y sólo si $ab - c^2 = 0$. Precisamente es esta situación la que corresponde a los casos degenerados que, tal y como indicamos en la sección 1.7, no va a ser considerada.

Una vez estudiada la estabilidad del origen como equilibrio del sistema (1.13), no es difícil establecer una conexión entre la naturaleza del origen como punto crítico del potencial efectivo y su estabilidad lineal. En este sentido, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.8.1. *Si $(0, 0)$ es un punto crítico del potencial efectivo, entonces se verifica que*

Si es un mínimo, entonces el origen es un punto de equilibrio linealmente estable.

Si es un máximo y se verifica la condición $a + b + 4\omega^2 > 2\sqrt{ab - c^2}$, entonces el origen es un punto de equilibrio linealmente estable.

Si es un punto de silla o es un máximo tal que $a + b + 4\omega^2 \leq 2\sqrt{ab - c^2}$, entonces el origen es un punto de equilibrio linealmente inestable.

Demostración.

La demostración se sigue de la caracterización de los puntos críticos que aparece en la sección 1.7 y del teorema 1.8.1. En efecto, si $(0, 0)$ es un mínimo, se tiene que

$$a > 0, \quad b > 0, \quad ab - c^2 > 0,$$

y basta ver que $(a + b + 4\omega^2)^2 - 4(ab - c^2) > 0$ para asegurar la estabilidad. Esto se sigue de que

$$(a + b + 4\omega^2)^2 - 4(ab - c^2) = (a - b)^2 + 4(2\omega^4 + 2(a + b)\omega^2 + c^2) > 0,$$

por ser $a > 0$, $b > 0$.

Si $(0, 0)$ es un máximo, entonces $ab - c^2 > 0$. Si además se verifica

$$a + b + 4\omega^2 > 2\sqrt{ab - c^2},$$

por el teorema 1.8.1, el origen es linealmente estable. En caso de que la desigualdad anterior no se verifique, el origen es linealmente inestable.

Finalmente, si $(0, 0)$ es un punto de silla, resulta que $ab - c^2 < 0$ y por el teorema 1.8.1, el origen es linealmente inestable. ■

Es interesante hacer notar que de las condiciones del corolario anterior pueden establecerse las zonas de estabilidad lineal en términos de los parámetros a, b, c, ω del problema. En concreto, se tiene que la frontera de estabilidad lineal viene definida por las hipersuperficies

$$a = 0, \quad ab - c^2 = 0, \quad (a + b + 4\omega^2) - 4(ab - c^2) = 0.$$

No obstante, la estabilidad lineal puede establecerse en términos de sólo dos parámetros si el hamiltoniano es transformado convenientemente por medio de transformaciones canónicas [10, 56]. Trataremos este aspecto más adelante en la sección 1.10.

Ahora veamos en qué condiciones la estabilidad lineal se traduce en estabilidad no lineal.

1.9. Estabilidad no lineal en el hamiltoniano

Una vez estudiada la estabilidad lineal del origen como equilibrio del sistema hamiltoniano (1.8), interesa conocer qué ocurre con la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Esto es algo más complicado que el estudio de la estabilidad lineal y para ello utilizaremos el *primer y segundo teorema de Lyapunov* (teoremas 1.4.1 y 1.5.1 respectivamente).

Teorema 1.9.1. *Si $(0, 0)$ es un punto crítico del potencial efectivo, entonces se verifica que*

Si $(0, 0)$ es un mínimo, entonces el origen es un punto de equilibrio estable en el sistema no lineal.

Si $(0, 0)$ es un punto de silla o es un máximo que verifica la desigualdad $a + b + 4\omega^2 < 2\sqrt{ab - c^2}$, entonces el origen es un punto de equilibrio inestable en el sistema no lineal.

Demostración.

En realidad sólo hay que probar el caso estable ya que a partir de la demostración del teorema 1.8.1 se sabe que en los otros dos casos hay valores propios con parte real positiva y, en consecuencia, por el teorema 1.4.1, el equilibrio es inestable en el sentido de Lyapunov.

Para el caso en que el origen sea un mínimo aplicaremos el teorema de Dirichlet [13, 84]. Este dice que si la parte cuadrática es definida, entonces el equilibrio es estable.

En este caso, la matriz asociada a la parte cuadrática es

$$N = \begin{pmatrix} a + \omega^2 & c & 0 & -\omega \\ c & b + \omega^2 & \omega & 0 \\ 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos menores principales de orden i , que denotamos por Δ_i , son

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a + \omega^2, \\ \Delta_2 &= ab - c^2 + (a + b)\omega^2 + \omega^4, \\ \Delta_3 &= ab - c^2 + b\omega^2, \\ \Delta_4 &= ab - c^2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si $(0, 0)$ es un mínimo del potencial efectivo, se tiene que $a > 0$, $b > 0$ y $ab - c^2 > 0$, y por lo tanto, $\Delta_i > 0$ para $1 \leq i \leq 4$. Aplicando el lema de Sylvester se tiene que \mathcal{H}_2 es definida positiva en un entorno del origen. Por lo tanto, el teorema de Dirichlet asegura la estabilidad. Este resultado también puede derivarse del *segundo teorema de Lyapunov* (teorema 1.5.1) utilizando como función de Lyapunov $V = \mathcal{H}$. Esta función cumple las condiciones exigidas ya que, por una parte, $\dot{V} = \dot{\mathcal{H}} = 0$, y por otra parte, $V = \mathcal{H}$ es una función definida positiva. Esto último es debido a que, como \mathcal{H}_2 es una forma no degenerada alrededor del origen y es definida positiva, por el lema de Morse, sabemos que, en un entorno del origen, el hamiltoniano \mathcal{H} es también una función definida positiva. ■

El único caso en el que no es posible, de una forma sencilla, determinar la estabilidad o inestabilidad del origen corresponde a la situación en la que el origen es un máximo del potencial efectivo y además se cumple que

$$a + b + 4\omega^2 \geq 2\sqrt{ab - c^2}. \quad (1.15)$$

Es interesante hacer notar que cuando la desigualdad (1.15) es estricta, el origen es linealmente estable, mientras que es linealmente inestable cuando se da la igualdad. En cualquiera de los dos casos, la estabilidad no lineal del origen no se sigue del teorema de Dirichlet ya que puede comprobarse que \mathcal{H}_2 es una forma cuadrática indefinida. En efecto, por ser el origen un máximo se tiene que

$$a < 0, \quad b < 0 \quad ab - c^2 > 0.$$

Supongamos que $\Delta_1 > 0$ (ver (1.14)). Entonces,

$$\Delta_3 = ab - c^2 + b\omega^2 = b(a + \omega^2) - c^2 = b \Delta_1 - c^2 < 0,$$

por lo que $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_3 < 0$, y entonces \mathcal{H}_2 es indefinida. Por el contrario, si $\Delta_1 < 0$, se tiene que

$$\omega^2 < -a.$$

Por otra parte, al ser $b < 0$, resulta

$$-a + \frac{c^2}{b} \leq -a.$$

Distingamos dos situaciones distintas,

- $\omega^2 < -a + \frac{c^2}{b}$. Multiplicando esta desigualdad por $-b$, obtenemos que

$$-b\omega^2 < ab - c^2 \Rightarrow \Delta_3 = ab - c^2 + b\omega^2 > 0.$$

Por tanto, $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_3 > 0$, y entonces \mathcal{H}_2 es indefinida.

- $\omega^2 \geq -a + \frac{c^2}{b}$. Multiplicando de nuevo por $-b$ se tiene que

$$-b\omega^2 \geq ab - c^2.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= ab - c^2 + (a + b)\omega^2 + \omega^4 \leq -b\omega^2 + (a + b)\omega^2 + \omega^4 = \\ &= \omega^2(a + \omega^2) = \omega^2\Delta_1 < 0. \end{aligned}$$

Así, $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 < 0$, por lo que \mathcal{H}_2 es indefinida.

1.10. Forma normal de la parte cuadrática

El análisis realizado previamente puede simplificarse si el hamiltoniano (1.7) es transformado convenientemente. El no haberlo hecho antes se debe a que hemos querido asociar el problema de la estabilidad con la función $\Phi(x, y)$ que define el potencial, o bien con el potencial efectivo definido en (1.10).

En primer lugar, es posible simplificar la parte cuadrática del hamiltoniano,

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \omega(xP_y - yP_x) + \frac{1}{2}[(a + \omega^2)x^2 + 2cxy + (b + \omega^2)y^2],$$

mediante una rotación que elimine los términos en xy . De esta forma, \mathcal{H}_2 es transformado en

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(P_\xi^2 + P_\eta^2) - \omega(\xi P_\eta - \eta P_\xi) + \frac{1}{2}\omega^2(\alpha\xi^2 + \beta\eta^2). \quad (1.16)$$

Las nuevas variables $(\xi, \eta, P_\xi, P_\eta)$ vienen dadas por la transformación

$$x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \quad P_x = P_\xi \cos \theta - P_\eta \sin \theta,$$

$$y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \quad P_y = P_\xi \sin \theta + P_\eta \cos \theta,$$

donde θ viene dado por las ecuaciones

$$\delta \cos 2\theta = a - b,$$

$$\delta \sin 2\theta = 2c,$$

$$\delta = \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}.$$

Así, α y β resultan ser

$$\alpha = \frac{a+b+2\omega^2+\delta}{2\omega^2},$$

$$\beta = \frac{a+b+2\omega^2-\delta}{2\omega^2}.$$

Con \mathcal{H}_2 dado en (1.16) es fácil caracterizar la estabilidad lineal en términos de α y β (ver por ejemplo [10, 56]). En efecto, el origen es linealmente estable si pertenece a alguna de las zonas en color azul de la figura 1.1. La frontera de estabilidad lineal viene definida por las hipersuperficies

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta) = 0.$$

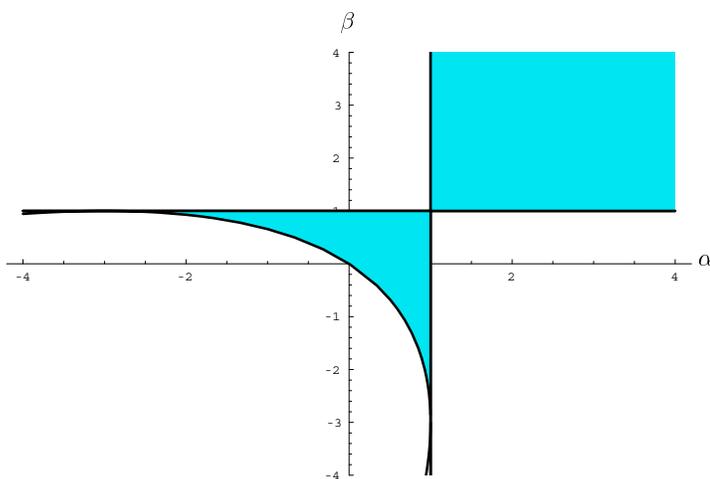


Figura 1.1: En el plano (α, β) , la zona en color azul es la correspondiente a la estabilidad lineal.

La zona $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ corresponde al caso en que el origen es un mínimo del potencial efectivo, y por lo tanto, estable en el sentido de Lyapunov. Si, por el contrario, α y β están en la zona

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta) > 0,$$

el equilibrio corresponde a un máximo del potencial efectivo, y por lo tanto la estabilidad lineal no es suficiente para garantizar la estabilidad no lineal ya que \mathcal{H}_2 es indefinida, como ya se ha visto anteriormente.

Si nos centramos en este último caso, es posible reducir la parte cuadrática a su forma normal mediante una nueva transformación canónica. Ésta es una transformación lineal dada por

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ P_\xi \\ P_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & a_1\omega_1 - b_1\omega & -a_2\omega_2 + b_2\omega \\ a_1\omega - b_1\omega_1 & a_2\omega - b_2\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix},$$

con ω_1 y ω_2 tales que $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ son los valores propios asociados a la parte cuadrática del hamiltoniano y

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{w_1^2 + (1 - \beta)w^2}}{\sqrt{w_1(w_1^2 - w_2^2)}}, & b_1 &= \frac{\sqrt{w_1^2 + (1 - \alpha)w^2}}{\sqrt{w_1(w_1^2 - w_2^2)}}, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{w_2^2 + (1 - \beta)w^2}}{\sqrt{w_2(w_1^2 - w_2^2)}}, & b_2 &= \frac{\sqrt{w_2^2 + (1 - \alpha)w^2}}{\sqrt{w_2(w_1^2 - w_2^2)}}. \end{aligned}$$

Esta transformación está íntimamente ligada a la forma canónica de Jordan de la matriz asociada al sistema de ecuaciones diferenciales [6, 73, 94].

Tras aplicar la transformación lineal al hamiltoniano (1.16), éste se expresa como

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}w_1(q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}w_2(q_2^2 + P_2^2), \quad (1.17)$$

es decir, como la resta de dos osciladores armónicos con frecuencias ω_1 y ω_2 . Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\omega_1, \omega_2 > 0$.

A menudo, es conveniente disponer de otras variables que permitan entender de una forma más directa la dinámica asociada al problema. En este caso, podemos usar las *variables de Poincaré*, definidas por

$$q_k = \sqrt{2\Psi_k} \sin \psi_k, \quad P_k = \sqrt{2\Psi_k} \cos \psi_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.18)$$

o equivalentemente,

$$\Psi_k = \frac{q_k^2 + P_k^2}{2}, \quad \tan \psi_k = \frac{q_k}{P_k}, \quad k = 1, 2.$$

Así, en las nuevas variables, el hamiltoniano (1.17) se expresa como

$$\mathcal{H}_2 = w_1\Psi_1 - w_2\Psi_2,$$

expresión que únicamente depende de los momentos.

Nótese que ahora \mathcal{H}_2 no depende de las variables ψ_1, ψ_2 . Las ecuaciones del movimiento correspondientes a \mathcal{H}_2 son

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \Psi_1} = \omega_1, & \dot{\Psi}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \psi_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \Psi_2} = -\omega_2, & \dot{\Psi}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \psi_2} = 0.\end{aligned}$$

Este sistema es integrable y sus trayectorias se hallan en un toro bidimensional. Éstas son

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \omega_1 t + \psi_1^0, & \Psi_1 &= \Psi_1^0, \\ \psi_2 &= -\omega_2 t + \psi_2^0, & \Psi_2 &= \Psi_2^0,\end{aligned}$$

siendo $(\psi_1^0, \psi_2^0, \Psi_1^0, \Psi_2^0)$ constantes del problema. De este modo, \mathcal{H}_2 es constante sobre las soluciones y constituye una *integral primera*.

Una vez que \mathcal{H}_2 está en forma normal, el siguiente paso consiste en expresar el resto del hamiltoniano en forma normal, lo que permitirá estudiar la contribución de los términos de orden superior para establecer las condiciones de estabilidad o inestabilidad en el sentido de Lyapunov.

Capítulo 2

Estabilidad no lineal en casos resonantes

2.1. Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, la estabilidad de un equilibrio no siempre puede deducirse a partir de las técnicas de linealización y del teorema de Dirichlet. Más concretamente, si el equilibrio es un máximo del potencial efectivo que satisface la condición (1.15) (caso *elíptico general*) necesitamos otros resultados que nos permitan determinar su estabilidad.

En este sentido es preciso la introducción de la denominada *forma normal* de un hamiltoniano que tiene como objetivo buscar expresiones más simples del mismo. Consideremos una función hamiltoniana analítica en un entorno del origen, que expresada en términos de las variables de Poincaré tiene la forma

$$\mathcal{H} = \omega_1 \Psi_1 - \omega_2 \Psi_2 + \sum_{j>2} \mathcal{H}_j, \quad (2.1)$$

con \mathcal{H}_j polinomio homogéneo de grado j en $\sqrt{\Psi_1}$ y $\sqrt{\Psi_2}$, cuyos coeficientes son series trigonométricas finitas en ψ_1 y ψ_2 .

Definición 2.1.1. Decimos que \mathcal{H} está en *forma normal de Birkhoff hasta orden k* si

$$(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_j) = \omega_1 \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial \psi_1} - \omega_2 \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial \psi_2} = 0,$$

para cualquier $j \leq k$.

Si introducimos el operador

$$\mathcal{L}_2(\cdot) = (\mathcal{H}_2, \cdot),$$

que recibe el nombre de *derivada de Lie*, la definición anterior es equivalente a que $\mathcal{H}_j \in \ker \mathcal{L}_2$ para cualquier $j \leq k$.

El teorema de Birkhoff [12, 14, 92] establece que un hamiltoniano como (2.1) puede ser transformado a su forma normal de orden k mediante una serie de transformaciones canónicas próximas a la identidad. Este proceso puede realizarse de forma recursiva utilizando el operador derivada de Lie mediante el método de perturbaciones de Lie–Deprit [17, 55, 56, 79].

Una vez que el hamiltoniano está en forma normal de Birkhoff, el teorema de Arnold [6] determina la estabilidad del origen en el caso elíptico general cuando se satisface una cierta condición de no degeneración. Sin embargo, este resultado sólo es válido cuando las frecuencias del sistema no satisfacen una condición de resonancia de orden menor o igual que 4.

Definición 2.1.2. Decimos que ω_1 y ω_2 satisfacen una condición de *resonancia de orden s* si existen enteros positivos n y m primos entre sí tales que

$$n\omega_1 - m\omega_2 = 0, \quad n + m = s.$$

Dicha resonancia se denota *resonancia $n : m$* .

El resultado de Arnold puede generalizarse para casos en los que no haya resonancias de orden menor o igual que un cierto entero positivo dado [58]. Sin embargo, los casos resonantes necesitan ser considerados aparte. Esto es así porque en presencia de resonancias la forma normal contiene términos denominados *resonantes* cuya forma y localización dependen, no ya sólo del orden, sino también de la resonancia concreta que se trate. Este hecho es la causa de que los casos resonantes hayan sido considerados uno a uno. Así, las resonancias de orden 3 y 4 son estudiadas por Markeev [59] y Alfriend [2, 3], y las de orden 1 y 2 por Sokolsky [85, 86]. En cada caso, al igual que en el teorema de Arnold, la estabilidad se establece en función de si se satisface cierta condición de no degeneración y queda determinada en términos de los coeficientes de la forma normal truncada hasta un cierto orden. El caso general de una resonancia de orden s es estudiado por Cabral y Meyer [15] bajo ciertas hipótesis restrictivas y engloba los teoremas de Arnold, Alfriend y Markeev.

A pesar de este resultado, la estabilidad en los casos resonantes no está resuelta del todo. En concreto, bajo ciertas condiciones de degeneración, encontramos casos que escapan a los resultados conocidos y que deben ser investigados. Algunos autores han tratado este problema para resonancias concretas de orden bajo, en particular para las de orden 4 [60, 61]. Sin embargo, sería deseable encontrar criterios generales aplicables a cualquier caso

en presencia de degeneraciones. En este sentido este capítulo pretende aportar nuevas ideas que permitan dar algún teorema de aplicabilidad general en casos resonantes. Para situar el problema en su contexto es preciso enunciar los resultados más relevantes sobre estabilidad en el caso elíptico general.

2.2. Teorema de Arnold

El teorema de Arnold, escogiendo el enunciado propuesto por Meyer & Schmidt [64, 65] dice

Teorema 2.2.1. *Sea \mathcal{H} un hamiltoniano de 2 grados de libertad que, expresado en términos de las variables $(\Psi_1, \Psi_2, \psi_1, \psi_2)$, es de la forma*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \cdots + \mathcal{H}_{2N} + \overline{\mathcal{H}},$$

donde

1. \mathcal{H} es una función analítica en un entorno del origen de \mathbb{R}^4 .
2. Para cualquier j con $1 \leq j \leq N$, \mathcal{H}_{2j} es un polinomio homogéneo de grado j en Ψ_1 y Ψ_2 , cuyos coeficientes son reales e independientes de ψ_1 y ψ_2 . En particular,

$$\mathcal{H}_2 = \omega_1 \Psi_1 - \omega_2 \Psi_2, \quad \omega_1, \omega_2 > 0,$$

y

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{2}(A\Psi_1^2 - 2B\Psi_1\Psi_2 + C\Psi_2^2).$$

3. $\overline{\mathcal{H}}$ es una serie de potencias en Ψ_1 y Ψ_2 que empieza, como mínimo en el orden $2N + 1$ y sus coeficientes son sumas trigonométricas reales en ψ_1 y ψ_2 .

En estas condiciones, el origen es un equilibrio estable, en el sentido de Lyapunov, si existe algún k ($2 \leq k \leq N$) tal que \mathcal{H}_2 no divide a \mathcal{H}_{2k} . Es decir, si existe algún k ($2 \leq k \leq N$) tal que

$$\mathcal{D}_{2k} = \mathcal{H}_{2k}(\omega_2, \omega_1) \neq 0,$$

$$\mathcal{D}_{2j} = \mathcal{H}_{2j}(\omega_2, \omega_1) = 0, \quad 2 \leq j < k.$$

En las hipótesis del teorema de Arnold hay implícitas varias suposiciones. En primer lugar, puesto que \mathcal{H} comienza con términos de orden 2, se está suponiendo que el origen es un equilibrio del sistema. En segundo lugar, puesto que $\mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2N}$ dependen únicamente de Ψ_1 y Ψ_2 , el hamiltoniano \mathcal{H} está escrito en la *forma normal de Birkhoff* hasta orden $2N$ [5, 12, 14, 78, 92], y eso requiere suponer que no aparecen resonancias de orden menor o igual que $2N$ sobre las frecuencias del sistema ω_1, ω_2 .

La cuestión ahora es tratar de analizar la estabilidad en aquellos casos que no están en las condiciones del teorema de Arnold. Estos son, precisamente, los casos resonantes. En este sentido, los primeros resultados se establecen para las resonancias de orden bajo, que son las que aparecen normalmente en los problemas físicos de interés tratados habitualmente. Así, Alfriend y Markeev [2, 3, 59] dan resultados para las resonancias de órdenes 3 y 4. En concreto, establecen los siguientes teoremas.

2.3. Teoremas de Alfriend y Markeev

Teorema 2.3.1. *Si en presencia de la resonancia 1:2, el sistema hamiltoniano puede escribirse en la forma normal*

$$\mathcal{H} = 2\omega_2\Psi_1 - \omega_2\Psi_2 + \delta\Psi_1^{1/2}\Psi_2 \cos(\psi_1 + 2\psi_2) + \overline{\mathcal{H}},$$

con $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}(\Psi_1, \Psi_2, \psi_1, \psi_2) = O((\Psi_1 + \Psi_2)^2)$, y se verifica que $\delta \neq 0$, entonces el equilibrio es inestable.

Teorema 2.3.2. *Si en presencia de la resonancia 1:3, el sistema hamiltoniano puede escribirse en la forma normal*

$$\mathcal{H} = 3\omega_2\Psi_1 - \omega_2\Psi_2 + \delta\Psi_1^{1/2}\Psi_2^{3/2} \cos(\psi_1 + 3\psi_2) + \frac{1}{2}(A\Psi_1^2 + 2B\Psi_1\Psi_2 + C\Psi_2^2) + \overline{\mathcal{H}},$$

con $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}(\Psi_1, \Psi_2, \psi_1, \psi_2) = O((\Psi_1 + \Psi_2)^{5/2})$ y $D = A + 6B + 9C$. Entonces si $6\sqrt{3}|\delta| > |D|$, el equilibrio es inestable, mientras que si $6\sqrt{3}|\delta| < |D|$, el equilibrio es estable.

El caso estable de la resonancia 1:3 se prueba construyendo una función de Lyapunov adecuada. Los casos inestables de ambas resonancias se demuestran considerando funciones de Chetaev apropiadas.

No aparece ningún resultado nuevo hasta 1999, cuando Cabral y Meyer [15] anuncian un teorema que engloba los resultados anteriores de Alfriend y Markeev y que es válido para resonancias de cualquier orden, bajo determinadas condiciones.

2.4. El teorema de Cabral y Meyer

Teorema 2.4.1. *Sea \mathcal{H} un hamiltoniano de 2 grados de libertad que expresado en forma normal hasta orden s , con $s = 2l - 1$ ó $s = 2l$, en términos de las variables $(\Psi_1, \Psi_2, \psi_1, \psi_2)$, es de la forma*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2(\Psi_1, \Psi_2) + \mathcal{H}_4(\Psi_1, \Psi_2) + \cdots + \mathcal{H}_{2l-2}(\Psi_1, \Psi_2) + \mathcal{H}_s(\Psi_1, \Psi_2, n\psi_1 + m\psi_2) + \cdots, \quad (2.2)$$

donde

1. \mathcal{H} es una función analítica en un entorno del origen de \mathbb{R}^4 y 2π -periódica en $n\psi_1 + m\psi_2$.
2. Para cualquier j con $1 \leq j \leq l - 1$, \mathcal{H}_{2j} es un polinomio homogéneo de grado j en las variables Ψ_1 y Ψ_2 , cuyos coeficientes son reales e independientes de ψ_1 y ψ_2 . En particular,

$$\mathcal{H}_2 = \omega_1 \Psi_1 - \omega_2 \Psi_2, \quad \omega_1, \omega_2 > 0.$$

3. ω_1 y ω_2 satisfacen una condición de resonancia, es decir, existen n y m enteros positivos y primos entre sí tales que $n\omega_1 - m\omega_2 = 0$. Si $n = m = 1$, suponemos que el correspondiente sistema lineal es diagonalizable.
4. \mathcal{H}_s es un polinomio homogéneo de grado s en las variables $\sqrt{\Psi_1}$ y $\sqrt{\Psi_2}$ cuyos coeficientes son series de Fourier finitas en $n\psi_1 + m\psi_2$.
5. Los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor que s en las variables $\sqrt{\Psi_1}, \sqrt{\Psi_2}$.

Sea $\mathcal{D}_{2j} = \mathcal{H}_{2j}(\omega_2, \omega_1)$ para $2 \leq j \leq l - 1$ y sea

$$\Psi(\psi) = \mathcal{H}_s(\omega_2, \omega_1, \psi), \quad (2.3)$$

con

$$\psi = \psi_1 + \frac{m}{n} \psi_2.$$

Entonces,

- Si existe algún k ($2 \leq k \leq l - 1$) tal que $\mathcal{D}_{2k} = \mathcal{H}_{2k}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$, entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov (teorema de Arnold).
- En otro caso, es decir, si $\mathcal{D}_{2j} = 0$ para cualquier $2 \leq j \leq l - 1$, y además

- $\Psi(\psi) \neq 0$ para todo ψ , entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov.
- $\Psi(\psi)$ tiene un cero simple, es decir, existe un valor ψ^* tal que $\Psi(\psi^*) = 0$, $\Psi'(\psi^*) \neq 0$, entonces el origen es inestable.

En este resultado hay implícita una suposición y es que, puesto que \mathcal{H}_s es el primer término del desarrollo en el que intervienen los ángulos ψ_1 y ψ_2 , se asume que s es precisamente el orden de la resonancia.

Nótese que este resultado engloba el teorema de Arnold (teorema 2.2.1), así como los resultados de Alfriend y Markeev (teoremas 2.3.1 y 2.3.2) sobre las resonancias 1:2 y 1:3.

En efecto, en el caso de la resonancia 1:2, la función $\Psi(\psi)$ que aparece en el teorema de Cabral y Meyer resulta ser

$$\Psi(\psi) = \delta\omega_2^{1/2}\omega_1 \cos(\psi).$$

Cuando $\delta \neq 0$, la función $\Psi(\psi)$ presenta ceros simples y, por lo tanto, el equilibrio es inestable. Por otra parte, si $\delta = 0$, la función $\Psi(\psi) = 0$ y el teorema no puede aplicarse. En este caso la estabilidad vendrá determinada por términos de orden superior.

Para la resonancia 1:3, ahora la función $\Psi(\psi)$ se escribe como

$$\Psi(\psi) = \delta\omega_2^{1/2}\omega_1^{3/2} \cos(\psi) + \frac{1}{2}(A\omega_2^2 + 2B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2).$$

Puesto que las frecuencias se encuentran en resonancia 1:3, se verifica que $\omega_1 = 3\omega_2$ y, por lo tanto,

$$\Psi(\psi) = \omega_2^2 \left(3\sqrt{3} \delta \cos \psi + \frac{D}{2} \right).$$

Para que esta función no tenga ceros es condición necesaria y suficiente que $|D| > 6\sqrt{3}|\delta|$. En este caso, el origen es estable. Por el contrario, si $|D| < 6\sqrt{3}|\delta|$, la función $\Psi(\psi)$ tiene ceros simples para

$$\psi^* = \cos^{-1} \frac{-D}{6\sqrt{3}\delta},$$

y entonces el origen es inestable. En el supuesto en que $|D| = 6\sqrt{3}|\delta|$, $\Psi(\psi)$ tiene un cero doble en $\psi^* = 0$ ó $\psi^* = \pi$ si $D\delta < 0$ ó $D\delta > 0$ respectivamente. En esta situación, el teorema 2.4.1 no puede aplicarse, así que para decidir la estabilidad es necesario considerar términos de orden superior. Esta situación

es estudiada por Markeev [61] teniendo en cuenta el efecto de los términos de orden 6, quedando resuelta la cuestión, salvo para ciertos casos degenerados.

Una vez vista la relación entre el teorema 2.4.1 y los teoremas 2.2.1, 2.3.1 y 2.3.2, nos detenemos ahora en analizar la demostración en el caso resonante, que es el que aporta novedades respecto al resultado de Arnold. En este caso se tiene que $\mathcal{D}_{2j} = 0$ para cualquier $2 \leq j \leq l - 1$. La idea principal del teorema 2.4.1 pasa por transformar el hamiltoniano original en otro de un grado y medio de libertad mediante lo que se denomina *reducción isoenergética*. Esta técnica consiste en estudiar la estabilidad del origen sobre la superficie isoenergética $\mathcal{H} = 0$. De cómo sea la estabilidad del origen en esta superficie, se sigue la estabilidad no lineal del mismo. Este resultado es consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 2.4.1. *Sea*

$$K(r, \psi, t) = r^i \Psi(\psi) + O(r^{i+\frac{1}{2}}),$$

donde $i = j/2$ con $j \geq 3$. Supongamos que K es una función analítica de \sqrt{r}, ψ, t , que además es τ -periódica en ψ y T -periódica en t .

Si $\Psi(\psi) \neq 0$ para cualquier valor de ψ , entonces el origen $r = 0$ es un equilibrio estable para el sistema hamiltoniano

$$\dot{r} = -\frac{\partial K}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial K}{\partial r},$$

en el sentido de que dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $r(0) < \delta$, entonces la solución es definida para todo t y $r(t) < \epsilon$. Si $\Psi(\psi) = 0$ tiene un cero simple, es decir, si existe ψ^* tal que $\Psi(\psi^*) = 0$ y $\Psi'(\psi^*) \neq 0$, entonces el equilibrio $r = 0$ es inestable.

Este lema es fundamental en la demostración y, aunque no aparece citado en el trabajo de Cabral y Meyer, ya fue enunciado y probado por Sokolsky [86] para estudiar la estabilidad del origen en presencia de una resonancia de orden 1. Anteriormente a este trabajo, en [85], da un resultado similar pero sólo válido para una resonancia de orden 2.

La demostración del lema se basa en el teorema de Chetaev [63] para el caso inestable, y en el teorema de la curva invariante de Moser [66] para el estable. Esto en la versión de Cabral y Meyer y en [86], ya que en [85] Sokolsky utiliza un resultado de Arnold [7].

Este lema permite determinar las propiedades de estabilidad sobre la superficie isoenergética. Sin embargo, para garantizar la estabilidad global del origen se necesita el siguiente resultado, cuya demostración es análoga a la del lema 2.4.1.

Lema 2.4.2. *Sea*

$$K(r, \psi, t, \epsilon) = \epsilon^k r^i \Psi(\psi) + O(\epsilon^{k+1}),$$

con k y $2i$ números enteros positivos. Supongamos que K es una función analítica de r, ψ, t , que además es τ -periódica en ψ y T -periódica en t para todo $\frac{1}{2} \leq r \leq 3$ y para todo $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Si $\Psi(\psi) \neq 0$ para cualquier valor de ψ , entonces si ϵ_0 es suficientemente pequeño, cualquier solución del sistema hamiltoniano

$$\dot{r} = -\frac{\partial K}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial K}{\partial r},$$

que comienza con $|r(0)| \leq 1$ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ satisface que $|r(t)| \leq 2$ para todo t .

2.5. Variables extendidas de Lissajous

Nos proponemos ahora dar una prueba alternativa del teorema 2.4.1 basada también en los lemas 2.4.1 y 2.4.2. Para ello, vamos a introducir un nuevo conjunto de variables ángulo-acción. Estas son las *variables extendidas de Lissajous*, especialmente diseñadas para los casos resonantes. Estas variables evitan la aparición de *pequeños denominadores o divisores* [31, 84, 92] que surgen cuando en las transformaciones de normalización usuales se utilizan las variables de Poincaré.

Las *variables de Lissajous* fueron introducidas por primera vez por Deprit [18] para estudiar la resonancia 1:1 y recientemente han sido generalizadas por Deprit y Elipe [21, 22, 23] para cualquier orden de resonancia y con cualesquiera número de grados de libertad.

Las variables extendidas de Lissajous, que denotaremos $\Phi_1, \Phi_2, \phi_1, \phi_2$ vienen dadas en función de las variables de Poincaré por la siguiente transformación

$$\begin{aligned} f: T^2 \times \{\Phi_1 > 0\} \times \{|\Phi_2| \leq \Phi_1\} &\mapsto \mathbb{R}^4 \\ (\phi_1, \phi_2, \Phi_1, \Phi_2) &\mapsto (\psi_1, \psi_2, \Psi_1, \Psi_2) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1 &= m(\phi_1 + \phi_2), & \Psi_1 &= \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2m}, \\ \psi_2 &= n(\phi_1 - \phi_2), & \Psi_2 &= \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

La transformación inversa es

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{n\psi_1+m\psi_2}{2nm}, & \Phi_1 &= m\Psi_1 + n\Psi_2, \\ \phi_2 &= \frac{n\psi_1-m\psi_2}{2nm}, & \Phi_2 &= m\Psi_1 - n\Psi_2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Puesto que las frecuencias del sistema satisfacen una condición de resonancia $n:m$, se tiene que

$$n\omega_1 - m\omega_2 = 0,$$

o equivalentemente que,

$$\frac{\omega_1}{m} = \frac{\omega_2}{n},$$

cantidad que denotaremos como ω .

La forma normal del hamiltoniano (2.2) se escribe en estas nuevas variables como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2(\Phi_2) + \mathcal{H}_4(\Phi_1, \Phi_2) + \cdots + \mathcal{H}_{2l-2}(\Phi_1, \Phi_2) + \mathcal{H}_s(\Phi_1, \Phi_2, \phi_1) + \cdots, \tag{2.6}$$

donde

1. $\mathcal{H}_2 = \omega\Phi_2$.
2. Para cualquier j con $2 \leq j \leq l-1$, \mathcal{H}_{2j} es un polinomio homogéneo de grado j en las variables Φ_1 y Φ_2 , cuyos coeficientes son reales e independientes de ϕ_1 y ϕ_2 .
3. \mathcal{H}_s es un polinomio homogéneo de grado s en las variables $\sqrt{\Phi_1 + \Phi_2}$ y $\sqrt{\Phi_1 - \Phi_2}$ cuyos coeficientes son series de Fourier finitas en $2nm\phi_1$.

La principal ventaja del uso de las variables de Lissajous aparece en el proceso de normalización. La expresión de la derivada de Lie es

$$\mathcal{L}_2(\cdot) = (\mathcal{H}_2, \cdot) = \omega \frac{\partial}{\partial \phi_2},$$

y por lo tanto los términos que constituyen la forma normal son aquellos que no dependen de ϕ_2 . Este hecho hace que la normalización sea más directa ya que ésta equivale a realizar un promedio sobre el ángulo ϕ_2 .

Para dar la demostración alternativa del teorema 2.4.1 recordemos que la idea en la que se basa la prueba de Cabral y Meyer es la de la *reducción isoenergética*. Es decir, estudiar las propiedades de estabilidad del origen sobre la superficie $\mathcal{H} = 0$. Ahora bien, con la normalización en Lissajous se ha introducido una nueva integral, Φ_2 , que define otro tipo de superficies

invariantes donde también puede estudiarse el flujo del sistema. Nuestra alternativa consiste en estudiarlo sobre la superficie $\Phi_2 = 0$, en lugar de sobre $\mathcal{H} = 0$.

Como paso previo, veremos en primer lugar algunos resultados que relacionan las variables de Lissajous y las de Poincaré en las condiciones del teorema 2.4.1.

Teorema 2.5.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema 2.4.1 y que $D_{2j} = 0$ para todo $2 \leq j \leq l - 1$. Entonces el hamiltoniano (2.6) sobre la superficie $\Phi_2 = 0$ queda reducido a*

$$\mathcal{H} = \Phi_1^{s/2} G(2nm\phi_1) + O(\Phi_1^{(s+1)/2}),$$

donde la función $G(2nm\phi_1)$ es, salvo un factor constante, la función (2.3) $\Psi(\psi) = \mathcal{H}_s(\omega_2, \omega_1, \psi)$ del teorema de Cabral y Meyer.

Demostración.

En primer lugar observemos que si $\Phi_2 = 0$, entonces $\mathcal{H}_2(\Phi_2) = 0$. Además, para cada $2 \leq j \leq l - 1$, puesto que $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, \Phi_2)$ es un polinomio homogéneo de grado j en Φ_1 y Φ_2 , se tiene que sobre $\Phi_2 = 0$,

$$\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0) = \alpha_j \Phi_1^j, \quad (2.7)$$

para un cierto valor α_j . Utilizando (2.5) tenemos que si $\Psi_1 = \omega_2$ y $\Psi_2 = \omega_1$, entonces $\Phi_1 = 2n\omega_1 = 2m\omega_2 = 2nm\omega$ y $\Phi_2 = 0$. Como por hipótesis,

$$\mathcal{D}_{2j} = \mathcal{H}_{2j}(\omega_2, \omega_1) = 0,$$

tenemos que $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1 = 2nm\omega, \Phi_2 = 0) = 0$. Esto hace que en (2.7), $\alpha_j = 0$ y por lo tanto $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0) = 0$ para cualquier valor de Φ_1 . Por lo tanto, sobre la superficie $\Phi_2 = 0$, el hamiltoniano (2.6) se escribe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s(\Phi_1, 0, \phi_1) + O(\Phi_1^{(s+1)/2}).$$

Puesto que \mathcal{H}_s es un polinomio homogéneo de grado s en las variables $\sqrt{\Phi_1 + \Phi_2}$ y $\sqrt{\Phi_1 - \Phi_2}$ cuyos coeficientes son series de Fourier finitas en $2nm\phi_1$, se tiene que

$$\mathcal{H}_s(\Phi_1, 0, \phi_1) = \Phi_1^{s/2} G(2nm\phi_1), \quad (2.8)$$

con $G(2nm\phi_1)$ una serie de Fourier finita en $2nm\phi_1$. Para ver la relación existente entre Ψ y G basta tener en cuenta que cuando $\Psi_1 = \omega_2$ y $\Psi_2 = \omega_1$,

entonces $\Phi_1 = 2nm\omega$ y $\Phi_2 = 0$. Por un lado, $\mathcal{H}_s(\omega_2, \omega_1, \psi) = \Psi(\psi)$ y por otro, desde (2.8) tenemos que

$$\mathcal{H}_s(2nm\omega, 0, \phi_1) = (2nm\omega)^{s/2}G(2nm\phi_1).$$

Por lo tanto,

$$\Psi(\psi) = (2nm\omega)^{s/2}G(2nm\phi_1). \blacksquare \quad (2.9)$$

Corolario 2.5.1. *El coeficiente de Φ_1^j en \mathcal{H}_{2j} , $2 \leq j \leq l-1$, es proporcional a \mathcal{D}_{2j} .*

Demostración.

Se tiene que $\mathcal{D}_{2j} = \mathcal{H}_{2j}(\omega_2, \omega_1) = \mathcal{H}_{2j}(2nm\omega, 0)$ y sabemos que se verifica (2.7). Por lo tanto,

$$\mathcal{D}_{2j} = \alpha_j(2nm\omega)^j,$$

de donde obtenemos que $\alpha_j = \frac{\mathcal{D}_{2j}}{(2nm\omega)^j}$, que es justamente el coeficiente de Φ_1^j . \blacksquare

Podemos ahora enunciar en términos de las variables de Lissajous el teorema de Cabral y Meyer.

Teorema 2.5.2. *Sea \mathcal{H} un hamiltoniano de 2 grados de libertad que expresado en forma normal hasta orden s , con $s = 2l - 1$ ó $s = 2l$, en términos de las variables $(\Phi_1, \Phi_2, \phi_1, \phi_2)$, es de la forma*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2(\Phi_2) + \mathcal{H}_4(\Phi_1, \Phi_2) + \cdots + \mathcal{H}_{2l-2}(\Phi_1, \Phi_2) + \mathcal{H}_s(\Phi_1, \Phi_2, \phi_1) + \cdots,$$

donde

1. \mathcal{H} es una función analítica en un entorno del origen de \mathbb{R}^4 .

2.

$$\mathcal{H}_2 = \omega\Phi_2,$$

siendo $\omega = \frac{\omega_1}{m} = \frac{\omega_2}{n}$.

3. Para cualquier j con $2 \leq j \leq l-1$, \mathcal{H}_{2j} es un polinomio homogéneo de grado j en las variables Φ_1 y Φ_2 , cuyos coeficientes son reales e independientes de ϕ_1 y ϕ_2 .

4. \mathcal{H}_s es un polinomio homogéneo de grado s en las variables $\sqrt{\Phi_1 + \Phi_2}$ y $\sqrt{\Phi_1 - \Phi_2}$ cuyos coeficientes son series de Fourier finitas en $2nm\phi_1$.

5. Los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor que s en las variables $\sqrt{\Phi_1 + \Phi_2}$ y $\sqrt{\Phi_1 - \Phi_2}$.

Sea $G(2nm\phi_1)$ tal que

$$\mathcal{H}_s(\Phi_1, 0, \phi_1) = \Phi_1^{s/2} G(2nm\phi_1).$$

Entonces,

- Si existe algún j ($2 \leq j \leq l - 1$) tal que $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0)$ no es la función idénticamente nula, entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov (teorema de Arnold).
- En otro caso, es decir, si $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0)$ es la función idénticamente nula para cualquier $2 \leq j \leq l - 1$, y además
 - $G(2nm\phi_1) \neq 0$ para todo ϕ_1 , entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov.
 - $G(2nm\phi_1)$ tiene un cero simple, es decir, existe un valor ϕ_1^* tal que $G(2nm\phi_1^*) = 0$, $G'(2nm\phi_1^*) \neq 0$, entonces el origen es inestable.

Demostración.

Para $2 \leq j \leq l - 1$ el corolario 2.5.1 afirma que

$$\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0) = \frac{\mathcal{D}_{2j}}{(2nm\omega)^j} \Phi_1^j.$$

Si suponemos que existe algún j tal que $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0)$ no es la función idénticamente nula, significa que $\mathcal{D}_{2j} \neq 0$. El teorema de Arnold asegura entonces que el origen es estable.

En otro caso, es decir, si $\mathcal{H}_{2j}(\Phi_1, 0)$ es la función idénticamente nula para cualquier $2 \leq j \leq l - 1$, entonces

$$\mathcal{H}(\Phi_1, 0, \phi_1) = \Phi_1^{s/2} G(2nm\phi_1) + O(\Phi_1^{(s+1)/2}), \quad (2.10)$$

donde la parte principal corresponde a un hamiltoniano con un grado de libertad y 2π -periódico en $2nm\phi_1$. Para estudiar las propiedades de estabilidad del origen nos basaremos en los lemas 2.4.1 y 2.4.2. Para ello es preciso introducir una variable temporal tal que $\mathcal{H}(\Phi_1, 0, \phi_1)$ también sea periódico en esta variable. Obsérvese que la dependencia de esta variable se encuentra implícita en los términos que constituyen el resto de $\mathcal{H}(\Phi_1, 0, \phi_1)$, es decir, en aquellos términos representados por $O(\Phi_1^{(s+1)/2})$ donde aparecen términos

dependientes de ϕ_2 . Es precisamente ϕ_2 la variable que va a representar el papel de variable temporal.

Puesto que

$$\mathcal{H}(\Phi_1, \Phi_2, \phi_1) = \omega\Phi_2 + O(\Phi_2^{3/2}),$$

tenemos que

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_2} = \omega + O(\Phi_2^{1/2}).$$

Como $\omega > 0$, la variable ϕ_2 es creciente en el tiempo, y por lo tanto puede ser considerada como una nueva variable temporal. Es más, podemos introducir un cambio de escala definido como

$$\omega dt = d\tau,$$

y entonces,

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = 1 + O(\Phi_2^{1/2}).$$

Por lo tanto, el hamiltoniano reducido (2.10) es periódico en la variable tiempo ϕ_2 .

Teniendo esto en cuenta tenemos que sobre $\Phi_2 = 0$,

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{\partial}{\partial \Phi_1}(\Phi_1^{s/2}G(2nm\phi_1)) + O(\Phi_1^{(s-1)/2}),$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\phi_2} = -\frac{\partial}{\partial \phi_1}(\Phi_1^{s/2}G(2nm\phi_1)) + O(\Phi_1^{(s+1)/2}).$$

Por lo tanto, el hamiltoniano reducido (2.10) verifica las condiciones del lema 2.4.1. En consecuencia, si $G(2nm\phi_1) \neq 0$ para todo ϕ_1 entonces el origen es estable, mientras que si $G(2nm\phi_1)$ posee algún cero simple, entonces el origen es inestable.

En el caso inestable, la inestabilidad sobre $\Phi_2 = 0$ es suficiente para probar la inestabilidad global del origen. En el caso estable, es necesario probar la estabilidad global. Es decir, debemos ver que para $\Phi_2 \neq 0$ las soluciones próximas al origen permanecen próximas al mismo.

Consideramos un cambio de escala en las variables J_1, J_2 con $\Phi_k = \epsilon^2 J_k$ para $k = 1, 2$ y donde ϵ es un pequeño parámetro. Así, el hamiltoniano (2.6) es de la forma

$$\mathcal{H}_2(J_2) + \epsilon^2 \mathcal{H}_4(J_1, J_2) + \dots + \epsilon^{2l-4} \mathcal{H}_{2l-2}(J_1, J_2) + \epsilon^{s-2} \mathcal{H}_s(J_1, J_2, \phi_1) + O(\epsilon^{s-1}).$$

Si consideramos el flujo sobre la superficie $J_2 = h\epsilon^{s-1}$ con $h \in [-1, 1]$, éste es el mismo que el flujo de

$$\mathcal{H} = \epsilon^{s-2} J_1^{s/2} G(2nm\phi_1) + O(\epsilon^{s-1}),$$

puesto que J_2 es un factor común para todos los términos del hamiltoniano de orden menor o igual que $2l - 2$. Aplicando ahora el lema 2.4.2 se tiene probada la estabilidad total del origen. En efecto, existen toros invariantes que separan el toro $J_1 = 1$ del toro $J_1 = 2$ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Por lo tanto, todas las soluciones que comienzan con un valor $J_1 \leq 1$, verifican que $J_1 \leq 2$ para todo ϕ_2 . Puesto que tenemos una cota para J_1 y para J_2 , existen c y k tales que si $|J_1(0)| \leq c$ y $|J_2(0)| \leq c$, entonces $|J_1(\tau)| \leq k$ y $|J_2(\tau)| \leq k$ para todo τ y para todo $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Esto significa que en las variables originales si $|\Phi_{1,2}(0)| \leq \epsilon^2 c$, entonces $|\Phi_{1,2}(\tau)| \leq \epsilon^2 k$ para todo τ y para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, y por lo tanto, el origen es estable. ■

La ventaja que supone utilizar aquí variables de Lissajous es la obtención de un hamiltoniano que verifica las condiciones de los lemas 2.4.1 y 2.4.2 directamente. Por otra parte, las funciones $\Psi(\psi)$ y $G(2nm\phi_1)$ están relacionadas mediante la expresión (2.9), de ahí que los ceros de $\Psi(\psi)$ se traducen en ceros de $G(2nm\phi_1)$. En este sentido, la prueba dada es redundante.

Sin embargo, esta demostración alternativa es válida bajo hipótesis más generales. Realmente no es necesario exigir que el primer término \mathcal{H}_j que no es idénticamente nulo cuando $\Phi_2 = 0$ sea el correspondiente al orden de la resonancia, es decir, \mathcal{H}_s . Puede ser cualquier otro término superior del hamiltoniano normalizado, llamémosle \mathcal{H}_k ($k \geq s$) que verifique que los \mathcal{H}_j anteriores a él son idénticamente nulos cuando $\Phi_2 = 0$. En este caso, sobre la superficie $\Phi_2 = 0$, el hamiltoniano se escribe

$$\mathcal{H} = \Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1) + O(\Phi_1^{(k+1)/2}),$$

con $G_k(2nm\phi_1)$ una serie de Fourier finita en el ángulo $2nm\phi_1$. El análisis de los ceros de $G_k(2nm\phi_1)$ nos da la estabilidad del origen. Esto supone un avance respecto al teorema 2.4.1 ya que en éste se asume que la función $\Psi(\psi)$ es precisamente la que viene del término \mathcal{H}_s , correspondiente al orden de la resonancia. En realidad, la propia demostración de Cabral y Meyer es válida bajo estas condiciones más generales. Si las hipótesis son más débiles es probablemente porque Cabral y Meyer trataban de escribirlas en términos más parecidos al teorema de Arnold. Nótese que bastaba con generalizar la definición del determinante

$$D_k = \mathcal{H}_k(\omega_2, \omega_1, \psi).$$

Como consecuencia de la extensión de las hipótesis se puede abordar la estabilidad de un caso degenerado en resonancia 1:2, que puede encontrarse en ciertos problemas, como el de las rotaciones planas de un satélite en órbita circular [62].

Corolario 2.5.2. *Sea*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_6 + O((\Phi_1 + \Phi_2)^4),$$

la forma normal correspondiente a una resonancia 1:2 que sólo contiene términos de orden par. Supongamos que $D_4 = 0$ y que

$$\mathcal{H}_6 = \sum_{k=0}^3 \Phi_1^{3-k} \Phi_2^k (a_k + b_k \cos 8\phi_1 + c_k \sen 8\phi_1), \quad (2.11)$$

con $D_6 \neq 0$. Entonces, si $a_0^2 > b_0^2 + c_0^2$, el origen es estable y si $a_0^2 < b_0^2 + c_0^2$, el origen es inestable.

Demostración.

En este caso, $\mathcal{H}_2 = \omega\Phi_2$ y $\mathcal{H}_4 = 2B\Phi_1\Phi_2 + C\Phi_2^2$. Teniendo en cuenta esto y la expresión (2.11), es obvio que $\mathcal{H}_2(\Phi_2 = 0) = \mathcal{H}_4(\Phi_2 = 0) = 0$ y que

$$\mathcal{H}_6(\Phi_2 = 0) = \Phi_1^3(a_0 + b_0 \cos 8\phi_1 + c_0 \sen 8\phi_1).$$

Identificamos la función $G_k(2nm\phi_1)$, que en nuestro caso es

$$G_6 = a_0 + b_0 \cos 8\phi_1 + c_0 \sen 8\phi_1,$$

y examinamos sus ceros. Puesto que $D_6 \neq 0$, tenemos que $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 \neq 0$.

Si $b_0^2 + c_0^2 = 0$, entonces G_6 es una función constante no nula y, por lo tanto, el origen es estable.

Si $b_0^2 + c_0^2 \neq 0$, existe θ tal que

$$\sen \theta = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}}, \quad \cos \theta = \frac{c_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}}.$$

Así, la función G_6 puede escribirse como

$$G_6 = \sqrt{b_0^2 + c_0^2} \left(\frac{a_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}} + \sen(\theta + 8\phi_1) \right).$$

Es evidente que esta función no se anula si

$$\left| \frac{a_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}} \right| > 1,$$

es decir, si $a_0^2 > b_0^2 + c_0^2$. En este caso, el origen es estable. Si, por el contrario,

$$\left| \frac{a_0}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}} \right| < 1,$$

o equivalentemente, si $a_0^2 < b_0^2 + c_0^2$, entonces G_6 tiene ceros simples y por lo tanto el origen es inestable. ■

2.6. Interpretación geométrica

El teorema 2.5.2 admite una interpretación geométrica si estudiamos la estructura del espacio fásico después de la normalización. En concreto, a partir de la forma de las órbitas alrededor del origen se puede establecer un criterio geométrico que es equivalente al teorema 2.5.2. Esta idea elemental en la que órbitas cerradas en torno al origen implican estabilidad y órbitas asintóticas inestabilidad, fue introducida en [26, 27], aunque sin llegar a probar la equivalencia con el resultado 2.5.2.

En primer lugar debemos estudiar la estructura de la forma normal del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + P_2^2) + \sum_{j>2} \mathcal{H}_j(q_k, P_k). \quad (2.12)$$

En este sentido, es conveniente introducir un nuevo conjunto de variables canónicas que permitan identificar fácilmente aquellos términos que son de la forma normal. Sea este nuevo conjunto de variables (u_1, u_2, v_1, v_2) , de forma que

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k - iP_k), \quad v_k = \frac{-i}{\sqrt{2}}(q_k + iP_k), \quad k = 1, 2, \quad (2.13)$$

cuya transformación inversa viene dada por

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_k + iv_k), \quad P_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(u_k - iv_k), \quad k = 1, 2.$$

En estas variables el operador de Lie es diagonal [35], por lo que resulta fácil identificar los términos de la forma normal. En efecto, el hamiltoniano (2.12) se transforma en

$$\mathcal{H} = i\omega_1 u_1 v_1 - i\omega_2 u_2 v_2 + \sum_{j>2} \mathcal{H}_j(u_k, v_k),$$

siendo \mathcal{H}_j un polinomio homogéneo de grado j en u_k, v_k , $k = 1, 2$.

En las nuevas variables, la expresión de la derivada de Lie \mathcal{L}_2 resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\cdot) = (\mathcal{H}_2, \cdot) &= \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial v_1} \frac{\partial \cdot}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u_1} \frac{\partial \cdot}{\partial v_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial v_2} \frac{\partial \cdot}{\partial u_2} - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u_2} \frac{\partial \cdot}{\partial v_2} = \\ &= i\omega_1 \left(u_1 \frac{\partial \cdot}{\partial u_1} - v_1 \frac{\partial \cdot}{\partial v_1} \right) - i\omega_2 \left(u_2 \frac{\partial \cdot}{\partial u_2} - v_2 \frac{\partial \cdot}{\partial v_2} \right). \end{aligned}$$

De esta forma, un monomio de grado j

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2},$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = j$, está en la forma normal si pertenece a $\ker \mathcal{L}_2$. Ahora bien,

$$\mathcal{L}_2(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2}) = i[\omega_1(\alpha_1 - \beta_1) - \omega_2(\alpha_2 - \beta_2)] u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2},$$

de donde se deduce fácilmente que el monomio $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2}$ pertenece a la forma normal si y sólo si se verifica la ecuación

$$(\omega_1, -\omega_2) \cdot (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) = 0. \quad (2.14)$$

Si entre las frecuencias del sistema se satisface una condición de resonancia $n:m$, la ecuación (2.14) es equivalente a

$$(m, -n) \cdot (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$m(\alpha_1 - \beta_1) - n(\alpha_2 - \beta_2) = 0,$$

ecuación diofántica cuyas soluciones son de la forma

$$\alpha_1 - \beta_1 = kn, \quad \alpha_2 - \beta_2 = km, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia, los monomios

$$I_1 = u_1 v_1, \quad I_2 = u_2 v_2, \quad I_3 = u_1^n u_2^m, \quad I_4 = v_1^n v_2^m, \quad (2.15)$$

pertenecen a la forma normal y además verifican la relación

$$I_1^n I_2^m = I_3 I_4. \quad (2.16)$$

Examinemos tres tipos de monomios diferentes dependiendo del valor que tome k .

- Si $k = 0$, obtenemos la solución trivial, $\alpha_1 = \beta_1$ y $\alpha_2 = \beta_2$, que es satisfecha para cualquier ω_1, ω_2 , incluso si no hay resonancia entre las frecuencias. Los monomios correspondientes son de la forma

$$(u_1 v_1)^{\alpha_1} (u_2 v_2)^{\alpha_2}.$$

Estos monomios aparecen únicamente cuando $2(\alpha_1 + \alpha_2) = j$, o dicho de otro modo, sólo aparecen en aquellos \mathcal{H}_j con j par. Además, éstos pueden expresarse como producto de potencias positivas de los monomios I_1 e I_2 ya que

$$(u_1 v_1)^{\alpha_1} (u_2 v_2)^{\alpha_2} = I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_2}.$$

- Si $k > 0$, entonces $\alpha_1 = \beta_1 + kn$ y $\alpha_2 = \beta_2 + km$, y en consecuencia los monomios pueden escribirse como

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} = (u_1 v_1)^{\beta_1} (u_2 v_2)^{\beta_2} (u_1^n u_2^m)^k.$$

Estos monomios aparecen cuando $2(\beta_1 + \beta_2) + (n + m)k = j$. El valor mínimo de j es $n + m$, el orden de la resonancia. Además, pueden expresarse como producto de potencias positivas de los monomios I_1 , I_2 e I_3 ya que

$$(u_1 v_1)^{\beta_1} (u_2 v_2)^{\beta_2} (u_1^n u_2^m)^k = I_1^{\beta_1} I_2^{\beta_2} I_3^k.$$

- Si $k < 0$, entonces $\beta_1 = \alpha_1 - kn$, $\beta_2 = \alpha_2 - km$, y en consecuencia podemos escribir

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} = (u_1 v_1)^{\alpha_1} (u_2 v_2)^{\alpha_2} (v_1^n v_2^m)^{-k}.$$

Estos monomios aparecen cuando $2(\alpha_1 + \alpha_2) - (n + m)k = j$. Como ocurre en el caso previo, j debe ser como mínimo $n + m$, orden de la resonancia. Además, pueden expresarse como producto de potencias positivas de los monomios I_1 , I_2 e I_4 ya que

$$(u_1 v_1)^{\alpha_1} (u_2 v_2)^{\alpha_2} (v_1^n v_2^m)^{-k} = I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_2} I_4^{-k}.$$

En resumen, los monomios de orden j pertenecientes a la forma normal son de alguno de los dos siguientes tipos

$$I_1^{\gamma_1} I_2^{\gamma_2} I_3^{\gamma_3}, \quad I_1^{\gamma_1} I_2^{\gamma_2} I_4^{\gamma_3},$$

con $2(\gamma_1 + \gamma_2) + (n + m)\gamma_3 = j$. Nótese que entre éstos quedan también recogidos los de la forma $I_1^{\gamma_1} I_2^{\gamma_2}$ sin más que tomar $\gamma_3 = 0$ en cualquiera de los anteriores.

Los monomios I_1, I_2, I_3 e I_4 son denominados *invariantes* o *generadores* de la forma normal. A partir de ellos se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.6.1. *Supongamos que las frecuencias del sistema cumplen una condición de resonancia $n:m$. Entonces, la forma normal expresada en invariantes complejos hasta orden M del hamiltoniano \mathcal{H} es*

$$\mathcal{H} = i(\omega_1 I_1 - \omega_2 I_2) + \sum_{\substack{2(\gamma_1 + \gamma_2) + (n+m)\gamma_3 = j \\ 3 \leq j \leq M}} (a_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} I_3^{\gamma_3} + b_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} I_4^{\gamma_3}) I_1^{\gamma_1} I_2^{\gamma_2}.$$

Es interesante hacer notar que el uso de variables complejas no sólo permite identificar de manera sencilla los términos de la forma normal, sino que también permite distinguir entre los términos resonantes (cuando $\gamma_3 \neq 0$) y los no resonantes (cuando $\gamma_3 = 0$).

2.6.1. Invariantes reales

Las variables complejas, y más concretamente los invariantes complejos, han permitido identificar de modo simple los términos de la forma normal de un hamiltoniano hasta un determinado orden (teorema 2.6.1). Sin embargo, resulta deseable conocer dichos términos en función de algunos invariantes reales que, a diferencia de los invariantes complejos, puedan ser interpretados geoméricamente.

Con este objetivo definimos

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{i(mI_1+nI_2)}{2}, & C &= \frac{m^{n/2}n^{m/2}(I_4+i^{n+m}I_3)}{2}, \\ M_2 &= \frac{i(mI_1-nI_2)}{2}, & S &= \frac{im^{n/2}n^{m/2}(I_4-i^{n+m}I_3)}{2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

El cambio inverso viene dado por

$$\begin{aligned} I_1 &= -i\left(\frac{M_1+M_2}{m}\right), & I_3 &= \frac{(-i)^{n+m}(C+iS)}{m^{n/2}n^{m/2}}, \\ I_2 &= -i\left(\frac{M_1-M_2}{n}\right), & I_4 &= \frac{C-iS}{m^{n/2}n^{m/2}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para demostrar que los invariantes M_1, M_2, C, S son cantidades reales basta conocer las expresiones de los I_i ($1 \leq i \leq 4$) en función de las variables de Lissajous. En este sentido, puede comprobarse que utilizando (2.15), (2.13), (1.18) y finalmente (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= -i\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2m}, \\ I_2 &= -i\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2n}, \\ I_3 &= (-i)^{n+m}\left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2m}\right)^{n/2}\left(\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2n}\right)^{m/2}(\cos 2nm\phi_1 + i \operatorname{sen} 2nm\phi_1), \\ I_4 &= \left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2m}\right)^{n/2}\left(\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2n}\right)^{m/2}(\cos 2nm\phi_1 - i \operatorname{sen} 2nm\phi_1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

A partir de las expresiones dadas en (2.17) para M_1, M_2, C, S y utilizando (2.19) se obtiene

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2}\Phi_1, & C &= 2^{-(m+n)/2}(\Phi_1 - \Phi_2)^{m/2}(\Phi_1 + \Phi_2)^{n/2} \cos 2nm\phi_1, \\ M_2 &= \frac{1}{2}\Phi_2, & S &= 2^{-(m+n)/2}(\Phi_1 - \Phi_2)^{m/2}(\Phi_1 + \Phi_2)^{n/2} \operatorname{sen} 2nm\phi_1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

y por lo tanto $M_1, M_2, C, S \in \mathbb{R}$. Este conjunto de invariantes M_1, M_2, C, S es diferente al conjunto de invariantes complejos I_1, I_2, I_3, I_4 pero equivalente

en el sentido de que, en variables de Lissajous, I_1 e I_2 son polinomios de primer grado en las acciones Φ_1, Φ_2 , como M_1 y M_2 , mientras que I_3 e I_4 lo son de grado $\frac{n+m}{2}$, lo mismo que C y S .

Al igual que los invariantes complejos, los invariantes reales no son independientes. De hecho, la relación (2.16) se transforma en

$$C^2 + S^2 = (M_1 + M_2)^n (M_1 - M_2)^m. \quad (2.21)$$

Además, como $\Phi_1 \geq |\Phi_2|$ (ver (2.4)), se verifica que

$$M_1 \geq |M_2|. \quad (2.22)$$

En estas condiciones, el teorema 2.6.1 tiene su contrapartida en invariantes reales.

Teorema 2.6.2. *Supongamos que las frecuencias del sistema están en resonancia $n:m$. Entonces, la forma normal expresada en invariantes reales hasta orden M del hamiltoniano \mathcal{H} es*

$$\mathcal{H} = 2\omega M_2 + \sum_{\substack{2(\gamma_1 + \gamma_2) + (n+m)(\gamma_3 + \gamma_4) = j \\ 3 \leq j \leq M}} a_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} C^{\gamma_3} S^{\gamma_4}. \quad (2.23)$$

Demostración.

El resultado se deduce a partir del teorema 2.6.1 y de las expresiones de los I_i ($i = 1, 2, 3, 4$) en términos de los nuevos invariantes (ecuaciones (2.18)). ■

Nótese que el orden de la forma normal en el que primero aparecen C y S es justamente el orden de la resonancia, esto es, s . Dicho de otro modo, el primer orden que contiene ángulos es el orden de la resonancia. Teniendo esto en cuenta, se puede precisar mejor la expresión de la forma normal.

Teorema 2.6.3. *Supongamos que las frecuencias del sistema están en resonancia $n:m$. Si $s = n + m$ es el orden de la resonancia y*

- *s es par, es decir, existe algún l tal que $s = 2l$, entonces la forma normal del hamiltoniano \mathcal{H} hasta orden M , expresada en invariantes reales, es*

$$\mathcal{H} = 2\omega M_2 + \mathcal{H}_4 + \cdots + \mathcal{H}_{2l-2} + \sum_{j=l}^N \mathcal{H}_{2j},$$

donde

$$\mathcal{H}_{2k} = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = k} a_{\gamma_1 \gamma_2} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} \quad 2 \leq k \leq l-1,$$

y

$$\mathcal{H}_{2j} = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 + l(\gamma_3 + \gamma_4) = j} a_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} C^{\gamma_3} S^{\gamma_4} \quad l \leq j \leq N,$$

con $2N = M$ si M es par ó $2N = M - 1$ si M es impar. En particular,

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{2l} = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = l} a_{\gamma_1 \gamma_2} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} + \alpha C + \beta S.$$

- s es impar, es decir, existe algún l tal que $s = 2l - 1$, entonces la forma normal del hamiltoniano \mathcal{H} hasta orden M , expresada en invariantes reales, es

$$\mathcal{H} = 2\omega M_2 + \mathcal{H}_4 + \cdots + \mathcal{H}_{2l-2} + \sum_{j=2l-1}^M \mathcal{H}_j,$$

donde,

$$\mathcal{H}_{2k} = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = k} a_{\gamma_1 \gamma_2} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} \quad 2 \leq k \leq l-1,$$

y

$$\mathcal{H}_j = \sum_{2(\gamma_1 + \gamma_2) + (2l-1)(\gamma_3 + \gamma_4) = j} a_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} C^{\gamma_3} S^{\gamma_4} \quad 2l-1 \leq j \leq M.$$

En particular,

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{2l-1} = \alpha C + \beta S.$$

Demostración.

El resultado es obvio a partir del teorema 2.6.2. ■

Nótese que la expresión de la forma normal dada en invariantes reales no es única debido a la restricción (2.21).

2.6.2. Espacio fásico reducido

El proceso de normalización ha introducido una nueva integral formal, M_2 , si se considera la forma normal truncada hasta un cierto orden. De este modo, el número de grados de libertad se reduce en 1. Puesto que el problema original es de 2 grados de libertad, tras la normalización obtenemos

un sistema de 1 grado de libertad y, en consecuencia, formalmente integrable. Esta variación del número de grados de libertad afecta a la estructura del espacio fásico puesto que el original es tridimensional y el reducido, para cada valor de $M_2 = \text{cte}$, es bidimensional, y por lo tanto susceptible de ser representado geoméricamente.

Los invariantes reales son precisamente los generadores del espacio fásico reducido que viene dado por la ecuación (2.21)

$$C^2 + S^2 = (M_1 + M_2)^n (M_1 - M_2)^m,$$

sujeta a la restricción (2.22)

$$M_1 \geq |M_2|,$$

y teniendo en cuenta que M_2 es la integral formal.

La ecuación (2.21) define el espacio de fases reducido como una colección de variedades semialgebraicas. Para cada valor constante de M_2 , (2.21) es una superficie de revolución con vértice en el punto $(0, 0, |M_2|)$ (ver figura 2.1). En particular, el origen es el vértice de la superficie correspondiente a $M_2 = 0$.

Nótese que las variables extendidas de Lissajous pueden ser utilizadas para parametrizar la superficie (2.21), siendo dicha parametrización la dada por las ecuaciones (2.20).

Considerando el hamiltoniano \mathcal{H} normalizado hasta un orden M como en (2.23) y fijado un valor constante para M_2 , las órbitas se obtienen como las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{M}_1 = (M_1, \mathcal{H}), \quad \dot{C} = (C, \mathcal{H}), \quad \dot{S} = (S, \mathcal{H}), \quad (2.24)$$

que verifican la condición (2.21). Es decir, las órbitas pueden obtenerse como la intersección de la superficie dada por (2.21) con la definida por el hamiltoniano normalizado hasta orden M dado por (2.23).

El sistema diferencial (2.24) viene determinado por la estructura de Poisson [32] de los generadores. Teniendo en cuenta su relación con las variables de Lissajous y sabiendo que éstas son completamente canónicas resulta que

$$\begin{aligned} (M_1, C) &= nmS, \\ (C, S) &= \frac{nm}{2}(M_1 + M_2)^{n-1}(M_1 - M_2)^{m-1}((n-m)M_2 - sM_1), \\ (S, M_1) &= nmC. \end{aligned} \quad (2.25)$$

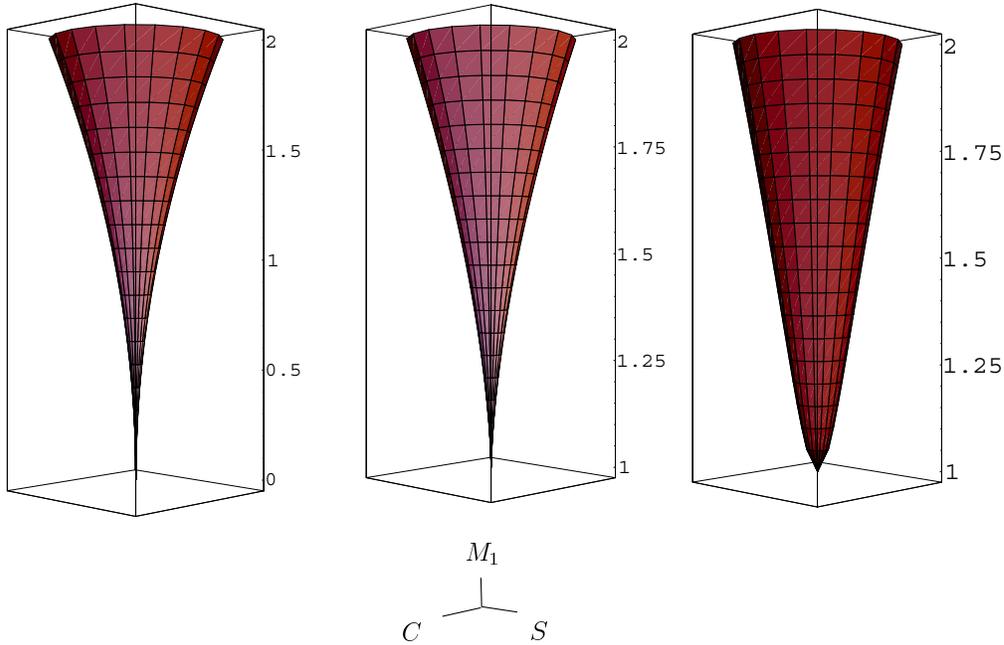


Figura 2.1: $C^2 + S^2 = (M_1 + M_2)^n (M_1 - M_2)^m$ para $n = 1$, $m = 3$, $M_2 = 0$, $M_2 = 1$ y $M_2 = -1$ respectivamente.

A partir de (2.25) es posible deducir algunas propiedades interesantes que afectan al sistema normalizado.

Teorema 2.6.4. *El sistema (2.24) es invariante bajo la acción del grupo $SO(2)$ de rotaciones alrededor del eje M_1 .*

Demostración.

Basta probar que la estructura de los paréntesis de Poisson se conserva bajo una rotación alrededor del eje M_1 . En efecto, consideramos la rotación definida por

$$\bar{S} = S \cos \sigma - C \sin \sigma, \quad \bar{C} = S \sin \sigma + C \cos \sigma, \quad \bar{M}_1 = M_1, \quad (2.26)$$

con $\sigma \in [0, 2\pi)$.

Los nuevos paréntesis de Poisson son

$$(\bar{M}_1, \bar{C}) = nm\bar{S},$$

$$(\bar{C}, \bar{S}) = \frac{nm}{2}(\bar{M}_1 + M_2)^{n-1}(\bar{M}_1 - M_2)^{m-1}((n-m)M_2 - s\bar{M}_1),$$

$$(\bar{S}, \bar{M}_1) = nm\bar{C},$$

que resultan ser las mismas expresiones que (2.25). En realidad, esto es consecuencia de la simetría cilíndrica de la superficie definida por (2.21). ■

Teorema 2.6.5. *El vértice es un punto crítico del sistema si es un punto no regular de la superficie (2.21). Si $M_2 = 0$, entonces el vértice siempre es un equilibrio.*

Demostración.

El vértice de la superficie (2.21), localizado en $M_1 = |M_2|$, $C = S = 0$, es un punto no regular si las tres derivadas parciales de la función

$$f(M_1, C, S) = C^2 + S^2 - (M_1 + M_2)^n (M_1 - M_2)^m$$

se anulan al mismo tiempo. Esto ocurre si y sólo si $M_2 > 0$ y $m > 1$, $M_2 < 0$ y $n > 1$, ó $M_2 = 0$. En todos estos casos, los paréntesis de Poisson (2.25) se anulan, y en consecuencia el sistema de ecuaciones diferenciales (2.24) se anula en el vértice. ■

2.6.3. Criterio geométrico

Una vez determinada la estructura del espacio de fases reducido, estamos en condiciones de dar una interpretación geométrica del teorema 2.5.2, incluso cuando se considera la hipótesis general de que \mathcal{H}_k es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$. En primer lugar, recordemos que las soluciones del sistema (2.24) se obtienen como las curvas de intersección de la superficie definida por el hamiltoniano (2.23) y la superficie (2.21).

De acuerdo con la demostración del teorema 2.5.2 es suficiente encontrar las propiedades de estabilidad del origen sobre la superficie $M_2 = 0$, cuyo vértice es precisamente el origen. Puesto que \mathcal{H}_k es el primer término de la forma normal no nulo para $M_2 = 0$, lo anterior es equivalente a ver cómo son las intersecciones de las superficies

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}_k(C, S, M_1, 0) = 0\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^s\},$$

y cuál es su relación con la función $G_k(2nm\phi_1)$, que es la que determina, en última instancia, las propiedades de estabilidad del origen. En este sentido se tienen las siguientes propiedades.

Teorema 2.6.6. *La función $G_k(2nm\phi_1)$ puede expresarse como*

$$G_k(2nm\phi_1) = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{2\gamma+(n+m)(\gamma_3+\gamma_4)=k} a_{\gamma\gamma_3\gamma_4} \sin^{\gamma_3}(2nm\phi_1) \cos^{\gamma_4}(2nm\phi_1).$$

Demostración.

Partiendo de la expresión de \mathcal{H} en invariantes reales

$$\mathcal{H} = 2\omega M_2 + \sum_{\substack{2(\gamma_1+\gamma_2)+(n+m)(\gamma_3+\gamma_4)=j \\ 3 \leq j \leq M}} a_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4} M_1^{\gamma_1} M_2^{\gamma_2} C^{\gamma_3} S^{\gamma_4},$$

y suponiendo que \mathcal{H}_k es el primer término de la forma normal no nulo para $M_2 = 0$, resulta que

$$\mathcal{H}_k(C, S, M_1, 0) = \sum_{2\gamma+(n+m)(\gamma_3+\gamma_4)=k} a_{\gamma\gamma_3\gamma_4} M_1^\gamma C^{\gamma_3} S^{\gamma_4}.$$

Si expresamos los invariantes en función de las variables extendidas de Lissajous utilizando (2.20) obtenemos que

$$\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0) = \left(\frac{\Phi_1}{2}\right)^{k/2} \sum_{2\gamma+(n+m)(\gamma_3+\gamma_4)=k} a_{\gamma\gamma_3\gamma_4} \sin^{\gamma_3}(2nm\phi_1) \cos^{\gamma_4}(2nm\phi_1),$$

de donde se deduce el resultado. ■

En las condiciones del teorema de Cabral y Meyer, esta función es lineal en senos y cosenos ya que $k = n + m$ y, por tanto,

$$G_k(2nm\phi_1) = G(2nm\phi_1) = a_0 + a_1 \sin(2nm\phi_1) + a_2 \cos(2nm\phi_1),$$

donde $a_0 = 0$ si la resonancia es de orden impar. Esta función no se anula si $a_0^2 > a_1^2 + a_2^2$. Si $a_0^2 < a_1^2 + a_2^2$, los ceros de la función son simples, mientras que si $a_0^2 = a_1^2 + a_2^2$, los ceros son dobles. Por lo tanto, si $a_0^2 > a_1^2 + a_2^2$, entonces el origen es estable, mientras que si $a_0^2 < a_1^2 + a_2^2$, el origen es inestable. Determinar la estabilidad del origen en este caso resulta sencillo. Sin embargo, cuando $k > n + m$ la función $G_k(2nm\phi_1)$ puede ser muy compleja, si k es grande en comparación con $n + m$. En este sentido, un criterio alternativo pero equivalente, basado en propiedades geométricas, puede resultar de más utilidad. Para ello, necesitamos la caracterización de los puntos críticos del sistema (2.24) sobre la superficie $M_2 = 0$.

Teorema 2.6.7. *En resonancias de orden mayor o igual que 3, el sistema hamiltoniano dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k$ sobre la superficie $M_2 = 0$ posee un único equilibrio (que coincide con el vértice de la superficie) o bien existe un conjunto infinito de equilibrios entre los cuales está el vértice.*

Demostración.

Como

$$\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0) = \Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1),$$

las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \Phi_1} = \frac{k}{2} \Phi_1^{\frac{k}{2}-1} G_k(2nm\phi_1), \\ \dot{\Phi}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \phi_1} = -2nm \Phi_1^{\frac{k}{2}} G'_k(2nm\phi_1). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como consideramos resonancias de orden mayor o igual que 3, k , en el peor de los casos es 3. Es obvio que $\Phi_1 = 0$ es siempre solución, que corresponde al vértice de la superficie. Otras soluciones de equilibrio se obtienen cuando $G_k(2nm\phi_1)$ y $G'_k(2nm\phi_1)$ se anulan a la vez para algún valor $\phi_1 = \phi_1^*$. Ahora bien, en este caso todos los puntos de la forma (Φ_1, ϕ_1^*) son de equilibrio, siempre que $\Phi_1 \geq 0$ (por aquello de que los puntos de la superficie verifican que $M_1 \geq |M_2|$ y en nuestro caso $M_2 = 0$). Es decir, hay un conjunto infinito de equilibrios, que obviamente contiene al vértice de la superficie. ■

Ahora ya podemos dar la contrapartida geométrica al teorema 2.5.2.

Teorema 2.6.8. *Sea $\mathcal{H}(C, S, M_1, M_2)$ un hamiltoniano expresado en forma normal en términos de los invariantes y sea \mathcal{H}_k el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$. Sea*

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}_k(C, S, M_1, 0) = 0\},$$

y sea \mathcal{G}_2 la superficie

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^s\}.$$

Si suponemos que el origen es un equilibrio aislado, entonces se tiene que

- *Si \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 tienen como punto en común sólo el origen, entonces éste es estable.*
- *Si \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 se cortan en algún otro punto, entonces el origen es inestable.*

Demostración.

Para probar la estabilidad del origen, basta ver que \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 se cortan sólo en el origen si y sólo si $G_k(2nm\phi_1) \neq 0$ para todo ϕ_1 . Ahora bien, introduciendo la parametrización dada por las variables de Lissajous, los puntos de intersección de \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son las soluciones de $\Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1) = 0$. Si $G_k(2nm\phi_1) \neq 0$ para cualquier ϕ_1 , la única solución es $\Phi_1 = 0$, y viceversa, si la única solución es $\Phi_1 = 0$, entonces $G_k(2nm\phi_1) \neq 0$ cualesquiera que sea ϕ_1 .

Para el caso inestable debemos ver que \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 tienen más puntos en común que el origen si y sólo si $G_k(2nm\phi_1)$ tiene ceros simples. Es obvio que no puede haber ceros múltiples pues estamos suponiendo que el origen es aislado (ver teorema 2.6.7). Ahora bien, como los puntos de intersección deben satisfacer la ecuación

$$\Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1) = 0,$$

si hay más puntos de corte que $\Phi_1 = 0$, debe existir un ángulo ϕ_1^* tal que $G_k(2nm\phi_1^*) = 0$ y además sea un cero simple. Análogamente, si $G_k(2nm\phi_1)$ tiene un cero simple, \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 se cortan a lo largo de una línea definida por la intersección de (2.21) con el plano

$$S = C \tan(2nm\phi_1^*).$$

Esta línea de intersección define una órbita asintótica, lo que también serviría para justificar la inestabilidad. ■

Pueden hacerse distintas consideraciones como consecuencia de este último resultado. En primer lugar, es evidente que cuando el origen es estable, éste debe ser un extremo de la función $\mathcal{H}_k(M_2 = 0)$, por lo que ésta es definida en un entorno del origen. Esto se desprende de forma inmediata de la expresión de $\mathcal{H}_k(M_2 = 0)$ en variables de Lissajous, que es

$$\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0) = \Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1),$$

y de que $G_k(2nm\phi_1) \neq 0$ para todo ϕ_1 ya que entonces $G_k(2nm\phi_1)$ es de signo constante y por lo tanto, también $\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0)$ ya que $\Phi_1 \geq 0$. En este caso $\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0)$ es una función de Lyapunov para el sistema truncado, que puede extenderse a todo el sistema.

En el caso en que el origen es inestable $\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0)$ deja de ser una función definida y toma tanto valores positivos como negativos. Así pues, la órbita correspondiente a $\mathcal{H}_k(\Phi_2 = 0) = 0$ actúa como separatriz de los valores positivos y negativos. Esta órbita es no trivial y, puesto que el origen

es el único punto crítico, es asintótica al origen. De este modo, el origen es inestable.

Todo lo anterior es cierto en las hipótesis del teorema 2.5.2 o, equivalentemente, del teorema 2.6.8. Bajo estas condiciones, los términos de orden superior pueden acotarse convenientemente de modo que las propiedades del sistema truncado se conserven en un entorno del origen.

En segundo lugar, si consideramos las órbitas sobre superficies con $M_2 \neq 0$ podemos ver que se conservan los movimientos acotados, para el caso estable, y los no acotados, para el caso inestable.

Corolario 2.6.1. *Si el origen es estable, todas las órbitas son acotadas para cualquier valor de M_2 . Si el origen es inestable, existen órbitas no acotadas para cualquier valor de M_2 .*

Demostración.

Supongamos que el origen es estable. Fijado un valor de M_2 ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \cdots + \mathcal{H}_k,$$

puede verse como un polinomio en $\Phi_1^{1/2}$ con coeficientes trigonométricos en ϕ_1 . El término dominante del polinomio sigue siendo $\Phi_1^{k/2} G_k(2nm\phi_1)$, cuyo signo es constante para cualquier valor de ϕ_1 puesto que el origen es estable. Supongamos que $G_k(2nm\phi_1) > 0$, es decir, $\mathcal{H} \rightarrow +\infty$ cuando $\Phi_1 \rightarrow +\infty$.

Para demostrar el resultado, basta ver que si $\mathcal{H} \rightarrow +\infty$, entonces las órbitas son cerradas y simples. Fijemos un valor de ϕ_1 . Entonces, \mathcal{H} es un polinomio en $\Phi_1^{1/2}$ y por lo tanto tiene un número finito de máximos y mínimos. Fijando un valor de \mathcal{H} por encima del valor del mayor de los máximos relativos (ver figura 2.2), tenemos que existe un único valor de Φ_1 tal que

$$\mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_k = \mathcal{H},$$

lo que define una curva cerrada y acotada. Como cuando $\mathcal{H} \rightarrow +\infty$, se tiene que $\Phi_1 \rightarrow +\infty$, entonces todas las órbitas son acotadas.

En caso de que el origen sea inestable, el resultado puede deducirse a partir de la demostración anterior y el teorema del índice. ■

Además de las dos observaciones anteriores, en las hipótesis del teorema 2.4.1, el teorema 2.6.8 proporciona condiciones de estabilidad comunes para todas las resonancias de orden par y lo mismo para todas las de orden impar. Esto es consecuencia de la linealidad en senos y cosenos de la función $G_k(2nm\phi_1)$ cuando el término \mathcal{H}_k coincide con el correspondiente al orden de la resonancia, es decir, cuando $k = s$.

$$\mathcal{H}(\Phi_1, \phi_1)$$

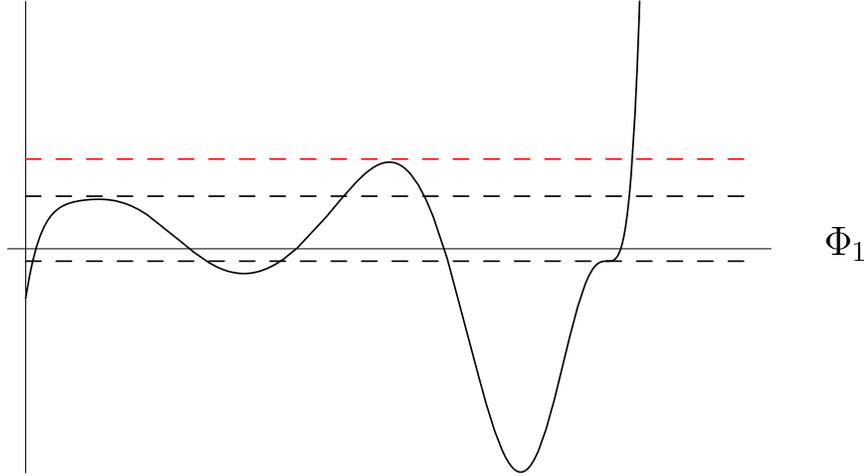


Figura 2.2: Fijado un valor de ϕ_1 , se representa $\mathcal{H}(\Phi_1, \phi_1)$ en función de Φ_1 .

Corolario 2.6.2. *Supongamos que se satisface una condición de resonancia de orden s con s impar y $s \geq 3$, y que \mathcal{H}_s es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$. Entonces,*

$$\mathcal{H}_s(M_2 = 0) = \alpha C + \beta S,$$

con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ y además el origen es un equilibrio inestable.

Demostración.

Por el teorema 2.6.3 sabemos que cuando s es impar, entonces

$$\mathcal{H}_s(M_2 = 0) = \alpha C + \beta S.$$

Si \mathcal{H}_s es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$, entonces $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Puesto que el sistema es invariante por rotaciones alrededor del eje M_1 (teorema 2.6.4), podemos realizar una rotación como en (2.26) con σ tal que

$$\text{sen } \sigma = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{cos } \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{si } \alpha \neq 0,$$

y $\sigma = 0$ en otro caso. El hamiltoniano resultante tras la rotación se escribe

$$\mathcal{H}_s(M_2 = 0) = \gamma S,$$

con $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

En este caso, las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma S = 0\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^s\}.$$

Como $\gamma \neq 0$, las dos superficies se cortan en los puntos $(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$S = 0, \quad C = \pm M_1^{s/2}.$$

Por lo tanto se cortan transversalmente, y aplicando el teorema 2.6.8 tenemos que el origen es inestable. ■

Nótese que la proyección sobre el plano $C = 0$ de \mathcal{G}_1 , es $S = 0$, mientras que la de \mathcal{G}_2 es $S^2 = M_1^s$. La línea $S = 0$ está en la zona interior a $S^2 = M_1^s$.

Corolario 2.6.3. *Si se satisface una condición de resonancia de orden s con s par y $s \geq 4$, y \mathcal{H}_s es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$, entonces*

$$\mathcal{H}_s(M_2 = 0) = a_s M_1^{s/2} + \alpha C + \beta S, \quad (2.28)$$

con $a_s^2 + \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Si además

- $a_s^2 > \alpha^2 + \beta^2$, entonces el origen es un equilibrio estable.
- $a_s^2 < \alpha^2 + \beta^2$, entonces el origen es un equilibrio inestable.

Demostración.

Por el teorema 2.6.3 sabemos que cuando s es par, entonces

$$\mathcal{H}_s(M_2 = 0) = a_s M_1^{s/2} + \alpha C + \beta S.$$

Si \mathcal{H}_s es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$, entonces $a_s^2 + \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Puesto que el sistema es invariante por rotaciones alrededor del eje M_1 (teorema 2.6.4), podemos realizar una rotación como en (2.26) con σ tal que

$$\text{sen } \sigma = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{cos } \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{si } \alpha \neq 0,$$

y $\sigma = 0$ en otro caso. El hamiltoniano resultante tras la rotación se escribe

$$\mathcal{H}_s = a_s M_1^{s/2} + \gamma S,$$

con $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y $a_s^2 + \gamma^2 \neq 0$.

Ahora, las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid a_s M_1^{s/2} + \gamma S = 0\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^s\}.$$

Dichas superficies se cortan en los puntos $(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$S = -\frac{a_s M_1^{s/2}}{\gamma}, \quad C^2 = \left(1 - \frac{a_s^2}{\gamma^2}\right) M_1^s,$$

si $\gamma \neq 0$ y se cortan sólo en el origen en caso de que $\gamma = 0$.

Si $a_s^2 > \alpha^2 + \beta^2$, es decir, $a_s^2 > \gamma^2$, entonces las superficies sólo se cortan en el origen, lo que indica según el teorema 2.6.8, que el origen es estable.

Por contra, si $a_s^2 < \alpha^2 + \beta^2$, es decir, si $a_s^2 < \gamma^2$, entonces las superficies se cortan en los puntos tales que

$$S = -\frac{M_1^{s/2} a_s}{\gamma}, \quad C = \pm M_1^{s/2} \sqrt{1 - \frac{a_s^2}{\gamma^2}},$$

y aplicando el teorema 2.6.8 resulta que el origen es inestable. ■

Nótese que la proyección sobre el plano $C = 0$ de \mathcal{G}_1 , es

$$S = -\frac{a_s M_1^{s/2}}{\gamma},$$

mientras que la proyección de \mathcal{G}_2 sobre el mismo plano es $S^2 = M_1^s$. La primera de las líneas está en la zona exterior o interior a $S^2 = M_1^s$ dependiendo si $a_s^2 > \gamma^2$ ó $a_s^2 < \gamma^2$ respectivamente.

Los dos corolarios anteriores pueden ilustrarse para los casos más sencillos de resonancias pares e impares.

Resonancia 1:2

En esta situación $s = 3$ y las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 resultan ser

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma S = 0\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^3\},$$

que aparecen representadas en la figura 2.3. Dichas superficies se cortan en los puntos $(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$S = 0, \quad C = \pm M_1 \sqrt{M_1},$$

y por el teorema 2.6.8 resulta que el origen es inestable.

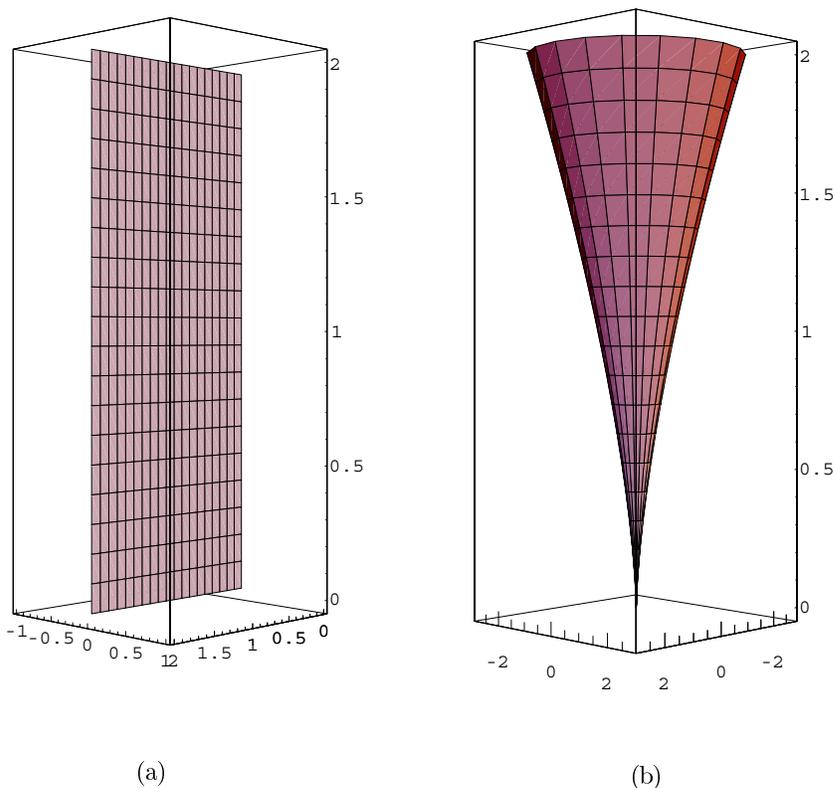


Figura 2.3: Resonancia 1:2. (a) $\mathcal{G}_1 : \gamma S = 0$, (b) $\mathcal{G}_2 : C^2 + S^2 = M_1^3$.

La figura 2.4 representa la proyección de las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 sobre el plano $C = 0$. La proyección de la primera, es $S = 0$, mientras que la de la segunda es $S^2 = M_1^3$. Nótese que $S = 0$ está en la zona interior a $S^2 = M_1^3$, luego las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 se cortan transversalmente.

En la figura 2.5 representamos algunas órbitas de escape en el espacio de fases cuando $M_2 = 0$.

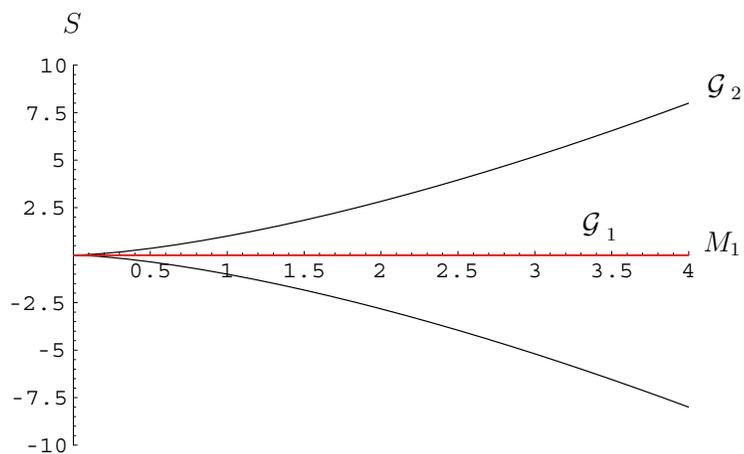


Figura 2.4: Resonancia 1:2. Superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 proyectadas sobre el plano $C = 0$.

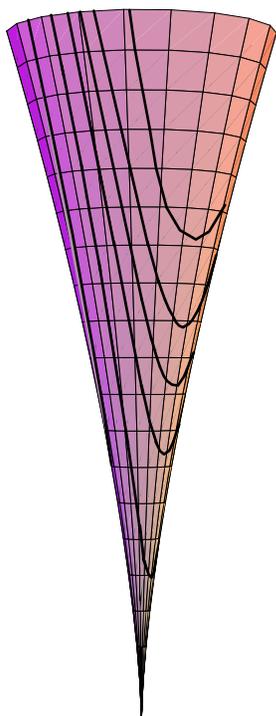


Figura 2.5: Resonancia 1:2. Órbitas en el espacio de fases para $M_2 = 0$.

Resonancia 1:3

Consideremos ahora el caso en el que las frecuencias del sistema satisfacen una condición de resonancia 1:3, es decir, $\omega_1 = 3\omega_2$.

Ahora, las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son

$$\mathcal{G}_1 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid a_4 M_1^2 + \gamma S = 0\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3 \mid C^2 + S^2 = M_1^4\},$$

que aparecen representadas en la figura 2.6. Dichas superficies se cortan en los puntos $(C, S, M_1) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$S = -\frac{a_4 M_1^2}{\gamma}, \quad C^2 = \left(1 - \frac{a_4^2}{\gamma^2}\right) M_1^2,$$

si $\gamma \neq 0$ y sólo en el origen si $\gamma = 0$. El teorema 2.6.8 asegura que si $a_4^2 > \gamma^2$, el origen es estable mientras que si $a_4^2 < \gamma^2$, el origen es inestable.

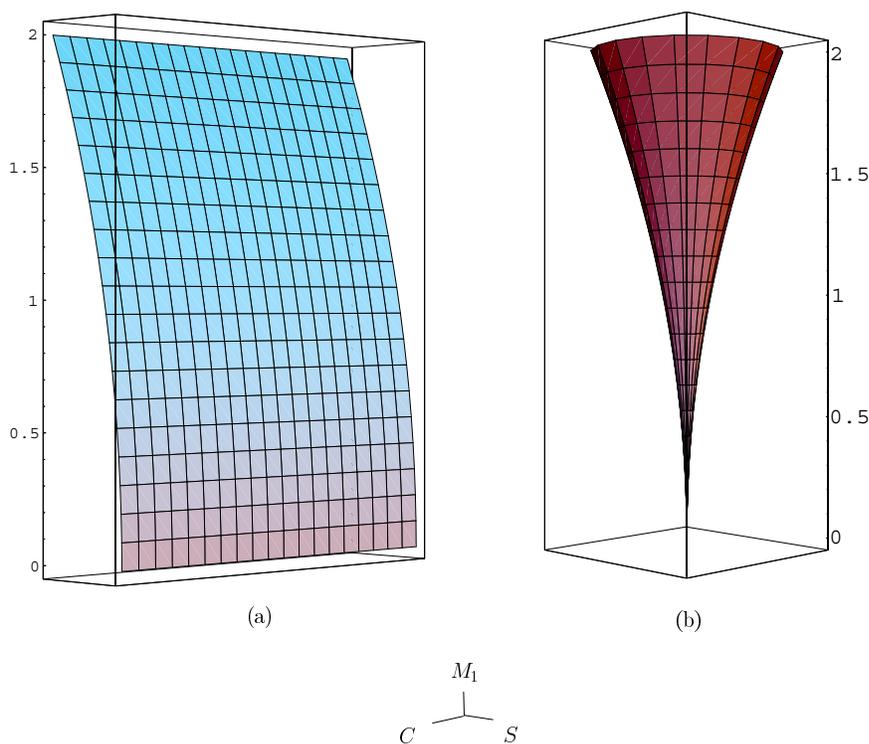


Figura 2.6: Resonancia 1:3. (a) \mathcal{G}_1 para $a_4 = 2$, $\gamma = 1$. (b) $\mathcal{G}_2 : C^2 + S^2 = M_1^4$.

La figura 2.7 representa la proyección de las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 sobre el plano $C = 0$. La proyección de la primera, es $M_1 = 0$ si $\gamma = 0$, y $S = -\frac{a_4 M_1^2}{\gamma}$ si $\gamma \neq 0$, mientras que la de la segunda es $S^2 = M_1^4$. Nótese que la primera está en la zona exterior o interior a $S^2 = M_1^4$ dependiendo qué valor toma $a_4^2 - \gamma^2$. Así, si $a_4^2 - \gamma^2 > 0$, la proyección de \mathcal{G}_1 sobre el plano $C = 0$ está en el exterior de la proyección de \mathcal{G}_2 , y por lo tanto, se cortan en un sólo punto. Si $a_4^2 - \gamma^2 < 0$, la proyección de \mathcal{G}_1 sobre el plano $C = 0$ está en el interior de la proyección de \mathcal{G}_2 , y por lo tanto, se cortan transversalmente.

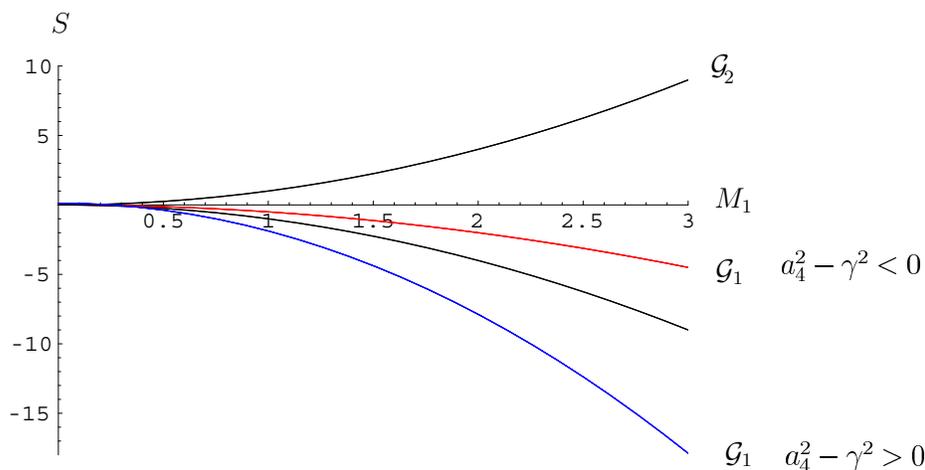


Figura 2.7: Resonancia 1:3. Superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 proyectadas sobre el plano $C = 0$. Para $a_4^2 - \gamma^2 > 0$ se cortan únicamente en el origen (línea azul, estabilidad) y para $a_4^2 - \gamma^2 < 0$ intersectan transversalmente (línea roja, inestabilidad)

En las figuras 2.8 y 2.9 representamos algunas órbitas en el espacio de fases cuando $M_2 = 0$, órbitas que son cerradas cuando $a_4^2 - \gamma^2 > 0$ y de escape cuando $a_4^2 - \gamma^2 < 0$.

Nótese que cuando $a_4^2 - \gamma^2 = 0$ las superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son tangentes. Entonces el origen no es un equilibrio aislado puesto que aparece un conjunto denso de equilibrios

$$C = 0, \quad S = -M_1^2,$$

entre los cuales se encuentra el origen. Decimos entonces que se produce un caso degenerado.

Considerando términos de mayor grado en la forma normal del hamiltoniano, el criterio geométrico es también aplicable a casos de degeneración. Ahora bien, al considerar términos de orden superior en la forma normal, el

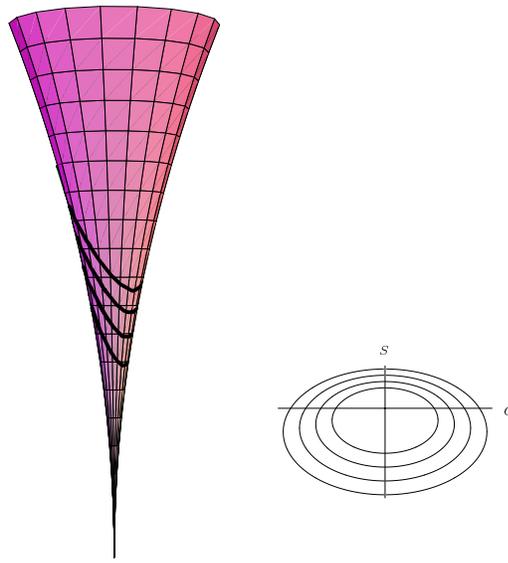


Figura 2.8: Resonancia 1:3. Para $M_2 = 0$ y $a_4^2 - \gamma^2 > 0$, a la izquierda, órbitas en el espacio de fases y, a la derecha, proyecciones sobre el plano $M_1 = 0$.

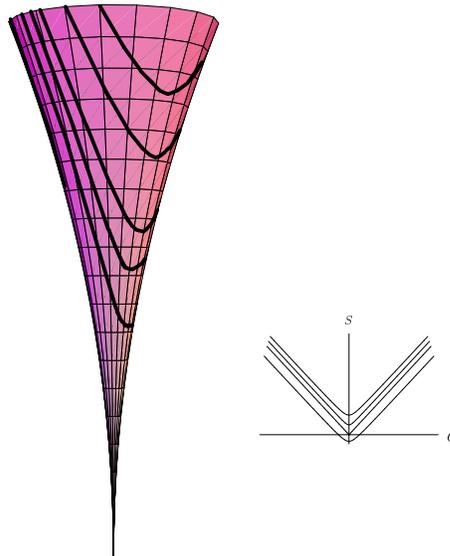


Figura 2.9: Resonancia 1:3. Para $M_2 = 0$ y $a_4^2 - \gamma^2 < 0$, a la izquierda, órbitas en el espacio de fases y, a la derecha, proyecciones sobre el plano $M_1 = 0$.

teorema 2.6.7 no tiene por qué cumplirse. De hecho, pueden aparecer más puntos críticos aislados que el origen. De esta forma, para extender el criterio geométrico, las condiciones del teorema 2.6.8 deben modificarse de manera que si el origen es un punto de intersección aislado de las superficies definidas por \mathcal{H} y $C^2 + S^2 = M_1^s$, entonces el origen es estable. Teniendo en cuenta estas consideraciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.6.9. *Supongamos que se satisface una condición de resonancia de orden s con s par ($s \geq 4$) y que \mathcal{H}_s es el primer término de la forma normal que no se anula cuando $M_2 = 0$. Si se verifica que*

$$a_s^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

y

$$a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2 > 0, \quad (2.29)$$

con a_s, α y β como en (2.28) y a_{s+2}, b_1, b_2 tales que

$$\mathcal{H}_{s+2}(M_2 = 0) = a_{s+2} M_1^{(s+2)/2} + (b_1 C + b_2 S) M_1,$$

entonces el origen es estable. Si

$$a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2 < 0,$$

entonces el origen es inestable.

Demostración.

El hamiltoniano normalizado y truncado hasta orden $s + 2$ sobre la superficie $M_2 = 0$ se escribe

$$\mathcal{H} = a_s M_1^{s/2} + \alpha C + \beta S + a_{s+2} M_1^{(s+2)/2} + (b_1 C + b_2 S) M_1,$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{H} = a_s M_1^{s/2} + \alpha C + \beta S + (a_{s+2} M_1^{s/2} + b_1 C + b_2 S) M_1.$$

Para que la superficie definida por \mathcal{H} y la superficie

$$C^2 + S^2 = M_1^s$$

tengan como punto de corte aislado al origen de coordenadas es suficiente que \mathcal{H} sea definida (positiva o negativa) en un entorno del origen.

Puesto que $\mathcal{H}_s = a_s M_1^{s/2} + \alpha C + \beta S$ es semidefinida, basta ver que \mathcal{H} es definida en el caso crítico, esto es, cuando C y S son tales que

$$\alpha C + \beta S = -a_s M_1^{s/2}.$$

En esta situación

$$C = \frac{-\alpha}{a_s} M_1^{s/2}, \quad S = \frac{-\beta}{a_s} M_1^{s/2},$$

y se tiene

$$\mathcal{H} = \frac{a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2}{a_s} M_1^{(s+2)/2}.$$

Si $a_s > 0$, entonces \mathcal{H} debe ser definida positiva y en consecuencia

$$a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2 > 0.$$

Si $a_s < 0$, entonces \mathcal{H} debe ser definida negativa y también se obtiene (2.29). En ambos casos, el origen es estable por ser el origen un punto de intersección aislado. Si por el contrario,

$$a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2 < 0,$$

entonces el origen no es un punto de intersección aislado y existen órbitas asintóticas, por lo que es inestable. ■

El caso $a_s a_{s+2} - \alpha b_1 - \beta b_2 = 0$ no asegura ni estabilidad ni inestabilidad, a pesar de que las dos superficies puedan cortarse transversalmente [9]. Esto es así porque el tamaño de la región donde ambas superficies son transversales no es lo suficientemente grande como para no verse afectado por el resto de la forma normal.

Como caso particular del teorema 2.6.9 se obtienen las condiciones de estabilidad para una resonancia de orden 4. Éstas resultan ser las mismas que proporciona Markeev en [60], cuando la condición (2.29) es expresada en las variables adecuadas.

Capítulo 3

Bifurcaciones y flujo fásico en la resonancia 1:3

3.1. Introducción

En el capítulo 2 se ha visto cómo a partir del flujo del sistema normalizado sobre la variedad $M_2 = 0$ es posible establecer las propiedades de estabilidad del origen, siempre que se satisfagan las condiciones de los teoremas 2.5.2 y 2.6.8. En este caso, el flujo queda bien caracterizado, pues, tal y como se establece en ambos teoremas el origen es el único equilibrio. Sin embargo, el flujo sobre las variedades $M_2 \neq 0$ también es de interés, no sólo porque determina la estabilidad del origen, sino por la posible aparición de nuevos equilibrios. Estos, en general, están asociados a familias de órbitas periódicas que juegan un papel relevante en la dinámica del sistema original.

La caracterización de los equilibrios para $M_2 \neq 0$ en un caso general, dentro de las hipótesis de los teoremas 2.5.2 y 2.6.8, es una tarea compleja. En este sentido, deben resolverse sistemas polinómicos de orden alto dependientes, no linealmente, de un gran número de parámetros. Debido a esto, nos centraremos en el caso particular de una resonancia 1:3 donde $\mathcal{D}_4 \neq 0$ y estudiaremos el flujo del hamiltoniano truncado a orden 4.

Aquí nos encontramos con un hamiltoniano cuadrático en los invariantes reales, como los estudiados en [25, 43, 44, 45, 46], sólo que el espacio de fases ahora no es una esfera sino una superficie abierta y la estructura de Poisson cambia. Esto afecta a los equilibrios, a su estabilidad y a las líneas de bifurcación, como puede verse en [8] donde se estudian hamiltonianos cuadráticos con otra estructura de Poisson sobre superficies compactas, lo que supone una generalización de los trabajos anteriores sobre una superficie esférica.

En nuestro caso, al ser el espacio de fases una superficie abierta, es de esperar la aparición de diferencias con los estudios anteriores, fundamentalmente por el papel que pueda representar el infinito.

No obstante, las técnicas para el análisis de los equilibrios serán las mismas en las que están basados los trabajos anteriores. Fundamentalmente se trata de establecer una conexión entre equilibrios y raíces de un polinomio. Una vez hecho esto, diversos resultados elementales sobre polinomios, sirven para caracterizar los diferentes tipos de bifurcaciones. Este tipo de análisis puede ser llevado a cabo con éxito en diferentes tipos de problemas [39, 49, 80] siempre que se pueda establecer la relación entre equilibrios y raíces de un polinomio. Otros autores, como Schmidt [82], estudian este problema utilizando otras técnicas.

3.2. Ecuaciones del movimiento y equilibrios

Sea \mathcal{H} la forma normal hasta orden 4 correspondiente a un sistema hamiltoniano en resonancia 1:3. Entonces,

$$\mathcal{H} = 2\omega M_2 + a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2 + a_{02}M_2^2 + \alpha C + \beta S,$$

donde \mathcal{H} está expresada en términos de los invariantes reales M_1 , M_2 , C , S . Recordemos que éstos verifican las condiciones

$$C^2 + S^2 = (M_1 + M_2)(M_1 - M_2)^3, \quad (3.1)$$

$$M_1 \geq |M_2|. \quad (3.2)$$

Puesto que M_2 es una integral del sistema, la ecuación (3.1) define, para cada valor constante de M_2 , una superficie de revolución cuyo vértice es el punto de coordenadas $M_1 = |M_2|$, $C = S = 0$ (véase figura 2.1).

Puesto que M_2 es constante, la dinámica del sistema es la misma que la proporcionada por

$$\mathcal{H} = a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2 + \alpha C + \beta S. \quad (3.3)$$

Supongamos que \mathcal{H} no es degenerado para $M_2 = 0$. Entonces $\mathcal{D}_4 \neq 0$ y $a_{20}^2 + \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Si $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, la dinámica es muy sencilla pues ahora

$$\mathcal{H} = a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2,$$

con $a_{20} \neq 0$. Teniendo en cuenta los paréntesis de Poisson (2.25), las ecuaciones del movimiento correspondientes son

$$\begin{aligned}\dot{M}_1 &= 0, \\ \dot{S} &= 3C(2a_{20}M_1 + a_{11}M_2), \\ \dot{C} &= -3S(2a_{20}M_1 + a_{11}M_2).\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio de \mathcal{H} son aquellos que anulan el sistema de ecuaciones anterior y están sujetos a las condiciones (3.1) y (3.2). Es obvio que el vértice de la superficie, el punto de coordenadas $(0, 0, |M_2|)$, es siempre un equilibrio. Además del vértice, aparece un conjunto de puntos de equilibrio no aislados sobre la circunferencia de ecuación

$$\begin{cases} C^2 + S^2 = \frac{(a_{11} + 2a_{20})^2}{16a_{20}^4} (a_{11}^2 - 4a_{20}^2) M_2^4, \\ M_1 = \frac{-a_{11}}{2a_{20}} M_2, \end{cases}$$

cuando $M_2 > 0$ y $\frac{a_{11}}{2a_{20}} \leq -1$, o cuando, $M_2 < 0$ y $\frac{a_{11}}{2a_{20}} \geq 1$. La geometría de las órbitas es sencilla en este caso ya que éstas se obtienen como intersección de la familia de planos perpendiculares a M_1 definida por \mathcal{H} y la superficie (3.1). Es decir, las órbitas son circunferencias. El vértice es un punto de equilibrio estable ya que se encuentra rodeado de una familia de órbitas cerradas y acotadas (ver figura 3.1).

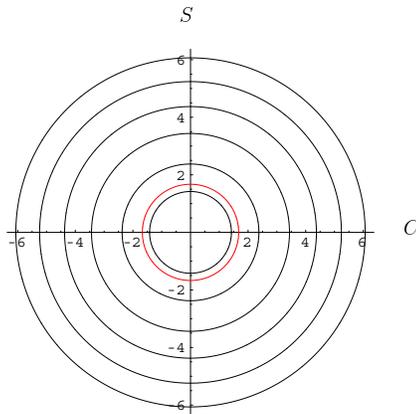


Figura 3.1: Proyección de las órbitas sobre el plano $M_1 = 0$ para $M_2 = 1$, $a_{20} = -1$, $a_{11} = 3$ y $\alpha = \beta = 0$. La circunferencia de color rojo corresponde al conjunto de equilibrios no aislados.

Si $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, (3.3) puede reducirse a

$$\mathcal{H} = a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2 + \gamma S,$$

tras realizar una rotación alrededor del eje M_1 como en (2.26) con σ tal que

$$\operatorname{sen} \sigma = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \operatorname{cos} \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{si } \alpha \neq 0,$$

y $\sigma = 0$ en otro caso. En cualquier caso,

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \neq 0.$$

Así, la dinámica de este sistema es la misma que la de

$$\mathcal{H} = aM_1^2 + bM_1M_2 + S,$$

donde

$$a = \frac{a_{20}}{\gamma} \quad \text{y} \quad b = \frac{a_{11}}{\gamma}. \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta los paréntesis de Poisson (2.25), las ecuaciones del movimiento correspondientes son

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= -3C, \\ \dot{S} &= 3C(2aM_1 + bM_2), \\ \dot{C} &= -3S(2aM_1 + bM_2) - 3(M_1 - M_2)^2(M_2 + 2M_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Los puntos de equilibrio son aquellos que anulan el sistema de ecuaciones (3.5) y verifican las condiciones (3.1) y (3.2).

Nótese que las dos primeras ecuaciones del movimiento se anulan si y sólo si $C = 0$, mientras que la tercera se anula cuando

$$S(2aM_1 + bM_2) + (M_1 - M_2)^2(M_2 + 2M_1) = 0,$$

por lo que

$$S = -\frac{(M_1 - M_2)^2(M_2 + 2M_1)}{2aM_1 + bM_2}, \quad (3.6)$$

siempre y cuando $2aM_1 + bM_2 \neq 0$.

En caso contrario, es decir, si $2aM_1 + bM_2 = 0$, entonces $M_1 = -\frac{bM_2}{2a}$ y la tercera ecuación se anula si y sólo si

$$(M_1 - M_2)^2(M_2 + 2M_1) = 0.$$

Por lo tanto, se dan dos soluciones. La primera,

$$M_1 = -\frac{M_2}{2}, \quad M_1 = -\frac{bM_2}{2a},$$

no da lugar a equilibrio alguno ya que no verifica la desigualdad (3.2) y la segunda,

$$M_1 = M_2, \quad M_1 = -\frac{bM_2}{2a},$$

es un equilibrio si $M_2 > 0$ y $2a + b = 0$.

Si $2aM_1 + bM_2 \neq 0$, entonces S viene dado por la ecuación (3.6). Sustituyendo en la ecuación (3.1), junto con $C = 0$, se tiene que M_1 ha de satisfacer la ecuación polinómica

$$(M_1 - M_2)^3 [(M_1 - M_2)(M_2 + 2M_1)^2 - (M_1 + M_2)(2aM_1 + bM_2)^2] = 0,$$

junto con la restricción $M_1 \geq |M_2|$.

De esta forma, el cálculo de los equilibrios se reduce a determinar las raíces del polinomio

$$\mathcal{R}(M_1) = (M_1 - M_2)^3 [(M_1 - M_2)(M_2 + 2M_1)^2 - (M_1 + M_2)(2aM_1 + bM_2)^2],$$

que sean mayores o iguales que $|M_2|$.

El punto $M_1 = M_2$ es siempre una raíz de \mathcal{R} y por lo tanto da lugar a un equilibrio siempre que $M_2 > 0$. En este caso el equilibrio se corresponde con el vértice de la superficie.

El resto de equilibrios del sistema viene determinado por las raíces del polinomio

$$\mathcal{R}_1(M_1) = 4(1 - a^2)M_1^3 - 4a(a + b)M_2M_1^2 - (3 + b^2 + 4ab)M_2^2M_1 - (1 + b^2)M_2^3,$$

en el intervalo $[|M_2|, +\infty)$. Con el fin de simplificar el estudio de las raíces de \mathcal{R}_1 , introducimos el siguiente cambio de variable

$$x = \frac{M_2}{M_1},$$

por el que \mathcal{R}_1 se transforma en

$$\mathcal{P}(x) = 4(1 - a^2) - 4a(a + b)x - (3 + b^2 + 4ab)x^2 - (1 + b^2)x^3.$$

De esta forma, las raíces de $\mathcal{R}_1(M_1)$ en $[|M_2|, +\infty)$ se transforman en las raíces de $\mathcal{P}(x)$ en el intervalo $[-1, 0)$ cuando $M_2 < 0$ ó en las raíces en $(0, 1]$ cuando $M_2 > 0$.

Aunque existen fórmulas exactas para calcular las raíces de un polinomio de tercer grado [72], éstas no resultan de utilidad en este caso, ya que no es sencillo determinar, en función de los parámetros, cuándo las raíces son reales o complejas y, en el caso de que éstas sean reales, cuándo pertenecen a un intervalo determinado. Es por ello que es preferible concentrarse en determinar sólo el número de raíces reales del polinomio que se encuentran en los intervalos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$. De este modo, nos centraremos en determinar en qué condiciones se produce un cambio en el número de raíces de \mathcal{P} y, por tanto, en el número de equilibrios del sistema. El número de raíces de \mathcal{P} en $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ cambia si se produce alguna de estas dos circunstancias,

1. Alguna de las raíces del polinomio \mathcal{P} toma los valores extremos -1 , 1 ó 0 .
2. Alguna de las raíces de \mathcal{P} tiene multiplicidad mayor que uno.

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{P}(-1) = 2, \quad \mathcal{P}(1) = -2(2a + b)^2, \quad \mathcal{P}(0) = 4(1 - a^2),$$

las rectas

$$2a + b = 0, \quad a = 1, \quad a = -1,$$

constituyen claramente líneas de bifurcación [31]. Además, mientras que la primera de ellas únicamente aparece cuando $M_2 > 0$, las dos siguientes aparecen siempre, independientemente del signo de M_2 .

Por otra parte se puede deducir

Proposición 3.2.1. \mathcal{P} tiene al menos 1 raíz en el intervalo $(-1, 1]$. Además, si $a^2 > 1$, tiene al menos una raíz en $(-1, 0)$ y si $a^2 < 1$, en $(0, 1]$.

Demostración.

Esto se deduce de forma inmediata de

$$\mathcal{P}(-1) = 2 > 0, \quad \mathcal{P}(0) = 4(1 - a^2), \quad \mathcal{P}(1) = -2(2a + b)^2 \leq 0. \blacksquare$$

3.3. Raíces múltiples

Como ya se ha dicho, el cambio en el número de equilibrios puede estar motivado por la aparición de raíces múltiples dentro de los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1]$. Como primer paso determinaremos en qué condiciones \mathcal{P} tiene raíces múltiples, aunque este hecho no implique siempre un cambio en el número de equilibrios del sistema. Así, si \mathcal{P} tiene una raíz múltiple, el correspondiente polinomio mónico

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{4(1-a^2)}{1+b^2} + \frac{4a(a+b)}{1+b^2}x + \frac{3+b^2+4ab}{1+b^2}x^2 + x^3,$$

también la tendrá. Aplicando el corolario A.0.1 del Apéndice, sabemos que entonces $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$.

Utilizando para el cálculo la expresión (A.3), y denotando $\Delta = \mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}})$, obtenemos que

$$\Delta = -\frac{16(a-b)^2 f(a,b)}{(1+b^2)^4},$$

donde

$$f(a,b) = 27 - 36a^2 + 16a^4 + 36ab - 16a^3b + 18b^2 + 4ab^3 - b^4.$$

Por lo tanto, $\Delta = 0$ si y sólo si $b = a$ ó $f(a,b) = 0$.

En consecuencia, \mathcal{P} posee alguna raíz múltiple si (a,b) pertenece a la recta $b = a$ ó a la curva $f(a,b) = 0$. Esta última constituye una curva en implícitas que verifica las siguientes propiedades.

1. Es simétrica respecto al origen pues $f(-a, -b) = f(a, b)$.
2. No corta al eje $b = 0$ puesto que

$$f(a, 0) = 27 - 36a^2 + 16a^4 = (4a^2 - \frac{9}{2})^2 + \frac{27}{4} > 0.$$

Por lo tanto, deducimos que hay al menos dos ramas, una para $b > 0$ y otra para $b < 0$ debido al carácter simétrico. En consecuencia, basta estudiar lo que ocurre cuando $b > 0$.

3. Para $b > 0$, $f(a, b) = 0$ tiene un único punto singular en $a = -1$, $b = 1$. En efecto, los puntos singulares son aquellos para los que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$ se anulan al mismo tiempo. Ahora bien,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 4(2a - b)(8a^2 - 2ab - b^2 - 9),$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -4(2a - b + 3)(2a - b - 3)(a + b).$$

La segunda ecuación se hace cero si y sólo si $b = -a$, $b = 2a + 3$ ó $b = 2a - 3$.

- a) Si $b = -a$, entonces $\frac{\partial f}{\partial a} = 108a(a^2 - 1)$, que se anula cuando $a = 0$ ó $a = \pm 1$. Como $b > 0$ y $b = -a$, entonces $a < 0$, en cuyo caso el único valor que anula las dos derivadas parciales es $a = -1$, $b = 1$.
- b) Si $b = 2a + 3$, entonces $\frac{\partial f}{\partial a} = 216(a + 1)$ se anula si y sólo si $a = -1$. El valor de b correspondiente es $b = 1$.
- c) Si $b = 2a - 3$, entonces $\frac{\partial f}{\partial a} = 126(a - 1)$ se anula si y sólo si $a = 1$. Para $a = 1$, $b = -1 < 0$, que no pertenece a la rama $b > 0$.

Nótese que además $f(-1, 1) = 0$.

- 4. Para $b > 0$, la curva $f(a, b) = 0$ está siempre por encima de $b = 1$. En efecto, si $b = 1$, entonces

$$f(a, 1) = 4(1 + a)^2[(2a + 3)^2 + 2],$$

y por lo tanto $f(a, 1) = 0$ si y sólo si $a = -1$. Así, el único punto para el que la curva $f(a, b) = 0$ alcanza el valor 1 es el punto singular $(a, b) = (-1, 1)$. Por otro lado,

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = +\infty.$$

De ambas observaciones se deduce que el punto $(a, b) = (-1, 1)$ es un mínimo, además de ser un punto singular.

- 5. Para $b > 0$, la curva es estrictamente decreciente cuando $a \in (-\infty, -1)$ y estrictamente creciente cuando $a \in (-1, +\infty)$.

Teniendo en cuenta las propiedades 3. y 4., basta ver que la curva no tiene más puntos críticos que el punto singular $(a, b) = (-1, 1)$. En efecto,

$$\frac{db}{da} = \frac{\partial f / \partial a}{\partial f / \partial b} = \frac{(2a - b)(9 - 8a^2 + 2ab + b^2)}{(b + a)[(2a - b)^2 - 9]},$$

que se hace cero si y sólo si $b = 2a$ y $b = -a \pm 3\sqrt{a^2 - 1}$.

- a) Si $b = 2a$, entonces $f(a, b) = 27(1 + 4a^2) > 0$, y por lo tanto, no da lugar a ningún punto crítico.
- b) Si $b = -a \pm 3\sqrt{a^2 - 1}$, entonces

$$f(a, b) = 216(a^2 - 1)^{3/2}[-(a^2 - 1)^{1/2} \pm a],$$

que se anula si y sólo si $a = \pm 1$. En consecuencia, $b = \mp 1$, y como en nuestras hipótesis $b > 0$, el único punto crítico es $(a, b) = (-1, 1)$.

Nótese además que si $b = 1$,

$$\lim_{a \rightarrow -1} \frac{db}{da} = \lim_{a \rightarrow -1} \frac{(2a-1)(a+1)(5-4a)}{2(a+1)^2(a-2)} = +\infty,$$

por lo que $(a, b) = (-1, 1)$ es un punto cuspidal.

6. La función $f(a, b) = 0$ está constituida por dos ramas, una correspondiente a $b > 0$ y otra a $b < 0$, a las que denotaremos respectivamente $b = f_1(a)$ y $b = f_2(a)$ y que vienen dadas por,

$$f_1(a) = \begin{cases} b_4(a) & \text{si } a < -3, \\ 5.80734 & \text{si } a = -3, \\ b_2(a) & \text{si } -3 < a < 0, \\ 4.40367 & \text{si } a = 0, \\ b_4(a) & \text{si } 0 < a < 3, \\ 11.8073 & \text{si } a = 3, \\ b_2(a) & \text{si } a > 3, \end{cases} \quad f_2(a) = \begin{cases} b_3(a) & \text{si } a < -3, \\ -11.8073 & \text{si } a = -3, \\ b_1(a) & \text{si } -3 < a < 0, \\ -4.40367 & \text{si } a = 0, \\ b_3(a) & \text{si } 0 < a < 3, \\ -5.80734 & \text{si } a = 3, \\ b_1(a) & \text{si } a > 3, \end{cases}$$

con $b_i(a)$ ($1 \leq i \leq 4$) las funciones

$$b_1 = a - \sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{6 + 2a^2 + 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2a(a^2 - 9)}{\sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}},$$

$$b_2 = a - \sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} + \sqrt{6 + 2a^2 + 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2a(a^2 - 9)}{\sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}},$$

$$b_3 = a + \sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{6 + 2a^2 + 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2a(a^2 - 9)}{\sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}},$$

$$b_4 = a + \sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} + \sqrt{6 + 2a^2 + 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2a(a^2 - 9)}{\sqrt{3 + a^2 - 3(a^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}}$$

Puede probarse sin dificultad que $f_1(a)$ y $f_2(a)$ son dos funciones continuas definidas a trozos (ver figura 3.2).

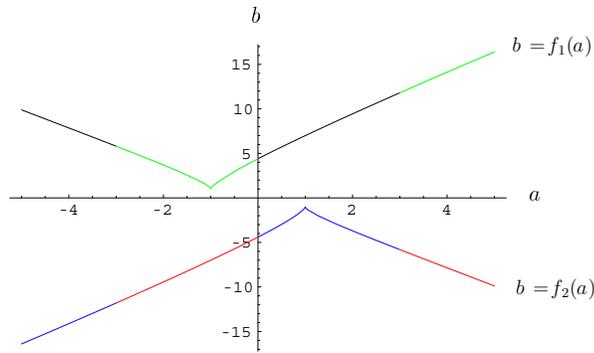


Figura 3.2: $b_1(a)$ está representada en color rojo, $b_2(a)$ en color verde, $b_3(a)$ en color azul y $b_4(a)$ en color negro.

Tanto la recta $b = a$ como las funciones $b = f_1(a)$, $b = f_2(a)$ que acabamos de describir constituyen líneas en las que \mathcal{P} posee alguna raíz múltiple. De esta forma, el plano de parámetros (a, b) queda dividido en 4 regiones definidas como

$$\text{I} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > f_1(a)\},$$

$$\text{II} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b < f_1(a)\},$$

$$\text{III} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(a) < b < a\},$$

$$\text{IV} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b < f_2(a)\},$$

y que representamos en la figura 3.3.

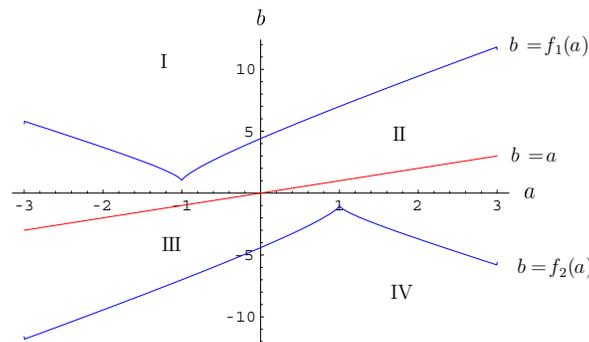


Figura 3.3: La recta $b = a$ y la curva $f(a, b) = 0$ dividen el plano paramétrico en las regiones I, II, III y IV.

El número de raíces en cada una de ellas viene caracterizado por el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Sea \mathcal{P} el polinomio*

$$\mathcal{P}(x) = 4(1 - a^2) - 4a(a + b)x - (3 + b^2 + 4ab)x^2 - (1 + b^2)x^3.$$

Entonces

- \mathcal{P} posee una única raíz real $\iff (a, b) \in \text{II} \cup \text{III}$.
- \mathcal{P} posee tres raíces reales distintas $\iff (a, b) \in \text{I} \cup \text{IV}$.
- \mathcal{P} posee tres raíces reales, alguna de ellas múltiple $\iff b = f_1(a)$
ó $b = f_2(a)$ ó $b = a$.

Demostración.

Sabemos que $\Delta = 0$ si y sólo si $b = a$, $b = f_1(a)$ ó $b = f_2(a)$. Es obvio que si $\Delta \neq 0$, entonces Δ es de signo contrario a $f(a, b)$.

Por lo tanto tenemos que,

- $\Delta < 0 \iff f(a, b) > 0 \iff (a, b) \in \text{II} \cup \text{III}$.
- $\Delta > 0 \iff f(a, b) < 0 \iff (a, b) \in \text{I} \cup \text{IV}$.
- $\Delta = 0 \iff b = a \text{ ó } f(a, b) = 0 \iff b = a \text{ ó } b = f_1(a) \text{ ó } b = f_2(a)$.

Aplicando ahora el teorema A.0.3 del Apéndice, se obtiene el resultado tal y como se detalla en el enunciado. ■

Nótese que en la región I el comportamiento es el mismo que en la IV y lo mismo pasa con las regiones II y III. Esto es debido a que las líneas $b = a$ y $f(a, b) = 0$ son simétricas respecto al origen.

Corolario 3.3.1. *Si $(a, b) \in \text{II} \cup \text{III}$, entonces \mathcal{P} tiene una única raíz real que*

- pertenece al intervalo $(0, 1]$ si $a^2 < 1$.
- pertenece al intervalo $(-1, 0)$ si $a^2 > 1$.
- es $x = 0$ si $a^2 = 1$.

Demostración.

El teorema 3.3.1 garantiza la existencia de una única raíz real cuando $(a, b) \in \text{II} \cup \text{III}$. De la proposición 3.2.1 se deduce el resultado para $a^2 \neq 1$. En el caso $a^2 = 1$, el polinomio \mathcal{P} se expresa

$$\mathcal{P} = x[-4a(a+b) - (3+b^2+4ab)x - (1+b^2)x^2],$$

que tiene por raíz a $x = 0$. ■

Corolario 3.3.2. *Si $b = a$, \mathcal{P} tiene una única raíz real en el intervalo $(-1, 1]$ que*

- pertenece al intervalo $(0, 1]$ si $a^2 < 1$.
- pertenece al intervalo $(-1, 0)$ si $a^2 > 1$.
- es $x = 0$ si $a^2 = 1$.

Demostración.

Si $b = a$, entonces

$$\mathcal{P} = 4(1-a^2) - 8a^2x - (3+5a^2)x^2 - (1+a^2)x^3.$$

Es fácil demostrar que $x = -2$ es una raíz doble y $x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ es una raíz simple. La raíz doble no está en el intervalo $(-1, 1]$ mientras que la raíz simple sí. El signo de esta raíz es inmediato. ■

Nótese que $b = a$ no constituye una línea de bifurcación puesto que sobre dicha recta, \mathcal{P} tiene una raíz múltiple que no pertenece a $(-1, 1]$ y la única raíz real en dicho intervalo tiene el mismo signo que $1 - a^2$, al igual que lo que ocurre cuando $(a, b) \in \text{II} \cup \text{III}$ (corolario 3.3.1).

Tenemos por lo tanto estudiado el número y el signo de las raíces de \mathcal{P} en $(-1, 1]$ cuando $f_2(a) < b < f_1(a)$, o equivalentemente cuando $f(a, b) > 0$. Con el objetivo de obtener el mismo tipo de resultados para los valores de (a, b) tales que $f(a, b) \leq 0$, enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. *Si $a = -\sqrt{2}$ y $b = f_1(a) = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble en $(0, 1)$ y una raíz simple en $(-1, 0)$. Si $a = 1$ y $b = f_1(a) = 7$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble en $(-1, 0)$ y la otra raíz es $x = 0$.*

Demostración.

Si $a = -\sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$, entonces $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ es raíz doble y $x = \frac{\sqrt{6}-3}{6}$ raíz simple. Si $a = 1$ y $b = 7$, entonces $x = -\frac{4}{5}$ es raíz doble y $x = 0$ es raíz simple. ■

Corolario 3.3.3. *Si $f(a, b) = 0$, entonces \mathcal{P} posee tres raíces, alguna de ellas múltiple, en el intervalo $(-1, 1]$.*

Demostración.

El teorema 3.3.1 afirma que si $f(a, b) = 0$, entonces \mathcal{P} tiene tres raíces reales, alguna de ellas múltiple.

Como $f(a, b) = 0$ es una curva simétrica respecto al origen, basta demostrar el resultado para $b = f_1(a)$. Puesto que $\mathcal{P}(-1) \neq 0$ y $\mathcal{P}(1) = 0$ si y sólo si $b + 2a = 0$, basta examinar las raíces de \mathcal{P} a ambos lados de dicha recta. Utilizando la proposición 3.3.1 tenemos dos parejas de valores (a, b) que se encuentran sobre $b = f_1(a)$, una a cada lado de la recta $b + 2a = 0$, para los cuales las raíces de \mathcal{P} siempre están en el intervalo $(-1, 1)$. Por lo tanto, dicha propiedad es extensible al resto de la rama. Nótese que la intersección de $b = f_1(a)$ con $b = -2a$ es el punto $(a, b) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$. Para dicho valor, \mathcal{P} tiene una raíz doble negativa y otra simple, que es $x = 1$. ■

Corolario 3.3.4. *Si $f(a, b) = 0$, tenemos que si*

- *$a \in (-\infty, -1)$ y $b = f_1(a)$, ó si $a \in (1, +\infty)$ y $b = f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble positiva y otra raíz simple negativa en $(-1, 1)$.*
- *$a = -1$ y $b = f_1(a)$, ó si $a = 1$ y $b = f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz triple en $x = 0$.*
- *$a \in (-1, 1)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble negativa y otra raíz simple positiva en $(-1, 1)$.*
- *si $a = 1$ y $b = f_1(a)$, ó si $a = -1$ y $b = f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble negativa y la otra raíz es $x = 0$.*
- *$a \in (1, +\infty)$ y $b = f_1(a)$, ó si $a \in (-\infty, -1)$ y $b = f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble negativa y otra raíz simple negativa en $(-1, 1)$.*

Demostración.

Como $f(a, b) = 0$ es simétrica respecto al origen, basta demostrar el resultado para $b = f_1(a)$. Por el corolario 3.3.3, las tres raíces de \mathcal{P} (contada la multiplicidad) están en el intervalo $(-1, 1]$. El cambio en el signo de las raíces aparece cuando $\mathcal{P}(0) = 0$, o equivalentemente, cuando $a^2 = 1$. Por lo tanto, basta examinar qué ocurre a los dos lados de $a = -1$ y de $a = 1$. Así, como para $a = -\sqrt{2} < -1$, sabemos por la proposición 3.3.1 que \mathcal{P} tiene una raíz doble positiva y otra simple negativa, esta propiedad se extiende para cualquier valor de $a \in (-\infty, -1)$. Para $a = -1$ y $b = f_1(a) = 1$, el polinomio

$\mathcal{P} = -2x^3$, por lo que la raíz $x = 0$ es triple. Por otro lado, si $a = 1$, la raíz doble es la negativa y la simple es $x = 0$ (proposición 3.3.1). Por lo tanto, la raíz que cambia de signo al pasar por $a = 1$ es la simple. Puesto que si $a^2 < 1$, al menos una raíz es positiva (proposición 3.2.1), para $-1 < a < 1$, \mathcal{P} tiene una raíz doble negativa y otra simple positiva. En consecuencia, para $a > 1$ la raíz doble es negativa y la simple también. ■

Nótese que sobre la línea $f(a, b) = 0$ la raíz múltiple de \mathcal{P} es doble salvo cuando $(a, b) = (-1, 1)$ ó $(a, b) = (1, -1)$, en cuyo caso la raíz es triple. Este comportamiento es consecuencia de un resultado sobre discriminantes que afirma que las raíces múltiples de un polinomio son siempre dobles, salvo en los puntos singulares de la curva que determina el discriminante [30]. Precisamente los puntos singulares de la curva $f(a, b) = 0$ son $(-1, 1)$ y $(1, -1)$.

3.4. Resultado fundamental

Los resultados obtenidos hasta ahora permiten caracterizar el número y el signo de las raíces de \mathcal{P} en el intervalo $(-1, 1]$ cuando $f(a, b) \geq 0$. A continuación se da un resultado que caracteriza la localización de las raíces cuando $f(a, b) < 0$, o equivalentemente, cuando $(a, b) \in I \cup IV$ en cuyo caso sabemos ya que \mathcal{P} posee tres raíces reales y distintas.

Teorema 3.4.1. *Si $(a, b) \in I \cup IV$, entonces \mathcal{P} tiene tres raíces reales y distintas en el intervalo $(-1, 1]$.*

Demostración.

Como hemos visto en el teorema 3.3.1, si $(a, b) \in I \cup IV$, entonces \mathcal{P} tiene tres raíces reales y distintas. En particular, $f(a, b) < 0$.

Hemos de demostrar que las tres raíces pertenecen al intervalo $(-1, 1]$. El teorema de Sturm (teorema A.0.1) permite calcular el número de raíces en el intervalo $(-1, 1)$ siempre y cuando sepamos que los extremos del intervalo no son raíces del polinomio ni \mathcal{P} tenga raíces múltiples en el intervalo. Puesto que las raíces son distintas, $\mathcal{P}(-1) = 2$ y $\mathcal{P}(1) = -2(2a + b)^2$, tenemos que, salvo cuando $b = -2a$, para el resto de valores de a y b podemos aplicar el resultado de Sturm.

Comencemos estudiando qué ocurre en el caso particular $b = -2a$. Entonces

$$f(a, -2a) = 9(3 - 4a^2) < 0,$$

si y sólo si $a^2 > \frac{3}{4}$. Puesto que $\mathcal{P}(1) = 0$,

$$\mathcal{P}(x) = -(x-1)\mathcal{Q}(x),$$

con

$$\mathcal{Q}(x) = 4(1-a^2) + 4x + (4a^2+1)x^2.$$

Este polinomio no tiene raíces múltiples en $(-1, 1)$ (por no tenerlas \mathcal{P}) y tampoco se anula en -1 y 1 , por lo que podemos aplicar el teorema de Sturm. Con la notación de la definición A.0.2, tenemos que

$$\mathcal{Q}_0(x) = 4(1-a^2) + 4x + (4a^2+1)x^2,$$

$$\mathcal{Q}_1(x) = -4 - 2(1+4a^2)x,$$

$$\mathcal{Q}_2(x) = \frac{4a^2(-3+4a^2)}{1+4a^2}.$$

Entonces,

$$\mathcal{Q}_0(-1) = 1 > 0,$$

$$\mathcal{Q}_1(-1) = 2(4a^2-1) > 0,$$

$$\mathcal{Q}_2(-1) = \frac{4a^2(-3+4a^2)}{1+4a^2} > 0,$$

y

$$\mathcal{Q}_0(1) = 9 > 0,$$

$$\mathcal{Q}_1(1) = -2(3+4a^2) < 0,$$

$$\mathcal{Q}_2(1) = \frac{4a^2(-3+4a^2)}{1+4a^2} > 0,$$

ya que recordemos que $a^2 > \frac{3}{4}$. Por lo tanto,

$$N(-1, 1) = N(1) - N(-1) = 2 - 0 = 2,$$

lo cual significa que hay dos raíces en el intervalo $(-1, 1)$. Como las raíces de \mathcal{Q} son raíces de \mathcal{P} y además $x = 1$ es raíz de \mathcal{P} , tenemos que \mathcal{P} tiene tres raíces en $(-1, 1]$.

Para $b \neq -2a$, la secuencia de Sturm para el polinomio \mathcal{P} viene dada por

$$\mathcal{P}_0(x) = 4(1 - a^2) - 4a(a + b)x - (3 + b^2 + 4ab)x^2 - (1 + b^2)x^3,$$

$$\mathcal{P}_1(x) = 4a(a + b) + 2(3 + 4ab + b^2)x + 3(1 + b^2)x^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(x) = & -\frac{2}{9(1+b^2)}[2(9 - 6a^2 + 3ab + 4a^3b + 9b^2 - 4a^2b^2 + ab^3) \\ & + (9 - 12a^2 + 12ab + 6b^2 + 4a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)x], \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_3(x) = -\frac{36(a-b)^2(1+b^2)f(a,b)}{(9-12a^2+12ab+6b^2+4a^2b^2-4ab^3+b^4)^2}.$$

El número de raíces en $(-1, 1)$ lo da $N(-1, 1) = N(1) - N(-1)$. Calculemos primero $N(-1)$. Evaluando los polinomios anteriores en $x = -1$ se tiene

$$\mathcal{P}_0(-1) = 2 > 0,$$

$$\mathcal{P}_1(-1) = -3 + 4a^2 - 4ab + b^2,$$

$$\mathcal{P}_2(-1) = -\frac{2}{9(1+b^2)}(9 - 6ab + 8a^3b + 12b^2 - 12a^2b^2 + 6ab^3 - b^4),$$

$$\mathcal{P}_3(-1) = -\frac{36(a-b)^2(1+b^2)f(a,b)}{(9-12a^2+12ab+6b^2+4a^2b^2-4ab^3+b^4)^2} > 0.$$

Nótese que el signo de $\mathcal{P}_3(-1)$ es positivo ya que $f(a, b) < 0$. Falta por determinar el signo de $\mathcal{P}_1(-1)$ y de $\mathcal{P}_2(-1)$. Estos resultan ser positivos. En efecto, puesto que $f(a, b) < 0$ y $f(a, b)$ se puede expresar como

$$f(a, b) = (b - 2a)^2(4a^2 - b^2 - 9) + 27(1 + b^2),$$

entonces

$$9(1 + b^2) < -\frac{1}{3}(b - 2a)^2(4a^2 - b^2 - 9). \quad (3.7)$$

Por otro lado, $\mathcal{P}_2(-1)$ es de signo contrario a la función $\eta(a, b)$ definida por

$$\eta(a, b) = 9 - 6ab + 8a^3b + 12b^2 - 12a^2b^2 + 6ab^3 - b^4,$$

y que también puede expresarse como

$$\eta(a, b) = (b - 2a)b(3 - 4a^2 + 4ab - b^2) + 9(1 + b^2).$$

Aplicando la desigualdad (3.7) y factorizando obtenemos que

$$\begin{aligned} \eta(a, b) & < (b - 2a)[b(3 - 4a^2 + 4ab - b^2) - \frac{1}{3}(b - 2a)(4a^2 - b^2 - 9)] \\ & = -\frac{2}{3}(b - 2a)(b - a)(b - 2a + 3)(b - 2a - 3). \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$f(a, 2a) = 27 + 108a^2 > 0,$$

$$f(a, a) = 3(a^2 + 3)^2 > 0,$$

$$f(a, 2a - 3) = 108(a - 1)^2 \geq 0,$$

$$f(a, 2a + 3) = 108(a + 1)^2 \geq 0,$$

entonces se tiene que las rectas $b = 2a$, $b = a$, $b = 2a - 3$ y $b = 2a + 3$ no se encuentran en las regiones I y IV. Por lo tanto, si (a, b) pertenece a alguna de estas dos regiones, entonces

$$-\frac{2}{3}(b - 2a)(b - a)(b - 2a + 3)(b - 2a - 3) < 0.$$

Por lo tanto $\eta(a, b) < 0$, y así, $\mathcal{P}_2(-1) > 0$.

Para determinar el signo de $\mathcal{P}_1(-1)$ observamos que

$$\eta(a, b) = (b - 2a)b\mathcal{P}_1(-1) + 9(1 + b^2) < 0.$$

Puesto que $(b - 2a)b > 0$, necesariamente $\mathcal{P}_1(-1) > 0$. Con esto acabamos de demostrar que $\mathcal{P}_i(-1) > 0$ para cualquier $0 \leq i \leq 3$ y por lo tanto, $N(-1) = 0$.

Calculemos ahora $N(1)$. Para ello evaluamos los polinomios de la secuencia de Sturm en $x = 1$ y obtenemos que

$$\mathcal{P}_0(1) = -2(2a + b)^2 < 0,$$

$$\mathcal{P}_1(1) = 9 + 4a^2 + 12ab + 5b^2,$$

$$\mathcal{P}_2(1) = -\frac{2}{9(1+b^2)}(27 - 24a^2 + 18ab + 8a^3b + 24b^2 - 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4),$$

$$\mathcal{P}_3(1) = -\frac{36(a-b)^2(1+b^2)f(a,b)}{(9-12a^2+12ab+6b^2+4a^2b^2-4ab^3+b^4)^2} > 0.$$

Nótese que el signo de $\mathcal{P}_0(1)$ es positivo debido a que $2a + b \neq 0$ y que el signo de $\mathcal{P}_3(1)$ es también positivo ya que $f(a, b) < 0$. Para averiguar el signo de $\mathcal{P}_1(1)$, denotamos $g(a, b)$ a la función

$$g(a, b) = 9 + 4a^2 + 12ab + 5b^2.$$

Puede verse que la curva $g(a, b) = 0$ no corta en ningún punto a $f(a, b) = 0$. Esto es sencillo de demostrar ya que $g(a, b)$ y $f(a, b)$ se anulan al mismo tiempo si y sólo si

$$12 + 148a^2 - 269a^4 + 128a^6 = 0.$$

Sin embargo, esta expresión no se anula si $a \in \mathbb{R}$, por lo que $f(a, b) = 0$ y $g(a, b) = 0$ no se cortan. De aquí se deduce que $g(a, b)$ es de signo constante cuando $f(a, b) < 0$. Puesto que $f(-1, 2) < 0$ y $g(-1, 2) > 0$, resulta que $\mathcal{P}_1(1) > 0$ cuando $f(a, b) < 0$.

Por otra parte, $\mathcal{P}_2(1)$ es de signo opuesto a la función $h(a, b)$ dada por

$$h(a, b) = 27 - 24a^2 + 18ab + 8a^3b + 24b^2 - 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4.$$

Calculemos la intersección de las curvas $f(a, b) = 0$ y $h(a, b) = 0$. Para ello, calculemos $f - h$, que se expresa como

$$f - h = -2(b - a)(b - 2a)(b^2 - 4a^2 + 3).$$

Así, $f(a, b) = h(a, b)$ si y sólo si $b = a$, $b = 2a$ ó $b = \pm\sqrt{4a^2 - 3}$, esta última válida siempre que $a^2 \geq 3/4$. Ahora bien,

$$f(a, a) = 3(a^2 + 3)^2 > 0$$

$$f(a, 2a) = 27(1 + 4a^2) > 0,$$

es decir, de aquí no se sigue la existencia de ningún punto en común a ambas curvas. No ocurre esto en los casos restantes ya que

$$f(a, \pm\sqrt{4a^2 - 3}) = 0$$

si y sólo si $a = \pm 1$. Por lo tanto, las curvas se cortan en los puntos $(a, b) = (1, -1)$ y $(a, b) = (-1, 1)$, que son puntos regulares de la curva $h(a, b) = 0$ y cuspidales de $f(a, b) = 0$. Por lo tanto, la curva $h(a, b) = 0$ se encuentra en las regiones II y III, por lo que $h(a, b)$ es de signo constante cuando $f(a, b) < 0$. Puesto que $f(-1, 2) < 0$ y $h(-1, 2) > 0$, resulta que $h(a, b) > 0$ si $f(a, b) < 0$. Por lo tanto, $\mathcal{P}_2(1) < 0$ y en consecuencia $N(1) = 3$. ■

Una vez caracterizado el número de raíces de \mathcal{P} en el intervalo $(-1, 1]$, es fácil conocer su signo.

Corolario 3.4.1. Si $(a, b) \in I \cup IV$ y

- $a < -1$ y $b > f_1(a)$, ó $a > 1$ y $b < f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene dos raíces positivas y una raíz negativa en $(-1, 1]$.

- $a = -1$ y $b > f_1(a)$, ó $a = 1$ y $b < f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz positiva y una raíz negativa en $(-1, 1]$, además de que $x = 0$ es también raíz.
- $-1 < a < 1$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz positiva y dos raíces negativas en $(-1, 1]$.
- $a = 1$ y $b > f_1(a)$, ó $a = -1$ y $b < f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene dos raíces negativas en $(-1, 1]$, además de que $x = 0$ es también raíz.
- $a > 1$ y $b > f_1(a)$, ó $a < -1$ y $b < f_2(a)$, entonces \mathcal{P} tiene tres raíces negativas en $(-1, 1]$.

Demostración.

El signo de las raíces sólo cambia a los dos lados de las rectas $a = \pm 1$. Por lo tanto, basta observar cómo son las raíces sobre $b = f_1(a)$ para saber cómo son para $b > f_1(a)$. Por el corolario 3.3.4 sabemos que si $a < -1$ y $b = f_1(a)$, entonces \mathcal{P} tiene una raíz doble positiva y otra simple negativa. Por lo tanto, para $a < -1$ y $b > f_1(a)$, \mathcal{P} tiene dos raíces positivas y otra negativa. De forma similar se razonan los demás casos. ■

Tanto el número de raíces de \mathcal{P} como el signo de las mismas quedan perfectamente caracterizados con el teorema 3.3.1 y los corolarios 3.3.1, 3.3.2, 3.3.4 y 3.4.1. Así, el plano de parámetros (a, b) queda dividido por las líneas $a^2 = 1$, $b + 2a = 0$ y $f(a, b) = 0$ como se muestra en la figura 3.4.

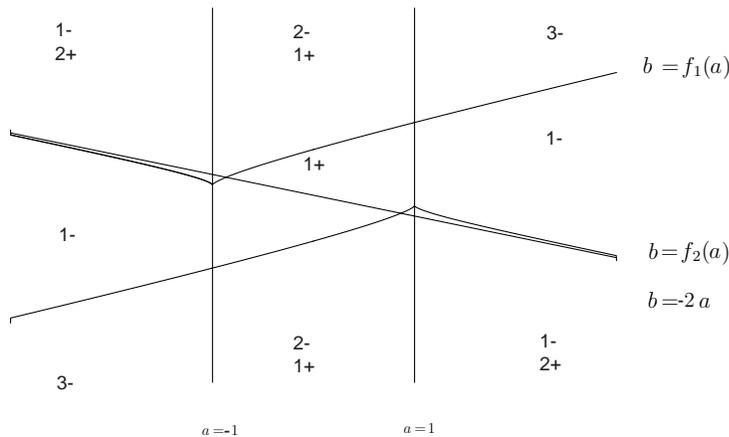


Figura 3.4: División del plano de parámetros (a, b) . En cada región se indica el número de raíces positivas (+) y negativas (-) del polinomio \mathcal{P} en el intervalo $(-1, 1]$.

3.5. Bifurcaciones paramétricas y flujo fásico

Como ya indicamos al inicio de este capítulo, el vértice de la superficie siempre constituye un equilibrio del sistema cuando $M_2 > 0$. El resto de equilibrios están en correspondencia con las raíces del polinomio \mathcal{P} en el intervalo $(-1, 1]$, de modo que si una raíz está en el intervalo $(-1, 0)$ corresponde a un equilibrio cuando $M_2 < 0$, y si una raíz está en el intervalo $(0, 1]$ corresponde a un equilibrio cuando $M_2 > 0$. En este último caso, hay una situación especial, que aparece cuando $x = 1$ es raíz de \mathcal{P} ya que ésta se corresponde con el vértice y por lo tanto ya aparece contabilizada como equilibrio.

De este modo, la división del plano de parámetros representada en la figura 3.4 da lugar a particiones diferentes según que $M_2 > 0$ ó $M_2 < 0$ cuando contabilizamos equilibrios, lo que se muestra en las figuras 3.5 y 3.6 respectivamente.

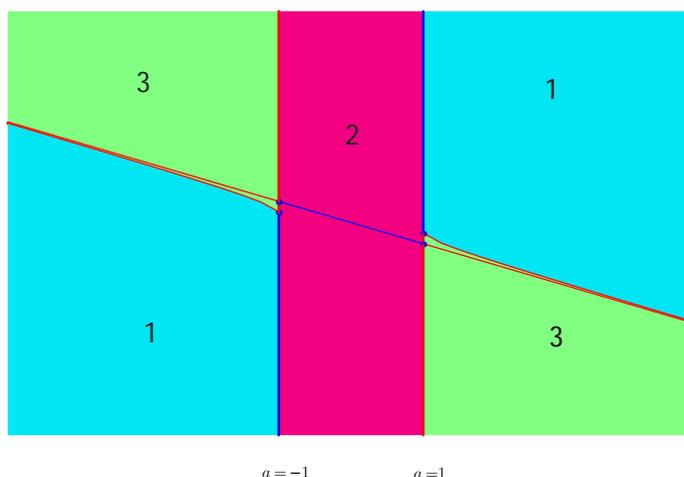


Figura 3.5: División del plano de parámetros (a, b) para $M_2 > 0$. El número que se indica en cada región indica el número de equilibrios que aparecen en la misma.

Para $M_2 > 0$, el número de equilibrios varía entre 1 y 3, uno de los cuales es el vértice de la superficie. En este caso las líneas de bifurcación son las rectas $b = -2a$, $a = 1$, $a = -1$ y las curvas $b = f_2(a)$ con $a > 1$ y $b = f_1(a)$ con $a < -1$. Salvo para la recta $b = -2a$, al atravesar cualquiera de estas líneas se produce un cambio en el número de equilibrios.

Si $M_2 < 0$, el número de equilibrios varía entre 0 y 3, y ninguno de ellos es el vértice de la superficie. Las líneas de bifurcación que aparecen son $b = f_2(a)$ para $a < 1$ y $b = f_1(a)$ para $a > -1$, así como las rectas $a = \pm 1$.

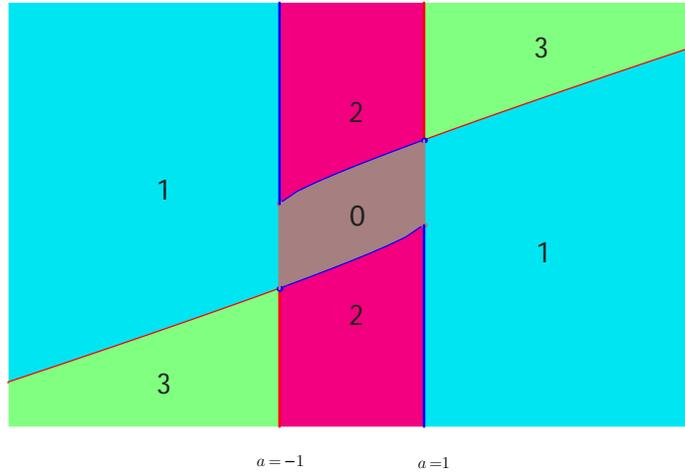


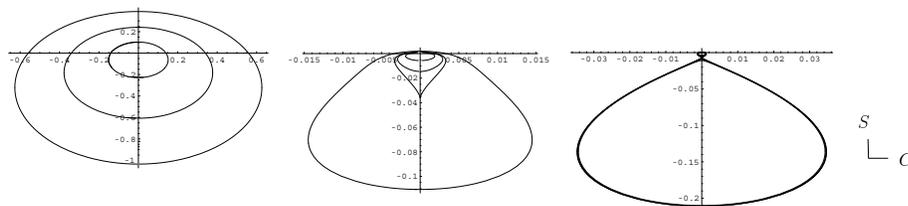
Figura 3.6: División del plano de parámetros (a, b) para $M_2 < 0$. El número que se indica en cada región indica el número de equilibrios que aparecen en la misma.

Una observación interesante, consecuencia del corolario 2.6.1, es que el número de equilibrios es par cuando los parámetros se encuentran en la zona de inestabilidad, es decir para $|a| < 1$, mientras que es impar cuando se encuentran en la zona de estabilidad $|a| > 1$. En este sentido, el carácter abierto del espacio de fases juega un papel fundamental. De hecho, hay una bifurcación cuando se cruzan las rectas $a = \pm 1$. Lo que sucede para estos valores de a es que uno de los equilibrios se localiza en el infinito y aparece o desaparece cuando se cruzan estas rectas. Como consecuencia se produce un cambio en la paridad del número de equilibrios. Teniendo en cuenta el índice de los equilibrios resulta que

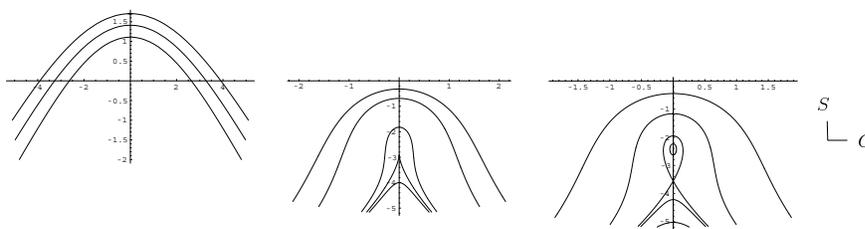
- si $|a| < 1$, entonces $\sum \text{índices} = 0$ para cualquier valor de M_2 .
- si $|a| > 1$, entonces $\sum \text{índices} = 1$ para cualquier valor de M_2 .

Es decir, la suma de índices sólo cambia si cambia la estabilidad del origen.

El resto de bifurcaciones corresponden a colisiones entre equilibrios y son de tipo silla-centro [93] cuando se atraviesan las líneas $b = f_1(a)$, $b = f_2(a)$. Aquí conviene distinguir si $|a| > 1$ ó $|a| < 1$. Si $|a| > 1$ se tiene una situación análoga a lo que en [43] se denomina *bifurcación de lágrima*. Como puede observarse en la figura 3.7 una órbita periódica degenera en otra de periodo infinito donde aparece un equilibrio de tipo parabólico, que da lugar luego a dos equilibrios, un centro y una silla.

Figura 3.7: Bifurcación de lágrima cuando $|a| > 1$.

Por otra parte, si $|a| < 1$ (nótese que sólo ocurre cuando $M_2 < 0$), la órbita que degenera es una órbita de escape en proceso análogo al descrito anteriormente y que representamos en la figura 3.8.

Figura 3.8: Bifurcación de lágrima cuando $|a| < 1$.

Finalmente, la recta $b = -2a$ (para el caso $M_2 > 0$) no constituye una línea de bifurcación propiamente dicha puesto que a ambos lados de la recta el número de equilibrios no cambia y tampoco varía la estabilidad de los equilibrios. Tanto si $a^2 < 1$ como si $a^2 > 1$ lo que ocurre es que el equilibrio inestable varía su coordenada S de tal forma que cuando atraviesa la recta $b + 2a = 0$ el signo de dicha coordenada cambia. Esto provoca un cambio en las órbitas en la dirección de S .

Como se ha dicho la estabilidad del origen no cambia al atravesar esta recta. En efecto, consideremos el correspondiente sistema lineal asociado al sistema (3.5). Éste es

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= -3C, \\ \dot{S} &= 3(2a + b)M_2C, \\ \dot{C} &= -3(2a + b)M_2S, \end{aligned} \tag{3.8}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i3|2a + b|M_2$. De aquí se deduce que el origen es un centro salvo que $2a + b = 0$, en cuyo caso $\lambda = 0$ es un valor propio triple y entonces el origen resulta de tipo parabólico.

La bifurcación que se produce tiene que ver en este caso con órbitas homoclínicas. Así, uno de los lóbulos de la órbita homoclínica colapsa y luego pasa al interior del otro lóbulo como en la figura 3.9.

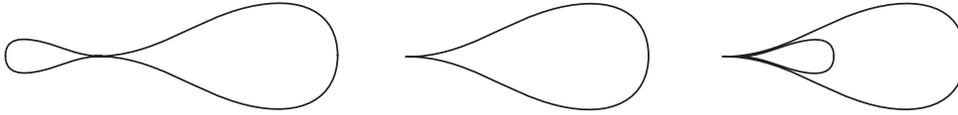


Figura 3.9: Bifurcación en $b + 2a = 0$.

Con esto hemos completado el análisis de las bifurcaciones que aparecen en el plano de parámetros (a, b) para el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = aM_1^2 + bM_1M_2 + S. \quad (3.9)$$

Ahora bien, como se indicó al principio del capítulo, este hamiltoniano es un caso particular de uno más general, que es

$$\mathcal{H} = a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2 + \gamma S. \quad (3.10)$$

Así, cuando $\gamma \neq 0$, la dinámica del hamiltoniano (3.10) es la misma que la del hamiltoniano (3.9) cuando se definen a y b como en (3.4).

Sin embargo, cuando $\gamma = 0$, el hamiltoniano (3.10) se escribe

$$\mathcal{H} = a_{20}M_1^2 + a_{11}M_1M_2,$$

y su dinámica fue estudiada al principio del capítulo. En este caso, el vértice de la superficie es siempre un equilibrio estable y además aparece una circunferencia de equilibrios no aislados cuando $M_2 > 0$ y $\frac{a_{11}}{2a_{20}} \leq 1$, ó bien cuando $M_2 < 0$ y $\frac{a_{11}}{2a_{20}} \geq 1$.

Con objeto de completar el estudio de las bifurcaciones es preciso analizar cómo ocurre la transición entre $\gamma = 0$ y $\gamma \neq 0$ (recordemos que además $\gamma \geq 0$). Si $\gamma \rightarrow 0^+$, entonces $a, b \rightarrow \pm\infty$ dependiendo del signo de a_{20} y a_{11} . Además

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{a_{11}}{a_{20}}.$$

Comencemos analizando el caso $M_2 > 0$. Sabemos que cuando

$$(a, b) \rightarrow (\pm\infty, \pm\infty),$$

el sistema posee como único equilibrio el vértice, que degenera en un círculo de equilibrios cuando $\gamma \rightarrow 0^+$. Más interesante resulta analizar qué ocurre

cuando $(a, b) \rightarrow (\pm\infty, \mp\infty)$. En este caso, el sistema posee tres equilibrios, dos estables, entre los cuales está el vértice, y un tercero que es inestable (ver figura 3.10). Precisamente del punto inestable emanan dos órbitas homoclínicas, cada una de las cuales contiene uno de los dos equilibrios estables. Además, la homoclínica que encierra al vértice está contenida en la otra homoclínica. A medida que $\gamma \rightarrow 0^+$, la homoclínica que contiene al vértice aumenta de tamaño mientras que la otra homoclínica disminuye hasta que llega un momento en el que ambas coinciden. Todos los puntos de esta órbita son equilibrios no aislados y por lo tanto aparece una degeneración. Esta bifurcación recibe el nombre de *bifurcación de la ostra* [24, 43].

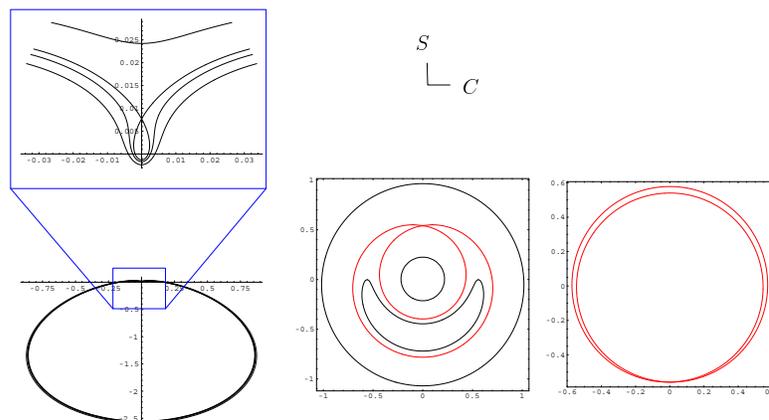


Figura 3.10: Bifurcación de ostra.

La misma transición aparece cuando $M_2 < 0$. La única diferencia con respecto a la anterior está en que cuando $\gamma \rightarrow 0^+$, un equilibrio estable se va aproximando al vértice hasta que coincide con él. Tanto en este caso como en el anterior el conjunto de equilibrios no aislados puede desaparecer o incluso modificar el tipo de bifurcación cuando se consideran términos de mayor orden.

Para completar, adjuntamos las figuras 3.11 y 3.12 donde se muestran los distintos flujos cuando $M_2 = 1$ (caso $M_2 > 0$) y cuando $M_2 = -1$ (caso $M_2 < 0$). En cada caso se han representado los flujos para $a > 0$, distinguiendo cuando $a > 1$ de cuando $0 < a < 1$, y dando un valor apropiado de b de modo que (a, b) recorra cada una de las regiones en las que queda dividido el plano de parámetros. Los flujos para $a < 0$ no se incluyen puesto que son simétricos a los que ocurren para $a > 0$.

Finalmente, incluimos la figura 3.13, que recoge los cuatro tipos fundamentales de flujos que aparecen si consideramos los casos $M_2 > 0$ y $M_2 < 0$.

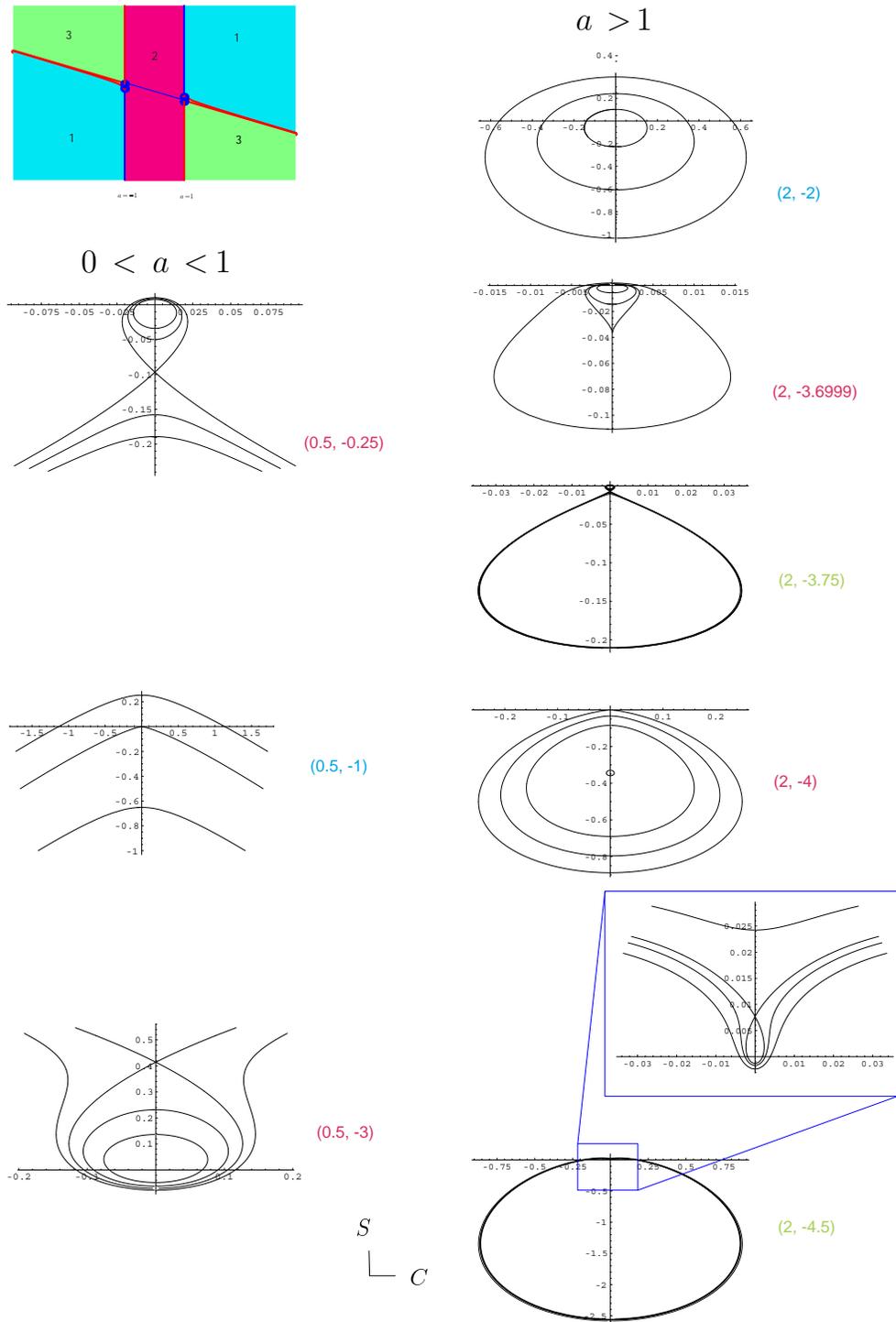


Figura 3.11: Para $M_2 = 1$ y $a > 0$, diferentes flujos proyectados sobre el plano $M_1 = 0$. Cada flujo corresponde a una zona del plano paramétrico, distinguiendo si $a^2 < 1$ ó $a^2 > 1$. A la derecha de cada flujo se escriben los valores de (a, b) en el mismo color que la zona del plano paramétrico correspondiente.

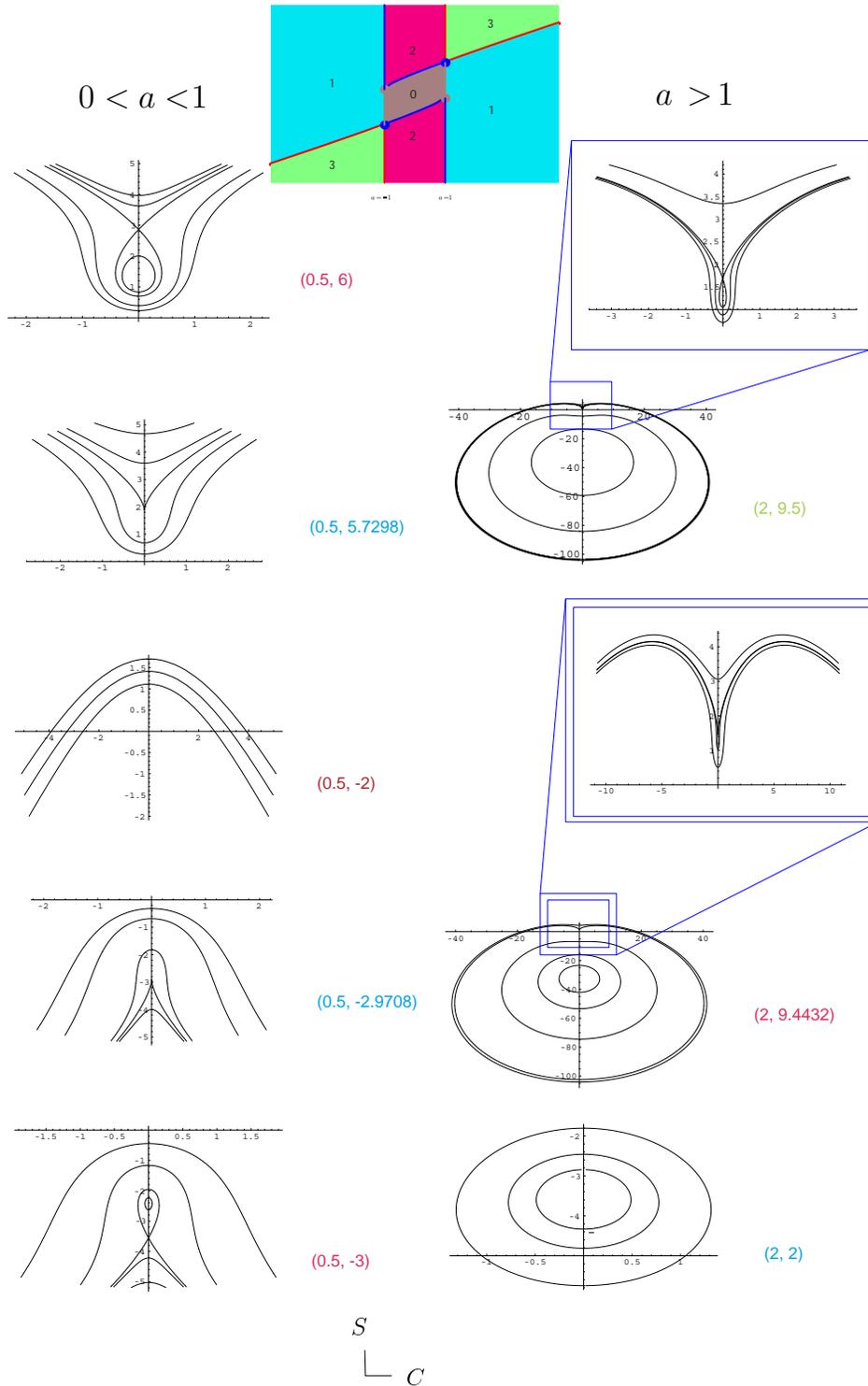


Figura 3.12: Para $M_2 = -1$ y $a > 0$, diferentes flujos proyectados sobre el plano $M_1 = 0$. Cada flujo corresponde a una zona del plano paramétrico, distinguiendo si $a^2 < 1$ ó $a^2 > 1$. A la derecha de cada flujo se escriben los valores de (a, b) en el mismo color que la zona del plano paramétrico correspondiente.

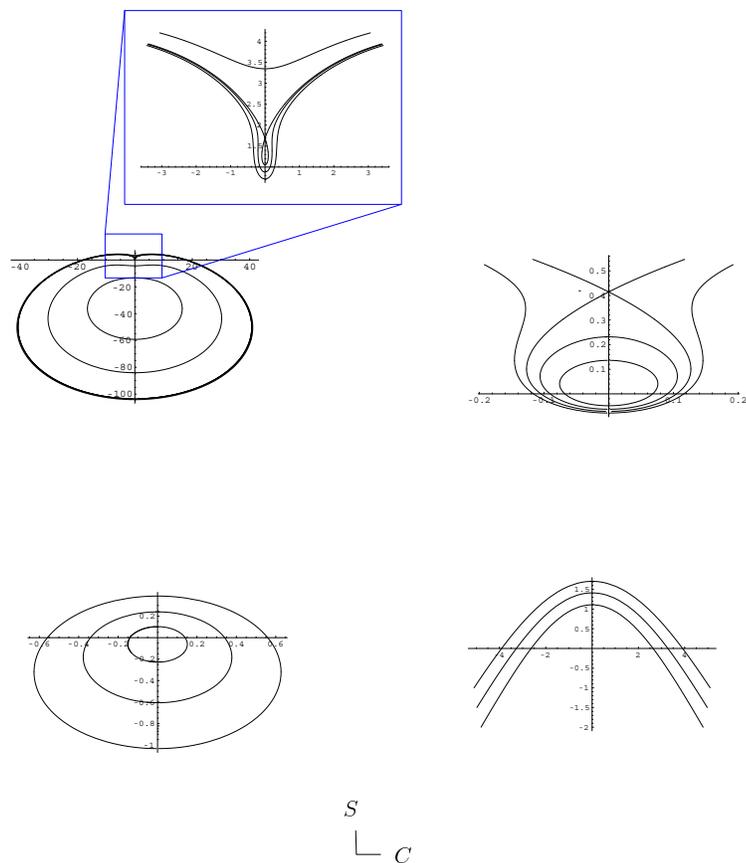


Figura 3.13: Los cuatro tipos diferentes de flujos dependiendo del número de equilibrios proyectados en el plano $M_1 = 0$.

Conclusiones

La principal aportación de esta memoria ha sido la obtención y correspondiente demostración de un criterio geométrico que engloba al teorema de Cabral y Meyer y que permite deducir la estabilidad del origen en sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad en presencia de resonancias mediante consideraciones geométricas. El criterio geométrico es más general que el resultado de Cabral y Meyer en el sentido de que la estabilidad del origen no necesariamente se ha de deducir de \mathcal{H}_s , es decir, del término de la forma normal de \mathcal{H} correspondiente al orden de la resonancia, sino que puede deducirse de cualquier \mathcal{H}_k con $k \geq s$ que verifique la condición de ser el primer término de la forma normal que no sea idénticamente nulo cuando $\Phi_2 = 0$. Realmente el teorema de Cabral y Meyer puede generalizarse de la misma forma sin más que considerar en sus hipótesis el primer \mathcal{H}_k no nulo cuando $\Psi_1 = \omega_2$ y $\Psi_2 = \omega_1$.

Para la demostración del resultado han sido de especial utilidad las variables de Lissajous. Por un lado, dichas variables permiten encontrar un conjunto de invariantes adecuados en los que poder representar el espacio fásico reducido. Por otro, las variables de Lissajous han sido utilizadas como una parametrización de dicho espacio. Tras el proceso de normalización una de las dos variables, Φ_2 , se convierte en una integral formal, lo que resulta clave para la demostración del criterio geométrico. En lugar de realizar una reducción isoenergética y considerar la estabilidad del origen sobre la superficie $\mathcal{H} = 0$, la manera clásica de proceder, se considera la estabilidad del origen sobre la superficie $\Phi_2 = 0$.

Además de éstas, se han realizado otras aportaciones, como son

- dar una caracterización compacta de la forma normal en términos de invariantes.
- establecer la relación entre la función $\Psi(\psi)$ del teorema de Cabral y Meyer y la función $G(2nm\phi_1)$ del criterio geométrico.
- enunciar un criterio general de estabilidad para resonancias de orden

par e impar cuando se satisfacen las condiciones del teorema de Cabral y Meyer.

- enunciar un criterio de estabilidad para el caso de una resonancia 1:2 en un caso de degeneración que no satisface las hipótesis del teorema de Cabral y Meyer y sí las del criterio geométrico.
- comprobar que el criterio geométrico también es válido para ciertos casos degenerados, como los que aparecen en resonancias de orden par. En particular, el tratado por Markeev para una resonancia 1:3.
- caracterizar el flujo fásico para el caso de una resonancia 1:3, determinando equilibrios relativos y bifurcaciones paramétricas. Para ello hemos utilizado una técnica basada en el discriminante de un polinomio que puede exportarse a otros problemas.

El trabajo aquí expuesto nos abre varias vías de investigación para el futuro. La primera de ellas consiste en estudiar los casos degenerados que se producen cuando para una resonancia de orden s , algún \mathcal{D}_k ($k \geq s$) no es idénticamente nulo y, sin embargo, no es suficiente para determinar la estabilidad del origen. Precisamente esto ocurre cuando la función $\Psi(\psi)$ tiene todos los ceros múltiples, situación que en el criterio geométrico se reproduce cuando las dos superficies \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son tangentes. En este caso, el origen no es un equilibrio aislado sino que forma parte de un conjunto denso de equilibrios. La estabilidad del origen dependerá de cómo los términos de orden superior rompan la degeneración.

En segundo lugar, puesto que el espacio fásico reducido que aparece cuando tratamos el problema de las resonancias es una superficie abierta, quedan pendientes algunas cuestiones que creemos pueden resolverse mediante una compactificación del espacio fásico reducido como espacio topológico.

Por último, tomando como idea básica la clasificación de las bifurcaciones paramétricas de la resonancia 1:3, un problema interesante sería describir las bifurcaciones paramétricas para una resonancia 1: p con p impar.

Apéndice A

Algunos resultados sobre polinomios

La cuestión del número de raíces reales de una ecuación algebraica en un intervalo dado se resuelve completamente por el Método de Sturm [89, 96]. Antes de enunciar este resultado, introduzcamos primero la noción del número de cambios de signo en un conjunto de números, que es necesario conocer para entender el Método de Sturm.

Definición A.0.1. Supongamos un conjunto finito ordenado de números reales distintos de cero,

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \quad (n \geq 2) \tag{A.1}$$

Diremos que existe *un cambio de signo para un par de dos elementos sucesivos* c_k, c_{k+1} de (A.1) si los elementos tienen signos opuestos, es decir, si

$$c_k c_{k+1} < 0,$$

y que no existe cambio de signo si los signos son los mismos, es decir, si

$$c_k c_{k+1} > 0.$$

El número total de cambios de signos en todos los pares de elementos sucesivos c_k, c_{k+1} ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) de (A.1) se denomina *número de cambios de signo (variaciones de signo) en (A.1)*.

Definición A.0.2. Dado un polinomio $p(x)$, llamamos *secuencia de Sturm* al conjunto

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$$

donde

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x), \\ p_1(x) &= -p'(x), \end{aligned}$$

$p_2(x)$ es el resto, con signo opuesto, que queda de la división del polinomio $p_0(x)$ por $p_1(x)$, $p_3(x)$ es el resto, con signo opuesto, de la división del polinomio $p_1(x)$ por $p_2(x)$, y así sucesivamente.

Nota A.0.1. Denotaremos por $N(c)$ al número de cambios de signo en una secuencia de Sturm para $x = c$, dando por supuesto que los elementos cero de la secuencia han sido eliminados.

Teorema A.0.1. (*Teorema de Sturm*) Si un polinomio $p(x)$ no tiene raíces múltiples y $p(c_1) \neq 0$, $p(c_2) \neq 0$, el número de sus raíces reales $N(c_1, c_2)$ en el intervalo $c_1 < x < c_2$ es exactamente igual al número de cambios de signo perdidos en la secuencia de Sturm del polinomio $p(x)$ yendo de $x = c_2$ a $x = c_1$, esto es,

$$N(c_1, c_2) = N(c_2) - N(c_1).$$

Como la construcción de una secuencia de Sturm lleva implícitos por lo general muchos cálculos tediosos, en la práctica, normalmente, se utilizan técnicas particulares más simples para contar el número de raíces reales de las ecuaciones algebraicas.

Una primera aproximación para encontrar raíces de un polinomio $p(x)$ en un intervalo (c_1, c_2) la da el *teorema de Bolzano*. Evaluando $p(c_1)$ y $p(c_2)$, si resulta que $p(c_1)p(c_2) < 0$, entonces podemos afirmar que existe al menos una raíz real localizada en dicho intervalo (c_1, c_2) .

Entre los resultados más importantes sobre raíces de polinomios podemos citar la Regla de los signos de Descartes [16, 70] y algunos resultados ligados al concepto del discriminante de un polinomio [30, 88, 95].

Teorema A.0.2. (*Regla de los signos de Descartes*) El número de raíces positivas (contando las multiplicidades) de una ecuación algebraica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0)$$

es igual al número de variaciones de signo en la secuencia de coeficientes

$$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0,$$

o menor que el anterior número en un entero par. Si alguno de los coeficientes es igual a 0, no se cuenta.

Definición A.0.3. Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ un polinomio mónico de grado n en x con coeficientes reales. El discriminante de $p(x)$ se define como

$$\mathcal{D}(p) = (r_1 - r_2)^2 \cdots (r_1 - r_n)^2 (r_2 - r_3)^2 \cdots (r_2 - r_n)^2 \cdots (r_{n-1} - r_n)^2,$$

siendo r_i las raíces de $p(x)$ para $1 \leq i \leq n$.

Corolario A.0.1. Si $p(x)$ tiene alguna raíz múltiple, entonces $\mathcal{D}(p) = 0$.

Teorema A.0.3. Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomio mónico de tercer grado. Se tiene que

- $\mathcal{D}(p) > 0 \iff p(x)$ posee tres raíces reales y distintas.
- $\mathcal{D}(p) < 0 \iff p(x)$ posee una raíz real y dos complejas conjugadas.
- $\mathcal{D}(p) = 0 \iff p(x)$ posee tres raíces reales, alguna de ellas múltiple.

Demostración.

Denotemos r_1, r_2 y r_3 a las tres raíces del polinomio $p(x)$. Por la definición A.0.3, el discriminante para este polinomio $p(x)$ puede expresarse como

$$\mathcal{D}(p) = (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2. \quad (\text{A.2})$$

Como $p(x)$ es de grado 3, al menos una de las raíces es real, así que supondremos que, por ejemplo, r_3 es real. Comenzamos por probar la primera equivalencia.

\Leftarrow) Si las tres raíces son reales y distintas, es evidente que $\mathcal{D}(p) > 0$, sin más que observar la expresión (A.2).

\Rightarrow) A partir de la expresión (A.2) es evidente que si $\mathcal{D}(p) > 0$, entonces no pueden aparecer raíces múltiples y, por lo tanto, todas son distintas. Falta probar ahora que las tres raíces son reales. Lo haremos por reducción al absurdo. Si alguna de las raíces no fuera real, pongamos r_1 , también sería raíz de $p(x)$ su conjugada, es decir, \bar{r}_1 . Por lo tanto, $r_2 = \bar{r}_1$. Si definimos

$$\Lambda = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_3),$$

se verifica que, $\Lambda \neq 0$ ya que las tres raíces son distintas, y que

$$\bar{\Lambda} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)(\bar{r}_1 - \bar{r}_3)(\bar{r}_2 - \bar{r}_3) = (r_2 - r_1)(r_2 - r_3)(r_1 - r_3) = -\Lambda$$

ya que $\bar{r}_1 = r_2$, $\bar{r}_2 = r_1$ y $\bar{r}_3 = r_3$. Ahora bien, como $\mathcal{D}(p) = \Lambda^2$ y $\Lambda = -\bar{\Lambda}$, tenemos que $\mathcal{D}(p) = \Lambda^2 = -\Lambda\bar{\Lambda} = -|\Lambda|^2 < 0$.

Las otras dos equivalencias son evidentes a partir de ésta. ■

Se puede conseguir otra formulación del discriminante en términos de los coeficientes del polinomio mediante la conocida fórmula de Sylvester [96]. En las mismas condiciones para $p(x)$ que antes, tenemos que

$$\mathcal{D}(p) = s \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdots & (n-1)a_{n-1} & n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & \cdots & (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & n & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 & 2a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix},$$

con $s = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. El determinante anterior tiene $2n - 1$ filas y $2n - 1$ columnas. En las primeras $n - 1$ filas aparecen los coeficientes de $p(x)$ y en las n filas siguientes aparecen los coeficientes de $p'(x)$.

En particular, para $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, polinomio mónico de grado 3, se tiene que

$$\mathcal{D}(p) = - \begin{vmatrix} c & b & a & 1 & 0 \\ 0 & c & b & a & 1 \\ b & 2a & 3 & 0 & 0 \\ 0 & b & 2a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2a & 3 \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \quad (\text{A.3})$$

Bibliografía

- [1] Abraham, R., Marsden, J. E., *Foundations of mechanics*, The Benjamin–Cummings Publishing Company, London, 1981.
- [2] Alfriend, K. T., Stability and motion about L_4 at three-to-one commensurability, *Celestial Mechanics*, **4**, 60–77, 1971.
- [3] Alfriend, K. T., The stability of the triangular Lagrangian points for commensurability of order two, *Celestial Mechanics*, **1**, 351–359, 1970.
- [4] Anosov, D. V., Arnold, V. I., *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. **1**, Springer–Verlag, New York, 1988.
- [5] Arnold, V. I., *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. **3**, Springer–Verlag, New York, 1988.
- [6] Arnold, V. I., The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case, *Soviet Math. Dokl.*, **2**, 247–249, 1961.
- [7] Arnold, V. I., Small denominators and problems on the stability of motions in the classical and celestial mechanics, *Uspehy Math. Nauk*, **18**, **6**, 91–192, 1963.
- [8] Arribas, M., Elipe, A., Saura, A., Quadratic Hamiltonians on pinched spheres, *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **25**, 49–58, 2004.
- [9] Bardin, B., Comunicación privada.
- [10] Bialynicki–Birula, I., Kalinski, M., Eberly, J. H., Lagrange equilibrium points in celestial mechanics and nonspredings wave packets for strongly driven Rydberg electrons, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1777–1780, 1994.
- [11] Binney, J., Tremaine, S., *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

- [12] Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.
- [13] Brauer, F., Nohel, J. A., *The qualitative theory of ordinary differential equations: An Introduction*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- [14] Cabral, H., Diacu, F., *Classical and Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2002.
- [15] Cabral, H. E., Meyer, K. R., Stability of equilibria and fixed points of conservative systems, *Nonlinearity*, **12**, 1351–1362, 1999.
- [16] Demidovich, B. P., Maron, I. A., *Cálculo Numérico Fundamental*, Paraninfo, 1977.
- [17] Deprit, A., Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **1**, 12–30, 1969.
- [18] Deprit, A., The Lissajous transformation I. Basics, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **51**, 202–225, 1991.
- [19] Deprit, A., Deprit–Bartholomé, A., Stability of the triangular Lagrangian points, *Astron. J.*, **72**, 173–179, 1967.
- [20] Deprit, A., López–Moratalla, T., Estabilidad orbital de satélites estacionarios, *Revista Matemática de la Universidad Complutense*, **9**, **2**, 311–333, 1996.
- [21] Elipe, A., Complete reduction of oscillators in resonance $p:q$, *Phys. Rev. E*, **61**, 6477–6484, 2000.
- [22] Elipe, A., Extended Lissajous variables for oscillators in resonance, *Mathematics and Computers in Simulation*, **57**, 217–226, 2001.
- [23] Elipe, A., Deprit, A., Oscillators in resonance, *Mech. Res. Commun.*, **26**, 635–640, 1999.
- [24] Elipe, A., Ferrer, S., Reductions, relative equilibria and bifurcations in the generalized van der Waals potential: Relation to the integrable cases, *Physical Review Letters*, **72**, 985–988, 1994.
- [25] Elipe, A., Lanchares, V., Biparametric Quadratic Hamiltonians on the Unit Sphere: Complete Clasification, *Mechanics Research Communications*, **21**, 209–214, 1994.

- [26] Elipe, A., Lanchares, V., López–Moratalla, T., Riaguas, A., Non linear stability in resonant cases: A geometrical approach, *The Journal of Non-linear Science*, **11**, 211–222, 2001.
- [27] Elipe, A., López–Moratalla, T., Riaguas, A., Estabilidad orbital en casos resonantes, *Monografías del Seminario Matemático García Galdeano*, **21**, 103–110, 2001.
- [28] Elipe, A., Riaguas, A., Nonlinear stability under a logarithmic gravity field, *Intern. Math. Journal*, **3**, **4**, 435–453, 2003.
- [29] Fernández, C., Vegas, J. M., *Ecuaciones diferenciales II*, Pirámide, España, 1996.
- [30] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., Zelevinsky, A. V., *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser Boston, U.S.A., 1994.
- [31] Glendinning, P., *Stability, instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, Cambridge University Press, U.S.A., 1994.
- [32] Goldstein, H., *Mecánica clásica*, Editorial Reverté, España, 1996.
- [33] Goździewski, K., Stability of the triangular libration points in the unrestricted planar problem of a symmetric rigid body and a point mass, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **85**, 79–103, 2003.
- [34] Goździewski, K., Maciejewski, A., Unrestricted planar problem of a symmetric body and a point mass. Triangular libration points and their stability, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **75**, 251–285, 1999.
- [35] Gustavson, F. G., On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point, *The Astronomical Journal*, **71**, 670–686, 1966.
- [36] Hallan, P. P., Jain, S., Bhatnagar, K. B., The non–linear stability of L_4 in the restricted three–body problem when the bigger primary is a triaxial rigid body, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **77**, 157–184, 2000.
- [37] Howard, J. E., MacKay, R. S., Calculation of linear stability boundaries for equilibria of Hamiltonian Systems, *Phys. Lett. A*, **122**, 331–334, 1987.

- [38] Hirsch, M. W., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [39] Iñarrea, M., Lanchares, V., Palacián, J. F., Pascual, A. I., Salas, J. P., Yanguas, P., The Keplerian regime of charged particles in planetary magnetospheres, *Physica D*, **197**, 242–268, 2004.
- [40] Ishwar, B., Elipe, A., Secular solutions at triangular equilibrium points in the generalized photogravitational restricted three body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **277**, 437–446, 2001.
- [41] Kamel, A. A., Expansion Formulae in Canonical Transformations depending on a Small Parameter, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **1**, 191–199, 1969.
- [42] Lagrange, J. L., Essai sur le problème des trois corps, *Ouvres. Gauthier-Villars, Paris*, **6**, 272–292, 1972.
- [43] Lanchares, V., *Sistemas dinámicos bajo la acción del grupo $SO(3)$: El caso de un hamiltoniano cuadrático*, Tesis doctoral, Zaragoza, 1993.
- [44] Lanchares, V., Elipe, A., Bifurcations in biparametric quadratic potentials, *Chaos*, **5**, 367–373, 1995.
- [45] Lanchares, V., Elipe, A., Bifurcations in biparametric quadratic potentials II, *Chaos*, **5**, 531–535, 1995.
- [46] Lanchares, V., Elipe, A., Iñarrea, M., Salas, J. P., Sierra, J. D., Surfaces of bifurcation in a triparametric quadratic Hamiltonian, *Physical Review E*, **52**, 5540–5548, 1995.
- [47] Lanchares, V., López-Moratalla, T., Farrelly, D., *Lyapunov stability for Lagrange equilibria of orbiting dust*, US-European Celestial Mechanics Workshop, Poznan (Polonia), 2000.
- [48] Lanchares, V., López-Moratalla, T., Pascual, A. I., Salas, J. P., Iñarrea, M., *Equilibrios lagrangianos y dinámica de una partícula de polvo orbitando*, No Lineal 2000, Almagro (Ciudad Real), mayo-junio 2000.
- [49] Lanchares, V., Palacián, J., Pascual, A. I., Salas, J. P., Yanguas, P., Perturbed ion traps: A generalization of the three-dimensional Hénon-Heiles problem, *Chaos*, **12**, 87–99, 2002.

- [50] Lanchares, V., Pascual, A. I., Stability of equilibria of 2-D resonant Hamiltonian systems: a geometrical approach, *Monografías del Seminario Matemático García Galdeano*, **27**, 377–383, 2003.
- [51] La Salle, J., Lefschetz, S., *Stability by Lyapunov's Direct Method With Applications*, Academic Press Inc., New York, 1961.
- [52] Lee, E., Brunello, F., Farrelly, D., Single atom quasi-Penning trap, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3641–3643, 1995.
- [53] Lee, E., Brunello, F., Farrelly, D., Coherent states in a Rydberg atom: Classical mechanics, *Phys. Rev. A.*, **55**, 2203–2221, 1997.
- [54] Leontovich, A. M., On the stability of the Lagrange periodic solutions for the reduced problem of three bodies, *Soviet Math. Dokl.*, **3**, 425–429, 1962.
- [55] Lichtenberg, A., Lieberman, M. A., *Regular and chaotic dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [56] López-Moratalla, T., *Estabilidad orbital de satélites estacionarios*, Tesis doctoral, Zaragoza, 1997.
- [57] López-Moratalla, T., Elipe, A., Estabilidad no lineal de satélites estacionarios en resonancia, *Métodos de dinámica orbital y rotacional*, 39–46, 2002.
- [58] Markeev, A. P., On the stability of triangular libration points in the circular bounded three-body problem, *Prikl. Mat. Mech.*, **33**, **1**, 112–116, 1969.
- [59] Markeev, A. P., Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance, *Prikl. Mat. Mech.*, **32**, **4**, 738–744, 1968.
- [60] Markeev, A. P., The critical case of fourth-order resonance in a Hamiltonian system with one degree of freedom, *J. Appl. Maths Mechs*, **61**, **3**, 355–361, 1997.
- [61] Markeev, A. P., The problem of the stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system at 3:1 resonance, *J. Appl. Maths Mechs*, **65**, **4**, 639–645, 2001.

- [62] Markeev, A. P., Bardin, B. S., On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit, *Celestial Mechanics and Dynamical Systems*, **85**, 51–66, 2003.
- [63] Merkin, D. R., *Texts in Applied Mathematics: Introduction to the Theory of Stability*, **24**, Springer–Verlag, New York, 1997.
- [64] Meyer, K. R., Hall, G. R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N–Body Problem*, Springer–Verlag, New York Inc., 1991.
- [65] Meyer, K. R., Schmidt, D. S., The Stability of the Lagrange Triangular Point and a Theorem of Arnold, *Journal of Differential Equations*, **62**, 222–236, 1986.
- [66] Moser, J., On invariant curves of area–preserving mapping of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math. Phys.*, **K1, II**, 1–20, 1962.
- [67] Nayfeh, A. H., Kamel, A. A., Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies, *AIAA Journal*, **8, 2**, 221–223, 1970.
- [68] Nayfeh, A. H., Kamel, A. A., Three–to–One resonances near the equilateral libration points, *AIAA Journal*, **8, 12**, 2245–2251, 1970.
- [69] Nayfeh, A. H., Two–to–One resonances near the equilateral libration points, *AIAA Journal*, **9, 1**, 23–27, 1971.
- [70] Pólya, G., Szegő, G., *Problems and Theorems in Analysis*, **II**, Springer–Verlag, New York, 1976.
- [71] Rassias, J. M., *Counter examples in differential equations and related topics*, Word Scientific, Singapore, 1991.
- [72] Recio, T., La columna de Matemática Computacional, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, **1, 1**, 105–111, 1998.
- [73] Riaguas, A., *Dinámica orbital alrededor de cuerpos celestes con forma irregular*, Tesis doctoral, Zaragoza, 1999.
- [74] Riaguas, A., Elipe, A., López–Moratalla, T., Non–linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **81**, 235–248, 2001.
- [75] Russman, H., On the stability of an equilibrium solution in Hamiltonian systems of two degrees of freedom, *Instabilities in Dynamical Systems*, 303–305, 1976.

- [76] Salas, J. P., Iñarrea, M., Lanchares, V., Pascual, A. I., Electronic traps in a circularly polarized microwave field and a static magnetic field: Stability analysis, *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **14**, 114–118, 1999.
- [77] Sánchez, D. A., *Ordinary Differential Equations And Stability Theory: An Introduction*, Dover Publications Inc., New York, 1979.
- [78] Sanders, J. A., Verhulst, F., *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, **59**, Springer–Verlag, New York, 1985.
- [79] San Juan Díaz, J. F., *Manipulación algebraica de series de Poisson. Aplicación a la teoría del satélite artificial*, Tesis Doctoral, Zaragoza, 1997.
- [80] San Juan, J. F., Lara, M., Ferrer, S., *Phase space structure around planetary satellites*, AIAA 2004-4863 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, 12-19 agosto 2004.
- [81] Schmidt, D. S., The stability of the Lagrangian point L_4 , *Celestial Mechanics*, **45**, 201–206, 1989.
- [82] Schmidt, D. S., Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system, *Celestial Mechanics*, **9**, 81–103, 1974.
- [83] Sharma, R. K., Existence and stability of libration points in the restricted three–body problem when the primaries are triaxial rigid bodies, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **79**, 119–133, 2001.
- [84] Siegel, C. L., Moser, L. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1971.
- [85] Sokolsky, A. G., On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies, *Prikl. Mat. Mech.*, **38**, **5**, 791–799, 1974.
- [86] Sokolsky, A. G., On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom under first–order resonance, *Prikl. Mat. Mech.*, **41**, **1**, 24–33, 1977.
- [87] Sokolsky, A. G., Stability of the Lagrange solutions of the restricted three–body problem for the critical ratio of the masses, *Prikl. Mat. Mech.*, **39**, **2**, 366–369, 1975.

- [88] Spindler, K., *Abstract algebra with applications*, **2**, Darmstadt, 1994.
- [89] Stoer, J., Bulirsch, R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer–Verlag, New York, 1980.
- [90] Thakur, A. P., Singh R. B., Stability of the triangular libration points of the circular restricted problem in the presence of resonances, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **66**, 191–202, 1997.
- [91] Van der Meer, J. C., *The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Lecture Notes in Math. 1160*, Springer–Verlag, New York, 1985.
- [92] Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer–Verlag, New York, 1991.
- [93] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer–Verlag, New York, 1990.
- [94] Williamson, J., On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems, *American Journal of Mathematics*, **58**, 141–163, 1936.
- [95] Yan, L., Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials, *J. Symbolic Computation*, **28**, 225–242, 1999.
- [96] Yap, C. K., *Fundamental problems of algorithmic algebra*, Oxford University Press, New York, 2000.